UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE INFORMÁTICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UM PAPEL PARA A LÓGICA INTRA-PROPOSICIONAL DE JEAN PIAGET NA REPRESENTAÇÃO DO CONHECIMENTO DO SENSO COMUM

por

RAUL SIDNEI WAZLAWICK

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação

Prof. José Mauro Volkmer de Castilho
Orientador

Prof. Antônio Carlos da Rocha Costa
Co-Orientador

Porto Alegre, março de 1991.

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Wazlawick, Raul Sidnei

Um papel para a lógica intra-proposicional de Jean Piaget na representação do conhecimento do senso comum. / Raul Sidnei Wazlawick. - Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991.

128 p.: il

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Porto Alegre, 1991. Orientador: Castilho, José Mauro Volkmer de.

Dissertação: Lógica operatória intraproposicional. herança de atributos. lógica não-monotônica. psicologia cognitiva. semântica.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS

Ax.	Axioma
cap.	capítulo
CWA	Closed World Assumption (Hipótese do Mundo Fechado)
Fig.	Figura
Lc	Lógica das classes
Lp	Lógica das proposições
pag.	página
p.ex.	por exemplo
prop.	propriamente
R.s.	Regra de substituição
Teo.	Teorema
tml	tamanho da maior ligação
v.	ver

LISTA DE SINAIS[1]

$=_{df}$	"é definido por" (1.1)
$=$	"igual a" (2.1)
$\equiv$	Identidade (2.2)
$\equiv_e$	Igualdade de extensão (3.3.1)
$\not\equiv_e$	Desigualdade de extensão (3.3.1)
$<_e$	Menor extensão (A3.1)
$\neq$	"diferente de" (2.1)
$\leq$	"menor ou igual a" (4.2.3) ou "precede" (4.3.2)
$:=$	Símbolo de atribuição (2.1)
$\mid$	"tal que" (1.1)
$\times$	Produto cartesiano (2)
$:$	Separador de identificador e aridade em definições de funções (2)
$\longrightarrow$	Separador de aridade e co-aridade em definições de funções (2)
$\square$	Fim de definição (2.2)
$\subseteq$	"está contido em" (1.1)
$\not\subseteq$	"não está contido em" (2.2)
$\cup$	União (2.1)
$\cap$	Interseção (A3.1)
$\in$	"pertence a" (1.1)
$^{-1}$	"inversa" (1.2)
V	"verdadeiro" (4.1)
v	Função de avaliação de proposições (4.1)
$\neg$	"não" (1.2)
$\wedge$	"e" (1.1)
$\vee$	"ou" (4.1)
$\rightarrow$	Implicação formal (1.1)
$\leftrightarrow$	Bi-implicação (A3.1)
$\supset$	Implicação material (A2)

[1] Obs.: Os números entre parênteses indicam a seção onde cada símbolo aparece pela primeira vez.

$\forall$	"para todo" (1.1)
$\exists$	"existe" (4.1)
$\nexists$	"não existe" (4.2.3)
$\overline{}$	Símbolo da operação de dedução natural (1.1)
$\vdash$	"deduz" (monotonicamente) (1.2)
$\nvdash$	"não deduz" (monotonicamente) (2.2)
$\mid\!\sim$	"deduz" (não-monotonicamente) (1.2)
$\mid\!\not\sim$	"não deduz" (não-monotonicamente) (4.1)
K	"sabe-se que" (1.2)
$+\Mapsto$	Símbolo da herança positiva estrita (1.2)
$-\Mapsto$	Símbolo da herança negativa estrita (1.2)
$+\mapsto$	Símbolo da herança positiva não-estrita (1.2)
$-\mapsto$	Símbolo da herança negativa não-estrita (1.2)
$\overset{\sim}{\to}$	Símbolo da herança não-estrita em lógica das classes (4.2.3)
$\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$	Símbolo da herança cíclica não-estrita em lógica de classes (4.3.2)
$\circ$	Função que compõem operações de classes (2)
$\mathcal{U}$	Universo (2.1)
0	Classe vazia (2.1)
$'$	"complementar em relação à superclasse imediata" (2.1)
$\overline{}$	"complementar em relação ao universo" (2.2)
$+$	Adição de classes (2.1)
$-$	Subtração de classes (2.2)
$\times$	Multiplicação de classes (3.3.1)
$:$	Divisão de classes (3.3.1)
$/$	Dicotomia (4.2)
$\overset{r}{\longleftrightarrow}$	Relação simétrica (A3.1)
$\xrightarrow{r}$	Relação assimétrica (A3.1)
$\overset{r}{\text{———}}$	Relação simétrica ou assimétrica (A3.1)

CONVENÇÕES

Conjuntos são definidos por extensão como: {a, b, c, ...}, ou por intensão como { x | a(x) }.

Tuplas são definidas apenas por extensão como: <a, b, c, ...>.

Nomes de classes iniciam com letras do alfabeto: $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, ... $\mathbb{Z}$.

Símbolos de predicados são escritos com letra manuscrita, por exemplo: *mortal*, *homem*, etc.

Proposições são denotadas por letras minúsculas em negrito como: **p**, **q**, **r**, etc.

Variáveis sobre objetos são denotadas por letras minúsculas como: x, y, z, etc.

Variáveis sobre classes são denotadas por letras maiúsculas como: X, Y, Z, W, V, etc.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho procura utilizar algumas das idéias de J. Piaget, em especial a "Lógica Operatória Intraproposicional", para uma análise das relações de herança entre classes empregadas em sistemas de representação de conhecimento.

Procura-se sistematizar a noção de taxonomias do conhecimento "científico", ou "classificações sistemáticas". Estas estruturas foram utilizadas por Piaget como ponto de partida para a descoberta de estruturas cognitivas do conhecimento científico.

Em especial, define-se a relação $\vdash_{cs}$, que determina quais relações de herança seguem de uma taxonomia do conhecimento científico.

A noção de classificação do conhecimento científico é comparada com a de "classificação do senso comum".

São mostradas as diferenças entre estes conceitos. Determina-se a semântica das classificações do senso comum nas estruturas de agrupamentos de Piaget, via uma extensão epistêmica da lógica de classes.

É estudada a relação de herança do senso comum que admite exceções.

É também apresentada a formulação usual em lógica de predicados, e é proposta uma formulação em lógica de classes estendida.

Conclui-se que a definição intuitiva da relação de herança empregada em uma formulação em lógica de classes pode ser diferente daquela que é empregada em uma formulação em lógica de proposições.

Observa-se, em especial na formulação em lógica de classes, que as relações de herança não-estrita não se adaptam

à estrutura de grafo direcionado acíclico.

Na verdade, a relação de herança não-estrita não estabelece uma ordenação entre as classes (no sentido de conjunto parcialmente ordenado, ou CPO), mas uma possível simetria entre estas classes.

Esta observação não aparece tão claramente na formulação proposicional, já que a relação de herança é mascarada pelo uso da implicação lógica (→), o que dá uma aparência de ordenação parcial.

Verifica-se o que ocorre quando são combinadas relações de herança com ou sem exceções em uma única teoria de herança.

É feita ainda alguma sistematização da lógica operatória intraproposicional de Piaget.

Esta sistematização não prima pelo rigor, mas em fornecer algum entendimento básico para os não iniciados em Piaget.

O trabalho abrange a sistematização dos quatro agrupamento de classes da lógica intraproposicional, e relega o estudo dos quatro agrupamentos de relações para um trabalho posterior.

Palavras-chave: lógica operatória intraproposicional, herança de atributos, lógica não-monotônica, psicologia cognitiva, semântica.

ABSTRACT

This work uses some ideas of Jean Piaget, mainly the Operating Logic, for an analysis of inheritance relationships used in knowledge representation systems.

The notion of "scientific" knowledge classifications as defined by Piaget is shown. These structures were used by Piaget as a starting point to find the cognitive structures of scientific knowledge.

It is also defined a relation $\vdash_{cs}$. This relation tells whether an inheritance relationship follows from a scientific knowledge taxonomy or not.

The notion of scientific knowledge classification is compared with that of "commonsense classification".

The differences between these concepts are shown. The semantics of common sense classifications is determined in terms of Piaget's "groupments", through an epistemic extension of the logic of classes.

The common sense inheritance relationship with exceptions is studied.

The usual formulation of inheritance in propositional logic is presented, and a formulation in the extended logic of classes is proposed.

The conclusion is that the intuitive definition of inheritance relationship in one formulation may be different of that in the other.

It is observed in the formulation in logic of classes that non-strict inheritance relationships don't adapt to the structure of an acyclic directed graph.

In fact, the non-strict inheritance relation doesn't stablish an ordering between classes (in the sense of a partially ordered set, or POSET), but it stablishes a possible simmetry between these classes.

This is not so clear in the propositional formulation, because the inheritance relation is masked by using logic implication (→), what gives an appearance of partial ordering.

It is verified what occurs when inheritance relations with or without exceptions are mixed in one single theory.

It is made some sistematization of the Piaget's intrapropositional operating logic.

This sistematization doesn't try to be rigorous, but gives some basic understanding on this theme.

The work involves the sistematization of the four groupments of classes of the intrapropositional logic, and leaves the study of the four groupments of relations for a future work.

Keywords: intrapropositional operating logic, inheritance of attributes, non-monotonic logic, cognitive psicology, semantics.

1 INTRODUÇÃO

Quando se ouve falar de Jean Piaget, freqüentemente seu nome é associado a uma teoria educacional, identificada pelo nome de "Teoria de Piaget". Apesar disso, Piaget nunca se considerou como um educador. Ele era na verdade um biólogo, que se interessou em construir uma teoria biológica do conhecimento. Dedicou, então, toda a sua vida a buscar uma resposta para a pergunta "como crescem os conhecimentos?" (v. p.ex. [PIA 78] pag. 33).

A teoria do conhecimento de Piaget tem sido utilizada principalmente por psicólogos e educadores. Daí a freqüente relação que se faz entre ele e a educação.

Também se costuma ver Piaget como um estudioso do comportamento das crianças. Isso se deve ao fato de que ele buscou constituir sua teoria a partir da observação de como se dá a gênese do conhecimento desde a infância.

Como estudioso do conhecimento, Piaget se auto-denominava "epistemólogo". Embora a palavra "epistemologia" designe o estudo do conhecimento científico, e "gnosiologia" fosse um termo mais apropriado para designar o estudo do conhecimento em geral, Piaget adotou o nome "epistemologia" por estar convencido de que o conhecimento se constroi, tanto na ciência quanto na pessoa humana, desde a infância, segundo os mesmos princípios.

1.1 Lógica

Sendo a linguagem lógica uma ferramenta para a representação do conhecimento (v. [CAR 88] entre outros), a distinção entre a lógica e a epistemologia é que, enquanto a epistemologia se ocupa em estudar as relações entre o sujeito cognoscente e o objeto de seu conhecimento, a lógica é cada vez mais uma ciência formal das transformações simbólicas (v. p. ex.

introduções à lógica como a de [END 72]).

Piaget fala de métodos para o estudo da lógica. Esses métodos podem variar e, apesar de possivelmente levarem às mesmas fórmulas finais, podem dar diferentes visões da obra de formalização da lógica (v. [PIA 76] pag. 20-21).

Em seus estudos de lógica, Piaget procurou dar mais ênfase à noção de operação e de totalidades operatórias, em oposição a outros métodos da época (década de 40), que procuravam conceber a lógica como uma teoria composicional de fatos atômicos. Ele argumentava que uma proposição só tem sentido enquanto solidária com uma estrutura operatória global (v. [PIA 76] pag. 40).

A oposição mais importante em termos de métodos era a que existia entre aqueles ligados à procura de uma ordem natural de construções e os que visavam, antes de mais nada, a construção formal e a depuração da demonstração (idem pag. 20).

Mas qual é o sentido de se falar, em lógica, sobre construções mais naturais ou mais artificiais? É preciso compreender que Piaget identifica o conhecimento a um processo de abstração. Este processo se inicia em estruturas que ele considera mais naturais ou concretas. A partir do raciocínio sobre estas estruturas, constroem-se estruturas de ordem superior, ou seja, mais abstratas. Este processo se dá através de várias etapas. A cada etapa, chama-se a estrutura de partida de "conteúdo", e a estrutura resultante da abstração de "forma". Assim, o conhecimento se desenvolve através de uma cadeia de conteúdos e formas, sendo que esta cadeia não tem um início absoluto, e também não tem um fim conhecido. A cada estágio desta cadeia pode corresponder uma linguagem lógica, a qual formaliza o conhecimento até então construído.

Ao presente trabalho, interessam as formalizações de duas etapas desta cadeia: a lógica das classes e a lógica das proposições. A lógica das classes desempenha o papel de conteúdo concreto em relação à lógica das proposições, sendo esta última uma forma com relação à primeira.

Esta maneira de conceber a lógica encontra justificativa psicológica se for observado que os algoritmos da dedução formal da lógica das proposições foram definidos a partir dos raciocínios da lógica das classes. Por exemplo, dizer que "todos os homens são mortais; Sócrates é homem; portanto Sócrates é mortal" é, com efeito, decompor as proposições em classes, incluir a classe dos homens na dos mortais e concluir, da pertinência de Sócrates à primeira classe, sua pertinência à segunda (v. [PIA 76] pag. 33):

$$\frac{\mathbb{H}\text{omem} \subseteq \mathbb{M}\text{ortal} \qquad \text{Sócrates} \in \mathbb{H}\text{omem}}{\text{Sócrates} \in \mathbb{M}\text{ortal}}$$

A partir desse raciocínio sobre classes, pode-se determinar uma regra de raciocínio sobre proposições. Para este caso, tem-se a regra:

$$\frac{(\forall x)\ \mathit{homem}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x) \qquad \mathit{homem}(\text{Sócrates})}{\mathit{mortal}(\text{Sócrates})}$$

Então, ao invés de operar sobre o conteúdo concreto (as classes), opera-se sobre suas formas (as proposições), onde o que determina a validade da regra são apenas os valores verdade de cada proposição. Realizou-se assim um passo de abstração, partindo do mais concreto para o mais abstrato.

Pode-se, inclusive, generalizar esta regra, estabelecendo que ela vale para quaisquer proposições:

$$\frac{(p \rightarrow q) \wedge p}{q}$$

Ao proceder assim, realiza-se uma abstração no sentido do mais específico para o mais geral. Portanto, são dois tipos de abstração, o primeiro é o sentido psicológico, ou piagetiano, e o segundo é o sentido matemático, ou russeliano, (v. [PIA 76] pag. 34-39).

Esta última regra de dedução pode tomar ainda a forma de uma fórmula tautológica da lógica de proposições, isto é, uma proposição composta que é verdadeira em qualquer interpretação:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

O processo que acaba de ser realizado exemplifica o que Piaget chamou de "busca por uma ordem natural das construções". Ele consiste em procurar a cadeia de formas e conteúdos que dão origem às construções cada vez mais abstratas.

Pelo fato do raciocínio sobre classes (e relações) caracterizar-se pela decomposição das proposições em classes (e relações), Piaget chamou a lógica destas estruturas de "intraproposicional". Por outro lado, a lógica "interproposicional" seria a própria lógica das proposições, uma vez que esta não opera sobre o conteúdo das proposições, mas apenas sobre combinações formais de seus valores-verdade (v. [PIA 76] pag. 32]).

Está-se falando, portanto, de duas linguagens lógicas: uma mais abstrata (psicologicamente falando), que é a lógica das proposições, e outra mais concreta, que é a lógica das classes:

mais abstrato →

Lógica das Classes	Lógica das Proposições

← mais concreto

Fig. 1.1: Abstração psicológica.

Russel associou a noção de classe à de função proposicional. Qualquer classe, por exemplo, "$\mathbb{A}$" pode ser definida por uma função proposicional "$a(x)$", através de:

$$\mathbb{A} =_{df} \{ x \mid a(x) \}$$

A equivalência entre classes e funções proposicionais permite que qualquer operação de classes seja interpretada na linguagem das proposições. Então, para Russel, a noção de classe, e a própria lógica das classes, deixa de ter necessidade formal, já que a lógica das proposições tem o mesmo poder expressivo.

Se essa analogia entre a lógica das classes e a lógica das proposições permite que as operações de uma sejam interpretadas na outra, então qual o sentido de buscar a ordem correta das construções, isto é, quais são as diferenças que podem ser encontradas ao optar pelo método de começar a análise lógica pelas estruturas mais concretas? Veremos algumas destas implicações no decorrer deste trabalho. Em especial, queremos demonstrar que teorias de herança formuladas em lógica proposicional ou em lógica de classes podem estar fundamentadas em noções intuitivas distintas. O estudo e comparação destas intuições será nosso principal objetivo.

1.2 Teorias de Herança

A manipulação de teorias de herança de atributos é uma das principais ferramentas de sistemas baseados em conhecimento. Existem várias implementações de linguagens para tratar estas teorias, mas segundo J. Dix, seus resultados diferem e são não-intuitivos (v. [DIX 89] pag. 3). Há, assim, a necessidade de uma teoria formal que descreva como um atributo (informação sobre uma classe de objetos) é herdado, e uma semântica de modelos precisa, que descreva o significado de "um fato segue de uma teoria de herança".

Todavia, existem certas dificuldades para estabelecer o significado de uma teoria de herança quando há informações contraditórias.

Em geral, uma teoria de herança é formalizada em uma linguagem lógica proposicional. Mas a lógica proposicional clássica não é adequada para expressar o conhecimento do senso comum, já que o conhecimento do senso comum é inexato, incompleto e não-monotônico, entre outras características, que a lógica clássica não possui (v. [DEL 87] cap. 3). Acontece que o raciocínio do senso comum é relativo ao conhecimento e também à falta de conhecimento do agente (sujeito cognoscente). Tornou-se então necessário extender a própria lógica através de operadores epistêmicos, como "K" (v. p.ex. [LEV 84]).

A principal dificuldade está em estabelecer o significado da lógica assim estendida. J. Dix afirma que as teorias de significado existentes para as lógicas não-monotônicas (v. [McD 80], [MOO 85], [DEL 87], [REI 80]) não são claras e nem intuitivas (v. [DIX 89] pag. 8). Apenas o método da circunscrição tem uma semântica de modelos mais intuitiva (v. [McC 80]). Mas o próprio McCarthy admite que o conceito de "aspectos", necessário para determinar herança numa teoria circunscrita, não é intuitivo (v. [McC 86]). Não estará pois o problema da determinação destas semânticas no método empregado para formalizar a noção de herança? E como será a semântica da herança se ela for formalizada pelo método da busca da ordem natural das construções?

A noção de relação de herança tem sido formalizada através de quatro tipos de relações. Temos as relações estritas e não-estritas e também relações positivas e negativas. A herança é estrita quando não admite exceções. Ela é representada por "(A $+\models\!\!\!\Rightarrow$ B)" no caso positivo e "(A $-\models\!\!\!\Rightarrow$ B)" no caso negativo, onde:

$$(A +\!\!\models\!\!\Rightarrow B) =_{df} (\forall x)\ a(x) \rightarrow b(x)$$

$$(A -\!\!\models\!\!\Rightarrow B) =_{df} (\forall x)\ a(x) \rightarrow \neg b(x)$$

A herança é não-estrita, quando é deixada em aberto a possibilidade de exceções. Ela é representada por "$(A + \mapsto B$")" para o caso positivo e "$(A - \mapsto B)$" para o caso negativo, onde:

$$(A + \mapsto B) =_{df} (\forall x)\ a(x) \wedge \neg K \neg b(x) \rightarrow b(x)$$

$$(A - \mapsto B) =_{df} (\forall x)\ a(x) \wedge \neg K b(x) \rightarrow \neg b(x)$$

Empregando a busca pela ordem natural das construções, quais seriam as diferenças encontradas se, ao invés de formalizar a herança em lógica de proposições ela tivesse sido formalizada em lógica de classes? Seria essa semântica mais clara ou mais intuitiva?

Se for possível mostrar que a lógica das classes dá uma semântica clara para as relações de herança, então essa semântica pode servir também para a lógica das proposições através de uma interpretação entre as linguagens. Isto tornará possível a comparação das intuições que se têm a respeito da relação de herança nas diversas abordagens.

Portanto, se as fórmulas são análogas (mutuamente interpretáveis) na lógica das classes e na lógica das proposições, as diferenças que se pode encontrar ao proceder à formalização em uma ou outra lógica devem estar na intuição subjacente à definição da relação de herança.

Falar-se-á, então, de teorias de herança através de duas linguagens: a proposicional e a das classes. A linguagem proposicional será apresentada segundo as definições de J. Dix (v. [DIX 89] pag. 3-7). Uma teoria de herança será definida por um conjunto de proposições "T" e um algoritmo de derivabilidade lógica "$\vdash_P$" para o caso monotônico e "$\mid\!\sim_P$" para o caso não-monotônico.

A linguagem de classes para falar de teorias de herança é uma extensão daquela que foi definida por Piaget para expressar encaixes aditivos e multiplicativos de classes (v. [PIA 76] pag. 74-118 e v. anexo).

Será mostrado porque a lógica da classificação sistemática de Piaget não corresponde à lógica da classificação do senso comum. Este estudo explicitará as principais diferenças entre o conhecimento científico e o conhecimento do senso comum.

A seguir, será mostrada uma extensão epistêmica à lógica das classes, e serão definidos os algoritmos para "$\vdash_C$" e "$\mid\!\sim_C$", segundo a intuição subjacente à lógica das classes. As teorias de herança em linguagem de classes serão representadas através de um conjunto "S" de equações epistêmicas.

Ao proceder à comparação entre a derivabilidade na linguagem das proposições e na linguagem das classes estendida, observa-se que são equivalentes para o caso monotônico.

Seja "f" uma função de tradução da lógica das proposições para a lógica das classes estendida, e seja "f^{-1}" a função inversa de "f". Então:

$$(T \vdash_P \alpha) \rightarrow (S \vdash_C f(\alpha))$$

$$(S \vdash_C \alpha) \rightarrow (T \vdash_P f^{-1}(\alpha))$$

Porém no caso não-monotônico, tal equivalência pode não ocorrer. Isso se deve às diferentes intuições que são usadas na linguagem das classes e na linguagem proposicional para definir as relações $\mid\!\sim_P$ e $\mid\!\sim_C$.

Será mostrado porque a semântica da teoria de herança não-estrita na lógica proposicional é problemática, e será mostrada uma semântica clara e intuitiva para herança formalizada diretamente na lógica das classes estendida.

2 CLASSIFICAÇÃO SISTEMÁTICA

Nas classificações sistemáticas, estudadas por Piaget, o único tipo de herança é a herança estrita positiva (relação que será simbolizada por "+|→"). Outra característica própria a uma classificação sistemática é a existência de uma noção de contigüidade entre as classes.

Um exemplo de classificação sistemática é a taxonomia biológica dos seres vivos. A noção de contigüidade é dada pela divisão da hierarquia em níveis, que compreendem: espécies, gêneros, famílias, ordens, classes (propriamente ditas), filos e reinos:

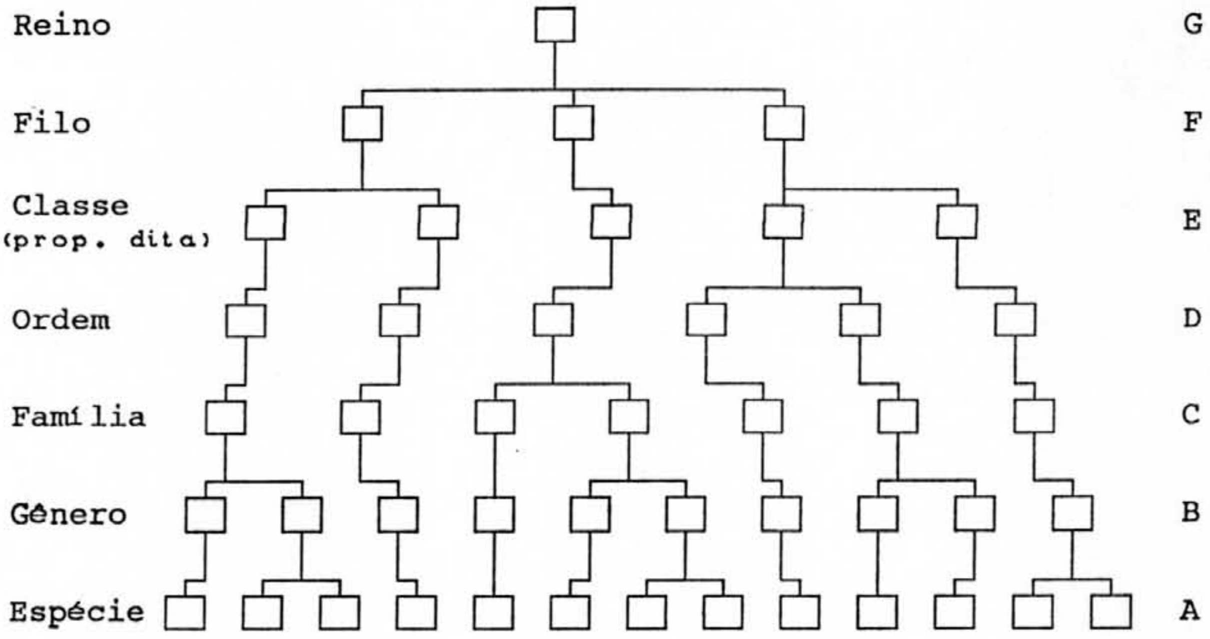


Fig. 2.1: Níveis da hierarquia da taxonomia biológica.

Uma espécie só pode estar encaixada diretamente num gênero, o gênero numa família, e assim por diante. Uma espécie não pode estar diretamente encaixada em uma família, ou numa ordem, etc, sem que haja um gênero intermediário, ou um gênero e uma família, etc, porque este tipo de encaixe fere o princípio de contigüidade. Além disso, toda classe[1], com exceção dos reinos, está contida em uma outra classe superior, e toda classe, com exceção das espécies contém outras classes de nível inferior.

Nas definições posteriores, os símbolos $\mathbb{A}_i$ representarão classes do nível mais baixo da hierarquia (as "espécies"). Os símbolos $\mathbb{B}_j$ representarão classes do nível imediatamente superior a $\mathbb{A}_i$ (ou seja, os "gêneros"), e assim por diante, conforme a coluna à direita da figura 2.

Segundo Piaget, as operações sobre classes (e relações) se estruturam segundo a àlgebra dos "agrupamentos".

Um agrupamento de classes é um par (C,$\circ$), onde C é um conjunto de operações de classes incluindo:

a) Operações diretas
b) Operações inversas
c) Operação idêntica (ou neutra)
d) Operações idênticas especiais

e "$\circ$" é uma função de composição da forma:

$$\circ : C \times C \longrightarrow C$$

Não se entrará em detalhes sobre os agrupamentos no decorrer deste texto. É sugerido que, para uma maior informação sobre estas estruturas, seja consultado o anexo deste trabalho. Para uma versão mais recente da noção de agrupamento sugere-se consultar ainda [CAS 82]. Será suficiente, para este trabalho, uma descrição informal destas estruturas, a qual é fornecida em [PIA 76], e interpretada, segundo a necessidade, nas páginas seguintes.

