Dobraduras no GeoGebra: uma possibilidade de trabalho com argumentação na Educação Básica

Folds in GeoGebra: a possibility of working with argumentation in Basic Education

SILVEIRA, Priscila Ferreira
PPGEMAT/UFRGS
pry.f.silveira@gmail.com
0000-0002-4517-4034

NOTARE, Márcia Rodrigues
PPGEMAT/UFRGS
marcia.notare@gmail.com
0000-0002-2897-8348

Eixo 16 – Tecnologias digitais em Educação Matemática

Resumo
O presente artigo analisa o desenvolvimento do pensamento geométrico e da argumentação a partir da utilização applets que simulam dobraduras em ambiente de geometria dinâmica. Nosso objetivo é analisar como ocorre a aprendizagem de propriedades geométricas que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica e como os axiomas de Huzita podem dar suporte à argumentação dos alunos. A investigação foi realizada com o software GeoGebra, a partir da manipulação de objetos geométricos dinâmicos que simulam dobraduras em folhas de papel, nos quais os alunos foram incentivados a explorar e argumentar. O raciocínio matemático envolve ações como abstrair, generalizar, estabelecer relações e fazer conjecturas e as atividades propostas foram pensadas para desencadear essas habilidades. Dessa forma, elaboramos as atividades deste estudo de maneira que proporcionem e incentivem a investigação geométrica por parte dos alunos. Os resultados da pesquisa sugerem que as atividades propostas tornaram possível o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes da educação básica e que os axiomas de Huzita foram utilizados por estes estudantes, mesmo que de forma implícita, para argumentarem sobre as propriedades geométricas observadas.
Palavras-chave: geometria dinâmica; tecnologias digitais; educação matemática; pensamento geométrico.

Abstract
This article analyzes the development of geometric geometry and argumentation from the use of applets that simulate folding in a dynamic environment. Our objective is to analyze how the learning of geometric configurations that emerge from the exploration of folds in a dynamic geometry environment occurs and how Huzita's axioms can support the students' arguments. The investigation was carried out with the GeoGebra software of geometric objects, from the investigation that simulate folds in sheets of paper, in the students were encouraged to explore and argue. What involves actions such as abstractions, establishments and proposed activities are designed for general skills. In this way, we designed the activities of this study in a way that provides and encourages investigation by the students. The research results that were developed as proposed activities made it possible for basic education students and the geometric properties of basic education and the geometric properties of Huzita were used by these students, even if implicitly, to argue about how they were observed.
Keywords: dynamic geometry; digital Technologies; mathematics education; geometric thinking.

Introdução

A Geometria Euclidiana é o campo da Matemática que estuda propriedades de figuras geométricas que se desenvolvem em um sistema axiomático-dedutivo. Neste cenário, ações como experimentar, formular conjecturas, testá-las e validá-las são processos naturais que constituem o pensamento geométrico (NOTARE; BASSO, 2018) e, portanto, são importantes de serem trabalhadas na Educação Básica.

O pensamento geométrico se desenvolve quando os alunos identificam propriedades, estabelecem relações, fazem conjecturas e argumentam. Notare e Basso (2012) destacam que, muitas vezes, o processo de construção dos conceitos matemáticos é omitido dos alunos quando lhes são impostos fórmulas e “regras”, privando-os de vivenciar processos como exploração e descoberta. Desse modo, percebemos a importância de atividades de exploração e construção das propriedades e conceitos geométricos.

Corroborando com Moreno-Armella (2016), é essencial para os alunos explorar modelos dinâmicos para examinar um grande número de exemplos. Assim, eles poderão identificar e formular conjecturas ou invariâncias e procurar argumentos para apoiar as relações matemáticas presentes na situação proposta. Tais atividades matemáticas são defendidas por De Villiers (1997) como importantes para o desenvolvimento da argumentação.

O presente artigo, recorte de uma pesquisa de mestrado acadêmico em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEMAT/UFRGS), apresenta um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico com estudantes de nono ano do Ensino Fundamental, em ambiente de geometria dinâmica. O estudo analisa como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir da exploração de dobraduras virtuais no GeoGebra e como os axiomas de dobraduras em papel de Huzita apóiam os argumentos destes estudantes.

Para conduzir a investigação, foi desenvolvido um GeoGebraBook, um material dinâmico on-line e interativo desenvolvido com o GeoGebra, com uma sequência de atividades que propõe a manipulação de simulações de dobraduras virtuais (https://www.geogebra.org/m/kg5tgaed).

