UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COCICLOS DE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS E ESPAÇO SIMBÓLICO COM LONGA MEMÓRIA

TESE DE DOUTORADO

Alex Jenaro Becker

Porto Alegre, RS, Brasil
2021

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Alex Jenaro Becker

Tese apresentada ao curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de concentração: Matemática Pura, Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Porto Alegre, RS, Brasil 2021

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Tese de Doutorado:
Cociclos de Funções Homogêneas e Espaço Simbólico com Longa Memória

elaborado por
Alex Jenaro Becker

como requisito parcial para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Alexandre Tavares Baraviera, Dr.
(Presidente/Orientador)

Lucas Henrique Backes, Dr. (UFRGS)

Lucas da Silva Oliveira, Dr. (UFRGS)

Marcelo Sobottka, Dr. (UFSC)

Mauricio Fronza da Silva, Dr. (UFSM)

Porto Alegre, 24 de Março de 2021.

RESUMO

Tese de Doutorado

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal de Porto Alegre

COCICLOS DE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS E ESPAÇO SIMBÓLICO COM LONGA MEMÓRIA

AUTOR: ALEX JENARO BECKER

ORIENTADOR: ALEXANDRE TAVARES BARAVIERA

Data e Local da Defesa: Porto Alegre, 24 de Março de 2021.

O presente trabalho apresenta dois resultados, cada um deles de uma área distinta dos sistemas dinâmicos. No primeiro deles, propomos uma nova classe de cociclos gerados por funções homogêneas. Definimos o maior e o menor expoentes de Lyapunov associados a tal classe de cociclos e provamos um resultado sobre aproximação periódica para os expoentes em termos da norma num contexto de dimensão infinita. Como aplicação dessa aproximação periódica, mostramos que a taxa de crescimento exponencial em termos da norma e a distorção quase-conforme de um cociclo homogêneo, podem ser dados em termos de pontos periódicos. No segundo deles, construímos um novo subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que será chamado de *frequency shift*, o qual possui longa memória. Mostramos que esse conjunto não é um espaço *subshift* do tipo finito e ainda, conseguimos obter uma cota inferior para a entropia topológica, garantindo assim, que a mesma seja positiva.

Palavras-chave: Cociclos Homogêneos, Expoentes de Lyapunov, Aproximação Periódica, Espaço *Subshift* com Longa Memória, Entropia Topológica.

ABSTRACT

Tese de Doutorado

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

COCYCLES OF HOMOGENEOUS FUNCTIONS AND SIMBOLIC SPACE WITH LONG MEMORY

AUTHOR: ALEX JENARO BECKER

ADVISOR: ALEXANDRE TAVARES BARAVIERA

Place and Date of the defense: Porto Alegre, March, 24th of 2021.

It presents two results, each one of them from a different area inside the dynammical systems. In the first part, we discuss a new class of cocycles generated by homogeneous functions. We define the biggest and smallest Lyapunov exponents associated with this class of cocycles and we prove a result about periodic approximation of exponents, in terms of norms, in a context of infinite dimension. As application of periodic approximation, we show that the rate of exponencial and quasiconformal increase are given in terms of periodic points. In the second part, we construct new sets of *subshifts* in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, which will be called *frequency shift*, that has a long memory. We show that these *subshifts* are not finite type and we obtain a condition for that the sets have positive topological entropy.

Keywords: Homogeneous Cocycles, Lyapunov Exponents, Periodic Approximation, *Subshift* Space with Long Memory, Topological Entropy.

Agradecimentos

Agradeço a todos que estiveram presentes e me apoiaram, amigos e familiares, durante minha trajetória no doutorado. Em especial a minha esposa Caren, pela paciência nos momentos de ausência e de reclusão necessários para o comprimento desse objetivo.

Agradeço também aos professores do PPGMAT da UFRGS. Ao meu orientador, professor Alexandre, pela paciência, pelos ensinamentos e por toda a confiança e apoio no transcorrer desse período. Agradeço também ao professor Fagner, grande apoiador e uma pessoa sempre disponível para trocar uma ideia ou esclarecer alguma dúvida. Além desses, agradecer ao professor Lucas Oliveira, pelas conversas e trocas de ideias e também, ao professor Mauricio do PPGMAT-UFSM, por todo o apoio e pela amizade. Também, gostaria de agradecer aos demais membros da banca ainda não citados, professor Lucas Backes e professor Marcelo, pela disponibilidade e sugestões.

Também dedico um espaço à agradecer aos colegas do curso, em especial ao Érick pelas inúmeras horas de conversa e de viagem. Ao Thomas e Lucas, pela parceria durante as aulas e as horas do café. E também ao Henrique (Ovelha), pela amizade, apoio e parceria em todos os momentos dessa trajetória.

Gostaria de agradecer a instituição onde trabalho, IFFar São Vicente do Sul, pelos incentivos e flexibilizações oportunizados. Aos colegas de Instituição, em especial a professora Michele por toda amizade na atividade profissional e pessoal, e pela parceria nos momentos de trabalho.

Quem me dera ao menos uma vez
que o mais simples
fosse visto como o mais importante,
mas nos deram espelhos
e vimos um mundo doente.
(Índios - Legião Urbana)

Sumário

Introdução

O estudo de cociclos é um tema bastante desenvolvido dentro da literatura, tendo os cociclos lineares, ou seja, cociclos gerados por funções lineares, como um dos principais assuntos dentro desse contexto. Diversos resultados interessantes têm sido obtidos para cociclos lineares, o que nos motivou a seguinte pergunta: será possível obter resultados similares para cociclos onde relaxa-se a condição de linearidade? Mais precisamente, pode-se obter resultados similares aos do contexto linear para um cociclo gerado por uma aplicação g onde a condição $g(x+y) = g(x)+g(y)$ não seja necessariamente válida mas, que preserva a propriedade de produto por escalar? Ou seja, estamos nos perguntando quais resultados também valem para cociclos gerados por funções positivamente homogêneas. o qual chamaremos de homogêneas a fim de simplificar a nomenclatura. Entendemos que esse é um assunto novo na conjuntura dos cociclos, justificando assim, a relevância desse estudo.

O trabalho com sistemas dinâmicos homogêneos foi inspirado a partir de um estudo do texto [19] sobre sistemas dinâmicos monótonos. A fim de dar sentido ao termo "monótono", considere uma aplicação contínua $f : E \to E$, onde E é um espaço de Banach, e um **cone** $K \subset X$, o qual é um subconjunto convexo, que satisfaz $K \cap (-K) = \emptyset$ e $\lambda K \subset K$, para todo $\lambda \geq 0$, sendo $-K = \{-x : x \in K\}$ e $\lambda K = \{\lambda x : x \in K\}$. Então, o cone induz uma ordem parcial $\leq_K$ sobre E da seguinte forma: dados $x, y \in E$ diremos que $x \leq_K y$ sempre que $y - x \in K$. Dessa forma, diremos que f **preserva ordem** (e essa ordem é induzida pelo cone K) se $f(x) \leq_K f(y)$ quando $x \leq_K y$. Logo, uma dinâmica monótona é uma aplicação que preserva uma ordem parcial induzida por um cone. Para mais detalhes e resultados, citamos [26], [30] e [31].

