

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Propriedades Estruturais de Grafos
Matrogênicos**

por

Nelson de Assis Junior

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Porto Alegre, janeiro de 2023

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Junior, Nelson de Assis

Propriedades Estruturais de Grafos Matrogênicos / Nelson de Assis Junior.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2023.

89 p.: il.

Dissertação (mestrado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2023.

Orientador: Trevisan, Vilmar

Dissertação: Matemática Aplicada: Matemática Discreta, matroides, grafos matrogênicos, localização de autovalores,

Propriedades Estruturais de Grafos Matrogênicos

por

Nelson de Assis Junior

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Profa. Dra. Juliane Capaverde
UFRGS

Prof. Dr. Carlos Hoppen
UFRGS

Prof. Dr. André Ebling Brondani
UFF

Dissertação apresentada e aprovada em
dezembro de 2022.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

“Sonhos podem se tornar realidade.”

(Izuku, Midoriya)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por tornar esse momento possível, por me dar toda saúde, força e sabedoria indispensáveis durante minha trajetória.

Em especial, quero agradecer meu orientador, Professor Vilmar Trevisan, por ter me dado essa oportunidade de trabalharmos juntos e por sua disposição ao me orientar. Por sempre me incentivar e acreditar em mim. Espero algum dia seguir seu exemplo.

Aos meus pais, meus maiores heróis, que sempre incentivaram meus estudos e batalham para que eu consiga seguir meu sonho. Obrigado por todo o amor e apoio incondicional.

Agradeço a meus amigos e colegas que de alguma fizeram parte dessa jornada. Obrigado por todo o companheirismo, amizade e pelos bons momentos que passamos juntos.

Por fim, gostaria de agradecer à banca examinadora por, prontamente, aceitar o convite. E a todos os professores do PPGMAp que tive contato, por contribuir com meu desenvolvimento profissional e pessoal.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS	xi
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	7
2.1 Teoria de Grafos	7
2.2 Teoria Espectral de Grafos	20
2.3 Matroides	23
3 GRAFOS MATROGÊNICOS	30
3.1 Grafos Matrogênicos	30
3.2 Caracterizações	34
3.2.1 Caracterizando os Grafos Matrogênicos	34
3.2.2 Caracterizando os Grafos Matrogênicos Split	46
4 ALGORITMO DE LOCALIZAÇÃO DE AUTOVALORES	53
4.1 A Decomposição Esperta em Clique	53
4.2 Algoritmo <i>Diagonalize</i>	59

4.2.1	Descrição do Algoritmo	60
5	A LARGURA ESPERTA EM CLIQUE DE GRAFOS MATROGÊ- NICOS	74
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87

LISTA DE FIGURAS

1.1	Antiga cidade de Königsberg.	1
1.2	Exemplo de um grafo.	2
1.3	Fluxograma do trabalho.	5
2.1	Exemplo de um grafo.	7
2.2	Exemplo de um grafo vazio.	8
2.3	Exemplo de grafos isomorfos.	9
2.4	Exemplos de grafos cíclicos.	10
2.5	O Grafo H é um subgrafo induzido de G	11
2.6	Um grafo e seu grafo complementar.	11
2.7	Exemplos de grafos completos.	12
2.8	Exemplo de uma clique e um conjunto estável.	12
2.9	Grafo $4K_2$	14
2.10	Grafo $CP(8)$	15
2.11	Rede e complemento de rede de ordem 3.	16
2.12	Exemplo de árvore enraizada.	16
2.13	Caminhos P_2 e P_4 , respectivamente.	17
2.14	União e junção de K_1 e K_3 , respectivamente.	18
2.15	Exemplo de um cografo e sua córvore.	19

2.16	Exemplo de uma junção parcial.	20
2.17	Grafo C_4 e sua matriz de adjacência $A(C_4)$	21
2.18	Grafo utilizado pelo Exemplo 4.	29
3.1	4-ciclo alternado e possíveis subgrafos induzidos.	31
3.2	Exemplo de um grafo matroidal.	32
3.3	Grafo utilizado pelo Exemplo 5.	33
3.4	Relações de inclusão entre subclasses dos unigrafos.	34
3.5	Configuração proibida $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$	36
3.6	Possíveis grafos induzidos pela configuração \mathcal{F}	36
3.7	Configuração presente no Caso 1 do Teorema 14.	38
3.8	Configuração presente no Caso 2 do Teorema 14.	39
3.9	Configuração presente no Caso 2.1 do Teorema 14.	39
3.10	Configuração presente no Caso 2.2 do Teorema 14.	40
3.11	Configuração presente no Caso 2.3 do Teorema 14.	40
3.12	Representação geral de um grafo matrogênico.	46
3.13	Grafos proibidos.	47
3.14	Possibilidades para o primeiro caso.	49
3.15	Grafo formado pela sequência de operações: $(i) - (i) - (i) - (ii) - (iii)$	52
4.1	Grafo utilizado pelo Exemplo 7	54

4.2	Construindo o grafo G associado à 3-expressão esperta (4.1).	55
4.3	Árvore de análise associada à expressão (4.2).	56
4.4	Grafo matrogênico utilizado pelo Exemplo 8.	67
4.5	Árvore de análise associada ao grafo ilustrado pela Figura 4.4.	68
5.1	Grafo H_1	75
5.2	Grafo H_2	76

LISTA DE TABELAS

3.1	Grafos threshold com até 4 vértices.	31
3.2	Subgrafos induzidos que podem surgir de $G_1 + G_2$	49

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

Lista de Símbolos

A	Matriz de adjacência
C_n	Grafo cíclico de n vértices
$CP(2t)$	Complementar do grafo tK_2
$G_1 + G_2$	Junção parcial entre os grafos G_1 e G_2
K_n	Grafo completo de n vértices
P_n	Grafo caminho de n vértices
$Spec(G)$	Espectro do grafo G com respeito à matriz de adjacência
tK_2	Emparelhamento perfeito

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os grafos matrogênicos. Apresentamos sua definição por meio de matroides, reunimos da literatura algumas de suas caracterizações e mostramos que são equivalentes. Além disso, estudamos um algoritmo de localização de autovalores e, como uma contribuição, demos o primeiro passo para localizar os autovalores de grafos matrogênicos em tempo linear. Mostramos que sua largura esperta em clique é menor ou igual a dois.

ABSTRACT

In this work, we study matrogenic graphs. We present their definition by matroids, gather from the literature some of their characterizations and show that they are equivalent. Also, we study an eigenvalue localization algorithm and, as a contribution, we took the first steps to locate the eigenvalues of matrogenic graphs in linear time. We show that their slick click width is less than or equal to two.

1 INTRODUÇÃO

No nosso dia a dia, diversas situações e problemas podem ser descritos por meio de diagramas constituídos a partir de pontos e linhas (que ligam esses pontos). Uma dessas situações é o famoso problema das pontes de Königsberg, que deu origem à Teoria de Grafos. Introduzida no século XVIII pelo matemático suíço Leonhard Euler, a Teoria de Grafos foi a base para a solução desse problema.

Königsberg, atual Kaliningrado, era uma cidade prussiana cortada pelo rio Prególia, composta de quatro pedaços de terra conectados por sete pontes que facilitavam a travessia entre as partes da cidade. Reza a lenda que os cidadãos de Königsberg tentavam descobrir um caminho que passasse pela cidade e que atravessasse cada ponte uma única vez. Como suas tentativas sempre falhavam, muitos consideravam a tarefa impossível, porém apenas no ano de 1730, o problema foi tratado de um ponto de vista matemático.

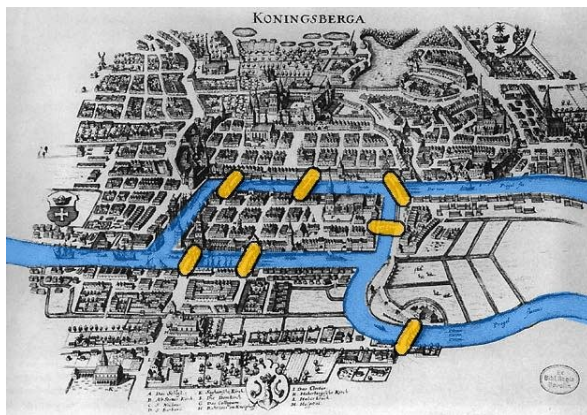


Figura 1.1: Antiga cidade de Königsberg.

Fonte: <https://scilogs.spektrum.de/hlf/the-bridges-of-konigsberg/>

Euler reconheceu que a dificuldade para se achar uma solução para este problema eram os quatro pedaços de terra e as sete pontes. Com a ajuda de outros

pesquisadores da época, ele escreveu um artigo [11] lidando com este problema e forneceu um método geral para se resolver problemas do mesmo tipo.

Com isso, surgiu a primeira representação de um grafo moderno, um par $G = (V, E)$, onde V representa um conjunto de pontos, chamados vértices, ligados por um conjunto E de arestas. Um exemplo de grafo, que traduz o problema das pontes de Königsberg, pode ser visto na Figura 1.2.

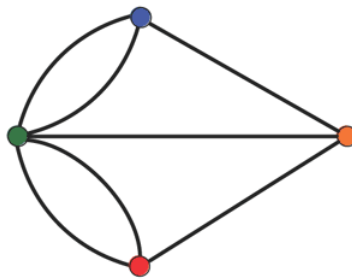


Figura 1.2: Exemplo de um grafo.

Desde então, a Teoria de Grafos vem sendo aplicada em diversas áreas do conhecimento e grafos são usados para modelar diversas situações. Na Matemática por exemplo, grafos aparecem na Teoria de Nós, uma subárea da Topologia [13]. Na Química, grafos podem ser usados para representar moléculas. Na Biologia, para modelar redes que simbolizam a relação entre entidades biológicas [25, 30]. Para o leitor que deseja saber mais sobre Teoria de Grafos, sugerimos as bibliografias [1, 9].

Dado um grafo G , é natural associá-lo a diferentes matrizes. As matrizes mais estudadas na literatura são: a matriz de adjacência (A), a matriz laplaciana (L) e a matriz laplaciana sem sinal (Q). Associado a cada uma dessas matrizes temos um conjunto de autovalores, que receberá o nome de espectro do grafo. Matrizes diferentes geram espectros diferentes. Neste trabalho focaremos majoritariamente na matriz de adjacência. Para conhecer mais sobre essas matrizes, recomendamos as referências [3, 7, 8].

A Teoria Espectral de Grafos tem como objetivo descrever propriedades de um grafo a partir de seu espectro. Ela teve sua origem na Química, com Hückel [22], quando moléculas de hidrocarboneto foram representadas por grafos cujos autovalores estão diretamente relacionados com uma energia baseada em elétrons associada à essas moléculas.

A Teoria Espectral de Grafos se popularizou com a publicação da tese de Cvetkovic [6], e desde então vem ganhando cada vez mais destaque na comunidade científica e podemos ver isso pela quantidade de trabalhos publicados na área. Suas aplicações não se restringem somente à Química, podemos encontrar aplicações, por exemplo, em problemas de comunicação de dados [17]. O leitor que desejar saber mais sobre Teoria Espectral de Grafos pode consultar [7].

O objetivo desse trabalho é estudar os Grafos Matrogênicos. Eles foram introduzidos por Földes e Hammer em [15] e são obtidos através de uma estrutura algébrica primordial, conhecida como Matroide. Essa classe contém a classe dos grafos threshold e constitui uma subclasse dos unigrafos [2], grafos que podem ser determinados pela sua sequência de graus.

Neste trabalho iremos caracterizar os grafos matrogênicos a partir de suas propriedades. Eles possuem diversas caracterizações, e uma das contribuições deste trabalho foi buscar e reunir, da literatura, todas essas caracterizações e mostrar que são equivalentes.

As caracterizações apresentadas serão convenientes para alcançar nosso objetivo principal, que é mostrar que o algoritmo de localização de autovalores, desenvolvido por M. Fürer et al. [16], opera em tempo linear para os grafos matrogênicos.

O algoritmo em questão recebe como entrada uma árvore associada a uma decomposição esperta em clique de um grafo, um escalar e nos retorna uma matriz diagonal, cujos elementos nos permitem localizar os autovalores do grafo. A

rapidez com que o algoritmo trabalha essa árvore está relacionada com um parâmetro conhecido como largura esperta em clique. Se esse parâmetro for muito pequeno, o algoritmo opera em tempo linear.

Por meio das caracterizações dos grafos matrogênicos apresentadas, foi possível mostrar que esses grafos possuem uma largura esperta em clique menor ou igual a dois. Isso quer dizer que, tendo em mãos uma decomposição esperta em clique ideal, o algoritmo opera em tempo linear para essa classe de grafos.

Devido à quantidade de conceitos que serão apresentados ao longo deste trabalho, a fim de traçar uma linha de raciocínio lógico que auxilie o leitor a melhor compreendê-lo, o fluxograma ilustrado pela Figura 1.3, sintetiza e relaciona as principais ideias e objetivos apresentados ao longo do texto.

Nosso trabalho organiza-se da seguinte forma.

No Capítulo 2, apresentamos definições preliminares da Teoria de Grafos, Teoria Espectral de Grafos e Teoria de Matroides, que serão fundamentais para a compreensão do trabalho desenvolvido.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo dos grafos matrogênicos. Começamos definindo a estrutura conhecida como 4-ciclo alternado, imprescindível para a definição de tais grafos, definimos grafos matroidais e, a partir deles, definimos os grafos matrogênicos. O restante do capítulo é destinado a apresentar as diversas caracterizações dessa família de grafos.

No Capítulo 4, estudamos uma decomposição para grafos conhecida como decomposição esperta em clique. Vemos o que é uma expressão esperta para um grafo, como ela está associada à uma árvore e estudamos o parâmetro conhecido como largura esperta em clique. No mais, trabalhamos um algoritmo de localização de autovalores e realizamos um exemplo a fim de compreender seu funcionamento.

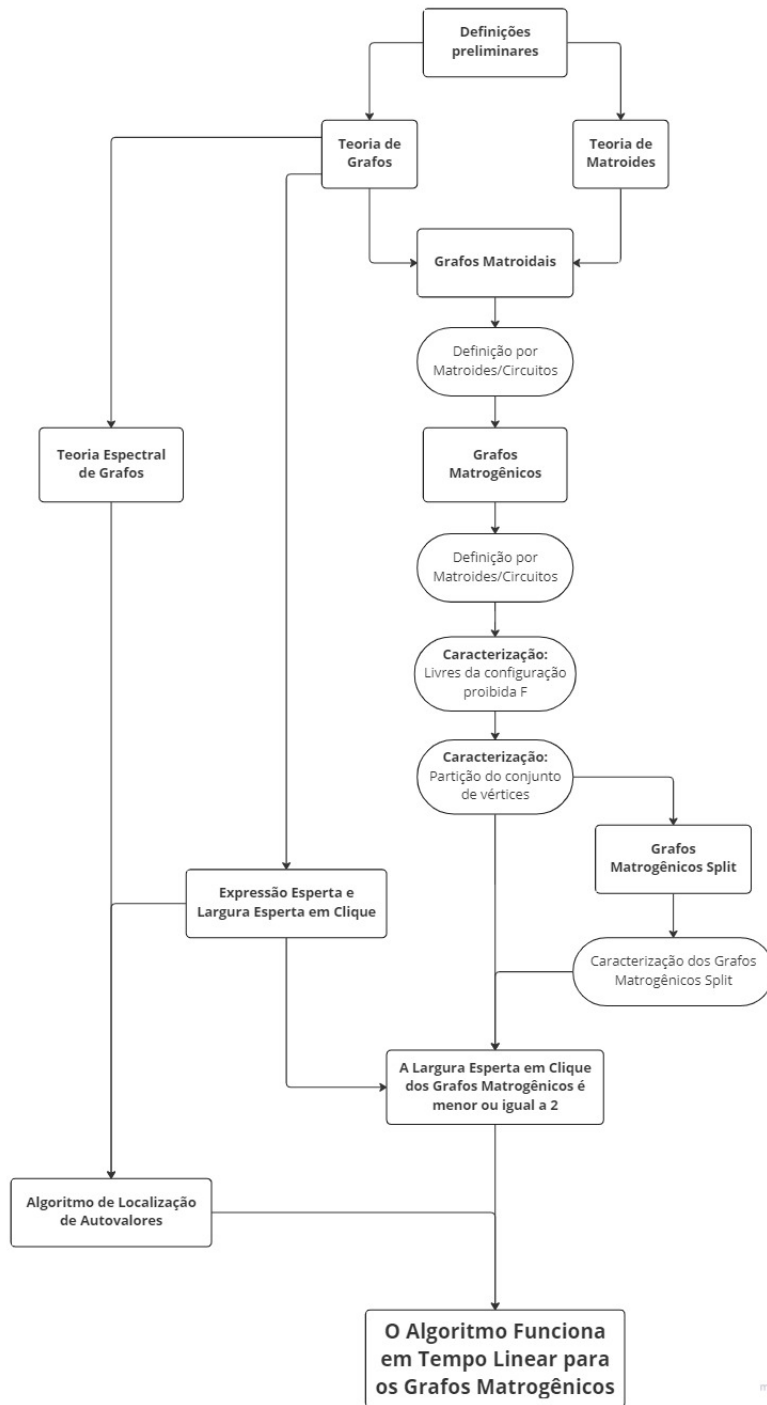


Figura 1.3: Fluxograma do trabalho.

Para que o algoritmo apresentado no Capítulo 4 funcione em tempo linear, o grafo analisado precisa ter uma largura esperta em clique pequena e, além

disso, precisamos conseguir obter a árvore associada a tal expressão em tempo linear. No Capítulo 5, provamos que os grafos matrogênicos possuem largura esparta em clique menor ou igual a dois.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos resultados básicos referentes a Teoria de Grafos, Teoria Espectral de Grafos e Teoria de Matroides essenciais para o entendimento dos capítulos posteriores.

2.1 Teoria de Grafos

Essa seção é dedicada ao estudo da Teoria de Grafos. As definições apresentadas aqui podem ser, majoritariamente, encontradas em [28].

Definição 1. Seja V um conjunto não vazio e E um subconjunto de $\{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. O par $G = (V, E)$ é chamado **grafo** com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E .

A Figura 2.1 ilustra um grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_7, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}\}$.

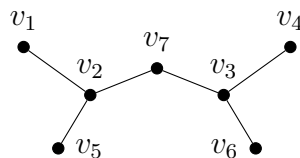


Figura 2.1: Exemplo de um grafo.

Os grafos que estudaremos neste trabalho são simples, ou seja, não contêm laços (isto é, arestas do tipo $\{u, u\}$) e não contêm arestas múltiplas (duas arestas ligando o mesmo par de vértices).

Algumas vezes também usaremos as notações $V(G)$ e $E(G)$ para representar o conjunto de vértices e o conjunto de arestas, respectivamente, de um grafo G .

A partir de agora, veremos diversas definições e alguns exemplos que serão cruciais para a compreensão dos resultados que serão apresentados ao longo deste trabalho.

Definição 2. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **finito** se V é um conjunto finito. Neste caso, dizemos que G tem ordem $|G| = |V|$. Se G não é um grafo finito, dizemos que G é um grafo **infinito**.

O grafo dado pela Figura 2.1 é finito.

Definição 3. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **vazio** se $E = \emptyset$.

A Figura 2.2 ilustra um grafo vazio com 7 vértices.

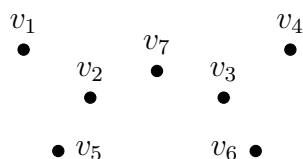


Figura 2.2: Exemplo de um grafo vazio.

Definição 4. Dois vértices $u, v \in V(G)$ são ditos **adjacentes** se existe uma aresta $e = \{u, v\} = uv \in E(G)$. Neste caso também diz-se que a aresta e incide sobre os vértices u e v . Utilizamos a notação $u \sim v$ para indicar que u é adjacente a v , e a notação $u \not\sim v$ caso contrário.

Definição 5. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$ um vértice. A **vizinhança aberta** de v é o conjunto $N_G(v) = \{u \in V; v \sim u\}$ e a **vizinhança fechada** de v é o conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. O **grau do vértice** v , denotado por $d(v)$, é a cardinalidade de $N_G(v)$, isto é, $d(v) = |N_G(v)|$.

Definição 6. Dado um conjunto de vértices $V' \subset V$ e dois vértices x, y não necessariamente em V' , dizemos que x **domina** y em V' , denotado por $x \succ_{V'} y$, se todo vizinho de y em $V' - \{x\}$ é também um vizinho de x .

Definição 7. Dado um grafo G de ordem n , a **sequência de graus** de G é uma n -upla cujas coordenadas, dadas em ordem não crescente, correspondem aos graus dos vértices de G .

O grafo apresentado na Figura 2.1 tem sequência de graus $(3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$.

Definição 8. O grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ é **isomorfo** a $G_2 = (V_2, E_2)$ se existe uma função bijetora de V_1 em V_2 , tal que $\{u, v\} \in E_1$ se e somente se $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Se tal função existe ela é chamada de isomorfismo de G_1 em G_2 . Usaremos a notação $G_1 \simeq G_2$ para indicar que G_1 e G_2 são isomorfos.