Apresentamos a seguir o referencial teórico que ancorou o estudo, a metodologia de pesquisa, a descrição e a análise dos dados e as conclusões desta.

Pensamento Geométrico e Argumentação na Educação Básica

De acordo com Costa (2020), o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos e de utilizar conceitos e propriedades geométricas na resolução de problemas. O autor, também, caracteriza a abstração geométrica dedutiva sendo constituída por provas, demonstrações, argumentações e conjecturas de natureza intuitiva e dedutiva. Nesse contexto, a Geometria passa a ser entendida como um modelo matemático formado por axiomas e teoremas.

No processo de aprendizagem de Geometria, podemos dizer que, inicialmente, o aluno observa a figura geométrica e a identifica pela sua aparência e, posteriormente, ele identifica propriedades dessa figura geométrica. No momento em que o aluno está convicto das propriedades geométricas observadas, ele pode ter motivação para a argumentação daquilo que foi observado e conjecturado. Assim, podemos afirmar que argumentar sobre determinada propriedade é uma forma de evidenciar entendimento e compreensão sobre a mesma, pois sugere que o aluno se aprofundou sobre esse conhecimento.

Dessa forma, quando o aluno utiliza propriedades e conceitos geométricos para realizar sua argumentação, corroborando com Costa (2020), apresenta indícios do desenvolvimento do pensamento geométrico. Podemos dizer que esse aluno está utilizando conceitos e propriedades geométricas para responder ao questionamento pessoal "Por que minhas afirmações estão corretas?".

A geometria dinâmica pode contribuir para a verificação de propriedades das figuras geométricas, uma vez que a figura geométrica pode ser manipulada de forma que se mantém suas propriedades. De acordo com Notare e Basso (2018), nesses ambientes, as propriedades geométricas são realçadas pois se mantém estáveis enquanto a figura como um todo é manipulada. A identificação de tais propriedades é uma etapa importante no processo de argumentação, proporcionando um espaço para elaboração, teste e validação de conjecturas, etapas importantes do processo dedutivo.

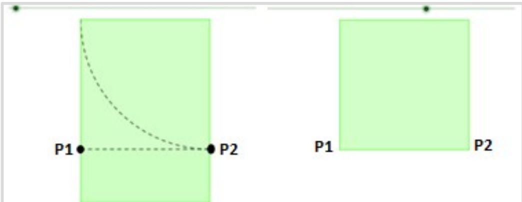
Porém, o processo de argumentação é considerado por De Villiers (1997) como uma etapa crucial no desenvolvimento do pensamento geométrico. Isto porque durante o processo de argumentação é desenvolvido o raciocínio geométrico, provocando o aluno a aprofundar seus conhecimentos em relação a conceitos e características das figuras geométricas.

Dobradura e Geometria: os Axiomas de Huzita

Nesta seção, vamos apresentar os axiomas de Huzita. Huzita desenvolveu os primeiros axiomas que abordavam a matemática de dobrar o papel para resolver problemas de construção geométrica. Os axiomas de Huzita serão abordados a partir de dobraduras propostas em nossa pesquisa.

O Axioma 1 afirma que, dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos (Figura 1). Podemos dizer que essa dobra é uma reta que contém tais pontos, remetendo ao primeiro postulado de Euclides, que afirma que existe uma única reta que passa por dois pontos distintos.

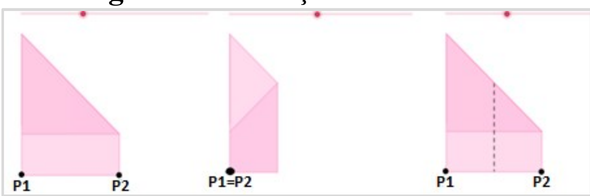
Figura 1: Ilustração do Axioma 1



Fonte: Acervo pessoal

O Axioma 2 afirma que, dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma única dobradura que os torna coincidentes (Figura 2). Ao realizar essa dobradura, é construída a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$, sendo possível encontrar também o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$ pela intersecção do segmento $\overline{P_1P_2}$ com a mediatriz. Pin e Uribe (2016) associam esse Axioma à existência e unicidade da mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$.