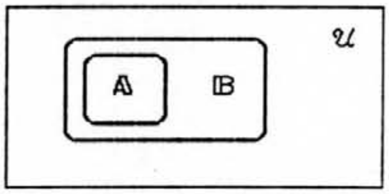
---

1 O termo "classe", empregado no sentido lato, significa "um item da taxonomia em qualquer nível da hierarquia. Este termo será distinguido do termo "classe propriamente dita", onde este último significa "um item do nível 'E' da hierarquia taxonômica".

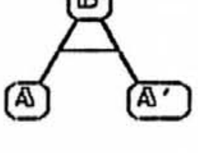
2.1 Agrupamento Aditivo das Classes

Pode-se formar um agrupamento com as chamadas "operações aditivas de classes". Essas operações e seus significados serão introduzidos através de exemplos.

Seja um universo $\mathcal{U}$, no qual estão duas classes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, sendo que $\mathbb{A}$ está inteiramente incluida em $\mathbb{B}$. Essa situação pode ser representada pelo seguinte diagrama de Venn:

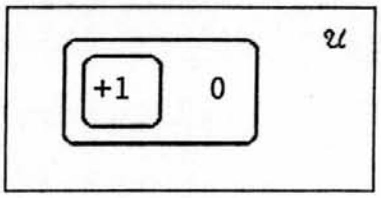


Percebe-se que a classe $\mathbb{B}$ se divide dicotomicamente em duas subclasses: a dos elementos que pertencem a $\mathbb{A}$, e a dos elementos que pertencem à complementar de $\mathbb{A}$ em relação a $\mathbb{B}$, que será chamada de "$\mathbb{A}'$". Também é possível representar essa situação através de uma árvore de dicotomias como a seguinte:



A cada classe será associado um estado "s", que poderá ser "+1", "0" ou "-1". O estado inicial padrão é "0" para todas as classes. A estrutura das classes em $\mathcal{U}$ e o estado "s" de cada classe constituem o universo de discurso, no qual será mostrado o significado de cada operação do agrupamento aditivo.

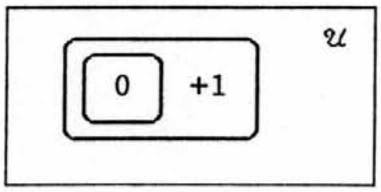
O estado das classes é modificado pelas operações do agrupamento. As operações diretas do agrupamento correspondem à marcação das classes com "+1". Assim, a operação "+$\mathbb{A}$" da lógica das classes significa:



Pode-se definir "denot" como uma função semântica que dá o significado destas operações de classes. Então:

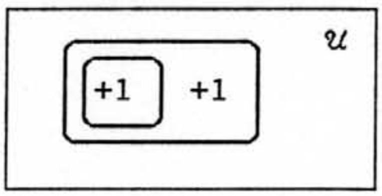
$$\text{denot}(+\mathbb{A}) = (s(\mathbb{A}) := +1)$$

Do mesmo modo, a operação "+$\mathbb{A}'$" significa:



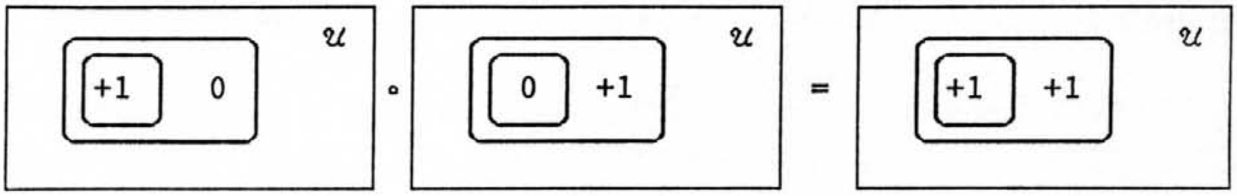
ou seja, $\text{denot}(+\mathbb{A}') = (s(\mathbb{A}') := +1)$.

E a operação "+$\mathbb{B}$" significa:



ou seja, $\text{denot}(+\mathbb{B}) = (s(\mathbb{B}) := +1)$.

Tendo em vista a estrutura das classes, é possível estabelecer certas correspondências entre as operações. Por exemplo, a composição de $+\mathbb{A}$ com $+\mathbb{A}'$ equivale à operação $+\mathbb{B}$:

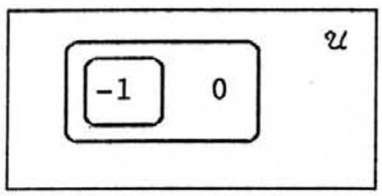


Denota-se esta equivalência a nível da linguagem de classes pela equação:

$$+\mathbb{A} \circ +\mathbb{A}' = +\mathbb{B}$$

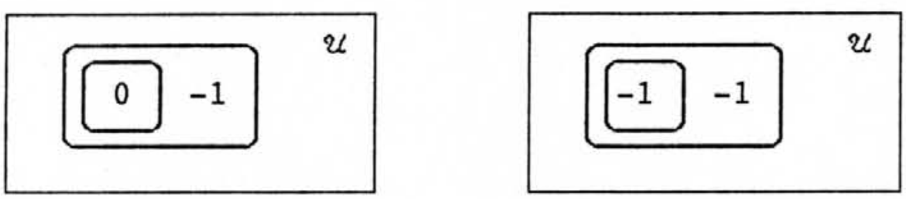
e se diz que denot$(+\mathbb{A}\circ+\mathbb{A}'=+\mathbb{B})$ = $[(s(\mathbb{A}) := +1) \circ (s(\mathbb{A}') := +1) = (s(\mathbb{B}) := +1)]$.

As operações inversas do agrupamento serão a marcação com "-1". Assim, $-\mathbb{A}$ significará:



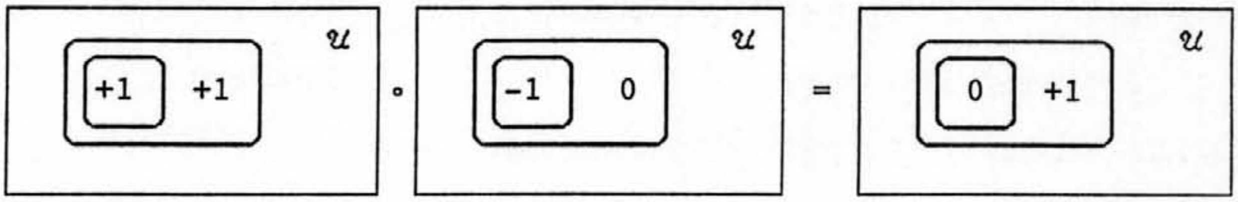
ou seja, denot$(-\mathbb{A})$ = $(s(\mathbb{A}) := -1)$.

Do mesmo modo, $-\mathbb{A}'$ e $-\mathbb{B}$ significarão respectivamente:

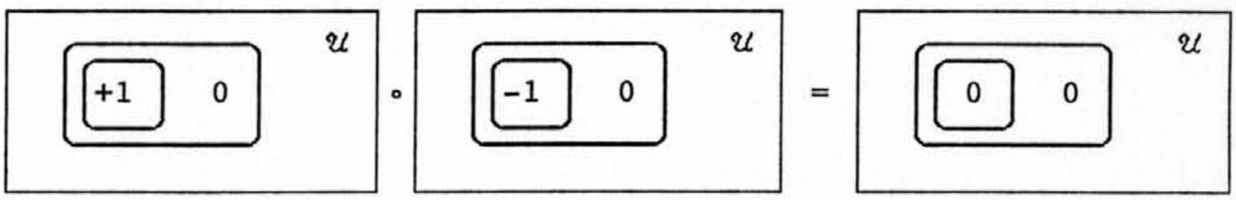


ou seja, denot$(-\mathbb{A}')$ = $(s(\mathbb{A}') := -1)$ e denot$(-\mathbb{B})$ = $(s(\mathbb{B}) := -1)$.

As composições de operações diretas e inversas também permitem estabelecer equivalências, como por exemplo (para $+\mathbb{B} \circ -\mathbb{A} = +\mathbb{A}'$):

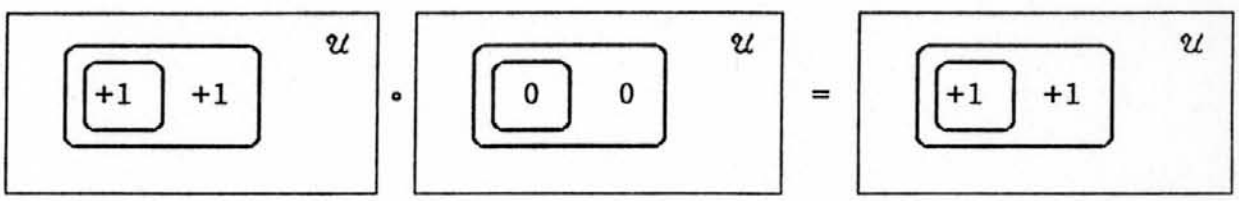


A composição de uma operação direta com sua correspondente inversa produz a operação idêntica geral: "0". Por exemplo (para $+\mathbb{A} \circ -\mathbb{A} = 0$):



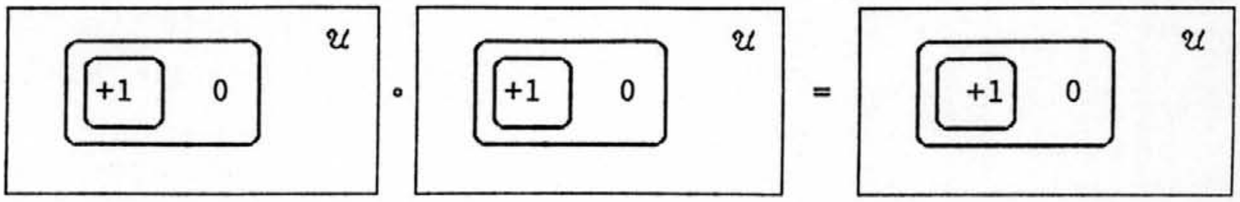
Pode-se dizer que denot(0) = ().

A composição de qualquer operação com a idêntica geral não altera essa operação. Por exemplo (para $+\mathbb{B} \circ 0 = +\mathbb{B}$):



ou seja, denot($+\mathbb{B} \circ 0 = +\mathbb{B}$) = [(s($\mathbb{B}$) := +1) $\circ$ () = (s($\mathbb{B}$) := +1)].

As idênticas especiais são de dois tipos. Em primeiro lugar, há as tautologias, que correspondem à composição de uma operação com ela mesma. Por exemplo (para $+\mathbb{A} \circ +\mathbb{A} = +\mathbb{A}$):



Note-se que, uma vez que apenas três estados são permitidos (+1, 0, -1), não ocorre iteração nestas composições: +1 composto com +1 não é +2, assim como a união de uma classe com ela mesma ($\mathbb{A}\cup\mathbb{A}$) não é duas vezes ela mesma ($2\mathbb{A}$).

O segundo tipo de idênticas especiais é o das reabsorções. Se $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{B}$ então $+\mathbb{A}$ desempenha o papel de idêntica em relação a $+\mathbb{B}$, pois $+\mathbb{A} \circ +\mathbb{B} = +\mathbb{B}$. O mesmo também vale para $+\mathbb{A}'$ em relação a $+\mathbb{B}$, e para $-\mathbb{A}$ e $-\mathbb{A}'$ em relação a $-\mathbb{B}$.

O fato de que a classe $\mathbb{A}$ está contida na classe $\mathbb{B}$ é determinado pela seguinte equação, que é denominada "encaixe aditivo":

$$+\mathbb{A} \circ +\mathbb{A}' = +\mathbb{B}$$

Doravante, este tipo de equação será abreviado para a forma:

$$\mathbb{A} + \mathbb{A}' = \mathbb{B}$$

mas seu significado continua sendo o mesmo: $\mathrm{denot}(\mathbb{A}+\mathbb{A}'=\mathbb{B}) = [(s(\mathbb{A}) := +1) \circ (s(\mathbb{A}') := +1) = (s(\mathbb{B}) := +1)]$.

Uma sequência de encaixes aditivos define uma hierarquia de classificação sistemática, desde que respeite os princípios desse tipo de classificação (v. anexo A4.1).

É preciso observar ainda que se uma classe, digamos $\mathbb{B}_1$, se divide dicotomicamente por um conjunto de critérios mutuamente exclusivo, então:

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}'_3 = \ldots$$

Daí resulta que cada classe $\mathbb{A}_i$ contida em $\mathbb{B}_1$ também está contida em cada uma das classes $\mathbb{A}'_j$, onde $j \neq i$:

$$\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}'_2 \quad ; \quad \mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}'_3 \quad ; \quad \text{etc}$$

$$\mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{A}'_1 \quad ; \quad \mathbb{A}_2 \subseteq \mathbb{A}'_3 \quad ; \quad \text{etc}$$

etc

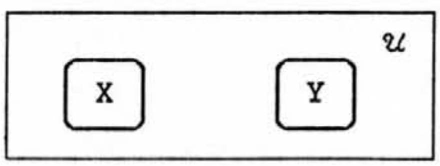
Isto resulta do princípio da classificação sistemática que estabelece que as diversas classes de um mesmo nível são disjuntas. Porém, em sistemas de representação do conhecimento, esta condição nem sempre se verifica.

2.2 Relação $\vdash_{CS}$

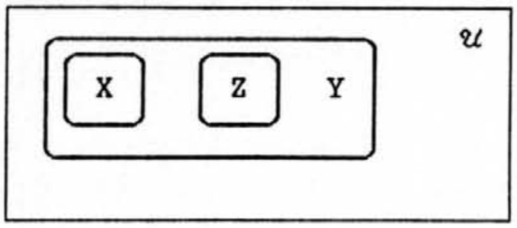
A cada classe X corresponde uma classe complementar $\overline{X}$, em relação ao universo $\mathcal{U}$, tal que:

$$\overline{X} =_{df} \mathcal{U} - X$$

Se X e Y são duas classes disjuntas, então $X \subseteq \overline{Y}$ (X está contida na complementar de Y) e $Y \subseteq \overline{X}$ (Y está contida na complementar de X), o que pode ser visto através do seguinte diagrama:



A inclusão de uma classe X em uma classe Z' (onde Z' = Y - X), implica também a inclusão da classe X na complementar de Z em relação ao universo $\mathcal{U}$, ou seja, $\overline{Z}$. Por exemplo, no diagrama seguinte vale $(X \subseteq Z') \rightarrow (X \subseteq \overline{Z})$:



Como já foi dito, pode-se constituir uma teoria de herança com as equações da forma $X + X' = Y$, desde que elas obedeçam aos princípios da classificação sistemática.

Neste tipo de teoria de herança, uma classe X está contida em Y (segundo a relação "$X \subseteq Y$"), se uma das três condições seguintes for satisfeita:

a) se X e Y são a mesma classe $(X \equiv Y)$[2], ou

b) se a teoria estabelece que $X + X' = Y$, ou

c) por transitividade da inclusão de classes, se $X + X' = Z$ e $Z \subseteq Y$.

Por outro lado, $X \subseteq \overline{Y}$ vale se X e Y forem classes disjuntas. Como a classificação sistemática estabelece que classes em um mesmo nível da hierarquia são disjuntas, pode-se inferir que se X e Y não pertencem a um mesmo ramo da hierarquia (um caminho na vertical na figura 2), ou seja, se $X \nsubseteq Y$ e $Y \nsubseteq X$, então X e Y são disjuntas. Logo, $X \subseteq \overline{Y}$ e $Y \subseteq \overline{X}$.

Pode-se então definir um operador $\vdash_{CS}$ para determinar quais relações de herança seguem logicamente de uma classificação sistemática.

---

[2] Aqui, só se pode afirmar que "$\mathbb{A}_1$" é a mesma classe que "$\mathbb{A}_1$", ou que "$\mathbb{B}_2$" é a mesma classe que "$\mathbb{B}_2$", etc. Assim, mesmo que "$\mathbb{A}'_2$" possua a mesma extensão de "$\mathbb{A}_1$", ambas não são consideradas como sendo a mesma classe. Os motivos que levam a esta definição serão vistos mais adiante.

Definição (Relação $\vdash_{CS}$ em classificações sistemáticas)

Seja S uma teoria de herança composta por uma seqüência de equações da forma $X + X' = Y$, segundo os princípios da classificação sistemática,

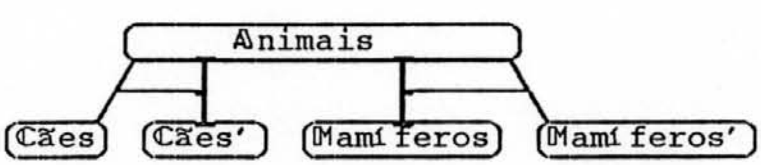
$$
\begin{aligned}
S \vdash_{CS} (X \subseteq Y) \text{ se } & X \equiv Y \text{ ou} \\
& (X + X' = Y) \in S \text{ ou} \\
& (X + X' = Z) \in S \text{ e } S \vdash_{CS} (Z \subseteq Y) \\
S \vdash_{CS} (X \subseteq \overline{Y}) \text{ se } & S \nvdash_{CS} (X \subseteq Y) \text{ e} \\
& S \nvdash_{CS} (Y \subseteq X)
\end{aligned}
$$

□

A hipótese da disjunção das classes de um mesmo nível na classificação sistemática corresponde à uma espécie de regra do mundo fechado ("closed world assumption" ou "CWA" [LIF 85]). Ou seja, se não se pode demonstrar que duas classes se relacionam por "⊆", então se deduz que elas não se relacionam por ⊆, logo elas são tomadas como disjuntas.

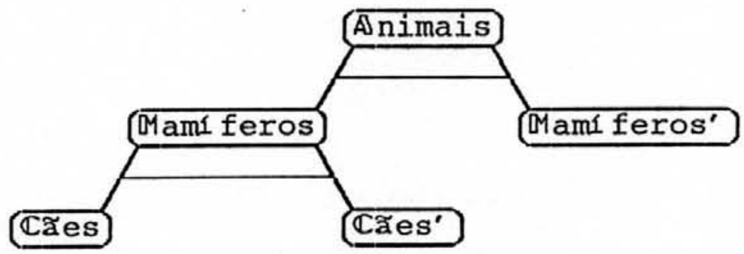
Mas o conhecimento do senso comum nem sempre permite este tipo de conclusão. Duas classes podem estar em um mesmo nível da hierarquia simplesmente por falta de conhecimento de que uma inclua a outra. Mas este conhecimento adicional pode ser suprido num momento futuro.

Por exemplo, num primeiro momento se sabe que "cães são animais; e mamíferos são animais". Esta situação será representada por:



Isso não quer dizer que a classe "Cães" e a classe "Mamíferos" sejam necessariamente disjuntas, mas apenas que não se sabe ainda se são disjuntas ou se uma contém a outra.

Se num segundo momento o conhecimento for incrementado com a informação "cães são mamíferos", é necessário reorganizar a estrutura da hierarquia para acomodar esta informação. Ela resultará em:



Essa reorganização não é permitida nas classificações sistemáticas, já que nelas as classes pertencem a níveis definidos na hierarquia e não podem ser permutadas.

Por outro lado, se numa classificação do senso comum duas classes são disjuntas, então isso deve ser dito explicitamente. Por exemplo: "peixes não são mamíferos".

3 TEORIAS DE HERANÇA DO SENSO COMUM (O CASO MONOTÔNICO)

Se a herança for estrita em todas as relações de uma teoria T, então o operador de dedução "$\vdash$" é monotônico, isto é:

$$(T \vdash \alpha) \rightarrow (T \cup T_1 \vdash \alpha)$$

A noção de monotonicidade corresponde à das funções monotônicas da matemática. Funções monotônicas são funções sempre crescentes ou sempre decrescentes. Neste caso, um aumento no número de axiomas da teoria não invalida nenhum dos teoremas anteriores. Assim, o número de teoremas só tende a aumentar com o aumento do número de axiomas.

3.1 Formalização na Lógica das Proposições

Uma classe $\mathbb{A}$ pode ser determinada por uma função proposicional $a(x)$, onde o predicado "a" representa o conjunto das qualidades que diferenciam os membros da classe $\mathbb{A}$ dos membros de sua complementar $\mathbb{A}'$, em relação a $\mathbb{B}$. Neste caso, a classe $\mathbb{A}$ será definida como a coleção dos objetos de $\mathbb{B}$ que têm a propriedade "a":

$$\mathbb{A} =_{df} \{ x \mid x \in \mathbb{B} \wedge a(x) \}$$

e a classe complementar $\mathbb{A}'$ será definida como o conjunto dos membros de $\mathbb{B}$ que não têm a propriedade "a":

$$\mathbb{A}' =_{df} \{ x \mid x \in \mathbb{B} \wedge \neg a(x) \}$$

Este tipo de definição é denominado "*per genus et differentiam specificam*" e corresponde à noção de classes "fracamente estruturadas" (v. [PIA 76] pag. 63), em oposição às classes "estruturadas" dos entes matemáticos.

A classe $\mathbb{A}$ herda propriedades da classe $\mathbb{B}$, onde:

$$\mathbb{B} =_{df} \{ x \mid x \in \mathbb{C} \wedge b(x) \}$$

quando $\mathbb{A}$ estiver incluída em $\mathbb{B}$, o que denotamos por "$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$". Isso pode ser representado através da seguinte fórmula de primeira ordem:

$$a(x) \rightarrow b(x)$$

A adição de um quantificador universal transforma essa fórmula em uma proposição, a qual pode tomar um valor verdade no conjunto { V , F }:

$$(\forall x)\ a(x) \rightarrow b(x)$$

Esta proposição pode ser simbolizada por:

$$(\mathbb{A}\ +\!\!\models\!\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$$

Pode-se também representá-la graficamente por uma rede semântica como:

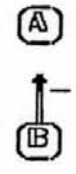
Se a classe $\mathbb{A}$ estiver incluída na complementar de $\mathbb{B}$, então denota-se este fato por $\mathbb{A} \subseteq \overline{\mathbb{B}}$, o que é representado pela proposição:

$$(\forall x)\ a(x) \rightarrow \neg b(x)$$

o que pode ser abreviado por:

$$(\mathbb{A}\ -\!\!\models\!\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$$

e representado graficamente por:



Na presente notação, extraída de [DIX 89], a expressão $(\mathbb{A} \pm\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$ significará que se tem $(\mathbb{A} +\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$ ou $(\mathbb{A} -\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$, alternativamente. A expressão $(\mathbb{A} \mp\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$ indica o contrário, isto é, que se tem $(\mathbb{A} -\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$ ou $(\mathbb{A} +\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B})$, alternativamente.

Uma teoria de herança "T" é um conjunto destas expressões, as quais serão chamadas de "ligações diretas".

Uma ligação "indireta" é uma ligação da forma $(\mathbb{A} +\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{B} +\!\mid\!\!\Rightarrow \ldots \pm\!\mid\!\!\Rightarrow \mathbb{Z})$, onde apenas a última ligação direta pode ser "$-\!\mid\!\!\Rightarrow$".

Percebe-se então uma diferença fundamental entre a classificação sistemática e a teoria de herança do senso comum: a falta de uma noção de contigüidade não permite exigir que as classes pertencentes à um mesmo nível sejam disjuntas. Logo, a informação de que duas classes são disjuntas deve aparecer explicitamente na teoria, através de duas proposições da forma $(X -\!\mid\!\!\Rightarrow Y)$ e $(Y -\!\mid\!\!\Rightarrow X)$.

3.1.1 Relação $\vdash_P$

A definição da relação de derivabilidade "$\vdash_P$", de J. Dix (v. [DIX 89] pag. 4-5) está fundamentada na noção de extensão básica "E" de uma teoria "T", para determinar quais relações de inclusão são herdáveis por uma classe. Essa definição é a seguinte:

Definição ($\vdash_P$ monotônico)

Seja T uma teoria de herança estrita, formulada em linguagem proposicional,

$T \vdash_P (X \pm\!\mapsto Y)$ se $(X \pm\!\mapsto Y) \in E$ e E é o menor conjunto de ligações de T com:

a) E contém todas as ligações diretas de T,

b) E é fechado sob:

Reflexividade para $+\!\mapsto$,

Transitividade para $+\!\mapsto$,

Simetria para $-\!\mapsto$,

De $T \vdash_P (Z_1 +\!\mapsto Z_2)$ e $T \vdash_P (Z_2 -\!\mapsto Z_3)$ infere-se $T \vdash_P (Z_1 -\!\mapsto Z_3)$, e

De $T \vdash_P (Z_1 +\!\mapsto Z_2)$ e $T \vdash_P (Z_3 -\!\mapsto Z_2)$ infere-se $T \vdash_P (Z_3 -\!\mapsto Z_1)$.

□

A seguir esta definição será comparada com a de "$\vdash_{CS}$" da classificação sistemática.

3.2 Comparação entre $\vdash_P$ e $\vdash_{CS}$

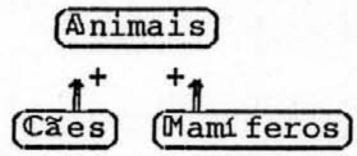
Uma representação do conhecimento do senso comum é não-sistemática, entre outras coisas, porque não segue o princípio de contigüidade. Ela é também incompleta, no sentido de que sempre há conhecimento novo se somando ao conhecimento já representado.

Seja a teoria "T_1", onde:

T_1 = {(Cães $+\!\mapsto$ Animais), (Mamíferos $+\!\mapsto$ Animais)}

representada por:

T_1



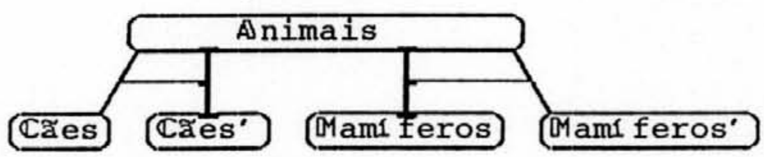
A classificação sistemática semelhante à teoria "T_1" é:

$$S_1 = \{(\text{Cães} + \text{Cães}' = \text{Animais}),\ (\text{Mamíferos} + \text{Mamíferos}' = \text{Animais})\}.$$

Foi dito que "S_1" é "semelhante" e não "equivalente" a "T_1", porque embora "T_1" e "S_1" procurem representar a mesma situação, existem diferenças entre as inferências possíveis nas duas teorias.

Uma destas diferenças é que a estrutura de "S_1", que será representada por:

S_1



permite tirar conclusões como ($\text{Cães} \subseteq \text{Mamíferos}'$) e ($\text{Mamíferos} \subseteq \text{Cães}'$). Será visto como isso pode se tornar contraditório numa classificação do senso comum.

