



# Projeção Ortogonal: uma abordagem com Geometria Dinâmica

## Orthogonal Projection: a Dynamic Geometry approach

## Proyección Ortogonal: un enfoque de Geometría Dinámica

Lucas Siviero Sibemberg<sup>1</sup>

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0003-3347-5064>,  <http://lattes.cnpq.br/3010023862559996>

Márcia Rodrigues Notare<sup>2</sup>

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Instituto de Matemática, Porto Alegre, RS, Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-2897-8348>,  <http://lattes.cnpq.br/9321196983141007>

**Resumo:** O presente trabalho tem como objetivo analisar como o *software* dinâmico GeoGebra 3D pode potencializar a compreensão de projeção ortogonal no Ensino Médio por meio de atividades inspiradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Os dados coletados foram analisados à luz dos estudos de Gutiérrez (1996) envolvendo visualização espacial, habilidades espaciais e geometria dinâmica. Os resultados da investigação apontam que o GeoGebra contribuiu para o desenvolvimento de habilidades espaciais de alguns alunos e, principalmente, para a construção de situações nas quais a projeção ortogonal é solicitada. Os estudos revelaram, também, a importância de os alunos explorarem construções dinâmicas com projeção ortogonal antes de se aventurarem em construí-las. A Geometria Dinâmica foi importante para que os alunos verificassem situações não triviais que aparentam ser.

**Palavras-chave:** Visualização Espacial; Habilidades Espaciais; Geometria Dinâmica; Tecnologia Digital; Geometria Espacial.

**Abstract:** The present work aims to analyze how the dynamic software GeoGebra 3D can enhance the understanding of orthogonal projection in High School through activities inspired by National High School Exam (ENEM). The collected data were analyzed under the studies of Gutiérrez (1996) involving spatial visualization, spatial skills and dynamic geometry. The results show that GeoGebra contributed to the development of spatial skills of some students and, mainly, to the construction of situations in which orthogonal projection is requested. Studies have also revealed the importance of students exploring dynamic constructions with orthogonal projection before venturing to build them. Dynamic Geometry was important for students to verify the non-trivial hypotheses they appear to be.

**Keywords:** Spatial Visualization; Space Skills; Dynamic Geometry; Digital Technology; Spatial Geometry.

**Resumen:** El presente trabajo tiene como objetivo analizar cómo el software dinámico GeoGebra 3D puede mejorar la comprensión de la proyección ortogonal en Bachillerato a través de actividades inspiradas en el Examen Nacional de Enseñanza Media (ENEM). Los datos recolectados fueron analizados a la luz de los estudios de Gutiérrez (1996) que involucran visualización espacial, habilidades espaciales y geometría dinámica. Los resultados de la investigación indican que GeoGebra contribuyó al desarrollo de habilidades espaciales de algunos estudiantes y, principalmente, a la construcción de situaciones en las que se solicita la proyección ortogonal. Los estudios también revelaron la importancia de que los estudiantes exploren construcciones dinámicas con proyección ortogonal antes de aventurarse a construirlas. La Geometría Dinámica fue importante para que los estudiantes verificasen situaciones no triviales que los parecen ser.

<sup>1</sup> **Currículo sucinto:** Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), mestrando em Matemática pela UFRGS. **Contribuição de autoria:** Conceituação, Escrita – Primeira Redação, Investigação e Metodologia. **Contato:** [lucas.siviero@ufrgs.br](mailto:lucas.siviero@ufrgs.br).

<sup>2</sup> **Currículo sucinto:** Licenciada em Matemática, mestra em Computação e doutora em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora Associada do Departamento de Matemática Pura e Aplicada, docente do Curso de Licenciatura em Matemática, docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, docente do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da UFRGS. Pesquisadora da área de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação Matemática. **Contribuição de autoria:** Escrita – Primeira Redação, Escrita – Revisão e Edição, Supervisão. **Contato:** [marcia.notare@ufrgs.br](mailto:marcia.notare@ufrgs.br).



**Palabras clave:** Visión Espacial; Habilidades Espaciales; Geometría Dinámica; Tecnología Digital; Geometría Espacial.

**Data de submissão:** 15 de junho de 2021.

**Data de aprovação:** 2 de abril de 2022.

## 1. Introdução

O presente artigo apresenta um estudo sobre o potencial do *software* de geometria dinâmica GeoGebra para a aprendizagem de projeção ortogonal no Ensino Médio. A pesquisa analisa se a geometria dinâmica favorece o desenvolvimento de habilidades espaciais para a compreensão de projeção ortogonal, tendo como questão de investigação “como o uso do GeoGebra 3D e da geometria dinâmica pode potencializar a compreensão sobre projeção ortogonal no Ensino Médio?”. A pesquisa analisa se a geometria dinâmica favorece o desenvolvimento de habilidades espaciais para a compreensão de projeção ortogonal. A projeção ortogonal é “a representação de um objeto em um plano de projeção, quando as linhas visuais são perpendiculares a este plano” (HOELSCHER; SPRINGER; DOBROVOLNY, 1978), ou seja, ela é um elemento da geometria espacial que permite observar um objeto tridimensional em um plano bidimensional.

Pesquisas apontam sobre a importância de a geometria ser trabalhada de modo a envolver os alunos. Para Sonza e Leivas (2018, p.1549), há uma “[...] inegável necessidade de se buscar métodos e metodologias de ensino que tornem a aprendizagem de Matemática mais atrativa, que desperte o interesse do estudante e que este seja um sujeito dinâmico no processo”.

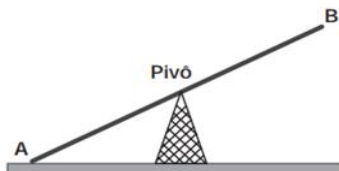
O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é utilizado para avaliar a qualidade do Ensino Médio no país e, principalmente, como meio para que estudantes possam ingressar no Ensino Superior. As notas individuais dos estudantes permitem a inscrição em programas de acesso ao Ensino Superior em universidades públicas brasileiras e, até mesmo, de outros países. Para realçar a importância do tema projeção ortogonal no ensino de Matemática, destacamos que esse é um dos tópicos utilizados pelo ENEM para avaliar a habilidade 6 da competência de Matemática de área 2, que se refere a “Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional”.

Questões sobre o assunto são frequentes na prova, como por exemplo a questão 180 do ENEM 2013, Prova Azul, ilustrada no Quadro 1. Sibemberg (2020) traz outros exemplos de questões do ENEM que abordam o tema projeção ortogonal.



## Quadro 1 – Questão 180

**(Adaptado) Questão 180 - ENEM 2013:** Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

Fonte: Brasil (2013, p. 31, caderno azul).

