

VERIFICAÇÃO ANALÍTICA DA OCORRÊNCIA DE CAVITAÇÃO EM CALHA EM DEGRAUS BASEADA EM RESULTADOS DE MODELO FÍSICO REDUZIDO

Marcelo Giulian Marques¹; Éricson Rojahn²; Lucas Fontanetti Martins³; Luisa da Cunha Vieira⁴; Marcelo Riul⁵ & José Carlos de Melo Bernardino⁶

RESUMO – A ocorrência de cavitação em calhas em degraus é fator importante no dimensionamento de estruturas hidráulicas. Este trabalho utilizou resultados de lâmina de água e velocidades coletados em modelo físico reduzido de escala geométrica 1:40 para avaliação da ocorrência de cavitação em calha em degraus. Foram utilizados critérios de vários autores, considerando vazão específica, velocidade média e índice de cavitação. Para determinação do ponto de início de aeração, foi utilizada metodologia empírica, já que as características do modelo físico e do escoamento não provocaram significativa aeração durante os ensaios. As análises realizadas concluíram que as condições geométricas e hidráulicas da estrutura não suscitam cavitação.

ABSTRACT – The occurrence of cavitation in stepped channels is an important factor in the design of hydraulic structures. This work used water depth and velocities collected in a reduced physical model of geometric scale 1:40 to evaluate the occurrence of cavitation in a stepped channel. Criteria from several authors were used, considering specific flow, average velocity and cavitation index. To determine the starting point of aeration, an empirical methodology was used, whereas the characteristics of the physical model and the flow did not cause significant aeration during the tests. The analyzes carried out concluded that geometric and hydraulic conditions of the structure do not cause cavitation.

Palavras-Chave: Cavitação, calha em degraus, modelagem física.

INTRODUÇÃO

É bastante conhecido o fato de que estruturas hidráulicas em degraus estão mais sujeitas à cavitação do que calhas lisas por causa da acentuada irregularidade da superfície. Projetos de engenharia de calhas em degraus frequentemente limitam a vazão específica e a velocidade do escoamento para evitar a ocorrência de cavitação, já que a literatura especializada amplamente a documenta quando tais parâmetros hidráulicos atingem elevados valores. Para além da vazão específica e da velocidade, é comum também o uso do *índice de cavitação* (σ), que expressa mais diretamente as condições físicas subjacentes ao fenômeno.

Experimentos realizados por Peterka (1953) indicaram que concentrações de ar no escoamento de aproximadamente 7% podem tornar a cavitação inócua, fazendo com que os danos associados

1) REM Serviços de Engenharia, Porto Alegre (RS/Brasil), mmarques@iph.ufrgs.br

2) ER Projetos de Engenharia, Porto Alegre (RS/Brasil), ericson.rojahn@gmail.com

3) FCTH, SP/Brasil, lucas.fontanetti@fcth.br

4) BVP Geotecnia e Hidrotecnia, MG/Brasil, luisa.vieira@bvp.eng.br

5) BVP Geotecnia e Hidrotecnia, MG/Brasil, marcelo.riul@bvp.eng.br

6) Universidade de São Paulo (USP), SP/Brasil, jcarlosbernardino@usp.br

na superfície do concreto possam ser diminuídos ou até eliminados. As regiões mais propensas à ocorrência de cavitação em calhas em degraus se localizam imediatamente antes do ponto de início de aeração, junto aos espelhos dos degraus, conforme Amador (2005). Por esse motivo, a localização do início de aeração torna-se parâmetro básico na avaliação da cavitação, já que a aeração naturalmente cria condições de proteção à superfície do concreto.

Este trabalho utilizou resultados de lâmina de água e velocidades coletados em modelo físico reduzido de escala geométrica 1:40 para avaliação da ocorrência de cavitação em calha em degraus. Para além das verificações matemáticas realizadas, este trabalho objetiva reunir e utilizar critérios de vários autores, considerando vazão específica, velocidade média e índice de cavitação. Além disso, pretendeu documentar uma aplicação prática da avaliação da cavitação por meio de estudo de caso.

CRITÉRIOS PARA INDICAR RISCO DE CAVITAÇÃO

Existem três linhas de critérios para indicar risco de cavitação em estruturas hidráulicas, baseadas a) na vazão específica, b) na velocidade média do escoamento e c) no índice de cavitação. A Figura 1 representa valores críticos associados ao início de cavitação, para cada um dos três critérios, segundo diversos autores, considerando estudos efetuados em calhas em degraus — com a respectiva declividade indicada.