Para exemplificar e justificar a abordagem de sistemas dinâmicos monótonos e homogêneos, na sequência considere a seguinte problematização. Seja $\sigma : X \to X$ a aplicação *shift*, dada por $\sigma(\underline{x})_n = x_{n+1}$, para todo $\underline{x} = (x_n) \in X$, onde $X = I^{\mathbb{N}}$ sendo I o conjunto dos inteiros positivos. Denotamos ainda o *subshift* do tipo finito por X_A, que é definido como

$$X_A = \{x \in X : a_{x_n x_{n+1}} = 1, \ \forall\, n \geq 1\},$$

com $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ é a matriz de adjacência, com $a_{ij} \in \{0, 1\}$. No trabalho [20], os autores consideraram o seguinte operador de transferência o qual, tomando $\phi : X_A \to \mathbb{R}$ uma função qualquer contínua e limitada, é dado pela expressão abaixo

$$M_f\phi(x) = \sup_{y \in \sigma^{-1}(x)} \{(f + \phi)(y)\}, \tag{1}$$

onde $f : X_A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada fixada a priori. Sob determinadas condições, é possível provar a existência de medidas que maximizam a função f, ou seja, que o valor $\sup_{m \in \mathcal{M}} \int f dm$ é atingido, sendo $\mathcal{M}$ a coleção de todas as medidas de probabilidade $\sigma-$invariantes sob X_A.

Dentre as hipóteses assumidas, os autores consideram que a função f seja essencialmente compacta, que entre outras condições, pede que exista uma função $\varphi : X_A \to \mathbb{R}$ e um número $c \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X_A$

$$\varphi(x) + c = \sup_{y \in \sigma^{-1}(x)} \{(f + \varphi)(y)\}.$$

Essa condição pode ser entendida como a existência de um autovalor no sentido max-plus para o operador M_f, ou seja, um autovalor obtido a partir da troca das operações usuais de soma e multiplicação dos números reais pelas seguintes operações binárias: $x \oplus y = \max\{x, y\}$ e $x \otimes y = x + y$. Para mais detalhes sobre a álgebra max-plus citamos [5].

Para obtermos então esse autovalor, uma ideia utilizada foi aplicar o seguinte resultado devido a Parret e Nussbaum, o qual pode se encontrado em [30], para o operador de transferência M_f dado em (1). No resultado a seguir, dizer que X_A possui estrutura vetorial significa que dados $x, y \in X_A$ existe um único máximo entre x e y com respeito a ordenação induzida pelo cone. Além disso, $x \vee y$ denota o máximo entre x e y.

Teorema 0.0.1. *Considere K um cone normal contido no espaço das funções reais, contínuas e limitadas definidas sobre X_A. Seja $f : K \to K$ contínua, homogênea de grau 1 e que preserva ordem. Suponha também que K induz uma estrutura vetorial em X e que satisfaça $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. Ainda, assuma que que ν é uma medida generalizada homogênea de não compacidade em X para qual vale a inequação $\rho(f) < r(f)$. Então existe $y \in K - \{0\}$ tal que*

$$f(y) = ry,$$

onde $r = r(f)$.

No Teorema 0.0.1, o valor $\rho(f)$ denota o raio essencial espectral de f e $r(f)$ o raio espectral de f. Vamos omitir aqui alguns dos conceitos usados, a fim de não estender os comentários que estão sendo realizados mas, todos esses podem ser encontrados em [26] e [30]. Observe que, dentre todas as condições exigidas no Teorema 0.0.1, existe a de que o operador deve preservar a ordem parcial induzida pelo cone e ainda, uma condição de homogeneidade. Essa segunda hipótese citada, acabou nos despertando um questionamento: será que resultados válidos para dinâmicas lineares podem ser extendidos para aplicações homogêneas? A partir de tal pergunta, um primeiro caminho foi o de abordar o estudo de cociclos nesse novo contexto pois, este é um assunto clássico dentro da teoria das dinâmicas lineares.

Num primeiro momento, buscamos estabelecer uma fórmula do tipo Furstenberg, similar a obtida em [11], para um cociclo aleatório gerado por aplicações homogêneas. Mais especificamente, dado um conjunto F formado por aplicações homogêneas f munido de uma medida de probabilidade μ, deve-se garantir que existe uma medida estacionária ν tal que o expoente de Lyapunov (LE) do cociclo possa ser escrito da seguinte forma

$$LE = \int_F \int_{\mathbb{S}^1} \log ||f(x)|| d\nu(x) d\mu(x).$$

Esse ainda é um problema que estamos investigado no contexto dos cociclos homogêneas. Além disso, um possível problema que pode ser abordado é estabelecer uma fórmula do tipo Herman-Ávila-Bochi (veja em [1] e [18]) para aplicações homogêneas. Na seção 2.2, apresentamos um exemplo utilizando a família da tenda, garantindo que o expoente de Lyapunov associado ao cociclo é positivo. Salientamos que no caso das aplicações homogêneas uma estimativa que garante que o expoente seja positivo é mais simples de ser obtida que no caso linear pois, no caso do cociclo homogêneo temos mais liberdade para escolher as direções em que os expoentes expandem e contraem.

Inspirados pelo trabalho de Kalinin e Sadovskaya [23], buscamos então provar um resultado de aproximação periódica para os expoentes de Lyapunov associados a um cociclo homogêneo no Teorema 2.3.2. Esse tipo de resultado, no contexto ao qual apresentaremos, foi utilizado inicialmente por Kalinin (2011) em [21], como ferramenta para provar um Teorema do tipo Livšic para cociclos arbitrários tomados em $GL(d, \mathbb{R})$. Mais precisamente, o autor prova que considerando $f : X \to X$ uma dinâmica hiperbólica, X um espaço métrico compacto, $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ uma função Hölder contínua e se cada ponto periódico $p = f^n(p)$ de período n satisfaz

$$A(f^{n-1}(p))...A(f(p))A(p) = Id,$$

então existe uma função $C : X \to GL(d, \mathbb{R})$, Hölder contínua, satisfazendo para todo $x \in X$

$$A(x) = C(f(x))C(x)^{-1}.$$

Nesse caso, A é dito um **cobordo**. Posteriormente Backes [3], generaliza o resultado sobre aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov obtido em Kalinin (2011), provando o resultado para cociclos não necessariamente invertíveis. O autor assume que o cociclo é semi-invertível, no sentido em que a função base do cociclo é invertível mas, a ação da função geradora sobre a fibra não precisa necessariamente ser invertível. Citamos ainda o trabalho de Backes [2] no qual, o autor mostra que se os expoentes de Lyapunov são suficientemente pequenos, um cociclo semi-invertível é na verdade, um cociclo invertível e a partir disso, é possível obter um Teorema do tipo Livšic como consequência.

Em [23], os autores provaram um resultado sobre aproximação do maior e menor expoentes de Lyapunov em termos da norma por órbitas periódicas, para um cociclo linear sobre um espaço de Banach (não necessariamente compacto). Posteriormente, Backes e Dragičević em [4] generalizaram o resultado obtido por Kalinin e Sadvoskaya provando que todos os expoentes excepcionais de Lyapunov podem ser aproximados por expoentes com respeito a medidas ergódicas suportadas sobre órbitas periódicas, sendo que essa aproximação não é em termos da norma mas sim, dos próprios expoentes. Além disso, em [4], os autores assumem que o cociclo é semi-invertível.

Em nosso resultado sobre a aproximação periódica para expoentes de Lyapunov, exploramos uma nova classe de aplicações que geram o cociclo, que são as funções homogêneas. Salientamos ainda que estamos num espaço de dimensão infinita uma vez que o cociclo age sobre aplicações homogêneas definidas sobre um espaço de Banach.

O interesse por estudo do cociclo gerado por funções homogêneas, deve-se também pelo fato de existirem operadores interessantes munidos de tal propriedade mas, que não são lineares. Citamos como exemplos: as seminormas (exemplo 1.2.9), função de Gauge ou funcional de Minkowski (exemplo 1.2.10) e a função de Hardy-Littlewood (exemplo 1.2.11). Desse modo, é percetível que obter resultados para funções homogêneas é por si só interessante, já que existem exemplos curiosos nesse contexto.

Por fim, salientamos que o principal resultado desse primeiro momento do trabalho é o Teorema 2.3.2 presente na seção 2.3, onde obtemos a aproximação periódica em termos da norma para os expoentes de Lyapunov de cociclos gerados por funções homogêneas. Esse trabalho foi desenvolvido em colaboração com Alexandre T. Baraviera, Érick Scópel e Fagner B. Rodrigues.