De acordo com Gutiérrez (1996), já no final do século XX, os livros eram a principal fonte de informação nas escolas, o que se repete nos dias atuais e, provavelmente, deve continuar nos próximos anos. Por meio dos livros didáticos, os estudantes podem estudar praticamente todos os assuntos que são necessários para a conclusão dos ensinamentos Fundamental e Médio. Para o conteúdo de geometria espacial não é diferente. Em geral, o assunto de poliedros é apresentado em livros apenas com definições, acompanhadas de figuras coloridas com algumas explicações, muitas vezes insuficientes para o bom entendimento por parte do aluno. O autor ressalta que essas imagens e explicações são insuficientes para o bom entendimento do aluno sobre o que os poliedros representam. E complementa que o livro didático, não importando quão bom ele seja, sempre terá a limitação de não poder proporcionar ao aluno um elemento básico da geometria espacial, o movimento.

Sibemberg (2020) realizou um estudo com livros didáticos utilizados por uma escola estadual do Estado do Rio Grande do Sul, com o objetivo de analisar se o assunto de projeção ortogonal estava presente nesses livros e, caso estivesse, como ele era abordado. Como resultado, o autor percebeu que, em geral, poucas páginas são dedicadas à projeção ortogonal e a apresentação do assunto é feita por meio de uma linguagem matemática que abusa de formalidades matemáticas e é escasso em figuras que mostrem a projeção ortogonal aplicada em situações verossímeis.

Neste artigo, apresentamos dois conjuntos de atividades, que constituem um recorte de um trabalho mais amplo de conclusão de curso de graduação em Licenciatura em Matemática (SIBEMBERG, 2020), que foram aplicadas para alunos do 2º ano do Ensino Médio, cujo foco era estudar e desenvolver habilidades espaciais para a compreensão de projeção ortogonal a partir da utilização de ambiente de geometria dinâmica (as atividades serão apresentadas na seção 4). O GeoGebra foi utilizado como principal recurso tecnológico no desenvolvimento das atividades.



O artigo está organizado da seguinte forma: as seções 2 e 3 apresentam fundamentos teóricos sobre o desenvolvimento de habilidades espaciais e geometria dinâmica; na seção 4 são apresentadas as atividades trabalhadas e a análise dos dados produzidos na pesquisa; por fim, na seção 5 apresentamos as considerações finais desse estudo.

## 2. O Desenvolvimento de Habilidades de Visualização Espacial

Para Gutiérrez (1996), a concepção de visualização espacial possui uma ampla variedade, dependendo do ponto de vista. Para a Educação Matemática, o conceito está relacionado com a formação e o uso de representações mentais de informações matemáticas. Assim, entende-se que o conjunto de elementos que integram a visualização espacial pode ser dividido em quatro partes principais: imagens mentais, representação externa, processo de visualização e habilidades de visualização (GUTIÉRREZ, 1996).

Gutiérrez (1996) entende que a imagem mental é o elemento mais básico que o estudante precisa para “aprender a construir, transformar e analisar objetos geométricos a fim de adquirir uma boa capacidade de visualização espacial” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 25, tradução nossa).

Presmeg (1986) apresenta exemplos de imagem mental. Para a autora, a imagem concreta consiste no tipo mais simples de imagem mental, sendo o tipo de imagem que normalmente usamos para representar poliedros. Já a imagem dinâmica envolve o movimento mental de algum objeto e, portanto, ela permite visualizar este objeto em qualquer posição desejada. A imagem cinestésica, por sua vez, é caracterizada pelo movimento de um objeto utilizando algumas partes do corpo (como por exemplo as mãos ou a cabeça).

Para Escrivà; Jaime e Gutiérrez (2018), as imagens mentais e os processos de visualização são as peças centrais da atividade de visualização em Matemática. Assim, os autores defendem que para realizar esses processos de visualização e relacionar informações externas com informações mentais do tipo visual, é fundamental desenvolver habilidades que permitam realizar essas conexões.

O processo de visualização está dividido em dois processos inter-relacionados, em que o primeiro “é o processo de converter dados abstratos e não figurativos em imagens visuais, e também converter uma imagem mental em outra” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 26), chamado de processamento visual. O segundo consiste no processo de interpretação da informação figural, em que este é o “processo de ler, analisar e entender representações espaciais, como representações no plano ou imagens mentais de poliedros, a fim de obter algum dado deles” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 26).

O último componente da atividade de visualização são as habilidades de visualização, em que “o aprendizado e a melhoria dessas habilidades é a chave de todo o processo de visualização espacial” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 26, tradução nossa). Assim, quando as habilidades de



visualização estão desenvolvidas, ou em desenvolvimento, o aluno pode escolher qual habilidade de visualização usar, dependendo do problema que ele estiver resolvendo. Listamos algumas das principais habilidades de visualização para Gutiérrez (1996):

- *Figure-ground perception* (Percepção figura-fundo): nesta habilidade espera-se que o sujeito identifique um certo objeto isolado de um contexto complexo.
- *Perceptual constancy* (Constância perceptiva): nesta habilidade espera-se que o sujeito reconheça que, independente de cor, tamanho, textura ou posição, algumas propriedades de um objeto permanecem as mesmas.
- *Mental rotation* (Rotação mental): nesta habilidade espera-se que o sujeito consiga produzir uma imagem mental dinâmica, isto é, em sua mente consiga visualizar movimentos de um objeto para interpretar alguma configuração dele.
- *Perception of spatial relationships* (Percepção de relações espaciais): nesta habilidade espera-se que o sujeito consiga relacionar objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros.

A seguir, apresentamos fundamentos teóricos sobre o papel da geometria dinâmica no desenvolvimento das habilidades de visualização espacial.

### 3. A Geometria Dinâmica e a Visualização Espacial

De acordo com Santos e Moita (2016), os recursos tecnológicos podem contribuir para o processo de aprendizagem, pois permitem ao professor interpretar, refletir e criar processos de ensino inovadores, numa prática produtiva e dinâmica, reinventando o ato de educar. Estudos sugerem que o GeoGebra é uma das tecnologias digitais com potencial para melhorar o processo de aprendizagem do aluno (NOTARE; BASSO, 2016; LEMMERTZ, 2019; SIBEMBERG, 2020). Assim, destacamos que

O desenvolvimento de sistemas dinâmicos voltados para a aprendizagem de Matemática tem possibilitado novas formas de tratamento para problemas, pela possibilidade de tornar acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos que até então precisavam ser tratados de maneira estática e abstrata (NOTARE; BASSO, 2016, p. 2).

Dessa forma, os recursos de geometria dinâmica 3D podem contribuir para o raciocínio espacial dos alunos, desenvolvendo pensamentos que vão além das possibilidades obtidas com papel e lápis, ampliando o acesso e a manipulação de objetos espaciais. Atividades nesses ambientes também podem estimular a participação e a autonomia do aluno nas atividades, para que ele reconheça e valorize sua capacidade intelectual.

