

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO EFEITOS DE NÃO LINEARIDADE
GEOMÉTRICA PARA UMA METODOLOGIA BESO

por

Raffael Coutinho Ungaretti Rossi

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, outubro de 2022.

CIP - Catalogação na Publicação

Rossi, Raffael Coutinho Ungaretti
Otimização topológica considerando efeitos de não
linearidade geométrica para uma metodologia BESO/ Raffael
Coutinho Ungaretti Rossi. -- 2022.
15 f.

Orientador: Herbert Martins Gomes.
Coorientador: Rodrigo Reis Amaral.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de
Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2022.

1.Otimização topológica. 2. Não-linear geométrica.
3.Elementos finitos. 4.BESO. I. Gomes, Herbert Martins,
orient. II. Amaral, Rodrigo Reis, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Raffael Coutinho Ungaretti Rossi

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO EFEITOS DE NÃO LINEARIDADE
GEOMÉTRICA PARA UMA METODOLOGIA BESO

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Sperb Bresolin
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Coorientador: Me. Rodrigo Reis Amaral

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Profa. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Diogo Elias Da Vinha Andrade

Porto Alegre, outubro de 2022.

DEDICATÓRIA

.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2022

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO EFEITOS DE NÃO
LINEARIDADE GEOMÉTRICA PARA UMA METODOLOGIA BESO

Raffael Coutinho Ungareti Rossi
raffael.rossi@hotmail.com

Resumo. *A otimização topológica de peças vem se tornando uma realidade no dia a dia de empresas que as fabricam. Com o advento da impressão 3D, inicialmente para materiais poliméricos e para metálicos, a construção de peças otimamente projetadas tem se intensificado. Devido ao uso racional e eficiente das resistências dos materiais, as peças podem apresentar comportamentos que exigem performance destes materiais. A análise não-linear geométrica permite levar em conta efeitos importantes da deformação da peça, principalmente quando feita em materiais poliméricos (p.e., PLA) e de forma esbelta, com maior precisão para deformações, deslocamentos e tensões mais reais. O presente trabalho propõe a implementação de uma formulação para otimização topológica não-linear geométrica de materiais utilizando uma metodologia BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization). São avaliados resultados para casos benchmark da literatura em comparação com os resultados do código implementado. Obteve-se com a implementação resultados similares aos encontrados na literatura e topologias finais muito semelhantes.*

Palavras-chave: *Otimização topológica, não-linear geométrica, elementos finitos, metodologia BESO, mecânica dos sólidos.*

TOPOLOGY OPTIMIZATION CONSIDERING GEOMETRIC NON-LINEARITY EFFECTS
FOR A BESO METHODOLOGY

Abstract. *Topological optimization of parts has become a reality in the daily lives of companies that manufacture them. With the advent of 3D printing, initially for polymeric and metallic materials, the construction of optimally designed parts has intensified. Due to the rational and efficient use of the resistance of the materials, the pieces can present behaviors that demand performance of these materials. The geometric non-linear analysis allows taking into account important effects of the deformation of the part, especially when made in polymeric materials (e.g., PLA) and in a slender way, with greater precision for more real strains, displacements and stresses. The present work proposes the implementation of a formulation for geometric non-linear topological optimization of materials using a BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) methodology. Results is evaluated for benchmark cases from the literature compared to the implemented code. With the implementation, results similar to those found in the literature and very similar final topologies were obtained.*

Keywords: *Topological optimization, geometric nonlinear, finite elements, BESO methodology, solid mechanics.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema do Método Incremental de Newton-Raphson.....	7
Figura 2 – Esquema da viga engastada-livre com carga na extremidade para análise com não linearidade geométrica.	8
Figura 3 – Esquema da viga bi-engastada com carga central para análise com não linearidade geométrica....	9
Figura 4 – Comparativo das topologias com 50% de material retido (dois casos de carregamento) no domínio computacional quando empregado a não linearidade geométrica durante o processo de otimização topológica.	10
Figura 5 – Resultado para <i>Compliance</i> e fração volumétrica para carga de 60kN.....	11
Figura 6 – Resultado <i>Compliance</i> e fração volumétrica para carga de 144 kN.	11
Figura 7 – Comparativo das topologias com 30% de material retido no domínio computacional quando empregado a não linearidade geométrica durante o processo de otimização topológica.	12
Figura 8 – Resultado <i>Compliance</i> e fração volumétrica para a carga 230 kN (Adaptado de Han e Xu, 2021).	13
Figura 9 – Resultado <i>Compliance</i> carga 230 kN presente estudo.	13

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação do trabalho complementar W^c (em kJ) para as topologias com não linearidade geométrica.	12
Tabela 2 – Comparação do trabalho complementar W^c (em kJ) para as topologias com não linearidade geométrica.	14

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
SUMÁRIO.....	viii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	3
3.1 Método BESO.....	3
3.1.1 Função objetivo.....	3
3.1.2 Número de sensibilidade	3
3.2 Otimização Topológica com não linearidades.....	4
3.3 Números de sensibilidade para formulação com controle de forças.....	4
3.4 Cálculo da matriz de rigidez tangente não-linear geométrica.....	5
3.5 Solução incremental pelo Método de Newton-Raphson.....	6
4 METODOLOGIA.....	6
4.1 Metodologia do código desenvolvido.....	7
4.2 Problemas 1 – Viga Engastada livre com carga pontual na extremidade à meia altura.....	8
4.3 Problemas 2 – Viga Bi-Engastada com carga pontual centralizada	8
5 RESULTADOS	9
5.1 Resultados problema 1.....	9
5.2 Resultados problema 2.....	12
6 CONCLUSÃO.....	14
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15

NOMENCLATURA

Símbolos

A	Matriz com as derivadas dos deslocamentos	[-]
B	Matriz que relaciona desl. –deform.	[-]
C	<i>Compliance</i>	[N m]
D	Matriz constitutiva	[Pa]
E	Módulo de Young	[Pa]
ER	<i>Evolutive Ratio</i>	[-]
e	Espessura elementar	[m]
F	Vetor de cargas aplicadas	[N]
F^{int}	Vetor de forças internas	[N]
G	Matriz das derivadas das funções de forma	[-]
K	Matriz de rigidez	[N/m]
L	Comprimento	[m]
N_e	Número de elementos	[-]
M	Matriz de tensões Piola-Kirchoff	[-]
p	Fator de Penalização	[-]
R	Forças residuais	[N]
r	Raio do filtro	[-]
U	Vetor de deslocamentos	[m]
V*	Volume objetivo	[m ³]
V_i	Volume elementar	[m ³]
v	Coefficiente de Poisson	[-]
w	Fator de peso	[-]

Letras gregas

α^e	Número de sensibilidade elementar	[-]
Δ	Variação	[-]

Abreviaturas e acrônimos

BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos surgiu como um método de análise de tensões nos projetos de aeronaves. Hoje em dia este método é utilizado não só para a análise de sólidos, também pode ser encontrado para problemas de escoamento de fluidos, transferência de calor, eletricidade e etc. A principal vantagem da análise por elementos finitos é a acurácia dos resultados numéricos obtidos durante as simulações. Além disso, pode-se destacar a capacidade do método de lidar com condições gerais de contorno e incluir materiais não homogêneos e anisotrópicos, relações tensão-deformação não lineares, relações de deformação-deslocamento não lineares e condições de carregamento complicadas (AKASHA, 2009).