Os grafos G e H , exibidos pela Figura 2.3, são isomorfos. A função $f : V(G) \rightarrow V(H)$ dada por $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_6, f(v_3) = u_8, f(v_4) = u_3, f(v_5) = u_5, f(v_6) = u_2, f(v_7) = u_4, f(v_8) = u_7$ é uma bijeção que satisfaz as condições apresentadas na Definição 8.

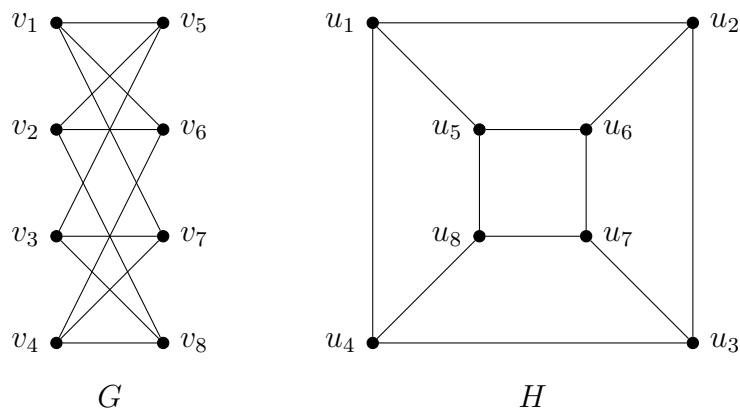


Figura 2.3: Exemplo de grafos isomorfos.

Grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e arestas. Propriedades como essas, que são compartilhadas por grafos isomorfos, são chamadas de **invariantes**.

Definição 9. Seja $G = (V, E)$ um grafo, e suponha $u, w \in V$. Um **caminho** em G de comprimento r , de u em w , é uma sequência $[v_0, v_1, \dots, v_r]$ de vértices distintos tais que $u = v_0$, $w = v_r$, $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, $1 \leq i \leq r$.

Definição 10. Seja $G = (V, E)$ um grafo, e suponha $u, w \in V$. Uma **trilha** em G de comprimento r , de u em w , é uma sequência $[v_0, v_1, \dots, v_r]$ de vértices tais que $u = v_0$, $w = v_r$, $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, $1 \leq i \leq r$ e não há repetição de arestas.

Definição 11. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **conexo**, se possui um único vértice ou se existe um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário, é dito desconexo.

Definição 12. Um **ciclo** em G de comprimento k é uma trilha de comprimento k , $[v_0, \dots, v_k]$, em que $v_0 = v_k$.

Definição 13. Um grafo $G = (V, E)$ é dito um **grafo ciclo** se é formado por apenas um ciclo, denotamos G por C_n , onde $n = |V|$.

A Figura 2.4 ilustra os grafos C_4 e C_5 .

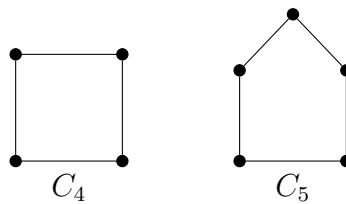


Figura 2.4: Exemplos de grafos cíclicos.

Um conjunto importante para a compreensão da definição de subgrafo induzido é o conjunto $V^{(2)}$, definido por $V^{(2)} = \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V \wedge v_1 \neq v_2\}$.

Definição 14. Sejam $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ grafos. Se $W \subset V$ e $F \subset E$, então H é um **subgrafo** de G . O subgrafo de G **induzido** por W é o grafo $G[W] = (W, E \cap W^{(2)})$.

Note também que um subgrafo induzido pode ser obtido pela remoção de vértices e, conseqüentemente, suas arestas incidentes.

A Figura 2.5 exhibe um grafo G e seu subgrafo H induzido pelo conjunto de vértices $W = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$.

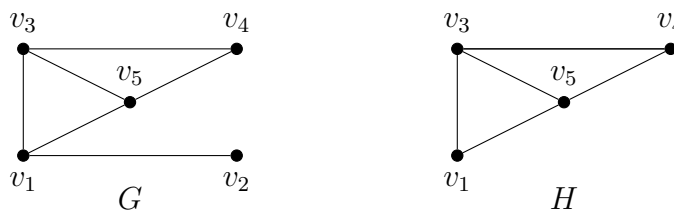


Figura 2.5: O Grafo H é um subgrafo induzido de G .

Definição 15. Seja $G = (V, E)$ um grafo. O **grafo complementar** de G é o grafo $\bar{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$, isto é, G e \bar{G} dividem o mesmo conjunto de vértices, mas $\{u, v\} \in E(\bar{G})$ se e somente se $\{u, v\} \notin E(G)$.

A Figura 2.6, exhibe um grafo G e seu grafo complementar \bar{G} .

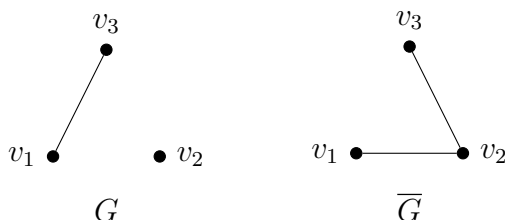


Figura 2.6: Um grafo e seu grafo complementar.

Apresentaremos agora diversas classes de grafos que aparecerão ao longo do trabalho.

Definição 16. Um **grafo completo** é um grafo em que todo vértice é adjacente a todos os outros vértices. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

A Figura 2.7 exhibe os grafos completos K_1, K_2, K_3 e K_4 .

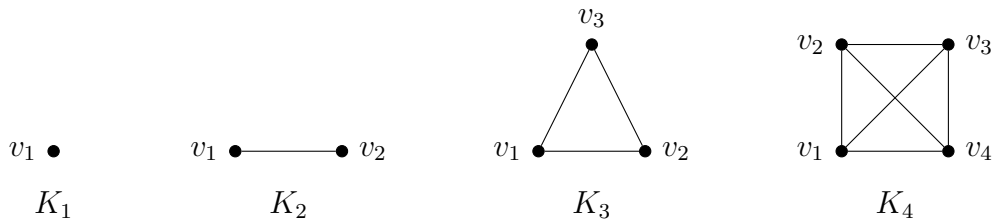


Figura 2.7: Exemplos de grafos completos.

Definição 17. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $K \subset V$ é uma **clique** (em G) se quaisquer dois vértices distintos de K são adjacentes em G , e dizemos que $S \subset V$ é um **conjunto estável** (em G), se quaisquer dois vértices distintos de S não são adjacentes.

A Figura 2.8 exibe um grafo G desconexo com clique $K = \{v_1, v_2, v_3\}$ e conjunto estável $S = \{v_4, v_5\}$.

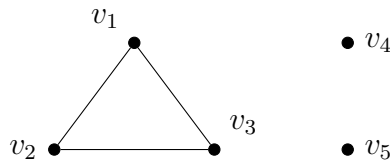


Figura 2.8: Exemplo de uma clique e um conjunto estável.

Definição 18. Um grafo G é dito **split** quando seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos, K e S , onde K é uma clique e S é um conjunto estável.

O grafo ilustrado pela Figura 2.8 é um grafo split desconexo.

Definição 19. Um grafo é dito **triangular** se ele não contém ciclos induzidos de tamanho quatro ou maior.

O teorema a seguir caracteriza grafos split por meio de subgrafos proibidos.

Teorema 1. [14] Para todo grafo $G = (V, E)$, as seguintes condições são equivalentes:

1. G é um grafo split.
2. ambos G e \overline{G} são triangulares.
3. G não contém C_4, C_5 nem $2K_2$ como subgrafos induzidos.

Dem.: (1) \implies (2) : Seja G um grafo split. Por definição, todo subgrafo induzido de G é split. Portanto, G não contém nenhum ciclo induzido de tamanho 4 ou mais, já que o conjunto de vértices de um ciclo de tamanho 4 ou mais não pode ser particionado em uma clique e um conjunto estável. Além disso, o grafo complementar de G é split, por definição, e portanto também é triangular.

(2) \implies (3) : Como G é triangular, ele não contém C_4 e C_5 induzidos, e como \overline{G} é triangular e $\overline{2K_2} = C_4$, G não contém $2K_2$.

(3) \implies (1) : Seja K uma clique de tamanho máximo em G com o menor número de arestas em $V - K$. Suponha, por absurdo, que dois vértices $x, y \in G[V - K]$ são adjacentes, ou seja, que G não seja split.

Primeiro, vamos mostrar que $x \succ_K y$ ou $y \succ_K x$. Suponha que não seja o caso, ou seja, existam vértices $z, w \in K$ tais que $xz, yw \in E$, mas $xw, yz \notin E$. Esses 4 vértices induzem um C_4 , absurdo. Segue que ou $x \succ_K y$ ou $y \succ_K x$. Suponha sem perda de generalidade que $x \succ_K y$.

Se x tem dois não vizinhos $z, w \in K$, então o conjunto $\{x, y, z, w\}$ induz um $2K_2$, absurdo. Se y tem no máximo um não vizinho em K , digamos z , então $(K \cup \{x, y\}) \setminus \{z\}$ é uma clique maior que K em G , absurdo. Segue que x tem exatamente um não vizinho em K , digamos z , e y tem ao menos mais um não vizinho em K , digamos w .

Agora, z deve ter um vizinho u em $V - K$ que não é um vizinho de x , caso contrário, $K' = (K \cup \{x\}) \setminus \{z\}$ também é uma clique maximal e $V - K'$ tem menos arestas que $V - K$, absurdo. Além disso, $yu \in E$, senão o conjunto $\{x, y, z, u\}$ induz um $2K_2$ em G . Aplicando o mesmo argumento utilizado para x e y , para os vértices u e y , temos que $u \succ_K y$ e u tem exatamente um não vizinho w' em K . Nesse caso, os vértices $\{x, y, u, z, w'\}$ induzem um C_5 , absurdo. \square

Definição 20. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um **emparelhamento** em G é um subconjunto $M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ do conjunto de arestas tal que cada vértice $v \in V$ aparece em no máximo uma aresta de M . O tamanho do emparelhamento é dado por $|M|$.

Definição 21. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um emparelhamento M é dito **maximal** se $M \cup \{e\}$ não é um emparelhamento para qualquer $e \in E(G)$.

Definição 22. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um emparelhamento é **máximo** se não existe nenhum outro emparelhamento em G com um tamanho maior.

Definição 23. Um emparelhamento em G é **perfeito** se todo vértice de G aparece exatamente uma vez em M .

Podemos observar que o subgrafo induzido por um emparelhamento perfeito é formado por cópias do grafo K_2 , e podemos denotá-lo por tK_2 , onde t representa a quantidade de grafos K_2 na união.

A Figura 2.9 exemplifica o emparelhamento perfeito $4K_2$.

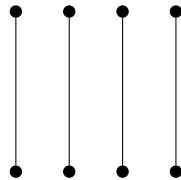


Figura 2.9: Grafo $4K_2$.

Definição 24. O grafo **cocktail party** é o grafo complementar do emparelhamento perfeito tK_2 e é denotado por $CP(2t)$.

A Figura 2.10 ilustra o grafo cocktail party $CP(8)$, obtido tomando o grafo complementar do grafo $4K_2$.

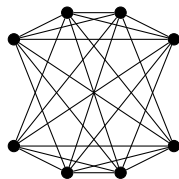


Figura 2.10: Grafo $CP(8)$.

Definição 25. Dado um grafo G , sejam $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ seus $2p$ vértices distintos para algum $p \geq 2$. Dizemos que esses vértices induzem uma **rede** de ordem p e denotamos por:

$$\mathcal{N}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$$

se todos os x_i formam um conjunto estável, todos y_i formam uma clique, e cada x_i é adjacente a y_i e nenhum outro y_j .

Definição 26. Dado um grafo G , sejam $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ seus $2p$ vértices distintos para algum $p \geq 2$. Dizemos que esses vértices induzem um **complemento de rede** de ordem p e denotamos por:

$$\overline{\mathcal{N}}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$$

se todos os x_i formam um conjunto estável, todos y_i formam uma clique, e cada x_i é adjacente a todo y_j exceto por y_i .

A Figura 2.11 nos mostra uma rede e um complemento de rede de ordem 3.

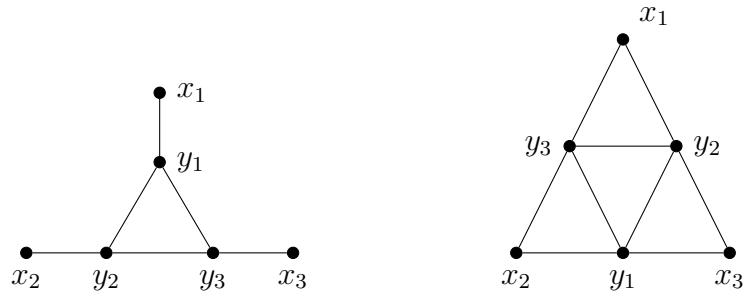


Figura 2.11: Rede e complemento de rede de ordem 3.

Definição 27. Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos. Uma árvore é **enraizada** quando se destaca um vértice em especial, denominado **raiz** da árvore.

A Figura 2.12 exibe uma árvore enraizada, cuja raiz é o vértice v_9 .

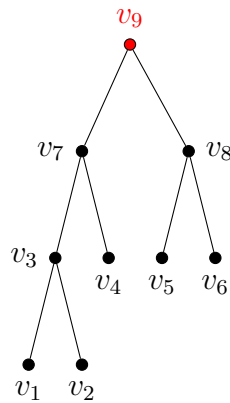


Figura 2.12: Exemplo de árvore enraizada.

Definição 28. Sejam $T = (V, E)$ uma árvore enraizada de ordem n , com raiz ω , e $u, v \in V(T)$.

- (i) A **profundidade** de v é o comprimento do caminho entre v e ω ;
- (ii) Dizemos que v é **filho** de u se $v \sim u$ e u tem profundidade menor que v . Neste caso, u é dito **pai** de v ;
- (iii) Um vértice de T é dito uma **folha** se não possui filhos;

- (iv) Um vértice é dito **não terminal** se possui um ou mais filhos;
- (v) Dois vértices são ditos **irmãos** se possuem o mesmo vértice pai;
- (vi) O vértice u é dito **ancestral** de v se v pertence à subárvore enraizada em u .

Na Figura 2.12, o vértice v_4 tem profundidade 2, o vértice v_1 é filho de v_3 , e v_3 é pai de v_1 . Os vértices v_1, v_2, v_4, v_5, v_6 são folhas e os vértices v_9, v_7, v_8, v_3 são vértices não terminais. Os vértices v_5 e v_6 são irmãos e o vértice v_7 é um ancestral de v_2 .

Definição 29. O **grafo caminho** P_n é uma árvore de ordem n , com dois vértices de grau 1 e outros $n - 2$ vértices de grau 2.

A Figura 2.13 ilustra os grafos caminho P_2 e P_4 .

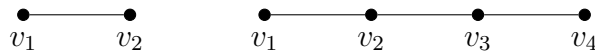


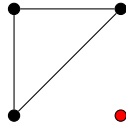
Figura 2.13: Caminhos P_2 e P_4 , respectivamente.

Uma classe de grafos que eventualmente será mencionada ao longo do trabalho é a classe dos cografos. Para defini-la é essencial conhecermos algumas operações entre grafos.

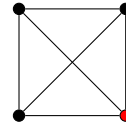
Definição 30. Dados dois grafos disjuntos G_1 e G_2 , dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é a **união** de G_1 e G_2 , denotada por $G = G_1 \oplus G_2$, se $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Definição 31. Dados dois grafos disjuntos G_1 e G_2 , dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é a **junção** de G_1 e G_2 , denotada por $G = G_1 \vee G_2$, se $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{v_1, v_2\}; v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$.

Exemplo 1. Considere os grafos K_1 , desenhado em vermelho, e K_3 , desenhado em preto, ambos ilustrados na Figura 2.7. Temos que sua união é dada por $H_1 = K_1 \oplus K_3$ e sua junção é dado por $H_2 = K_1 \vee K_3$.



$$H_1 = K_1 \oplus K_3$$



$$H_1 = K_1 \vee K_3$$

Figura 2.14: União e junção de K_1 e K_3 , respectivamente.

Agora podemos definir os cografos. Eles são definidos recursivamente como a seguir.

Definição 32. Um **cografo** é obtido a partir de K_1 por operações de união ou junção, da seguinte maneira:

- (i) K_1 é um cografo;
- (ii) Se G_1 e G_2 são cografos, então a união $G_1 \oplus G_2$ também o é;
- (iii) Se G_1 e G_2 são cografos, então a junção $G_1 \vee G_2$ também o é.

Todo cografo admite uma representação única em forma de árvores, denominada **coárvores**. A coárvore T_G de um cografo G é uma árvore enraizada, onde cada vértice interior w ou é do tipo \oplus e representa uma união ou é do tipo \vee e representa uma junção e, além disso, as folhas da coárvore T_G correspondem aos vértices do cografo G ;

A Figura 2.15 ilustra um cografo e sua respectiva coárvore.

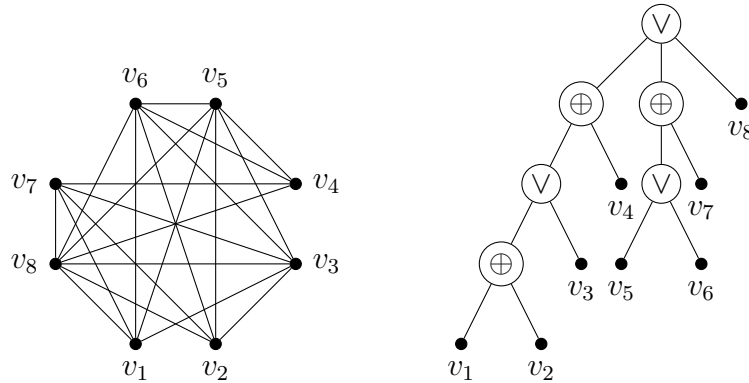


Figura 2.15: Exemplo de um cografo e sua coárvore.

A seguir, iremos enunciar algumas propriedades valiosas dos cografos.

Proposição 2. [5] *Todo subgrafo induzido de um cografo é um cografo.*

Teorema 3. [5] *Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é um cografo.
- (ii) G não contém um P_4 como subgrafo induzido.

Ou seja, os cografos são caracterizados como grafos livres de P_4 .

A operação que iremos definir a seguir é um tipo específico de junção entre grafos.

Definição 33. Seja G_1 um grafo e seja G_2 um grafo split. Suponha que $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ e que $V(G_2)$ é particionado em um conjunto estável S e uma clique K . A **junção parcial** de G_1 e G_2 , denotada por $G_1 + G_2$, é o grafo G tal que $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E$, onde $E = \{xy : x \in V(G_1), y \in K\}$.

O grafo resultante G depende não apenas dos dois grafos G_1 e G_2 , mas também da partição (S, K) de $V(G_2)$ (já que as partições podem não ser únicas).

Portanto, devemos especificar essa partição sempre que necessário. Além disso, $G_1 + G_2$ pode ser diferente de $G_2 + G_1$ (na verdade, $G_2 + G_1$ pode não estar bem definido, caso G_1 não seja split).

Exemplo 2. Considere G_1 o grafo K_2 e G_2 o grafo split ilustrado na Figura 2.8. O grafo G resultante da junção parcial de G_1 e G_2 , $G = G_1 + G_2$, pode ser visto na Figura 2.16.

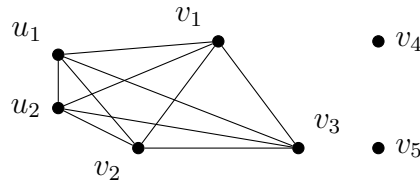


Figura 2.16: Exemplo de uma junção parcial.

2.2 Teoria Espectral de Grafos

Esta subseção é dedicada ao estudo da Teoria Espectral de Grafos. Seu objetivo é estudar as propriedades de um grafo obtidas por meio de sua representação matricial e seu espectro. Aqui, vamos introduzir alguns conceitos que serão essenciais para a compreensão do algoritmo apresentado no Capítulo 4.

Definição 34. Seja $G = (V, E)$ um grafo com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. A **matriz de adjacência** de G é a matriz de ordem n , $A(G) = (a_{ij})$, cujas entradas são definidas por $a_{ij} = 1$, se $v_i \sim v_j$ e $a_{ij} = 0$, caso contrário.

A Figura 2.17 ilustra o ciclo C_4 e sua matriz de adjacência $A(C_4)$.

Ao longo desta dissertação iremos trabalhar apenas com a matriz de adjacência. Porém todos os resultados podem ser estendidos para outras matrizes, como a matriz laplaciana e a laplaciana sem sinal, por exemplo.