Para evidenciar o potencial dos ambientes dinâmicos na resolução de problemas que envolvem habilidades de visualização espacial, Notare e Basso (2016) propuseram um problema de geometria espacial, retirado de uma prova do ENEM de 2011, para um grupo de mestrandos



em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A solução da questão exige o emprego de habilidades de visualização espacial do estudante. Os autores perceberam que os estudantes, ao tentar resolver o problema com papel e lápis, de forma estática, não obtiveram sucesso, pois “construíram uma imagem figural equivocada dos sólidos destacados” (NOTARE; BASSO, 2016, p. 4). Após a etapa de resolução estática, os alunos são incentivados a representar a situação problema no GeoGebra 3D, utilizando suas possibilidades de construção e dinamismo. Os estudantes realizaram construções dinâmicas que realçavam a solução do problema. É notado que o GeoGebra 3D permite construção de objetos dinâmicos isomorfos à situação real e que ele pode potencializar o aprendizado de situações de geometria espacial.

Em 1996, Gutiérrez já mencionava a importância do uso de geometria dinâmica como recurso para potencializar o ensino de geometria, inclusive apontando que nas aulas do futuro “[...] podemos imaginar salas de aula cheias de computadores, muitos CDs em uma prateleira, e um grande armário contendo muitos aparatos e objetos manipuláveis” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 33, tradução nossa). O autor imaginava que, quando professores e estudantes fossem abordar o trabalho sobre sólidos geométricos, como por exemplo pirâmide, cubo ou qualquer outro objeto espacial, os professores deveriam dar alguns minutos para os alunos manipularem o sólido e, em seguida, olhar e movimentar os sólidos na tela do computador, de forma que, após isso, os alunos conversassem sobre as propriedades descobertas.

Isso mostra que, já no século passado, existia uma preocupação em fugir da aula focada somente em livros didáticos, que, naquela época — e continua sendo — era a principal fonte de informação nas salas de aula (GUTIÉRREZ, 1996). Gutiérrez (1996) afirma que, até aquele momento, o contato de alunos com a abordagem dinâmica dava-se somente pelo manuseio de sólidos físicos, que apresentava como limitação o fato de que os alunos faziam movimentos muito rápidos, movendo os objetos apenas para as representações convencionais, sem utilizar todo o potencial que uma abordagem dinâmica pode proporcionar. O autor conclui que essa abordagem, como a abordagem por livros didáticos, normalmente gera imagens mentais estáticas na mente dos alunos, que limitam a compreensão total dos objetos geométricos e dificultam a resolução de problemas.

Para realçar a importância de um *software* de geometria dinâmica, Gutiérrez (1996) argumenta que, em geral, os livros didáticos representam os sólidos em posições convencionais. A partir das imagens ilustradas na Figura 1, o autor discute que, com o uso de um computador, o aluno poderia reconhecer mais facilmente que representações não convencionais também, são, de fato, representações de uma pirâmide.





Figura 1 – Representações de uma pirâmide



Fonte: Gutiérrez (1996, p. 24).

São muitos os estudos que mostram que a utilização da geometria dinâmica em sala de aula potencializa a aprendizagem de geometria espacial e auxilia no desenvolvimento de habilidades espaciais (NOTARE; BASSO, 2016; LEMMERTZ, 2019; SIBEMBERG, 2020). A seguir, apresentamos a pesquisa realizada sobre a resolução de problemas de projeção ortogonal em ambiente de geometria dinâmica.

#### 4. Projeção Ortogonal: O Potencial das Atividades Dinâmicas

Apresentamos nessa seção a pesquisa norteada pela questão “Como o uso do GeoGebra 3D e da geometria dinâmica pode potencializar a compreensão sobre projeção ortogonal no Ensino Médio?”. O objetivo foi investigar o potencial do *software* dinâmico GeoGebra 3D para a compreensão de projeção ortogonal no Ensino Médio por meio de atividades inspiradas no ENEM, à luz de fundamentação teórica envolvendo visualização espacial, habilidades espaciais e geometria dinâmica.

A investigação, de cunho qualitativo, propôs o desenvolvimento de uma oficina, organizada em seis encontros com duração de dois períodos (1h40min) cada, cujas atividades no GeoGebra contemplavam o desenvolvimento de conceitos de geometria espacial, habilidades de visualização espacial e identificação de representações ortogonais de objetos tridimensionais. Participaram da oficina 23 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do Estado do Rio Grande do Sul, em horário regular das aulas de Matemática. De modo geral, os alunos foram organizados em duplas para a realização das atividades. Os estudantes, no decorrer das análises apresentadas, serão referenciados pela letra inicial de seus nomes. Seleccionamos para apresentar e analisar nesse artigo dois conjuntos de atividades que foram aplicadas na oficina<sup>1</sup>, que ilustram e representam o conjunto de atividades realizadas.

##### 4.1. Atividade 1: Introduzindo o conceito de projeção ortogonal

O primeiro conjunto de atividades, composto por oito itens, foi aplicado para 23 alunos da turma e tinha o objetivo de introduzir o conceito de projeção ortogonal, além de familiarizar os alunos com construções de projeções ortogonais de alguns objetos geométricos no GeoGebra.

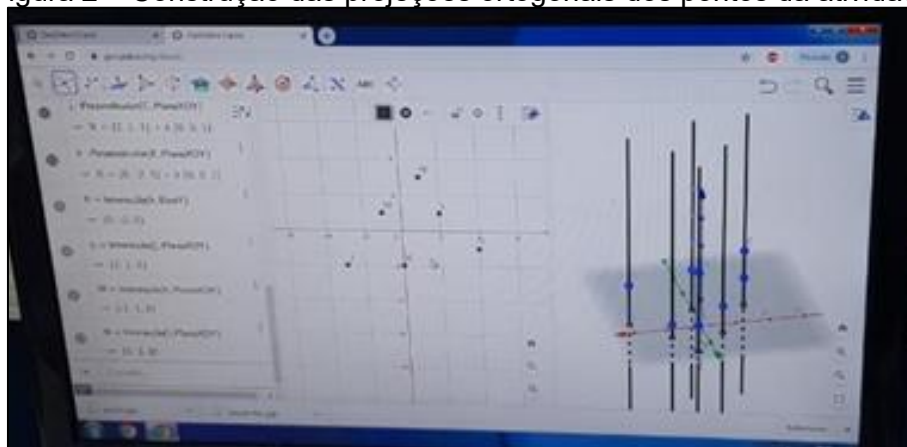
<sup>1</sup> Todas as atividades que foram realizadas pela turma podem ser acessadas em Sibemberg (2020).