A busca por novos métodos de otimização topológica com não linearidade é algo estudado desde 1989 por acadêmicos (YUGE e KIKUCHI, 1995; BENDSØE *et al.* 1996; PEDERSEN, 1998). Cada vez mais o teste de protótipos reais está sendo substituído pela simulação combinada com o método de elementos finitos com não linearidade, pois isso fornece um método mais rápido e barato. Além disso, é a forma mais eficiente de avaliar provas de conceitos e os detalhes do projeto uma vez que as simulações são feitas por programas de computador. Dentre as metodologias mais utilizadas hoje podemos destacar os métodos, Level-Set, SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) e BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation*) que utiliza o MEF (Método dos Elementos Finitos) para avaliar porções do material e simultaneamente retirar e colocar material no domínio Ω , de forma a alcançar a maior eficiência possível na relação entre massa e rigidez da estrutura.

1.1 Motivação

A otimização topológica de peças vem se tornando uma realidade no dia a dia de empresas que as fabricam. Com o advento da impressão 3D, inicialmente para materiais poliméricos e para metálicos, a construção de peças otimizadas tem se intensificado. Devido ao uso racional e eficiente das resistências dos materiais, as peças otimizadas podem apresentar comportamentos que exigem performance dos materiais, levando o uso dos materiais aos seus limites. A análise não-linear geométrica permite levar em conta efeitos importantes da deformação da peça, principalmente quando feita em materiais poliméricos (p.e., PLA) e de forma esbelta, com maior precisão para estimativas das deformações, deslocamentos e tensões.

1.2 Objetivos

O presente trabalho propõe a implementação de uma formulação para otimização topológica com não linearidade geométrica utilizando uma metodologia BESO para análises bidimensionais de estruturas em estado plano de tensão. A ideia é comparar os resultados do código proposto com casos *benchmark* da literatura.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo HUANG e XIE (2010), a implementação de formulações não-lineares geométricas para problemas de otimização topológica não é novidade, tendo sido os trabalhos de BUHL *et al.* (2000), GEA e LUO (2001) e PEDERSEN *et al.* (2001) os primeiros a elaborarem no contexto de métodos de otimização baseados em gradientes/sensibilidade. Gea e Luo (2001) também está entre os primeiros artigos que consideram a não linearidade durante o processo de otimização topológica. Neste artigo, o problema de otimização foi investigado para estruturas com não linearidade geométrica. O problema de otimização foi resolvido iterativamente por um método de aproximação convexa sequencial. Os resultados numéricos demonstraram que ao considerar a não linearidade, as

topologias são mais rígidas do que aquelas obtidas por um processo de otimização linear. Além disso, foi evidenciado que para estruturas que sofrem com grandes rotações ou deslocamentos, o processo de otimização linear pode gerar uma topologia que talvez não atenda às restrições de projeto quanto ao comportamento mecânico.

Em geral, a consideração da não linearidade geométrica requer um maior “peso” computacional devido ao processo iterativo incremental para a consideração da não linearidade e da formação da matriz de rigidez tangente. Formulações com não linearidade geométrica no contexto do método *Level-Set* e modelagem X-FEM também podem ser encontradas em trabalhos posteriores de ABDI *et al.* (2018). Inclusive, formulações não lineares geométricas anteriormente têm sido propostas para lidar com o problema da não linearidade, como descrito em HE *et al.* (2014), onde as dificuldades de convergência e distorção da malha são evitadas, sendo reportados excelentes resultados comparados com estudos e exemplos *benchmarks* da literatura.

YOON *et al.* (2011) investigam a otimização topológica estrutural SIMP com não linearidades (geométricas e de material) empregando uma formulação de parametrização de conectividade de elementos. É afirmado que esta formulação efetivamente evitou os problemas de instabilidade originais relacionado a elementos de baixa densidade que ocorriam no esquema de Newton-Raphson para aplicação de controle de força nas estruturas analisadas.

No contexto de elementos finitos para problemas bidimensionais, abordado também neste trabalho, ADAM (2017) apresenta os principais passos para implementação da não linearidade geométrica com formulação Lagrangeana Total para elementos isoparamétricos em estado plano de tensão. Neste trabalho é utilizado o critério de convergência residual de forças para a obtenção dos deslocamentos não lineares. Comparações com resultados da literatura para deslocamentos, deformações e tensões são feitos para exemplos simples de vigas engastadas livres e bi-engastadas. Os resultados demonstraram a convergência do código desenvolvido no software MATLAB.

Em LEITÃO e PEREIRA (2019), uma nova abordagem baseada em um esquema de interpolação de energia deformacional é proposta para evitar problemas de distorção de malha durante o processo de otimização topológica com não linearidade geométrica. Os resultados demonstraram que a formulação proposta para o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), com a utilização do critério de convergência baseado nos deslocamentos, diminuiu consideravelmente o número de iterações necessárias para a convergência da análise de elementos finitos durante o processo de otimização.

Uma proposta de código em MATLAB para resolver problemas de otimização topológica com não linearidade geométrica utilizando o software ANSYS como meio de obter a matriz de rigidez tangente é desenvolvido em CHEN *et al.* (2019). A validação do código é feita através da replicação de casos *benchmark* para problemas bidimensionais que consideram materiais hiperelásticos. Neste estudo, é demonstrado que o tempo de processamento computacional é maior para estruturas hiperelásticas devido a necessidade de um maior refinamento da malha. Entretanto, a maior vantagem da utilização da combinação do MATLAB com o software ANSYS é a possibilidade do uso dos diversos *solvers* disponíveis.

CHEN *et al.* (2020) propõe uma nova formulação para tratar de problemas de otimização topológica com restrição de deslocamento e considera a não linearidade geométrica na análise. Neste trabalho, também, utiliza-se a formulação do método SIMP para problemas em estado plano de tensão. Os resultados, quando comparados com outros casos já apresentados na literatura, demonstram bastante similaridade nas topologias e nos valores da *compliance* (flexibilidade). Entretanto, a formulação proposta demonstra uma baixa eficiência computacional.

Recentemente, trabalhos que empregam a formulação do método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) com não linearidade geométrica e de material no contexto de confiabilidade (probabilístico) podem ser encontrados na literatura. Neste tipo de análise, procura-se avaliar o nível de segurança das topologias otimizadas quanto ao seu comportamento mecânico (rigidez e resistência). Por exemplo, em HABASHNEH e RAD (2022) é comparado topologias determinísticas com topologias baseadas em confiabilidade (RBTO, *Reliability Based Topology*

Optimization). Os resultados demonstraram que considerar a análise de confiabilidade durante o processo de otimização pode levar a estruturas mais robustas (maior massa) e menos flexíveis (menor *compliance*) do que aquelas obtidas por um processo de otimização linear. Entretanto, essas estruturas apresentam um maior índice de confiabilidade por estar bem abaixo do nível de tensão estipulado em projeto.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Método BESO

O método BESO se baseia na proposta de avaliar através do MEF as propriedades relevantes da estrutura em cada elemento finito e sua contribuição para a estrutura como um todo. Com base nesta avaliação, uma porcentagem definida de elementos cheios com contribuição mais baixa da estrutura é transformada em elementos vazios, e da mesma forma elementos vazios cuja contribuição para a estrutura é avaliada como alta são transformados em elementos cheios novamente. Este processo se repete até que as condições de convergência sejam alcançadas [HUANG e XIE, 2010].

3.1.1 Função objetivo

O BESO é utilizado para encontrar a estrutura de maior rigidez dado que apenas uma fração de volume do domínio deve ser composta de elementos cheios como indicado pelas Equações (1), e (2).

$$\text{Minimizar } C = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a } V^* - \sum_{e=1}^{N_e} V_e x_e = 0 \quad e \quad x_e = 1 \quad \text{ou} \quad x_{min}, \quad (2)$$

sendo C a flexibilidade (*Compliance*) da estrutura, \mathbf{F} o vetor de cargas aplicadas, \mathbf{U} o vetor de deslocamentos, V^* o volume alvo para estrutura final, N_e o número de elementos da malha do MEF, V_i o volume de um elemento individual, x_i uma variável binária que indica se o elemento se encontra cheio quando for 1 ou vazio quando for x_{min} , um valor muito próximo de 0, utilizado para evitar erros numéricos. Através da Equação (3) é calculada a função objetivo em cada iteração.