Definição 35. O **polinômio característico** da matriz de adjacência $A(G)$ de um grafo G , ou seja, $\det(xI - A(G))$, é denominado polinômio característico de G e

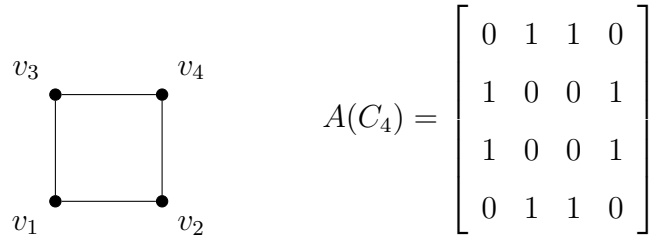


Figura 2.17: Grafo C_4 e sua matriz de adjacência $A(C_4)$.

é denotado por $P_G(x)$. Além disso, λ é dito **autovalor** do grafo G , quando λ é raiz do polinômio $P_G(x)$. Se G possui r autovalores distintos $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$, então o **espectro** do grafo G , denotado por $Spec(G)$, é o multiconjunto $Spec(G) = \{\lambda_1^{[\ell_1]}, \lambda_2^{[\ell_2]}, \dots, \lambda_r^{[\ell_r]}\}$, onde ℓ_i denota a multiplicidade do autovalor λ_i , $1 \leq i \leq r$.

Da Definição 34, $A(G)$ é uma matriz simétrica e não negativa. Portanto todos os seus autovalores são números reais.

Por exemplo, o polinômio característico do grafo exibido na Figura 2.17 é:

$$P_{C_4}(x) = \det(xI - A(C_4)) = x^4 - 4x^2 = x^2(x - 2)(x + 2).$$

Portanto, seu Espectro é: $Spec(C_4) = \{2, 0^{[2]}, -2\}$.

Um parâmetro estudado pela Teoria Espectral é a quantidade de autovalores positivos, negativos e a multiplicidade do autovalor zero de um grafo. Esse parâmetro recebe o nome de inércia.

Definição 36. Seja G um grafo. A **inércia** de um grafo é a tripla $i(G) = (i_+(G), i_-(G), i_0(G))$, onde $i_+(G)$ é o número de autovalores positivos de G , $i_-(G)$ é o número de autovalores negativos de G e $i_0(G)$ é a multiplicidade do autovalor zero.

A inércia do grafo C_4 é $i(C_4) = (1, 1, 2)$.

Essa definição provém da definição de inércia de matrizes quadradas com espectro real.

Definição 37. Uma **operação elementar** sobre as linhas de uma matriz é uma das seguintes operações:

- (i) Permutar duas linhas da matriz. ($L_i \longleftrightarrow L_j$)
- (ii) Multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$. ($L_i \longleftarrow \alpha L_i$)
- (iii) Somar a uma linha da matriz outra multiplicada por um escalar $\alpha \neq 0$. ($L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$)

De modo análogo, podemos definir operações elementares sobre as colunas de uma matriz.

Definição 38. Duas matrizes são **congruentes** se uma pode ser obtida da outra por uma sequência de pares de operações elementares, cada par consistindo de uma operação em uma linha seguida da mesma operação na coluna.

Matrizes congruentes compartilham uma propriedade muito importante, elas possuem a mesma inércia.

Teorema 4. (*Lei da Inércia de Sylvester*) *Duas matrizes reais e simétricas de ordem $n \times n$ são congruentes se, e somente se, elas têm a mesma inércia.*

A forma escalonada de uma matriz pode ser obtida por meio de operações elementares e é definida como a seguir.

Definição 39. Dizemos que uma matriz está na **forma escalonada** quando:

- (i) As linhas que contém apenas zeros estão abaixo das demais;

- (ii) O primeiro elemento não nulo de uma linha, conhecido como pivô, está em uma coluna à direita do elemento líder da linha acima.

Essas duas condições implicam que os elementos que estão abaixo dos pivôs são todos iguais a zero.

2.3 Matroides

A Teoria de Matroides desempenha um papel importante em diversas áreas científicas, como álgebra, geometria, teoria da computação, pesquisa operacional, entre outras. E é da álgebra linear e da Teoria de Grafos que surgem suas maiores motivações e exemplos.

A definição de matroide surgiu em 1935, quando Whitney tentou generalizar o conceito de dependência linear de um conjunto de vetores, pertencentes a um dado espaço vetorial.

Definição 40. Um **matroide** M é um par ordenado (E, \mathcal{I}) que consiste em um conjunto finito E e uma coleção \mathcal{I} de subconjuntos de E satisfazendo as seguintes condições:

$$(I_1) \quad \emptyset \in \mathcal{I};$$

$$(I_2) \quad \text{Se } I \in \mathcal{I} \text{ e } I' \subset I, \text{ então } I' \in \mathcal{I};$$

$$(I_3) \quad \text{Se } I_1, I_2 \in \mathcal{I} \text{ e } |I_1| < |I_2|, \text{ então existe um elemento } e \in I_2 \setminus I_1 \text{ tal que } I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}.$$

A condição (I_3) é chamada de axioma de aumento de independência.

Se M é o matroide (E, \mathcal{I}) , então M é chamado de matroide em E . Os elementos de \mathcal{I} são os **conjuntos independentes** de M e E é o **conjunto base**

de M . Um subconjunto de E que não pertence a \mathcal{I} é chamado de **dependente**. Escreveremos $\mathcal{I}(M)$ para \mathcal{I} e $E(M)$ para E , quando diversos matroides forem considerados.

O nome “matroide” foi concebido por Whitney porque uma classe de exemplos fundamentais de tais objetos surgem de matrizes, da seguinte maneira:

Proposição 5. [29] *Seja E o conjunto de rótulos de colunas de uma matriz A de ordem $m \times n$ sobre um corpo \mathbb{F} , e seja \mathcal{I} o conjunto de subconjuntos X de E para os quais o conjunto de colunas rotuladas por X é linearmente independente no espaço vetorial $V = \mathbb{F}^m$ de dimensão m sobre \mathbb{F} . Então (E, \mathcal{I}) é um matroide.*

Dem.: Evidentemente, \mathcal{I} satisfaz as condições (I_1) e (I_2) da definição de matroides. Para provar que a condição (I_3) é válida, considere I_1 e I_2 subconjuntos linearmente independentes de E tais que $|I_1| < |I_2|$. Seja W o subespaço de V gerado por $I_1 \cup I_2$. Então $\dim(W) \geq |I_2|$. Suponha que $I_1 \cup \{e\}$ seja linearmente dependente para todo $e \in I_2 \setminus I_1$. Então W está contido no conjunto gerado por I_1 . Portanto, $|I_2| \leq \dim(W) \leq |I_1| \leq |I_2|$, absurdo. Concluímos que $I_2 \setminus I_1$ contém um elemento e tal que $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$, isto é, a condição (I_3) é válida. \square

O matroide obtido da matriz A será denotado por $M[A]$. Esse matroide é chamado de vetor matroide de A .

Exemplo 3. [29] Seja A a matriz:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & & \end{array}$$

Então: $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$.

Portanto, o conjunto dos conjuntos dependentes desse matroide é:

$$\{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\} \cup \{X \subset E : |X| \geq 3\}$$

O conjunto de conjuntos dependentes minimais, isto é, os conjuntos dependentes cujos subconjuntos próprios são independentes, é:

$$\{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}.$$

Um conjunto dependente minimal em um matroide arbitrário M é chamado de **circuito** de M e vamos denotar o conjunto de circuitos de M por \mathcal{C} ou $\mathcal{C}(M)$. Um circuito de M com n elementos é chamado de n -circuito.

Evidentemente, como no exemplo anterior, uma vez que $\mathcal{I}(M)$ foi especificado, $\mathcal{C}(M)$ pode ser determinado. Similarmente, $\mathcal{I}(M)$ pode ser encontrado a partir de $\mathcal{C}(M)$: os membros de $\mathcal{I}(M)$ são os subconjuntos de $E(M)$ que não contêm membros de $\mathcal{C}(M)$. Portanto, um matroide também pode ser determinado por seu conjunto \mathcal{C} de circuitos.

Agora, vamos examinar algumas propriedades de \mathcal{C} . É fácil ver que:

$$(C_1) \quad \emptyset \notin \mathcal{C}; \text{ e}$$

$$(C_2) \quad \text{Se } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são membros de } \mathcal{C} \text{ e } C_1 \subset C_2, \text{ então } C_1 = C_2.$$

Mais ainda,

Lema 6. [29] *O conjunto \mathcal{C} de circuitos de um matroide tem a seguinte propriedade:*

$$(C_3) \quad \text{Se } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são membros distintos de } \mathcal{C} \text{ e } e \in C_1 \cap C_2, \text{ então existe um membro } C_3 \text{ de } \mathcal{C} \text{ tal que } C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}.$$

Dem.: Suponha que $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ não contenha um circuito. Então $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \in \mathcal{I}$. Por (C_2) , $C_2 \setminus C_1$ é não vazio, então podemos escolher um elemento f desse

conjunto. Como C_2 é um conjunto dependente minimal, $C_2 \setminus \{f\} \in \mathcal{I}$. Agora, escolha um subconjunto I de $C_1 \cup C_2$ que seja maximal com as propriedades de conter $C_2 \setminus \{f\}$ e ser independente. Evidentemente, $f \notin I$. Mais ainda, como C_1 é um circuito, algum elemento g de C_1 não está em I . Como $f \in C_2 \setminus C_1$, os elementos f e g são distintos. Assim,

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|.$$

Portanto, aplicando (I_3) com $I_1 = I$ e $I_2 = (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$, respectivamente, o conjunto independente resultante contradiz a maximalidade de I . \square

A condição (C_3) é chamada de axioma de eliminação de circuito. Vamos mostrar que as condições $(C_1) - (C_3)$ caracterizam essas coleções de conjuntos que podem ocorrer como o conjunto de circuitos de um matroide.

Teorema 7. [29] *Seja E um conjunto e \mathcal{C} uma coleção de subconjuntos de E satisfazendo as condições $(C_1) - (C_3)$. Seja \mathcal{I} uma coleção de subconjuntos de E que não contém membros de \mathcal{C} . Então (E, \mathcal{I}) é um matroide tendo \mathcal{C} como sua coleção de circuitos.*

Dem.: Primeiro devemos mostrar que \mathcal{I} satisfaz $(I_1) - (I_3)$. Por (C_1) , \emptyset não contém nenhum membro de \mathcal{C} , logo $\emptyset \in \mathcal{I}$ e (I_1) é válido. Se I não contém nenhum membro de \mathcal{C} e I' está contido em I , então I' não contém membros de \mathcal{C} . Portanto, (I_2) é válido.

Para provar (I_3) , suponha que I_1 e I_2 sejam membros de \mathcal{I} e $|I_1| < |I_2|$. Suponha que (I_3) falhe para o par (I_1, I_2) . \mathcal{I} tem um membro que é um subconjunto de $I_1 \cup I_2$ e tem mais elementos que I_1 . Escolha tal subconjunto I_3 para o qual $|I_1 \setminus I_3|$ é mínima. Temos que $I_1 \setminus I_3$ é não-vazio, assim, podemos escolher um elemento e desse conjunto. Agora, para cada elemento $f \in I_3 \setminus I_1$, seja $T_f = (I_3 \cup \{e\}) \setminus \{f\}$. Assim, $T_f \subset I_1 \cup I_2$ e $|I_1 \setminus T_f| < |I_1 \setminus I_3|$. Portanto, $T_f \notin \mathcal{I}$, já que I_3 é o subconjunto de \mathcal{I} que tem $|I_1 \setminus I_3|$ minimal. Logo, T_f contém um membro C_f de \mathcal{C} e, evidentemente, $f \notin C_f$. Mais ainda, $e \in C_f$, caso contrário, $C_f \subset I_3$, contradizendo o fato de $I_3 \in \mathcal{I}$.

Seja g um elemento de $I_3 \setminus I_1$. Se $(C_g \cap (I_3 \setminus I_1)) = \emptyset$, então $C_g \subset ((I_1 \cap I_3) \cup \{e\}) \setminus \{g\} \subset I_1$, um absurdo. Portanto, existe um elemento $h \in C_g \cap (I_3 \setminus I_1)$. Temos que, $e \in C_g \cap C_h$, assim a condição (C_3) implica que existe um membro C de \mathcal{C} tal que $C \subset (C_g \cup C_h) \setminus \{e\}$. Mas ambos C_g e C_h são subconjuntos de $I_3 \cup \{e\}$ e, com isso, $C \subset I_3$, um absurdo. Portanto, (I_3) é válido e (E, \mathcal{I}) é um matroide M .

Para provar que \mathcal{C} é o conjunto $\mathcal{C}(M)$ de circuitos de M , basta usar as definições de \mathcal{C} e de circuitos para concluir que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) C é um circuito de M ;
- (ii) $C \notin \mathcal{I}(M)$ e $C \setminus \{x\} \in \mathcal{I}(M)$, $\forall x \in C$;
- (iii) C tem um membro C' de \mathcal{C} como subconjunto, mas C' não é um subconjunto próprio de C ;
- (iv) $C \in \mathcal{C}$.

□

Combinando o Lema 6, o Teorema 7 e as observações anteriores, temos o seguinte resultado.

Corolário 8. [29] *Seja \mathcal{C} um conjunto de subconjuntos de um conjunto E . Então \mathcal{C} é a coleção de circuitos de um matroide em E se, e somente se, \mathcal{C} satisfaz as seguintes condições:*

- (C_1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;
- (C_2) Se C_1 e C_2 são membros de \mathcal{C} e $C_1 \subset C_2$, então $C_1 = C_2$;
- (C_3) Se C_1 e C_2 são membros distintos de \mathcal{C} e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe um membro C_3 tal que $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$.

Além dos vetores matroides, outra classe fundamental de matroides foi estudada por Whitney. Tal classe consiste de matroides derivadas de grafos, que surgem da seguinte maneira:

Proposição 9. [29] *Seja E o conjunto de arestas de um grafo G e \mathcal{C} o conjunto dos subconjuntos de arestas de ciclos de G . Então \mathcal{C} é o conjunto de circuitos de um matroide em E .*

Dem.: Claramente \mathcal{C} satisfaz (C_1) e (C_2) . Para provar que \mathcal{C} satisfaz (C_3) , sejam C_1 e C_2 conjuntos de arestas de dois ciclos distintos em G que tem e como aresta em comum. Sejam u e v as extremidades de e . Vamos construir um ciclo de G cujo conjunto de arestas está contido em $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$.

Para $i = 1, 2$, seja P_i o caminho de u até v em G cujo conjunto de arestas é $C_i \setminus \{e\}$. Começando em u , atravessando P_1 em direção a v deixando w ser o primeiro vértice no qual a próxima aresta de P_1 não está em P_2 . Continue atravessando P_1 de w a v até que pela primeira vez um vértice x que é diferente de w mas está em P_2 é alcançado. Como ambos P_1 e P_2 terminam em v , tal vértice deve existir. Agora, juntando as seções de P_1 de w até x com a seção de P_2 de x até w . O resultado é um ciclo, cujo conjunto de arestas está contido em $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$. Portanto \mathcal{C} satisfaz (C_3) . □

Esse matroide derivado do grafo G é chamado de **matroide ciclo** ou matroide poligonal de G . Ele será denotado por $M(G)$.

Claramente o conjunto X de arestas é independente em $M(G)$ se, e somente se, X não contém o conjunto de arestas de um ciclo ou, equivalentemente, $G[X]$, o subgrafo induzido por X , não contém ciclos.

Exemplo 4. [29] Seja G o grafo ilustrado pela Figura 2.18 e $M = M(G)$.

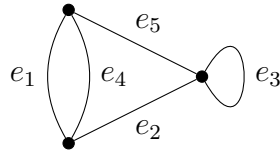


Figura 2.18: Grafo utilizado pelo Exemplo 4.

Então:

$$E(M) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \text{ e } \mathcal{C}(M) = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}.$$

Comparando M com o matroide $M[A]$ do Exemplo 3, vemos que, sobre a bijeção de ϕ de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ definida por $\phi(i) = e_i$, um conjunto X é um circuito em $M[A]$ se, e somente se, $\phi(X)$ é um circuito em M . Equivalentemente, um conjunto Y é independente em $M[A]$ se, e somente se, $\phi(Y)$ é independente em M . Portanto, os matroides $M[A]$ e M têm a mesma estrutura (são isomorfos), formalmente temos:

Definição 41. Dois matroides M_1 e M_2 são **isomorfos**, $M_1 \simeq M_2$, se existe uma bijeção ϕ de $E(M_1)$ em $E(M_2)$ tal que, $\forall X \subset E(M_1)$, $\phi(X)$ é independente em M_2 se, e somente se, X é independente em M_1 .

Um matroide que é isomorfo a um matroide ciclo de um grafo é chamado de **gráfico**. Na seção a seguir veremos outros exemplos de matroides que se originam de grafos e sua relação com os grafos matrogênicos, principal objeto de estudo deste trabalho.

3 GRAFOS MATROGÊNICOS

Os grafos matrogênicos são o principal objeto de estudo deste trabalho. Essa classe foi inicialmente estudada por Földes e Hammer em [15], e receberam esse nome devido à sua relação com a estrutura algébrica apresentada na seção anterior, os matroides.

3.1 Grafos Matrogênicos

Antes de definirmos os grafos matrogênicos, precisamos conhecer a classe dos grafos threshold. Essa classe, introduzida por Chvátal e Hammer [4] e por Henderson e Zalcstein [19] nos anos 70, é bastante estudada e desempenha um papel importante na Teoria de Grafos. Ela possui aplicações em áreas como ciência da computação, teoria do agendamento, etc. Para conhecer mais sobre essa classe e suas aplicações, recomendamos o livro [26].

Definição 42. Um **4-ciclo alternado** em um grafo $G = (V, E)$ é uma configuração que consiste em vértices distintos a, b, c, d tais que $ab, cd \in E$ e $ad, bc \notin E$. Considerando a presença ou ausência das arestas ac e bd , vemos que os vértices de um 4-ciclo alternado induzem um caminho P_4 , um ciclo C_4 ou um emparelhamento $2K_2$.

A Figura 3.1 ilustra um 4-ciclo alternado e seus possíveis subgrafos induzidos.

Definição 43. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **threshold** se, e somente se, G não contém um 4-ciclo alternado.

Consequentemente, um grafo é dito threshold se, e somente se, ele é livre de $\{P_4, C_4, 2K_2\}$ como subgrafos induzidos.

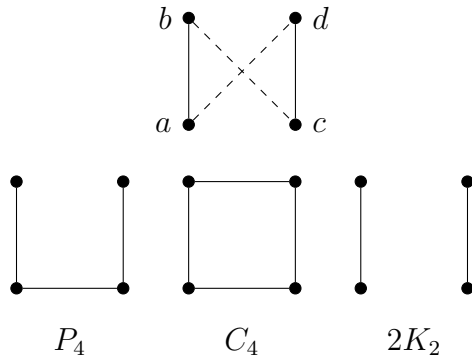


Figura 3.1: 4-ciclo alternado e possíveis subgrafos induzidos.

A Tabela 3.1 nos mostra todos os grafos threshold de até 4 vértices (todos os grafos com 1, 2 ou 3 vértices são threshold).

Tabela 3.1: Grafos threshold com até 4 vértices.

Dado um grafo G , na subseção anterior, vimos matroides que se originavam de ciclos em G . Aqui, estudaremos matroides que se originam de 4-ciclos alternados.

Definição 44. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e \mathcal{I}_E a coleção de subconjuntos de arestas tais que nenhum par de arestas induz um 4-ciclo alternado em G . Dizemos que G é **matroidal** se $M = (E, \mathcal{I}_E)$ é um matroide.

A Figura 3.2 ilustra um grafo matroidal.

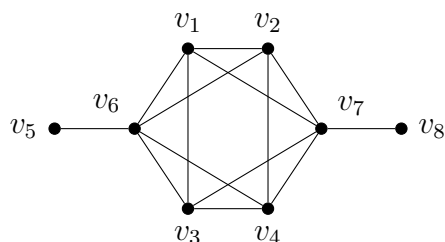


Figura 3.2: Exemplo de um grafo matroidal.

Os circuitos associados a esse matroide representam os conjuntos de duas arestas cujas extremidades induzem um 4-ciclo alternado em G . Para ver isso, basta notar que os conjuntos dependentes são todos aqueles subconjuntos de E que não estão em \mathcal{I}_E e portanto induzem um 4-ciclo alternado. Dentre esses conjuntos, os minimais são aqueles formados por duas arestas que induzem o menor 4-ciclo alternado, o grafo $2K_2$.

Observação 10. Os grafos matroidais foram estudados por Peled [31], que apresentou sua estrutura e os caracterizou por meio de duas configurações proibidas, o grafo C_5 e a configuração \mathcal{F} da Definição 47.

Ao contrário dos grafos matroidais, cujos conjuntos independentes eram sobre o conjunto de arestas, Földes e Hammer [15] definiram os conjuntos independentes sobre o conjunto de vértices.