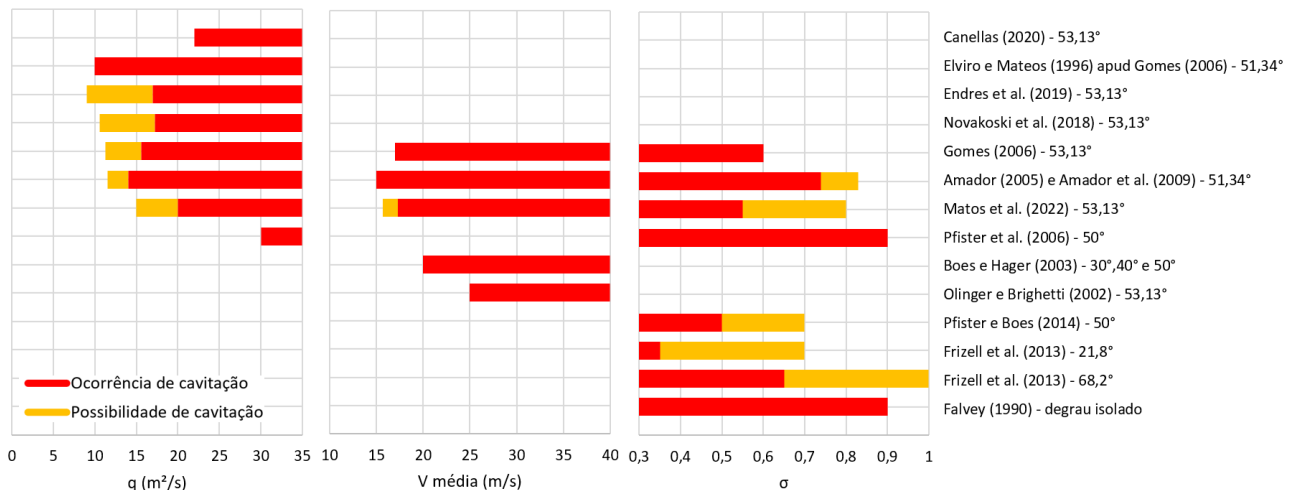


Figura 1 – Valores associados à ocorrência/incipiência do fenômenos da cavitação, segundo diversos autores.

Com base na Figura 1, pode-se observar que a maior parte dos estudos foi desenvolvida para declividades de estruturas da ordem de 50°, excetuando-se o estudo de Frizell *et al.* (2013), que avaliaram estruturas com declividade de aproximadamente 20°, e de Boes e Hager (2003), cuja faixa de declividade avaliada varia de 30° a 50°. Para o estabelecimento dos valores representados na Figura 1, os autores utilizaram procedimentos metodológicos e critérios distintos. Parte deles consi-

derou a medição de pressões instantâneas nas proximidades da aresta externa dos degraus, como é o caso dos trabalhos de Canellas (2020), Endres *et al.* (2019), Novakoski *et al.* (2018) e Gomes (2006). Já no trabalho de Frizell *et al.* (2013), o estabelecimento dos valores associados à ocorrência de cavitação se deu, essencialmente, por meio de medições com sensores acústicos.

O critério da vazão específica estabelece valores máximos para os quais não ocorre cavitação no escoamento, tendo caráter informativo. De acordo com a Figura 1, pode-se indicar que, de modo geral, é consenso entre os autores que vazões específicas superiores a 20 m²/s colocam a estrutura em risco, no que diz respeito à ocorrência de cavitação. Por outro lado, na região de transição, caracterizada pela possibilidade ou incipiência da ocorrência do fenômeno da cavitação, não há concordância entre os pesquisadores. Nesse caso, pode-se assumir que valores da ordem de 11,5 a 18,5 m²/s compreendem a região de transição da ocorrência do fenômeno.

O critério da velocidade média do escoamento estabelece, também de modo informativo, valores máximos para os quais não ocorre cavitação. Nesse caso, já existe consenso de que velocidades da ordem de 15 a 20 m/s suscitam cavitação, e, a depender das condições hidráulicas (principalmente da duração do evento), da geometria da estrutura e da resistência da superfície do concreto, podem danificar a estrutura. O trabalho de Olinger e Brighetti (2002) apresenta-se como exceção, pois estabelece uma região de transição à ocorrência do fenômeno para velocidades do escoamento acima de 25 m/s.