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} x_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i, \quad (3)$$

sendo \mathbf{u}_i o vetor de deslocamentos nodal do i -ésimo elemento, \mathbf{K}_i a matriz de rigidez elementar e p o fator de penalização, que é um parâmetro utilizado para modificar o valor de x_i exponencialmente, de forma que x_{min} possa ser tão pequeno quanto for conveniente e de forma a facilitar o cálculo do número de sensibilidade.

3.1.2 Número de sensibilidade

A avaliação da contribuição de cada elemento finito para a rigidez da estrutura é feita pela diferença da energia de deformação total da estrutura causada pela remoção do elemento O número

de sensibilidade em sua forma básica, avalia esta modificação e pode ser obtido através da Equação (4).

$$\alpha_i^e = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{1}{2} x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i, \quad (4)$$

onde α_i^e é a sensibilidade elementar. Com a obtenção dos números de sensibilidade de cada elemento, seleciona-se os elementos sólidos com menor sensibilidade e que estejam abaixo de um limiar estabelecido para serem retirados a cada iteração, assim como os elementos vazios com maior sensibilidade são selecionados para serem preenchidos.

Em sua forma básica, o número de sensibilidade pode trazer problemas na estrutura final como o chamado *checkerboard pattern* (padrão de tabuleiro), que pode ser identificado na estrutura final como um quadriculado formado por elementos cheios e vazios intercalados. Assim um filtro é aplicado à sensibilidade levando-se em conta a proximidade dos elementos que estão sendo avaliados.

3.2 Otimização Topológica com não linearidades

Segundo HUANG e XIE (2010) a função objetivo da otimização topológica para maximização da rigidez com restrição de volume, no caso de análise não-linear em elementos finitos, pode ser colocada a partir da minimização da energia potencial complementar W^C e fica definida como:

$$\text{Minimizar } f(x) = W^C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{F}^T (\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) \right] \quad (5)$$

$$\text{Sujeito a } V^* - \sum_{e=1}^{N_e} V_e x_e = 0 \quad (6)$$

$$x_e = 1 \quad \text{ou} \quad x_{min}, \quad (7)$$

onde \mathbf{U}_i é o vetor de deslocamentos no incremento i (de um total de n) no vetor de cargas, e $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}/n$ é este incremento e N_e é o número de elementos finitos. Para estruturas elásticas lineares, a resposta pode ser obtida pela solução de apenas um sistema de equações lineares, para o caso não linear é necessário assegurar a convergência por um procedimento iterativo. Definindo o vetor de forças residuais como $\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^{int} = \mathbf{0}$, com \mathbf{F}^{int} o vetor de forças internas dado por $\mathbf{F}^{int} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{C}^{e,T} \mathbf{F}_e^{int}$, com \mathbf{F}_e^{int} sendo as forças internas nodais de um elemento e , e $\mathbf{C}^{e,T}$ a matriz de transformação do sistema de coordenadas local para global.

A solução para o resíduo das forças é obtido por um algoritmo incremental do tipo Newton-Raphson com o uso da matriz de rigidez tangente \mathbf{K}^t (outros algoritmos poderiam ser utilizados, p.e., controle dos deslocamentos generalizado, comprimento de arco, etc.). A obtenção da matriz de rigidez tangente, no contexto de uma formulação Lagrangeana total, pode ser obtida como descrito em ADAM (2017), por $\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^\sigma$, onde \mathbf{K}^0 é a matriz de rigidez elástica linear usual, \mathbf{K}^L é a matriz de rigidez de deformação linear e \mathbf{K}^σ é a matriz inicial de tensão, que depende do estado de tensão do material.

3.3 Números de sensibilidade para formulação com controle de forças

Se as cargas forem assumidas como independentes, a sensibilidade do energia complementar com respeito às variáveis de projeto x_e fica definida como:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^T - \mathbf{F}_{i-1}^T) \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \mathbf{U}_{i-1}}{\partial x_e} \right) \quad (8)$$

Levando em conta a restrição de que o resíduo deva ser nulo para dois vetores de resíduos em iterações sucessivas \mathbf{R}_{i-1} e \mathbf{R}_i , e montando o Lagrangeano, chega-se a:

$$\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^T - \mathbf{F}_{i-1}^T) (\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) + \lambda_i^T (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1}) \quad (9)$$

Assim, a nova sensibilidade fica definida como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [& (\mathbf{F}_i^T - \mathbf{F}_{i-1}^T) \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \mathbf{U}_{i-1}}{\partial x_e} \right) \\ & + \lambda_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{U}_i} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \mathbf{R}_{i-1}}{\partial \mathbf{U}_{i-1}} \frac{\partial \mathbf{U}_{i-1}}{\partial x_e} + \frac{\partial (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1})}{\partial x_e} \right)] \end{aligned} \quad (10)$$

Assumindo que haverá, dentro de um pequeno intervalo de incremento de carga, uma relação linear entre carga e deslocamento, dada pela matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_i^t = -\partial \mathbf{R}_i / \partial \mathbf{U}_i$ e substituindo na Equação (10), chega-se a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\mathbf{F}_i^T - \mathbf{F}_{i-1}^T - \lambda_i^T \mathbf{K}_i^t) \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial x_e} + \frac{\partial \mathbf{U}_{i-1}}{\partial x_e} \right) + \lambda_i^T \left(\frac{\partial (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1})}{\partial x_e} \right)] \quad (11)$$

Se os λ_i^T forem escolhidos de forma que $\mathbf{K}_i^t \lambda_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1}$ (chamado de sistema adjunto), então alguns dos termos da equação (11) serão eliminados. A relação incremento de deslocamento versus incremento de força pode ser expressa como:

$$\mathbf{K}_i^t (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}) = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1} \quad (12)$$

ou seja, $\lambda_i = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}$, que, substituído na Equação (11) e utilizando o fato de que $\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1} = -\mathbf{F}^{int} = 0$, chega-se na sensibilidade:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_e} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\mathbf{U}_i^T - \mathbf{U}_{i-1}^T) \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{int}}{\partial x_e} + \frac{\partial \mathbf{F}_{i-1}^{int}}{\partial x_e} \right)] \quad (13)$$

Assim, o número de sensibilidade adotado como o indicador para a retirada ou permanência do elemento finito na otimização topológica, no domínio de projeto:

$$\alpha^e = - \frac{1}{p} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_e} = x_e^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\mathbf{U}_i^T - \mathbf{U}_{i-1}^T) (\mathbf{C}^{e,T} \mathbf{F}_{e,i}^{int} + \mathbf{C}^{e,T} \mathbf{F}_{e,i-1}^{int})] \quad (14)$$

3.4 Cálculo da matriz de rigidez tangente não-linear geométrica

Para o cálculo da matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^\sigma$), utilizou-se o procedimento indicado em ADAM (2017), onde a matriz é calculada separadamente em três partes e posteriormente adicionadas. A matriz de rigidez elástica linear tradicional do elemento é usualmente definida como:

$$\mathbf{K}^0 = \int_{v^e} \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dv, \quad (15)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva para estado plano de tensões e \mathbf{B}_0 a matriz que relaciona deslocamentos nodais e deformações ($\{\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}\}^T = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0 \mathbf{U}^e$), e que contém derivadas das funções de forma (\mathbf{N}). A parcela da matriz de rigidez de deformação linear \mathbf{K}^L , vem dada por (ADAM, 2017):

$$\mathbf{K}^L = \int_{v^e} (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L) dv, \quad (16)$$

onde $\mathbf{B}_L = \mathbf{A} \mathbf{G}$ é a matriz de deformação linear da formulação Lagrangeana total, sendo \mathbf{A} a matriz com as derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas cartesianas, e \mathbf{G} a matriz que contém as derivadas das funções de forma com respeito às coordenadas cartesianas.