Seja, então, outra teoria:

$$T_2 = \{(\text{Cães} +\!\!\models\!\!\!\Rightarrow \text{Mamíferos})\}$$

e sua semelhante:

$$S_2 = \{(\text{Cães} + \text{Cães}' = \text{Mamíferos})\}$$

A composição de "T_1" com "T_2" gera:

$$T_1 \cup T_2 = \{(\text{Cães} +\!\mid\!\!\Rightarrow \text{Mamíferos}), (\text{Mamíferos} +\!\mid\!\!\Rightarrow \text{Animais})\}$$

porque a proposição (Cães $+\!\mid\!\!\Rightarrow$ Animais) de "T_1" torna-se redundante em $T_1 \cup T_2$, já que ela pode ser derivada pela transitividade de "$+\!\mid\!\!\Rightarrow$" em $T_1 \cup T_2$, uma vez que a estrutura de $T_1 \cup T_2$ é:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Animais}} \\ \boxed{\text{Mamíferos}} \arrow[u, Rightarrow, "+"'] \\ \boxed{\text{Cães}} \arrow[u, Rightarrow, "+"'] \end{tikzcd}$$

Mas a composição de "S_1" com "S_2" não é possível do ponto de vista da relação "$\vdash_{CS}$", porque:

$$S_1 \vdash_{CS} (\text{Cães} \subseteq \overline{\text{Mamíferos}})$$

e:

$$S_2 \vdash_{CS} (\text{Cães} \subseteq \text{Mamíferos})$$

e:

$$S_1 \cup S_2 \not\vdash_{CS} (\text{Cães} \subseteq \overline{\text{Mamíferos}})$$

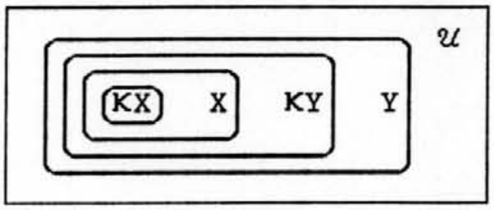
Desta maneira, a união de "S_1" e "S_2" quebraria a propriedade de monotonicidade de "$\vdash_{CS}$". Além disso, ela fere o princípio de contigüidade, pois enquanto em "S_1" as classes "Cães" e "Animais" são contíguas, em "S_2" elas se tornam não-contíguas, posto que a classe "Mamíferos" se interpõe entre elas.

3.3 Extensão Epistêmica da Lógica das Classes

Pode-se modificar as operações da lógica das classes atribuindo um "status epistêmico" a cada operação. O operador "K" significa comumente "sabe-se que". Então "+KX" significará "marcar com +1 a classe dos elementos que *se sabe que* pertencem à classe X", e "+KX'" significará "marcar com +1 a classe dos elementos que *não se sabe se* pertencem à classe X". Abreviaremos +KX ∘ +KX' = +KY por KX + KX' = KY.

A operação "+KX'" tem essa leitura porque corresponde a marcar com +1 a classe complementar a "KX" em relação a "KY". Se "KX" é a classe dos elementos que se sabe que pertencem a "X", então "KX'" é a classe dos elementos que não se sabe se são "X". Sabendo que "KX" é necessariamente parte de "X", então (KX ⊆ X).

Por outro lado, (KY ⊆ Y), e como a herança é estrita, se (KX ⊆ KY) então (X ⊆ KY). Por transitividade, se (X ⊆ KY) e (KY ⊆ Y), então (X ⊆ Y). Essa situação está representada em:



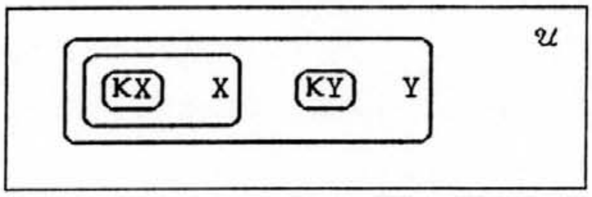
A complementar de "KX" em "KY" envolve tanto os elementos que se sabe que são "Y" mas não são "X" (ou seja, X'-KY'), quanto os elementos que são "X", mas não se sabe que são (ou seja, X-KX). Observando o diagrama anterior, pode-se notar a seguinte equivalência:

$$KX' = (X - KX) + (X' - KY')$$

Como a herança é, por hipótese, estrita, pode-se assumir a seguinte regra geral:

$$(KX \subseteq KY) \rightarrow (X \subseteq Y)$$

Por outro lado, $(KX \subseteq KY')$ não implica $(X \subseteq Y')$, porque pode ocorrer a seguinte situação em que isso não é válido:



Vê-se no exemplo acima que $(KX \subseteq KY')$, mas que $(X \nsubseteq Y')$. Portanto "$(KX \subseteq KY') \rightarrow (X \subseteq Y')$" <u>não</u> é uma dedução válida.

Seja "KAnimais" a classe das coisas que se sabe que são animais. Seja "KCães" uma subclasse de "KAnimais", ou seja, os animais que se sabe que são cães, e seja "KCães'" a complementar de "KCães" na classe "KAnimais", e assim por diante para cada uma das classes de "S_1" e "S_2" do exemplo anterior. Então:

$$S_{K1} = \{(\text{KCães} + \text{KCães}' = \text{KAnimais}),$$
$$(\text{KMamíferos} + \text{KMamíferos}' = \text{KAnimais})\}$$

e:

$$S_{K2} = \{(\text{KCães} + \text{KCães}' = \text{KMamíferos})\}.$$

Como em "S_{K1}" não vale $(\text{KCães} \subseteq \text{KMamíferos})$, então $S_{K1} \nvdash_C (\text{Cães} \subseteq \text{Mamíferos})$, e também $S_{K1} \nvdash_C (\text{Cães} \subseteq \overline{\text{Mamíferos}})$, porque $(\text{KCães} \subseteq \text{KMamíferos}')$ não autoriza essa inferência.

Mas em "S_{K2}", $(\text{KCães} \subseteq \text{KMamíferos})$, portanto $S_{K2} \vdash_C (\text{Cães} \subseteq \text{Mamíferos})$.

Logo, a união de "S_{K1}" com "S_{K2}" não quebra a propriedade de monotonicidade para a relação "$\vdash_c$", e temos:

$$S_{K1} \cup S_{K2} = \{(\mathbb{K}\mathbb{C}\text{ães} + \mathbb{K}\mathbb{C}\text{ães}' = \mathbb{K}\mathbb{M}\text{amíferos}),$$
$$(\mathbb{K}\mathbb{M}\text{amíferos} + \mathbb{K}\mathbb{M}\text{amíferos}' = \mathbb{K}\mathbb{A}\text{nimais})\}.$$

Por outro lado, é forçoso abdicar do princípio de contigüidade nas classificações do senso comum, exatamente porque, sendo o conhecimento incompleto, não é possível afirmar se duas classes são contíguas.

3.3.1 Agrupamento Multiplicativo das Classes

Resta agora o problema de representar explicitamente o fato de que duas classes são disjuntas, o que na classificação sistemática estava implícito na própria estrutura. Serão introduzidas para isso as operações do agrupamento multiplicativo de classes, ou agrupamento IV da lógica intraproposicional de Piaget.

A operação direta deste agrupamento é "$\times Z$" (multiplicação ou espécie de "intersecção" entre classes) e a inversa é "$:Z$" (divisão de classe ou abstração de encaixe). A operação neutra é "$\mathcal{U}$" (o universo). São necessárias aqui apenas as operações diretas deste agrupamento. As demais operações são apresentadas no anexo A6.

Seja "$\equiv_e$" a relação de equivalência de extensão entre duas classes, isto é, se diz que "$X \equiv_e Y$" se "X" e "Y" são duas classes com exatamente os mesmos elementos. Eis alguns exemplos de equações deste agrupamento:

$\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$ (tautologia)

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ ($\mathbb{A}\mathbb{B}$ é a intersecção de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$. Se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, então $\mathbb{A}\mathbb{B} \equiv_e \mathbb{A}$)

$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$ (se $\mathbb{B}_1 \equiv_e \mathbb{B}_2$, então $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 \equiv_e \mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 \equiv_e \mathbb{B}_2$)

$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}'_1 = 0$ (se duas classes não têm elementos comuns, seu produto é igual à classe vazia)

Dois tipos de equações multiplicativas são de grande interesse. Em primeiro lugar estão as multiplicações biunívocas. Seja, por exemplo, duas classes $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$, ambas contendo exatamente os mesmos elementos. Então $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ são equivalentes quanto à sua extensão:

$$\mathbb{B}_1 \equiv_e \mathbb{B}_2$$

A diferença entre essas classes reside no fato de que elas podem dividir os mesmos elementos segundo duas dicotomias diferentes. Assim, podemos ter:

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}'_1$$

e:

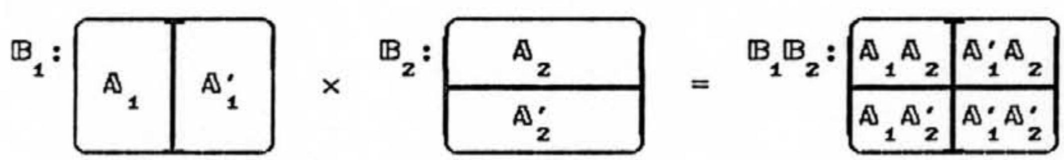
$$\mathbb{B}_2 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_2$$

onde "$\mathbb{A}_1$" e "$\mathbb{A}_2$" são classes cuja extensão é diferente: $\mathbb{A}_1 \not\equiv_e \mathbb{A}_2$.

O produto de "$\mathbb{B}_1$" por "$\mathbb{B}_2$" é $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$, onde "$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$" se divide segundo as combinações das subclasses de "$\mathbb{B}_1$" e de "$\mathbb{B}_2$", ou seja:

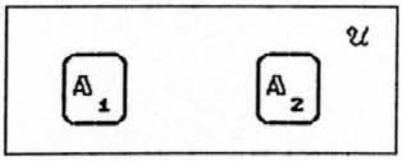
$$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1\mathbb{A}'_2 + \mathbb{A}'_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_1\mathbb{A}'_2$$

Isto pode ser bem visualizado através dos seguintes diagramas de Venn:



Este fato demonstra que este conceito de classe não equivale ao conceito de conjunto da matemática, pois se dois conjuntos "C_1" e "C_2" têm os mesmos elementos, então eles são iguais, isto é, $C_1 = C_2$. Enquanto isso, duas classes com os mesmos elementos não são necessariamente iguais, mas apenas equivalentes quanto à sua extensão.

Outro tipo de equação, cujo interesse é grande, é a multiplicação de classes disjuntas. Seja "$\mathbb{A}_1$" e "$\mathbb{A}_2$" duas classes disjuntas:



Então $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 = 0$ (a classe vazia), pois "$\mathbb{A}_1$" e "$\mathbb{A}_2$" não possuem elementos comuns. Assim, o fato de que duas classes são disjuntas pode ser representado pela equação epistêmica:

$$K(X \times Y = 0)$$

que se pode ler: "sabe-se que a intersecção de X e Y é igual à classe vazia" ou "sabe-se que X e Y são classes disjuntas". Este "K" é diferente do "K" de 3.3. Enquanto "KX" representa uma *operação* epistêmica em 3.3, $K(X \times Y = 0)$ representa uma *equação* epistêmica.

3.3.2 Relação $\vdash_C$

Através das operações epistêmicas de classes e das equações epistêmicas é possível representar teorias de herança do senso comum. A informação de que a classe "X" está incluida em "Y" é representada por $(KX + KX' = KY)$. A informação de que "X" e "Y" são disjuntas é representada por $K(X \times Y = 0)$.

Então a inclusão de "X" em "Y" segue da teoria "S" através da transitividade e reflexividade da inclusão, da mesma maneira que na classificação sistemática.

A diferença de "$\vdash_C$" e "$\vdash_{CS}$" está na determinação da inclusão na complementar: $(X \subseteq \overline{Y})$. A informação de que "X" está contido em "$\overline{Y}$", ou seja, de que "X" e "Y" são disjuntas, só é derivável de "S" se "X" e "Y" estão contidos em classes disjuntas:

$$K(W \times Z = 0) \text{ e } (X \subseteq W) \text{ e } (Y \subseteq Z)$$

Definição ($\vdash_C$ monotônico)

Seja S uma teoria de herança formulada em lógica de classes estendida,

$$\begin{aligned} S \vdash_C (X \subseteq Y) \text{ se } & X \equiv Y \text{ ou} \\ & (KX + KX' = KY) \in S \text{ ou} \\ & (KX + KX' = KZ) \in S \text{ e } S \vdash_C (Z \subseteq Y) \\ S \vdash_C (X \subseteq \overline{Y}) \text{ se } & [K(Z \times W = 0) \in S \text{ ou } K(W \times Z = 0) \in S] \\ & \text{e } S \vdash_C (X \subseteq Z) \\ & \text{e } S \vdash_C (Y \subseteq W) \end{aligned}$$

□

3.4 Comparação entre $\vdash_P$ e $\vdash_C$

Seja "f" uma função de tradução da linguagem proposicional para a linguagem de classes estendida, cuja definição é a seguinte:

I. Para ligações diretas de T:

$$f(X +\!\!\mapsto Y) = (KX + KX' = KY)$$
$$f(X -\!\!\mapsto Y) = K(X \times Y = 0)$$

II. Para as ligações derivadas de "T" pelas propriedades das relações "$+\mid\!\Rightarrow$" e "$-\mid\!\Rightarrow$", isto é, aquelas que pertencem a "E":

$$f(X +\mid\!\Rightarrow Y) = (X \subseteq Y)$$
$$f(X -\mid\!\Rightarrow Y) = (X \subseteq \overline{Y})$$

A função de interpretação de uma teoria "T" é "f^{*}", onde se $T = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \}$ então $f^{*}(T) = \{ f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(\delta), \ldots \}$.

De posse destas definições pode-se demonstrar que "$\vdash_P$" está interpretado em "$\vdash_C$" pela demonstração de que a seguinte fórmula é verdadeira:

$$(T \vdash_P \alpha) \rightarrow (f^{*}(T) \vdash_C f(\alpha))$$

onde $f^{*}(T) = S$.

Como a linguagem da lógica das proposições (Lp) é interpretada na linguagem da lógica das classes estendida (Lc), através da função "f", e como a semântica de "Lc" é dada algebricamente através das equações de agrupamentos, então acaba de ser verificado que a semântica de "Lp" também pode ser dada, via "Lc", nas estruturas dos agrupamentos de classes:

$$\begin{tikzcd} \text{Lp} \arrow[r, dotted, "f"] & \text{Lc} \arrow[d, "\text{denot}"] \\ & \text{Agrupamentos} \end{tikzcd}$$

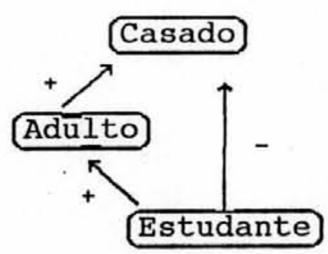
Fig. 3.1: Semântica de Lp via Lc.

Certas complicações são introduzidas quando a herança é não-estrita, isto é, quando as propriedades de uma classe não valem necessariamente para todas as suas subclasses. É o que será visto a seguir.

4 TEORIAS DE HERANÇA DO SENSO COMUM (O CASO NÃO-MONOTÔNICO)

Como já foi dito, as relações "$\mid\!\sim_P$" e "$\mid\!\sim_C$" são não-monotônicas porque não gozam da propriedade de monotonicidade definida no capítulo 3. Essas relações de inferência lógica são próprias de teorias que contém relações de herança não-estrita. Será analisado em primeiro lugar o caso em que todas as relações de herança da teoria são não-estritas. No capítulo 5 será visto o que ocorre quando se misturam relações estritas e não-estritas.

Um exemplo de teoria de herança não-estrita é a herança determinada pela seguinte rede semântica:



onde os arcos rotulados com "+" significam herança positiva: "é_um", e os arcos rotulados com "-" significam herança negativa: "não_é_um".

Neste exemplo, a herança não é incondicional: estudantes são adultos e adultos são casados, porém não é permitido concluir que estudantes são casados, porque está dito explicitamente que eles não são.

4.1 Formalização na Lógica das Proposições

As relações de herança não-estrita são representadas pelas proposições $(A +\!\mapsto B)$ e $(A -\!\mapsto B)$. É evidente que elas não correspondem à inclusão de classes, e nem mesmo podem ser formalizadas na lógica de predicados de primeira ordem, porque não se conhecem *a priori* todas as excessões para cada relação.

Por um lado, $(A +\mapsto B)$ não corresponde a $(\forall x)\ a(x) \rightarrow b(x)$, porque existem elementos excepcionais "y", tais que $v(a(y))=V$ e $v(b(y))=F$, o que é contraditório com a proposição $(\forall x)\ a(x) \rightarrow b(x)$.

Por outro lado, $(A +\mapsto B)$ também não significa "$(\exists x)\ a(x) \rightarrow b(x)$", porque, como a herança é não-estrita, podem existir excessões, isto é, $(\exists x)\ a(x) \rightarrow \neg b(x)$, e é evidente que a proposição $(A +\mapsto B)$ não quer dizer que $(\exists x)\ a(x) \rightarrow (b(x) \vee \neg b(x))$, porque isso não diz absolutamente nada quanto à herança da classe $\mathbb{A}$. Não basta saber que $\mathbb{A}$ está contida em $\mathbb{B} \cup \overline{\mathbb{B}}$, porque isto corresponde a dizer $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{U}$, o que não faz com que $\mathbb{A}$ herde alguma informação.

Um significado mais preciso para a proposição $(A +\mapsto B)$ é o seguinte: "$a(x)$ implica em $b(x)$, a não ser que seja dito explicitamente o contrário, para algum x". Essa proposição pode ser interpretada em lógica de predicados estendida com o auxílio do operador epistêmico "K", e fica:

$$(A +\mapsto B) =_{df} (\forall x)\ a(x) \wedge \neg K \neg b(x) \rightarrow b(x)$$
$$(A -\mapsto B) =_{df} (\forall x)\ a(x) \wedge \neg K b(x) \rightarrow \neg b(x)$$

Voltando ao exemplo anterior, tem-se a seguinte formalização em lógica de proposições:

$$T = \{\ (\text{Estudante} +\mapsto \text{Adulto}),\ (\text{Adulto} +\mapsto \text{Casado}),\ (\text{Estudante} -\mapsto \text{Casado})\ \}$$

Também aqui existe a noção de ligação indireta, como, por exemplo: "(Estudante $+\mapsto$ Adulto $+\mapsto$ Casado)". Mas a determinação da transitividade da herança nessas ligações indiretas depende de certos princípios, os quais buscam evitar a tomada de conclusões contraditórias. Esses princípios são:

a) <u>Princípio da Abolição</u>: Informações mais específicas devem abolir informações contraditórias mais gerais. No exemplo anterior, T $\mid\!\sim_P$ (Estudante $-\!\mid\!\!\rightarrow$ Casado) e T $\mid\!\not\sim_P$ (Estudante $+\!\mid\!\!\rightarrow$ Casado). Isto demonstra porque a relação "$+\!\mid\!\!\rightarrow$" não é incondicionalmente transitiva como "$+\!\mid\!\!\Rightarrow$" era.

b) <u>Princípio</u> <u>da</u> <u>Ambigüidade</u>. A ambigüidade deve permanecer se for impossível chegar a uma conclusão. Por exemplo, seja T_1 = {(Nixon $+\!\mid\!\!\rightarrow$ Quaker), (Quaker $+\!\mid\!\!\rightarrow$ Pacifista), (Nixon $+\!\mid\!\!\rightarrow$ Republicano), (Republicano $-\!\mid\!\!\rightarrow$ Pacifista)}. Então T_1 $\mid\!\not\sim_P$ (Nixon $+\!\mid\!\!\rightarrow$ Pacifista), e T_1 $\mid\!\not\sim_P$ (Nixon $-\!\mid\!\!\rightarrow$ Pacifista).

Uma ligação direta não pode ser abolida. Apenas as ligações indiretas podem ser abolidas. Além disso, as ligações diretas não podem cair no caso da ambigüidade. Se valer (X $+\!\mapsto$ Y) e (X $-\!\mapsto$ Y), tem-se contradição, e não ambigüidade.

Os princípios de abolição e ambigüidade não definem o que é uma "informação mais específica", e nem quando é impossível chegar a uma conclusão. Essas definições vão depender de uma definição intuitiva de abolição e de ambigüidade. Existem várias definições distintas, que geram resultados diferentes. É necessário então analisar a intuição utilizada nessas definições para ver quais são mais naturais.

4.1.1 Relação $\mid\!\sim_P$

Cabe agora definir como é determinada a abolição e a ambigüidade em teorias de herança formalizadas em "Lp". Serão apresentadas as definições de J. Dix (v. [DIX 89] pag. 5-6).

Em primeiro lugar, define-se que as ligações diretas (X $\pm\!\mapsto$ Y) da teoria "T" são incondicionalmente herdáveis.

É necessário estabelecer condições para a transitividade da herança se as ligações forem indiretas. Assim, seja (X $\pm\!\mapsto$ Y) derivado de uma ligação indireta (X $+\!\mapsto$ ... $\pm\!\mapsto$ Y), por transitividade de "$+\!\mapsto$". Para saber se (X $\pm\!\mapsto$ Y) é uma relação de herança válida é necessário proceder aos seguintes passos:

a) Determinar qual é a maior ligação indireta transitiva que liga "X" a "Y". Essa ligação será denotada por $(X +\mapsto W_1 +\mapsto W_2 +\mapsto \ldots +\mapsto W_n \pm\mapsto Y)$.

b) Determinar se "X" herda de "W_n", ou seja, determinar se $T \mid\!\sim_p (X +\mapsto W_n)$, o que é uma chamada recursiva ao procedimento de determinação de herança.

c) Determinar se $(W_n \pm\mapsto Y)$ pertence à teoria "T".

d) Certificar-se que $(X \mp\mapsto Y)$ não pertence a "T".

e) Verificar, para todo "Z", tal que $(Z \mp\mapsto Y) \in T$ e "X" herda de "Z", se existe um "V", diferente de "Z", tal que $(V \pm\mapsto Y) \in T$ e "X" herda de "Z" via "V", ou seja, $T \mid\!\sim_p (X +\mapsto \ldots +\mapsto V +\mapsto \ldots +\mapsto Z)$.

Para determinar a herança de uma classe "X", é, então, utilizada a intuição de que as ligações diretas, "$\pm\mapsto$", estabelecem uma ordenação parcial entre as classes de "T". O conceito de abolição e ambigüidade depende então desta ordenação parcial. Será visto mais adiante que esta noção não parece ser natural quando a teoria de herança não-estrita é formalizada na lógica das classes.

Para definir "$\mid\!\sim_p$", utiliza-se a função "tml" (sigla de "tamanho da maior ligação") que aplicada a uma ligação indireta $(X +\mapsto \ldots \pm\mapsto Y)$ retorna o número de ligações diretas que compõem a maior ligação indireta possível entre "X" e "Y".

Definição ($\mathrel{|\!\!\sim_{P}}$ não-monotônico)

Seja T uma teoria de herança não-estrita, formalizada na lógica das proposições,

$T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X \pm\!\mapsto Y)$ se $(X \pm\!\mapsto Y) \in T$

se $tml(X +\!\mapsto W_1 +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto W_n \pm\!\mapsto Y) = n+1$ então

$T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X +\!\mapsto W_1 +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto W_n \pm\!\mapsto Y)$ se

i) $T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X +\!\mapsto W_1 +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto W_n)$, e

ii) $(W_n \pm\!\mapsto Y) \in T$, e

iii) $(X \mp\!\mapsto Y) \notin T$, e

iv) $(\forall Z)\ [(Z \mp\!\mapsto Y) \in T \wedge T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto Z)]\ (\exists V{\neq}Z)\ [(V \pm\!\mapsto Y) \in T \wedge T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto V +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto Z)]$.

□

Se $T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X +\!\mapsto \ldots \pm\!\mapsto Y)$, pode-se aplicar a transitividade e dizer igualmente: $T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X \pm\!\mapsto Y)$.

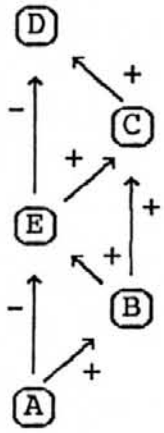
É preciso observar ainda que a definição acima não é única. Ela pode ser diferente, por exemplo, quanto aos passos (i) e (ii), isto é, quanto ao modo da chamada recursiva.

A definição que foi dada, na qual deve-se determinar $(X +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto W_n)$ e $(W_n \pm\!\mapsto Y)$, é chamada "forward chaining approach".

Uma variante é possível quando se procura determinar $(X +\!\mapsto W_1)$ e $(W_1 +\!\mapsto \ldots \pm\!\mapsto Y)$ recursivamente. Essa abordagem é chamada "backward chaining".

Uma terceira variação combina as duas anteriores. Nela, o passo (i) é substituido por "determinar $T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (X +\!\mapsto \ldots +\!\mapsto W_n)$ e $T \mathrel{|\!\!\sim_{P}} (W_1 +\!\mapsto \ldots \pm\!\mapsto Y)$", e o passo (ii) é substituido por "determinar $(X +\!\mapsto W_1) \in T$ e $(W_n \pm\!\mapsto Y) \in T$". Esta última abordagem, onde o passo (i) contém duas chamadas recursivas ao procedimento é chamada "double chaining".

Em todas as abordagens os resultados são diferentes. Por exemplo, seja a seguinte rede semântica:



A relação $T \mid\!\sim_P (A \; {+}\!\mapsto \; D)$ é verdadeira se usarmos a abordagem "forward chaining", mas não é verdadeira se usarmos "double chaining".

Resta então descobrir quão intuitivas são estas definições, já que pequenas modificações na definição dos algoritmos produzem resultados tão distintos. Para fazer esta análise, foi utilizado um método de formalização em lógica de classes.

4.2 Formalização na Lógica das Classes

É necessário encontrar uma forma de representar a herança não-estrita na lógica das classes estendida. A presença de exceções inviabiliza de imediato a utilização de encaixes aditivos, já que estes determinam a inclusão entre as classes encaixadas.

Se "X" herda de "Y", e essa herança é não-estrita, então "X" não está contida em "Y". Mas "X" e "Y" podem ser comparadas através da multiplicação biunívoca.

Em primeiro lugar, admite-se que tanto "X" quanto "Y" determinam uma divisão dicotômica no universo "$\mathcal{U}$". Admite-se então que o universo se divide dicotomicamente em "X" e "$\overline{X}$", o que é denotado por $\mathcal{U}/X = X + \overline{X}$. Por outro lado, o mesmo universo também se divide dicotomicamente em "Y" e "$\overline{Y}$", o que é denotado por $\mathcal{U}/Y = Y + \overline{Y}$.

O universo assim dividido continua contendo os mesmos elementos que antes da divisão. Logo, há uma equivalência de extensão entre "$\mathcal{U}$", "$\mathcal{U}/X$" e "$\mathcal{U}/Y$", o que é denotado por:

$$\mathcal{U} \equiv_e \mathcal{U}/X \equiv_e \mathcal{U}/Y$$

Como $\mathcal{U}/X \equiv_e \mathcal{U}/Y$, é possível submeter essas classes (universos) à multiplicação biunívoca. E o produto, que será denotado por "$\mathcal{U}/X/Y$" (ou "$\mathcal{U}/Y/X$", já que a multiplicação biunívoca é comutativa) será equivalente em extensão ao universo "$\mathcal{U}$", mas estará dividido em 4 partes segundo as duas dicotomias distintas:

$$\mathcal{U}/X \times \mathcal{U}/Y = \mathcal{U}/X/Y$$

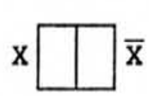
com:

$$\mathcal{U}/X/Y = X{\times}Y + X{\times}\overline{Y} + \overline{X}{\times}Y + \overline{X}{\times}\overline{Y}$$

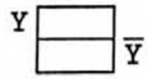
ou:

$$\mathcal{U}/X/Y = XY + X\overline{Y} + \overline{X}Y + \overline{XY}$$

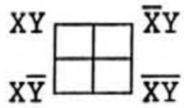
Uma representação diagramática pode ajudar a perceber esta situação. Seja $\mathcal{U}/X = X + \overline{X}$, representado por:



e seja $\mathcal{U}/Y = Y + \overline{Y}$, representado por:



então o produto de "$\mathcal{U}$/X" por "$\mathcal{U}$/Y", a saber "$\mathcal{U}$/X/Y", será representado por:

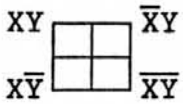


Mas, como foi dito antes, isso não afirma nada sobre a herança de "X". Diz apenas que "X" está contido parcialmente em "Y" e parcialmente em "$\overline{Y}$".