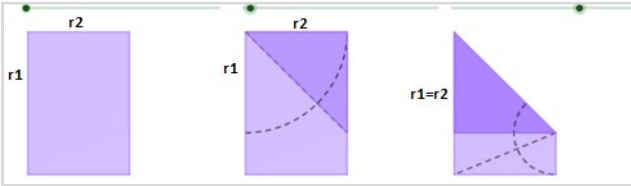
Figura 2: Ilustração do Axioma 2



Fonte: Acervo pessoal

O Axioma 3 afirma que, dadas duas retas r_1 e r_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir $r_1$com r_2 (Figura 3). Nessa dobradura, se as retas r_1 e r_2 forem paralelas, então a dobra descreverá uma reta paralela às retas r_1 e r_2. Porém se as retas r_1 e r_2 forem concorrentes, a dobra descreve a bissetriz dos ângulos formados entre as retas, sendo que há duas possibilidades de dobrar e não apenas uma. Pin e Uribe (2016) associam esse axioma às bissetrizes dos ângulos formados pela intersecção das duas retas. Esse axioma pode ser identificado na Dobradura 3 das atividades propostas nessa pesquisa, em que o lado esquerdo e o lado direito da folha de papel A4, ao coincidirem, formam uma dobra paralela a esses dois lados, como mostra a Figura 3.

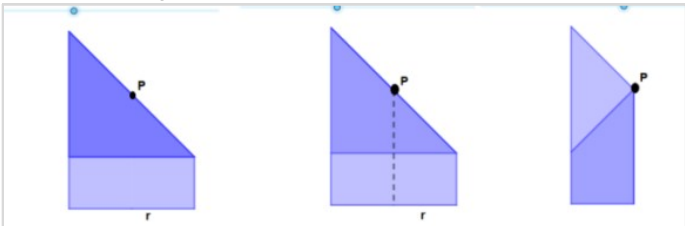
Figura 3: Ilustração do Axioma 3



Fonte: Acervo pessoal

O Axioma 4 afirma que, dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular à reta r que passa por P (Figura 4). Pin e Uribe (2016) associam esse axioma à existência e unicidade da reta perpendicular que passa por um ponto.

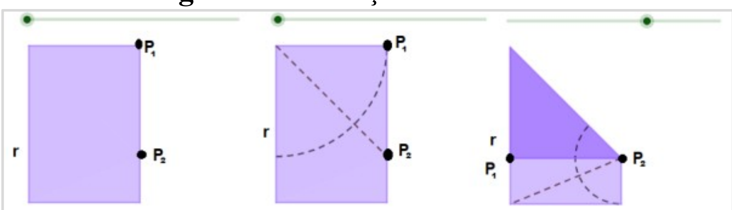
Figura 4: Ilustração do Axioma 4



Fonte: Acervo pessoal

O Axioma 5 afirma que, dados dois pontos distintos P_1 e P_2 e uma reta r, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2 (Figura 5). Pin e Uribe (2016) afirmam que a quantidade de soluções desse axioma pode ser nenhuma, uma ou duas, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois é equivalente a encontrar a intersecção da reta r com um círculo com centro em P_2 e de raio $\overline{P_1P_2}$.

Figura 5: Ilustração do Axioma 5

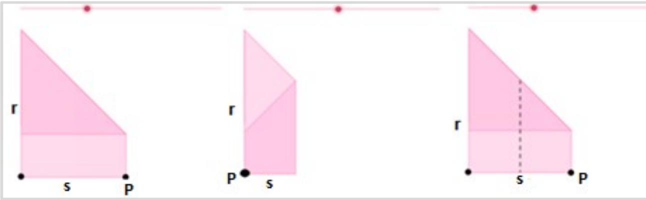


Fonte: Acervo pessoal

O Axioma 6 afirma que, dados dois pontos distintos P_1 e P_2 e duas retas distintas r e s, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r e P_2 sobre s. Pin e Uribe (2016) afirmam que esse axioma não pode ser construído com régua e compasso. O Axioma 6 não foi identificado nas dobraduras dessa pesquisa.

O Axioma 7 afirma que, dados um ponto P e duas retas r e s, existe uma dobra que faz coincidir P em r e é perpendicular à reta s (Figura 6).

Figura 6: Ilustração do Axioma 7



Fonte: Acervo pessoal

Na seção a seguir, são apresentados aspectos da metodologia de pesquisa.