Os pesquisadores apresentaram aos estudantes um arquivo com uma construção no GeoGebra. A construção era composta de oito pontos no espaço. Os alunos deveriam construir a projeção ortogonal desses pontos no plano  $xOy$ . O objetivo dessa atividade era proporcionar aos alunos uma primeira exploração do conceito de projeção ortogonal, observando o que acontece ao projetarmos ortogonalmente pontos e segmentos de reta, estimulando o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial.

Houve uma discussão inicial sobre a ideia de projeção ortogonal. Muitos alunos, em um primeiro momento, ficaram com dúvidas sobre como fazer a construção (Figura 2) das projeções, sendo necessária a ajuda do pesquisador para dar início à atividade. Visto isso, o pesquisador decidiu agrupar os estudantes em grupos de sete a dez membros para discutir como projetar um ponto no plano, a partir da utilização da ferramenta reta perpendicular do GeoGebra. Foram formados três grupos. Em todos os grupos, pelo menos um aluno do grupo salientou que a projeção ortogonal dos pontos era dada pela interseção entre a reta perpendicular ao plano  $xOy$  passando pelo ponto e o próprio plano  $xOy$ .

Depois dessa conversa inicial, os alunos retornaram às duplas originais para concluir a construção das projeções ortogonais dos pontos. A dupla formada pelos alunos T e B finalizou as construções com desenvoltura, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Construção das projeções ortogonais dos pontos da atividade



Fonte: Acervo dos autores.

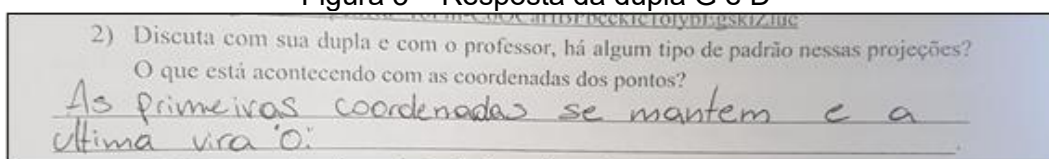
A sequência dessa atividade questionava sobre a observação de padrão entre as projeções ortogonais dos pontos, a partir da análise das coordenadas desses pontos, incentivando a observação de diferentes representações para os pontos projetados. Discussões foram iniciadas quando algumas duplas tentaram encontrar o padrão entre as projeções. A dupla supracitada iniciou uma conversa com o pesquisador, e concluiu que as projeções ortogonais poderiam ser visualizadas nas janelas de visualização do GeoGebra 2D e 3D. Os alunos B e T foram questionados sobre o GeoGebra ter ou não auxiliado na compreensão da ideia de projeção ortogonal: o aluno B comentou que “Antes eu não tinha entendido nada, pelo menos agora eu sei



que é só colocar zero na última posição”; e o aluno T comentou que já havia entendido bem o conceito, mas que achou divertido construir as projeções pelo GeoGebra.

Para a mesma questão, a dupla G e D respondeu conforme indicado na Figura 3. Ao observar a resposta da dupla, o pesquisador questionou “Como vocês chegaram nisso?”. Sem hesitação, G respondeu “É só olhar no GeoGebra”. Um dos objetivos da pesquisa foi observar em que aspectos o GeoGebra potencializa o ensino de projeção ortogonal e, os autores acreditam que, essa observação dos alunos foi feita a partir da exploração da projeção ortogonal proporcionada pelo GeoGebra em suas diferentes representações.

Figura 3 – Resposta da dupla G e D

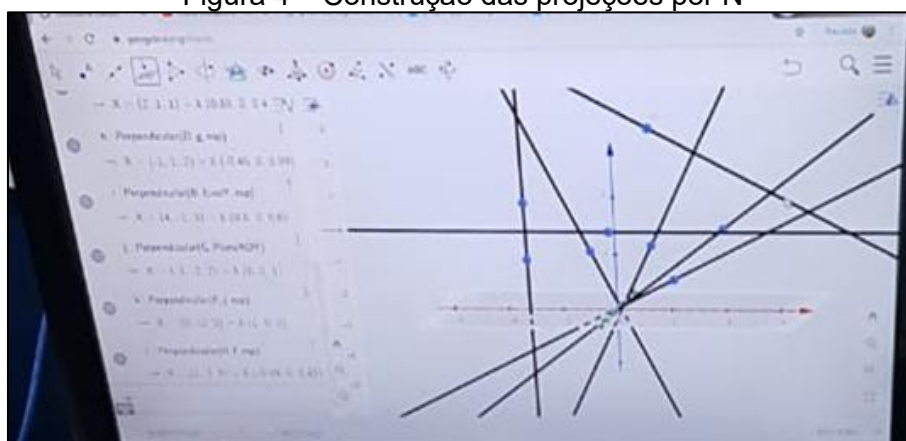


Fonte: Acervo dos autores.

Destacamos que a possibilidade de manipular e visualizar as janelas algébrica e gráfica simultaneamente ajuda os alunos na identificação de propriedades da projeção ortogonal.

Alguns alunos apresentaram dificuldade na projeção dos pontos. N apresentou suas construções para o pesquisador, ilustradas na Figura 4. Ao justificar sua construção, N afirmou que utilizou a ferramenta reta perpendicular selecionando o ponto e o plano. Entretanto, ao analisarmos sua construção, verificamos que N selecionou o eixo  $x$  em vez de selecionar o plano  $xOy$  e, assim, o GeoGebra construiu retas perpendiculares ao eixo  $x$  e não ao plano  $xOy$ . Após diálogo com o pesquisador, a atividade foi finalizada com êxito. Destacamos aqui que o processo de familiarização com GeoGebra está ocorrendo de forma simultânea ao desenvolvimento das atividades.

Figura 4 – Construção das projeções por N



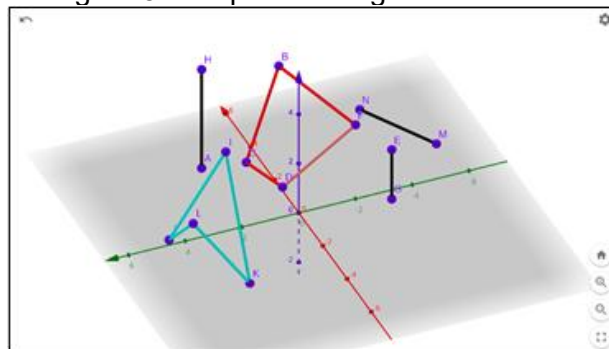
Fonte: Acervo dos autores.

No caso de N, houve dificuldade com a utilização do *software*. Porém, verificamos que N considerou sua construção correta ao apresentar ao pesquisador, o que evidencia, ainda, falta de compreensão sobre o conceito de projeção ortogonal. Considerar sua construção correta

evidencia que N ainda não construiu uma imagem mental correta da projeção ortogonal de um ponto, pois não identifica representações externas inconsistentes (GUTIÉRREZ, 1996). Neste processo, N ainda não mostra evidências de realizar uma interpretação da informação figural, pois não é capaz de ler, analisar e entender a representação espacial relativa à projeção ortogonal de ponto em um plano, processo importante para o desenvolvimento da visualização espacial (GUTIÉRREZ, 1996).