A intensão da herança não-estrita é a seguinte: "pode-se assumir que X são Y, porque se não fosse assim, isso seria dito", ou seja, se existir um elemento de "X" que não é elemento de "Y", ele é excessão, e uma excessão deve ser explicitada, ou seja, tornada conhecida.

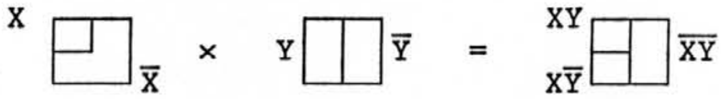
Um exemplo dessa situação é o seguinte: pede-se a uma pessoa que pense em um elefante, e a seguir, pergunta-se qual é a cor do elefante. A pessoa provavelmente dirá que é "cinza", já que não foi dito para pensar em um elefante de outra cor. Mas se fosse dito que ela pensasse em um elefante albino, e a seguir se perguntasse a cor, certamente seria ouvido "branco". O conhecimento do senso comum estabelece que um elefante é cinza até que seja dito algo em contrário. Logo, aquelas subclasses da classe "Elefante" que não são cinza (como a dos elefantes albinos) são classes excepcionais em relação à regra geral: "elefantes são cinza".

Generalizando, se "X" são "Y", então a classe composta pelos "X" que são simultaneamente "$\overline{Y}$", é uma classe excepcional. Olhando no diagrama:



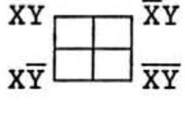
pode-se afirmar que a classe "$X\overline{Y}$" é excepcional, enquanto que as outras três classes são não-excepcionais. De fato, a classe "XY" é não-excepcional porque foi afirmado que "X são Y". Como nada foi dito sobre os "$\overline{X}$", pode-se assumir que tanto "$\overline{X}Y$" quanto "$\overline{XY}$" são não-excepcionais.

Observa-se que se essa herança fosse do tipo "estrita", a classe "$X\overline{Y}$" seria vazia, e então resultaria que X $\subseteq$ Y. Note-se o que acontece nos diagramas seguintes onde a classe "X" está contida na classe "Y":

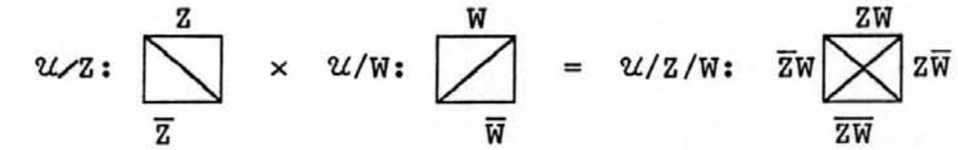


Mas se a herança que se quer determinar é do tipo "não-estrita", então a classe "$X\overline{Y}$" não é vazia. Assim, tem-se que assumir sua existência atribuindo-lhe o status de classe excepcional.

A noção de excepcionalidade é relativa à herança. Por exemplo, se "X são Y", em:

$\mathcal{U}$/X/Y: 

a classe "$X\overline{Y}$" é excepcional para a relação "X são Y". Mas se for consideda uma outra relação como "Z são W", existirão outras dicotomias sobre o mesmo universo, e os elementos de "$X\overline{Y}$", vistos sob a ótica da dicotomia "$\mathcal{U}$/Z/W", poderão não ser excepcionais em relação a ela:



Em "$\mathcal{U}/Z/W$", a classe excepcional é "$Z\overline{W}$". Note que a classe excepcional "$Z\overline{W}$" não coincide com a classe excepcional "$X\overline{Y}$" de "$\mathcal{U}/X/Y$". Portanto, um elemento não é excepcional *por si*, mas apenas relativamente à uma relação de herança da teoria.

Assim, pode-se falar de "classes não-excepcionais para uma relação de herança". Pode-se dizer que uma classe é não-excepcional se for conhecida através de uma expressão como $K(X \times Y = XY)$.

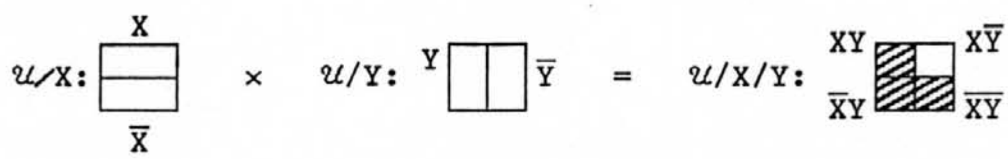
A relação de herança não-estrita "X são Y" será representada através do conhecimento que se tem sobre as classes não-excepcionais em "$\mathcal{U}/X/Y$":

$$K(X \times Y = XY),\ K(\overline{X} \times Y = \overline{X}Y),\ K(\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{XY})$$

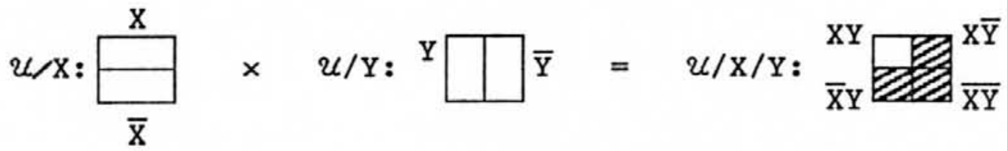
A relação "X são Y" não permite dizer "$K(X \times \overline{Y} = X\overline{Y})$". Isto porque se os elementos nessa classe forem não-excepcionais, isso seria relativo a uma outra relação de herança da teoria, e eles só seriam conhecidos através desta outra relação. Somente com a relação "X são Y" não se pode afirmar que se conheça "$X\overline{Y}$", porque os elementos dessa classe são excepcionais para essa relação de herança. Então as equações $K(X \times Y = XY)$, $K(\overline{X} \times Y = \overline{X}Y)$, $K(\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{XY})$, realmente representam a relação não-estrita "X são Y".

Pode-se representar o significado para essas equações epistêmicas através de diagramas hachureados nas regiões que correspondem às classes não-excepcionais, deixando-se em branco as zonas que representam classes excepcionais.

Por exemplo, o significado de $\{K(X{\times}Y{=}XY),\ K(\overline{X}{\times}Y{=}\overline{X}Y),\ K(\overline{X}{\times}\overline{Y}{=}\overline{XY})\}$ é:



e o significado de $\{K(X\times\overline{Y}=X\overline{Y}),\ K(\overline{X}\times Y=\overline{X}Y),\ K(\overline{X}\times\overline{Y}=\overline{X}\overline{Y})\}$ é:



A determinação da herança de "X" em relação a "Y" pode ser feita através de multiplicações entre as equações epistêmicas, ou mesmo entre os próprios diagramas, da seguinte maneira:

a) Escolhe-se todos os diagramas que contenham somente as dicotomias "𝒰/X" e "𝒰/Y".

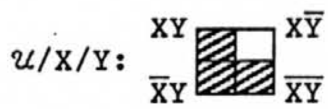
b) Se houver mais de um diagrama contendo "𝒰/X" e "𝒰/Y", realiza-se a intersecção destes diagramas (o que será demonstrado mais adiante).

c) Elimina-se a classe "$\overline{X}$", ficando-se apenas com "X" e suas subclasses: "XY" e "$X\overline{Y}$".

d) Se apenas "XY" for não-excepcional, então "X" herda de "Y". Se apenas "$X\overline{Y}$" for não excepcional então "X" herda de "$\overline{Y}$". Se ambas forem não excepcionais, temos ambiguidade: "X" pode herdar tanto de "Y" quanto de "$\overline{Y}$". Se ambas forem excepcionais, temos contradição.

A seguir é apresentado um exemplo de determinação de herança no qual se quer saber se "X" herda de "Y" ou não.

a) Tem-se apenas o diagrama "𝒰/X/Y" que corresponde a:



c) Elimina-se a classe "$\overline{X}$" de "$\mathcal{U}/X/Y$" e resta apenas:

d) Como apenas "XY" é não-excepcional, então "X" herda de "Y".

Se se tentar utilizar este mesmo diagrama para determinar se "Y" herda de "X", faz-se o mesmo nos passos (a) e (b), e então:

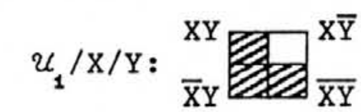
c) Elimina-se "$\overline{Y}$" e resta apenas:

d) Como as duas classes são não-excepcionais, então há ambigüidade: um elemento de "Y" pode pertencer tanto a "X" quanto a "$\overline{X}$".

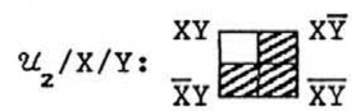
Note-se que esta conclusão corresponde à intuição de que se "X são Y" então "Y podem ser X ou $\overline{X}$".

A contradição aparece se houver dois diagramas representando "X são Y" e "X não são Y". Por exemplo:

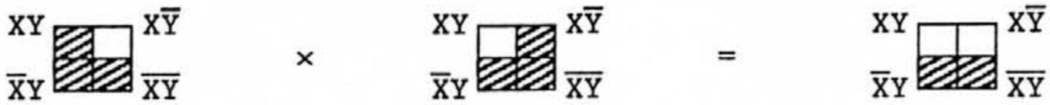
a) Tem-se os diagramas:



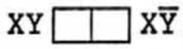
e



b) Realiza-se a intersecção dos diagramas, segundo a operação $D_1 \times D_2 = D_3$, onde "D_3" contém as dicotomias de "D_1" e "D_2", e as zonas hachureadas de "D_3" são somente aquelas que são hachureadas em "D_1" e em "D_2" simultaneamente. Então $\mathcal{U}_1/X/Y \times \mathcal{U}_2/X/Y = \mathcal{U}/X/Y$, onde:



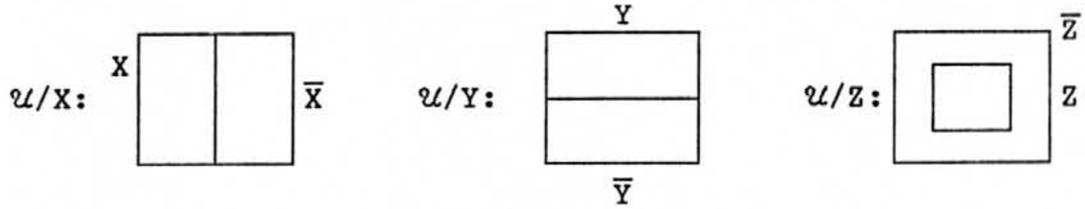
c) Eliminando a classe "$\bar{X}$", fica-se com:

X : 

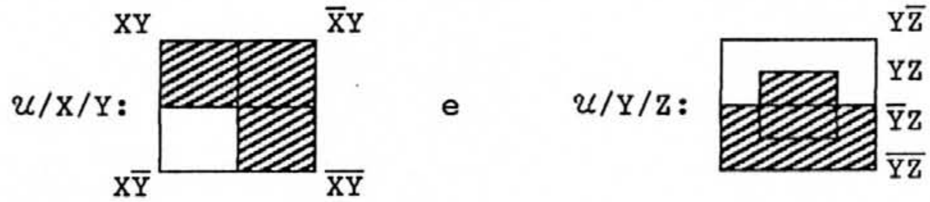
d) Como as duas subclasses de "X" são excepcionais, conclui-se que há contradição.

4.2.1 Transitividade da Herança não-Estrita

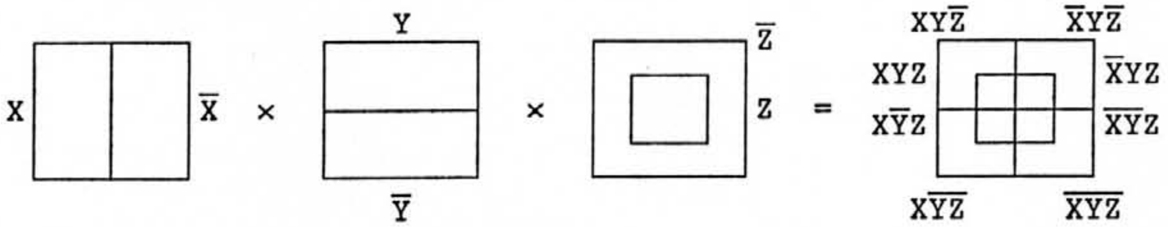
A necessidade da determinação da herança por transitividade surge quando não se tem informação imediata de herança entre duas classes. Se por exemplo, há um diagrama $\mathcal{U}$/X/Y e um diagrama $\mathcal{U}$/Y/Z, mas não há $\mathcal{U}$/X/Z, podemos obter um diagrama que compare as classes X e Z através da multiplicação biunívoca de $\mathcal{U}$/X/Y e $\mathcal{U}$/Y/Z. Seja então:



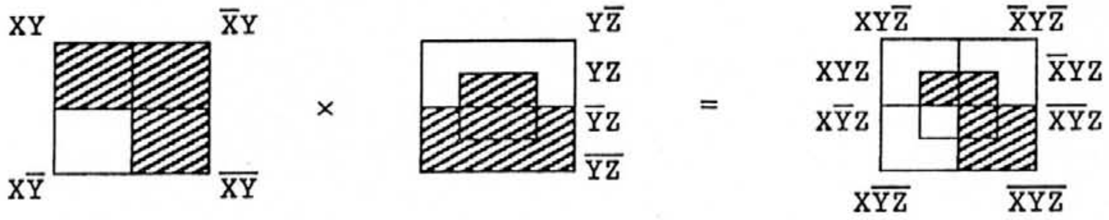
com:



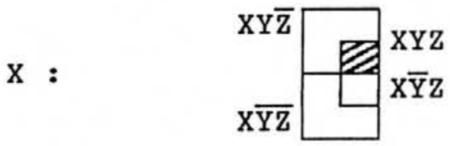
Para comparar X e Z, é necessário ter as três dicotomias: $\mathcal{U}$/X, $\mathcal{U}$/Y e $\mathcal{U}$/Z, num mesmo diagrama:



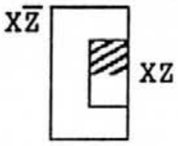
A maneira direta de obter esse diagrama, mantendo as informações sobre a não-exepcionalidade das classes, é fazendo a operação $\mathcal{U}$/X/Y × $\mathcal{U}$/Y/Z = $\mathcal{U}$/X/Y/Z, e determinando que as classes não-excepcionais em $\mathcal{U}$/X/Y/Z são aquelas que são não-excepcionais simultaneamente em $\mathcal{U}$/X/Y e em $\mathcal{U}$/Y/Z. Em termos de diagramas, as classes hachureadas do diagrama de $\mathcal{U}$/X/Y/Z correspondem à intersecção das classes hachureadas de $\mathcal{U}$/X/Y e de $\mathcal{U}$/Y/Z, ou seja:



A determinação da herança, consiste, neste caso, em separar a classe X, do diagrama $\mathcal{U}$/X/Y/Z:



Verifica-se que a única subclasse não-excepcional de X é XYZ, ou seja, a dos elementos que são simultaneamente da classe X, Y e Z. Portanto, se deduz que "X são Z". Mas esta dedução permanece relativa à transitividade da herança via Y, porque se for ignorada a dicotomia $\mathcal{U}/Y$ simplesmente, então a classe XZ terá uma região excepcional e uma região não-excepcional. Não será possível identificar essas regiões devido à falta da dicotomia $\mathcal{U}/Y$. Então a classe XZ, tomada isoladamente de Y não permite chegar a conclusão alguma:

X : 

Admite-se, então, a necessidade de manter a classe Y como intermediária na herança de X em relação a Z, posto que sem a presença de Y, não se conclui se a classe XZ é ou não excepcional.

4.2.2 Abolição e Ambigüidade

Resta agora formalizar os princípios de abolição e ambigüidade para o caso de informações contraditórias.

Como se deseja mostrar se a intuição que determina estes princípios é diferente na lógica das classes, não será feita uma interpretação pura e simples dos princípios definidos no capítulo 4. Estes princípios serão definidos da maneira que parecer mais natural na lógica das classes. Se procurará demonstrar se essa intuição é a mesma do capítulo 4 ou não.

Será examinado um algoritmo para determinação de herança que utiliza um número mínimo de operações.

Supondo uma teoria de herança S, composta por equações epistêmicas cujo significado é dado por diagramas dicotômicos, deseja-se saber se a classe X herda de Y ou de $\overline{Y}$, ou se há ambigüidade ou contradição quanto a essa relação.

Procede-se como segue:

a) Constroe-se um grafo G, onde os nodos são as classes de S, e onde dois nodos estão ligados se S compara diretamente as respectivas classes.

b) A partir do nodo X, percorre-se o grafo G, buscando encontrar o menor caminho entre X e Y. Se este caminho existir, será representado por $C^{n+1} = \langle X, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, Y\rangle$. Senão o algoritmo pára: "não é possível comparar X e Y por falta de informação".

c) Multiplica-se biunivocamente os diagramas de C^{n+1}: $\mathcal{U}/X/Z_1$, $\mathcal{U}/Z_1/Z_2$, ..., $\mathcal{U}/Z_n/Y$, obtendo o diagrama $\mathcal{U}/X/Z_1/Z_2/\ldots/Z_n/Y$. Se o menor caminho entre X e Y não for único temos um conjunto dos C_i^{n+1} caminhos. Neste caso, procede-se à multiplicação biunívoca dos diagramas $\mathcal{U}_i/X/Z_{1,i}/Z_{2,i}/\ldots/Z_{n,i}/Y$ de cada caminho C_i^{n+1} para obter $\mathcal{U}/X/Z_1/Z_2/\ldots/Z_n/Y$.

d) Separa-se a classe X de $\mathcal{U}/X/Z_1/Z_2/\ldots/Z_n/Y$.

e) Se somente XY contém classes não-excepcionais em $\mathcal{U}/X/Z_1/Z_2/\ldots/Z_n/Y$, então conclui-se que X herda de Y. Se somente $X\overline{Y}$ contém classes não-excepcionais em $\mathcal{U}/X/Z_1/Z_2/\ldots/Z_n/Y$, então conclui-se que X herda de $\overline{Y}$. Se existirem classes não-excepcionais em XY e em $X\overline{Y}$, ou se não existirem classes não-excepcionais em X, então há ambigüidade (menos no caso em que o menor caminho entre X e Y é $\langle X, Y\rangle$, quando a inexistência de classes não-excepcionais indica contradição).

Diz-se que este algoritmo utiliza um número mínimo de operações porque se for composto $\mathcal{U}/X/Y$, realizou-se apenas uma multiplicação biunívoca. Se for composto $\mathcal{U}/X/Z/Y$, utilizou-se três multiplicações biunívocas:

$$\mathcal{U}/X \times \mathcal{U}/Z = \mathcal{U}/X/Z$$
$$\mathcal{U}/Z \times \mathcal{U}/Y = \mathcal{U}/Z/Y$$
$$\mathcal{U}/X/Z \times \mathcal{U}/Z/Y = \mathcal{U}/X/Z/Y$$

Se for composto $\mathcal{U}/X/Z_1/Z_2/Y$, utilizou-se cinco multiplicações biunívocas.

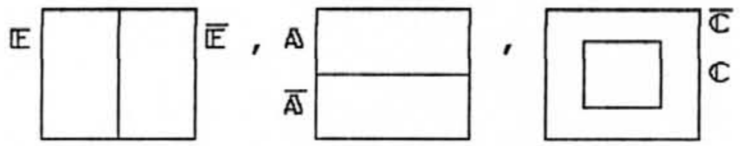
Continuando, para compor diagramas n-dicotômicos, serão necessárias (2n-3) operações de multiplicação biunívoca.

Assume-se como resultado satisfatório, aquele que puder ser determinado com um número mínimo de operações de multiplicação.

Seja, por exemplo, $\mathbb{E}$ a classe dos estudantes, $\mathbb{A}$ a classe dos adultos e $\mathbb{C}$ a classe dos casados, e seja S uma teoria onde:

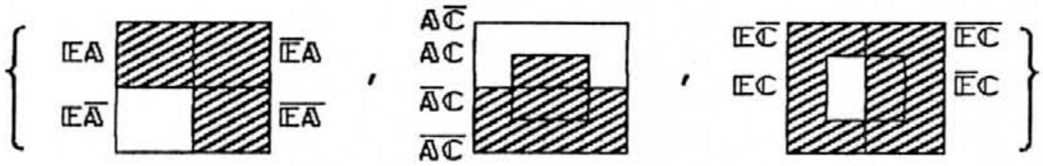
$$S = \{K(\mathbb{E}\times\mathbb{A}=\mathbb{E}\mathbb{A}),\ K(\overline{\mathbb{E}}\times\mathbb{A}=\overline{\mathbb{E}}\mathbb{A}),\ K(\overline{\mathbb{E}}\times\overline{\mathbb{A}}=\overline{\mathbb{E}}\overline{\mathbb{A}}),$$
$$K(\mathbb{A}\times\mathbb{C}=\mathbb{A}\mathbb{C}),\ K(\overline{\mathbb{A}}\times\mathbb{C}=\overline{\mathbb{A}}\mathbb{C}),\ K(\overline{\mathbb{A}}\times\overline{\mathbb{C}}=\overline{\mathbb{A}}\overline{\mathbb{C}}),$$
$$K(\mathbb{E}\times\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{E}\overline{\mathbb{C}}),\ K(\overline{\mathbb{E}}\times\mathbb{C}=\overline{\mathbb{E}}\mathbb{C}),\ K(\overline{\mathbb{E}}\times\overline{\mathbb{C}}=\overline{\mathbb{E}}\overline{\mathbb{C}})\}$$

Então $\mathcal{U}/\mathbb{E}$, $\mathcal{U}/\mathbb{A}$ e $\mathcal{U}/\mathbb{C}$, podem ser respectivamente:



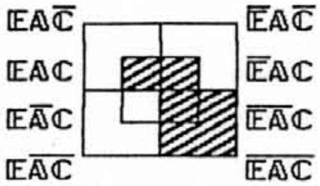
Lembrando que cada diagrama a seguir representa três equações do tipo $K(X\times Y=XY)$, diz-se que o significado de S, dado pela função "denot" é:

denot(S) =

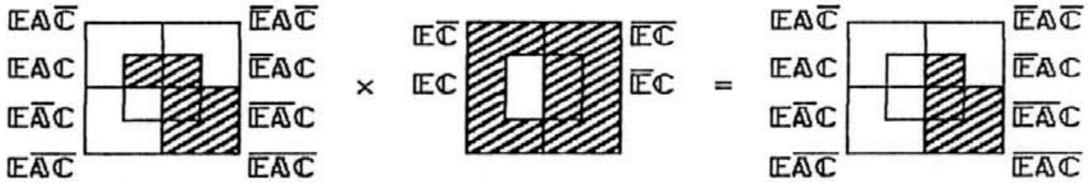


É possível multiplicar os diagramas $\mathcal{U}/\mathbb{E}/\mathbb{A}$ e $\mathcal{U}/\mathbb{A}/\mathbb{C}$ de S, o que dá:

$\mathcal{U}/\mathbb{E}/\mathbb{A}/\mathbb{C}$:



o que é contraditório com $\mathcal{U}/\mathbb{E}/\mathbb{C}$ no que diz respeito à herança dos estudantes. Veja-se que:



o que significa qur nada se pode deduzir sobre a condição dos estudantes serem casados ou não.

O critério para eliminar tais contradições é estabelecido no algoritmo, e é o seguinte: se dois diagramas são contraditórios, o que for composto pelo maior número de dicotomias (mais mediato) será abolido pelo que for composto pelo menor número de dicotomias (menos mediato). Então não se chega a compor $\mathcal{U}/\mathbb{E}/\mathbb{A}/\mathbb{C}$, porque $\mathcal{U}/\mathbb{E}/\mathbb{C}$ já permite tirar conclusões com um número mínimo de operações.

Por outro lado, se dois diagramas contraditórios são de mesmo tamanho, não é possível decidir quanto a abolição. Logo há ambigüidade.

4.2.3 Relação $\mid\!\sim_c$

Para fins de simplificação da notação, serão usadas as seguintes abreviações:

$$K(X \times Y = XY),\ K(\overline{X} \times Y = \overline{X}Y),\ K(\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{XY}) \quad \text{por} \quad K(X \tilde{\rightarrow} Y)$$

$$K(X \times \overline{Y} = X\overline{Y}),\ K(\overline{X} \times Y = \overline{X}Y),\ K(\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{XY}) \quad \text{por} \quad K(X \tilde{\rightarrow} \overline{Y})$$

$$(X \times Y = XY),\ (\overline{X} \times Y = \overline{X}Y),\ (\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{XY}) \quad \text{por} \quad (X \tilde{\rightarrow} Y)$$

$(X \times \overline{Y} = X\overline{Y})$, $(\overline{X} \times Y = \overline{X}Y)$, $(\overline{X} \times \overline{Y} = \overline{XY})$ por $(X \tilde{\to} Y)$

A relação $\mathrel{|\!\sim}_c$ será definida da seguinte maneira:

Definição (Relação $\mathrel{|\!\sim}_c$)

Seja S uma teoria de herança não-estrita formulada em lógica de classes:

$S \mathrel{|\!\sim}_c (X \tilde{\to} Y)$ se $K(X \tilde{\to} Y) \in S$

$S \mathrel{|\!\sim}_c (X \tilde{\to} \ldots \tilde{\to} Y)$ se $K(X \tilde{\to} Z_1) \in S$, ... , $K(Z_n \tilde{\to} Y) \in S$ e $(\nexists m \leq n)$ $K(X \tilde{\to} W_1) \in S$, ... , $K(W_m \tilde{\to} \overline{Y}) \in S$.

□

Retornando ao exemplo anterior, a teoria S será representada por:

$$S = \{K(\mathbb{E} \tilde{\to} \mathbb{A}),\ K(\mathbb{A} \tilde{\to} \mathbb{C}),\ K(\mathbb{E} \tilde{\to} \overline{\mathbb{C}})\}$$

Vê-se que todas as ligações diretas de S seguem da teoria. Por exemplo:

$$S \mathrel{|\!\sim}_c (\mathbb{E} \tilde{\to} \overline{\mathbb{C}})$$

Mas as ligações indiretas só seguem da teoria se a condição de não existir um caminho contraditório de tamanho menor ou igual for satisfeita. Assim, a relação:

$$S \mathrel{|\!\sim}_c (\mathbb{E} \tilde{\to} \mathbb{A} \tilde{\to} \mathbb{C})$$

satisfaz a condição:

$$K(\mathbb{E} \tilde{\to} \mathbb{A}) \in S \quad e \quad K(\mathbb{A} \tilde{\to} \mathbb{C}) \in S$$

onde n=1, já que há apenas uma classe intermediária (a classe "$\mathbb{A}$"). Mas essa ligação indireta não satisfaz a condição:

$$(\nexists\ m\leq n)\ K(\ X \tilde{\rightarrow} W_1\ ) \in S\ ,\ \ldots\ ,\ K\ (\ W_m \tilde{\rightarrow} \overline{Y}\ ) \in S$$

já que existe um m=0, a saber $K(\mathbb{E} \tilde{\rightarrow} \overline{\mathbb{C}})$, que pertence a S.