Além do estudos dos cociclos gerados por funções homogêneas, existe um segundo momento nesse trabalho onde apresentamos espaços simbólicos contidos em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, os quais serão chamados de *frequency shifts*. Veremos que esses conjuntos dependem de um parâmetro $p_c \in [0,1]$. Mais precisamente, para identificar as palavras que pertencem a esses conjuntos, é necessário comparar a densidade de elementos um em cada bloco finito iniciando no primeiro elemento da palavra, com esse parâmetro p_c. Dessa forma, entendemos que esse conjunto possui longa memória, uma vez que para cada novo elemento de uma palavra, precisamos necessariamente verificar se as condições de transição são satisfeitas olhando do primeiro elemento da sequência até o elemento analisado. Nos perguntamos então, se de fato esse conjunto é "novo"e para respondermos isso, procuramos verificar se eles são ou não espaços *subshifts* do tipo finito. Ainda, buscamos uma cota inferior para a entropia topológica de alguns desses subconjuntos, fazendo com que a entropia seja ao menos positiva.

Existem diversas formas de criar conjuntos com a propriedade de possuir certa memória. Um exemplo é o espaço *subshift* do tipo finito que tem memória m, isto é, quando ele pode ser descrito por uma coleção de blocos proibidos todos com comprimento $m+1$. Para entendermos melhor essa noção, assuma que todos os blocos proibidos de um espaço *subshift* do tipo finito tenham comprimento $m+1$. Considere então um bloco finito $B = x_1 x_2 ... x_n$ com $n > m+1$. Então para sabermos se B é um bloco admissível, basta que a cada elemento x_i, olhemos para os m elementos anteriores para verificar a admissibilidade, dando sentido assim ao fato de o *subshift* ter memória $m+1$. Para maiores detalhes sobre esses conjuntos, consultar a seção 2.1 de [27].

Outro exemplo é o *shift* de Haydn dado no trabalho [17]. Considere um inteiro positivo $\nu \geq 2$ e ainda o conjunto de símbolos $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, ..., 2\nu\}$. Vamos tomar $\mathcal{A} = \{1, 2, ..., \nu\}$ e $\mathcal{R} = \{\nu+1, \nu+2, ..., 2\nu\}$ e então, $\mathcal{S} = \{0\} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$. Sejam ainda, $\Sigma_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$. O subconjunto de Haydn $\Sigma \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ é formado por palavras de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$ e ainda, por palavras descritas da seguinte forma: uma palavra admite um bloco $B_{\mathcal{A}}$ admissível em $\Sigma_{\mathcal{A}}$ seguido por um bloco finito $B_{\mathcal{R}}$ admissível em $\Sigma_{\mathcal{R}}$ (ou vice-versa) se entre $B_{\mathcal{A}}$ e $B_{\mathcal{R}}$ existir um bloco de 0's, denotado por $B_{\{0\}}$, de tamanho no mínimo igual a $\alpha(a+b)$, onde $\alpha > 0$ e a é o comprimento de $B_{\mathcal{A}}$ e b é o comprimento do bloco $B_{\mathcal{R}}$. Além disso, se uma palavra contém um bloco infinito de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ ou $\Sigma_{\mathcal{R}}$ então, temos de ter uma quantidade infinita de 0's após tal bloco, e assim, não haverá um bloco do outro conjunto na sequência.

Observa-se então que por construção, o *shift* de Haydn possui uma memória nessas palavras que contém blocos de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$ pois, é necessário olhar para o comprimento deles a fim de intercalar com blocos de 0's.

No nosso caso, impomos uma regra de dependência que não tem limitação, onde a construção das palavras depende de um parâmetro real $p_c \in [0, 1]$, fixado a priori, que determina qual a quantidade de 1's que podemos colocar em cada configuração. Mais especificamente, fixado um número qualquer $p_c \in [0, 1]$, consideramos um subconjunto denotado por $P(p_c)$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ os quais as palavras possuem as seguintes regras de transição:

- as transições $0 \to 0$ e $0 \to 1$ são livres;

- a transição $1 \to 0$ ocorre se a densidade de 1's no bloco que inicia no primeiro elemento da palavra e vai até o elemento analisado é maior do que p_c;
- a transição $1 \to 1$ vai ocorrer se a densidade de 1's do bloco iniciando no primeiro elemento da palavra até o elemento analisado é menor ou igual a p_c.

Entendemos como densidade de 1's de um bloco finito como a razão entre a quantidade de 1's sobre o tamanho do bloco. Por exemplo, o bloco 000111100001 tem densidade $\frac{5}{12}$. Note que as palavras em $P(p_c)$ possuem a frequência média de 1's igual a p_c. No entanto, mais do que isso, quando olhamos cada bloco finito formado a partir do primeiro elemento, esse bloco precisa respeitar as regras de transição.

Salientamos que o conjunto $P(p_c)$ não é invariante pela aplicação *shift*, dessa forma definiremos o conjunto $\Sigma(p_c)$ que será formado pelo fecho da união de todas as imagens de $P(p_c)$ pela aplicação *shift*.

Uma pergunta natural que pode surgir é se de fato $\Sigma(p_c)$ é um "novo" subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mostramos nesse trabalho que os conjuntos $\Sigma(0)$ e $\Sigma(1)$ são *shifts* do tipo finito, ou seja, conjuntos já conhecidos. Mas, para $p_c \in (0,1)$, provaremos que $\Sigma(p_c)$ não é um *subshift* do tipo finito. Esses resultados podem ser encontrados na Proposição 3.5 da seção 3.4.

Além disso, definiremos o conceito de Entropia das Palavras do conjunto $P(p_c)$ na seção 3.3 e usaremos na seção 3.5 para provar que, em alguns casos, a entropia do conjunto $\Sigma(p_c)$ é positiva. Salientamos que os resultados obtidos nesse momento do trabalho ainda são parciais. Esse trabalho sobre o espaço simbólico com longa memória foi desenvolvido em colaboração com Alexandre T. Baraviera e, a ideia sobre o conjunto, foi proposta a partir de conversas entre Alexandre T. Baraviera e Renaud Leplaideur.

No capítulo 1 desse trabalho apresentaremos alguns resultados preliminares já conhecidos, bem como algumas caracterizações sobre o espaço das funções homogêneas e ainda, alguns resultados técnicos necessários para a prova do Teorema 2.3.2. Posteriormente, no capítulo 2 definiremos os expoentes de Lyapunov para cociclos gerados por dinâmicas homogêneas. Apresentaremos também uma fórmula do tipo Herman-Avila-Bochi e o resultado de aproximação periódica para os expoentes de Lyapunov. Além disso, no final do capítulo existe uma aplicação para tal aproximação periódica. Por fim, no capítulo 3, abordaremos o *subshift* com longa memória, mostrando algumas de suas propriedades, bem como os resultados acima citados.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados conhecidos na literatura que serão utilizados no transcorrer desse trabalho. Com o objetivo de facilitar a leitura, optamos por citá-los nesse capítulo inicial e assim sempre que o leitor julgar necessário, pode retornar até essa parte do texto. Pressupõe-se que o leitor já tenha familiaridade com alguns tópicos de Teoria da Medida como, conceito de medida, espaços mensuráveis e funções integráveis. Caso seja necessário citamos como referência [7].

Na sequência exibiremos na Seção 1.1 alguns resultados de Teoria da Medida, bem como de Teoria Ergódica necessários para o desenvolvimento do trabalho. Salienta-se que esses foram retirados das seguintes referências [7], [28] e [29]. Além disso, dedicaremos a Seção 1.2 para tratar sobre o espaço das aplicações homogêneas, o qual é uma das ferramentas que serão utilizadas posteriormente, e algumas de suas propriedades.