Definição 45. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto de vértices $V' \subset V$ é **threshold independente** se $G[V']$ é um grafo threshold. Considere \mathcal{I}_V a família de conjuntos de vértices threshold independentes.

Podemos enfim definir os grafos matrogênicos.

Definição 46. [15] Um grafo $G = (V, E)$ é **matrogênico** se (V, \mathcal{I}_V) é um matroide.

O Exemplo 5 ilustra bem essa definição.

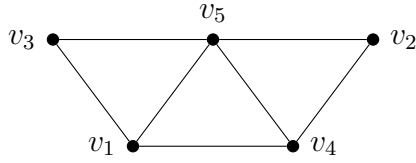


Figura 3.3: Grafo utilizado pelo Exemplo 5.

Exemplo 5. Considere o grafo G ilustrado pela Figura 3.3.

O primeiro passo para determinar se o grafo G é matrogênico a partir da definição é encontrar \mathcal{I}_V , e para isso, devemos olhar para os subgrafos induzidos por todos os subconjuntos de V .

Temos que G não é threshold, visto que os vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ induzem um P_4 . Observando os demais conjuntos, percebemos que, os únicos conjuntos que não pertencem a \mathcal{I}_V são $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Portanto, $\mathcal{I}_V = \{\emptyset, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}\} \cup \{V' \subset V : |V'| \leq 3\}$.

Claramente \mathcal{I}_V satisfaz as condições (I_1) e (I_2) da Definição 40. Para ver que \mathcal{I}_V satisfaz a condição (I_3) , devemos pegar dois conjuntos $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_V$ com $|I_2| > |I_1|$ e verificar que sempre existe um elemento $v \in I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup \{v\} \in \mathcal{I}_V$.

Por exemplo, tomando $I_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $I_1 = \{v_3, v_4, v_5\}$, temos que $I_2 \setminus I_1 = \{v_2\}$. Logo, $I_1 \cup \{v_2\} = I_2 \in \mathcal{I}_V$. Agora, basta verificar que a condição (I_3) é válida para todos os outros subconjuntos de \mathcal{I}_V .

Como $M = (V, \mathcal{I}_V)$ satisfaz as condições $(I_1) - (I_3)$, M é um matroide e, portanto, G é um grafo matrogênico.

Definitivamente, verificar se um grafo é ou não matrogênico pela definição não é muito eficaz. Na seção a seguir, veremos algumas caracterizações para essa classe. Em particular, grafos matrogênicos podem ser caracterizados apenas pela configuração proibida \mathcal{F} que será apresentada na Definição 47. Da Observação 10 se-

que a classe dos grafos matrogênicos contém a classe dos grafos matroidais, que por sua vez contém a classe dos grafos threshold. Além disso, os grafos matrogênicos representam uma subclasse dos **unigrafos**[2], grafos que podem ser determinados pela sua sequência de graus. Essa última inclusão pode ser encontrada em [27]. O diagrama da Figura 3.4 ilustra bem essa ideia.

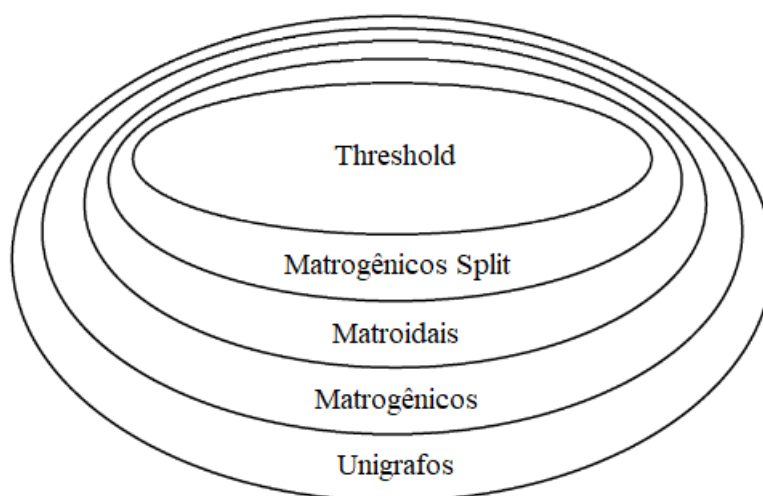


Figura 3.4: Relações de inclusão entre subclasses dos unigrafos.

3.2 Caracterizações

3.2.1 Caracterizando os Grafos Matrogênicos

O objetivo dessa subseção é apresentar caracterizações para os grafos matrogênicos. Como vimos na subseção anterior, diferentemente dos grafos matroidais, os conjuntos independentes dos matroides associados aos grafos matrogênicos são sobre o conjunto de vértice do grafo. Para os grafos matroidais os circuitos eram os conjuntos de duas arestas que induziam um 4-ciclo alternado, como agora estamos olhando para os vértices, os circuitos se tornam os conjuntos de quatro vértices que induzem um 4-ciclo alternado.

De acordo com o Teorema 7, podemos determinar matroides pelos seus circuitos, sendo assim, os grafos matrogênicos também podem ser determinados pelos circuitos de seus matroides associados. Resumindo, temos as seguintes proposições.

Proposição 11. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $\zeta(G)$ o conjunto de subconjuntos de V que induzem os grafos $2K_2, C_4$ ou P_4 , ou seja, que induzem um 4-ciclo alternado. Temos que G é matrogênico se, e somente se, $M = (V, \mathcal{I}_V)$ é um matroide e $\zeta(G)$ representa os circuitos de M .*

Ou ainda, da definição de circuitos, podemos reescrever a Proposição 11 de uma maneira mais conveniente que irá nos ajudar com resultados futuros.

Proposição 12. *Um grafo é matrogênico se, e somente se, sempre que C_1 e C_2 são conjuntos distintos de 4 vértices, cada um induzindo um 4-ciclo alternado, compartilhando um vértice x , então $C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ contém um 4-ciclo alternado.*

A primeira caracterização que iremos apresentar se dá por meio de uma configuração proibida que definiremos a seguir.

Definição 47. Uma configuração \mathcal{F} consiste em vértices A, B, C, D, E tais que A é adjacente a B, C , mas não a D , enquanto E é adjacente a D , mas não a B e C . Como em todas configurações, arestas não especificadas (no caso, entre B, C, D e entre A e E) podem ou não existir. Dizemos que A, B, C, D, E geram a configuração \mathcal{F} , nessa ordem, por $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$.

A Figura 3.6 ilustra a configuração proibida $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$.

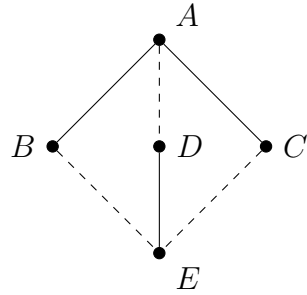


Figura 3.5: Configuração proibida $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$.

A Figura 3.6 ilustra todos os possíveis grafos induzidos pela configuração \mathcal{F} .

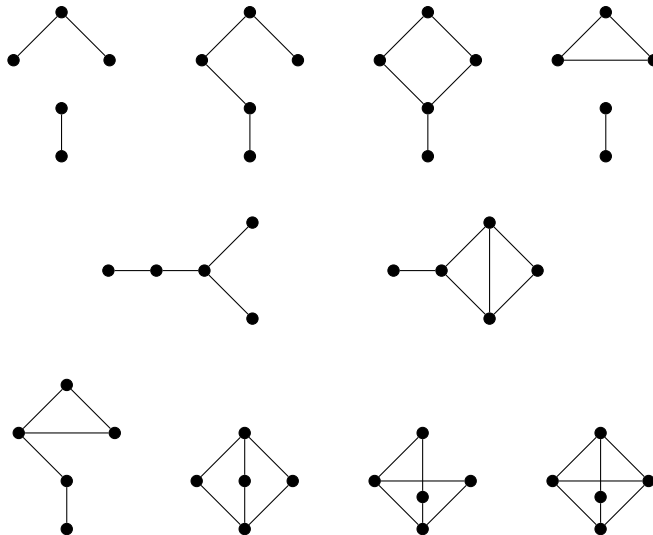


Figura 3.6: Possíveis grafos induzidos pela configuração \mathcal{F} .

O lema a seguir relaciona a configuração proibida \mathcal{F} com 4-ciclos alternados, e será crucial para obtermos as caracterizações desejadas.

Lema 13. [26] *Para um grafo G , as seguintes condições são equivalentes:*

1. G não tem a configuração \mathcal{F} .
2. Se dois 4-ciclos alternados de G têm exatamente três vértices em comum, então sua união induz um C_5 .

Dem.: (2) \implies (1) : Suponha por absurdo que G tenha a configuração \mathcal{F} . A configuração tem dois 4-ciclos alternados com três vértices em comum, $ADEB$ e $ADEC$, mas $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$ não pode induzir um C_5 . Absurdo.

(1) \implies (2) : Suponha que G tenha dois 4-ciclos alternados nos conjuntos de vértices $\{A, B, C, D\}$ e $\{A, B, C, E\}$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que AB e CD são arestas e que BC e DA não são. Note que, se EA é uma aresta, então EC também é, caso contrário, teríamos $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$, que é um absurdo.

Analogamente, EA é uma aresta se EC é uma aresta, e EB é uma aresta se, e somente se, ED é uma aresta.

Como $\{A, B, C, E\}$ induz um 4-ciclo alternado, as considerações acima implicam que, se EA e EC são arestas, então AC não é uma aresta, nem EB e ED . Agora, se BD não é uma aresta, temos $\mathcal{F}(A, B, E, C, D)$, absurdo. Portanto, BD é uma aresta, e nossos 5 vértices induzem um C_5 . Se EA e EC não forem arestas, então EB, ED e AC são arestas. Agora, se BD não é uma aresta, temos um C_5 induzido, caso contrário, temos um $\mathcal{F}(D, B, E, A, C)$. \square

Agora estamos prontos para apresentar a primeira caracterização dos grafos matrogênicos.

Teorema 14. [26] *Um grafo é matrogênico se e somente se não contém a configuração \mathcal{F} .*

Dem.: Provaremos a primeira implicação por sua contrapositiva: Se G contém a configuração \mathcal{F} , então G não é matrogênico.

Suponha que G contenha a configuração \mathcal{F} . Note que, em $\mathcal{F}(A, B, C, D, E)$, $C_1 = \{A, B, E, D\}$ e $C_2 = \{A, C, E, D\}$ induzem 4-ciclos alternados e compartilham o vértice D , mas $C_1 \cup C_2 - \{D\} = \{A, B, C, E\}$ não contém um 4-ciclo alternado. Portanto, G não é matrogênico pela Proposição 12.

Reciprocamente, suponha que G não tenha a configuração \mathcal{F} e que C_1 e C_2 sejam conjuntos distintos de 4 vértices, cada um induzindo um 4-ciclo alternado, e compartilhando um vértice x . Abaixo, vamos mostrar que $C_1 \cup C_2$ induzem um emparelhamento de 3 arestas, uma rede de ordem 3, um C_5 , ou seus complementos. Cada um desses grafos é matrogênico, e portanto, pela Proposição 12, $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ contém um 4-ciclo alternado, como requerido. Vamos analisar os casos.

Caso 1: C_1 e C_2 compartilham exatamente um vértice. A situação é ilustrada pela Figura 3.7:

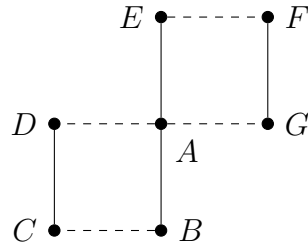


Figura 3.7: Configuração presente no Caso 1 do Teorema 14.

Nesse caso, EC deve ser uma aresta, caso contrário, temos $\mathcal{F}(A, B, E, D, C)$, contrariando nossa hipótese. Mas então, temos $\mathcal{F}(E, A, C, F, G)$, que é um absurdo. Portanto, esse caso é impossível.

Caso 2: C_1 e C_2 compartilham exatamente 2 vértices, que são adjacentes. A Figura 3.8 ilustra esse caso.

Sejam $C_1 = \{A, B, C, D\}$ e $C_2 = \{A, B, E, F\}$ onde AB é uma aresta. Vamos diferenciar os três sub-casos dependendo de quantas das arestas CD e EF estão presentes.

Caso 2.1: Ambas arestas CD e EF estão presentes. Podemos então assumir sem perda de generalidade que AD, BC, AF e BE não são arestas. Se a aresta CF estivesse presente, então $\{A, B, C, F\}$ induzem um 4-ciclo alternado, mas $\{A, B, C, D, F\}$

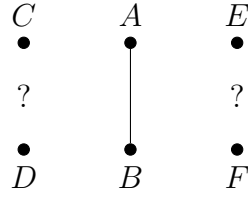


Figura 3.8: Configuração presente no Caso 2 do Teorema 14.

não pode induzir um C_5 , contrariando o Lema 13. Portanto CF não é uma aresta, e analogamente DE também não é, como ilustrado na Figura 3.9.

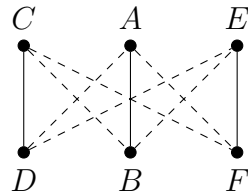


Figura 3.9: Configuração presente no Caso 2.1 do Teorema 14.

Afirmamos que $\{A, C, E\}$ é um conjunto estável ou um clique. Caso contrário, podemos assumir sem perda de generalidade que CE é uma aresta e AC não é uma aresta. Então $\{A, B, C, E\}$ induz um 4-ciclo alternado, mas $\{A, B, C, E, F\}$ pode não induzir um C_5 , contrariando o Lema 13. Analogamente $\{B, D, F\}$ é um conjunto estável ou um clique. Mais ainda, $\{A, C, E\}$ e $\{B, D, F\}$ não podem ser ambos cliques, pois nesse caso, $\{C, D, E, F\}$ induz um 4-ciclo alternado, mas $\{A, C, D, E, F\}$ não pode induzir um C_5 , contrariando o Lema 13. Concluimos que ou $\{A, C, E\}$ e $\{B, D, F\}$ são ambos estáveis, e nesse caso os 6 vértices induzem um emparelhamento $3K_2$, se não um é estável e um é um clique, e nesse caso os 6 vértices induzem uma rede de ordem 3.

Caso 2.2: Ambas arestas CD e EF são ausentes. Então podemos assumir sem perda de generalidade que AC, BD, AE e BF são arestas e AD, BC, AF e BE não são arestas, como na Figura 3.10.

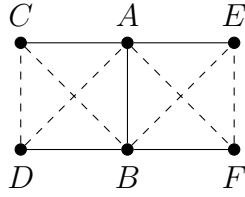


Figura 3.10: Configuração presente no Caso 2.2 do Teorema 14.

Segue que $\{A, B, C, D\}$ e $\{A, B, C, F\}$ induzem 4-ciclos alternados, apesar de $\{A, B, C, D, F\}$ não poder induzir um C_5 , contrariando o Lema 13. Logo, esse sub-caso é impossível.

Caso 2.3: Exatamente uma das arestas CD e EF está presente. Digamos que CD esteja presente e EF ausente. Podemos assumir sem perda de generalidade que AE e BF são arestas e AF e BE não são. Se BD estivesse presente, então AD deve estar ausente para evitar o triângulo ABD , e isso nos dá $\mathcal{F}(B, D, F, E, A)$, absurdo. Portanto, BD não deve ser uma aresta, e analogamente AC, AD e BC não são arestas. Além disso, se FD está presente, teremos $\mathcal{F}(D, C, F, B, A)$, um absurdo. Portanto, FD não é uma aresta, como pode ser visto na Figura 3.11.

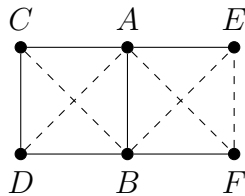


Figura 3.11: Configuração presente no Caso 2.3 do Teorema 14.

Segue que $\{A, B, C, D\}$ e $\{B, C, D, F\}$ induzem um 4-ciclo alternado apesar de $\{A, B, C, D, F\}$ não poder induzir um C_5 , contradizendo o Lema 13. Portanto, esse subcaso é impossível.

Caso 3: C_1 e C_2 compartilham exatamente dois vértices, que não são adjacentes.

Primeiro, note que o conjunto de grafos induzidos por 4-ciclos alternados é fechado por complemento, assim como o conjunto dos grafos induzido pela

configuração \mathcal{F} e o grafo C_5 . Trabalhando com o grafo complementar, temos que C_1 e C_2 compartilham exatamente dois vértices, que são adjacentes. Sendo assim, segue do Caso 2 que os 6 vértices induzem: o complementar de um emparelhamento, $\overline{3K_2}$, ou um complemento de rede de ordem 3.

Caso 4: C_1 e C_2 compartilham exatamente 3 vértices. Então, pelo Lema 13, C_1 e C_2 induzem um C_5 . □

Os corolários a seguir seguem do Teorema 14.

Corolário 15. [26] *Todos subgrafos induzidos de um grafo matrogênico são matrogênicos.*

Dem.: Seja G um grafo matrogênico. Como G não possui a configuração \mathcal{F} , seus subgrafos induzidos também não possuem. Portanto, os subgrafos induzidos de G também são matrogênicos. □

Quando isso acontece, dizemos que a classe de grafos é **hereditária**. O seguinte resultado, que pode ser encontrado em [20], relaciona classes de grafos hereditárias e classes livres de subgrafos induzidos.

Teorema 16. [20] *Uma classe de grafo \mathcal{C} é dita hereditária se, e somente se, \mathcal{C} é livre de alguma família de grafos.*

Corolário 17. [26] *O complemento de um grafo matrogênico é matrogênico.*

Dem.: Sejam G um grafo matrogênico e \overline{G} seu grafo complementar. Suponha que \overline{G} não seja matrogênico. Nesse caso, \overline{G} teria a configuração \mathcal{F} , mas como vimos anteriormente, \mathcal{F} é fechada por complemento. Assim, G teria a configuração \mathcal{F} , o que é um absurdo. Portanto, \overline{G} é matrogênico. □

A seguir iremos nos referir a um emparelhamento perfeito com duas ou mais arestas (o grafo tK_2 com $t \geq 2$), seu complementar (o grafo cocktail party, $CP(2t)$) e o ciclo C_5 como **núcleos**.

Corolário 18. [26] *Todos os núcleos são matrogênicos.*

Esse último corolário é consequência imediata do fato de que nenhum núcleo apresenta a configuração \mathcal{F} como subgrafo induzido.

Vamos transformar o problema de encontrar a estrutura de grafos matrogênicos no problema de encontrar a estrutura dos grafos matrogênicos split. Especificamente, veremos que o conjunto de vértices de um grafo matrogênico pode ser particionado em $V_S \cup V_K \cup V_C$, onde $V_S \cup V_K$ induz um grafo matrogênico split com V_S sendo um conjunto estável, V_K uma clique, e V_C induz um núcleo. Além disso, todo vértice de V_C é adjacente a todo vértice de V_K e a nenhum vértice de V_S . Reciprocamente, todo grafo com essa propriedade é matrogênico.

Teorema 19. [26] *Seja G um grafo cujo conjunto de vértices é particionado em três conjuntos disjuntos $V_S \cup V_K \cup V_C$, onde $V_S \cup V_K$ induz um grafo matrogênico split com conjunto estável V_S e clique V_K , V_C induz um núcleo, e todo vértice de C é adjacente a todo vértice de V_K e a nenhum vértice de V_S . Então G é matrogênico.*

Dem.: Como grafos induzidos por $Q = V_S \cup V_K$ e V_C são matrogênicos, só precisamos garantir que o grafo induzido pela união desses conjuntos, satisfazendo as propriedades dadas, continue sendo matrogênico. Para tal, é suficiente mostrar que nenhum 4-ciclo alternado pode acontecer simultaneamente em Q e V_C . Fazendo isso garantimos que o conjunto de circuitos de G é formado pela união dos circuitos de Q e V_C , que induzem grafos matrogênicos.

Então, suponha por absurdo que os vértices x, y, z, u induzem um 4-ciclo alternado e que $x \in V_C$ e $y \in Q$. Também vamos assumir, sem perda de generalidade que $y \in V_K$, pois se $y \in V_S$, então ou z ou u devem estar em V_K , e o renomeamos para y . Então $z \in V_S \cup V_C$, pois se $z \in V_K$, então o 4-ciclo alternado contém um triângulo xyz , absurdo.

Analogamente, $u \in V_S \cup V_C$. Mas agora, se $z, u \in V_S$, então $\{x, z, u\}$ é estável. Se $z, u \in V_C$, então y tem 3 vizinhos (x, z, u) no 4-ciclo alternado, e se $z \in V_S$ e $u \in V_C$, então ou y tem 3 vizinhos ou z tem 3 não vizinhos no 4-ciclo alternado, dependendo da aresta yz estar presente ou não. Em todos os casos temos um absurdo. \square

Para provar a recíproca do Teorema 19, vamos provar os seguintes lemas.