Portanto a relação $(\mathbb{E} \tilde{\rightarrow} \mathbb{A} \tilde{\rightarrow} \mathbb{C})$ não segue da teoria, já que ela é abolida por $(\mathbb{E} \tilde{\rightarrow} \overline{\mathbb{C}})$.

4.3 Comparação entre $\mathrel{|\!\!\sim}_P$ e $\mathrel{|\!\!\sim}_C$

Para comparar as relações $\mathrel{|\!\!\sim}_P$ e $\mathrel{|\!\!\sim}_C$, é necessário definir as funções f e f^* também para relações de herança não estrita. Para as ligações diretas de T, pode-se definir:

$$f(X \mathrel{+\!\!\mapsto} Y) = K(X \tilde{\rightarrow} Y)$$
$$f(X \mathrel{-\!\!\mapsto} Y) = K(X \tilde{\rightarrow} \overline{Y})$$

e para as ligações derivadas de T, define-se:

$$f(X \mathrel{+\!\!\mapsto} \ldots \mathrel{+\!\!\mapsto} Y) = (X \tilde{\rightarrow} \ldots \tilde{\rightarrow} Y)$$
$$f(X \mathrel{+\!\!\mapsto} \ldots \mathrel{-\!\!\mapsto} Y) = (X \tilde{\rightarrow} \ldots \tilde{\rightarrow} \overline{Y})$$

e finalmente, $f^*(T)$ é dada por:

$$f^*(\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\}) = \{f(\alpha),\ f(\beta),\ f(\gamma),\ f(\delta),\ \ldots\ \}$$

Em primeiro lugar, verifica-se coincidência nos dois métodos ($\mathrel{|\!\!\sim}_P$ e $\mathrel{|\!\!\sim}_C$) no que diz respeito às ligações diretas. Se T possui uma ligação direta α, então ela será mapeada em $f(T)$, numa ligação $f(\alpha)$. Ora, se $T \mathrel{|\!\!\sim}_P \alpha$ é verdadeira porque α é uma ligação direta de T, então $f^*(T) \mathrel{|\!\!\sim}_C f(\alpha)$ também é verdadeira pelo fato de que $f(\alpha)$ representa uma ligação direta mapeada em $f^*(T)$ (já que $f(\alpha)$ denota um diagrama com apenas duas dicotomias).

As diferenças entre esses dois métodos surge no campo das ligações indiretas.

Por exemplo, se $T = \{(\mathbb{A} +\!\!\mapsto \mathbb{B}), (\mathbb{B} +\!\!\mapsto \mathbb{C}), (\mathbb{C} +\!\!\mapsto \mathbb{D}), (\mathbb{A} +\!\!\mapsto \mathbb{F}), (\mathbb{F} -\!\!\mapsto \mathbb{D})\}$, e se $S = f^*(T)$, tal que $S = \{K(\mathbb{A} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{B}), K(\mathbb{B} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{C}), K(\mathbb{C} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{D}), K(\mathbb{A} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{F}), K(\mathbb{F} \stackrel{\sim}{\to} \overline{\mathbb{D}})\}$, então:

$$T \not\mid\!\sim_P (\mathbb{A} +\!\!\mapsto \mathbb{F} -\!\!\mapsto \mathbb{D})$$

e:

$$S \mid\!\sim_C (\mathbb{A} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{F} \stackrel{\sim}{\to} \overline{\mathbb{D}})$$

Seja um outro exemplo, onde:

$$T_1 = \{(\mathbb{F}\text{red} +\!\!\mapsto \mathbb{E}\text{studante}), (\mathbb{E}\text{studante} +\!\!\mapsto \mathbb{A}\text{dulto}), (\mathbb{A}\text{dulto} +\!\!\mapsto \mathbb{C}\text{asado}), (\mathbb{E}\text{studante} -\!\!\mapsto \mathbb{C}\text{asado})\}.$$

Então $T_1 \mid\!\sim_P (\mathbb{F}\text{red} +\!\!\mapsto \mathbb{E}\text{studante} -\!\!\mapsto \mathbb{C}\text{asado})$, e se $S_1 = f^*(T_1)$, então S_1 compartilha esta relação, a saber: $S_1 \mid\!\sim_C (\mathbb{F}\text{red} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{E}\text{studante} \stackrel{\sim}{\to} \overline{\mathbb{C}\text{asado}})$.

Assume-se que esta relação continua valendo para T_2, onde $T_2 = T_1 \cup \{(\mathbb{F}\text{red} +\!\!\mapsto \mathbb{A}\text{dulto})\}$. Então $T_2 \mid\!\sim_P (\mathbb{F}\text{red} +\!\!\mapsto \mathbb{E}\text{studante} -\!\!\mapsto \mathbb{C}\text{asado})$, porque a informação "$(\mathbb{F}\text{red} +\!\!\mapsto \mathbb{A}\text{dulto})$" é tida como redundante em T_2 (v. [DIX 89] pag. 2).

Mas se a herança é não-estrita, então esta informação não é redundante, pois ela é imediata ao passo que a que se tinha em T_1, a saber $(\mathbb{F}\text{red} +\!\!\mapsto \mathbb{E}\text{studante} +\!\!\mapsto \mathbb{A}\text{dulto})$, era mediata. Ora, se a herança é não-estrita, as únicas relações de herança não abolíveis são as imediatas, enquanto que as mediatas podem ser abolidas. Portanto são dois tipos de relações diferentes, pois têm propriedades diferentes. Vê-se que esta noção é captada por $\mid\!\sim_C$: seja $S_2 = f^*(T_2)$, então $S_2 = S_1 \cup \{K(\mathbb{F}\text{red} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{A}\text{dulto})\}$. Logo:

$$S_2 \not\mid\!\sim_C (\mathbb{F}\text{red} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{E}\text{studante} \stackrel{\sim}{\to} \overline{\mathbb{C}\text{asado}})$$

e:

$$S_2 \not\mid\!\sim_C (\text{Fred} \tilde{\rightarrow} \text{Adulto} \tilde{\rightarrow} \text{Casado})$$

embora:

$$T_2 \mid\!\sim_P (\text{Fred} +\!\!\mapsto \text{Estudante} -\!\!\mapsto \text{Casado})$$

A existência dessas diferenças demonstra claramente que $\mid\!\sim_P$ e $\mid\!\sim_C$ baseiam-se em intuições distintas sobre o que deve ou não deve ser herdado numa especificação de herança não-estrita.

Serão mostrados a seguir alguns problemas com a intuição subjacente à definição formal de $\mid\!\sim_P$. Em primeiro lugar, demonstra-se que ligações diretas não são redundantes na presença de ligações indiretas. A seguir, mostra-se que a noção de ordenação parcial entre as classes numa especificação de herança não-estrita é arbitrária e artificial, o que pode justificar o método de determinação de herança por minimização de operações.

4.3.1 Não-Redundância das Ligações Diretas Frente às Indiretas

Nesta seção será considerado o seguinte exemplo:

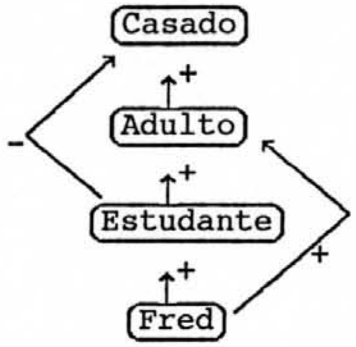
T

J. Dix afirma que a adição de uma informação como "Fred é adulto" é redundante para T, uma vez que ela já segue da teoria:

$$T \mathrel{|\!\sim}_P (\text{Fred} + \!\mapsto \text{Adulto})$$

Nesta visão, uma teoria como T_1 tem um arco redundante:

T_1



A adição de tal informação não deveria pois fazer com que as conclusões de T_1 fossem diferentes das de T. Portanto, $T_1 \mathrel{|\!\sim}_P$ (Fred $- \!\mapsto$ Casado). Entretanto, verifica-se que tal alteração ocorre quando se usa $\mathrel{|\!\sim}_C$, pois:

$$f^*(T) \mathrel{|\!\sim}_C (\mathbb{F}\text{red} \tilde{\rightarrow} \mathbb{C}\text{asado})$$

e:

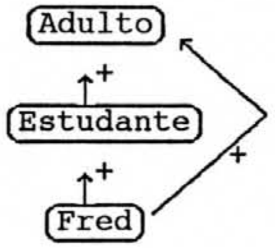
$$f^*(T_1) \mathrel{|\!\not\sim}_C (\mathbb{F}\text{red} \tilde{\rightarrow} \mathbb{C}\text{asado})$$

Tal alteração pode ser justificada se a informação adicionada em T_1 é não-redundante, e realmente traz conhecimento novo à teoria. Seja então um fragmento de T, que será chamado de T_2:

T_2

Seja também um fragmento de T_1, que será chamado de T_3:

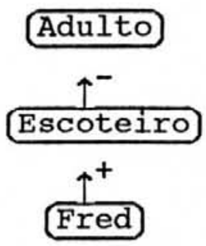
T_3



Se a ligação (Fred $+\!\mapsto$ Adulto) é realmente redundante em T_3, deveria-se esperar uma equivalência entre T_2 e T_3 quanto às conclusões via $\mid\!\sim_P$.

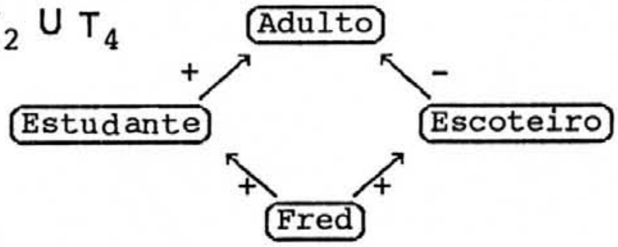
Essa equivalência existe, de fato, quando T_2 e T_3 são tomadas isoladamente de outros contextos, mas pode deixar de existir frente a adição de novos conhecimentos. Seja então T_4:

T_4

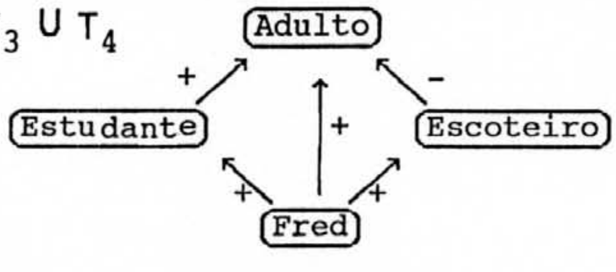


Verifica-se que $T_2 \cup T_4$ não é equivalente a $T_3 \cup T_4$:

$T_2 \cup T_4$



$T_3 \cup T_4$



Note-se que:

$$T_2 \cup T_4 \not\mid\!\sim_P (\text{Fred} + \mapsto \text{Adulto})$$

e:

$$T_3 \cup T_4 \mid\!\sim_P (\text{Fred} + \mapsto \text{Adulto})$$

Logo, a ligação (Fred $+\mapsto$ Adulto) não é redundante, a não ser quando tomada fora de contextos mais gerais.

O algoritmo de $\mid\!\sim_C$ privilegia as informações imediatas como f(Fred $+\mapsto$ Adulto), em detrimento das que são mais mediatas. Isso parece ser mais conseqüente com a noção de herança não estrita.

Enquanto, no caso da herança estrita, a transitividade é válida incondicionalmente, isto é, se ($X +\!\mid\!\!\Rightarrow Y$) e ($Y +\!\mid\!\!\Rightarrow Z$) então ($X +\!\mid\!\!\Rightarrow Z$), no caso da herança não-estrita, a transitividade é sensível ao contexto, uma vez que relações mediatas podem ser abolidas pelo contexto. Então conclui-se que numa especificação de herança não-estrita uma ligação direta nunca é redundante frente às ligações indiretas, mesmo que ela possa ser derivada por transitividade destas, porque sempre há conhecimento novo sendo adicionado à teoria e não se sabe *a priori* quando a mudança de contexto afetará a transitividade das relações.

4.3.2 Arbitrariedade da Ordenação Parcial entre as Classes numa Teoria de Herança não-Estrita

A questão de não se ter transitividade incondicional em teorias de herança não-estrita tem origem em uma questão mais profunda, que é a arbitrariedade com que é estabelecida a ordenação parcial entre classes numa teoria de herança não-estrita.

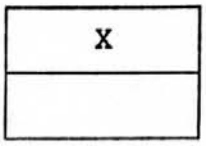
No exemplo anterior, em T_1, Fred herda a propriedade de não ser casado da classe dos estudantes, porque esta lhe é "mais próxima", ao passo que a classe dos adultos lhe é "menos próxima".

É certo que numa teoria de herança estrita tal ordenação entre as classes existe. Se $X \subseteq Y$, pode-se dizer que $X \leq Y$ (X precede Y). Assim, se $X \leq Y$ e $Y \leq Z$, pode-se afirmar que $X \leq Z$, e que a classe Y é mais próxima de X do que a classe Z, o que é possível constatar no seguinte conjunto parcialmente ordenado:

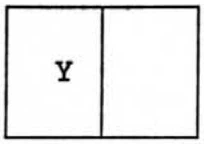
$$\begin{array}{c} Z \\ \uparrow{\scriptstyle \leq} \\ Y \\ \uparrow{\scriptstyle \leq} \\ X \end{array}$$

Mas esta noção de proximidade entre classes não parece clara no caso da herança não-estrita, já que neste caso não se têm inclusões de classes mas apenas comparações multiplicativas biunívocas entre classes. Se se tem $\mathcal{U}/X$ e $\mathcal{U}/Y$, e X não está incluído em Y, nem Y em X, então não é intuitivo falar que X precede Y ou que Y precede X, uma vez que são classes ortogonais, num certo sentido:

$\mathcal{U}/X$:



$\mathcal{U}/Y$:

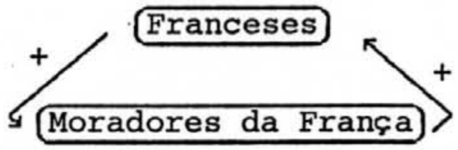


Assim, se 𝔼studante não é uma subclasse de 𝔸dulto, qual é o sentido de dizer que Fred está mais próximo de 𝔼studante do que de 𝔸dulto? Uma resposta possível é dizer que foi fornecida informação de que estudantes são adultos. Neste sentido, portanto, há uma espécie de "inclusão não-estrita" de 𝔼studantes em 𝔸dultos. Mas então se estará impedindo que seja fornecida a informação de que adultos são estudantes (ou não, se for o caso), já que uma teoria de herança é, por definição, um grafo direcionado acíclico.

Não se pode, pois, estabelecer uma relação de precedência entre classes comparadas multiplicativamente, uma vez que a possível existência de ciclos nas relações de herança não pode ser representada nas estruturas de ordenação parcial.

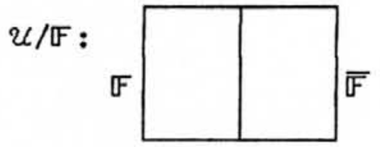
Assim é que a teoria de herança do senso comum, segundo a qual as classes se estruturam em um grafo direcionado acíclico, não permite representar situações como:

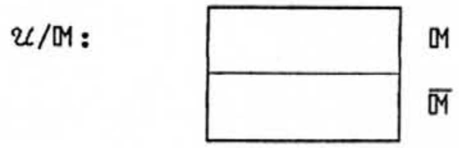
(Franceses $+\mapsto$ Moradores da França)
(Moradores da França $+\mapsto$ Franceses)



Em geral, o que se faz nestes casos é escolher arbitrariamente uma das ligações, preterindo-se a outra.

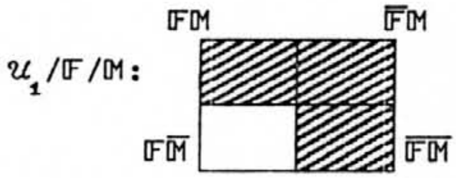
Quando essas ligações são formuladas em linguagem de classes, pelo fato de não haver estabelecimento de ordenação parcial entre as classes, a herança "cíclica" torna-se apenas um tipo especial de diagrama. Seja 𝔽 a classe dos franceses e 𝕄 a classe dos moradores da França. Então:





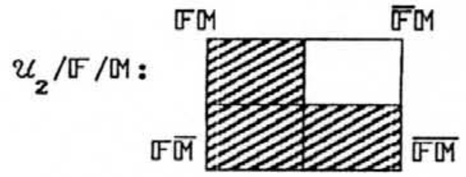
e:

denot($\mathbb{F} \tilde{\rightarrow} \mathbb{M}$) =



e:

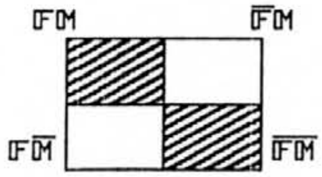
denot($\mathbb{M} \tilde{\rightarrow} \mathbb{F}$) =



Compondo os diagramas tem-se:

$$\mathcal{U}_1/\mathbb{F}/\mathbb{M} \times \mathcal{U}_2/\mathbb{F}/\mathbb{M} = \mathcal{U}/\mathbb{F}/\mathbb{M}$$

onde $\mathcal{U}/\mathbb{F}/\mathbb{M}$ é representado pelo diagrama:



O diagrama $\mathcal{U}/\mathbb{F}/\mathbb{M}$ estabelece que um elemento é não-excepcional se pertencer simultaneamente a $\mathbb{F}$ e a $\mathbb{M}$, ou se pertencer simultaneamente a $\overline{\mathbb{F}}$ e a $\overline{\mathbb{M}}$. Caso contrário, ele é excepcional.

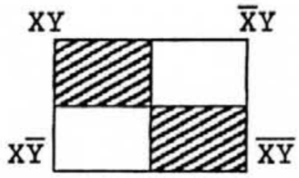
Esta noção é dual, nas teorias de herança não-estrita, a uma que se tem nas teorias de herança estrita: a equivalência entre classes. Em uma teoria de herança estrita, pode-se afirmar:

$$\text{se } (X \leq Y) \text{ e } (Y \leq X) \text{ então } (X \equiv_e Y)$$

Agora, em teorias de herança não-estrita, pode-se dizer:

$$\text{se } (X \tilde{\rightarrow} Y) \text{ e } (Y \tilde{\rightarrow} X) \text{ então } (X \tilde{\longleftrightarrow} Y)$$

onde:

$\text{denot}(X \tilde{\longleftrightarrow} Y) =$ 

5 TEORIAS DE HERANÇA DO SENSO COMUM (O CASO NÃO-MONOTÔNICO COM HERANÇA MISTA)

Reservou-se este capítulo para falar de teorias de herança onde se misturam relações estritas e não-estritas. Apesar de este ser o caso mais importante para representação do conhecimento, continua sendo o menos abordado na literatura. Isso talvez se deva ao fato de que os problemas da formalização das teorias de herança não-estrita se propaguem nas teorias mistas, causando uma série de outros problemas (v. [DIX 89] pag. 7).

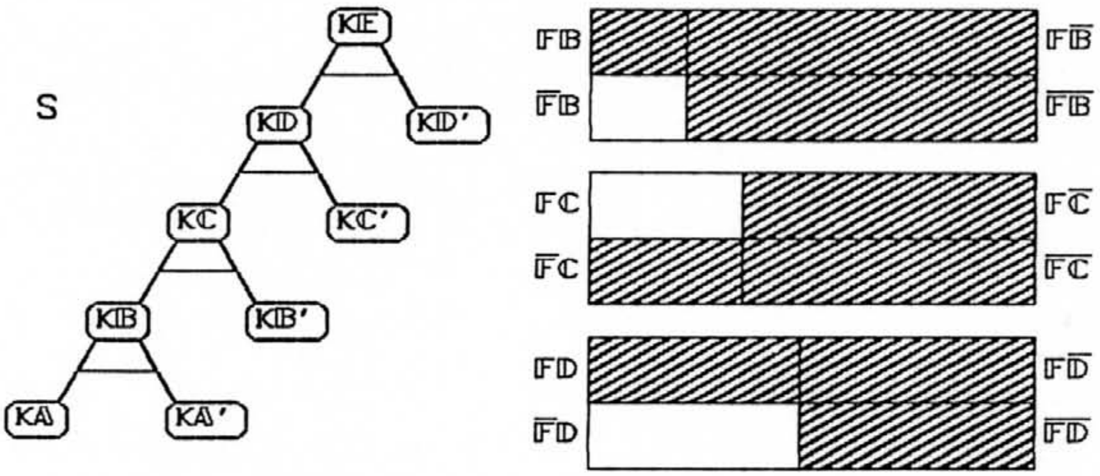
Na abordagem proposicional, tem-se quatro tipos de ligações numa teoria de herança mista: "$+\models\!\!\!\Rightarrow$", "$-\models\!\!\!\Rightarrow$", "$+\mapsto$" e "$-\mapsto$".

Na abordagem de classes tem-se encaixes aditivos: "$KX+KX'=KY$", e encaixes multiplicativos: "$K(X\times Y=\emptyset)$" e "$K(X\times Y=XY)$".

Devido ao fato da transitividade ser incondicional nas seqüencias de encaixes aditivos, pode-se assumir que qualquer inferência sobre uma cadeia de encaixes aditivos é imediata, ou seja, se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$ então "$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$" é uma inferência imediata.

Todavia, no caso dos encaixes multiplicativos, será imediata apenas a inferência que for realizada sobre um diagrama de duas dicotomias, da forma $\mathcal{U}/X/Y$.

Seja a teoria $S = \{K(\mathbb{A}+\mathbb{A}'=\mathbb{B}),\ K(\mathbb{B}+\mathbb{B}'=\mathbb{C}),\ K(\mathbb{C}+\mathbb{C}'=D),\ K(\mathbb{D}+\mathbb{D}'=\mathbb{E}),\ K(\mathbb{B}\tilde{\to}\mathbb{F}),\ K(\mathbb{C}\tilde{\to}\overline{\mathbb{F}}),\ K(\mathbb{D}\tilde{\to}\mathbb{F})\}$, que denota:



Quer-se determinar se $\mathbb{A}$ herda de $\mathbb{F}$ ou $\overline{\mathbb{F}}$. Verifica-se que as inferências imediatas sobre $\mathbb{A}$ são: $\mathbb{A}\sqsubseteq\mathbb{B}$, $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{C}$, $\mathbb{A}\sqsubseteq\mathbb{D}$ e $\mathbb{A}\sqsubseteq\mathbb{E}$. As inferências imediatas sobre $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ são respectivamente: $\mathbb{B}\tilde{\to}\mathbb{F}$, $\mathbb{C}\tilde{\to}\overline{\mathbb{F}}$ e $\mathbb{D}\tilde{\to}\mathbb{F}$. Por composição das inferências imediatas, obtém-se as seguintes inferências mediatas:

$$\mathbb{A}\sqsubseteq\mathbb{B} \times \mathbb{B}\tilde{\to}\mathbb{F} = \mathbb{A}\tilde{\to}\mathbb{F}$$
$$\mathbb{A}\subseteq\mathbb{C} \times \mathbb{C}\tilde{\to}\mathbb{F} = \mathbb{A}\tilde{\to}\overline{\mathbb{F}}$$
$$\mathbb{A}\sqsubseteq\mathbb{D} \times \mathbb{D}\tilde{\to}\mathbb{F} = \mathbb{A}\tilde{\to}\mathbb{F}$$

Ve-se então que o critério de minimização de composições é ambíguo nestes casos. Mas como a transitividade é incondicional nas seqüencias de encaixes aditivos, pode-se formular a seguinte regra de determinação de herança:

Se a aplicação do critério de minimização de operações for ambíguo, então a classe $\mathbb{A}$ herda de $\mathbb{F}$ somente se para toda a classe Z na qual $\mathbb{A}$ está contida, e sendo que Z herda não-estritamente de $\overline{\mathbb{F}}$ (no caso, o único Z é a classe $\mathbb{C}$), existir uma outra classe W, diferente de Z , que contém a classe $\mathbb{A}$ e que está contida em Z (no caso, a classe $\mathbb{B}$), tal que essa classe W herda não-estritamente de $\mathbb{F}$.

Em termos gerais, a regra é:

$$S \mathrel{|\!\!\sim_c} (X \tilde{\rightarrow} Y) \text{ se}$$
$$(\forall Z)\ (X \leq Z) \wedge (Z \tilde{\rightarrow} \overline{Y})$$
$$(\exists W \neq Z)\ (X \leq W \leq Z) \wedge (W \tilde{\rightarrow} Y)$$

Note-se a semelhança desta regra com a regra definida em 4.1.1 para determinação da herança não-estrita (item(c)).

É de se observar que neste caso a ordenação parcial entre as classes é assumida onde ela existe de fato: nas seqüências de encaixes aditivos, enquanto que em 4.1.1 essa ordenação era considerada geral.

6 CONCLUSÃO

Demonstrou-se que o que se entende por "intuitivo" nas teorias de herança formuladas em lógica proposicional é diferente do que se entende quando se considera a natureza da relação de herança não-estrita formulada em lógica de classes.

Tal diferença é devida ao fato de que as relações de herança não-estrita são formuladas em lógica proposicional através de implicações formais "$\rightarrow$", o que dá a ilusão da existência de uma ordenação parcial entre as classes de uma teoria.

Se, porém, for buscada uma formulação psicologicamente mais concreta para a teoria de herança, ve-se que classes comparadas pela herança não-estrita não são ordenadas, mas ortogonais.

Assim, um algoritmo para determinação de herança entre classes não deveria se basear na noção de ordenação parcial entre as classes, como é o caso de "$\mid\!\sim_P$". Este algoritmo também não poderia utilizar a função "tml" da forma como foi definida, uma vez que se existirem ciclos na herança, a maior ligação possível entre duas classes será de tamanho infinito, e o algoritmo não terminaria nunca.

O algoritmo para "$\mid\!\sim_C$", ao contrário, não utiliza a noção de precedência entre classes mas sim a de precedência entre as informações. Assim, uma informação imediata precede qualquer informação mediata. Uma informação mediata obtida com a composição de duas informações imediatas precede qualquer informação mediata obtida com três ou mais infortmações imediatas. E assim por diante.

Outro argumento para justificar essa preferência pelo menor número de composições é o de que a cada composição multiplicativa de diagramas $\mathcal{U}$/X/Y, realiza-se a intersecção das classes não-excepcionais e, simultaneamente, a união das classes excepcionais em $\mathcal{U}$. Isso significa que a cada nova composição há um crescimento da área das classes excepcionais do universo.

Como a intuição leva a reduzir a excepcionalidade a um *minimum*, é plausível aceitar aquelas conclusões obtidas nas composições onde existem menos excessões do que naquelas onde o número de excessões é maior.

ANEXO

ESTUDOS DE LÓGICA INTRAPROPOSICIONAL

A1 INTRODUÇÃO

Quando se trata de abordar a questão da representação de conhecimento em lógica, pode-se proceder de diversas maneiras. Seja qual for a abordagem adotada, o objetivo dela deve ser fornecer as ferramentas necessárias para construir um algoritmo abstrato. Esse algoritmo deve ser capaz de manipular simbolicamente (computar) as construções formais que representam o conhecimento, e reproduzir o raciocínio associado a essas construções.