A Figura 5 ilustra o arquivo do GeoGebra referente à atividade seguinte. Nessa questão, os alunos foram convidados a construir as projeções ortogonais de segmentos de reta e observar casos especiais nas projeções.

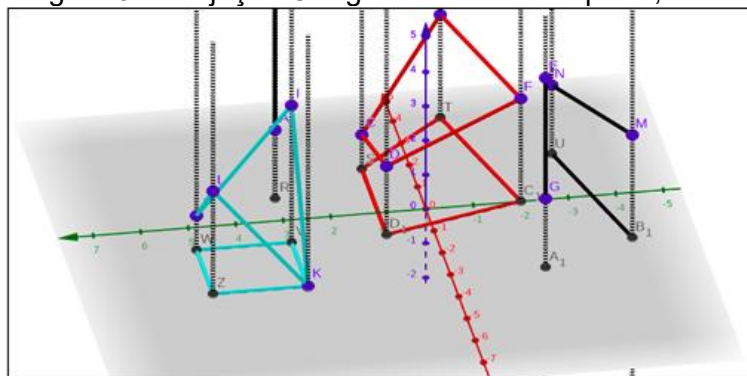
Figura 5 – Arquivo da segunda atividade



Fonte: Acervo dos autores.

A maioria das duplas em aula construiu as projeções ortogonais dos pontos sem muitas dificuldades, porém para projetar os segmentos de reta, apresentaram comportamento diferente. O grupo formado pelos alunos F, Z e R pediu auxílio ao pesquisador para projetar os segmentos. O pesquisador respondeu: “O D e o F tão ligados né, então o que a gente vai fazer é ligar a projeção deles também”. Os alunos entenderam a ideia e concluíram a atividade, obtendo o resultado ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Projeção Ortogonal construídas por F, Z e R



Fonte: Acervo dos autores.

O pesquisador iniciou uma discussão com o grupo, buscando observar se alguma das projeções havia surpreendido os alunos. O aluno F respondeu que o quadrado como projeção ortogonal de segmentos que, no espaço, não representam um quadrado, havia lhe surpreendido.

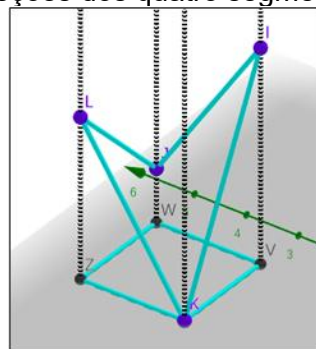
Isso destaca o papel do GeoGebra na ampliação do repertório de possibilidades de imagens dos estudantes (NOTARE; BASSO, 2016), possibilitando o desenvolvimento das habilidades de visualização, como a capacidade de percepção de relações espaciais, em que o aluno relaciona objetos espaciais, neste caso, o segmento e sua projeção ortogonal (GUTIÉRREZ, 1996).

Na mesma atividade, havia o questionamento: A projeção ortogonal de um segmento de reta é um segmento de reta?, que desencadeou o seguinte diálogo:

F: *O sor, a gente não entendeu a segunda pergunta.*  
 Pesquisador: *Eu quero saber nela, se eu pegar um segmento de reta e projetar ele no plano, se a projeção vai ser um segmento de reta.*  
 F: *Então a resposta é sim.*  
 Pesquisador: *Mas peraí, vamos olhar pra projeção do segmento HA.*  
 F: *É o O.*  
 Pesquisador: *Isso! E HA é um segmento. Mas a gente viu que ali deu um ponto. Então não é verdade.*  
 F: *Entendi agora. Então a resposta é não.*

A dupla T e B também teve êxito na solução da atividade. T ainda observou para o pesquisador “Não é um quadrado no espaço, mas no plano sim”, observando as projeções ortogonais de quatro segmentos de reta representados no espaço, que tem o formato de um quadrado (Figura 7).

Figura 7 – Projeções dos quatro segmentos observados



Fonte: Acervo dos autores.

Os alunos que conseguem observar o quadrado como projeção ortogonal dos quatro segmentos na Figura 7 estão desenvolvendo e utilizando a habilidade percepção figura-fundo (GUTIÉRREZ, 1996), em que, mesmo com todo o contexto que está inserido o contorno do quadrado, os alunos percebem que segmentos que não tem relação aparente e, mesmo assim, suas projeções (juntas) formam um quadrado. Este fato revela também a habilidade de percepção de relações espaciais entre segmento de reta e sua projeção ortogonal no plano, ancorado pela imagem visual das retas perpendiculares.

Outra questão da folha de atividades fazia a seguinte pergunta: A partir de uma projeção ortogonal, podemos obter o objeto que está sendo projetado? A aluna N respondeu que não podemos dizer nada sobre o objeto se uma de suas projeções ortogonais for um quadrado. Acreditamos que a aluna respondeu desta forma, considerando a projeção dos quatro segmentos

de reta no espaço que formavam um quadrado no plano  $xOy$ . Quando a aluna respondeu a essa questão, estava apoiada na imagem mental do quadrado e isso, provavelmente, a levou à resposta. Identifica-se um processamento visual realizado pela aluna N, que converte a imagem mental do quadrado projetado em segmentos de retas no espaço (ESCRIVÀ; JAIME; GUTIÉRREZ, 2018).

Os próximos itens da atividade convidavam os alunos a explorar as projeções ortogonais dos seguintes sólidos: cubo, octaedro, tetraedro, pirâmide regular de base triangular, pirâmide regular de base quadrangular, pirâmide regular de base hexagonal, prisma regular de base triangular e prisma regular de base hexagonal. Além de analisar os seguintes polígonos: triângulo, quadrilátero, retângulo pentágono, hexágono e octógono e encontrar respectivos sólidos, em que uma das projeções ortogonais fossem o polígono. Foi utilizado o material digital dinâmico<sup>2</sup>, em que as projeções dos sólidos estão construídas em três planos de projeção distintos. Cada grupo escolheu um sólido para encontrar três de suas projeções ortogonais e, depois, escolher um polígono e encontrar três sólidos cujas projeções ortogonais resultassem nesse polígono.

Essa atividade teve uma proposta diferente das anteriores, com foco nas projeções ortogonais de polígonos. A utilização deste material digital foi importante para a pesquisa, para que os alunos pudessem explorar projeções ortogonais de outros objetos, sem se preocupar com a construção de tais projeções, além de integrar na sequência de atividades a utilização de materiais já desenvolvidos por outros pesquisadores.