Lema 20. [26] *Seja P uma cópia de C_5 em um grafo matrogênico G . Então os vértices de G fora de P se particionam em uma clique cujos vértices são adjacentes a todos os vértices de P e um conjunto estável cujos vértices não são adjacentes a nenhum vértice de P . Mais ainda, P é unicamente determinado por G .*

Dem.: Denote os vértices de P por A, B, C, D, E ordenados ciclicamente ao longo de C_5 . Seja x um vértice fora de P . Afirmamos que se x é adjacente a A , então ele também é adjacente a B .

Suponha que, se possível, xA é uma aresta e xB não é uma aresta. Então $\{A, B, C, E\}$ e $\{A, B, C, x\}$ induzem 4-ciclos alternados, mas $\{A, B, C, E, x\}$ não pode induzir um C_5 , já que A tem 3 vizinhos nesse conjunto, contrariando o Lema 13. Segue que todo vértice fora de P é adjacente a todo ou a nenhum vértice de P .

Se dois vértices x e y fora de P são adjacentes a todo vértice de P , então eles são adjacentes entre eles, caso contrário G tem $\mathcal{F}(x, A, B, y, D)$, contrariando o Teorema 14. Esses vértices formam a clique.

Se dois vértices x e y fora de P não são adjacentes a nenhum vértice de P , no grafo complementar eles são adjacentes a todos vértices de P e, como visto anteriormente, eles são adjacentes entre si, logo, fora do complementar eles não são adjacentes entre si. Esses vértices formam o conjunto estável.

A unicidade de P segue do fato de que nenhum C_5 pode estar simultaneamente em P e $G - P$, e que um grafo split não contém C_5 . \square

Lema 21. [26] *Seja G um grafo matrogênico e M um emparelhamento maximal induzido em G tendo ao menos quatro vértices. Então, os vértices de G fora de M se particionam em uma clique, cujos vértices são adjacentes a todos vértices de M , e um conjunto estável, cujos vértices não são adjacentes a nenhum vértice de M . Mais ainda, M é unicamente determinado por G . O mesmo é válido se M é o complemento de um emparelhamento perfeito maximal induzido tendo ao menos quatro vértices.*

Dem.: Sejam AB e CD arestas distintas de M e x um vértice fora de M . Se x é adjacente a A , então ele deve ser adjacente a C , caso contrário G teria $\mathcal{F}(A, B, x, D, C)$. Pelo mesmo argumento, x deve ser adjacente a B , e portanto a todo vértice de M . Segue que todo vértice fora de M é adjacente a todo vértice de M ou a nenhum vértice de M .

Se dois vértices x e y fora de M são adjacentes a todos vértices de M , então eles são adjacentes entre si, caso contrário $\{A, C, x, y\}$ e $\{B, C, x, y\}$ induzem 4-ciclos alternados, apesar de $\{A, B, C, x, y\}$ não induzir um C_5 .

Se dois vértices x e y fora de M não são adjacentes a todo vértice de M , então eles não são adjacentes entre si, pois caso contrário, poderíamos adicioná-los a M , contradizendo sua maximalidade.

A unicidade de M segue do fato de que nenhum emparelhamento perfeito com duas ou mais arestas pode acontecer em ambos M e $G - M$, e que um grafo split não pode conter um emparelhamento perfeito com duas ou mais arestas. Isso prova o lema se M é um emparelhamento perfeito. Se M é o complemento de um emparelhamento perfeito, o resultado segue trabalhando no complementar de G . \square

Agora estamos prontos para demonstrar a recíproca do Teorema 19.

Teorema 22. [26] *Um grafo matrogênico ou é split ou seu conjunto de vértices pode ser particionado unicamente em $V_S \cup V_K \cup V_C$ de modo que $Q = V_S \cup V_K$ induz um grafo split, V_S é um conjunto estável e V_K é um clique, V_C induz um núcleo, e todo vértice de V_C é adjacente a todo vértice de V_K e a nenhum vértice de V_S .*

Dem.: Se G tem um núcleo induzido, o resultado segue dos Lemas 20 e 21. Se G não tem núcleo induzido, então ele não tem $2K_2$, C_4 ou C_5 induzido, e portanto ele é um grafo split pelo Teorema 1. \square

Portanto, podemos reescrever os Teoremas 19 e 22 como:

Teorema 23. *Um grafo é matrogênico se e somente se seu conjunto de vértices V pode ser particionado em três conjuntos distintos V_K, V_S, V_C , de modo que:*

- (i) $V_K \cup V_S$ induz um subgrafo matrogênico split no qual V_K é uma clique e V_S é um conjunto estável.
- (ii) V_C induz um núcleo, onde um núcleo é um emparelhamento perfeito um cocktail party de ordem n ou um C_5 .
- (iii) Cada vértice de V_C é adjacente a todo vértice de V_K e a nenhum vértice de V_S .

Observe que **grafos matrogênicos split** são grafos matrogênicos onde $V_C = \emptyset$.

De acordo com o Teorema 23 um grafo matrogênico pode ser representado como na Figura 3.12, onde as duas linhas representam a adjacência entre todos os vértices de V_K e V_C , e a linha pontilhada induz um grafo matrogênico split com conjunto de vértices V_K e V_S .

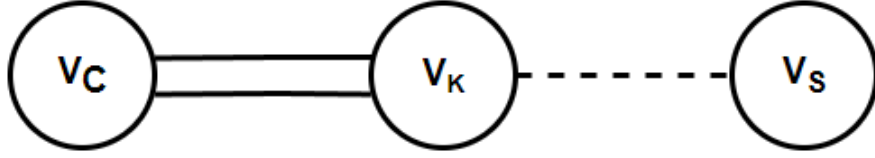


Figura 3.12: Representação geral de um grafo matrogênico.

Esse teorema reduz o problema de encontrar a estrutura de grafos matrogênicos para o problema de encontrar a estrutura de grafos matrogênicos split. Para tal, vamos caracterizar os grafos matrogênicos split.

3.2.2 Caracterizando os Grafos Matrogênicos Split

Na subseção anterior, vimos que para compreender a estrutura de um grafo matrogênico, é suficiente entender a estrutura de um grafo matrogênico split. Desse modo, temos como objetivo nessa subseção caracterizar os grafos matrogênicos split. Para isso, considere as definições a seguir.

Definição 48. Seja k um inteiro não negativo. A família $\{N_i : i \in I\}$ de conjuntos indexados por um conjunto I é dito um **k-sistema** se:

- (i) $|N_i| = k, \forall i \in I$;
- (ii) $|(N_i - N_j) \cup (N_j - N_i)| = 2$, se $N_i \neq N_j$;
- (iii) Se $N_i = N_j$ para índices distintos $i, j \in I$, então $N_i = N_j, \forall i, j \in I$.

Seja G um grafo. Se X é um subconjunto de $V(G)$, então denotamos por X_k o conjunto de vértices x em X tais que o grau de x em G é k . O seguinte teorema, provado por Földes e Hammer em [15], nos dá uma maneira de dizer quando um grafo split é matrogênico.

Teorema 24. [15] *Seja $G = (V, E)$ um grafo split tal que V pode ser particionado em $V = S \cup K$, onde S é um conjunto estável e K é uma clique. Então, G é matrogênico se, e somente se,*

- (i) *para cada $k \geq 0$, a família $\{N_G(x) : x \in S_k\}$ é um k -sistema, e*
- (ii) *para todo $k' > k \geq 0$, se $x \in S_k$ e $y \in S_{k'}$, então $N_G(x) \subset N_G(y)$.*

O seguinte resultado é um corolário do Teorema 24.

Corolário 25. [15] *Seja G um grafo matrogênico split. Então G ou \overline{G} tem um vértice de grau, no máximo, 1.*

Dem.: Seja $G = (V, E)$ um grafo matrogênico split tal que G não tenha vértices de grau 0 ou 1. Como G é split, podemos particionar V como $V = K \cup S$, onde K é uma clique e S é um conjunto estável. Considere $|K| = p$ e $|S| = q$. Pelo item (ii) do Teorema 24, existe um k_{max} tal que $x \in S_{k_{max}}$ e, se $y \in S_k$ com $k < k_{max}$, temos que $N_G(y) \subset N_G(x)$. O resultado segue olhando o vértice $v \in K$ que é adjacente a q ou $q - 1$ vértices do conjunto estável. Esse vértice v tem grau $n - 1$ ou $n - 2$ em G . Olhando para \overline{G} , esse vértice tem grau 0 ou 1, como queríamos. \square

O próximo resultado nos dá uma caracterização dos grafos split matrogênicos por configurações proibidas.

Proposição 26. [15] *Um grafo split é matrogênico se, e somente se, nenhum de seus subgrafos induzidos é isomorfo a um dos grafos ilustrados na Figura 3.13.*

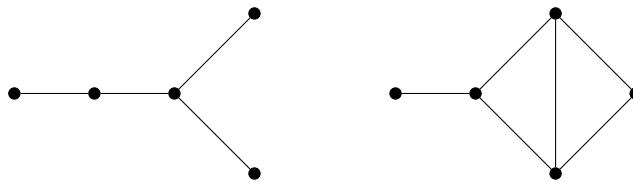


Figura 3.13: Grafos proibidos.

Dem.: Esse resultado é uma consequência direta do Teorema 14. Basta notar que subgrafos induzidos de grafos split são split e que os únicos subgrafos induzidos da configuração proibida \mathcal{F} que são split são os grafos ilustrado pela Figura 3.13. \square

A seguir, provaremos uma série de lemas que são essenciais para alcançar a caracterização desejada dos grafos matrogênicos split.

Lema 27. [10] *Seja G um grafo matrogênico. Se o grafo G' é obtido de G adicionando um vértice isolado, então G' é matrogênico.*

Dem.: Seja $G = (V, E)$ um grafo matrogênico. Podemos particionar V como $V = V_K \cup V_S \cup V_C$. Seja $G' = (V', E)$ o grafo obtido de G adicionando o vértice v . Note que podemos particionar V' em: $V' = V_K \cup (V_S \cup \{v\}) \cup V_C$. Portanto G' é um grafo matrogênico pelo Teorema 23. \square

Relembrando a notação utilizada pela Proposição 11, dado um grafo $G = (V, E)$, seja $\zeta(G)$ o conjunto de subconjuntos de V que induzem um 4-ciclo alternado.

Lema 28. [10] *Se $G_1 + G_2$ está bem definido, então $\zeta(G_1 + G_2) = \zeta(G_1) \cup \zeta(G_2)$.*

Dem.: Suponha que $G_1 + G_2$ esteja bem definido. Assim, $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, onde $V(G_2) = S_2 \cup K_2$ de modo que S_2 é um conjunto estável e K_2 é uma clique. Para mostrar que $\zeta(G_1 + G_2) = \zeta(G_1) \cup \zeta(G_2)$, basta mostrar que novos 4-ciclos alternados não surgem ao fazer a junção parcial entre G_1 e G_2 . Vamos considerar 4 vértices pertencentes a $V(G_1)$ e $V(G_2)$, e analisar os casos. Para o primeiro caso, temos 3 vértices em $V(G_1)$, que representaremos em vermelho, e apenas um em $V(G_2)$. Para esse primeiro caso temos que analisar todas as combinações possíveis, todas as adjacências possíveis entre os vértices de $V(G_1)$ e considerar o vértice de $V(G_2)$ estando em S_2 ou K_2 . A Figura 3.14 nos dá todas essas possíveis combinações.

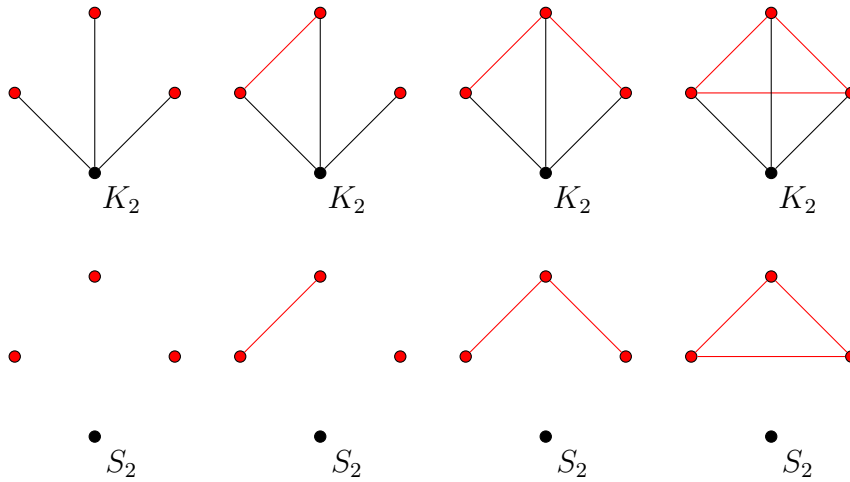


Figura 3.14: Possibilidades para o primeiro caso.

Resta analisar os outros casos, onde temos dois vértices em cada conjunto e onde temos um vértice em $V(G_1)$ e três vértices em $V(G_2)$, e seus respectivos subcasos. A Tabela 3.2 nos dá todos os subgrafos induzidos de 4 vértices possíveis de se obter, a menos de isomorfismo. O resultado segue do fato de que nenhum deles é um 4-ciclo alternado.

Tabela 3.2: Subgrafos induzidos que podem surgir de $G_1 + G_2$.

□

Lema 29. [10] *Suponha que $G_1 + G_2$ esteja bem definido. Então $G_1 + G_2$ é matro-gênico se, e somente se, G_1 e G_2 são matrogênicos.*

Dem.: Seja $G = G_1 + G_2$, tal que $G = (V, E)$, $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Se G é matrogênico, então $\zeta(G)$ representa os circuitos do matroide $M = (V, \mathcal{I}_V)$, ou seja, os conjuntos de 4 vértices que induzem 4-ciclos alternados. Como G está bem definido, do Lema 28, temos que $\zeta(G) = \zeta(G_1) \cup \zeta(G_2)$, em outras palavras, os conjuntos de 4 vértices que induzem 4-ciclos alternados em G representa a união dos conjuntos de 4 vértices que induzem 4-ciclos alternados em G_1 e G_2 . Esses conjuntos são os circuitos dos matroides $M_1 = (V_1, \mathcal{I}_{V_1})$ e $M_2 = (V_2, \mathcal{I}_{V_2})$ que estão associados a G_1 e G_2 , respectivamente. Portanto, G_1 e G_2 são matrogênicos.

Reciprocamente, se G_1 e G_2 são grafos matrogênicos, então $\zeta(G_1)$ e $\zeta(G_2)$ representam os circuitos dos matroides $M_1 = (V_1, \mathcal{I}_{V_1})$ e $M_2 = (V_2, \mathcal{I}_{V_2})$ associados a G_1 e G_2 , respectivamente. Como $G = G_1 + G_2$ está bem definido, do Lema 28, temos que $\zeta(G) = \zeta(G_1) \cup \zeta(G_2)$, ou seja, os conjuntos de 4 vértices que induzem 4-ciclos alternados em G representa a união dos conjuntos de 4 vértices que induzem 4-ciclos alternados em G_1 e G_2 . Logo, $\zeta(G)$ representa os circuitos do matroide $M = (V, \mathcal{I}_V)$ associado a G . Portanto G é matrogênico. \square

A partir de agora, denotaremos o grafo rede de ordem n , apresentado na Definição 25, por H_n .

Lema 30. [10] *Seja G um grafo matrogênico split, tal que nem G e nem \overline{G} tenham um vértice isolado. Então existe um inteiro n maior que um, tal que G ou \overline{G} é a junção parcial de um grafo matrogênico split G' com H_n .*

Dem.: Está claro do Corolário 25 e as suposições do Lema 30 que G ou \overline{G} , vamos supor G , tem um vértice de grau 1. Seja x_0 esse vértice e y_0 o vértice adjacente a x_0 . Suponha que $V(G)$ seja particionando em um conjunto estável S e uma clique K . Então x_0 pertence a S , já que nem G nem \overline{G} tem um vértice isolado. Segue que $y_0 \in K$. Como y_0 não é isolado em \overline{G} , deve existir um vértice $x_1 \in S$ adjacente a y_0 em \overline{G} . Mas x_1 não é isolado em G , portanto, existe um vértice $y_1 \in K - \{y_0\}$ adjacente a x_1 em G . Portanto, concluímos que existe um subgrafo induzido H de

G tal que $x_0 \in V(H)$ e H é isomorfo a algum H_n (por exemplo, $G(\{x_0, x_1, y_0, y_1\})$) é tal grafo). Vamos escolher tal H com $V(H)$ maximal.

Vamos provar que G é a junção parcial de $G' = G - V(H)$ e H . Seja $S_1 = S \cap V(G')$, $K_1 = K \cap V(G')$, $S_2 = S - S_1$ e $K_2 = K - K_1$. Primeiro provaremos que todo $x \in S_2$ não é adjacente a nenhum vértice $y \in V(G')$.

Suponha que exista $x \in S_2$ adjacente a todo vértice $y \in V(G')$. Então $y \in K_1$ (já que S é estável) e x difere de x_0 (já que x_0 é adjacente apenas a y_0 e $y_0 \in K_2$, não em K_1). Seja z o vértice em K_2 que é adjacente a x . É fácil ver que $G(\{x_0, y_0, x, y, z\})$ é isomorfo ao segundo grafo visto no Corolário 26. Mas, pelo Corolário 26, esse subgrafo induzido de G não é matrogênico. Portanto, concluímos pelo Lema 27 que G também não é matrogênico, absurdo.

A seguir vamos provar que todo $y \in K_2$ é adjacente a todo vértice $x \in V(G')$. Suponha que exista $y \in K_2$ que não é adjacente a algum vértice $x \in V(G')$. É claro que $x \in S_1$ (já que K é completo). Da maximalidade de H e pela suposição que x não é isolado, deduzimos que x é adjacente a um vértice $y_1 \in K_2$. Seja z e z_1 os vértices em S_2 que são adjacentes a y e y_1 , respectivamente. É fácil ver que $G(\{x, y, y_1, z, z_1\})$ é isomorfo ao primeiro grafo apresentado no Corolário 26. Pelo Corolário 26, esse subgrafo induzido de G não é matrogênico. Por outro lado, esse grafo deve ser matrogênico por causa do Lema 27 e pela suposição que G é matrogênico. Novamente, um absurdo. Portanto, concluímos que G é a junção parcial de G' e H . \square

Definição 49. Seja G um grafo. A junção parcial de G e H_n será chamada de **n-aumentação** de G .

O teorema a seguir, que caracteriza os grafos matrogênicos split, é consequência do Corolário 17 e dos Lemas 27, 29 e 30.

Teorema 31. [10] G é um grafo matrogênico split se, e somente se, G pode ser construído de um grafo vazio por um sequência das três operações: (i) adicionando um vértice isolado; (ii) tomar o complemento; (iii) fazer uma n -aumentação.

Exemplo 6. Considere o grafo ilustrado pela Figura 3.15. Ele é formado pela seguinte sequência de operações: A partir de um grafo vazio sem vértices, comece adicionando três vértices isolados, em seguida tome o complemento do grafo obtido e, por fim, faça uma 3-aumentação.

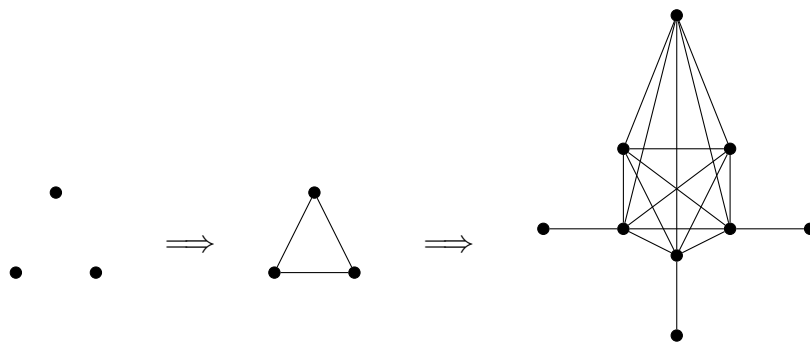


Figura 3.15: Grafo formado pela sequência de operações: (i) – (i) – (i) – (ii) – (iii).

Como esse grafo foi construído pela sequência de operações acima, temos que G é um grafo matrogênico split.

4 ALGORITMO DE LOCALIZAÇÃO DE AUTOVALORES

O objetivo deste capítulo é apresentar um algoritmo de localização de autovalores de um grafo. Na literatura existem diversos algoritmos com essa mesma finalidade. Podemos destacar algoritmos que funcionam para classes de grafos específicas, como árvores [23] e cografos [24], além daqueles que operam baseados em decomposições de grafos, por exemplo, em [20] podemos encontrar um algoritmo que utiliza a decomposição em árvore de um grafo.

Neste trabalho, será apresentada uma versão de um algoritmo de localização de autovalores, desenvolvida por M. Fürer et al. [16], que utiliza a decomposição esperta em clique de um grafo. A próxima seção é dedicada ao estudo de tal decomposição.

4.1 A Decomposição Esperta em Clique

Nessa seção, vamos estudar uma decomposição para grafos conhecida como decomposição esperta em clique. Aqui, apresentamos essa decomposição, seu parâmetro associado e algumas de suas propriedades.