Por fim, o critério do índice de cavitação (σ) sugere valores mínimos, denominados de *índice de cavitação crítico*, σ_c , para os quais não ocorre cavitação. O cálculo de σ é realizado pela equação (1), onde p é determinado segundo equação (2).

$$\sigma = \frac{p - p_v}{V^2/2g} \quad (1)$$

$$p = p_{atm} + \gamma \cos \alpha \quad (2)$$

Para as equações (1) e (2), vale p a carga piezométrica no pseudofundo, p_{atm} a carga atmosférica (10,33 m.c.a.), p_v a pressão de vapor da água a 20°C (0,24 m.c.a.), V a velocidade média do escoamento na seção, g a aceleração da gravidade, γ a profundidade de água na seção, perpendicular ao pseudofundo, e α o ângulo da calha.

Dado que o critério de σ considera, na sua formulação, aspectos do escoamento e da estrutura, ele pode ser entendido como mais representativo do fenômeno, caracterizando maior robustez em relação aos demais.

Com base nos estudos apresentados na Figura 1 e no critério de σ , pode-se sugerir que calhas em degraus com inclinação da ordem de 50° estão sujeitas à cavitação desde que $\sigma < 0,70$. No

caso de calhas menos íngremes (inclinação da ordem de 20°), Frizell *et al.* (2013) indicaram início de cavitação quando $0,35 < \sigma < 0,70$.

Uma das maneiras para determinar σ_c utiliza o fator de atrito da superfície, f , na região de escoamento não aerado, conforme sugerido por Arndt (1968), Falvey (1990) e Frizell *et al.* (2013) e aplicado, dentre outros autores, por Matos *et al.* (2022). Nessa abordagem, σ_c é estimado a partir da equação (3), valendo para f a equação (4) obtida por Tozzi (1992) em estudos realizados para condutos fechados retangulares com ângulo de 26,6°. Na equação (4), vale k a rugosidade do degrau.

$$\sigma_c = 4f \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 3,25 + 0,39 \log_{10} \left(\frac{y}{k} \right) \quad (4)$$

ESTIMATIVA DA POSIÇÃO DE INÍCIO DE AERAÇÃO (L_a)

A ocorrência de cavitação não implica necessariamente em danos à superfície da calha. Em especial, segundo Peterka (1953), concentrações de ar de aproximadamente 7% no escoamento podem reduzir ou até eliminar a ocorrência de danos suscitados pela cavitação. Pesquisas realizadas pelo USBR (2020) indicaram que essa taxa pode ser de até 2%.

Caracterizado pelo afloramento da camada limite turbulenta à superfície livre, o ponto de início de aeração torna-se, assim, região importante na análise de calhas em degraus. Conforme Matos (1999), em distâncias superiores a cerca de seis vezes a altura do escoamento no ponto de início de aeração, a contar desta seção, a concentração de ar junto ao fundo é suficiente para que não ocorram danos por cavitação.

Para esse tipo de estrutura, as principais estimativas para o ponto de início de aeração sugeridas na literatura são aderentes entre si quanto aos parâmetros mais representativos do fenômeno, e apontam que as diferentes características geométricas e hidráulicas das condições do escoamento são absorvidas, essencialmente, pelo coeficiente de rugosidade dos degraus, k , e pelo número de Froude rugoso, F^* (equação (5)). A estrutura matemática adimensional toma a forma representada pela equação (6), onde a e b são constantes vinculadas às análises próprias de cada autor, carregando os aspectos físicos não incorporados pelos demais parâmetros.

$$F^* = \frac{q}{\sqrt{gk^3 \sin(\alpha)}} \quad (5)$$

$$\frac{L_a}{k} = aF^{*b} \quad (6)$$

Algumas expressões documentadas na literatura estão representadas graficamente na Figura 2. As curvas foram agrupadas em função da angulação aplicável, respeitando as faixas de validade

para F^* de cada autor. Observa-se que não há consenso entre as estimativas de L_a/k . Por exemplo, para $F^* = 5$, a razão entre máximo e mínimo L_a/k chega a aproximadamente 2,7, na Figura 2(a), enquanto que para as previsões da Figura 2(b) essa razão chega a aproximadamente 2,4. Isso demonstra que o uso das equações fornece apenas uma faixa provável para o início da aeração.