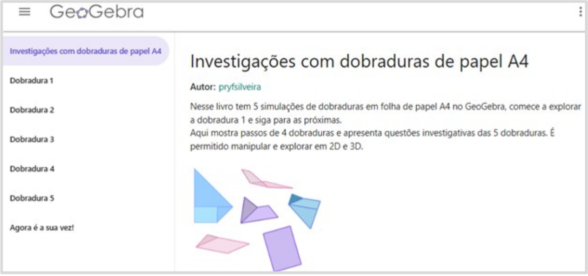
Metodologia de Pesquisa

Essa investigação tem abordagem qualitativa. Procuramos investigar como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico a partir das simulações de dobraduras de papel A4 em ambiente de geometria dinâmica. Assim, buscamos compreender o comportamento dos estudantes no ambiente de geometria dinâmica enquanto realizavam as atividades propostas no GeoGebraBook desenvolvido. Realizamos a análise do processo de exploração e descoberta e das produções de argumentações dos estudantes, procurando identificar indícios de desenvolvimento de pensamento geométrico e dos axiomas das dobraduras na argumentação dos alunos.

Como experimento prático da pesquisa, foi oferecida uma oficina para as turmas de nono ano de uma escola da rede estadual de Ensino Fundamental, organizada em cinco encontros, com duração de duas horas cada encontro. Os instrumentos utilizados para a produção dos dados foram: diário de campo da professora-pesquisadora; registros escritos dos estudantes em editor de texto; gravação de vídeos.

Para a organização das atividades da oficina, criamos um livro digital no GeoGebraBook com as dobraduras e sequências de atividades (https://www.geogebra.org/m/kg5tgaed). Na primeira tela do livro digital é possível acessar um resumo do livro e seus capítulos, dividido em cinco dobraduras denominadas *Investigações* e a atividade final, denominada *Agora é a sua vez!*, como ilustra a Figura 7. A organização das atividades propostas foi pensada para contemplar etapas importantes do pensamento geométrico como: manipular e explorar as dobraduras; realizar conjecturas, identificando características e propriedades gerais das figuras; realizar conjecturas, identificando propriedades geométricas que definem as figuras; e argumentar sobre as conjecturas realizadas.

Figura 7: Tela Inicial do Livro Digital



Fonte: Acervo pessoal

A seguir, apresentamos a descrição e a análise de duas atividades de dobraduras.

Descrição e Análise: os axiomas de Huzita na argumentação dos alunos

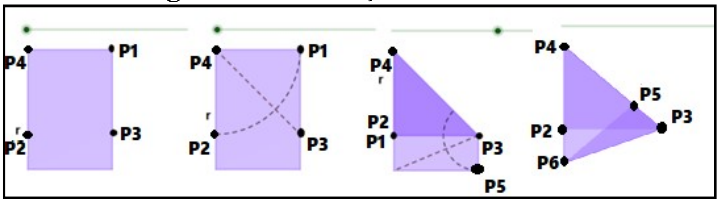
Nessa seção vamos descrever e analisar a exploração de duas dobraduras pelos alunos e realçar como os axiomas de Huzita mostram-se presentes na argumentação dos alunos, mesmo sem que eles conheçam esses axiomas. Os participantes da pesquisa, nomeados de Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3, exploraram as dobraduras dinâmicas virtuais de folhas de papel, que formavam figuras geométricas com determinadas propriedades (a saber, quadrado, triângulo isósceles, paralelogramo, trapézio, pipa), via manipulação de um controle deslizante. Após identificarem propriedades das dobraduras exploradas, os estudantes passavam para a etapa de justificar a validade das mesmas.

A exploração da Dobradura 2 do livro digital, que forma um triângulo isósceles, será analisada a seguir. Após a manipulação da dobradura, os alunos responderam às seguintes perguntas *"Quais características você observa na figura construída? Por quê?"* e *"Que figura foi construída? Por quê?"*. Obtivemos as respectivas respostas: *"Que ela tem 3 ângulos"* e *"Foi construído um triângulo isósceles porque tem apenas dois lados iguais"*.

Constatamos que os alunos entendiam o conceito de triângulo isósceles, inclusive a propriedade de que todo triângulo isósceles possui dois ângulos congruentes, como podemos observar na seguinte pergunta: *"Quais as medidas dos ângulos desse triângulo? Por quê?"*. Nessa pergunta, os alunos argumentaram sobre as características observadas na figura geométrica. Mais especificamente, em relação ao triângulo isósceles possuir dois ângulos congruentes. Obtivemos como argumentação: *"Para o primeiro angulo dividimos 90 por 2 por causa da dobradura que foi feita; para o segundo ângulo subtraimos 45 de 180 que resultou em 135 graus, que foram divididos ao meio resultando em 67,5, no terceiro os triangulos são iguais. (Aluno 1, Aluno 2)"* e *"Se divide por dois q da 45, pq dobrou la, dps 180 menos 45 e ficou 135 (Aluno 3)"*.