Uma decomposição em clique [20] é um tipo de decomposição na qual uma expressão induz a construção de um grafo. Essa expressão utiliza um conjunto de rótulos $[k] = \{1, \dots, k\}$ e operadores para criar vértices, rotulá-los e definir arestas, utilizando relações em $[k]$.

Derivada da decomposição em clique, a decomposição esperta em clique visa representar um grafo por meio de uma expressão esperta. Essa expressão é uma decomposição para grafos que utiliza um único operador para realizar a união de

grafos, criar arestas e rerrotular vértices. Além disso, ela possui a propriedade de que suas sub-expressões definem subgrafos induzidos. Formalmente, temos:

Definição 50. Uma **expressão esperta** é uma expressão formada por átomos $i(v)$ e uma operação binária $\oplus_{S,L,R}$ onde L, R são funções de $[k]$ em $[k]$, onde $[k] = \{1, \dots, k\}$ é um conjunto de rótulos, e S é um relação binária em $[k]$, que gera um grafo como a seguir:

- (i) $i(v)$ cria um vértice v com rótulo i , onde $i \in [k]$;
- (ii) Dados dois grafos G e H cujos vértices têm rótulos em $[k]$, o grafo rotulado $G \oplus_{S,L,R} H$ é obtido da seguinte forma:

Começando com a união disjunta de G e H , são adicionadas arestas de cada vértice rotulado i em G a cada vértice rotulado j em H para todo $(i, j) \in S$. Em seguida, cada rótulo i do componente esquerdo G é substituído por $L(i)$, e cada rótulo j do componente direito H é substituído por $R(j)$.

O grafo constituído por uma expressão esperta é obtido removendo os rótulos de um grafo rotulado produzido por ela.

O Exemplo 7 nos dá uma expressão esperta para um grafo matrogênico.

Exemplo 7. Considere o grafo matrogênico G ilustrado pela Figura 4.1.

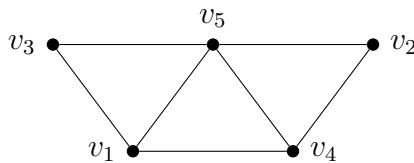


Figura 4.1: Grafo utilizado pelo Exemplo 7

Podemos obter G pela seguinte 3-expressão esperta, onde id representa a função identidade:

$$(((1(v_1) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} 2(v_5)) \oplus_{\{(1,3), (2,3)\}, id, id} 3(v_3)) \oplus_{\{(1,2), (2,2)\}, id, id} 2(v_4)) \oplus_{\{(2,1)\}, id, id} 1(v_2), \quad (4.1)$$

da seguinte maneira:

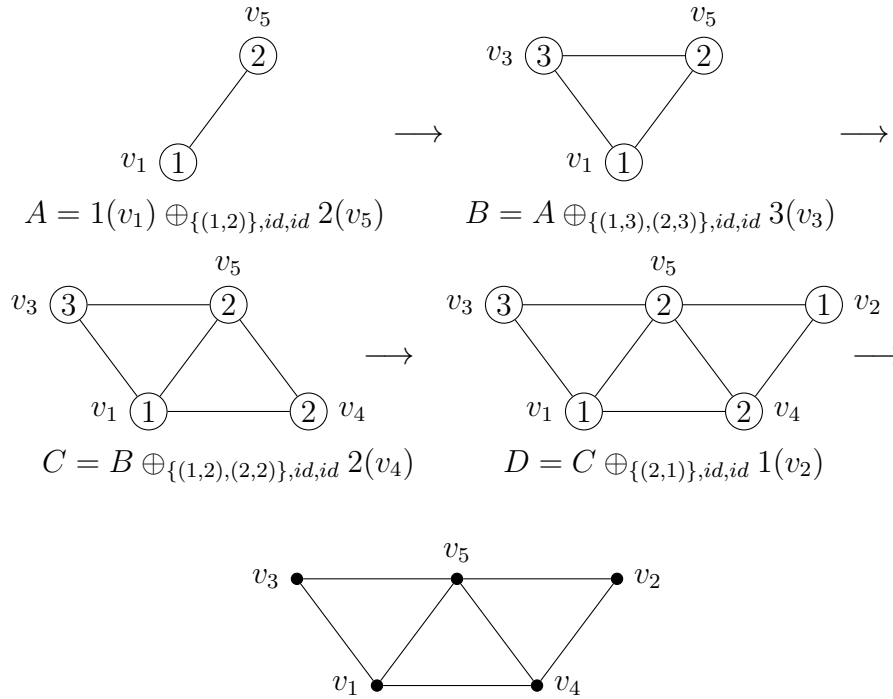


Figura 4.2: Construindo o grafo G associado à 3-expressão esperta (4.1).

Essa expressão esperta não é a mais econômica, temos que a expressão esperta a seguir gera o mesmo grafo e utiliza menos rótulos:

$$[(1(v_1) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} 2(v_3)) \oplus_{\{(1,1), (1,2), (2,1)\}, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1} (1(v_5) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} 2(v_4))] \oplus_{\{(1,1)\}, id, id} 1(v_2). \quad (4.2)$$

O parâmetro associado à decomposição esperta em clique é a largura esperta em clique.

Definição 51. A **largura esperta em clique** de um grafo G , $\text{scw}(G)$, representa a menor quantidade possível de rótulos necessários para se escrever uma expressão esperta para G .

O grafo trabalhado no Exemplo 7 possui $\text{scw}(G) = 2$, a justificativa para esse fato se encontra após a Proposição 32.

Como um único operador realiza a junção de grafos, cria arestas e rerrotula vértices, uma expressão esperta pode ser associada a uma árvore da mesma maneira que cografos e cóarvoraes estão associados. Essa árvore receberá o nome de **árvore de análise**. Dado um grafo G de ordem n , a árvore de análise é uma árvore T tendo $2n - 1$ nós, onde as n folhas são rotuladas pelos operadores $i(v)$ e os nós internos contêm operadores do tipo $\oplus_{S,L,R}$.

A Figura 4.3 ilustra a árvore de análise associada à expressão (4.2).

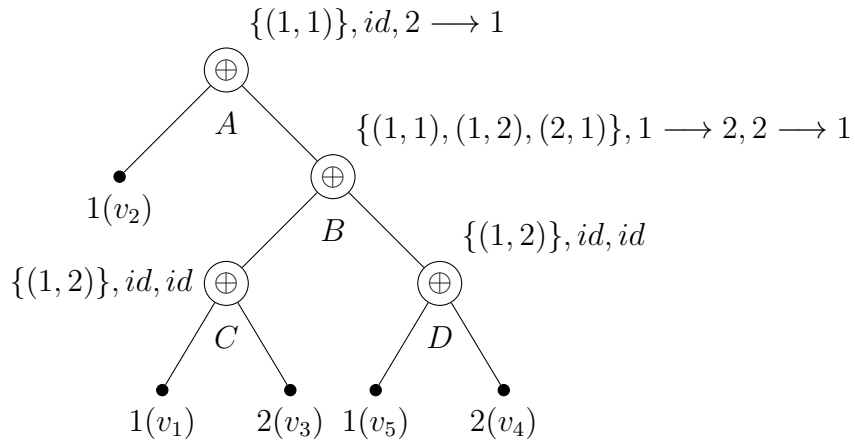


Figura 4.3: Árvore de análise associada à expressão (4.2).

Por construção, dois vértices de G são adjacentes se, e somente se, a operação no mais profundo ancestral comum das folhas correspondentes a eles na árvore de análise coloca uma aresta entre eles. Por causa disso, subárvores induzidas por um nó junto com seus descendentes geram subgrafos induzidos de G .

A Proposição 32 nos fornece algumas propriedades a respeito da largura esperta em clique de um grafo.

Proposição 32. [20] *As seguintes afirmações são válidas para um grafo $G = (V, E)$.*

(i) *Se H é um subgrafo induzido de G , então $scw(H) \leqscw(G)$;*

(ii) *$scw(G) = 1$ se, e somente se, G é um cografo.*

Dem.: (i) Vamos assumir que G tem mais de um vértice. Dado um subgrafo induzido H de G , vamos transformar a árvore de análise T_G de G na árvore de análise T_H de H que usa os mesmos rótulos (ou menos). Se $H = G$, então $T_H = T_G$. Caso contrário, H pode ser construído por uma sequência finita de eliminações de vértices, assim, é suficiente considerar $H = G - a$ para algum vértice a . Seja u o nó pai da folha correspondente a a em T_G , digamos $u = \oplus_{S,L,R}$. Sem perda de generalidade, suponha que a seja o filho mais a direita de u . Se u é a raiz de T_G , então T_H é a subárvore enraizada no filho esquerdo de u . Portanto, podemos supor que u tem pai v . Sem perda de generalidade, suponha que u é um filho à esquerda de v . Temos 2 casos.

Caso 1: O filho de u à esquerda é um vértice b , com rótulo i . Então formamos T_H , primeiro removendo u e a e deixando b ser o novo filho à esquerda de v com rótulo inicial $L(i)$.

Caso 2: O filho de u à esquerda é o nó $w = \oplus_{S',L',R'}$. Para obter T_H , removemos u e a e fazemos w o novo filho de v , mas redefinimos w como $w' = \oplus_{S',L \circ L', R \circ R'}$, usando a função composição.

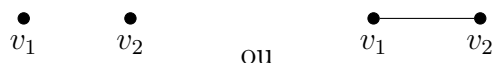
Note que essas operações deletam a e suas arestas incidentes, mas preservam todos os outros vértices e arestas, enquanto cria uma árvore de análise T_H que utiliza os mesmos ou menos rótulos que T_G . Portanto, $scw(H) \leqscw(G)$.

(ii) Seja G um grafo e suponha que $scw(G) = 1$. Olhando para a 1-expressão esperta que gera G , como temos um único rótulo disponível, as funções L e R devem ser

as funções identidades e $\oplus_{S,L,R}$ ou cria uma união disjunta (se $S = \emptyset$) ou uma junção (se $S = \{(1,1)\}$, que adiciona todas possíveis arestas entre os componentes esquerdo e direito). De acordo com a Definição 32, temos que o grafo G gerado por essa 1-expressão esperta é um cografo.

Para a recíproca, seja G um cografo. Provaremos por indução sobre $n = |V(G)|$ que $scw(G) = 1$.

Para $n = 1$, uma 1-expressão para G é dada por: $1(v_1)$. Para $n = 2$, temos duas possibilidades para G :



A seguintes 1-expressões espertas geram o primeiro e o segundo grafo respectivamente: $1(v_1) \oplus_{\emptyset, id, id} 1(v_2)$ e $1(v_1) \oplus_{\{(1,1)\}, id, id} 1(v_2)$. Em ambos os casos $scw(G) = 1$.

Suponha que o resultado seja válido para um cografo com $n = k$ vértices. Vamos mostrar que é válido para um cografo com $n = k + 1$ vértices.

Seja G um cografo com $k + 1$ vértices e G_k um subgrafo induzido de G que possui k vértices. Pela Proposição 2, G_k é um cografo e pela hipótese de indução $scw(G_k) = 1$. Sendo assim, temos duas possibilidades para a 1-expressão esperta de G :

$$\begin{aligned}
 & (1\text{-expressão esperta para } G_k) \oplus_{\emptyset, id, id} (1(v_{k+1})). \\
 & (1\text{-expressão esperta para } G_k) \oplus_{\{(1,1)\}, id, id} (1(v_{k+1})).
 \end{aligned}$$

Em ambos os casos $scw(G) = 1$, como queríamos. □

O item (ii) da Proposição 32 justifica o fato do grafo apresentado no Exemplo 7 ter $scw(G) = 2$. Note que o conjunto de vértices $\{v_3, v_1, v_4, v_2\}$ induz um P_4 em G , logo G não é um cografo e $scw(G) \neq 1$. Como conseguimos expressá-lo por um 2-expressão esperta, segue que $scw(G) = 2$.

Na seção a seguir, apresentaremos um algoritmo de localização de autovalores de um grafo, cujo funcionamento é baseado na decomposição esperta em clique do grafo.

4.2 Algoritmo *Diagonalize*

O objetivo desta seção é apresentar um algoritmo de localização de autovalores de um grafo. Desenvolvido por M. Fürer et al. [16], o algoritmo em questão opera sobre a decomposição esperta em clique de um grafo.

Dado um grafo G com matriz de adjacência $A(G)$, uma k -expressão esperta para G com árvore de análise T_G e um escalar $x \in \mathbb{R}$, apenas utilizando operações de congruência, o algoritmo produz uma matriz diagonal D congruente à $A + xI_n$. Pelo Teorema 4, o número de entradas positivas, negativas e nulas da diagonal de D é igual ao número de autovalores de G maiores, menores ou iguais a $-x$, respectivamente. Formalmente, temos:

Teorema 33. *Sejam $D = [d_1, \dots, d_n]$ os elementos diagonais obtidos pelo Algoritmo *Diagonalize* com entrada (T_G, x) . Vamos assumir que D tem k_+ valores positivos, k_0 zeros e k_- valores negativos. Então:*

1. *O número de autovalores de G maiores que $-x$ é k_+ ;*
2. *O número de autovalores de G menores que $-x$ é k_- ;*
3. *A multiplicidade de $-x$ é k_0 .*

Como consequência do Teorema 33, podemos determinar a inércia de um grafo G , executando o algoritmo com entradas $(T_G, 0)$. Além disso, podemos determinar o número de autovalores de G em um dado intervalo da seguinte maneira:

Corolário 34. *Sejam $B_x = A + xI_n$ e $D(B_x)$ a matriz diagonal congruente a B_x obtida ao executar o Algoritmo *Diagonalize* com entradas (T_G, x) . O número de*

autovalores de G no intervalo $(\alpha, \beta]$ é $i_+(B_{-\alpha}) - i_+(B_{-\beta})$, ou seja, o número de entradas positivas de $D(B_{-\alpha})$ menos o número de entradas positivas de $D(B_{-\beta})$.

Outro ponto importante acerca do funcionamento do algoritmo é a rapidez com que ele processa a árvore de análise. Veremos que se um grafo tem um largura esperta clique pequena, essa diagonalização pode ser feita em tempo linear.

A observação a seguir será fundamental para a compreensão do algoritmo. Ela garante que podemos olhar apenas para submatrizes da matriz de adjacência, que serão trabalhadas em blocos ao longo do algoritmo.

Observação 35. Seja T_G uma árvore de análise associada à uma expressão esperta de um grafo $G = (V, E)$ com matriz de adjacência A e seja Q um nó em T_G . Se dois vértices u e v têm o mesmo rótulo em Q , então suas linhas/colunas são as mesmas fora da matriz da subárvore enraizada em Q .

Para ver o porquê da Observação 35 ser válida, seja w uma folha fora da subárvore enraizada em Q e P o ancestral comum mais profundo de Q e w . Considere o caminho entre Q e P . Os rótulos de u e v podem mudar ao longo do caminho, mas sempre são iguais. Suas adjacências são determinadas por P . Portanto u é adjacente a w se, e somente se, v é adjacente a w .

A seguir, explicaremos de maneira intuitiva o funcionamento do algoritmo. Os detalhes e a prova da correção do algoritmo podem ser encontradas nas referências [16] e [20].

4.2.1 Descrição do Algoritmo

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n = |V|$ vértices e matriz de adjacência A , suponha que G seja gerado por uma k -expressão esperta Q_G . Nosso objetivo é encontrar uma matriz diagonal congruente a $B = A + xI_n$.

A expressão Q_G é associada a uma árvore de análise T_G com $2n - 1$ nós. Essa é uma árvore binária, enraizada, onde as n folhas são rotuladas pelos operadores $i(v)$ e os nós internos representam operações do tipo $\oplus_{S,L,R}$. O algoritmo trabalha de baixo para cima na árvore de análise T_G e opera em um nó Q após todos seus filhos serem processados.

Um nó Q da árvore de análise produz uma estrutura que recebe o nome de k -caixa b_Q , uma 4-upla $[k', k'', M, R]$, onde M é uma matriz simétrica $m \times m$ da forma:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} M^{(0)} & M^{(1)} \\ \hline M^{(1)T} & M^{(2)} \end{array} \right], \quad (4.3)$$

$m = k' + k'' \leq 2k$, $M^{(0)} = 0_{k' \times k'}$ (podendo ser vazia, caso $k' = 0$) e $M^{(2)}$ é uma matriz $k'' \times k''$. A matriz $M^{(1)}$ é uma matriz $k' \times k''$ na forma escalonada com pivôs em cada linha. Além disso, k' e k'' são inteiros não negativos limitados superiormente por k e R é um vetor que rotula as linhas (e colunas) de M , cujas m entradas são rotuladas em $\{1, \dots, k\}$. Diremos que as k' linhas de $M^{(0)}$ são do tipo- i e as k'' linhas de $M^{(2)}$ são do tipo- ii .

O algoritmo atravessa a árvore de análise de suas folhas até a raiz, de modo que, em cada nó, o algoritmo ou inicializa uma caixa, ou combina as caixas produzidas pelos seus filhos em uma nova caixa, transmitindo-a para seu pai.

Enquanto processa um nó, o algoritmo também pode produzir elementos diagonais da matriz $B = A + xI_n$. Esses elementos diagonais serão adicionados a um vetor na medida em que forem produzidos. O Algoritmo 1, nos dá uma descrição desse processo.

A partir de agora, descreveremos cada passo do algoritmo *Diagonalize* de maneira intuitiva. Em [20], podemos encontrar uma descrição rigorosa e detalhada de seu funcionamento.

Algoritmo 1: *Diagonalize*(G, x):

Entrada: a árvore de análise T de uma k -expressão esperta Q_G para G , um escalar x ;

Saída: as entradas diagonais de D , que é congruente a $A(G) + xI$;

1 Ordena os $2n - 1$ vértices de T como $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n-1} = Q_G$;

para t de 1 a $2n - 1$ **faça**

2 **se** *is-leaf*(Q_t) **então**

3 | $b_{Q_t} = \text{LeafBox}(Q_t, x)$

4 **senão**

5 | **se** $Q_t = Q_l \oplus_{S,L,R} Q_r$ **então**

6 | | $b_{Q_t} = \text{CombineBoxes}(b_{Q_l}, b_{Q_r})$

7 *DiagonalizeBox*($b_{Q_{2n-1}}$)

O algoritmo sempre começa processando uma folha da árvore de maior profundidade. Ao processar uma folha, $i(v)$, o algoritmo *Diagonalize* chama a função *LeafBox*, que pode ser vista no Algoritmo 2, e produz uma caixa da forma: $[0, 1, [x], [i]]$. Aqui, $M = M^{(2)} = [x]$ (essa linha é do tipo-*ii* e tem rótulo i).

Algoritmo 2: *LeafBox*(Q, x):

Entrada: uma k -expressão $Q = i(v)$, um escalar x ;

Saída: $[0, 1, [x], [i]]$;

Quando um nó $Q = Q_l \oplus_{S,L,R} Q_r$ é processado, o algoritmo utiliza o procedimento *CombineBoxes*, que pode ser visto no Algoritmo 3. Esse processo recebe as caixas produzidas pelos filhos de Q , Q_l e Q_r , que podem ser folhas ou outros nós, e cria uma nova caixa, da seguinte maneira.

Primeiro, fazemos uma união das matrizes M_{Q_l} e M_{Q_r} recebidas por Q_l e Q_r , formando uma nova matriz M e vetor R da forma:

Algoritmo 3: *CombineBoxes*(b_{Q_l}, b_{Q_r}) :

Entrada: duas k -caixas b_{Q_l} e b_{Q_r} ;

Saída: uma k -caixa b_Q ;

- 1 defina M como em (4.4): rerrotule as linhas de M com as funções L e R ;
 - 2 permuta linhas e colunas de forma a agrupar as linhas do tipo- i e as linhas do tipo- ii ;
 - 3 **para** cada par (v, w) de linhas do tipo- ii com rótulos iguais **faça**
 - 4 realiza operações como em (4.5) e insere uma nova linha do tipo- i :
 - 5 **se** x_v é vazio ou zero **então** // **Caso 1**
 - 6 **se** y_v é vazio ou zero **então** // **Subcaso 1a**
 - 7 adiciona (v, d_v) em D e, em seguida, remove a linha v de M
 - 8 **se** $nã$ o, **se** $d_v = 0$ **então** // **Subcaso 1b**
 - 9 faça operações nas linhas como em (4.7)
 - 10 **se** a linha v tem um pivô **então**
 - 11 insira a linha em $M^{(1)}$
 - 12 **senão**
 - 13 adiciona 0 em D e remove a linha de M
 - 14 **senão** // $\{d_v \neq 0, y_v \neq 0\}$ // **Subcaso 1c**
 - 15 usa d_v para diagonalizar a linha v como em (4.8)
 - 16 adiciona d_v em D e remove a linha v de M
 - 17 **senão** // $\{x_v \neq 0\}$ // **Caso 2**
 - 18 seja u o vértice da entrada não nula mais a direita de x_v
 - 19 **se** x_v tem outras entradas não nulas **então**
 - 20 as elimina com as operações (4.9)
 - 21 **se** $d_v \neq 0$ **então**
 - 22 então realiza as operações (4.10)
 - 23 realiza as operações (4.11)
 - 24 usa d_v e d_u para diagonalizar as linhas v e u como em (4.7)
 - 25 adiciona d_v e d_u em D e elimina as linhas v e u de M .
-

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} M_{Q_l}^{(0)} & M_{Q_l}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{Q_l}^{(1)T} & M_{Q_l}^{(2)} & 0 & F \\ \hline 0 & 0 & M_{Q_r}^{(0)} & M_{Q_r}^{(1)} \\ 0 & F^T & M_{Q_r}^{(1)T} & M_{Q_r}^{(2)} \end{array} \right], \quad R = \begin{bmatrix} i_{Q_l} \\ i_{Q_r} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde a matriz F é construída de acordo com o Lema 36.