Para a matriz inicial de tensão \mathbf{K}^σ , a formulação vem dada por:

$$\mathbf{K}^\sigma = \int_{v^e} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} dv, \quad (17)$$

sendo \mathbf{M} a matriz que contém o estado de tensões iniciais (Piola-Kirchhoff) arranjado de forma conveniente para as multiplicações matriciais.

3.5 Solução incremental pelo Método de Newton-Raphson

Para a solução da Equação (5) o método incremental de Newton-Raphson é utilizado para que, de forma incremental, as deformações da estrutura sejam levadas em conta durante o processo iterativo. Este é um método bastante popular em análise numérica para encontrar as raízes de sistemas não-lineares de equações. Assume-se uma estimativa inicial \mathbf{U}_0 para a qual os incrementos de deslocamentos $\Delta \mathbf{U}$ são obtidos a partir da matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}^t(\mathbf{U}_0)$ e um certo percentual da carga final que deseja-se aplicar $\Delta \mathbf{F}$. Assim uma nova estimativa para \mathbf{U} fica: $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \Delta \mathbf{U}$. Assim o processo é repetido até que haja o balanceamento das cargas internas e o incremento externo aplicado $\Delta \mathbf{F}$. Outra forma é verificar se a diferença entre normas dos incrementos de deslocamentos avaliados entre iterações sucessivas é menor que uma certa tolerância. Finalizado este processo, procede-se ao aumento de um novo incremento de carga ($2\Delta \mathbf{F}$) e repete-se para a convergência até que toda carga externa \mathbf{F} tenha sido aplicada. A Figura 1 exemplifica este procedimento, onde em vermelho representa-se o processo iterativo para alcançar a convergência a partir da matriz de rigidez tangente e os pontos escuros são os pontos de equilíbrio onde se tem o valor do deslocamento e a correspondente carga externa.

4 METODOLOGIA

Com base na metodologia descrita para montagem da matriz de rigidez tangente com efeito de não linearidade geométrica indicado em ADAM (2017), efetuou-se a implementação dos procedimentos anteriormente descritos, juntamente com correções para aceleração do algoritmo apresentado em CHEN *et al.* (2019). Dois exemplos foram testados para verificar se as implementações foram feitas de forma correta.

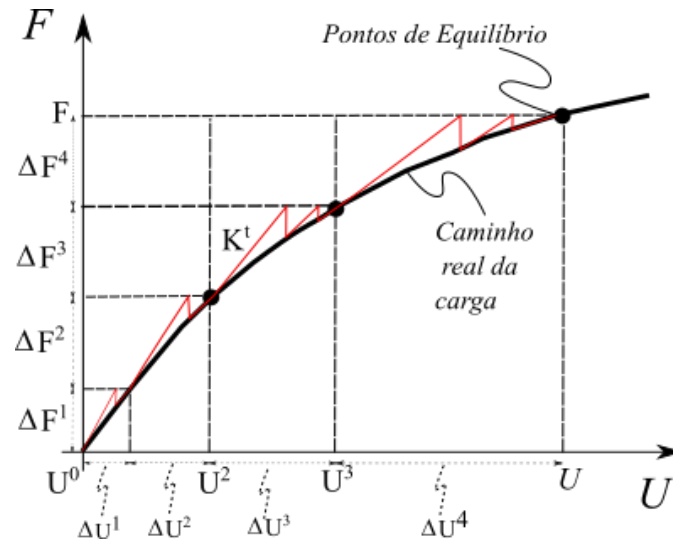


Figura 1 – Esquema do Método Incremental de Newton-Raphson.

No APÊNDICE A, encontra-se parte do algoritmo utilizado, especificamente a sob-rotina de análise por elementos finitos não linear que é acoplada ao método BESO tradicional neste trabalho.

4.1 Metodologia do código desenvolvido

A seguir serão descritas as principais etapas do código desenvolvido e utilizado para a otimização topológica com não linearidade geométrica e suas modificações e adaptações. As primeiras 30 linhas do código são as partes de definição das condições de contorno do problema, desde comprimento da peça a ser avaliada e a sua altura, até rigidez do material e tamanho de malha. Depois disso, o loop principal começa com a determinação do volume alvo na iteração atual. Em seguida a sub-rotina para análise não linear de elemento finitos é executada, a qual retorna o vetor deslocamento U que já leva em conta a não linearidade geométrica, números de sensibilidade (identificado como dc no código) e matriz de rigidez do elemento.

Dentro do código, cada nó tem dois graus de liberdade (horizontal e vertical); assim, para um exemplo com carga vertical na extremidade livre de uma viga em balanço, aplica-se uma força vertical no ponto médio no grau de liberdade correspondente. Neste caso em específico, os suportes são implementados atribuindo aos graus de liberdade fixos (para ambos os graus de liberdade horizontal e vertical) valor nulo e não os incluindo na solução do sistema de equações.

Diferente do problema linear, a matriz de rigidez do elemento não é mais constante para a geometria do problema não-linear. No local correspondente, para a análise elástica linear tradicional, uma nova sub-rotina de análise não linear por elementos finitos foi acrescentada. Esta sub-rotina está inserida dentro do laço da otimização topológica, de forma que, para cada iteração da otimização topológica uma análise não linear é feita para a obtenção dos deslocamentos. Uma análise de sensibilidade também se faz necessária para a resolução do problema com não linearidade (geométrica e, eventualmente a de material).

A cada iteração é utilizada a sensibilidade anterior para atualizar e prever a sensibilidade para a iteração atual de forma a suavizar eventuais mudanças bruscas de sensibilidade devido ao desaparecimento ou surgimento de elementos na malha. Em seguida, um laço sobre todos os elementos finitos ativos (com valor de densidade 1) determina a função objetivo pela simples soma das energias complementares de deformação de cada elemento finito. A função objetivo é seguida de uma chamada para o filtro de sensibilidades e média de sensibilidades. As variáveis topológicas são atualizadas de acordo com o otimizador BESO, onde basicamente procura-se a quantidade de

elementos finitos que devem permanecer na malha de forma a atender ao volume alvo daquela iteração, seguindo a ordem de prioridade dos elementos pelos seus números de sensibilidade. O parâmetro de convergência é calculado na linha 104 (identificado no código como *change*). A Compliance atual da estrutura (energia de deformação elástica) e outros parâmetros também são calculados e impressos para controle, e o resultado da distribuição de densidade é apresentado em um gráfico. O laço principal é encerrado se o fator de convergência (*change*) for menor que 0,001. Caso contrário, as etapas acima são repetidas novamente para todos os passos.

A partir do desenvolvimento do código serão comparados resultados geométricos e os valores de função objetivo encontrados na literatura, como os fornecidos pelo HUANG E XIE (2010) e, HAN *et al.* (2021). Estes resultados servirão para a validação do código desenvolvido.

4.2 Problemas 1 – Viga Engastada livre com carga pontual na extremidade à meia altura

Este exemplo foi analisado por HAN *et al.* (2021) assim como por HUANG e XIE (2007) e por BUHL *et al.* (2000). Consiste e uma viga engastada livre com carga concentrada na extremidade como indicado na Figura 2.

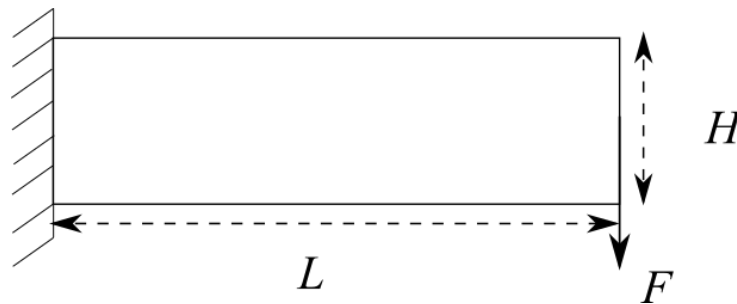


Figura 2 – Esquema da viga engastada-livre com carga na extremidade para análise com não linearidade geométrica.