Podemos identificar axiomas de Huzita presentes nas argumentações dos alunos. Observe a Figura 8 para acompanhar o desenvolvimento da argumentação. Ao coincidir os pontos P_1 e P_2, conforme o Axioma 2, construímos a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$, o segmento $\overline{P_4P_3}$ pertence a essa mediatriz. De acordo com o Axioma 3, ao coincidir os segmentos concorrentes $\overline{P_4P_1}$ e $\overline{P_4P_2}$ obtemos o segmento $\overline{P_4P_3}$ bissetriz do ângulo $\widehat{P_4}$. Como o segmento $\overline{P_4P_3}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{P_4} = 90°$ então $P_2\widehat{P_4}P_3 = 45°$. Da mesma forma, o ângulo $P_1\widehat{P_3}P_2 = 90°$ observando sua bissetriz concluímos que $P_1\widehat{P_3}P_4 = 45°$, sendo esse valor diminuído do ângulo $\widehat{P_3} = 180°$ ao realizar a dobra. Obtemos então $P_4\widehat{P_3}P_5 = 135°$. Em seguida, ao coincidir os segmentos concorrentes $\overline{P_4P_3}$ e $\overline{P_5P_3}$, conforme o Axioma 3, obtemos a bissetriz do ângulo $P_4\widehat{P_3}P_5 = 135°$, logo $P_4\widehat{P_3}P_6 = 67{,}5°$.

Figura 8: Simulação Dobradura 2

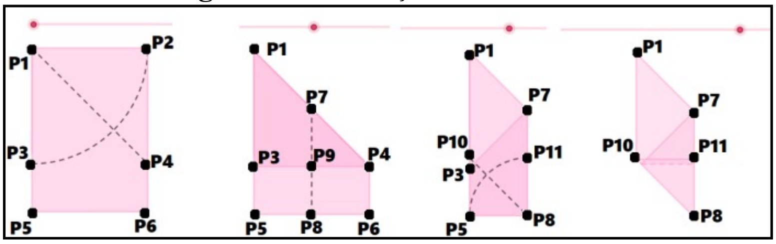


Fonte: Acervo pessoal

Vamos analisar agora a exploração da Dobradura 3, que forma um paralelogramo. Inicialmente os alunos observaram que a figura geométrica, pela sua aparência, possui dois ângulos obtusos, dois ângulos agudos e dois lados iguais dois a dois, não sabendo classificar a figura. Aos pesquisarem sobre os tipos de quadriláteros e suas características, concluíram que a figura seria um paralelogramo. Então, foi solicitado que argumentassem sobre as propriedades desse paralelogramo.

Para analisar o processo de argumentação dos alunos, vamos nos apoiar na Figura 9. No processo de argumentação, os alunos afirmam que os segmentos $\overline{P_1P_{10}}$ e $\overline{P_7P_8}$ da figura são paralelos. Analisando a argumentação do grupo de alunos (*Como aqui tem 180° e a linha está partindo no meio, tem 90° de cada lado*), identificamos que, primeiro eles observam que o segmento $\overline{P_{10}P_{11}}$, que representa a marca da dobradura, é a bissetriz do ângulo $P_5\widehat{P_3}P_1$, que mede 180°. De acordo com o Axioma 3, ao coincidir os segmentos concorrentes $\overline{P_5P_8}$ e $\overline{P_8P_{11}}$ é construída a bissetriz $\overline{P_{10}P_8}$. Ao coincidir os segmentos $\overline{P_4P_6}$ e $\overline{P_3P_5}$, conforme o Axioma 3, construímos o segmento paralelo $\overline{P_8P_7}$, que pelo Axioma 2 também é mediatriz do segmento $\overline{P_5P_6}$. Dessa forma o ângulo $P_5\widehat{P_8}P_7$ mede 90° (Aqui estão implícitos os Axioma 4 e 7), e utilizando a bissetriz $\overline{P_{10}P_8}$ e ângulos alternos internos temos que o ângulo $P_5\widehat{P_{10}}P_{11}$ mede 90° e consequentemente $P_{11}\widehat{P_{10}}P_1$ também mede 90°. Com isso, os alunos deduzem que os ângulos $P_5\widehat{P_{10}}P_{11}$ e $P_{11}\widehat{P_{10}}P_1$ medem 90°, concluindo a perpendicularidade entre os segmentos $\overline{P_{10}P_{11}}$ e $\overline{P_1P_5}$. Em seguida, os alunos identificaram (*Então a gente pegou o 90° e dobrou no meio e ficou 45°, então tem o 45° e aqui ficou 90°*) o segmento $\overline{P_{10}P_8}$ como a bissetriz do ângulo $P_5\widehat{P_{10}}P_{11}$, concluindo que o ângulo $P_8\widehat{P_{10}}P_{11}$ mede 45° (novamente, o Axioma 3 sustenta a afirmação). Então argumentam (*Como nós temos uma folha que é quadrada nas pontas, nós temos 90° aqui*) que, ao fazer coincidir o ponto P_5 com o ponto P_{11}, os ângulos $P_8\widehat{P_{11}}P_{10}$ e $P_8\widehat{P_5}P_{10}$ também coincidem. Como o ângulo $P_8\widehat{P_5}P_{10}$ é um dos ângulos da folha de papel, os alunos concluem *(e como nós dobramos os 90° aqui e aqui tem 180°, aqui então tem 90° porque 90+90=180*) que o ângulo $P_8\widehat{P_{11}}P_{10}$ mede 90° e argumenta que, como o ângulo $P_8\widehat{P_{11}}P_7$ mede 180°, então o ângulo $P_{10}\widehat{P_{11}}P_7$ mede 90°, implicitamente utilizando a ideia de ângulos suplementares. Finalmente, concluem (*Então esses lados são paralelos, o lado direito e o lado* esquerdo) o paralelismo entre os segmentos $\overline{P_1P_{10}}$ e $\overline{P_7P_8}$.