Uma abordagem possível é tomar os próprios juizos, reescrevê-los sob a forma de proposições, as quais se saiba serem verdadeiras ou falsas, e escrever um procedimento formal para, a partir destas proposições e algumas regras pré-estabelecidas, deduzir teoremas.

Esta é uma abordagem possível para o problema, mas não é a única. Pode-se optar por uma abordagem que parta de construções mais naturais, segundo certos critérios, ao invés destas reconstruções mais artificiais.

Começando pelo mais artificial ou abstrato, utiliza-se a lógica das proposições, e começando pelo ângulo mais natural ou concreto, utiliza-se classes e relações.

Mas o interessante, diz Piaget, é que mesmo chegando a fórmulas idênticas, pode-se conceber, de maneira a mais variada, a obra de formalização à qual a lógica se dedica.

A razão disto é que o "formal", que caracteriza a lógica, não é uma qualidade dada, caracterizando um estado, mas a expressão de um processo ou de um movimento de formalização.

Portanto a lógica não é a teoria formal (em estado acabado) mas formalizante ou formalizadora das operações dedutivas.

As noções de forma e conteúdo serão tornadas claras mais adiante. Para isso, precisa-se compreender o que são as operações intra e interproposicionais, isto é, aquelas que operam os termos (ou conteudo) das proposições, e as que operam as próprias proposições entre si.

A2 FORMA E CONTEÚDO

Em primeiro lugar, diz-se que uma *proposição* é uma representação sintática de um *juízo*. Ora, sendo o juízo uma operação muda da mente humana, ele necessita de uma representação para poder ser manipulado simbolicamente.

Essa manipulação simbólica, que consiste de composições de proposições, é também uma operação, que chamamos de *inferência*. Sendo a inferência uma operação sobre operações, diz-se que ela é uma operação de segunda ordem, enquanto que as proposições são operações de primeira ordem. A inferência representa a operação da mente humana conhecida como *raciocínio*, o qual consiste, por sua vez, de composições de juízos.

Considere-se o seguinte esquema de equivalências:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[rrr, dotted, "\textit{inferência}"] & & & {} \\
\text{(proposição 1)} \arrow[r, "\text{operação}", "\text{simbólica}"'] \arrow[d, "\text{representa}"] & \text{(proposição 2)} \arrow[r, Rightarrow, "\text{resulta}"'] \arrow[d, "\text{representa}"] & \text{(proposição 3)} \arrow[d, "\text{representa}"] \\
\text{(juizo 1)} \arrow[r, "\text{operação}", "\text{mental}"'] & \text{(juizo 2)} \arrow[r, Rightarrow, "\text{resulta}"'] & \text{(juizo 3)} \\
{} \arrow[rrr, dotted, "\textit{raciocínio}"'] & & & {}
\end{tikzcd}
$$

Vê-se que como as proposições são representações de juízos, o resultado de uma inferência também é representação de um juízo. Embora as operações sobre proposições se dêem no nível simbólico, podemos admitir sua correspondência com as operações mentais sobre juízos.

O juízo é uma operação mental que consiste em atribuir *qualidades* a *objetos*. O ato de olhar um objeto e perceber nele uma qualidade implica a existência de um juízo. Uma vez estabelecido o juízo, pode-se verbalizá-lo através de uma proposição, por exemplo: "tigres são ferozes", que é a representação sintática de um juízo que atribui a qualidade "feroz" aos tigres.

A qualidade em jogo também pode determinar uma *relação* entre dois ou mais objetos, como por exemplo, em "o coelho é mais veloz do que a tartaruga".

Os juízos têm duas espécies de componentes: uma qualidade e um ou mais objetos. A qualidade será representada por um *predicado* e os objetos por *constantes individuais*. O predicado pode ser unário, binário ou n-ário, se for aplicado respectivamente a um, dois, ou n objetos de cada vez. Por exemplo, o predicado "feroz" é unário na proposição "tigres são ferozes", e o predicado "é mais veloz que" é binário na proposicao "o coelho é mais veloz que a tartaruga".

Os objetos serão representados por seus nomes, isto é, constantes individuais. Assim, a proposição consistirá em atribuir predicados a constantes individuais.

Objetos e qualidades eram concebidos, na silogística clássica como pertencendo a uma única categoria: a dos *conceitos*. Paralelamente, predicados e constantes individuais podem ser identificadas pelo nome de *termos* de proposições.

Tem-se assim dois planos paralelos: o das operações mentais ou reais (estudado pela psicologia) e o das operações formais ou simbólicas (estudado pela lógica). Para normalizar a terminologia as referências empregadas aqui serão sempre no plano simbólico. A seguinte tabela resume as equivalências entre as palavras empregadas:

Plano Mental	Plano Simbólico
Conceito	Termo
Qualidade	Predicado: a, a_1, a_2, ...
Objeto	Constante: c, c_1, c_2, ... (ou, por vezes "objeto")
Juízo	Proposição: p, p_1, p_2, ...
Raciocínio	Inferência

As relações entre termos, proposições e inferências se dá de modo intrincado. As proposições resultam de composições de termos, segundo a operação "ap":

$$\text{ap} : \text{Predicado} \times \text{Constantes} \longrightarrow \text{Proposição}$$

O domínio "Constantes" é constituido por tuplas de constantes individuais. Assim, uma proposição resulta da aplicação de "ap" sobre um predicado "a" e uma tupla de constantes "$<c_1, \ldots, c_{n1}>$":

$$\text{ap}(a, <c_1, \ldots, c_{n1}>) = a(c_1, \ldots, c_{n1}) = p$$

Por sua vez, os termos não têm significado senão através de combinações de proposições. Assim é que uma constante, representando um objeto particular só pode ser caracterizada através dos predicados que a ela se aplicam. Portanto, por um conjunto de proposições. Por exemplo, uma constante "c_i" é caracterizada pela combinação das proposições:

$$a_{k1}(c_i) \;,\; a_{k2}(c_i) \;,\; \ldots$$

Da mesma maneira, um predicado só tem sentido enquanto puder ser distinguido de outros. Esta distinção pode se dar no campo intensional, através de um jogo de relações assimétricas entre predicados, ou no campo extensional, onde cada predicado é caracterizado pelo conjunto de constantes às quais ele se aplica. Novamente tem-se um jogo de proposições caracterizando um termo.

No que se refere às relações entre as proposições e as inferências, observa-se que a inferência resulta de uma combinação interproposicional, sendo:

$$\underline{\text{comb}}_i : \text{Proposição} \times \ldots \times \text{Proposição} \longrightarrow \text{Inferência}$$

Por exemplo:

$$\underline{\text{comb}}_{k1}(p \supset q, q \supset r) = [(p \supset q) \wedge (q \supset r) \longrightarrow (p \supset r)]$$

Neste ponto, é necessário distinguir a *implicação formal* "$\longrightarrow$" da *implicação material* "$\supset$". A implicação formal, presente em todas as inferências, consiste em construir uma proposição (conseqüente) a partir de uma combinação de outras (antecedente). Portanto, o valor verdade da implicação formal será sempre "verdadeiro". Já a implicação material, será verdadeira dependendo dos valores de seu antecendente e do conseqüente. Então o domínio "Inferência" é constituído por pares de proposições $\langle p,q \rangle$, onde **p** é o antecedente e **q** o conseqüente, e sempre que o valor verdade de **p** for "verdadeiro", o valor de **q** também será verdadeiro:

$$v(p)=V \longrightarrow v(q)=V$$

Pode-se também identificar um certo conjunto de operações interproposicionais:

$$\text{Inter} = \{\text{inter}_1, \text{inter}_2, \ldots\}$$

onde:

$$\text{inter}_i : \text{Proposição} \times \ldots \times \text{Proposição} \longrightarrow \text{Proposição}$$

Essas operações combinam proposições, das quais só se conhece os valores verdade. O resultado desta combinação é uma nova proposição unicamente determinada por essas combinações de valores verdade. Por exemplo:

$$\text{inter}_{k1}(p_1,p_2) = (p_1 \wedge p_2)$$
$$\text{inter}_{k2}(p_1,p_2,p_3,p_4) = [(p_1 \vee p_2) \supset (p_3 \wedge p_4)]$$

onde $(p_1 \wedge p_2)$ e $[(p_1 \vee p_2) \supset (p_3 \wedge p_4)]$ são proposições compostas.

O valor verdade destas proposições compostas é dado por:

$$v : \text{Proposição} \longrightarrow \{ V , F \}$$

sendo que:

$$v(\text{inter}_i(p_1, \ldots, p_k)) = T_k(\langle p_1, \ldots, p_k \rangle, \text{'inter}_i\text{'})$$

onde T_k é a tabela verdade das 2^{2^k} operações interproposicionais pelas 2^k combinações possíveis de valores verdade.

Para k=1 (composição com uma só proposição), temos:

T_1	'inter$_1$'	'inter$_2$'	'inter$_3$'	'inter$_4$'
<V>	V	V	F	F
<F>	V	F	V	F

aqui, inter_1 é a operação constante: $(\forall p)\ v(\text{inter}_1(p))=V$, inter_2 é a operação identidade: $(\forall p)\ v(\text{inter}_2(p))=v(p)$, inter_3 é a negação de p: $(\forall p)\ v(\text{inter}_3(p))=v(\neg p)$, e inter_4 é a operação constante: $(\forall p)\ v(\text{inter}_4(p))=F$.

Para k=2 tem-se:

T_2	'inter$_1$'	'inter$_2$'	'inter$_3$'	...	'inter$_{16}$'
<V,V>	V	V	V	...	F
<V,F>	V	V	V	...	F
<F,V>	V	V	F	...	F
<F,F>	V	F	V	...	F

onde 'inter$_1$' é a afirmação completa de duas proposições: $(\forall p,q)v(inter_1(p,q))=V$, 'inter$_2$' é a disjunção não-exclusiva: $(\forall p,q)v(inter_2(p,q))=v(p\vee q)$, etc...

Para k=3, a tabela têm 256 operações, e assim por diante.

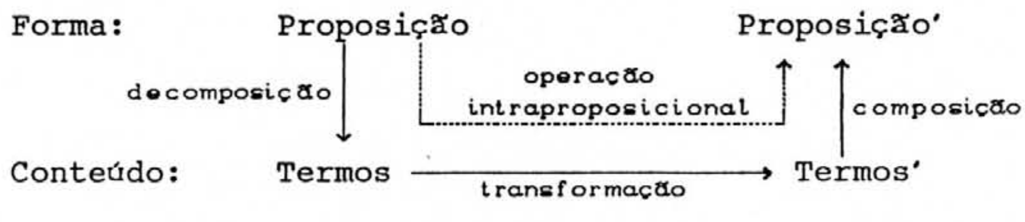
Pode-se conceber um outro conjunto de operações, as quais consistem em modificar proposições, através de uma decomposição desta em seus termos, transformação dos próprios termos e composição dos termos modificados, resultando numa nova proposição. Tais são as operações intraproposicionais:

$$\text{Intra} = \{\text{intra}_1, \text{intra}_2, \ldots\}$$

onde:

$$\text{intra}_i : \text{Proposição} \times \ldots \times \text{Proposição} \rightarrow \text{Proposição}$$

As operações intraproposicionais referem-se ao conteúdo das proposições, em oposição à forma de suas ligações. Cada operação intraproposicional corresponde a um esquema como o seguinte:



É possível, então, identificar dois tipos de inferências: aquelas que se baseiam exclusivamente nas formas das ligações interproposicionais, e aquelas que se baseiam nas operações entre os termos das proposições, chamadas intraproposicionais.

Um exemplo de inferência formal (interproposicional) é:

$$(p \supset q) \wedge (q \supset r) \rightarrow (p \supset r)$$

A validade dessa inferência é garantida, qualquer que sejam os valores verdade das proposições compostas $(p \supset q)$, $(q \supset r)$ e $(p \supset r)$ ou das proposições **p**, **q** e **r**.

Já as inferências próprias aos silogismos são intraproposicionais. Por exemplo, dizer que "todos os homens são mortais", "Sócrates é homem" portanto "Sócraters é mortal", equivale a decompor as proposições em classes, incluir a dos homens na dos mortais e concluir da pertinência de Sócrates à primeira, sua pertinência à segunda.

Há então uma lógica interproposicional, que se refere apenas às formas das proposições, e uma lógica intraproposicional, que se refere ao conteúdo das proposições. Porém a lógica intraproposicional também é uma lógica formal, pois esse conteúdo ao qual ela se refere têm também uma forma. Essa forma é constituída pelas estruturas de classes e relações.

Assim, pode-se fazer inferências sobre a forma das proposições, ou pode-se operar diretamente sobre o conteúdo destas proposições. Estas operações sobre o conteúdo das proposições têm uma álgebra definida por oito agrupamentos, que serão vistos a seguir.

A3 ELEMENTOS DE LÓGICA INTRAPROPOSICIONAL

As operações da lógica intraproposicional podem ser estudadas segundo certas estruturas operatórias, as quais constituem verdadeiras álgebras destas operações.

Estas estruturas, embora caracterizadas globalmente de maneira única, podem ser classificadas segundo três critérios:

a) Os *objetos* sobre os quais se opera podem ser de duas naturezas: *classes* ou *relações*;

b) As *operações* podem ser *aditivas* ou *multiplicativas*;

c) As operações podem considerar os *encaixes* de classes e relações como *estruturas lineares* (primárias) ou como *estruturas hierárquicas* ou arbóreas (secundarias).

A3.1 Classes e Relações

Identifica-se classes e relações como dois aspectos de uma mesma realidade. Enquanto uma classe representa a *extensão* de um conceito, ou seja, os objetos aos quais o conceito se aplica, as relações representam a *compreensão* do conceito, ou seja, as "ligações" entre os objetos que permitem afirmar se uma "configuração" de objetos pertence ou não ao conceito.

Pode-se definir classes e relações a partir da noção de função proposicional, tomada como noção primitiva, representativa de um conceito. Considere-se de início uma função proposicional unária $a(x)$. A classe $\mathbb{A}$, é definida como sendo a coleção de objetos, representados por constantes individuais c_1, ..., c_n, os quais tornam a função proposicional $a(x)$ verdadeira quando substituem o x. A classe $\mathbb{A}$ é representada por:

$$\mathbb{A} =_{df} \{ x \mid v (a (x)) = V \}$$

Observe-se que a intensão é de toda classe ser "finita". A noção de classe estabelece uma relação de equivalência entre todos os objetos de $\mathbb{A}$, os quais tornam a função proposicional $a(x)$ verdadeira: é a relação de co-pertinência à classe $\mathbb{A}$. Representa-se esta relação por $\xleftrightarrow{a}$. Quando vale $c_i \xleftrightarrow{a} c_j$ então se diz que c_i e c_j pertencem à classe $\mathbb{A}$, determinada pela função proposicional $a(x)$.

É importante notar que essa equivalência não é geral, mas relativa à função proposicional que determina a classe em questão. Por exemplo, um c_k pode não ser equivalente a c_i e c_j relativamente a $a(x)$, que determina a classe $\mathbb{A}$, mas poderá ser equivalente a eles relativamente à função proposicional $b(x)$ que determina a classe $\mathbb{B}$. Neste caso tem-se a equivalência $c_i \xleftrightarrow{b} c_j \xleftrightarrow{b} c_k$.

Duas classes são comparáveis pelo critério parte/todo quando elas são iguais ($\mathbb{A}=\mathbb{B}$), ou quando uma delas contém a outra ($\mathbb{A}\subseteq\mathbb{B}$ ou $\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}$).

Definição (Inclusão de Classes)

O símbolo "$\subseteq$" determina a relação de inclusão entre duas classes do ponto de vista da extensão, isto é, uma classe $\mathbb{A}$ está incluída numa classe $\mathbb{B}$ (o que é denotado por "$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$"), se todos os elementos de $\mathbb{A}$ também são elementos de $\mathbb{B}$:

$$\_ \subseteq \_ : \text{Classe} \times \text{Classe} \longrightarrow \{V,F\}$$

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} = \begin{cases} V \text{ se } (\forall x)\ v(a(x))=V \longrightarrow v(b(x))=V \\ F \text{ caso contrário} \end{cases}$$

□

Definição (Igualdade entre Classes)

O símbolo "$\equiv_e$" determina a relação de igualdade entre classes do ponto de vista da extensão, isto é, quando duas classes possuem exatamente os mesmos elementos:

$$(X \equiv_{e} Y) = \begin{cases} V \text{ se } (\forall x)\ v(a(x))=V \longleftrightarrow v(\delta(x))=V \\ F \text{ caso contrário} \end{cases}$$

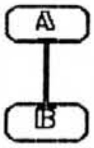
□

Se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ então se diz que a extensão de $\mathbb{A}$ é menor do que a extensão de $\mathbb{B}$, e se escreve:

$$\mathbb{A} <_{e} \mathbb{B}$$

Classes disjuntas (ou seja, classes que não são iguais, e uma não contém a outra) são ditas não-comparáveis pelo critério parte-todo. Nesse caso, nada se afirma a respeito de suas extensões.

Se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, o que se pode representar pela simbologia de árvores como:



diz-se que qualquer constante c, que pertença a $\mathbb{A}$ também pertence a $\mathbb{B}$.

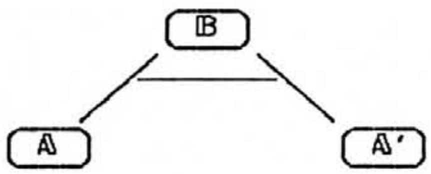
Além disso, se $\mathbb{A}$ está contida em $\mathbb{B}$, então é possível realizar uma operação de diferença entre $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, produzindo como resultado uma classe, que será chamada de classe $\mathbb{A}'$. A classe $\mathbb{A}'$ é definida por:

$$\mathbb{A}' = \{\ x \mid v(\delta(x))=V \text{ e } v(a(x))=F\ \}$$

Isto significa que $\mathbb{A}'$ contém as constantes que pertencem a $\mathbb{B}$, mas que não pertencem simultaneamente a $\mathbb{A}$, e que

$\mathbb{A}'$ não contém mais nada. Então diz-se que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ são duas classes *complementares* em relação a $\mathbb{B}$.

Pode-se representar essas classes complementares através do seguinte diagrama:



As mesmas definições acima podem ser generalizadas para funções proposicionais n-árias, considerando que um predicado $a(c_1, \ldots, c_k)$ pode ser representado por um predicado unário $a(c)$, onde c é uma tupla formada pelas constantes $c_1, \ldots, c_k$. Então os objetos pertencentes às classes qualificadas por predicados n-ários são tuplas e não objetos individuais.

Enquanto a co-pertinência a classes corresponde a relações simétricas entre objetos (pois $\xleftrightarrow{r}$ tem a propriedade da simetria: $(\forall x,y)\ x \xleftrightarrow{r} y \rightarrow y \xleftrightarrow{r} x$), a inclusão das classes corresponde a relações, chamadas assimétricas, entre as classes. Uma relação assimétrica $\xrightarrow{r}$ tem a propriedade de ser anti-simétrica e irreflexiva:

$$(\forall x,y)\ [(x \xrightarrow{r} y) \rightarrow \neg(y \xrightarrow{r} x)] \wedge \neg(x \xrightarrow{r} x)$$

Enquanto classes de objetos e relações simétricas são, respectivamente, extensão e compreensão de proposições unárias, as relações assimétricas constituem as compreensões de proposições binárias $a(x,y)$, que afirmam diferenças entre indivíduos.

As relações assimétricas exprimem diferenças crescentes entre as extensões das classes, dando origem a estruturas de classes chamadas "séries", por exemplo:

$$\mathbb{A} \xrightarrow{r1} \mathbb{B} \xrightarrow{r2} \mathbb{C} \xrightarrow{r3} \mathbb{D} \xrightarrow{r4} \ldots$$

Na série acima, as relações r1, r2, ... exprimem diferenças crescentes entre as classes. Portanto $\mathbb{A}$ está incluída em $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ em $\mathbb{C}$, etc.

A3.2 Operações Aditivas e Multiplicativas

Operações aditivas são, intuitivamente, operações de reunião de termos operados. No caso das classes, temos a operação de união de classes, simbolizada por "$\cup$". A união determina entre duas classes complementares a classe em relação à qual elas são complementares. Por exemplo, se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ são complementares em relação a $\mathbb{B}$, então:

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{A}' = \mathbb{B}$$

A união é uma operação reversível, visto que existe uma operação (a inversa) que permite retornar aos termos iniciais a partir do resultado. Essa operação inversa é a própria operação de diferença já vista. Por exemplo, se $\mathbb{A}\cup\mathbb{A}'=\mathbb{B}$, então as diferenças entre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}$, e entre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}'$ são representadas por:

$$\mathbb{B} - \mathbb{A} = \mathbb{A}'$$
$$\mathbb{B} - \mathbb{A}' = \mathbb{A}$$

No caso das relações assimétricas, a operação aditiva (+) consiste em reunir diferenças, adicionando-as. Por exemplo, se a diferença entre $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ é representada por $\xrightarrow{r}$ e a diferença entre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ por $\xrightarrow{s}$, a diferença entre $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ é dada por:

$$(\mathbb{A} \xrightarrow{r} \mathbb{B}) + (\mathbb{B} \xrightarrow{s} \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \xrightarrow{r+s} \mathbb{C})$$

Já no caso das relações simétricas, a adição é a operação que reúne as relações operada na mais geral dentre elas. Por exemplo, se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, então:

$$(c_1 \xleftrightarrow{a} c_2) + (c_2 \xleftrightarrow{b} c_3) = (c_1 \xleftrightarrow{b} c_3)$$

As operações multiplicativas, por outro lado, são operações que, intuitivamente, determinam a parte comum aos termos operados. No caso das classes, temos a operação de interseção, que determina, para duas classes dadas, qual a classe com maior extensão contida simultaneamente em ambas. Por exemplo, para $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{B} \cap \mathbb{B} &= \mathbb{B} \\ \mathbb{B} \cap \mathbb{A} &= \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \cap \mathbb{A}' &= \mathbb{A}' \\ \mathbb{A} \cap \mathbb{A}' &= \emptyset \end{aligned}$$

A multiplicação entre duas relações consiste em submeter todos os termos da primeira à segunda, ou seja, determinar o produto $r \times s$, definido por:

$$c_1 \xrightarrow{r \times s} c_2 \quad \text{sss} \quad (\exists c_3)\ (c_1 \overset{r}{\text{---}} c_3) \wedge (c_3 \overset{s}{\text{---}} c_2)$$

Obs. A barra horizontal "——" representa uma relação sem levar em conta se é simétrica ou assimétrica.

A3.3 Estruturas Primárias e Secundárias

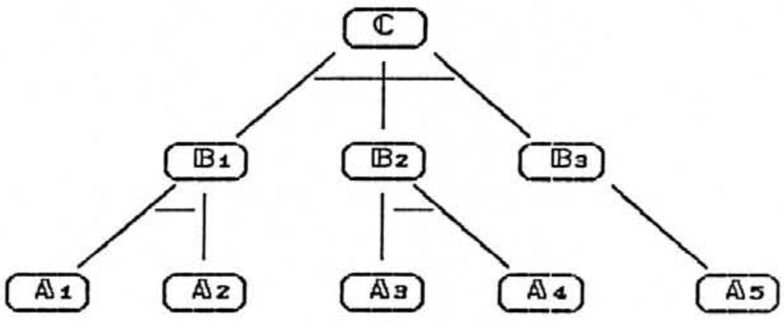
Serão chamadas de "estruturas primárias de classes" (ou objetos) aquelas constituídas por encaixes dicotômicos de classes (ou por seriações de relações assimétricas) com a forma de uma seqüência única, totalmente ordenada isto é, em que existe relação entre todo par de termos):

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \ldots$$

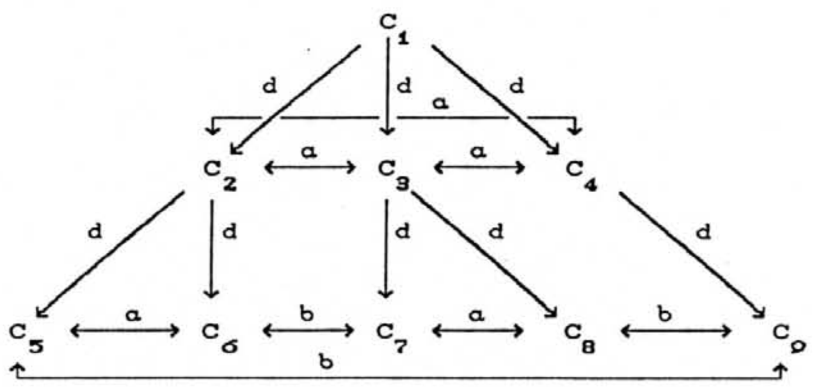
ou:

$$c_1 \xrightarrow{r1} c_2 \xrightarrow{r2} c_3 \xrightarrow{r3} \ldots$$

Serão chamadas de "estruturas secundárias de classes" aquelas constituídas por encaixes de classes na forma de árvores ou hierarquias parcialmente ordenadas, (isto é, em que nem todo par de termos tem relação de inclusão entre si):



Serão chamadas de "estruturas secundárias de objetos" aquelas estruturas na forma de árvores ou hierarquias constituídas por uma combinação de seriações de relações assimétricas (entre objetos de níveis hierárquicos diferentes) e de seriações de relações simétricas (entre objetos de mesmo nível hierárquico):



Da distinção entre operações sobre classes e sobre relações, operações aditivas e multiplicativas e operações sobre estruturas primárias ou secundárias resulta a existência de oito agrupamentos das operações intraproposicionais. Quatro destes agrupamentos reunem operações de classes, outros quatro operações de relações. Dos quatro agrupamentos de classes dois são multiplicativos e dois são aditivos. Também dos quatro agrupamentos de relações dois são aditivos e dois são multiplicativos. Além disso, esses dois agrupamentos aditivos ou multiplicativos, tanto de classes quanto de relações podem ser primários ou secundários. Daí, ter-se:

a) Agrupamento aditivo primário das classes;

b) Agrupamento aditivo secundário das classes;

c) Agrupamento aditivo primário das relações;

d) Agrupamento aditivo secundário das relações;

e) Agrupamento multiplicativo primário das classes;

f) Agrupamento multiplicativo secundário das classes;

g) Agrupamento multiplicativo primário das relações;

h) Agrupamento multiplicativo secundário das relações.

Serão estudadas as quatro formas dos agrupamentos de classes (a, b, e, f) no capítulo 5 deste anexo. O estudo dos quatro agrupamentos de relações está fora do escopo deste trabalho mas pode ser encontrado em [PIA 76] ou [CAS 82].

A4 AS ESTRUTURAS DA LÓGICA INTRAPROPOSICIONAL

A4.1 Princípios da Classificação Sistemática

Considere-se, a princípio, uma estrutura de classificação semelhante à empregada pela biologia: a taxonomia. Tal estrutura deve obedecer aos seguintes princípios:

a) Toda classe encontra-se encaixada em outra, com excessão da classe total $\mathcal{U}$. Toda classe possui subclasses que se encaixam nela, com excessão das classes arbitradas como elementares.

Assim, se for escolhida como elementar uma classe $\mathbb{A}$, ela estará encaixada em $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ em $\mathbb{C}$, e assim por diante, até a classe $\mathcal{U}$, que contém todas as outras:

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{U}$$

b) As diversas classes pertencentes a um mesmo nível hierárquico são disjuntas.