Na Seção 1.3, também faremos uma breve apresentação sobre o conceito de expoente de Lyapunov e alguns resultados importantes dentro desta teoria. Para quem tiver interesse em maiores resultados sobre tal tema, citamos a referência [34]. Por fim, na Seção 1.4 apresentaremos alguns resultados técnicos que são importantes para provarmos o Teorema 2.3.2 sobre a aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov para cociclos homogêneos.

1.1 Teoria Ergódica e Teoria da Medida

Inicialmente apresentaremos alguns conceitos e resultados da Teoria Ergódica. Basicamente tal campo de estudo pode ser entendido como uma área da matemática que estuda sistemas dinâmicos munidos de medidas invariantes. Lembrando que um sistema dinâmico pode ser entendido informalmente como uma aplicação $f : X \to X$ munido de alguma propriedade (por exemplo, ser contínua, homeomorfismo, difeomorfismo, etc.), sendo X um espaço também munido com alguma propriedade (como compacidade, munido com uma métrica, etc). Em um sistema dinâmico discreto busca-se entender o comportamento de um determinado ponto $x \in X$ a partir de suas iteradas $f^n(x) = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ vezes}}(x)$ pela aplicação f.

A seguir definiremos o conceito de medida invariante, ferramenta essencial para a Teoria Ergódica.

Definição 1.1.1. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida munido com a medida μ que age sobre a σ-álgebra $\mathcal{A}$. Considere ainda $f : X \to X$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é* ***invariante*** *por f se $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$, para qualquer $E \subset X$ mensurável.*

É usual também dizer que f **preserva** μ quando a medida μ é invariante por f. Uma justificativa para o estudo de medidas invariantes é que com essa ferramenta pode-se obter resultados muito interessantes os quais entre eles, citamos o Teorema da Recorrência de Poincaré. Esse nos diz que a órbita de quase todo ponto retorna arbitrariamente próximo ao ponto inicial, sob ação de uma aplicação que preserva uma medida finita.

Na sequência citamos um resultado que mostra uma interessante caracterização para o conceito de medida invariante.

Teorema 1.1.2. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to X$ mensurável. Então f preserva μ se, e somente se, $\int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi \circ f d\mu$, para toda função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ integrável com respeito a μ.*

Dentro da Teoria Ergódica, por diversas vezes, é relevante buscar medidas invariantes que possuam propriedades mais finas, obtendo assim resultados ainda mais fortes. Sob essa premissa, consideramos o conceito de **medida ergódica** o qual é definida abaixo. Antes de enunciar a definição, uma medida μ é dita de probabilidade em um espaço X qualquer, se $\mu(X) = 1$.

Observação 1.1.3. *A partir de qualquer medida finita μ não nula definida em X pode-se definir uma medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ fazendo $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)/\mu(X)$, para todo $E \subset X$.*

Definição 1.1.4. *Um medida de probabilidade invariante μ é dita* ***ergódica*** *se para qualquer conjunto E que satisfaz $f^{-1}(E) = E$, vale que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.*

As medidas ergódicas são medidas invariantes com uma propriedade adicional: todo conjunto que é invariante sob a ação da dinâmica tem ou medida nula ou medida total. Tal propriedade nos fornece uma gama de importantes resultados dentro da área de sistemas dinâmicos chamados de Teoremas Ergódicos. Citaremos na sequência alguns deles que serão utilizados no transcorrer do trabalho.

O primeiro desses resultados que apresentaremos é o Teorema Ergódico de Birkhoff. Esse resultado é motivado pela perspectiva de entender o comportamento da função Tempo

Médio de Visita de um ponto por uma dinâmica. Para maiores detalhes desse assunto citamos o Capitulo 3 de [29].

Teorema 1.1.5. *(Birkhoff) Seja $f : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Dada qualquer função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ integrável, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

existe para $\mu-$quase todo ponto $x \in X$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int_X \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x).$$

A função $\tilde{\varphi}$ é chamada **média temporal** de φ. É possível mostrar ainda que a média temporal é constante ao longo das órbitas para quase todo ponto, isto é, $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(f(x))$, para $\mu-$quase todo ponto $x \in X$.

Observe que no Teorema 1.1.5 temos como hipótese que a medida μ é apenas invariante. Caso assumamos que μ é ergódica, é possível justificar que além das propriedades já citadas vale ainda que $\tilde{\varphi}(x) = \int_X \varphi \, d\mu$, para μ-quase todo ponto. A ergodicidade nos fornece uma propriedade adicional bastante útil para a média temporal da função φ.

O resultado que apresentaremos a seguir é ainda mais forte que o Teorema de Brikhoff. Ele garante a convergência em média de uma sequência de funções $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ que é **subaditiva**, isto é, a sequência satisfaz $\varphi_{n+m} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$, sobre uma dinâmica f.

Teorema 1.1.6. *(Ergódico Subaditivo de Kingman) Seja μ uma medida de probabilidade invariante para uma transformação $f : X \to X$ e seja $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ uma sequência subaditiva de funções mensuráveis tal que $\varphi_1^+ \in L^1(\mu)$. Então a sequência $(\varphi_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mu-$quase todo ponto para uma função mensurável $\varphi : M \to [-\infty, \infty)$. Além disso, $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ e*

$$\int_X \varphi \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \varphi_n d\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_X \varphi_n d\mu \in [-\infty, \infty).$$

Neste momento citaremos alguns teoremas da Teoria da Medida que serão diretamente utilizados em justificativas de resultados do trabalho. O teorema a seguir garante que o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis é também mensurável.

Teorema 1.1.7. *Seja X um espaço topológico e Y um espaço métrico separável. Considere $f_n : X \to Y$ uma sequência de funções mensuráveis e $f : X \to Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo x. Então f é mensurável.*

O próximo resultado conhecido como Teorema de Egorov nos fornece que a convergência de uma sequência de funções mensuráveis é quase uniforme.

Teorema 1.1.8. *(Egorov) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e f_n uma sequência de funções mensuráveis tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ q.t.p. $x \in X$. Então a sequência f_n converge quase uniformemente a f, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < \varepsilon$ tal que a sequência $(f_n)_{|A^c}$ converge uniformemente a $f_{|A^c}$.*

Nesta seção buscamos citar alguns dos resultados clássicos que serão utilizados diretamente durante o texto, bem como algumas poucas propriedades, resultados e comentários interessantes da Teoria Ergódica. Caso o leitor esteja interessado em maiores detalhes sobre tais conceitos, destacamos que esses podem ser buscados nas referências.

1.2 O Espaço das Aplicações Homogêneas

Nesta seção destacaremos algumas propriedades das aplicações homogêneas e ainda, definiremos o espaço de tais aplicações mostrando que esse é um espaço de Banach. Além disso, apresentaremos alguns exemplos de funções homogêneas que serão úteis posteriormente para obtermos propriedades que nos auxiliarão a mostrar qual a importância do estudo de cociclos gerados por essas aplicações.

Consideramos ao longo dessa seção $(E, |\cdot|_E)$ um espaço de Banach qualquer sobre o corpo $\mathbb{R}$ (na realidade a definição a seguir vale para um corpo qualquer $\mathbb{K}$) com as operações usais de soma de funções e multiplicação por escalar. Diremos que uma aplicação $h : E \to E$ é **homogênea de grau um**, ou simplesmente **homogênea**, se satisfaz a relação $h(\lambda v) = \lambda h(v)$, para qualquer escalar não-negativo $\lambda \geq 0$ e qualquer vetor $v \in E$.

Observação 1.2.1. *Se h é homogênea, então $h(0_E) = 0_E$, onde 0_E é o vetor nulo de E. De fato, sendo h homogênea temos que*

$$h(0_E) = h(2 \cdot 0_E) = 2h(0_E),$$

e assim, $h(0_E) = 0_E$.