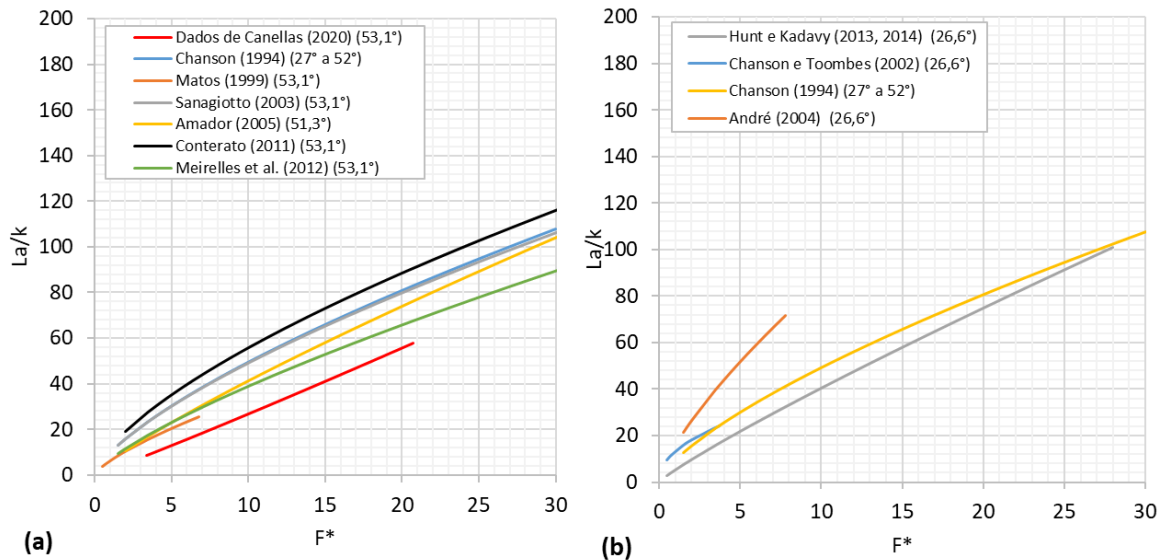


Figura 2 – Adimensionalização para ponto de início de aeração com (a) 53,1° e 51,3°; (b) 26,6°.

INSTALAÇÃO EXPERIMENTAL: MODELO FÍSICO REDUZIDO (1:40)

Foram ensaiadas vazões em modelo físico reduzido com calha em degraus (Figura 3), com medições de lâmina de água e velocidade. As características da estrutura, em dimensões de protótipo, são apresentadas na Tabela 1. O modelo foi construído com escala geométrica de 1:40. As vazões ensaiadas foram medidas por vertedor triangular, e as profundidades por ponta linimétrica. Sua alimentação se deu por gravidade, a partir de reservatório superior de nível constante.

Tabela 1 – Características a nível de protótipo da calha em degraus estudada.

Características de protótipo	
Largura (m)	13,0
Ângulo de inclinação (°)	26,6
Número de degraus	153
Altura do degrau (m)	0,50
Rugosidade do degrau (m)	0,447



Figura 3 – Modelo físico reduzido da escada estudada.

As leituras realizadas no modelo físico ocorreram para diversas vazões específicas, desde 1,6 m²/s até 20,8 m²/s, todas operando em regime permanente, embora aqui apenas três delas tenham sido apresentadas: 11,8 m²/s, 16,5 m²/s e 20,8 m²/s. Os pontos de leitura foram espaçados de

dez em dez degraus, permitindo a elaboração de um perfil representativo do comportamento hidráulico. As alturas de lâmina de água, em dimensão de protótipo, são apresentadas na Tabela 2 para a faixa de degraus significativa às análises deste estudo. Esses resultados representam a média de leituras realizadas na margem esquerda e direita da calha. Junto dessa Tabela, estão representados os respectivos valores da altura crítica (h_c), de F^* e da distância L_a .

Tabela 2 – Altura de lâmina de água y , em dimensões de protótipo, baseadas nas leituras do modelo físico, para as diferentes vazões analisadas. L_a foi determinado pela metodologia de Hunt e Kadavy (2013).

q (m ² /s)	h_c (m)	F^*	L_a (deg.)	y (m)					
				Deg. 10	Deg. 20	Deg. 30	Deg. 40	Deg. 50	Deg. 60
11,8	2,43	18,9	28	1,15	1,05	1,00	0,95	0,95	0,95
16,5	3,03	26,4	39	1,50	1,85	1,30	1,30	1,15	1,15
20,8	3,54	33,3	46	1,50	1,65	1,60	1,45	1,40	1,40

O modelo físico foi construído utilizando-se o critério de semelhança de Froude, que, conforme observado por Chanson (2009), é o mais utilizado para estudos em escoamentos de superfície livre, já que a ação gravitacional é dominante. No entanto, conforme Heller (2011), esse tipo de semelhança, aliado à escala 1:40 empregada, tem baixa capacidade de representação da entrada de ar no escoamento. Experimentos conduzidos por Boes (2000), para vazões específicas de até 20 m²/s e altura de degrau de até 0,6 m, mostraram que o efeito de aeração em vertedouros, para ser representativo, exige modelos reduzidos, no mínimo, entre 1:10 e 1:15, caso contrário, ocorrerá o que se chama de *efeito escala*. Boes (2000) destaca que escalas menores são sim representativas para propósitos de projeto, exceto para a determinação da altura dos muros em trechos em degraus.