Se $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$ são subclasses de $\mathbb{B}_1$, então:

$$\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = 0$$

c) Os objetos das diversas classes de um dado nível só podem ser caracterizados de modo dicotômico, isto é, através de funções proposicionais que são ou verdadeiras ou falsas para cada um deles.

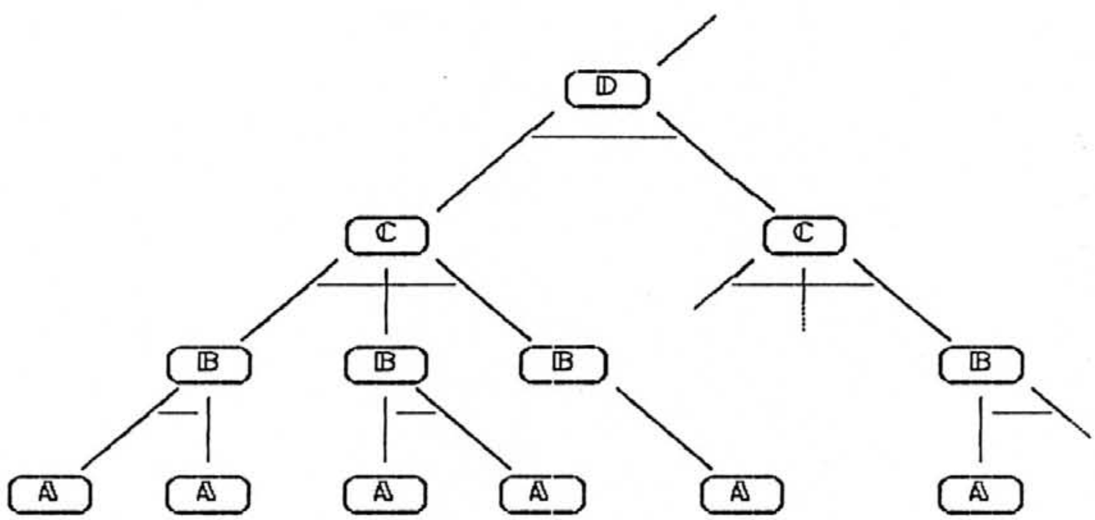
Assim, numa classe $\mathbb{B}$, os objetos da subclasse $\mathbb{A}_1$, onde $(\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{B})$, são caracterizados pela função proposicional $a_1(x)$, que não se aplica a nenhum objeto de outras subclasses de $\mathbb{B}$. Se $\mathbb{A}'_1$ é o nome que denota a coleção dos objetos dessas outras subclasses, então $\mathbb{B}$ estará dicotomicamente dividido em $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}'_1$:

$$\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}'_1 = \mathbb{B}$$

Se a classe $\mathbb{A}'_1$ não for vazia, ela compreenderá uma classe $\mathbb{A}_2$ de mesmo nível, determinada por uma função proposicional $a_2(x)$, que não se aplica aos objetos das outras subclasses de $\mathbb{B}$, reunidos em $\mathbb{A}'_2$ (incluindo aí os objetos de $\mathbb{A}_1$). $\mathbb{A}'_2$ por sua vez compreenderá outras classes de mesmo nível e assim por diante.

d) Toda constante individual da classe $\mathbb{A}$ pertence a todas as classes da seqüência $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, ... Ela pertence portanto a cada um dos níveis hierárquicos considerados.

e) A classificação estabelece uma ordem parcial entre as classes. Dá-se o nome de *classes primárias* às classes da seqüência $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \ldots$, e de *classes secundárias* às classes complementares $\mathbb{A}' = \mathbb{B} - \mathbb{A}$, $\mathbb{B}' = \mathbb{C} - \mathbb{B}$, $\mathbb{C}' = \mathbb{D} - \mathbb{C}$, ... Como cada classe secundária contém, se não for vazia, um certo número de classes primárias, a classificação toma a forma de uma pirâmide: um conjunto parcialmente ordenado:



A4.2 A Estrutura de Agrupamento

As álgebras das operações de classes e relações são definidas por estruturas chamadas *agrupamentos*. Num agrupamento, cada operação está associada a uma classe (ou relação) de uma dada estrutura de classe (ou de objetos), e uma operação associada a uma classe (ou relação) é chamada de operação da classe (ou da relação).

A seguir são mostradas características gerais dos agrupamentos de classes, para ilustração.

Um agrupamento de classes é um par (C, $\circ$), onde C é um conjunto de operações de classes e "$\circ$" é uma lei de composição interna de tais operações. As operações de C se subdividem em três grupos: +C, -C e 0. As operações positivas de +C, podem ser, por exemplo, +$\mathbb{A}$ (intuitivamente: acrescentar os elementos da classe $\mathbb{A}$ num "espaço de trabalho" qualquer). As operações negativas de -C, são por exemplo, -$\mathbb{A}$ (intuitivamente: retirar os elementos da classe $\mathbb{A}$ do "espaço de trabalho"). Existe também uma operação nula 0, a qual consiste em não acrescentar nem retirar nada.

Uma teoria de herança T sobre classes é representada, então, por uma seqüência de asserções da forma $(+X \circ +X' = +Y)$, onde cada asserção representa um encaixe imediato da classe X na classe Y. Uma regra de inferência $\vdash$ permite deduzir os teoremas de T. A relação $\vdash$ é definida pelas seguintes regras:

[G1] $(+X \circ +X' = +Y) \vdash (+X \circ +X' = +Y)$

[G2] $(+X \circ +X' = +Y) \vdash (-X \circ -X' = -Y)$

[G3] $(+X \circ +X' = +Y) \vdash (+X \circ +Y = +Y)$
ou $(+X \circ +X' = +Y) \vdash (+X' \circ +Y = +Y)$

[G4] $(+X \circ +X' = +Y) \vdash (+X = +Y \circ -X')$
ou $(+X \circ +X' = +Y) \vdash (+X' = +Y \circ -X)$

[G5] $\vdash (+X \circ +X = +X)$

[G6] $\vdash (+X \circ -X = 0)$

ou $\vdash (+X \circ 0 = +X)$

[G7] Se $\alpha = \beta$ e $\gamma = \delta$ então

$\vdash \alpha \circ \gamma = \beta \circ \delta$

[R.s.] Regra de substituição: qualquer operador pode ser substituído por uma composição que lhe seja equivalente.

Então, se $(C, \circ)$ é um agrupamento, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

a) C possui um neutro: 0, tal que

$$(\forall X \in C)\ X \circ 0 = X$$

b) A toda operação de C corresponde uma operação que desempenha o papel de inversa, ou seja, que a anula:

$$(\forall x \in +C)\ (\exists y \in -C)\ (x \circ y = 0)$$
$$(\forall x \in -C)\ (\exists y \in +C)\ (x \circ y = 0)$$
$$0 \circ 0 = 0$$

c) Como $\circ$ é uma lei de composição interna das operações de C, ela consiste numa função tal que dadas duas operações de C, resulta uma terceira operação de C, ou seja, C é fechado para $\circ$:

$$\circ : C \times C \longrightarrow C$$

d) Existe um princípio de contigüidade que estabelece que duas operações de C só são imediatamente componíveis se as correspondentes classes forem contíguas na estrutura de encaixes considerada. As composições imediatas só podem ser obtidas entre termos contíguos, isto é, termos que pertencem a um mesmo encaixe imediato, o qual é um axioma da teoria. Assim, se a teoria contém:

[Ax. 1] $(+\mathbb{A} \circ +\mathbb{A}' = +\mathbb{B})$
[Ax. 2] $(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{B}' = +\mathbb{C})$

e mais nada, as únicas composições imediatas com $+\mathbb{B}$ são:

[Teo.1]	$(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{A}) = +\mathbb{B}$	(G3,Ax.1)
[Teo.2]	$(+\mathbb{B} \circ -\mathbb{A}) = +\mathbb{A}'$	(G4,Ax.1)
[Teo.3]	$(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{A}') = +\mathbb{B}$	(G3,Ax.1)
[Teo.4]	$(+\mathbb{B} \circ -\mathbb{A}') = +\mathbb{A}$	(G4,Ax.1)
[Teo.5]	$(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{B}') = +\mathbb{C}$	(G1,Ax.2)
[Teo.6]	$(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{C}) = +\mathbb{C}$	(G3,Ax.2)
[Teo.7]	$(+\mathbb{B} \circ -\mathbb{C}) = -\mathbb{B}'$	(G4,Ax.2)
[Teo.8]	$(+\mathbb{B} \circ 0) = +\mathbb{B}$	(G6)
[Teo.9]	$(+\mathbb{B} \circ -\mathbb{B}) = 0$	(G6)
[Teo.10]	$(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{B}) = +\mathbb{B}$	(G5)

e as únicas composições imediatas com $+\mathbb{A}$ são:

[Teo.11]	$(+\mathbb{A} \circ +\mathbb{A}') = +\mathbb{B}$	(G1,Ax.1)
[Teo.12]	$(+\mathbb{A} \circ +\mathbb{B}) = +\mathbb{B}$	(G3,Ax.1)
[Teo.13]	$(+\mathbb{A} \circ -\mathbb{B}) = -\mathbb{A}'$	(G4,Ax.1)
[Teo.14]	$(+\mathbb{A} \circ -\mathbb{A}) = 0$	(G6)
[Teo.15]	$(+\mathbb{A} \circ 0) = +\mathbb{A}$	(G6)
[Teo.16]	$(+\mathbb{A} \circ +\mathbb{A}) = +\mathbb{A}$	(G5)

Já as composições mediatas são obtidas por sucessivas aplicações de composições imediatas, por exemplo, para compor $+\mathbb{A}$ com $+\mathbb{C}$, é necessário compor $+\mathbb{A}$ com $+\mathbb{B}$ e o resultado ($+\mathbb{B}$ pelo teorema 12) com $+\mathbb{C}$. Como é necessário utilizar a composição com $+\mathbb{B}$ como "meio" para obter a composição de $+\mathbb{A}$ com $+\mathbb{C}$, a composição de $+\mathbb{A}$ com $+\mathbb{C}$ é chamada de "mediata", e é denotada por:

[Teo.17] $((+\mathbb{A} \circ +\mathbb{B}) \circ +\mathbb{C}) = +\mathbb{C}$

Uma prova para o teorema 17 é a seguinte:

(1) $+\mathbb{C} = +\mathbb{C}$	reflexividade de =
(2) $(+\mathbb{B} \circ +\mathbb{C}) = +\mathbb{C}$	R.s.(Teo.6,(1))
(3) $((+\mathbb{A} \circ +\mathbb{B}) \circ +\mathbb{C}) = +\mathbb{C}$	R.s.(Teo.12,(2))

A noção de contigüidade dos encaixes vem da classificação sistemática empregada pela biologia. Em biologia, os seres vivos são agrupados segundo suas "espécies" (nível $\mathbb{A}$); as espécies $\mathbb{A}$ são agrupadas segundo seus "gêneros" (nível $\mathbb{B}$); os gêneros $\mathbb{B}$ segundo as "famílias" (nível $\mathbb{C}$); as famílias $\mathbb{C}$ segundo "ordens" (nível $\mathbb{D}$); as ordens $\mathbb{D}$ segundo as "classes" propriamente ditas (nível $\mathbb{E}$); as classes $\mathbb{E}$ segundo os "filos" (nível $\mathbb{F}$); e os filos $\mathbb{F}$ segundo os "reinos" (nível $\mathbb{G}$). Assim, uma espécie $\mathbb{A}_1$ só pode estar diretamente encaixada em um gênero $\mathbb{B}_1$. E $\mathbb{A}_1$ só pode estar encaixada em uma família $\mathbb{C}_1$ indiretamente, através do encaixe de $\mathbb{A}_1$ no gênero $\mathbb{B}_1$ e do gênero $\mathbb{B}_1$ na família $\mathbb{C}_1$. A ausência da noção desses níveis (espécie, gênero, família, etc) faz com que não exista também uma noção clara de contigüidade.

e) Certas composições representam, em relação à outras, o papel de *neutras especiais*. Por exemplo, se $X \circ Y = Y$, então X faz o papel de elemento neutro especial em relação a Y. A diferença entre as neutras especiais e a neutra geral O é que a neutra geral resulta da composição de uma operação por sua inversa, enquanto que as neutras especiais não são resultado deste tipo de composição. Há duas espécies de neutras especiais: operações tautológicas e operações de reabsorção. Assim, toda operação de C composta com ela mesma reduz-se tautologicamente a ela mesma:

$$(\forall X \in C)\ (X \circ X = X)$$

e toda operação composta com outra operação referente a uma classe imediatamente mais geral que a dela, reduz-se a esta operação da classe mais geral. Por exemplo, se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, então

$$+\mathbb{A} \circ +\mathbb{B} = +\mathbb{B}$$

f) A associatividade das composições é restrita àquelas em que os termos tenham sinais iguais, por exemplo:

$$(+X\circ+Y)\circ+Z = +X\circ(+Y\circ+Z)$$
$$(-X\circ-Y)\circ-Z = -X\circ(-Y\circ-Z)$$

Pode haver associatividade em composições de operações com sinais diferentes. Mas neste caso, não pode haver operações desempenhando o papel de neutras especiais nestas composições ou se chegará a conclusões absurdas. Por exemplo, se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ então não vale:

$$(+\mathbb{A}\circ+\mathbb{B})\circ-\mathbb{B} = +\mathbb{A}\circ(+\mathbb{B}\circ-\mathbb{B})$$

porque:

$$(+\mathbb{A}\circ+\mathbb{B})\circ-\mathbb{B} = (+\mathbb{B})\circ-\mathbb{B} = 0$$

e:

$$+\mathbb{A}\circ(+\mathbb{B}\circ-\mathbb{B}) = +\mathbb{A}\circ(0) = +\mathbb{A}$$

g) A comutatividade da composição "$\circ$" dependerá do tipo de agrupamento sobre o qual se esteja operando. Alguns admitem a comutatividade e outros não, como será visto mais adiante.

A5 OS AGRUPAMENTOS ADITIVOS DE CLASSES

O estudo dos agrupamentos aditivos é dividido segundo a natureza dos termos operados. Serão vistos aqui apenas os dois agrupamentos aditivos de classes. Será examinado primeiramente o agrupamento aditivo primário das classes, em 5.1. E, em seguida, o agrupamento aditivo secundário das classes, em 5.2.

A5.1 Agrupamento Aditivo Primário das Classes ou Agrupamento I: adição das classes

O agrupamento aditivo primário das classes trata das operações de adição e subtração das classes primárias e secundárias de estruturas de classes com a forma:

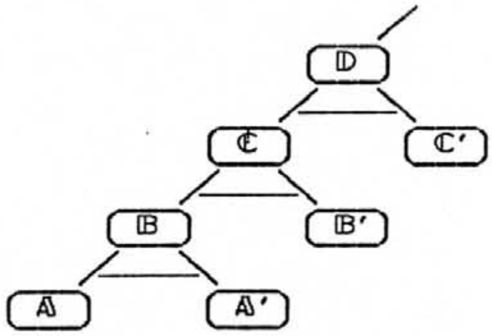


Fig. A5.1: Forma Geral da Taxonomia no Agrupamento I.

A notação das equações será simplificada pelo emprego da seguinte abreviação:

$$+X \circ +X' = +Y \quad \text{por} \quad X + X' = Y$$
$$+Y \circ -X = +X' \quad \text{por} \quad Y - X = X'$$

Doravante, as operações do conjunto +C serão chamadas de *operações diretas* e as operações de −C de *operações inversas*. Além disso, o elemento 0 será chamado de *operação idêntica* *geral*.

As operações deste agrupamento são então as seguintes:

1. Operação Direta

A operação direta é a adição de qualquer classe da seqüência da figura 1.

Pode-se chamar de operação direta às operações $+\mathbb{A}$ (acrescentar os elementos de $\mathbb{A}$), $+\mathbb{A}'$ (acrescentar os elementos de $\mathbb{A}'$, $+\mathbb{B}$ (acrescentar os elementos de $\mathbb{B}$), etc.

A composição de operações diretas resulta numa operação direta. Por exemplo:

$\mathbb{A} + \mathbb{A}' = \mathbb{B}$
$\mathbb{A} + \mathbb{A} = \mathbb{A}$ (tautologia)
$\mathbb{B} + \mathbb{C} = \mathbb{C}$ (reabsorção)
$\mathbb{B}' + 0 = \mathbb{B}'$ (idêntica geral)

O princípio da contigüidade estabelece que só se pode compor operações referentes à classes contíguas, isto é, uma operação, seja $+\mathbb{C}$, só pode ser composta com:

a) Sua complementar na superclasse imediata: $+\mathbb{C}'$

b) Sua superclasse imediata: $+\mathbb{D}$

c) Suas sub-classes imediatas: $+\mathbb{B}$ e $+ \mathbb{B}'$

De acordo com esse princípio, não se pode compor $+\mathbb{C}$ com $+\mathbb{A}$ ou $+ \mathbb{A}'$ nem com $\mathbb{D}'$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$, etc. A composição de $+\mathbb{C}$ com $+\mathbb{A}$ deve passar obrigatoriamente por $+\mathbb{B}$, ou seja, deve-se fazer:

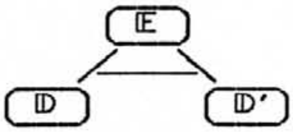
$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} \quad = \quad (\mathbb{B}) + \mathbb{C} \quad = \quad \mathbb{C}$$

Isto é assim porque estas operações refletem a estrutura lógica de encaixe presente na taxonomia. Elas são operações de dedução sobre a estrutura das classes.

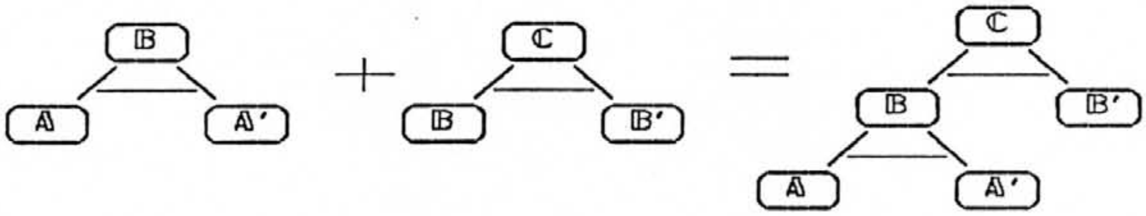
Por extensão, serão chamadas de operações diretas as operações de construção, ou seja a adição ou a remoção de um encaixe da seqüência. Por exemplo:

$$+ (\mathbb{D} + \mathbb{D}' = \mathbb{E})$$

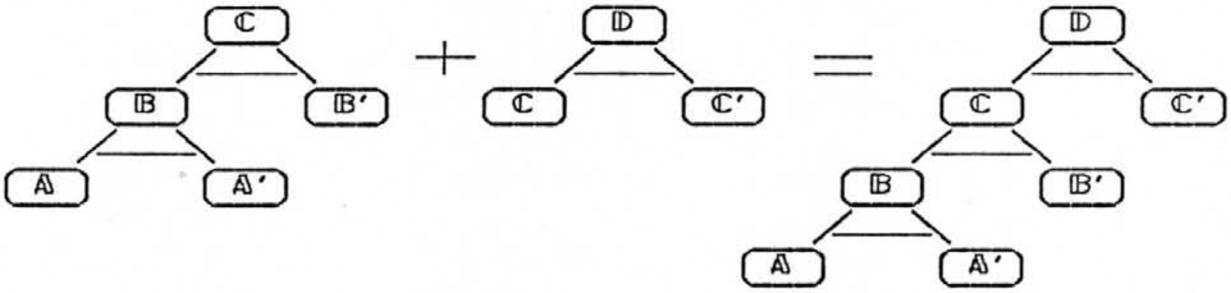
Tal expressão significa adicionar à seqüência de encaixes da figura 1 o encaixe:



Uma seqüência de operações diretas constitui então um sistema de classificação. Por exemplo:



e:



O princípio de contigüidade para as operações de construção é que vai definir a contigüidade das operações de dedução. Piaget utiliza como convenção que uma classe de tipo $\mathbb{A}$

só pode ser encaixada em uma classe de tipo $\mathbb{B}$, uma classe de tipo $\mathbb{B}$ em uma classe de tipo $\mathbb{C}$, e assim por diante.

2. Operação Inversa

A inversa da operação de dedução é a subtração de uma classe. Subtrações de classes são as operações $-\mathbb{A}$, $-\mathbb{A}'$, $-\mathbb{B}$, etc. A subtração de classes também deve obedecer ao princípio da contigüidade:

$$\mathbb{B} - \mathbb{A} = \mathbb{A}'$$
$$\mathbb{B} - \mathbb{A}' = \mathbb{A}$$
$$\mathbb{C} - \mathbb{B} = \mathbb{B}'$$

A subtração de uma classe dela mesma gera a classe vazia:

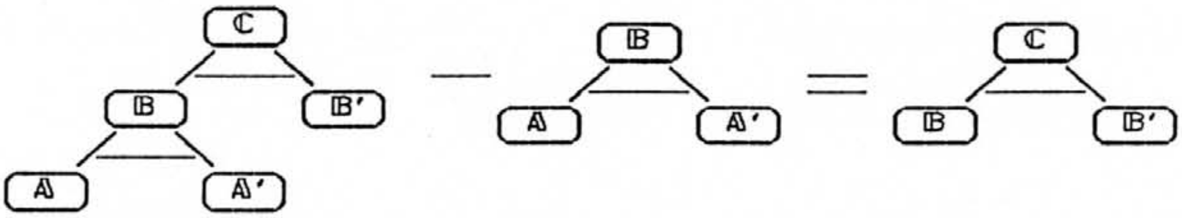
$$\mathbb{A} - \mathbb{A} = 0$$
$$\mathbb{A}' - \mathbb{A}' = 0$$
$$\mathbb{B} - \mathbb{B} = 0$$

O sentido da composição de duas operações inversas consiste em determinar a operação inversa mais geral que engloba ambas:

$$- \mathbb{A} - \mathbb{A}' = - \mathbb{B}$$
$$-\mathbb{A}' - \mathbb{B} = - \mathbb{B}$$

Observa-se que $\mathbb{C} - \mathbb{A}$ não constitui composição deste agrupamento, pois não respeita o fechamento da estrutura de classes para a composição "$\circ$": $\mathbb{C} - \mathbb{A}$ determina uma união de classes não-contíguas: $\mathbb{A}' + \mathbb{B}'$, que não é classe da estrutura de encaixes.

As operações de construção inversas são as remoções de encaixes, por exemplo:



3. Operação Idêntica Geral

A operação idêntica geral é representada pela classe vazia: 0. Essa operação significa não acrescentar nem subtrair nada. Ela obedece às propriedades do elemento neutro:

$$\mathbb{A} + 0 = \mathbb{A}$$
$$\mathbb{A} - \mathbb{A} = 0$$

A operação idêntica geral é, então, imediatamente componível com qualquer operação de classe.

4. Operações Idênticas Especiais

As operações idênticas especiais são a tautologia e a reabsorção. A tautologia é a composição de uma operação com ela mesma:

$$\mathbb{A} + \mathbb{A} = \mathbb{A}$$
$$-\mathbb{A} - \mathbb{A} = -\mathbb{A}$$
$$\mathbb{A}' + \mathbb{A}' = \mathbb{A}'$$

A reabsorção ocorre quando compomos uma classe com sua superclasse ou com suas subclasses. Neste caso, a classe de menor extensão faz o papel de idêntica especial. Por exemplo:

$$\mathbb{B} + \mathbb{A} = \mathbb{B}$$
$$\mathbb{A}' + \mathbb{B} = \mathbb{B}$$
$$-\mathbb{C} - \mathbb{B} = -\mathbb{C}$$

Mas se os sinais das operações compostas forem diferentes, deixamos de ter reabsorção e tautologia:

$$\mathbb{B} - \mathbb{A} = \mathbb{A}'$$
$$-\mathbb{B} + \mathbb{A} = -\mathbb{A}'$$
$$-\mathbb{C} + \mathbb{C} = 0$$

5. Associatividade

A associatividade obedece às condições dadas como regra geral na seção A4.2. Ela vale nas composições de mesmos sinais, por exemplo:

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{A}' \quad = \quad \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{A}')$$

De fato, $(\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{A} = (\mathbb{B})+\mathbb{A} = \mathbb{B}$ e $\mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{A}') = \mathbb{A}+(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$. Mas a associatividade não se verifica necessariamente nas composições onde ocorrem idênticas especiais envolvendo operações de sinais contrários, como por exemplo:

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) - \mathbb{A} \quad \neq \quad \mathbb{A} + (\mathbb{B} - \mathbb{A})$$

porque $(\mathbb{A}+\mathbb{B})-\mathbb{A} = (\mathbb{B})-\mathbb{A} = \mathbb{A}'$ e $\mathbb{A}+(\mathbb{B}-\mathbb{A}) = \mathbb{A}+(\mathbb{A}') = \mathbb{B}$ e $\mathbb{A}' \neq \mathbb{B}$.

Serão chamadas de *classes elementares* as classes que não são divisíveis, isto é, que não contém outras classes encaixadas. Na figura 1, as classes elementares são $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$, $\mathbb{B}'$, $\mathbb{C}'$, etc.

Se as classes elementares de um agrupamento forem singulares, isto é, se cada uma contiver exatamente um elemento, as composições deste agrupamento constituirão enumerações de indivíduos, onde uma enumeração consiste na designação de uma coleção de indivíduos através de suas qualidades próprias, as quais distinguem cada um deles de todos os demais.

A5.2 Agrupamento Aditivo Secundário das Classes ou Agrupamento II: as vicariâncias

Enquanto o agrupamento primário considera apenas uma divisão dicotômica em cada classe não elementar, o agrupamento aditivo secundário das classes ou agrupamento das vicariâncias, como o chamou Piaget, considera as múltiplas dicotomias que podem existir em cada classe.

Por exemplo, se $\mathbb{B}_1$ se divide em $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, ..., cada classe de nível $\mathbb{A}$ estabelece uma dicotomia em $\mathbb{B}_1$, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}'_1 &= \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_2 &= \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}'_3 &= \mathbb{B}_1 \\ \text{etc} \end{aligned}$$

Essas equações confirmam que cada classe secundária de nível $\mathbb{A}$, ou seja, $\mathbb{A}'_1$, $\mathbb{A}'_2$, etc, contém todas as classes primárias de nível $\mathbb{A}$ menos aquela da qual ela própria é complementar:

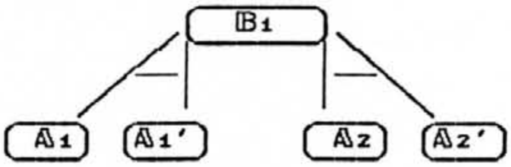
$$\begin{aligned} \mathbb{A}'_1 &= \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 + \ldots \\ \mathbb{A}'_2 &= \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 + \ldots \\ \mathbb{A}'_3 &= \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_4 + \ldots \end{aligned}$$

A equivalência entre essas dicotomias será chamada de *vicariância* . Uma vicariância será representada por:

$$\mathbb{B}_1 : \quad \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}'_3 = \ldots$$

A vicariância pode ser vista também como uma operação que consiste em transformar termos $\mathbb{A}_i + \mathbb{A}'_i$ em $\mathbb{A}_j + \mathbb{A}'_j$, preservando a classe superior $\mathbb{B}$.