Esta viga tem comprimento de $L = 1$ m, altura de $H = 0,25$ m e espessura de 0,1 m. A fração volumétrica final desejada é de 50%, o material tem $E = 3$ GPa e coeficiente de Poisson de $\nu = 0,4$.

Os parâmetros do BESO utilizados foram $ER = 1\%$ raio do filtro $r = 0,02$ m (para maiores detalhes sobre estes parâmetros veja HUANG e XIE, 2007). O problema é analisado com uma análise elástica não linear e com cargas independentes que são $F = 60$ kN e $F = 144$ kN para que se possa avaliar a dependência da topologia final com o aumento da carga final aplicada assim como o uso da não linearidade geométrica.

4.3 Problemas 2 – Viga Bi-engastada com carga pontual centralizada

Este exemplo foi analisado por HAN *et al.* (2021). Consiste e uma viga bi-engastada com carga concentrada no centro como indicado na Figura 3.

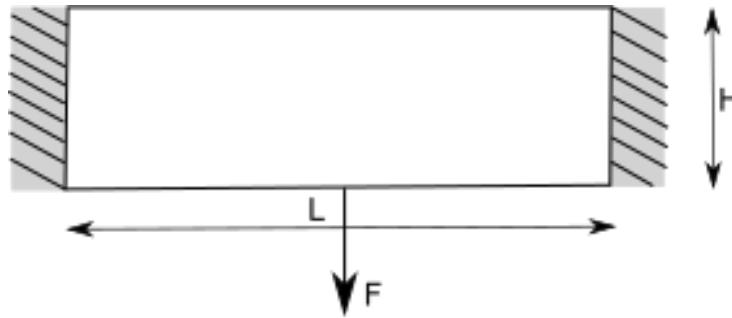


Figura 3 – Esquema da viga bi-engastada com carga central para análise com não linearidade geométrica.

Esta viga tem comprimento de $L = 1,00$ m, altura de $H = 0,25$ m e espessura de $0,10$ m. A fração volumétrica final desejada é de 30% , o material tem $E = 3$ GPa (típico de um polímero PLA), coeficiente de Poisson de $\nu = 0,4$. Os parâmetros do algoritmo BESO utilizados foram para a taxa evolutiva $ER = 1\%$, raio do filtro $r = 0,02$ m. O problema é analisado também com uma análise elástica linear e apenas com uma carga central de $F = 230$ kN.

5 RESULTADOS

Nesta seção, o resultado obtido por cada problema apresentado na seção de Metodologia será comparado com os resultados apresentados na literatura. Isso inclui a topologia, a função objetivo e a convergência.

5.1 Resultados problema 1

Para as simulações foi utilizado um elemento finito quadrilátero isoparamétrico com 2 graus de liberdade em cada nó e com um tamanho de $0,0020$ m para discretizar o domínio computacional, ou seja, foram utilizados 62500 elementos finitos ($N_x = 500$ elementos e $N_y = 125$ elementos). Ademais, foi utilizada uma restrição de volume de 50% do domínio de projeto com os seguintes parâmetros para o processo de otimização: uma taxa evolutiva $ER = 1\%$, isto é, para cada iteração, 1% de material será removido do domínio computacional; e um tamanho de raio de filtro $r_{min} = 0,02$ m (ou 10 elementos finitos para a malha discretizada utilizada).

Para análise elástica linear (não apresentada aqui), a topologia final sempre resultou a mesma (fixada a fração volumétrica) independentemente do nível de carregamento aplicado. Quando a análise não linear geométrica é ativada, a topologia final apresenta uma dependência do nível de carga aplicada. A Figura 4 apresenta esta dependência comparando-se com os resultados de outros autores.

Para exemplificar como a não linearidade geométrica afeta a otimização (a influência do carregamento sob as topologias), a primeira simulação considerou um carregamento de 60 kN e a segunda utilizou um carregamento de 144 kN. Os resultados obtidos quanto à *compliance* da estrutura otimizada são comparados aos obtidos por BUHL *et al.* (2000) e HUANG E XIE (2010). Não foi feita comparação da função objetiva com HAN *et al.* (2021) pois aquele estudo apresentou apenas os resultados utilizando uma carga de 10^7 N.

	60 kN	144 kN
Buhl <i>et al.</i> (2000)	(a)	(b)
Huang e Xie (2010)	(c)	(d)
Han e Xu (2021)	(e)	(f)
Presente estudo	(g)	(h)

Figura 4 – Comparativo das topologias com 50% de material retido (dois casos de carregamento) no domínio computacional quando empregado a não linearidade geométrica durante o processo de otimização topológica.

Os resultados comparados com a literatura são apresentados nas Tabelas 1 e 2, para cada um dos problemas respectivamente. As Figuras 5 e 6 apresentam o histórico evolutivo da *compliance* média e da variação da fração volumétrica das topologias para cada um dos casos de carga analisados.

À medida que o material é iterativamente retirado do domínio computacional, como visto nas Figuras 5 e 6, a *compliance* aumenta, resultando na topologia da estrutura mostrada nos casos (g) e (h) da Figura 4. Os "saltos" que ocorrem na *compliance* perto da 10^a iteração e na faixa de 30 a 40 e 60 a 70 iterações são devidos a uma mudança significativa dentro da topologia, isto é, há uma eliminação completa de alguma barra interna dentro na estrutura otimizada. Esse comportamento também é relatado por HUANG E XIE (2010), ao desenvolver uma otimização topológica linear e, em um segundo momento, não linear. Além disso, observa-se que o valor final de *compliance* para ambas as topologias simuladas com cargas de 60 kN e 144 kN convergem com 79 iterações e chegam a um resultado muito próximo da literatura (Tabela 1).

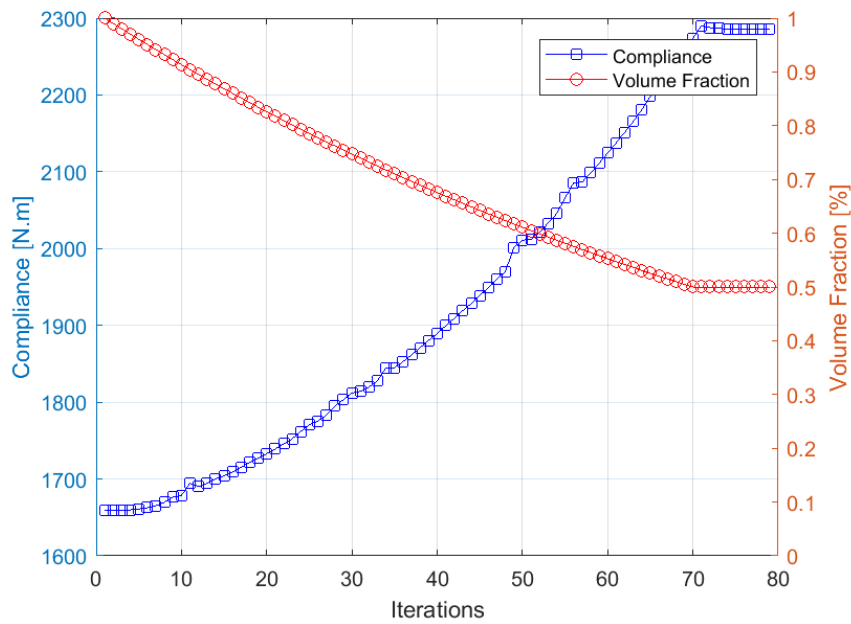


Figura 5 – Resultado para *Compliance* e fração volumétrica para carga de 60kN.