Lema 36. [16] *Seja ij a entrada da matriz F que possui linha com rótulo i e coluna com rótulo j . Se $(i, j) \in S$, então a entrada ij de F vale 1, caso contrário, ij vale 0.*

Construída a matriz M , rerrotulamos suas linhas de acordo com L, R e permutamos linhas e colunas até que as linhas do tipo- i e as linhas do tipo- ii estejam em blocos. Nesse momento pode acontecer de $k'' > k$, mas k'' deve ser limitado superiormente por k . Para garantir isso, basta que as linhas do tipo- ii não tenham o mesmo rótulo. Realizaremos operações de congruência, de modo que diminuiremos em uma unidade k'' e aumentaremos k' em uma unidade.

Lema 37. [16] *Se a matriz M contém duas linhas do tipo- ii com o mesmo rótulo, então produziremos uma matriz congruente a ela, onde k'' decresce uma unidade e k' aumenta uma unidade.*

Dadas duas linhas do tipo- ii com mesmo rótulo, j e j' , realizando as operações:

$$L_{j'} \longleftarrow L_{j'} - L_j, \quad C_{j'} \longleftarrow C_{j'} - C_j, \quad (4.5)$$

transformamos j' em uma linha do tipo- i , diminuindo k'' em uma unidade, e aumentando k' em uma unidade. E continuamos aplicando essas operações para quaisquer pares de linhas do tipo- ii com o mesmo rótulo. Após esse processo, devemos sempre agrupar linhas do mesmo tipo, fazendo operações do tipo $L_i \longleftrightarrow L_j$ e, consequentemente, $C_j \longleftrightarrow C_i$.

Feito isso, devemos olhar para a matriz M da seguinte maneira:

$$M = \begin{bmatrix} d_v & x_v & y_v \\ x_v^T & 0_{k' \times k'} & M^{(1)} \\ y_v^T & M^{(1)T} & M^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde d_v é o elemento diagonal, x_v é o vetor cujos elementos correspondem às outras linhas do tipo- i em $M^{(0)}$ e o vetor y_v representa a correspondência com linhas em $M^{(2)}$. Os comprimentos de x_v e y_v são k' e $k'' - 1$, respectivamente.

Dependendo dos valores de d_v, x_v e y_v , realizamos operações a fim de diagonalizar as linhas/colunas de M e obter os valores diagonais. Temos os seguintes casos:

Caso 1: x_v é vazio ou $x_v = [0, \dots, 0]$.

Se $y_v = [0, \dots, 0]$ (ou y_v é vazio), a linha de v já está diagonalizada, então simplesmente adicionamos d_v ao vetor de elementos diagonais e removemos a linha/coluna associada a v de M . Este é o **Subcaso 1.a**.

Se $y_v \neq [0, \dots, 0]$, então temos duas opções. No **Subcaso 1.b**, assumimos que $d_v = 0$. O objetivo é transformar a linha associada a v em uma linha do tipo- i . Para fazer isso, precisamos inserir y_v em $M^{(1)}$ de modo que a matriz resultante esteja na forma escalonada. Em cada passo, se o pivô α_j da linha atual associada com v está na mesma posição do pivô β_j de L_u (a linha associada ao vértice u já está em $M^{(1)}$), usamos L_u para eliminar o pivô de L_v :

$$L_v \longleftarrow L_v - \frac{\alpha_j}{\beta_j} L_u, \quad C_v \longleftarrow C_v - \frac{\alpha_j}{\beta_j} C_u \quad (4.7)$$

Isso é feito até que o pivô da linha associada a v não possa ser cancelado pelos pivôs das outras linhas, nesse caso a linha associada a v pode ser inserida na matriz; ou até que a linha associada a v se torna uma linha de zeros, nesse caso 0 é adicionado ao vetor de elementos diagonais e removemos a linha/coluna associada a v de M .

Se $d \neq 0$, estamos no **Subcaso 1.c** e usamos d_v para eliminar as entradas não nulas em y_v e diagonalizamos a linha correspondente em v . Seja α_v a entrada de y_v associada a u que é diferente de zero, então realizamos:

$$L_u \longleftarrow L_u - \frac{\alpha_v}{d_v} L_v, \quad C_u \longleftarrow C_u - \frac{\alpha_v}{d_v} C_v \quad (4.8)$$

Quando todas entradas forem eliminadas, adicionamos d_v ao vetor de elementos diagonais.

Caso 2: x_v é não-vazio e $x_v \neq [0, \dots, 0]$.

Seja u o vértice associado a entrada mais a direita de x_v e α_j o valor dessa entrada. Usamos esse elemento para eliminar todas outras entradas em x_v , da direita para esquerda. Seja w o vértice associado a entrada $\alpha_l \neq 0$. Realizamos:

$$L_w \longleftarrow L_w - \frac{\alpha_l}{\alpha_j} L_u, \quad C_w \longleftarrow C_w - \frac{\alpha_l}{\alpha_j} C_u \quad (4.9)$$

Se $d_v \neq 0$, continuamos usando L_u para eliminar esse elemento:

$$L_v \longleftarrow L_v - \frac{d_v}{2\alpha_j} L_u, \quad C_v \longleftarrow C_v - \frac{d_v}{2\alpha_j} C_u \quad (4.10)$$

Nesse ponto, as únicas entradas diferentes de zero no canto superior esquerdo da matriz obtida após realizar essas operações estão nas posições uv e vu (e são iguais a α_j). Realizamos as seguintes operações:

$$L_u \longleftarrow L_u + \frac{1}{2} L_v, \quad C_u \longleftarrow C_u + \frac{1}{2} C_v, \quad L_v \longleftarrow L_v - L_u, \quad C_v \longleftarrow C_v - C_u \quad (4.11)$$

As entradas relevantes da matriz são modificadas como a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_j \\ \alpha_j & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j \\ \alpha_j & \alpha_j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_j \end{bmatrix}.$$

Agora estamos em posição para usar os elementos diagonais para diagonalizar as linhas associadas a v e u , como foi feito no Caso 1, quando $x_v = [0, \dots, 0]$ e $d_v \neq 0$. No final desse passo, adicionamos $-\alpha_j$ e α_j ao vetor de elementos diagonais.

Para concluir essa descrição do algoritmo, vamos assumir que na raiz, as operações L e R mapeiam todos os vértices para o mesmo rótulo, já que rótulos não são mais necessários.

Após aplicar o procedimento *CombineBoxes*, teremos $k'' = 1$ e $M^{(0)}$ ou será zero ou será vazia. Se for vazia, então a matriz 1×1 $M^{(2)}$ contém o último elemento diagonal. Caso contrário, M será 2×2 e terá forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Se $b \neq 0$, ela pode ser feita diagonal usando as operações (4.8). Se $b = 0$, então ela pode ser feita diagonal usando as operações (4.10) e (4.11).

Para entender como o algoritmo funciona na prática, vamos aplicá-lo em um exemplo concreto.

Exemplo 8. Considere o grafo matrogênico G dado pela Figura 4.4.

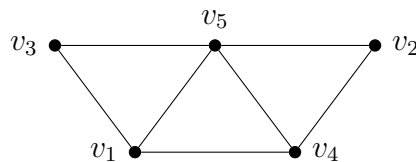


Figura 4.4: Grafo matrogênico utilizado pelo Exemplo 8.

Esse grafo tem $scw(G) = 2$ e a Figura 4.5 ilustra uma árvore de análise associada a uma decomposição esperta em clique desse grafo. Iremos aplicar o Algoritmo *Diagonalize* com $x = \frac{1}{2}$.

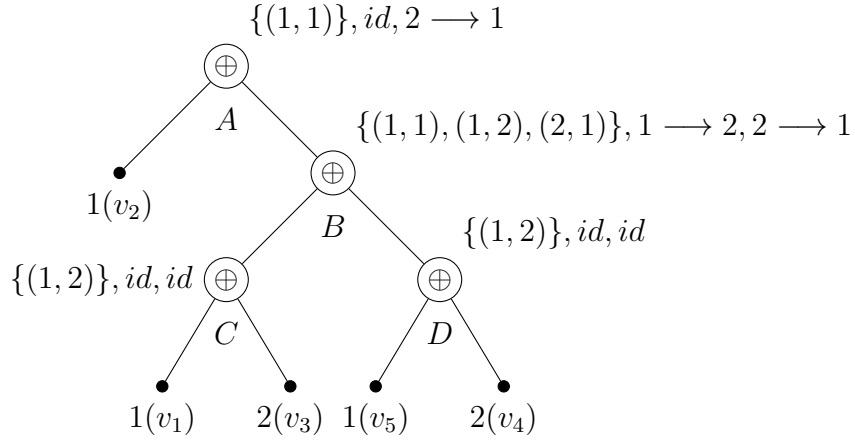


Figura 4.5: Árvore de análise associada ao grafo ilustrado pela Figura 4.4.

Começaremos analisando as folhas que são filhas do nó D . Utilizaremos o procedimento *LeafBox* para produzir:

$$1(v_5) : [k', k'', [x], [R]] = \left[0, 1, \left[\frac{1}{2} \right], [1] \right] \quad \text{e} \quad 2(v_4) : \left[0, 1, \left[\frac{1}{2} \right], [2] \right].$$

Ao processar o nó D utilizaremos o procedimento *CombineBoxes*. Construímos a matriz M de acordo com o Lema 36 e, com $S = \{(1, 2)\}$, obtemos:

$$\left[0, 2, \left[\begin{array}{cc} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \right].$$

Aqui não é necessário realizar mais nenhum passo, visto que as linhas do tipo- ii têm rótulos diferentes. Além disso, como $k' = 0$, temos que a matriz $M^{(0)}$ é vazia.

Analogamente, o nó C retorna uma caixa idêntica à caixa retornada pelo nó D .

O próximo passo é analisar o nó B . Novamente utilizaremos o procedimento *CombineBoxes*, agora com as caixas provenientes de C e D . Pelo Lema 36, considerando $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ e as funções $L : 1 \rightarrow 2$ e $R : 2 \rightarrow 1$, a nova matriz M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Todas as linhas de M são do tipo- ii . De acordo com o procedimento, precisamos assegurar que essas linhas do tipo- ii tenham rótulos diferentes. Para isso, utilizaremos o Lema 37. Como as linhas 1 e 2, têm tipo- ii e rótulos iguais, façamos: $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ e $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. Obtemos assim:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Aqui, $d_v = -1, x_v = \emptyset, y_v = \left[\frac{1}{2}, 0, 1\right]$ e, com isso, estamos no **Subcaso 1c** do procedimento *CombineBoxes*. Utilizando d_v para diagonalizar sua linha/coluna, temos:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Logo, nosso primeiro valor diagonal é $d_1 = -1$ e removemos essa linha/coluna, resultando na matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Realizando o mesmo processo para assegurar a unicidade dos rótulos das linhas do tipo-*ii*, fazemos: $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ e $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ e, em seguida, a fim de deixar a matriz parecida com (4.6), movemos a nova linha do tipo-*i* para o começo da matriz: $L_2 \leftrightarrow L_1$ e $C_2 \leftrightarrow C_1$, obtendo:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, estamos no **Subcaso 1b**, pois $d_v = 0$, $x_v = \emptyset$ e $y_v = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$. Como y_v já está na forma escalonada, não precisamos fazer nada. Assim, o nó B passa para o nó A a caixa:

$$\left[1, 2, \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right].$$

Por fim, o nó A recebe a caixa produzida pela folha $1(v_2) : \left[0, 1, \left[\frac{1}{2}\right], [1]\right]$ e a caixa passada pelo nó B . Pelo procedimento *CombineBoxes*, construímos a matriz M de acordo com o Lema 36, utilizando $S = \{(1, 1)\}$ e a função de rerrotulação $R : 2 \rightarrow 1$.

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O próximo passo é agrupar as linhas do tipo-*i* e do tipo-*ii*. Fazendo: $L_1 \longleftrightarrow L_2$ e $C_1 \longleftrightarrow C_2$, chegamos em:

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right].$$

Como anteriormente, para assegurar a unicidade dos rótulos nas linhas de tipo-*ii*, faremos: $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ e $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$. Assim,

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/4 & -3/4 & 1/2 \\ \hline 1/2 & -3/4 & 3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right].$$

A fim de deixar a matriz M parecida com (4.6), realizamos as operações $L_1 \longleftrightarrow L_2$ e $C_1 \longleftrightarrow C_2$:

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} 5/4 & -1/2 & -3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline -3/4 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right].$$

Aqui, $d_v = \frac{5}{4}$, $x_v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $y_v = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Estamos no Caso 2 do procedimento *CombineBoxes*. Como x_v não tem outras entradas não nulas, não precisamos eliminá-las. E, como $d_v = \frac{5}{4} \neq 0$, realizaremos as operações descritas no algoritmo para diagonalizar ambas linhas/colunas do tipo- i ao mesmo tempo. Primeiro, fazemos $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{5}{4}L_2$ e $C_1 \leftarrow C_1 + \frac{5}{4}C_2$ para produzir:

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & -1/8 & -1/8 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline -1/8 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ -1/8 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right].$$

A seguir, faremos $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$, $C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{2}C_1$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ e $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, resultando em:

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 0 & -9/16 & 7/16 \\ 0 & -1/2 & 7/16 & -9/16 \\ \hline -9/16 & 7/16 & 3/4 & 1/2 \\ 7/16 & -9/16 & 1/2 & 3/2 \end{array} \right].$$

Com isso, temos mais dois valores diagonais, $d_2 = \frac{1}{2}$ e $d_3 = -\frac{1}{2}$, que utilizaremos para diagonalizar suas linhas/colunas. Após diagonalizadas, as removemos da matriz, resultando em:

$$M = \left[\begin{array}{cc} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 7/4 \end{array} \right].$$

Realizando o mesmo processo de garantir a unicidade dos rótulos, caímos mais uma vez no Subcaso 1c e, diagonalizando a matriz, obtemos os últimos dois valores diagonais, $d_4 = \frac{5}{4}$ e $d_5 = \frac{1}{2}$.

Portanto, $D = \left[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right]$, ou seja, temos 3 autovalores maiores que $-\frac{1}{2}$ e 2 autovalores menores que $-\frac{1}{2}$. O que corresponde com:

$$\text{Spec}(G) = \{2.94, 0.62, -0.46, -1.47, -1.62\}.$$

Baseado no algoritmo descrito acima, o resultado a seguir nos dá a complexidade do algoritmo. Ela é calculada pelo número de operações realizadas.

Teorema 38. [16] *Sejam G um grafo com matriz de adjacência A , dado por uma k -expressão esperta Q_G associada à uma árvore de análise T_G e $x \in \mathbb{R}$. O Algoritmo *Diagonalize* corretamente retorna os elementos diagonais da matriz diagonal congruente à $B = A + xI$. Mais ainda, isso é feito em $O(k^2n)$ operações.*

Portanto, para grafos com uma largura esperta em clique pequena, o Algoritmo *Diagonalize* realiza as operações e localiza os autovalores do grafo em tempo linear.

5 A LARGURA ESPERTA EM CLIQUE DE GRAFOS MATROGÊNICOS

Neste capítulo, apresentamos uma de nossas contribuições: o cálculo da largura esperta em clique dos grafos matrogênicos. Para isso, precisaremos conhecer alguns resultados acerca da largura esperta em clique de outros grafos.

Para $k \geq 1$, seja \mathcal{S}_k a classe dos grafos cuja largura esperta em clique é k .

Proposição 39. [20] *Para qualquer $k \geq 1$, \mathcal{S}_k é fechado para as seguintes operações:*

- (i) *complemento;*
- (ii) *união \oplus ;*
- (iii) *junção \vee .*

Dem.: Sejam G um grafo com conjunto de arestas E e \overline{G} seu complementar. Afir-mamos que $scw(G) = scw(\overline{\overline{G}})$. Seja T_G uma árvore de análise para G . Construimos uma árvore de análise $T_{\overline{G}}$ para \overline{G} como segue. Substitua cada operador $\oplus_{S,L,R}$ em T_G por $\oplus_{\overline{S},L,R}$, onde \overline{S} é o conjunto de pares de rótulos que não estão em S . Como, para cada par de vértices $\{u, v\}$, existe exatamente um nó na árvore onde a aresta $\{u, v\}$ pode ser adicionada, a saber o ancestral comum mais profundo das folhas correspon-dentes a u e v , isso coloca arestas precisamente em \overline{E} . Portanto, $scw(\overline{G}) \leq scw(G)$. Repetindo esse processo para \overline{G} , temos:

$$scw(G) = scw(\overline{\overline{G}}) \leq scw(\overline{G}),$$

provando (i).

Agora, sejam $G, H \in \mathcal{S}_k$, tendo árvores de análise T_G e T_H , ambas associadas a k -expressões espertas. Formamos uma árvore de análise para $G \oplus H$

fazendo $T_G \oplus_{\emptyset, id, id} T_H$. Isso mostra que $scw(G \oplus H) \leq k$. Como G é um subgrafo induzido de $G \oplus H$, pelo item (i) da Proposição 32, $k = scw(G) \leq scw(G \oplus H) \leq k$, mostrando que $G \oplus H \in \mathcal{S}_k$, provando (ii). Se G e H são grafos, então $G \vee H = \overline{\overline{G} \oplus \overline{H}}$, logo, (iii) segue de (i) e (ii). \square

Para os próximos resultados, lembre da Definição 25 que o grafo rede, denotado por H_n , é um grafo split com $V(H_n) = S \cup K$, onde $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto estável e $K = \{y_1, \dots, y_n\}$ é um clique, tal que $S \cap K = \emptyset$ e x_1y_1, \dots, x_ny_n são as únicas arestas entre S e K .

Os lemas a seguir nos dão a largura esperta em clique dos grafos H_n , dos núcleos (tK_2 , $CP(2t)$ e C_5) e serão fundamentais para o cálculo da largura esperta em clique dos grafos matrogênicos.

Lema 40. $scw(H_n) \leq 2$.

Dem.: Provaremos por indução em n . Para $n = 1$, temos:



Figura 5.1: Grafo H_1 .

Uma expressão esperta para H_1 é:

$$1(x_1) \oplus_{\{(1,1)\}, id, id} 1(y_1).$$

Portanto, $scw(H_1) = 1$.

Para $n \geq 2$, provaremos por indução que $scw(H_n) = 2$ e que conseguiremos rótulos diferentes para os vértices do conjunto estável (1) e da clique (2) de H_n .

Para $n = 2$, temos o grafo H_2 que é dado por:



Figura 5.2: Grafo H_2 .

Como H_2 não é um cografo, temos que $scw(H_2) \neq 1$. Uma expressão esperta para H_2 é:

$$(1(x_1) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(y_1)) \oplus_{\{(2,2)\},id,id} (1(x_2) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(y_2))$$

Portanto, $scw(H_2) = 2$.

Agora, suponha que o resultado seja válido para $n = k$.

Para $n = k+1$, tome o subgrafo de H_{k+1} induzido por $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\}$. Esse subgrafo é H_k , que pela hipótese de indução tem $scw(H_k) = 2$, além de seus vértices da clique e do conjunto independente terem rótulos diferentes. Podemos obter H_{k+1} com a seguinte 2-expressão esperta:

$$(2\text{-expressão esperta para } H_k) \oplus_{\{(2,2)\},id,id} (1(x_{k+1}) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(y_{k+1})).$$

□

Lema 41. $scw(tK_2) = 1$.

Dem.: Note que o grafo tK_2 não possui P_4 como subgrafo induzido. Logo, tK_2 é um cografo e, portanto, $scw(tK_2) = 1$. Uma 2-expressão para tK_2 é dada por:

$$\begin{aligned} & (\cdots ((1(x_1) \oplus_{\{(1,1)\},id,id} 1(x_2)) \oplus_{\emptyset,id,id} (1(x_3) \oplus_{\{(1,1)\},id,id} 1(x_4))) \oplus_{\emptyset,id,id} \cdots) \\ & \oplus_{\emptyset,id,id} (1(x_{2t-1}) \oplus_{\{(1,1)\},id,id} 1(x_{2t})). \end{aligned} \tag{5.1}$$

□

Lema 42. $scw(CP(2t)) = 1$.