ANÁLISES REALIZADAS PARA A CAVITAÇÃO

Com base nos critérios da ocorrência de cavitação apresentados na Figura 1, foram estipuladas faixas médias para aplicação na estrutura estudada. Essas faixas são apresentadas na Tabela 3, subdivididas em três zonas: a) zona de cavitação, em que a ocorrência do fenômeno é esperada, b) zona de transição, onde o fenômeno pode ou não ocorrer, e c) zona de não cavitação.

Tabela 3 – Critérios adotados para ocorrência de cavitação, com base nos dados da Figura 1.

Zona	Vazão específica q (m ² /s)	Velocidade média V (m/s)	Índice de cavitação σ
Cavitação	$> 18,5$	> 20	$\leq \begin{cases} 4f \\ 0,9 \end{cases}$
Transição	$11,5 < q \leq 18,5$	$15 < V \leq 20$	–
Não cavitação	$\leq 11,5$	≤ 15	$> \begin{cases} 4f \\ 0,9 \end{cases}$

Para estabelecimento dessas faixas, procurou-se um comportamento médio dos diferentes autores avaliados (Figura 1), respeitando na medida do possível as diferentes características de cada

caso. Em especial, o critério pelo índice de cavitação com $\sigma_c = 0,9$ foi estipulado de forma conservadora, de modo a aumentar o nível de segurança. Complementando-o, adotou-se o limite $4f$ (equação 3) para reforçar as conclusões obtidas.

As características geométricas da estrutura aliadas às vazões hidrológicas e aos resultados de lâmina de água do modelo físico permitiram avaliar a ocorrência de cavitação na calha por meio dos critérios elencados na Tabela 3. Pelo critério da vazão específica, as três vazões estudadas indicaram possibilidade de cavitação, já que todas elas ultrapassaram o limite inferior de $11,5 \text{ m}^2/\text{s}$, como representado na Figura 4. Em especial, a vazão de $20,8 \text{ m}^2/\text{s}$ ultrapassou em 12% o limite superior de $18,5 \text{ m}^2/\text{s}$, sugerindo que o escoamento desenvolverá cavitação. No entanto, para a estrutura estudada, as vazões de $16,5 \text{ m}^2/\text{s}$ (definida para dimensionamento) e de $20,8 \text{ m}^2/\text{s}$ (verificação de borda livre) terão duração estimada, a nível de protótipo, inferior a 5 min, diminuindo ou até eliminando a propensão à ocorrência de danos causados pela cavitação.

Para o critério da velocidade média do escoamento, ilustrado pela Figura 5, as três vazões não provocaram velocidades superiores a 15 m/s . Vale ser destacado o caso com $20,8 \text{ m}^2/\text{s}$, que alcançou a velocidade média de $14,9 \text{ m/s}$. A Figura 5 limita a representação ao trecho entre os degraus 10 e 60, já que a partir do degrau 50 o escoamento apresentou regime uniforme. Para a vazão de $16,5 \text{ m}^2/\text{s}$, no degrau 20, as leituras de lâmina de água no modelo físico apresentaram desvio muito significativo em relação ao comportamento local das demais vazões, como pode ser verificado na Tabela 2, e por esse motivo esse ponto não é acrescentado ao gráfico da Figura 5, nem na análise do índice de cavitação. Essa exclusão, em relação à velocidade, é favorável à segurança contra a cavitação.

O último critério considerado baseia-se no índice de cavitação. Os resultados obtidos são representados na Figura 6, desde o degrau 10 até o 60, onde também está indicada a faixa estimada para o início de aeração do escoamento para as três vazões analisadas. Os resultados obtidos para σ indicaram que não deverá ocorrer cavitação para a calha em estudo. Vale destacar que o valor mínimo calculado para σ foi de 1,00, na vazão específica de $20,8 \text{ m}^2/\text{s}$, acima, portanto, do limite de 0,90 estipulado por Falvey (1990). A condição mostra-se ainda mais segura quando os valores calculados de σ são comparados ao limitante $\sigma_c = 4f$, que, para as três vazões, resultou em $\approx 0,35$, valor bastante distante daqueles ilustrados na Figura 6. Os resultados de σ representados nessa Figura foram determinados considerando a velocidade média do escoamento ($V = q/y$), já que essa é a velocidade originalmente admitida na formulação da expressão de σ .