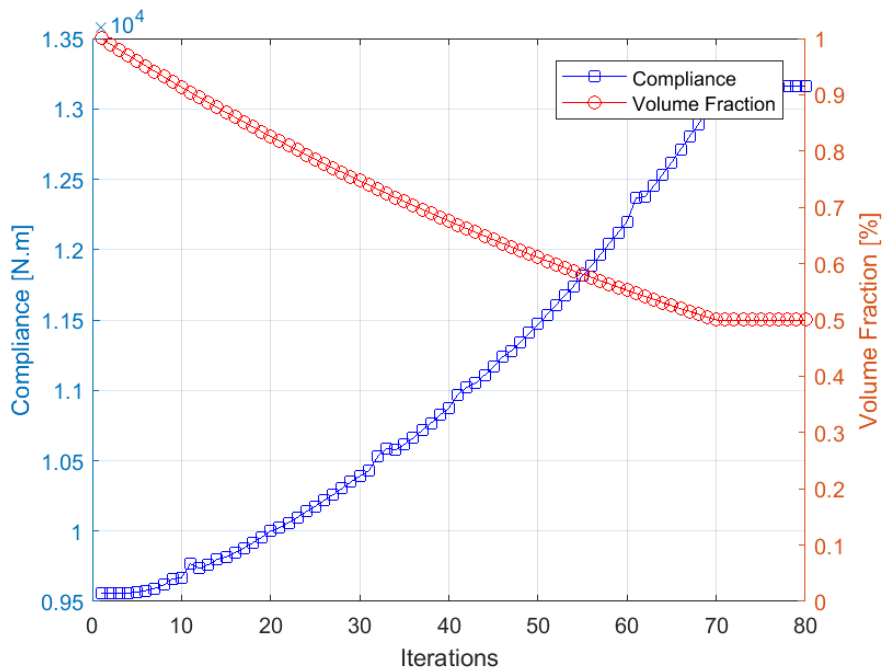


Figura 6 – Resultado *Compliance* e fração volumétrica para carga de 144 kN.

Durante o processo iterativo, percebeu-se que as topologias obtidas chegaram a geometrias muito próximas aos casos (c) e (d) da Figura 4. Entretanto, durante a etapa de convergência e estabilização da *compliance*, notou-se que a topologia começou a apresentar uma variação em seu formato final, gerando, no final, uma estrutura mais rígida do que aquelas obtidas na literatura.

Tabela 1 – Comparação do trabalho complementar W^C (em kJ) para as topologias com não linearidade geométrica.

Carga máxima de projeto	BUHL <i>et al.</i> (2000) kJ	HUANG e XIE (2010) kJ	Presente estudo kJ
60 kN	2,331	2,171	2,285
144 kN	13,29	12,38	13,163

5.2 Resultados problema 2

Como indicado anteriormente, a viga bi engastada apresenta um comprimento de 1,00 m com uma largura de 0,25 m e uma espessura de 0,10 m. Em relação às propriedades do material, foi utilizado um nylon com os mesmos parâmetros apresentados no problema passado. Para as simulações foi utilizado um elemento finito quadrilátero isoparamétrico com 2 graus de liberdade em cada nó e com um tamanho de 0,0020 m para discretizar o domínio computacional como os apresentados no problema 1. Ademais, foi utilizada uma restrição de volume de 30% do domínio de projeto com os seguintes parâmetros para o processo de otimização: uma taxa evolutiva $ER = 1\%$, isto é, para cada iteração, 1 % de material será removido do domínio computacional; e um tamanho de raio de filtro $r_{min} = 0,02$ m (ou 10 elementos finitos para a malha discretizada utilizada).

Os resultados encontrados foram geometricamente semelhantes aos apresentados por HAN *et al.* (2021) como mostrados na Figura 7. Entretanto, os resultados da função *compliance* foram ligeiramente diferentes dos apresentados no artigo base. Esta diferença pode estar na considerações feitas nas matrizes a nível de elementos, pois HAN *et al.* (2021) usa uma única matriz \mathbf{B}_0 para todos os elementos, enquanto que na implementação feita, cada elemento tem a sua matriz \mathbf{B}_0 individual (ADAM, 2017).

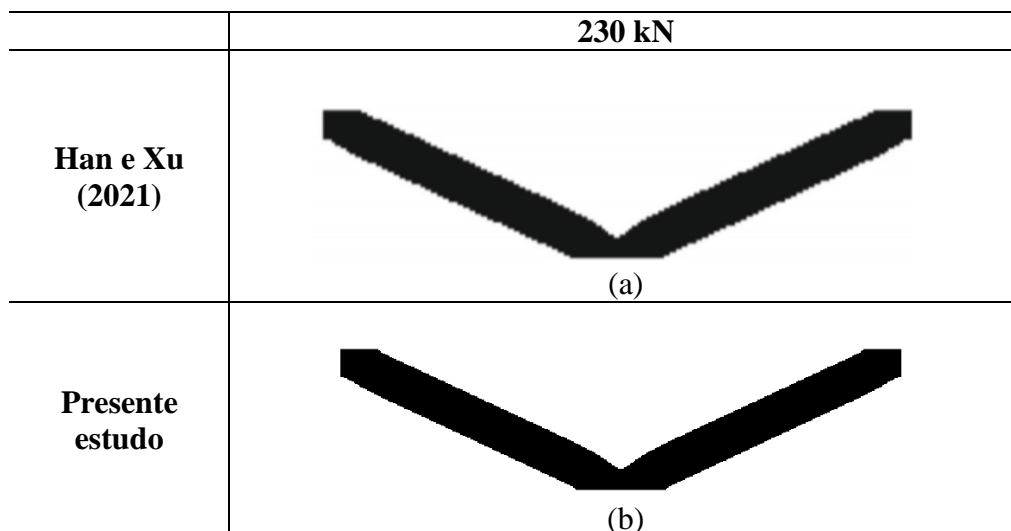


Figura 7 – Comparativo das topologias com 30% de material retido no domínio computacional quando empregado a não linearidade geométrica durante o processo de otimização topológica.

Nas Figuras 8 e 9 são apresentados os respectivos gráficos para a *compliance* e fração volumétrica para o caso de carregamento em questão obtido por Han e Xu, 2021 e aquele obtido por este trabalho.

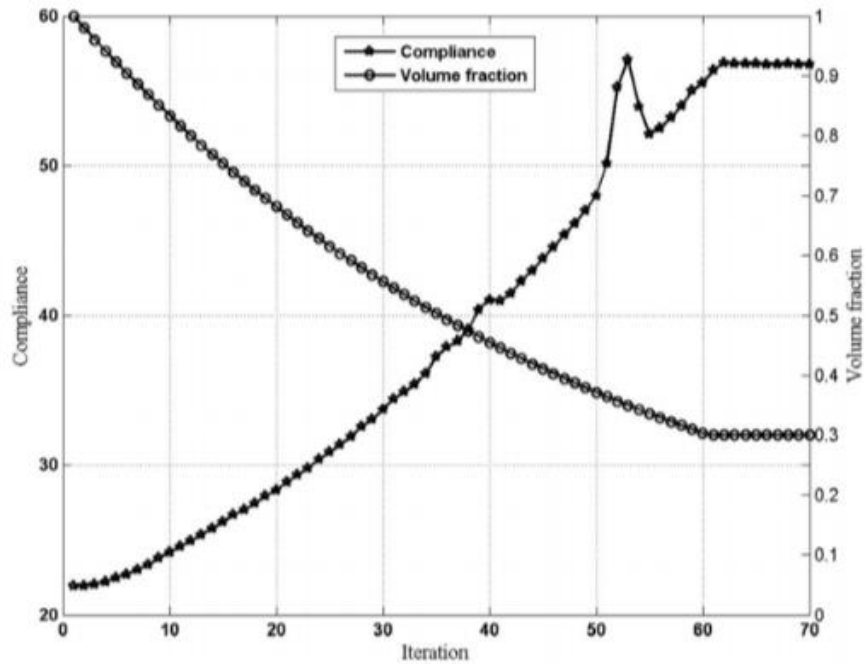


Figura 8 – Resultado Compliance e fração volumétrica para a carga 230 kN (Adaptado de Han e Xu, 2021).