A Observação 1.2.1 mostra que algumas propriedades válidas para aplicações lineares continuam válidas no caso da função ser homogênea. No entanto, é importante destacar que uma aplicação homogênea não precisa necessariamente satisfazer a relação $h(u+v) = h(u)+h(v)$, para todo $u, v \in E$.

Denotaremos por $\mathbb{S}^1 = \{u \in E : |u|_E = 1\}$ a esfera unitária em E. Para qualquer aplicação $h : E \to E$ homogênea invertível, podemos considerar funções $\Phi_h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ e $N_h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ dadas por

$$\Phi_h(u) = \frac{h(u)}{|h(u)|_E} \text{ e } N_h(u) = |h(u)|_E, \tag{1.1}$$

para todo $u \in \mathbb{S}^1$.

Observação 1.2.2. *Observe que Φ_h está bem definida pois, N_h é estritamente positiva. De fato, caso exista $u \in \mathbb{S}^1$ tal que $N_h(u) = 0$ então*

$$|h(u)|_E = 0 \Rightarrow h(u) = 0.$$

Pela Observação 1.2.1, temos que $h(u) = 0_E = h(0_E)$. Como h é ao menos injetora segue que $u = 0_E$ o que não pode ocorrer uma vez que $u \in \mathbb{S}^1$.

Observe que reciprocamente, se forem dadas aplicações $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ e $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ quaisquer, é possível definir uma aplicação homogênea $h_{\Phi,N} : E \to E$ pela seguinte expressão

$$h_{\Phi,N}(u) = \Phi\left(\frac{u}{|u|_E}\right) N\left(\frac{u}{|u|_E}\right) |u|_E, \tag{1.2}$$

para qualquer $u \in E$. Como E tem estrutura de espaço vetorial segue que $h_{\Phi,N}$ está bem definida. Além disso, dados $\lambda > 0$ e $u \in E$ temos que

$$\begin{aligned} h_{\Phi,N}(\lambda u) &= \Phi\left(\frac{\lambda u}{|\lambda u|_E}\right) N\left(\frac{\lambda u}{|\lambda u|_E}\right) |\lambda u|_E \\ &= \Phi\left(\frac{\lambda u}{\lambda |u|_E}\right) N\left(\frac{\lambda u}{\lambda |u|_E}\right) \lambda |u|_E \\ &= \lambda \Phi\left(\frac{u}{|u|_E}\right) N\left(\frac{u}{|u|_E}\right) |u|_E \\ &= \lambda h_{\Phi,N}(u), \end{aligned}$$

mostrando que de fato, $h_{\Phi,N}$ ser homogênea. Dessa forma, podemos utilizar a expressão dada em (1.2) para construir exemplos de aplicações homogêneas e provar algumas propriedades quando necessário.

Observação 1.2.3. *Para cada função h homogênea é possível associar aplicações Φ_h e N_h como dadas em* (1.1) *e essa correspondência é biunívoca. Então para h ser inversível basta* *assumirmos que Φ_h é bijetiva já que $N_h > 0$.*

Vamos apresentar alguns exemplos de aplicações homogêneas e em alguns desses, utilizaremos para construir uma função homogênea h as funções Φ e N a partir da expressão dada em (1.2).

Exemplo 1.2.4. *Toda aplicação $A : E \to E$ linear é também homogênea.*

Observação 1.2.5. *Como qualquer vetor $v \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser identificado por algum ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, nos exemplos a seguir o vetor unitário $v/|v|_E$ será denotado por $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Observe que desse modo quando fizermos $\lambda v(\theta)$, para qualquer ângulo θ e $\lambda > 0$, estaremos apenas mudando o comprimento desse vetor e não o ângulo. Ainda, por simplicidade, quando aplicarmos uma função definida no círculo no vetor $v(\theta)$, utilizaremos apenas a notação do ângulo θ, isto é, $f(v(\theta)) = f(\theta)$.*

Exemplo 1.2.6. *Considere $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ e $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, dadas por $\Phi = Id_{\mathbb{R}^2}$ e $N(\theta) = 1 + \sin^2(\theta/2)$. Então pela relação dada em (1.2) obtemos a aplicação*

$$h(v) \;\; = \;\; (1 + \sin^2(\theta/2))v,$$

para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, a qual é homogênea e não linear.

Exemplo 1.2.7. *Novamente considere Φ e N definidas em $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ tais que $\Phi(\theta) = \theta + 2\pi\omega$, para algum $\omega \notin \mathbb{Q} \cup \{\frac{k}{\pi} : k \in \mathbb{Q}\}$, ou seja, uma rotação irracional, e $N(\theta) = 1 + \sin^2(\theta/2)$. Pela relação (1.2) obtemos a aplicação homogênea*

$$h(v) = (\theta + 2\pi\omega)(1 + \sin^2(\theta/2))|v|_{\mathbb{R}^2},$$

para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, que também é não linear.

Exemplo 1.2.8. *Tome agora Φ e N definidas em $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2_+$ onde $\Phi = Id_{\mathbb{R}^2_+}$ e $N(v) = |v_1 + v_2|$, para qualquer $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Temos assim que essas funções definem a seguinte aplicação homogênea*

$$h(v) = \frac{v}{|v|_{\mathbb{R}^2}}|v_1 + v_2|,$$

para qualquer $v \in \mathbb{R}^2_+$. Salientamos que a restrição para $\mathbb{R}^2_+$ se deve pelo fato de não querermos que N se anule.

Exemplo 1.2.9. *Assuma agora que $\mathbb{S}^1 \subset E$, onde E é um espaço de Banach qualquer e sejam $\Phi = Id_E$ e N satisfazendo as condições dadas abaixo para qualquer $v \in E$ e α escalar:*

(i) $N(v) \geq 0$;

(ii) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$;

(iii) $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.

*A aplicação N como definida acima é dita uma **seminorma** em E. Obtemos assim*

$$h(v) = N\left(\frac{v}{|v|_E}\right) v,$$

a qual é homogêna mas não é linear pelo item (iii) da definição de seminorma.

Exemplo 1.2.10. *Um exemplo mais geral de função homogênea é o **funcional de Minkowski** ou **função de Gauge**. Sejam E um espaço vetorial topológico e K um subconjunto radial, isto é, para qualquer subconjunto finito A de E existe um escalar λ_0 tal que $A \subset \lambda K$, sempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ (outra terminologia é dizer que K é absorvente). Então defina a aplicação $p_K : E \to [0, \infty)$ pela expressão*

$$p_K(v) = \inf\{r > 0 : v \in rK\}.$$

Caso se assuma que K é equilibrado, ou seja, $\alpha K \subset K$, para qualquer escalar $|\alpha| \leq 1$, teremos que a aplicação p_K é homogênea. De fato, dado $\lambda > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
p_K(\lambda v) &= \inf\{r > 0 : \lambda v \in rK\} \\
&= \inf\left\{r > 0 : v \in \frac{r}{\lambda} K\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda \frac{r}{\lambda} > 0 : v \in \frac{r}{\lambda} K\right\} \\
&= \lambda \inf\left\{\frac{r}{\lambda} > 0 : v \in \frac{r}{\lambda} K\right\} \\
&= \lambda p_K(v).
\end{aligned}$$

Para maiores detalhes sobre essa função citamos o capítulo 12 de [15].

Exemplo 1.2.11. *Por fim, citamos como exemplo o* **função maximal de Hardy-Littlewood**. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Definimos a função f^* do seguinte modo*

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde o supremo acima é tomado sobre todos os intervalos de comprimento

$2r$, com $r > 0$, que contém o ponto x. Para mais detalhes da função maximal citamos o capítulo 3 de [33].