Figura 9: Simulação Dobradura 3



Fonte: Acervo pessoal

A partir das análises realizadas nas argumentações dos alunos, observamos que os axiomas de Huzita dão suporte, mesmo que de forma implícita, aos argumentos que justificam propriedades geométricas das dobraduras utilizadas nessa pesquisa, assim como os pensamentos dos estudantes.

Conclusões

Podemos observar com essa pesquisa a riqueza de conhecimentos desenvolvidos que o ambiente de geometria dinâmica aliado à argumentação nas aulas de Matemática pode proporcionar aos alunos. O livro digital desenvolvido propõe uma abordagem que permite que o aluno se torne o "construtor" de seus conhecimentos. A partir de atividades de manipulação de dobraduras virtuais no GeoGebra, os alunos identificaram regularidades e propriedades de figuras geométricas que eram resultados das dobraduras realizadas, em seguida, argumentarem sobre suas constatações. Na argumentação destes alunos, foi possível identificar que os axiomas propostos por Huzita estão presentes, mesmo sem nunca terem sido apresentados aos alunos. As atividades propostas oportunizaram aos alunos o desenvolvimento de habilidades matemáticas de exploração, testes, conjecturas e argumentações. Dessa forma, observamos que os alunos desenvolveram seus pensamentos geométricos se apropriando das propriedades e conceitos geométricos ao argumentarem sobre as mesmas, ao identificarem propriedades, ao estabelecerem relações e ao fazerem conjecturas.

Referências

ARMELLA, L. M.; TRIGO, M. S.; MACHIN, M. C. Problem solving and the use of digital Technologies within the Mathematical Working space framework.**ZDMMathematics Education**, 48, p. 827-842, fev, 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

COSTA, A. Abstrações em Geometria: Uma alternativa para Análise do Pensamento Geométrico. **Revista VIDYA**, v.40, p. 137-158, 2020.

DE VILLIERS, M. **The Role of Proof in Investigative, computer-based Geometry: Some personal reflections.** Chapter in Schattschneider, D. & King, J. (1997). Geometry Turned On! Washington: MAA, p. 15-24.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre: UFRGS, 2001. 277 p. Tese de doutorado, curso de Pós-Graduação em informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/2545>. Acesso em: 16/03/2019.

MENEZES, D. B. **O uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: História, Teorema e Problemas**. Fortaleza: UFC, 2014, 67 p. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, 2014. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11674. Acesso em: 29/10/2018.

NOTARE, M.; BASSO, M. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, jul, 2018.

NOTARE, M.; BASSO, M. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o caminho do fazer ao compreender. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 10, n. 3, 2012.

PIN, O. J.; URIBE, E. B. O. Os Axiomas de Huzita-Hatori e o Ensino da Geometria Euclidiana Plana Através da Construção de Polígonos. **Universidade Federal do Mato Grosso do Sul**, Três Lagoas, v. 8, n. Especial, p. 39-44, 2016.