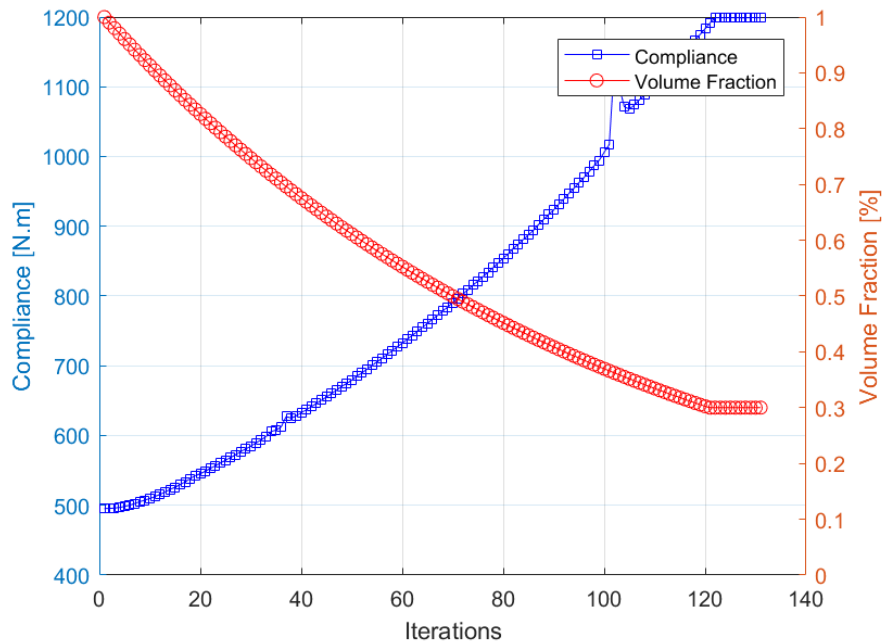


Figura 9 – Resultado Compliance carga 230 kN presente estudo.

Tabela 2 – Comparação do trabalho complementar W^C (em kJ) para as topologias com não linearidade geométrica.

Carga máxima de projeto	Han e Xu (2021) kJ	Presente estudo kJ
230 kN	0,57	1,2

Além da diferença apresentada na Tabela 2, nota-se que o código desenvolvido no presente estudo apresenta uma quantidade de iterações duas vezes maior que os apresentados em Han e Xu (2021) *et al.* Isto significa que ainda há uma oportunidade de otimizações a serem feitas no código para reduzir a memória computacional utilizada nas otimizações dos problemas apresentados. Outra possibilidade está no fato de que a definição da *Compliance* em alguns artigos é feita como sendo $C = \mathbf{F}^T \mathbf{U}$ e em outros e feito como $C = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U}$, o que explicaria esta diferença.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo a implementação da metodologia BESO de otimização topológica com não linearidade geométricas para casos em estado plano de tensão. Com o desenvolvimento de um código no software MATLAB, adaptado de HAN *et al.* (2021), foi criado um algoritmo capaz de otimizar problemas clássicos já avaliados previamente. Utilizando exemplos da literatura como comparação, a metodologia aqui apresentada mostrou-se capaz de realizar a otimização de forma a alcançar bons resultados com um código relativamente simples.

Os resultados obtidos mostram que o código desenvolvido simula relativamente bem os exemplos apresentados por BUHL *et al.* (2000), Huang e Xie (2010) e HAN *et al.* (2021). Para o Problema 1, que compara a energia de deformação *compliance* em relação ao volume de material retido, fica evidente a verificação do código desenvolvido neste trabalho em virtude da similaridade entre a topologia otimizada obtida com as topologias obtidas por outros autores além dos valores finais das energias complementares das estruturas finais. Também, o algoritmo aqui proposto obteve uma topologia levemente mais rígida (menor energia de deformação) do que a literatura e um baixo tempo de processamento computacional devido a rápida convergência durante o processo de análise pelo método dos elementos quando empregado o critério de convergência baseado nos deslocamentos. Indicando, assim, uma boa eficiência da nova metodologia.

Já, o Problema 2 apresentou uma boa similaridade de topologia final, entretanto, a função *Compliance* apresentou uma alteração no seu resultado, porém, o que mais chamou atenção foi o número de iterações necessárias para a convergência do problema quando comparado com HAN *et al.* (2021), que foi praticamente o dobro do mesmo. Esta diferença pode estar na considerações feitas nas matrizes dos elementos, pois HAN *et al.* (2021) usa uma única matriz \mathbf{B}_0 para todos os elementos, enquanto que na implementação feita, cada elemento tem a sua matriz \mathbf{B}_0 individual, conforme ADAM, 2017.

O efeito da magnitude da carga nas topologias finais, para uma mesma fração volumétrica, foi verificado, como se esperava, gerando topologias finais que são assimétricas e dependentes do nível da carga aplicada. Para melhor comprovar a eficácia da metodologia apresentada e para expandi-la a mais usos, alguns novos estudos seriam interessantes. Tem-se como sugestões para trabalhos futuros a implementação da não linearidade de material, expansão do código para otimização topológica para casos com múltiplos materiais e outros algoritmos de análise não-linear como controle de forças, controle de deslocamentos ou controle generalizado de deslocamentos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKASHA, N. M. “**Development of Geometrically Nonlinear finite element Program Using Plane Stress/Strain Element Based on Engineering and True Stress Measures**”, Ph. D. Thesis, SUST, Khartoum, Sudan, 2009.
- ABDI, M., Ashcroft, I., Wildman, R. “**Topology optimization of geometrically nonlinear structures using an evolutionary optimization method**”, *Engng Optim.*, 50:11, 1850-1870. 2018.
- ADAM, A. Y. M. “**Geometrically non-linear finite element analysis of plane stress structures using MATLAB program**”, M.Sc. Dissertation. Sudan University of Science and Technology, 2017.
- BENDSØE, M. P., SIGMUND, O. “**Topology Optimization**”. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg GmbH, 2nd. Edition, 370p. 2002.
- BENDSØE, M. P.; GUEDES, J. M.; PLAXTON, S.; TAYLOR, J. E. “**Optimization of structure and material properties for solids composed of softening material.**” *Int. J. Solids Struct.* 33(12): 1799–1813, 1996.
- BUHL, T., PEDERSEN, C.B.W., SIGMUND, O. “**Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization**”. *Struct. Multidisc. Optim.* 19: 93-104 (2000).
- CHEN, Z., LONG, K., WANG, X., LIU, J., SAEED, N. “**A new geometrically nonlinear topology optimization formulation for controlling maximum displacement**”, *Engng Optim.*, 53:8, 1283-1297, 2021.
- CHEN, Q., ZHANG, X., ZHU, B; “**A 213-line topology optimization code for geometrically nonlinear structures**”, *Struc. & Multid. Opt.*, 59:1863–1879, 2019.
- GEA, H.C., LUO, J. “**Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities**”. *Comput. Struct.* 79: 1977–85. 2001.
- HABASHNEH, M., RAD, M. M. “**Reliability based geometric nonlinear BESO of elastoplastic material**”, *Scientific Reports*, 12:5989, 2022.
- HE, Q., KANG, Z., WANG, Y. “**A topology optimization method for geometrically nonlinear structures with meshless analysis and independent density field interpolation**”, *Comput. Mech.* 54:629-644, 2014.
- HAN, Y., XU, B., LIU, Y. “**An efficient 137-line MATLAB code for geometrically nonlinear topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method**”. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 63:2571–2588, 2021.
- HUANG, X., XIE, Y. M. “**Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and Applications**”. Wiley, 223 p., 2010.
- LEITÃO, A. X., PEREIRA, A. “**Topology Optimization of Geometrically Nonlinear Structures Considering an Energy Interpolation Scheme**”, *International Congress of Mechanical Engineering*, October 20-25, 2019, Uberlândia, Brazil.
- PEDERSEN, C.B.W., BUHL, T.E., SIGMUND, O. “**Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms**”. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 50: 2683–2705, 2001.
- PEDERSEN, P. “**Some general optimal design results using anisotropic, power law nonlinear elasticity**”. *Struct. Optim.* 15: 73–80, 1998.
- YOON, G.H., NOH, J.Y., KIM, Y.Y. “**Topology optimization of geometrically nonlinear structures tracing given load-displacement curves**”, *J. of Mech. of Mater. & Struc.* 6(1):1-4, 2011.