Denotaremos o espaço das funções contínuas, invertíveis e homogêneas de grau 1 por $\mathcal{H}^1(E)$. Observe que dadas $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}^1(E)$ e α um escalar temos para todo $v \in E$ e $\lambda \geq 0$ que

$$\begin{aligned}(\alpha h + \tilde{h})(\lambda v) &= \alpha h(\lambda v) + \tilde{h}(\lambda v)\\ &= \alpha\lambda h(v) + \lambda\tilde{h}(v)\\ &= \lambda(\alpha h + \tilde{h})(v),\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{H}^1(E)$ possui estrutura de espaço vetorial.

A fim de mostrar que $\mathcal{H}^1(E)$ é um espaço de Banach com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar de um espaço de funções, consideramos a seguinte aplicação

$$||\cdot||_{\mathcal{H}^1(E)} : h \in \mathcal{H}^1(E) \mapsto ||h||_{\mathcal{H}^1(E)} = \sup_{|v|=1} |h(v)|, \tag{1.3}$$

a qual define uma norma em $\mathcal{H}^1(E)$.

Observação 1.2.12. *Por simplicidade, escreveremos as normas $|\cdot|_E$ de E e $||\cdot||_{\mathcal{H}^1(E)}$ de $\mathcal{H}^1(E)$ por $|\cdot|$ e $||\cdot||$, respectivamente.*

Observação 1.2.13. *Dada uma função $h \in \mathcal{H}^1(E)$ é possível associar duas aplicações Φ_h e N_h pela expressão (1.2). Desse modo, para cada $h \in \mathcal{H}^1(E)$ para a norma $||\cdot||$ vale que*

$$||h|| = \sup_{|v|=1} |h(v)| = \sup_{|v|=1} |\Phi_h(v) N_h(v)|v|| = \sup_{|v|=1} N_h(v)|v||\Phi_h(v)| = \sup_{|v|=1} N_h(v),$$

onde a última igualdade vale pelo fato de v e $\Phi_h(v)$ serem unitários. Logo, podemos reescrever a norma em $\mathcal{H}^1(E)$ por

$$||h|| = \sup_{|v|=1} |h(v)| = \sup_{|v|=1} N_h(v),$$

para todo $h \in \mathcal{H}^1(E)$.

Para garantirmos $\mathcal{H}^1(E)$ é de fato um espaço de Banach, vamos mostrar que $\mathcal{H}^1(E)$ é um subespaço vetorial fechado do espaço $C^0(E)$ das funções contínuas definidas sobre E.

Lema 1.2.14. *O espaço $\mathcal{H}^1(E)$ é fechado.*

Demonstração. Seja (h_n) uma sequência em $\mathcal{H}^1(E)$ que converge na norma $||\cdot||$ para algum $h : E \to E$. Como (h_n) é uma sequência de funções contínuas e pela norma em $\mathcal{H}^1(E)$, segue que h também é uma função contínua. Além disso, como a convergência em norma implica convergência pontual e pela homogeneidade dos termos da sequência (h_n), para todo $v \in E$ e $\lambda \geq 0$ temos que

$$h(\lambda v) = \lim_{n \to \infty} h_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \to \infty} h_n(v) = \lambda h(v)$$

e assim, h é também homogênea. Logo $\mathcal{H}^1(E)$ é um subespaço fechado.

$\square$

Sendo $\mathcal{H}^1(E)$ um subespaço vetorial fechado de $C^0(E)$, segue que $\mathcal{H}^1(E)$ é também um espaço de Banach. O resultado a seguir apresenta uma propriedade importante da norma do espaço $\mathcal{H}^1(E)$.

Lema 1.2.15. *Dados $h, g \in \mathcal{H}^1(E)$ vale que $||h \circ g|| \leq ||h|| \cdot ||g||$.*

Demonstração. De fato, para quaisquer $h, g \in \mathcal{H}^1(E)$ temos

$$\begin{aligned} ||h \circ g|| = \sup_{|v|=1} |h(g(v))| &= \sup_{|v|=1} |h(\frac{g(v)}{|g(v)|})|g(v)|| \\ &\leq \|h\| \sup_{|v|=1} |g(v)| = ||h|| \cdot ||g||. \end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.2.16. *A composição de uma quantidade finita de funções homogêneas ainda é uma função homogênea. De fato, considere uma lista qualquer $\{h_1, h_2, \cdots, h_k\}_{k \geq 1}$ de funções homogêneas definidas sobe E. Então, dado $\lambda \geq 0$ e $u \in E$, vale que*

$$\begin{aligned} h_k \circ \cdots \circ h_2 \circ h_1(\lambda u) &= h_k \circ \cdots \circ h_2(h_1(\lambda u)) \\ &= h_k \circ \cdots \circ h_2(\lambda h_1(u)) \\ &= h_k \circ \cdots \circ h_3(\lambda(h_2 \circ h_1(u))) \\ &= \cdots \\ &= \lambda h_k \circ \cdots \circ h_2 \circ h_1(u). \end{aligned}$$

Logo, a homogeneidade das h_i, para $1 \leq i \leq k$, implica que $h_k \circ \cdots \circ h_2 \circ h_1$ também é uma função homogênea.

Observação 1.2.17. *Afirmamos que se $g : M \to M$ é uma função homogênea de grau 1 e tem inversa, então $g^{-1} : M \to M$ é também homgênea de grau 1. De fato, suponha que g^{-1}*

não seja homogêna de grau 1, então existem $\tilde{x} \in M$ *e* $\tilde{\lambda} \geq 0$ *tais que* $g^{-1}(\tilde{\lambda}\tilde{x}) \neq \tilde{\lambda}g^{-1}(\tilde{x})$. *Como g é injetora (pois é invertível) e homogênea de grau 1, decorre que*

$$\tilde{\lambda}\tilde{x} = g(g^{-1}(\tilde{\lambda}\tilde{x})) \neq g(\tilde{\lambda}g^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{\lambda}g(g^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{\lambda}\tilde{x},$$

o que é uma contradição.

1.3 Cociclos e Expoentes de Lyapunov

Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e G um grupo topológico metrizável. Considerando $f : X \to X$ um sistema dinâmico (vamos supor ao menos que seja mensurável), chamamos uma aplicação $\mathcal{T} : X \times \mathbb{N} \cup \{0\} \to G$ de **cociclo multiplicativo sobre** f, ou simplesmente **cociclo**, quando:

(i) para qualquer $x \in X$ temos $\mathcal{T}(x, 0) = Id_G$, onde Id_G é a função identidade definida sobre G;

(ii) para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}_0$ e $x \in X$, vale a equação $\mathcal{T}(x, m+n) = \mathcal{T}(f^n(x), m)\mathcal{T}(x, n)$.

No caso em que f é invertível, podemos supor no item (ii) acima que $m, n \in \mathbb{Z}$. Nesse caso invertível, vale que $\mathcal{T}(x, -m) = \mathcal{T}(f^{-m}(x), m)^{-1}$, para quaisquer $x \in X$ e $m \in \mathbb{N}$. De fato, aplicando o item (ii) acima com $n = -m$ temos que

$$\mathcal{T}(x, 0) = \mathcal{T}(x, m - m) = \mathcal{T}(f^{-m}(x), m)\mathcal{T}(x, -m).$$

Pelo item (i) concluímos que $\mathcal{T}(x, -m) = \mathcal{T}(f^{-m}(x), m)^{-1}$.

O item (ii) acima é chamado de **equação do cociclo**. Note que definimos o conceito de cociclo do modo mais geral possível. Sendo assim, para fins de mostrarmos os resultados que desejamos e dar alguns exemplos, vamos definir um caso particular de cociclo.