Sete grupos concluíram a atividade. Vamos analisar a resolução da dupla M e V. A dupla escolheu o cubo para investigar as possíveis projeções ortogonais. Os alunos encontraram, com desenvoltura, o quadrado e o retângulo como projeção ortogonal do cubo (Figura 8), mas estavam com dificuldade para encontrar uma terceira projeção. O pesquisador ajudou os alunos nesse processo, conforme diálogo a seguir.

Pesquisador: *Mas vocês não mexeram no cubo?*

M: *Mexemos, mas a gente só conseguiu o retângulo e o quadrado.*

Pesquisador: *Como assim? Mexe um pouco mais o y.*

V movimentou o controle y, resultando na posição do cubo ilustrado na Figura 10.

Pesquisador: *Ali a gente não tem um polígono diferente?* (referindo-se à projeção ortogonal no plano  $xOy$ ).

M: *Tem, mas isso não é um cubo* (referindo-se ao sólido).

V: *É.*

Pesquisador: *Peraí, vamos vê.*

O pesquisador pega seu estojo e volta para fazer uma observação com os alunos.

Pesquisador: *Se eu movimentar meu estojo ele ainda é um estojo, né?*

M: *Sim.*

Pesquisador: *Então se eu movimentar o cubo eu continuo com o cubo.*

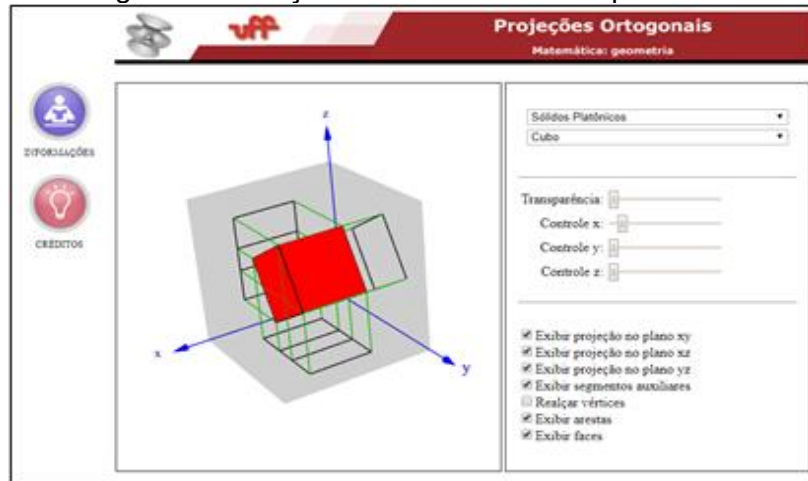
M: *Tá, então o hexágono é a resposta?*

Pesquisador: *Isso.*

<sup>2</sup> Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pro/pro-html/pro-br.html>. Acesso em: 27 ago. 2020.



Figura 8 – Posição do cubo encontrada por M e V



Fonte: Acervo dos autores.

A partir da análise do diálogo, identificamos que os alunos M e V precisam desenvolver a habilidade constância perceptiva (reconhecer que, independentemente de cor, tamanho, textura ou posição, algumas propriedades do objeto permanecem as mesmas), pois M e V estavam com dificuldade para perceber que, ao movimentar o cubo (e de um modo geral, qualquer objeto), o sólido permanecia sendo um cubo.

Para resolver a última parte da atividade, os alunos fizeram uma relação interessante. O pesquisador estava auxiliando outro grupo que estava por perto e ouviu a dupla comentando que, como uma das projeções do cubo era um retângulo, então o cubo é um sólido que possui o retângulo como uma de suas projeções ortogonais. Vale observar que foi frequente a confusão de nomenclatura entre quadrado e cubo ou triângulo e pirâmide. A pergunta de D exemplifica essa confusão “Um triângulo pode gerar um retângulo?”. Finalmente, depois de várias tentativas com outros sólidos, a dupla V e M conseguiu concluir a atividade (Figura 9).

Figura 9 – Respostas de M e V

Retângulo	Cubo quadrado	Pirâmide	Octaedro
-----------	------------------	----------	----------

Fonte: Acervo dos autores.

Uma observação feita por algumas duplas foi que é possível encontrar como projeções ortogonais polígonos nos planos laterais também, e não somente no plano  $xOy$ . O diálogo entre o pesquisador e a dupla I e E mostra essa situação: as alunas estavam procurando por uma projeção da pirâmide regular de base triangular e solicitaram ajuda para o pesquisador. Na verdade, as alunas estavam com uma possível projeção ortogonal construída, porém não estavam conseguindo visualizá-la, por que só analisavam o plano  $xOy$ . Então o pesquisador comentou “Vocês podem botar quadrilátero, aqui em cima é um quadrilátero né” (referindo-se a uma projeção ortogonal em um dos planos laterais). E respondeu “Mas pode ser daqui também?”, no qual o pesquisador respondeu “Sim, a projeção pode ser em qualquer plano”.

Percebemos que os alunos I e E tiveram dificuldade para visualizar a projeção ortogonal em um plano que não fosse o que estávamos trabalhando até aquele momento. Acreditamos que os alunos não conseguiram utilizar a habilidade espacial de percepção de relações espaciais, pois não conseguiram relacionar o sólido (cubo) com as projeções nos planos laterais (GUTIÉRREZ, 1996).

As construções dos alunos sugerem que a geometria dinâmica ajudou no entendimento sobre projeção ortogonal dos sólidos mencionados, pois proporcionou a visualização dinâmica da projeção ortogonal dos sólidos enquanto eles movimentavam os mesmos.

#### 4.2. Atividade 2: Aplicando o conceito de projeção ortogonal em problemas

O segundo conjunto de atividades foi realizado apenas com sete alunos da turma, em horário alternativo. Por não ser no período regular das aulas, poucos alunos puderam participar desse encontro. Essas atividades tinham a característica de ser mais desafiadoras, propondo a resolução de questões do ENEM sobre projeção ortogonal.

Os alunos foram organizados em dois grupos. Cada grupo recebeu uma questão do ENEM sobre projeção ortogonal. Os alunos deveriam construir no GeoGebra as situações propostas pelas questões, entretanto, pela limitação de tempo, o pesquisador fez as construções e os alunos as manipularam e exploraram.

Em um primeiro momento, cada aluno teve em torno de dez minutos para resolver a questão, sem a utilização de recurso digital. Durante esse período, os alunos podiam se comunicar e o pesquisador não fez intervenções em nenhum dos grupos. Para cada questão, todos os membros do grupo responderam de forma igual, porém com justificativas diferentes.