YUGE, K.; KIKUCHI, N. '**Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation**'. Struct. Multidisc. Optim. 10: 197–208, 1995.

APÊNDICE A – Sub-rotina para análise não linear por elementos finitos

```

function [U,dc,KE_matrix,c,s_vms]=FEA(nelx,nely,T,x,penal,E,nu,dx,dy,a,lv)
% Análise por elementos finitos não linear geométrico
global edofMat nodelem ngdlpn nelelem ngdlpe

% Carregamentos
%Viga cantilever (engastada-livre)
F=sparse(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1)-nely,1,lv,ngdlpn*(nely+1)*(nelx+1),1);
%Viga bi-engastada
%F=sparse(ngdlpn*(nelx/2+1)*(nely+1),1,lv,ngdlpn*(nely+1)*(nelx+1),1);

% Apoios e condições de contorno
fixeddofs=1:ngdlpn*(nely+1); %Viga Cantilever (engastada-livre)
%fixeddofs=union([1:ngdlpn*(nely+1)],[ngdlpn*nelx*(nely+1)+1:ngdlpn*(nely+1)*(nelx+1)]); %Viga bi-engastada
alldofs=1:ngdlpn*(nely+1)*(nelx+1);freedofs=setdiff(alldofs,fixeddofs);

% Inicialização da matriz de rigidez global inicial no formato esparso, carregamentos e deslocamentos
Kt=sparse(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1),ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1));
KE_matrix=zeros(ngdlpe,ngdlpe,nelem);
U=sparse(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1),1);Uk=sparse(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1),1);
B=zeros(3,ngdlpe,nelem);B0=zeros(3,ngdlpe,nelem);BN0=zeros(3,ngdlpe);
estress=zeros(3,1);estrain=zeros(3,1);
Fint=sparse(zeros(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1),1));
R=sparse(zeros(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1),1));
M1=meshgrid(1:ngdlpe)';M2=M1';

%Matriz B elástica linear
BL=1/(4*a)*[-1 0 1 0 1 0 -1 0; 0 -1 0 -1 0 1 0 1; -1 -1 -1 1 1 1 1 -1]; %Matriz BL
G=1/(4*a)*[-1 0 1 0 1 0 -1 0; 0 -1 0 1 0 1 0 -1;-1 0 -1 0 1 0 1 0; 0 -1 0 -1 0 1 0 1];%Matriz G
for ielem=1:nelem
    B(:, :, ielem)=BL+BN0; %Matriz B inicial para cada elemento
end
DE=E/(1-nu^2)*[1 nu 0; nu 1 0; 0 0 (1-nu)/2]; %Matriz constitutiva inicial
A0=dx*dy; deltaU=1.; deltaR=1.; loop=0;
Uold=0*U;
% Iterativamente resolver a equação não linear geométrica por balanço de forças
fprintf(' Análise não-linear \n');
while deltaU > 1e-3 && loop<=50 %Condição de convergência
    tic;
    Fint=zeros(ngdlpn*(nelx+1)*(nely+1),1);
    loop=loop+1;
    fprintf(' Iteração=%4i',loop);
    mk=0; NDOFs=0;
    for ielem=1:nelem
        Ue=U(edofMat(ielem,:),1);
        estrain=x(ielem)*B(:, :, ielem)*Ue; %tensor de deformações
        estress=x(ielem)*DE*B(:, :, ielem)*Ue; %tensor de tensões
        Fe=B(:, :, ielem)'*estress*A0*T;
        Fint(edofMat(ielem,:))=Fint(edofMat(ielem,:))+Fe; %Vetor de forças internas
        ex=estrain(1); ey=estrain(2); exy=estrain(3); %Tensor de deformações
        sx=estress(1); sy=estress(2); sxy=estress(3);
        A=[ex 0.5*exy 0 0; 0 sx 0 0.5*exy ey; 0.5*exy ey ex 0.5*exy]; %Matriz A
        M=[sx 0 sxy 0; 0 sx 0 sxy; sxy 0 sy 0; 0 sxy 0 sy]; %Matriz M
        BN=A*G;
        B(:, :, ielem)=BL+BN; %Matriz B
        KL=BL'*DE*BL*A0*T; %Parcela Linear
        KS=G'*M*G*A0*T; %Parcela das tensões
        KN=(BL'*DE*BN + BN'*DE*BL +BN'*DE*BN)*A0*T; ;%Não-linear(lento)
        %KN=((BL'+BN')*DE*BN + BN'*DE*BL)*A0 ;%Não-linear(mais rápido)
        KE_matrix(:, :, ielem)=KL+KN+KS;
        %-----
        NN=edofMat(ielem,:);ngdlpe=length(NN);
        k=x(ielem)^penal*KE_matrix(:, :, ielem);
        ii=M1(:);jj=M2(:); kkk=1:(ngdlpe)^2; kkk=kk+mk; mk=mk+(ngdlpe)^2;
        Ig(kkk)=NN(ii); Jg(kkk)=NN(jj);Kg(kkk)=k(:); NDOFs2=max(edofMat(ielem,:));
        if NDOFs<NDOFs2; NDOFs=NDOFs2; end
        %-----
    end
    Kt=sparse(Ig,Jg,Kg,NDOFs,NDOFs);Kt=(Kt+Kt')/2;
    % Residuo de forcas
    R=F-Fint; %R=Fext-Fint
    Uk(freedofs)=Kt(freedofs,freedofs)\R(freedofs); %Avaliar incremento de deslocamentos
    U=U+Uk; %Avaliar deslocamento final
    deltaR=norm(R,2)/norm(F,2); %Critério de parada residuo de forcas
    dt=toc; %tempo gasto
    fprintf(' deltaU=%+10.4e deltaR=%+10.4e dt=%+10.4e\n',deltaU,deltaR,dt);
    Uold=U;
end

% Cálculo da função objetivo, sensibilidade e tensões internas
c=0;
for ielem=1:nelem
    Ue=U(edofMat(ielem,:)); %U = Displacement vectors
    estress=x(ielem)*DE*B(:, :, ielem)*Ue; %Avaliar o estado de tensões
    s(ielem,:)=estress; %Guardar o estado de tensões
    Fint=B(:, :, ielem)'*estress*A0*T; %Fint=Internal force

```

```
dc(ielem)=0.5*Ue'*Fint; %Sensibilidade em formato de vetor
c=c+0.5*x(ielem)^penal*Ue'*KE_matrix(:, :,ielem)*Ue; %Avaliar função objetivo
end
s_vms=(reshape(sqrt(sum(s.^2,2)-s(:,1).*s(:,2)+2.*s(:,3).^2),nely,nelx));%Tensões de von Mises
dc=reshape(dc,nely,nelx); %Sensibilidade elementar em formato de matriz
end
```