Dada uma aplicação $T : X \to G$ qualquer e $x \in X$, definimos o cociclo

$$\mathcal{T}(x, m) = \begin{cases} T(f^{m-1}(x)) \circ .... \circ T(f(x)) \circ T(x), & \text{se} \quad m > 0, \\ Id_G, & \text{se} \quad m = 0, \\ T(f^m(x))^{-1} \circ .... \circ T(f^{-2}(x))^{-1} \circ T(f^{-1}(x))^{-1}, & \text{se} \quad m < 0. \end{cases}$$

No caso em que f não seja invertível basta desconsiderar a terceira expressão da relação dada acima. Diremos que essa aplicação T é um **gerador** de $\mathcal{T}$, ou que $\mathcal{T}$ é **gerado** por T.

Um cociclo $\mathcal{T}$ induz uma **extensão** ou um ***skew product*** $F : X \times G \to X \times G$ que é definido por $F(x, \mathfrak{g}) = (f(x), T(x)\mathfrak{g})$. Podemos entender que a ação dessa extensão na fibra sobre x para a fibra sobre $f(x)$ é dada pela aplicação $T(x)$. Temos para todo $m \in \mathbb{Z}$ que

$$F^m(x, \mathfrak{g}) = (f^m(x), \mathcal{T}(x, m)\mathfrak{g}).$$

A seguir apresentaremos alguns exemplos de cociclos lineares bem conhecidos na literatura de modo bastante geral. O leitor que tiver interesse em maiores detalhes e resultados sobre essa teoria citamos as seguintes referências [8], [16] e [34]. Preferimos nos restringir a essa classe de exemplos pois posteriormente o intuito será definir uma classe mais geral de cociclo do que as citadas.

Exemplo 1.3.1. *Uma classe bastante importante dentro dessa teoria são os* ***cociclos lineares****. Nessa caso, sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e uma função $f : X \to X$ mensurável que preserva μ. Podemos considerar $G = GL(d, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes quadradas de ordem d com entradas reais, ou ainda, $G = SL(d, \mathbb{R})$ que é um subespaço especial de $GL(d, \mathbb{R})$ que contém as matrizes com determinante igual a 1. O cociclo linear gerado por uma aplicação $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ e sobre a função f será a transformação*

$$\begin{aligned} F : X \times \mathbb{R}^d &\to X \times \mathbb{R}^d \\ (x, v) &\mapsto (f(x), A(x)v). \end{aligned}$$

Temos que $F^m((x, v) = (f^m(x), \mathcal{A}(x, m)v)$, onde $\mathcal{A}(x, m) = A(f^{m-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x)$.

Exemplo 1.3.2. *A partir do exemplo anterior podemos modelar uma classe especial e importante de cociclo linear. Tomando $X = GL(d, \mathbb{R})$ (ou $X = SL(d, \mathbb{R})$), consideramos o* ***cociclo linear aleatório*** *determinado por uma medida μ em X como a aplicação $F : X^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^d \to X^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^d$ definida por $F(\underline{\alpha}, v) = (\sigma(\underline{\alpha}), \alpha_0 v)$, onde $\underline{\alpha}$ define uma sequência de matrizes $(\alpha_k)_k$ em $X^{\mathbb{Z}}$ e $\sigma : X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$ é a aplicação deslocamento definida por $\sigma(\alpha_k)_k = (\alpha_{k+1})_k$. Então teremos que $F^m(\underline{\alpha}, v) = (\sigma^m(\underline{\alpha}), \alpha_{m-1}...\alpha_1\alpha_0 v)$.*

Exemplo 1.3.3. *Outra classe relevante dentro da teoria é o* ***cociclo derivado****. Considere um difeomorfismo $f : X \to X$, onde $X = \mathbb{T}^d$ o toro $d-$dimensional, para algum $d \geq 1$. Pode-se construir campos vetoriais suaves $X_1, ..., X_d$ em X tal que o conjunto $\{X_1, ..., X_d\}$ é uma base do espaço tangente T_xX, para qualquer $x \in X$. O cociclo derivado de f é a aplicação $F : X \times \mathbb{R}^d \to X \times \mathbb{R}^d$ tal que $F(x, v) = (f(x), A(x)v)$, onde $A \in GL(d, \mathbb{R})$ é a matriz, com respeito a base escolhida, do operador derivada $Df(x) : T_xX \to T_{f(x)}X$.*

Neste trabalho trataremos de um caso de cociclo mais geral do que o linear e buscaremos estabelecer algumas propriedades desse tipo de objeto. Além disso, objetivamos verificar se existem propriedades ou resultados que podem ser generalizados a partir dessa nova forma de abordagem sobre o conceito de cociclo. Neste momento, vamos apresentar uma definição dos cociclos definidos sobre aplicações homogêneas do espaço $\mathcal{H}^1(E)$. Caso seja necessário, citaremos algum caso particular que aparece no transcorrer do trabalho.

Sejam X um espaço métrico compacto, $f : X \to X$ um homeomorfismo e uma aplicação $H : X \to \mathcal{H}^1(E)$ invertível. Definimos o **cociclo homogêneo** sobre f e gerado por H como a aplicação $\mathbb{H} : X \times \mathbb{Z} \to \mathcal{H}^1(E)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(x,0) &= Id_{\mathcal{H}^1(E)}, \\
\mathbb{H}(x,n) &= H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x)) \circ H(x) \\
\mathbb{H}(x,-n) &= \mathbb{H}(f^{-n}(x),n)^{-1} \\
&= H(f^{-n}(x))^{-1} \circ H(f^{-n+1}(x))^{-1} \circ ... \circ H(f^{-1}(x))^{-1},
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e $n > 0$. A última igualdade é válida pois

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(f^{-n}(x),n)^{-1} &= [H(f^{n-1}(f^{-n}(x))) \circ ... \circ H(f(f^{-n}(x)) \circ H(f^{-n}(x))]^{-1} \\
&= [H(f^{-1}(x)) \circ ... \circ H(f^{-n+1}(x)) \circ H(f^{-n}(x))]^{-1} \\
&= H(f^{-n}(x))^{-1} \circ H(f^{-n+1}(x))^{-1} \circ ... \circ H(f^{-1}(x))^{-1}.
\end{aligned}$$

O lema a seguir mostra que nosso cociclo está bem definido.

Observação 1.3.4. *É possível definir o cociclo mesmo sem a condição de H ser o invertível. No entanto nesse caso, a expressão de $\mathbb{H}(x,-n)$ não será valida, apenas a ação do cociclo para frente. Ou seja, teremos que vale*

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(x,0) &= Id_{\mathcal{H}^1(E)}, \\
\mathbb{H}(x,n) &= H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x)) \circ H(x).
\end{aligned}$$

Lema 1.3.5. *A aplicação $\mathbb{H}$ satisfaz a equação do cociclo, isto é,*

$$\mathbb{H}(x,n+k) = \mathbb{H}(f^k(x),n) \circ \mathbb{H}(x,k), \tag{1.4}$$

para todo $x \in X$ e $n,k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. De fato, dado $x \in X$ e $n, k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(f^k(x), n) \circ \mathbb{H}(x, k) &= H(f^{n-1}(f^k(x))) \circ \cdots \circ H(f(f^k(x))) \circ H(f^k(x)) \circ H(f^{k-1}(x)) \\
&\quad \circ \cdots \circ H(f(x)) \circ H(x) \\
&= H(f^{n+k-1}(x)) \circ \cdots \circ H(f^{k+1}(x)) \circ H(f^k(x)) \circ H(f^{k-1}(x)) \circ \cdots \circ \\
&\quad H(f(x)) \circ H(x) \\
&= \mathbb{H}(x, n+k).
\end{aligned}$$

□

Observação 1.3.6. *Por simplicidade apresentamos o Lema 1.3.5 no caso particular em que n e k são inteiros positivos. Salientamos que esse resultado também é válido para $n, k \in \mathbb{Z}$.*

Dentre as diversas propriedades dinâmicas estudadas no contexto dos cociclos lineares, uma das mais relevantes é o de Expoentes de Lyapunov. Um dos principais resultados nesse contexto é o Teorema de Furstenberg e Kesten (1965) apresentado em [12]. Como nos basearemos fortemente nesse resultado para definirmos os expoentes de Lyapunov para cociclos homogêneos, vamos citar uma versão do mesmo com detalhes no que segue.