Dem.: O grafo $CP(2t)$ é o complementar do grafo tK_2 , logo pela Proposição 39, segue que $scw(CP(2t)) = scw(tK_2) = 1$. Sua expressão pode ser obtida substituindo $\oplus_{S,L,R}$ por $\oplus_{\bar{S},L,R}$ na expressão (5.1). □

Lema 43. [20] $scw(C_5) = 2$.

Dem.: O grafo C_5 não é um cografo, mas pode ser construído por $1(v) \oplus_{\{(1,1)\}, id, id} \mathcal{Q}$, onde \mathcal{Q} gera um P_4 cujas extremidades são rotuladas 1 e os vértices internos são rotulados 2. \square

Lema 44. *Seja $G = (V, E)$ um grafo matrogênico split. Então $scw(G) \leq 2$. Além disso, dado um vértice $v \in V(G)$, se v pertence ao conjunto estável de $V(G)$ então podemos representá-lo com rótulo 1 na expressão esperta para G , e com rótulo 2 caso ele pertença à clique.*

Dem.: De acordo com o Teorema 31, um grafo matrogênico split pode ser obtido a partir de um grafo vazio por uma sequência de três operações: (i) adicionar um vértice isolado; (ii) tomar o complemento; (iii) fazer uma n -aumentação.

Provaremos esse resultado por indução no número j de operações realizadas. Considere um grafo G vazio de ordem m . Temos que G pode ser construído pela seguinte 1-expressão esperta:

$$(\cdots ((1(v_1) \oplus_{\emptyset, id, id} 1(v_2)) \oplus_{\emptyset, id, id} 1(v_3)) \oplus_{\emptyset, id, id} \cdots 1(v_m))$$

Para $j = 1$, podemos realizar uma das três operações (i), (ii), (iii). Seja G_1 o grafo resultante dessa operação.

Se a operação realizada for (i), uma expressão esperta para o grafo G_1 é:

$$((1\text{-expressão esperta para } G) \oplus_{\emptyset, id, id} 1(v_{m+1})).$$

Aqui, $scw(G_1) = 1$ e, como todos vértices pertencem ao conjunto estável, eles possuem rótulo 1.

Se a operação realizada for (ii), podemos obter uma expressão esperta para G_1 substituindo $\oplus_{\emptyset, id, id}$ por $\oplus_{\{(1,1)\}, id, id}$ e mudando em toda a expressão 1 por

2. Aqui, $scw(G_1) = 1$ e, como todos os vértices pertencem à clique, eles possuem rótulo 2.

No Lema 40, vimos que $scw(H_n) \leq 2$. No caso em que $x = 1$, temos $scw(H_1) = 1$. Apesar disso, vamos considerar a seguinte 2-expressão para H_1 : $1(x_1) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} 2(y_1)$.

Se a operação realizada for (iii) , podemos obter uma 2-expressão esperta para G_1 , fazendo:

$$(1\text{-expressão esperta para } G) \oplus_{\{(1,2)\},id,id} (2\text{-expressão esperta para } H_n).$$

Aqui, $scw(G) = 2$, os vértices do conjunto estável possuem rótulo 1 e os da clique rótulo 2. Isso demonstra o caso base.

Suponha que o resultado seja válido para $j = k$ operações. Vamos mostrar que é válido para $j = k + 1$ operações. Seja G_k o grafo resultante de k operações. Pela hipótese de indução existe um 2-expressão esperta para G_k tal que dado um vértice $v \in V(G_k)$, se v pertence ao conjunto estável de $V(G_k)$, então podemos representá-lo com rótulo 1 na expressão esperta para G_k , e com rótulo 2 caso ele pertença à clique.

Temos 3 possibilidades para G_k , e as representaremos por $G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}$: O grafo G_{k_1} , só tem vértices no conjunto estável (todos têm rótulo 1); G_{k_2} , só tem vértices na clique (todos têm rótulo 2); E, por fim, G_{k_3} que é um grafo matrogênico split com $scw(G_{k_3}) = 2$.

Seja G_{k+1} o grafo resultante de $k + 1$ operações. Ele é obtido a partir de G_k realizando uma das três operações (i) , (ii) ou (iii) . Se a operação realizada for (i) , as possíveis expressões esperta para G_{k+1} são:

$$((1\text{-expressão esperta para } G_{k_1}) \oplus_{\emptyset,id,id} 1(v_p)).$$

$$((1\text{-expressão esperta para } G_{k_2}) \oplus_{\emptyset,id,id} 1(v_p)).$$

$$((2\text{-expressão esperta para } G_{k_3}) \oplus_{\emptyset, id, id} 1(v_p)).$$

No primeiro caso, $scw(G_{k_1}) = 1$ e todos os vértices estão no conjunto estável (têm rótulo 1). Nos outros casos, $scw(G_{k_2}) = scw(G_{k_3}) = 2$, os vértices do conjunto estável possuem rótulo 1 e os vértices da clique possuem rótulo 2.

Se a operação realizada for (ii) basta trocar $\oplus_{S,L,R}$ por $\oplus_{\bar{S},L,R}$, 1 por 2 e 2 por 1 em toda a expressão. Se o grafo original for G_{k_1} , após realizar (ii), todos os vértices passam a fazer parte da clique e ter rótulo 2, nesse caso $scw(G_{k+1}) = 1$. Se o grafo original for G_{k_2} , após realizar (ii), todos os vértices passam a fazer parte do conjunto estável e ter rótulo 1, nesse caso $scw(G_{k+1}) = 1$. Se o grafo original for G_{k_3} , após realizar (ii), os vértices que faziam parte do conjunto estável passam a fazer parte da clique e vice-versa, além de terem seus rótulos trocados. Nesse caso, $scw(G_3) = 2$.

Se a operação realizada for (iii), as possíveis expressões para G_{k+1} são:

$$\begin{aligned} &((1\text{-expressão esperta para } G_{k_1}) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} \quad (2\text{-expressão esperta para } H_n)). \\ &((1\text{-expressão esperta para } G_{k_2}) \oplus_{\{(2,2)\}, id, id} \quad (2\text{-expressão esperta para } H_n)). \\ &((2\text{-expressão esperta para } G_{k_3}) \oplus_{\{(1,2), (2,2)\}, id, id} \quad (2\text{-expressão esperta para } H_n)). \end{aligned}$$

Aqui, em ambos os casos $scw(G_{k+1}) = 2$, os vértices do conjunto estável têm rótulo 1 e os vértices da clique têm rótulo 2.

Isso conclui a indução e, portanto, o resultado é válido. □

O resultado a seguir, nos diz que a largura esperta em clique dos grafos matrogênicos é menor ou igual a dois.

Teorema 45. *Para todo grafo matrogênico G , $scw(G) \leq 2$.*

Dem.: Seja $G = (V, E)$ um grafo matrogênico, pelo Teorema 23 podemos particionar seu conjunto de vértices em $V = V_K \cup V_S \cup V_C$. Se $V_C = \emptyset$ temos um grafo matrogênico split. Note que podemos obter um grafo matrogênico realizando a junção parcial de

um núcleo com um grafo matrogênico split. Então, vamos começar por um grafo matrogênico split.

Seja MS um grafo matrogênico split. Pelo Lema 44, temos que $scw(MS) \leq 2$ e, além disso, dado um vértice $v \in V(MS)$, se v pertence ao conjunto estável de $V(MS)$ então podemos representá-lo com rótulo 1 na expressão esperta para MS , e com rótulo 2 caso ele pertença à clique. Temos 3 possibilidades para MS : MS_1 , que só possui vértices em seu conjunto estável, MS_2 que só possui vértices na clique e MS_3 , onde $scw(MS_3) = 2$.

Como podemos obter um grafo matrogênico realizando a junção parcial de um núcleo (tK_2 , $CP(2t)$ ou C_5) com um grafo matrogênico split, temos as seguintes possibilidades para G :

Se o núcleo for um grafo tK_2 , utilizando o Lema 41, as possíveis expressões para G são dadas por:

$$\begin{aligned} (1\text{-expressão esperta para } tK_2) \oplus_{\emptyset, id, id} & \quad (1\text{-expressão esperta para } MS_1). \\ (1\text{-expressão esperta para } tK_2) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} & \quad (1\text{-expressão esperta para } MS_2). \\ (1\text{-expressão esperta para } tK_2) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} & \quad (2\text{-expressão esperta para } MS_3). \end{aligned}$$

Se o núcleo for um grafo $CP(2t)$, utilizando o Lema 42, as possíveis expressões para G são dadas por:

$$\begin{aligned} (1\text{-expressão esperta para } CP(2t)) \oplus_{\emptyset, id, id} & \quad (1\text{-expressão esperta para } MS_1). \\ (1\text{-expressão esperta para } CP(2t)) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} & \quad (1\text{-expressão esperta para } MS_2). \\ (1\text{-expressão esperta para } CP(2t)) \oplus_{\{(1,2)\}, id, id} & \quad (2\text{-expressão esperta para } MS_3). \end{aligned}$$

Se o núcleo for um grafo C_5 , utilizando o Lema 43, as possíveis expressões para G são dadas por:

$$\begin{aligned} (2\text{-expressão esperta para } C_5) \oplus_{\emptyset, id, id} & \quad (1\text{-expressão esperta para } MS_1). \\ (2\text{-expressão esperta para } C_5) \oplus_{\{(1,2),(2,2)\}, id, id} & \quad (1\text{-expressão esperta para } MS_2). \\ (2\text{-expressão esperta para } C_5) \oplus_{\{(1,2),(2,2)\}, id, id} & \quad (2\text{-expressão esperta para } MS_3). \end{aligned}$$

Em todos os casos, $scw(G) \leq 2$, como queríamos. □

O Teorema 45 nos mostra que os grafos matrogênicos têm uma largura esperta em clique pequena, de fato, ela é menor ou igual a dois. Portanto, de acordo com o Teorema 38, é possível utilizar o *Algoritmo Diagonalize* para localizar, em tempo linear, os autovalores de grafos matrogênicos desde que tenhamos uma expressão esperta que utilize poucos rótulos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação de mestrado trabalhamos com temas de Teoria de Grafos e Teoria Espectral de Grafos. Mais especificamente, estudamos a classe dos grafos matrogênicos. Os grafos matrogênicos se originam de uma estrutura algébrica conhecida como matroide. Além disso, essa classe de grafos contém a classe dos grafos matroidais, que por sua vez contém a classe dos grafos threshold, e é uma subclasse dos unigrafos.

A fim de possibilitar a compreensão total do trabalho e dos conceitos apresentados, o Capítulo 2 foi reservado à apresentação de conceitos iniciais de Teoria de Grafos, Teoria Espectral de Grafos e Teoria Matroides.

O Capítulo 3 foi dedicado exclusivamente ao estudo dos grafos matrogênicos. Nele, definimos os grafos matrogênicos por meio de matroides e, consequentemente, por circuitos. Uma das contribuições deste trabalho foi buscar e reunir, da literatura, as diversas caracterizações desses grafos e mostrar que são equivalentes. Mostramos que um grafo é matrogênico se, e somente se, ele não possui a configuração proibida \mathcal{F} apresentada na Definição 47. Também mostramos que um grafo $G = (V, E)$ é matrogênico se, e somente se, podemos particionar seu conjunto de vértices em $V = V_K \cup V_S \cup V_C$, onde $V_K \cup V_S$ induz um grafo matrogênico split e V_C induz um núcleo, de modo que todo vértice de V_C é adjacente a todo vértice de V_K e a nenhum vértice de V_S . Quando $V_C = \emptyset$, temos um grafo matrogênico split. O restante do capítulo 3 foi voltado ao estudo e caracterização dessa subclasse dos grafos matrogênicos.

No Capítulo 4, descrevemos o Algoritmo *Diagonalize*. Esse é um algoritmo de localização de autovalores desenvolvido por M. Fürer et al. em [16]. Começamos o capítulo definindo uma decomposição para grafos, conhecida como decomposição esperta em clique. Nela, conseguimos expressar um grafo por meio

de uma expressão que recebe o nome de k -expressão esperta. Da mesma maneira que cografos podem ser associados às árvores, as coárvores, podemos associar uma k -expressão esperta a uma árvore, a chamada árvore de análise. O algoritmo trabalhado recebe uma árvore de análise associada a uma k -expressão esperta, um escalar x e por meio de operações de congruência constrói uma matriz diagonal D congruente à matriz $A(G) + xI$. A quantidade de autovalores de $A(G)$ maiores do que $-x$, menores do que $-x$ e iguais a $-x$ é igual a quantidade de valores positivos, negativos e nulos, respectivamente, na diagonal de D .

Associado à decomposição esperta em clique, temos um parâmetro conhecido como largura esperta em clique. O algoritmo *Diagonalize* opera em tempo linear para grafos com uma largura esperta em clique pequena. Outra contribuição desse trabalho, presente no Capítulo 5, foi mostrar que os grafos matrogênicos possuem uma largura esperta em clique menor ou igual a dois. Esse é um primeiro passo para mostrar que é possível localizar os autovalores de um grafo matrogênico em tempo linear. Nos resta encontrar uma maneira de obter uma expressão esperta ideal, em tempo linear, para um grafo matrogênico.

Finalizaremos esse trabalho apresentando outras ideias de como podemos dar continuidade ao estudo de propriedades espectrais dos grafos matrogênicos, uma área ainda pouco explorada. Visto que não existem muitos estudos acerca da teoria espectral de grafos matrogênicos, pretendemos explorar essa área.

Um dos parâmetros espectrais que podemos estudar é o *raio espectral*. O raio espectral de um grafo é o maior autovalor, em módulo, de sua matriz de adjacência. O livro [32] introduz e motiva o estudo desse parâmetro, apresentando diversos resultados sobre o mesmo em diferentes classes de grafos. Além de estudar o raio espectral dos grafos matrogênicos, um dos problemas que podemos abordar é o de ordenar subclasses de grafos matrogênicos pelos seus raios espectrais.

Outro parâmetro espectral bastante conhecido é a *energia* de um grafo. Ela é definida como a soma dos autovalores em módulo de um grafo. Uma pergunta que podemos nos fazer é: Dentre os grafos matrogênicos de n vértices quais têm energia máxima (ou mínima)? Essa pergunta já foi respondida para algumas classes de grafos como árvores [18] e grafos unicíclicos [21].

Também podemos estudar a *conectividade algébrica* dos grafos matrogênicos. Definido por Fiedler em [12], a conectividade algébrica é definida como sendo o segundo menor autovalor da matriz Laplaciana. Esse parâmetro é importante, pois nos dá uma ideia de quão bem um grafo é conexo. Por exemplo, é sabido que um grafo é conexo se, e somente se, sua conectividade algébrica é diferente de zero. Com relação aos problemas abordados pode-se estudar sua relação com propriedades estruturais de um grafo e até mesmo determinar ou encontrar cotas para esse parâmetro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.
- [2] BRANDSTADT, A., LE, V. B., AND SPINRAD, J. P. *Graph classes: a survey*. *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications* (1999).
- [3] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. Springer, 2012.
- [4] CHVÁTAL, V., AND HAMMER, P. Aggregation of inequalities in integer programming. *Ann. Discrete Mathematics* 1 (1977), 145–162.
- [5] CORNEIL, D., LERCHS, H., AND BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981), 163–174.
- [6] CVETKOVIC, D. M. *Graphs and their spectra*. PhD thesis, Univ. Beograd., 1971.
- [7] CVETKOVIC, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs*, vol. 87. Academic Press, Inc, 1980.
- [8] DAM, E. R. V., AND HAEMERS, W. H. Developments on spectral characterizations of graphs. *Discrete Math.* 309 (2009), 576–586.
- [9] DIESTEL, R. *Graph theory*, vol. 173. Springer-Verlag, 1997.
- [10] DING, G., AND HAMMER, P. L. Matroids arisen from matrogenic graphs. *Discrete Mathematics* 165/166 (1997), 211–217.
- [11] EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8 (1741), 128–140.
- [12] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal* 23 (1973), 298–305.

- [13] FOISY, J. S., AND LUDWIG, L. D. When graph theory meets knot theory. *Contemporary Mathematics 479* (2009), 67–85.
- [14] FÖLDES, S., AND HAMMER, P. L. On split graphs and some related questions. *In Problèmes Combinatoires et Théorie Des Graphes 260* (1976), 139–140.
- [15] FÖLDES, S., AND HAMMER, P. L. On a class of matroid producing graphs. *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai (Combinatorics) 18* (1978), 331–352.
- [16] FÜRER, M., TREVISAN, V., JACOBS, D. P., AND HOPPEN, C. Eigenvalue location in graphs of small clique-width. *Linear Algebra and its Applications 560* (2019), 56–85.
- [17] GRAHAM, R., AND POLLAK, H. On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech. J. 50* (1971), 2495–2519.
- [18] GUTMAN, I. Acyclic systems with extremal hückel π -electron energy. *Theor. Chim. Acta 45* (1977), 79–87.
- [19] HENDERSON, P., AND ZALCSTEIN, Y. A graph-theoretic characterization of the pv class of synchronizing primitives. *SIAM Journal on Computing 6* (1977), 88–108.
- [20] HOPPEN, C., JACOBS, D. P., AND TREVISAN, V. *Locating Eigenvalues in Graphs*, 1st ed. Springer, 2022.
- [21] HOU, Y. Unicyclic graphs with minimal energy. *J. Math. Chem. 29* (2001), 163–168.
- [22] HÜCKEL, E. Quantum-theoretical contributions to the benzene problem. *Z. Physik* (1931).
- [23] JACOBS, D. P., AND TREVISAN, V. Locating the eigenvalues of trees. *Linear Algebra and its Applications 434*, 1 (2011), 81–88.

- [24] JACOBS, D. P., TREVISAN, V., AND TURA, F. C. Eigenvalue location in cographs. *Discrete Applied Mathematics* 245 (2018), 220–235.
- [25] KOUTROULI, M., KARATZAS, E., PAEZ-ESPINO, D., AND PAVLOPOULOS, G. A. A guide to conquer the biological network era using graph theory. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology* 8 (2020).
- [26] MAHADEV, N., AND PELED, U. *Threshold Graphs and Related Topics*, 1st ed., vol. 56. Annals of Discrete Mathematics, 1995.
- [27] MARCHIORO, P., MORGANA, A., PETRESCHI, R., AND SIMEONE, B. Degree sequences of matrogenic graphs. *Discrete Mathematics* 51, 1 (1984), 47–61.
- [28] MERRIS, R. *Graph Theory*, 1st ed. Wiley-Interscience, 2000.
- [29] OXLEY, J. G. *Matroid Theory*, 1st ed. Oxford University Press, 1992.
- [30] PAVLOPOULOS, G. A., SECRIER, M., AND MOSCHOPOULOS, C. N. Using graph theory to analyze biological networks. *BioData Mining* 4 (2011).
- [31] PELED, U. N. Matroidal graphs. *Discrete Mathematics* 20 (1977), 263–286.
- [32] STEVANOVIC, D. *Spectral Radius of graphs*, 1st ed. Academic Press, Inc, 2014.

ÍNDICE REMISSIVO

- 4-ciclo alternado, 30–32, 34, 35
- adjacentes, 8
- Algoritmo Diagonalize, 59
- ancestral, 17
- autovalor, 21
- caminho, 10
- ciclo, 10
- circuito, 25, 27, 32, 34
- clique, 12, 19, 42, 45
- cocktail party, 15
- cografo, 18, 57
- CombineBoxes, 62
- complemento de rede, 15
- congruentes, 22
- conjunto base, 23
- conjunto estável, 12
- conjuntos independentes, 23
- dependente, 24
- domina, 8
- emparelhamento, 14
- emparelhamento maximal, 14
- emparelhamento máximo, 14
- emparelhamento perfeito, 14, 45
- espectro, 21
- expressão esperta, 54, 55, 60
- filho, 16
- folha, 16
- grafo, 7
- grafo caminho, 17
- grafo ciclo, 10
- grafo complementar, 11, 15, 41
- grafo completo, 11
- grafo conexo, 10
- grafo finito, 8
- grafo vazio, 8
- grau do vértice, 8
- hereditária, 41
- invariantes, 9
- inércia, 21
- irmãos, 17
- isomorfo, 9
- junção, 17
- junção parcial, 19, 50, 51
- k-sistema, 46
- largura esperta em clique, 56, 60, 74
- LeafBox, 62
- matriz de adjacência, 20
- matrogênico, 32, 34, 35, 37, 41, 42, 45, 79
- matrogênico split, 45, 52

matroide, 23
matroide ciclo, 28
não terminal, 17
núcleos, 41
pai, 16
polinômio característico, 20
raiz, 16
rede, 15
sequência de graus, 9
split, 12, 19, 45
subgrafo, 10
subgrafo induzido, 10, 57
threshold, 30, 34
threshold independente, 32
trilha, 10
unigrafos, 34
união, 17
vizinhança aberta, 8
vizinhança fechada, 8
árvore, 16
árvore de análise, 56, 59, 60