As leituras de velocidade no modelo físico reduzido com micro molinete permitiram avaliar, como última verificação, os resultados de σ considerando tal dado. Essa verificação foi realizada

porque todas as medições com micro molinete indicaram valores maiores do que aqueles calculados e, além disso, permitiria reforçar as avaliações anteriores. Os resultados são mostrados pela Figura 7. Como indicado, o valor mínimo, para $20,8 \text{ m}^2/\text{s}$, foi de $\sigma = 0,83$, ligeiramente menor que o limitante seguro de $0,9$, mas acima do limite superior de Frizell *et al.* (2013), de $\sigma = 0,70$.

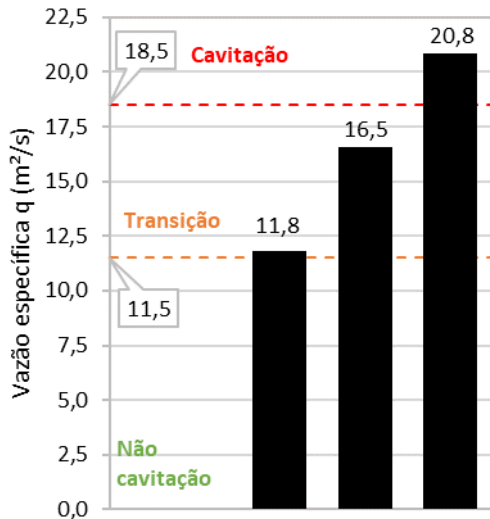


Figura 4 – Critério da vazão específica para ocorrência de cavitação frente aos três casos analisados.

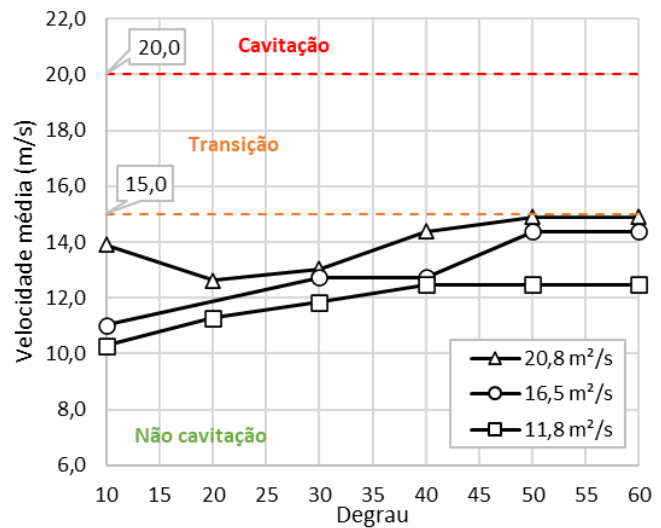


Figura 5 – Variação da velocidade média entre os degraus 10 e 60, para as três vazões analisadas, frente aos limites de velocidade para ocorrência de cavitação.

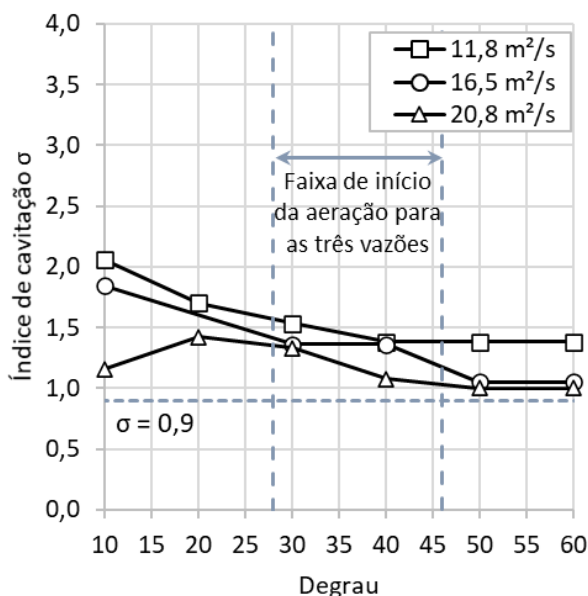


Figura 6 – Comportamento de σ para diferentes q entre os degraus 10 e 60, considerando a velocidade média do escoamento.