Pode-se representar a vicariância através das árvores de herança "e/ou". Nessas árvores, dois arcos conectados constituem uma dicotomia e arcos não conectados entre si pertencem a dicotomias diversas. Por exemplo:



1. Operação Direta

A operação direta de dedução deste agrupamento consiste na adição de uma classe vicariante $+\mathbb{A}_1$, $+\mathbb{A}'_1$, $+\mathbb{B}_2$, etc. A operação direta de construção da taxonomia consiste como no agrupamento anterior na adição dos próprios encaixes, porém aqui serão encaixes vicariantes:

$$+ (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_2)$$

A adição deste encaixe vicariante consiste em estabelecer a equivalência de $\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1$ e $\mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2$ em $\mathbb{B}_1$.

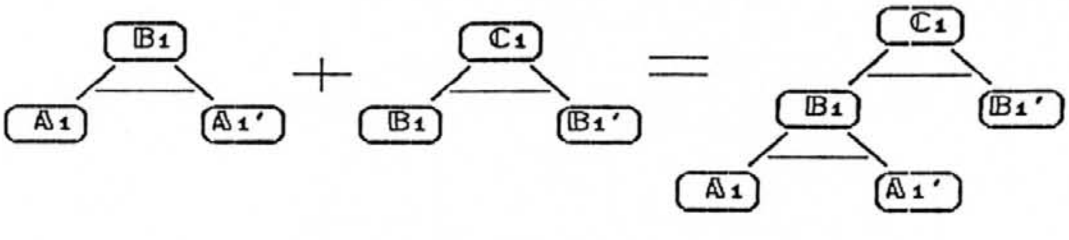
As composições de vicariâncias são feitas membro a membro nas equações. Sejam, por exemplo, $\mathbb{B}_1 : \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}'_2$ e $\mathbb{C}_1 : \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}'_1 = \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}'_2$. Então a composição de vicariâncias:

$$\mathbb{C}_1 : \underbrace{(\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2)}_{\text{vicariancia 1}} + \underbrace{(\mathbb{B}_1+\mathbb{B}'_1 = \mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2)}_{\text{vicariancia 2}}$$

deve ser calculada pela composição das vicariâncias 1 e 2, o que se dá da seguinte maneira: primeiro somam-se os lados esquerdos das duas vicariâncias. O resultado constituirá o lado esquerdo da equação que define a vicariância resultante:

$$(\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1) + (\mathbb{B}_1+\mathbb{B}'_1) = (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1+\mathbb{B}'_1)$$

Graficamente essa composição se dá como segue:

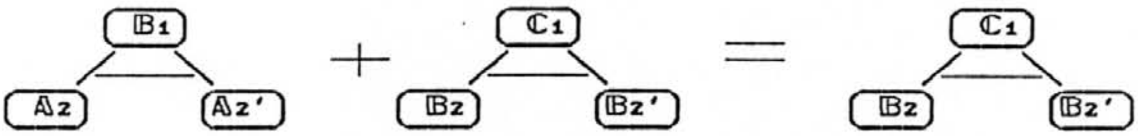


Vê-se que esse passo corresponde a estabelecer uma dicotomia em $\mathbb{B}_1$.

A seguir, somam-se os lados direitos da mesma maneira:

$$(\mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2) + (\mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2) = (\mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2)$$

Em termos gráficos tem-se:

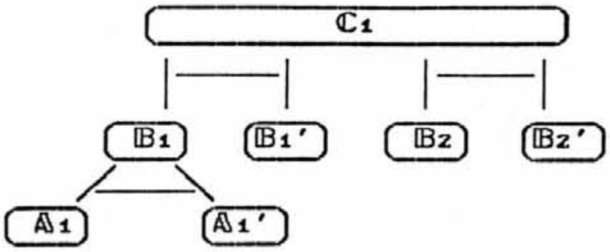


Observa-se que a classe $\mathbb{B}_1$ se reabsorve em $\mathbb{B}'_2$, a qual é uma classe elementar: as classes elementares não mostram explicitamente suas divisões dicotômicas, por isso o encaixe $\mathbb{B}_1 = \mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2$ é simplesmente reabsorvido em $\mathbb{B}'_2$ já que $\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}'_2$.

Assim, a vicariância resultante é

$$\mathbb{C}_1 : (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1+\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2)$$

e a representação gráfica da mesma é:



A característica da operação $\mathbb{B}_1+\mathbb{B}'_2 = \mathbb{B}'_2$, de reabsorver $\mathbb{B}_1$ em $\mathbb{B}'_2$ é que diferencia este agrupamento do antecedente, já que no agrupamento anterior uma classe primária (seja $\mathbb{B}_1$) somada a uma outra classe de mesmo nível (seja $\mathbb{B}_2$) sempre resulta numa classe primária de nível superior ($\mathbb{C}$), porque necessariamente se tem $\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}'_1$, já que somente uma dicotomia é considerada.

Outra diferença encontrada é que no agrupamento anterior a soma de duas classes secundárias de mesmo nível só pode constituir uma tautologia. Por exemplo, $\mathbb{A}'+\mathbb{A}' = \mathbb{A}'$, $\mathbb{B}'+\mathbb{B}' = \mathbb{B}'$, etc. Já neste agrupamento das vicariâncias a soma de duas classes secundárias de mesmo nível pode resultar numa classe primária de nível superior. Por exemplo, $\mathbb{A}'_1 + \mathbb{A}'_2 = \mathbb{B}_1$.

2. Operação Inversa

A inversa da operação de dedução é a subtração de uma classe vicariante. A operação inversa de construção é a subtração do encaixe vicariante. Se uma vicariância for subtraída dela mesma, o resultado será a operação idêntica geral.

A extensão de uma vicariância corresponde à extensão da classe em que ela se realiza. Se uma vicariância menos extensa for subtraída a uma mais extensa, mantém-se os encaixes de nível superior e eliminam-se os inferiores. Por exemplo, com $\mathbb{C}_1 : (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1+\mathbb{B}'_1 = \mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2)$ e $\mathbb{B}_1 : (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2)$, se tem:

$$\mathbb{C}_1 : (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1+\mathbb{B}'_1=\mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2) - (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1=\mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2) = (\mathbb{B}_1+\mathbb{B}'_1=\mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2)$$

Na verdade, a operação $(\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1+\mathbb{B}'_1 = \mathbb{B}_2+\mathbb{B}_2{}') - (\mathbb{A}_1+\mathbb{A}'_1 = \mathbb{A}_2+\mathbb{A}'_2)$ resulta numa equação intermediária: $(\mathbb{B}'_1 = \mathbb{B}_2+\mathbb{B}'_2-\mathbb{B}_1)$ mas por adição de $\mathbb{B}_1$ em ambos os membros da equação obtém-se novamente uma vicariância, a qual constitui o resultado final da composição.

3. Operação Idêntica Geral

A operação idêntica geral de vicariâncias é aquela que não modifica uma vicariância quando composta com esta. Essa operação é denotada por:

$$0 : (0+0 = 0+0)$$

4. Operações Idênticas Especiais

São a tautologia e a reabsorção, isto é, a composição de uma vicariância com ela mesma ou com uma vicariância de nível superior da qual ela faça parte, de acordo com o princípio de contigüidade já comentado.

5. Associatividade

A associatividade segue a regra geral, como no agrupamento anterior.

A6 OS AGRUPAMENTOS MULTIPLICATIVOS DE CLASSES

Neste capítulo serão estudados os dois agrupamentos multiplicativos de classes. Será visto primeiramente o agrupamento secundário em A6.1, e a seguir o agrupamento primário em A6.2.

A6.1 Agrupamento Multiplicativo Secundário das Classes ou Agrupamento III: multiplicação co-unívoca das classes

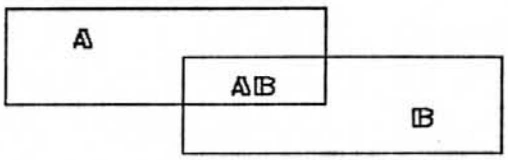
Como foi visto anteriormente, a multiplicação de duas classes corresponde à operação de intersecção, ou seja, a encontrar a maior das classes incluída simultaneamente em ambas.

Em outras palavras, a multiplicação de $\mathbb{A}$ por $\mathbb{B}$ consiste em determinar a parte comum a essas duas classes.

O produto $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ determina a classe $\mathbb{A}\mathbb{B}$ à qual pertencem todos os indivíduos que pertencem a $\mathbb{A}$ e a $\mathbb{B}$ ao mesmo tempo:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$$

Se as classes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ não são disjuntas, então $\mathbb{A}\mathbb{B}$ não é uma classe vazia:



Além disso, $\mathbb{A}\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ e $\mathbb{A}\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$.

No caso de a classe $\mathbb{A}$ estar completamente incluída em $\mathbb{B}$, sem que a recíproca seja verdadeira, o produto $\mathbb{A}\mathbb{B}$ será equivalente à extensão da classe $\mathbb{A}$. Porém existe uma diferença semântica entre as classes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}\mathbb{B}$: enquanto $\mathbb{A}$ significa "o conjunto dos elementos caracterizados pelo predicado *a*", $\mathbb{A}\mathbb{B}$ significa "o conjunto dos elementos caracterizados pelos predicados *a* e *b* ao mesmo tempo". Em outras palavras, enquanto $\mathbb{A}$ denota uma classe isolada, $\mathbb{A}\mathbb{B}$ denota esta mesma classe $\mathbb{A}$ mas relativamente a seu encaixe em $\mathbb{B}$.

Por outro lado, se duas classes $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ estiverem totalmente incluidas uma na outra, seu produto $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$ equivale em extensão a qualquer uma das duas, ou seja, são os mesmos elementos:

$$\text{Se} \quad \mathbb{B}_1 \equiv_{e} \mathbb{B}_2 \quad \text{então} \quad \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 \equiv_{e} \mathbb{B}_1 \equiv_{e} \mathbb{B}_2$$

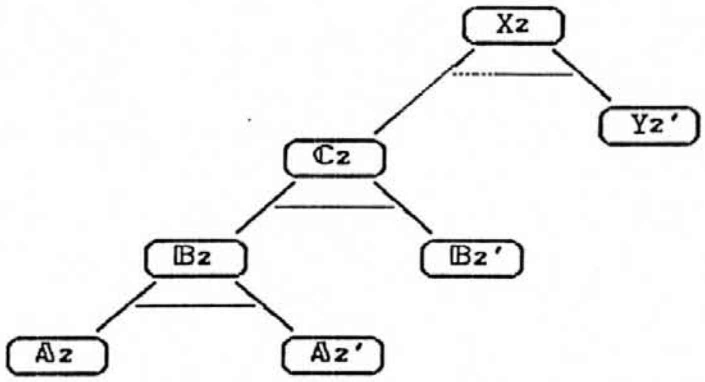
Mas a identidade dos elementos contidos em $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ não acarreta a identidade de suas subclasses, pois $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ podem dividir os mesmos elementos segundo duas espécies diferentes de encaixes. Por exemplo, se $\mathbb{B}_1$ é a classe dos "seres humanos" e $\mathbb{B}_2$ é a classe dos "animais racionais", então $\mathbb{B}_1$ pode se dividir em $\mathbb{A}_1$, "homens" e $\mathbb{A}_1'$, "mulheres", e $\mathbb{B}_2$ pode se dividir em $\mathbb{A}_2$, "crianças" e $\mathbb{A}_2'$, "adultos". Ora, $\mathbb{A}_1$ não é igual nem a $\mathbb{A}_2$ nem a $\mathbb{A}_2'$ e $\mathbb{A}_1'$ também não é igual nem a $\mathbb{A}_2$ nem a $\mathbb{A}_2'$. Portanto só existe equivalência multiplicativa entre $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$. Mais adiante, em A6.2, serão vistas as diferenças fundamentais entre a equivalência multiplicativa e a equivalência aditiva, vista anteriormente.

A multiplicação de $\mathbb{B}_1$ ($=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_1'$) por $\mathbb{B}_2$ ($=\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_2'$) consiste em justapor os encaixes existentes entre essas classes. Assim, a classe resultante $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$ ($=\mathbb{B}_1\times\mathbb{B}_2$) terá como subclasses as combinações possíveis entre as subclasses de $\mathbb{B}_1$ e de $\mathbb{B}_2$, ou seja:

$$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2' + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2'$$

A operação acima será chamada de "multiplicação biunívoca das classes". Ela será a operação fundamental do agrupamento primário das classes, que será visto em 6.2. Por ora, será considerada uma simplificação desta operação multiplicativa, baseada numa multiplicação de um a muitos, e portanto co-unívoca.

A multiplicação co-unívoca das classes consiste em tomar uma classe X_1 da seqüência de classes $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{C}_1 \subset \ldots$, sem levar em conta seus possíveis encaixes, e uma classe X_2, compreendida em outra seqüência $\mathbb{A}_2 \subset \mathbb{B}_2 \subset \mathbb{C}_2 \subset \ldots$, levando em conta seus encaixes, isto é, considerando as classes secundárias da estrutura:



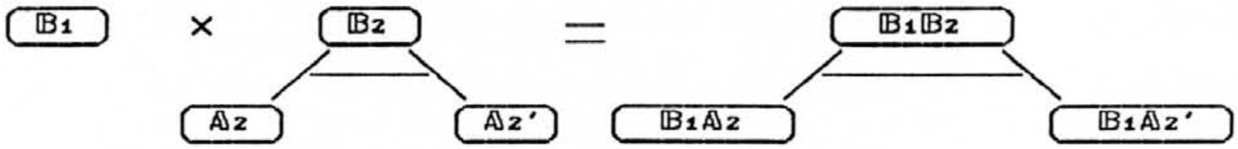
Esta estrutura determina que $X_2 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_2' + \mathbb{B}_2' + \ldots + Y_2$. Então a multiplicação co-unívoca de X_1 e X_2 determinará as partes comuns de X_1 e X_2, ou seja, as partes comuns entre X_1 e todas as classes elementares da seqüência $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_2'$, $\mathbb{B}_2'$, ..., X_2, que por sua união constituem os encaixes de K_2. Por exemplo:

$$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 \quad \text{onde } \mathbb{A}_1 \equiv_{\bullet} \mathbb{A}_2 \equiv_{\bullet} \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2$$

Outro exemplo é:

$$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{B}_1\mathbb{A}_2' = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 \quad \text{onde } \mathbb{B}_1 \equiv_{\bullet} \mathbb{B}_2 \equiv_{\bullet} \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$$

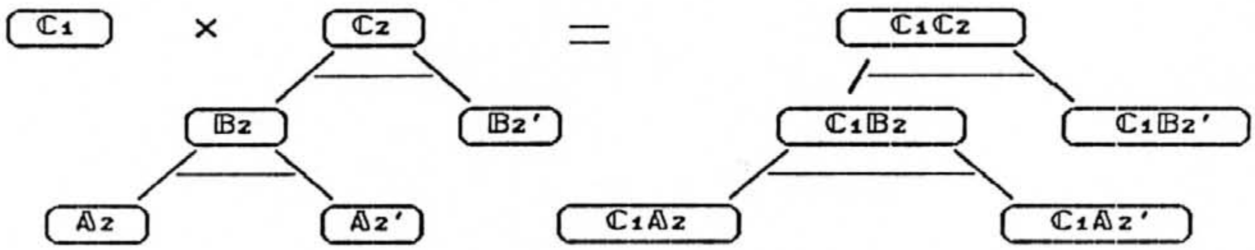
Esse último exemplo pode se mostrado da seguinte maneira com árvores:



Como um terceiro exemplo, tem-se:

$$\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{C}_1\mathbb{A}_2' + \mathbb{C}_1\mathbb{B}_2' = \mathbb{C}_1\mathbb{B}_2$$

Em termos de árvores esse exemplo fica como:



Essa operação determina que uma classe qualquer X_1 só pode conter classes de nível igual ou inferior a ela mesma.

1. Operação Direta

A composição das operações diretas é a multiplicação co-unívoca das classes, ou seja:

$$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2$$
$$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{B}_1\mathbb{A}_2' = \mathbb{B}_1(\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_2') = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$$
$$\mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{C}_1\mathbb{A}_2' + \mathbb{C}_1\mathbb{B}_2' = \mathbb{C}_1(\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_2'+\mathbb{B}_2') = \mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$$

A operação direta consiste então em compor uma classe X_1 com as diversas classes que ela pode conter segundo o critério de divisão de X_2.

2. Operação Inversa

A operação inversa deste agrupamento será chamada de "divisão de classes" (:). Seu significado é a abstração dos encaixes estabelecidos. Por exemplo:

$$\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 : \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2 \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 : \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1$$

As expressões acima significam que o produto $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$, abstração feita de $\mathbb{A}_1$, equivale a $\mathbb{A}_2$, e o produto $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$, abstração feita de $\mathbb{A}_2$, equivale a $\mathbb{A}_1$.

3. Operação Idêntica Geral

A idêntica geral não é a classe vazia 0 como nos agrupamentos aditivos, mas a classe total do sistema: $\mathcal{U}$. Isto porque a abstração ou divisão lógica consiste em eliminar um encaixe. Assim, se $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{AB}$, $\mathbb{AB} \times \mathbb{C} = \mathbb{ABC}$, $\mathbb{ABC} \times \mathbb{D} = \mathbb{ABCD}$, etc, a inversa é:

$$\mathbb{AB} : \mathbb{A} = \mathbb{B}$$
$$\mathbb{ABC} : \mathbb{AB} = \mathbb{C}$$
$$\mathbb{ABCD} : \mathbb{ABC} = \mathbb{D}$$
$$\ldots$$

ou:

$$\mathbb{AB} : \mathbb{B} = \mathbb{A}$$
$$\mathbb{ABC} : \mathbb{C} = \mathbb{AB}$$
$$\mathbb{ABCD} : \mathbb{D} = \mathbb{ABC}$$
$$\ldots$$

Ora, mesmo se for tomada uma classe $\mathbb{A}$, ou outra qualquer, dissociada de todos os seus encaixes possíveis em $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, etc, não se pode dissociá-la de seu encaixe na classe total $\mathcal{U}$, pois qualquer classe está necessariamente contida em $\mathcal{U}$. Portanto:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathcal{U}$$
$$\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathcal{U}$$
$$\ldots$$

Sabe-se que a idêntica geral reulta da composição da operação direta por sua inversa e portanto de:

(*) $$\mathbb{A} : \mathbb{A}$$

Como toda classe equivale a seu próprio encaixe em $\mathcal{U}$, substitu-se o $\mathbb{A}$ a direita da expressão (*) por seu equivalente $\mathbb{A}\mathcal{U}$. Daí, (*) se transforma em:

$$\mathbb{A}\mathcal{U} : \mathbb{A}$$

Pela definição da operação de abstração tem-se então que:

$$\mathbb{A}\mathcal{U} : \mathbb{A} = \mathcal{U} \quad \text{portanto} \quad \mathbb{A} : \mathbb{A} = \mathcal{U}$$

Por outro lado, tem-se

$$\mathbb{A}\mathcal{U} : \mathcal{U} = \mathbb{A}$$

Mas como $\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathcal{U}$ volta-se a ter:

$$\mathbb{A}\mathcal{U} : \mathcal{U} = \mathbb{A}\mathcal{U}$$

E ainda:

$$\mathcal{U} : \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

Isso significa que a classe $\mathcal{U}$ desempenha, neste agrupamento, o mesmo papel da unidade (1) no grupo multiplicativo dos inteiros, por exemplo:

$$4 \times 1 = 4$$
$$4 : 1 = 4$$
$$1 : 1 = 1$$
$$1 \times 1 = 1$$

4. Idênticas Especiais

Aqui existe novamente a tautologia como nos agrupamentos aditivos:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$$
$$\mathbb{B} \times \mathbb{B} = \mathbb{B}$$

Mas ao invés da reabsorção da parte no todo, tem-se uma operação que equivale à *absorção* do todo na parte. De fato, se $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, então $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}$. Portanto:

$$\mathbb{B}_1\mathbb{A}_2 \times \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{A}_2$$

5. Associatividade

A associatividade é semelhante à dos agrupamentos aditivos: geral nas seqüências de operações todas diretas ($\times$) ou todas inversas ($:$), e posta a prova nas seqüências mistas pela presença de idênticas especiais. Um exemplo de composição de operações inversas é:

$$(:\mathbb{A}) : \mathbb{B} \quad = \quad (:\mathbb{A}\mathbb{B})$$

Atribui-se a ela o sentido seguinte: "abstrair a classe $\mathbb{A}$ composto com abstrair a classe $\mathbb{B}$ equivale a abstrair todo o encaixe $\mathbb{A}\mathbb{B}$".

$$4 \times 1 = 4$$
$$4 : 1 = 4$$
$$1 : 1 = 1$$
$$1 \times 1 = 1$$

4. Idênticas Especiais

Aqui existe novamente a tautologia como nos agrupamentos aditivos:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$$
$$\mathbb{B} \times \mathbb{B} = \mathbb{B}$$

Mas ao invés da reabsorção da parte no todo, tem-se uma operação que equivale à *absorção* do todo na parte. De fato, se $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, então $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}$. Portanto:

$$\mathbb{B}_1\mathbb{A}_2 \times \mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1\mathbb{A}_2$$

5. Associatividade

A associatividade é semelhante à dos agrupamentos aditivos: geral nas seqüências de operações todas diretas ($\times$) ou todas inversas (:), e posta a prova nas seqüências mistas pela presença de idênticas especiais. Um exemplo de composição de operações inversas é:

$$(:\mathbb{A}) : \mathbb{B} \quad = \quad (:\mathbb{A}\mathbb{B})$$

Atribui-se a ela o sentido seguinte: "abstrair a classe $\mathbb{A}$ composto com abstrair a classe $\mathbb{B}$ equivale a abstrair todo o encaixe $\mathbb{A}\mathbb{B}$".

$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2$

$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2' + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2'$

$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_3 = \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\mathbb{A}_3' + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2'\mathbb{A}_3 + \ldots + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2'\mathbb{A}_3'$

etc...

2. Operação Inversa

Como no agrupamento anterior é a divisão lógica ou abstração:

$$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 : \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1$$
$$\mathbb{B}_1 : \mathbb{B}_1 = \mathcal{U}$$

3. Operação Idêntica Geral

A operação idêntica geral é $\mathcal{U}$, porque:

$$\mathbb{B}_1 \times \mathcal{U} = \mathbb{B}_1$$
$$\mathbb{B}_1 : \mathcal{U} = \mathbb{B}_1$$
$$\mathbb{B}_1 : \mathbb{B}_1 = \mathcal{U}$$

4. Operações Idênticas Especiais

As operações idênticas especiais são, como no agrupamento anterior, a tautologia:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$$

e a absorção do todo na parte:

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{A}$$

Portanto cada classe desempenha o papel de idêntica em relação a ela mesma e as classes nela encaixadas.

5. Associatividade

A regra de associatividade é idêntica à do agrupamento anterior.

Este é o mais geral dos agrupamentos de classes, no sentido de que os outros três podem ser derivados deste. De fato, o agrupamento primário das classes constitui uma das seqüências $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, ..., que são operadas na multiplicação biunívoca. O agrupamento das vicariâncias permite estabelecer a equivalência $\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_1' = \mathbb{A}_2+\mathbb{A}_2'$, o que possibilita a comparação de $\mathbb{B}_1$ $(=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_1')$ com $\mathbb{B}_2$ $(=\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_2')$, permitindo assim a sua multiplicação. Finalmente, o agrupamento das multiplicações co-unívoca das classes é apenas uma limitação deste quanto ao primeiro termo da multiplicação.

Este agrupamento marca o fim da lógica das classes e o início da lógica das proposições e dos conjuntos. Ele está no ponto de início da lógica das proposições porque o conjunto multiplicativo $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2' + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1'\mathbb{A}_2'$ corresponde ao que se chama de *afirmação tautológica* em lógica das proposições: $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$. Esta afirmação tautológica está no ponto inicial das 16 combinações binárias possíveis com as operações bi-proposicionais, ou seja, todas as operações lógicas sobre duas proposições podem ser derivadas desta expressão através da exclusão de uma, duas, três ou todas as combinações entre p e q.

Este agrupamento também pertence à teoria dos conjuntos porque as estruturas $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$, $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2\mathbb{B}_3$, etc, constituem subconjuntos que formam os *conjuntos das partes* de um sistema de dois, três, etc, conjuntos.

BIBLIOGRAFIA

[CAR 88] CARNOTA, Raúl J. Sistemas Expertos y Representacion del Conocimiento. Curitiba, EBAI, 1988.

[CAS 82] CASTORINA, José A.; PALAU, Gladys D. Introducción a la Lógica Operatoria de Piaget: alcances y significado para la psicología genética. Barcelona, Paidos, 1982. (Biblioteca PSICOLOGIAS DEL SIGLO XX, v. 38).

[DEL 87] DELGRANDE, James P. A First-Order Conditional Logic for Prototypical Properties. Artificial Intelligence, Amsterdam, v.33, n.1, p.105-30, Sept. 1987.

[DIX 89] DIX, Jürgen. Some Tendencies in Non-Monotonic Reasoning. Karlsruhe, Karlsruhe Univ., 1989. I - The main Approaches.

[END 72] ENDERTON, Herbert B. A Mathematical Introduction to Logic. New York, Academic Press, 1972.

[LEV 84] LEVESQUE, Hector J. Foundations of a Functional Approach to Knowledge Representation. Artificial Intelligence, Amsterdam, v.23, n.2, p.155-212, July 1984.

[LIF 85] LIFSCHITZ, Vladimir. Closed-World Database and Circunscription. Artificial Intelligence, Amsterdam v.27, n.2, p.229-35, Nov. 1985.

[McC 80] McCARTHY, John. Circunscription - A Form of Non-Monotonic Reasoning. Artificial Intelligence, Amsterdam, v.13, n.1,2, p.41-72, Apr. 1980.

[McC 86] McCARTHY, John. Applications of Circuncription to Formalizing Common-Sense Knowledge. Artificial Intelligence, Amsterdam, v.28, n.1, p.89-116, Feb. 1986.

[McD 80] McDERMOTT, Drew; DOYLE, Jon. Non-Monotonic Logic I. Artificial Intelligence, Amsterdam, v.13, n.1,2, p.41-72, Apr. 1980.

[MOO 85] MOORE, Robert C. Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic. Artificial Intelligence, Amsterdam v.25, n.1, p.75-94, Jan. 1985.

[PIA 76] PIAGET, Jean. Ensaio de Lógica Operatória. Porto Alegre, Globo, 1976.

[PIA 78] PIAGET, Jean. Psicologia & Epistemologia - por uma Teoria do Conhecimento. 2.ed. Rio de janeiro, Forense-Universitária, 1978.

[REI 80] REITER, R. A Logic for Default Reasoning. Artificial Intelligence, Amsterdam, v.13, v.1,2, p.41-72, Apr. 1980.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Um papel para a lógica intraproposicional de Jean Piaget
na representação do conhecimento do senso comum.

Dissertação apresentada aos Srs.

Antonio Carlos da Rocha Costa

Prof. Antônio Carlos da Rocha Costa

Prof. Dr. Daicidio Moraes Claudio

Rosa Maria Viccari

Profª Dra. Rosa Maria Viccari

Léa Fagundes

Profa. Dra. Lea da Cruz Fagundes

Visto e permitida a impressão

Porto Alegre, 30 / 10 / 91

Prof. Dr. José Mauro V. de Castilho
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Augusto da L. Reis
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Ciência da Computação