Discutiremos ambas as respostas dos alunos, começando pela questão referente à questão 153 do ENEM de 2012 (BRASIL, 2012) (Quadro 2). Essa questão foi resolvida pelos alunos M, V e P. V respondeu que a imagem que melhor representa o trajeto seria um semicírculo, pois o ponto A está situado no chão. Os outros alunos também responderam que a representação no plano seria de um semicírculo. Não foi possível identificar o porquê de os alunos apresentarem essa resposta. Uma hipótese é que os alunos estavam com dificuldades na elaboração da imagem mental da trajetória do motoqueiro (GUTIÉRREZ, 1996), faltando habilidades espaciais como rotação mental e percepção de relações espaciais. Os alunos não estavam conseguindo interpretar o problema e construir uma imagem mental que fornecesse uma ideia para solução da questão, ou seja, precisaram de recursos que permitissem desenvolver ou ativar suas habilidades de visualização espacial.

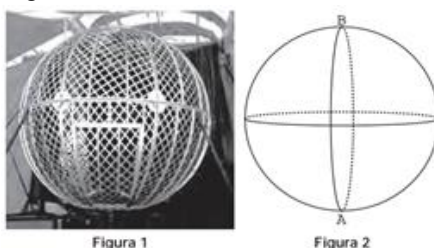
#### Quadro 2 – Questão 153

**(Adaptado) Questão 153 - ENEM 2012:** O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros





andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

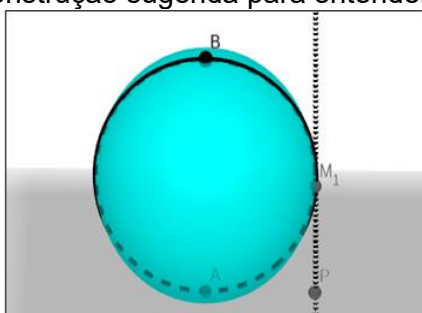


Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. Qual a imagem que melhor representa o trajeto feito pelo motoqueiro no plano?

Fonte: Brasil (2012, p. 23, caderno azul).

Após os alunos finalizarem a primeira etapa, o pesquisador fez a construção no GeoGebra, representada na Figura 10, em um computador e os alunos acompanharam e analisaram. Nessa construção, a esfera representa o globo da morte, o ponto  $M_1$  representa o motociclista e o ponto P representa a projeção ortogonal do motociclista no plano do chão.

Figura 10 – Construção sugerida para entender a questão 153

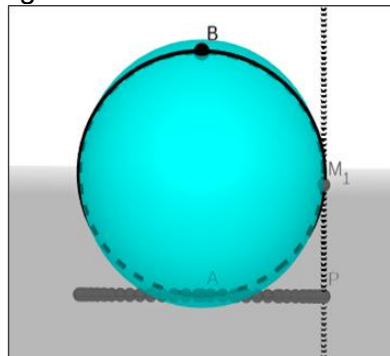


Fonte: Acervo dos autores.

O pesquisador iniciou uma discussão com os alunos comentando “Vocês concordam que esse ponto aqui é o motociclista?” Neste momento, só tínhamos construído a esfera e o ponto  $M_1$ . Então M respondeu ao pesquisador com uma pergunta “Mas ele não dá a volta inteira né?” O pesquisador comentou “O exercício diz que ele vai de A até B e de B até A, uma volta completa”. Os autores acreditam que M e os demais membros do grupo resolveram a questão tendo em mente que o motociclista dava apenas meia volta no globo da morte. Então, juntamente com os alunos, o pesquisador construiu a reta perpendicular ao plano do chão que passa pelo ponto  $M_1$ , e construiu o ponto D, projeção ortogonal do motociclista no solo. Os três alunos concordaram que aquela era a projeção ortogonal. Antes de movimentar o ponto, buscando identificar as habilidades de visualização dos alunos, o pesquisador perguntou “O que vocês acham que o ponto  $M_1$  vai fazer?”. Os alunos ficaram em silêncio e M, timidamente, respondeu “Um C?” Então o pesquisador habilitou o rastro do ponto P, recurso do GeoGebra que permite ver a trajetória de

um ponto, e fez, usando o controle deslizante, uma volta completa do motociclista, resultando na situação representada na Figura 11.

Figura 11 – Projeção Ortogonal do deslocamento do motociclista em movimento



Fonte: Acervo dos autores.

A partir da exploração e observação no GeoGebra, o pesquisador e os alunos debateram sobre a construção.

Pesquisador: *Que que vocês acham?*

M: *Que tá errado.*

Pesquisador: *Como assim?*

M: *Não tem essa resposta na folha.*

O pesquisador pensou por alguns instantes no que M quis dizer e percebeu que na Figura 13 a projeção ortogonal do movimento do motociclista está na horizontal e não na vertical como mostra a alternativa correta 'e'.

Pesquisador: *Te entendi agora. (Pesquisador movimentava a Janela de visualização 3D de forma que a projeção fique na vertical) E agora, tá certo?*

Nenhum aluno se manifestou. O pesquisador comentou sobre todos passos que havia feito até chegar na linha vertical.

Pesquisador: *Ficou mais ou menos claro?*

P: *Sim.*

Pesquisador: *M... V?*

M: *Tá, agora faz sentido.*

V: *Acho que sim.*

Os autores acreditam que a dificuldade do aluno M para entender a construção feita pelo pesquisador foi a falta da habilidade rotação mental, isto é, conseguir visualizar mentalmente movimentos de um objeto para interpretar alguma configuração dele (GUTIÉRREZ, 1996). O aluno M não conseguiu perceber que apenas estava visualizando para o movimento do motociclista de outra perspectiva. Outra possibilidade é que a habilidade de elaborar uma imagem mental dinâmica também pode não estar bem construída pelo aluno M.

A outra questão do ENEM de 2012 (BRASIL, 2012) (Quadro 3) foi proposta aos alunos G, R, I e E. Nesta atividade, todos os alunos acertaram a questão antes de ser discutida a partir da exploração no GeoGebra. Porém, ainda assim, somente E justificou de uma forma mais adequada, dizendo que fez o desenho do que seria a projeção do deslocamento na mesa. Na discussão entre os alunos, o pesquisador percebeu que E foi a primeira a responder à questão e os demais

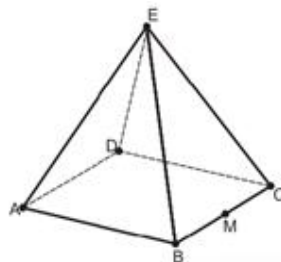


seguiram sua resposta, provavelmente, buscando justificar de alguma maneira, como por exemplo G que respondeu que “segiu as linhas”.

Os alunos tiveram, aproximadamente, dez minutos a mais para discutir a questão, enquanto o pesquisador fazia a construção da outra questão no GeoGebra com o outro grupo de alunos. Então, o pesquisador fez a construção da pirâmide (Figura 12) com pontos que percorriam o deslocamento de João (personagem da questão). A pirâmide foi construída utilizando a ferramenta pirâmide do GeoGebra 3D, assim como o ponto médio entre A e B. Foram construídos segmentos de reta entre os pontos que determinavam o deslocamento de João. Cada um desses pontos teve sua projeção ortogonal construída da mesma forma que foi construída a projeção ortogonal do motociclista na questão anterior.