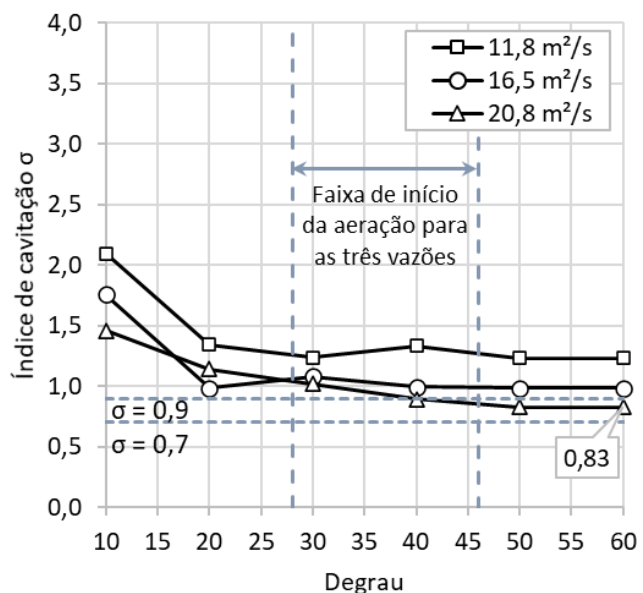


Figura 7 – Comportamento de σ para diferentes q entre os degraus 10 e 60, considerando a velocidade lida no modelo ffsico.

A faixa de início de aeração indicada na Figura 6 e na Figura 7, entre os degraus 28 e 46, aplica-se às três vazões analisadas, e foi determinada com base na metodologia de Hunt e Kadavy (2013, 2014). Para além desse trecho, não foi necessário avaliar a concentração média de ar

do escoamento porque os valores mínimos do índice de cavitação são os mesmos indicados nessas Figuras, seguros, portanto, à ocorrência de cavitação.

Considerando as análises realizadas para os critérios de vazão específica, velocidade e índice σ , a ocorrência de cavitação foi descartada para as condições hidráulicas e geométricas da estrutura estudada. Para o critério da vazão específica, embora os valores indiquem possibilidade de cavitação, os danos à estrutura são pouco prováveis, uma vez que se tratam de vazões com baixa probabilidade de ocorrência e duração curta.

CONCLUSÕES

As análises realizadas para a calha em degraus estudada concluíram que há baixa probabilidade de ocorrer cavitação para as vazões 11,8 m²/s, 16,5 m²/s e 20,8 m²/s. Foram considerados três critérios: a) de vazão específica, b) de velocidade e c) de índice de cavitação. Para determinação do ponto de início de aeração, local onde a cavitação é mais crítica, foi utilizada metodologia empírica, já que as características inerentes à escala e geometria do modelo físico e do escoamento não ocasionaram aeração significativa durante os ensaios.

As análises realizadas demonstraram, na prática, que os critérios de vazão específica e de velocidades não devem ser tomados como parâmetros preponderantes para tomada de decisão quanto à ocorrência ou não de cavitação, mas, sempre que possível, devem ser confrontados com o índice de cavitação, já que esse parâmetro é mais representativo do fenômeno estudado.

Este trabalho teve também a vantagem de reunir e utilizar critérios de vários autores, além de documentar uma aplicação prática da avaliação da cavitação em estudo de caso.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Samarco Mineração, à BVP Geotecnia e Hidrotecnia, ao CTH-USP e à FCTH, por disponibilizarem as informações necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, agradecem ao professor Dr. Jorge de S. G. Matos, do Instituto Superior Técnico (Portugal), pelo apoio e sugestões gentilmente oferecidas durante a elaboração deste estudo.

REFERÊNCIAS

- Amador, A. (2005). *Comportamiento Hidráulico de los Aliviaderos Escalonados en Presas de Hormigón Compactado*. Tese de doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona, Espanha.
- Amador, A.; Sánchez-Juny, M.; Dolz, J. (2009). *Developing flow region and pressure fluctuations on steeply sloping stepped spillways*. *J. Hydr. Eng.*, 135, 1092–1100.
- André, S. (2004). *High velocity aerated flow on stepped chutes with macroroughness elements*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Communication 20.
- Boes, R. M. (2000). *Scale effects in modelling two-phase stepped spillway flow*. *Hydraulics of stepped spillways*, pp. 53–60, H.-E. Minor, W.H. Hager, eds. Rotterdam, Balkema.