Quadro 3 – Questão 165

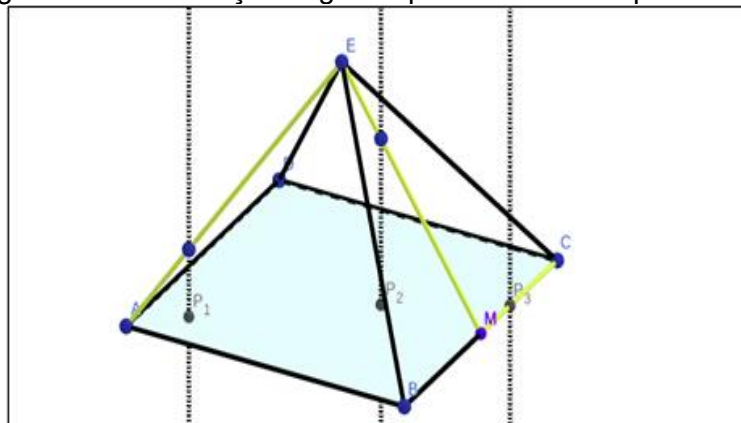
**(Adaptado) Questão 165 - ENEM 2012:** João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. Qual o desenho que Bruno deve fazer?

Fonte: Brasil (2012, p. 27, caderno azul).

Figura 12 – Construção sugerida para entender a questão 165



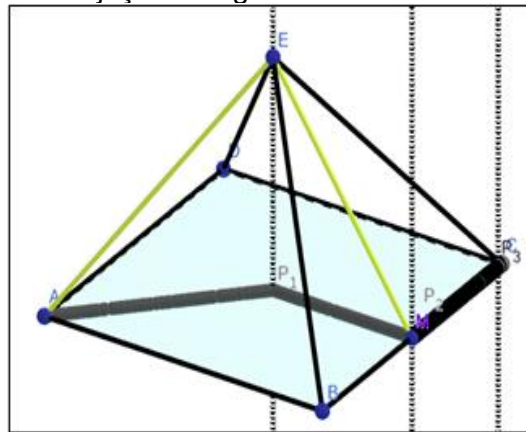
Fonte: Acervo dos autores.

Os alunos foram questionados se concordavam que o deslocamento de João era o representado pelos três pontos, e todos concordaram. Então o pesquisador mostrou a projeção



ortogonal no solo do deslocamento de João (Figura 13). Quando o pesquisador finalizou a construção, G comentou “Foi exatamente isso que eu pensei, só que eu não preciso do GeoGebra”, revelando uma habilidade espacial de rotação mental de G, em que ele é capaz de gerar uma representação externa de um objeto em movimento. Ao final, o pesquisador perguntou aos quatro alunos se essa construção no GeoGebra havia deixado mais clara a resposta do problema. Todos concordaram com o professor.

Figura 13 – Projeção Ortogonal do deslocamento de João



Fonte: Acervo dos autores.

Os dados analisados nessa pesquisa revelam que a geometria dinâmica ajudou os alunos no processo de entender, visualizar e resolver as questões do ENEM, pois com ela foi possível recriar a situação com verossimilhança. Com mais tempo dedicado para os alunos explorarem essas questões com o GeoGebra, seria possível que eles mesmos realizassem as construções, para tirar as conclusões sobre a resposta correta em cada questão.

## 5. Considerações Finais

Nesse trabalho, propomos atividades introdutórias e mais avançadas sobre projeção ortogonal utilizando o *software* GeoGebra, buscando investigar como o *software* dinâmico GeoGebra 3D pode potencializar a compreensão de projeção ortogonal no Ensino Médio. Em nossas atividades, foi possível perceber que o GeoGebra contribuiu para o desenvolvimento das habilidades espaciais de alguns alunos e, principalmente, para a construção da representação externa de situações onde a projeção ortogonal é solicitada. No entanto, observamos que, em nossas atividades, houve um enfoque maior na construção das projeções ortogonais e não na exploração de projeções ortogonais já prontas. Isso pode ter refletido em uma limitação para alguns alunos, onde o aluno sabia como construir a representação externa de algum objeto solicitado, porém não gerava uma imagem mental que lhe mostrasse por onde começar. Vale mencionar que a geometria dinâmica foi fundamental para que os alunos manipulassem os objetos e visualizassem as construções de diversos ângulos e tirassem conclusões sobre elas.

Acreditamos que seja fundamental, para o desenvolvimento do ensino de Geometria - e dos assuntos de Matemática em geral - a realização de mais pesquisas sobre novas abordagens para ensinar e aprender, em especial, com a utilização de ambientes de matemática dinâmica. Também, que essas pesquisas estejam acessíveis e possam ajudar as pessoas que fazem a diferença em sala de aula: os professores.

## Referências

- BRASIL. Ministério da Educação. **ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2012. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br>. Acesso em: 29 ago. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2013. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 29 ago. 2020.
- ESCRIVÀ, M. T.; JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. **Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia**, v. 7, n. 1, p. 42-62, 2018. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/EscJaiGut18.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2021.
- GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. *In*: PUIG, L.; GUTIÉRREZ, A. (eds.). CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20. **Anais** [...]. Valencia: Universidad de Valencia, 1996. p. 3-19. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>. Acesso em: 26 jun. 2019.
- HOELSCHER, R. P.; SPRINGER, C. H.; DOBROVOLNY, J. S. **Expressão Gráfica de Desenho Técnico**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.
- LEMMERTZ, A. S. **Visualização espacial via exploração de objetos tridimensionais**. Orientador: Marcus Vinícius de Azevedo Basso. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.
- NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. A. Geometria Dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial. **Renote: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 2, 2016. DOI: <https://doi.org/10.22456/1679-1916.70683>.
- PRESMEG, N. C. **Visualization in high school mathematics**. *For the Learning of Mathematics*, v. 6, n. 3, p. 42-46, 1986. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40247826>. Acesso em: 26 jun. 2019.
- SANTOS, J. J. A.; MOITA, F. M. G. S. C. **Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade**. 2016. Disponível em: [http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic\\_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf](http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf). Acesso em: 26 jun. 2019.
- SIBEMBERG, L. S. **GeoGebra 3D no Ensino Médio: Uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal**. Orientadora: Márcia Rodrigues Notare. 2019. 142 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/212899>. Acesso em: 29 ago. 2020.



SONZA, A. P.; LEIVAS, J. C. P. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma Oficina Pedagógica. **Thema**, Pelotas, v. 15, n. 4, 2018. DOI: <https://doi.org/10.15536/thema.15.2018.1549-1561.1122>.