- Boes, R. M.; Hager, W. (2003). *Two-phase flow characteristics of stepped spillways*. J. Hydr. Eng. 2003, 129, 661–670.
- Canellas, A. V. B. (2020). *Pressões Extremas Atuantes nas Proximidades das Quinas dos Degraus de Vertedouros*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.
- Chanson, H. (1994). *Hydraulics of skimming flows over stepped channels and spillways*. Journal of Hydraulic Research, 32:3, 445-460.
- Chanson, H. (2009). *Turbulent air–water flows in hydraulic structures: dynamic similarity and scale effects*. Environ Fluid Mech 9, 125–142.
- Chanson, H.; Toombes, L. (2002). *Experimental investigations of air entrainment in transition and skimming flows down a stepped chute*. Canadian Journal of Civil Engineering. 29(1): 145-156.
- Conterato, E. (2011). *Escoamento sobre vertedouro em degraus com declividade IV:0,75H: Caracterização das pressões e condições de aeração*. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Endres, L. A. M.; Schumacher, A.; Canellas, A. V. B.; Da Silva, F. A. (2019). *Delimitação de vazões em função de pressões extremas sobre uma calha de vertedouro em degraus*. Comitê Brasileiro de Barragens. XXXII Seminário Nacional de Grandes Barragens. Salvador, BA, 20 a 23 de maio-2019.
- Falvey, H. T. (1990). *Cavitation in Chutes and Spillways*. Technical Report 42; Bureau of Reclamation: Denver, CO, USA.
- Frizell, K. W.; Renna, F. M.; Matos, J. (2013). *Cavitation potential of flow on stepped spillways*. J. Hydr. Eng. 2013, 139, 630–636.
- Gomes, J. F. (2006). *Campo de Pressões: Condições de Incipiência à Cavitação em Vertedouros em Degraus com Declividade IV:0,75H*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.
- Heller, V. (2011). *Scale effects in physical hydraulic engineering models*. Journal of Hydraulic Research, v. 49, n. 3, pp. 293-306.
- Hunt, S. L. e Kadavy, K. C. (2013). *Inception Point for Embankment Dam Stepped Spillways*. Journal of Hydraulic Engineering, v. 139, n. 1, pp. 60-64.
- Hunt, S. L. e Kadavy, K. C. (2014). *Flow depth and energy coefficient relationships for stepped spillways*. 5th IAHR International Symposium on Hydraulic Structures, Brisbane, Australia, 25-27 June 2014.
- Matos, J. S. G. (1999). *Emulsão de ar e dissipação de energia do escoamento em descarregadores em degraus*. Tese de doutoramento, Instituto Técnico Superior, Portugal.
- Matos, J.; Novakoski, C. K.; Ferla, R.; Marques, M. G.; Dai Prá, M.; Canellas, A. V. B.; Teixeira, E. D. (2022). *Extreme Pressures and Risk of Cavitation in Steeply Sloping Stepped Spillways of Large Dams*. Water 2022, 14, 306.
- Meireles, I.; Renna, F.; Matos, J.; Bombardelli, F. (2012). *Skimming, Nonaerated Flow on Stepped Spillways over Roller Compacted Concrete Dams*. Journal of Hydraulic Engineering, v. 138, n. 10, pp. 870-877.
- Novakoski, C. (2021). *Análise da macroturbulência do escoamento sobre vertedouro em degraus com aeração induzida por defletor e câmara de ar*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.
- Olinger, J. C.; Brighetti, G. (2002). *Contribuição ao estudo da distribuição de pressões nos vertedouros em degraus*. Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia Hidráulica e Sanitária, BT/PHD/87.
- Peterka, A. J. (1953). *The effect of entrained air on cavitation pitting*. In Proceedings of the Joint Meeting of the IAHR/ASCE, Minneapolis, MN, USA, 1–4 September 1953; pp. 507–518.
- Pfister, M.; Boes, R. M. (2014). *Discussion of “Skimming, nonaerated flow on stepped spillways over roller compacted concrete dams”*. J. Hydr. Eng. 2014, 140, 07014012–1-2.
- Pfister, M.; Hager, W.; Minor, H.-E. (2006). *Bottom aeration of stepped spillways*. J. Hydr. Eng. 2006, 132, 850–853.
- Sanagiotto, D. G. (2003). *Características do escoamento sobre vertedouros em degraus de declividade IV:0,75H*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Tozzi, M. J. (1992). *Caracterização/Comportamento de Escoamentos em Vertedouros com Paramento em Degraus*. Tese de doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil.
- USBR (2020). *Collaborative Studies to Reduce Flow-Induced Damage on Concrete Surfaces*. United States Bureau of Reclamation. Final Report No. ST-2020-1885-01.