Teorema 1.3.7. *(Furstenberg-Kesten) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e ainda $f : X \to X$ uma função mensurável que preserva μ. Assuma que $A : X \to GL(d, \mathbb{R})$ é mensurável e tal que $\log^+ ||A^{\pm 1}|| \in L^1(\mu)$. Então os limites*

$$\lambda_+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||A^n(x)|| \text{ e } \lambda_-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||(A^n(x))^{-1}||^{-1},$$

existem para $\mu-$quase todo ponto $x \in X$.

Os valores λ_+ e λ_- são chamados de **expoentes pontuais extremais de Lyapunov**. Além disso, é possível ver que $\lambda_+(x) \geq \lambda_-(x)$ e assim, podemos dizer que $\lambda_+(\cdot)$ é o **maior expoente pontual de Lyapunov** e $\lambda_-(\cdot)$ é o **menor expoente pontual de Lyapunov** associado ao cociclo sobre f e gerado por A. O Teorema 1.3.7 pode ser provado diretamente a partir do Teorema Ergódico de Kingman (Teorema 1.1.6).

Na seção 2.3.1 inspirados no Teorema de Furstenberg e Kesten definiremos o maior e o menor expoentes de Lyapunov para uma classe de cociclos homogêneos definidos sobre um espaço de Banach de dimensão infinita.

1.4 Alguns resultados

Nesta seção citaremos alguns resultados que utilizaremos na prova do Teorema 2.3.2 que garante a aproximação periódica em termos da norma para os expoentes de Lyapunov. Inicialmente consideramos uma proposição extraída de [14].

Lema 1.4.1. *Seja $a(n,\omega)$ um cociclo integrável e subaditivo sob um sistema ergódico (Ω,μ,T) com expoente λ finito. Então para qualquer $\rho > 0$ fixado, existem uma sequência de inteiros $n_i \to \infty$, uma sequência de números reais $\delta_l \to 0$ e um conjunto $\mathcal{O}_\rho \subset \Omega$ tal que $\mu(\mathcal{O}_\rho) > 1-\rho$, e para todo $l \leq n_i$ e $\omega \in \mathcal{O}_\rho$ vale que*

$$a(n_i,\omega) - a(n_i - l, T^l(\omega)) \geq l(\lambda - \delta_l). \tag{1.5}$$

Além disso o subconjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : (1.5) \text{ vale para todo } l \leq n\}$ satisfaz

$$\overline{Dens}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#(A \cap [0, N-1]) > 1 - \rho. \tag{1.6}$$

Observação 1.4.2. *A condição dada na relação* (1.6) *garante que escolhendo ρ arbitrariamente pequeno, existe um conjunto de n's com cardinalidade grande de modo que vale* (1.5), *ou seja, existe uma quantidade infinita de n's satisfazendo a estimativa* (1.5).

Na sequência considere o seguinte lema do trabalho [13].

Lema 1.4.3. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo preservando uma medida de probabilidade de Borel μ. Então existe um conjunto P com $\mu(P) = 1$ tal que para cada $x \in P$ e $\varepsilon, \delta > 0$ existe um inteiro $N = N(x,\varepsilon,\delta)$, tal que, se $n > N$ então existe um inteiro k com*

$$n(1+\varepsilon) < k < n(1+2\varepsilon) \text{ e } d(x, f^k(x)) < \delta.$$

Capítulo 2

Cociclos Homogêneos e Expoentes de Lyapunov

Este capítulo pode ser entendido como dividido em duas etapas: numa primeira nos dedicaremos a motivar o estudo dos cociclos homogêneos, bem como dos expoentes de Lyapunov associados a essa classe de cociclos. Num segundo momento provaremos o resultado sobre aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov e uma aplicação de tal resultado.

Na Seção 2.1, faremos uma primeira abordagem, a qual mostra algumas propriedades iniciais sobre expoentes pontuais de Lyapunov de funções homogêneas. Em tal seção vai ser possível identificar como os expoentes vão depender do par de funções (Φ_h, N_h) associados a alguma função homogênea h definida em $\mathbb{R}^2$. Além disso, analisaremos quando ocorre a dependência contínua dos expoentes com relação a Φ e N.

Na Seção 2.2 inspirados pelos trabalhos [1], [6] e [18] procuraremos discutir ideias sobre uma fórmula do tipo Hemman-Avila-Bochi para cociclos homogêneos definidos em $\mathbb{R}^2$. Salientamos que ainda não temos a fórmula precisamente estabelecida, então apresentaremos um exemplo envolvendo a família da tenda que garante uma estimativa inferior para o expoente de Lyapunov mostrando assim, que o mesmo seja de fato positivo.

Já na Seção 2.3 iremos enunciar o resultado de aproximação periódica no Teorema 2.3.2 e ainda, mostrar propriedades e justificar algumas condições que iremos assumir a fim de provar o resultado desejado.

Ainda, na Seção 2.4 iremos fazer a prova do resultado sobre a aproximação periódica em termos de norma dos expoentes. Dividimos a prova do Teorema 2.3.2 em 5 etapas, onde iremos primeiramente determinar a escolha do ponto periódico p que nos fornece a aproximação. Posteriormente, obteremos cada estimativa das aproximações do maior e menor expoentes associados ao cociclo dividos em subseções.

Por fim, dedicamos uma última seção, que é a 2.5, para apresentar uma aplicação do Teorema 2.3.2. Nesse resultado mostraremos que a taxa de crescimento exponencial e a taxa de distorção quase-conforme associadas a um cociclo homogêneo são dadas em termos de pontos periódico.

Enfatizamos que para a prova do Teorema 2.3.2 tem sua prova, bem como muitas ideias, fortemente baseadas no trabalho [23].

2.1 Uma primeira visão sobre os expoentes de Lyapunov

Nesta seção, realizaremos uma análise sobre o comportamento e propriedades dos expoentes pontuais de Lyapunov associados a funções homogêneas definidas em $\mathbb{R}^2$. Para tal estudo, utilizaremos o fato de cada aplicação homogênea h estar identificada a um par de funções (Φ_h, N_h) definidas no círculo unitário pela expressão (1.2). Salientamos que apresentaremos uma primeira visão sobre a abordagem do conceito de expoentes de Lyapunov gerados por funções homogêneas, que é o foco principal deste trabalho e que também, nos servirá como uma motivação para tal estudo. Por simplicidade, escreveremos apenas (Φ, N) ao invés de (Φ_h, N_h) quando conhecida a função homogênea h.

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homogênea e denotaremos por $\mathbb{S}^1$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^2$, isto é, $\mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = 1\}$, onde $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{R}^2$. Consideramos também o par (Φ, N) das funções associadas a h, com $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ e $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$.

Definimos o **expoente pontual de Lyapunov $\lambda(v)$ associado a h no ponto** $v \in \mathbb{R}^2$ pela seguinte expressão

$$\lambda(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\underbrace{h \circ ... \circ h \circ h}_{n\ vezes}(v)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |h^n(v)|. \tag{2.1}$$

Observação 2.1.1. *Para cada $v \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\overline{v} = v/|v|$ a normalização do vetor v. Observe também que, cada vetor $v \in \mathbb{S}^1$ pode ser associado a um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ de modo que $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Por simplicidade, quando nos referirmos ao ângulo θ estaremos falando do vetor $v(\theta)$ o qual é a normalização de algum vetor $v \in \mathbb{R}^2$.*

A partir da Observação 2.1.1, afirmamos que para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\lambda(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |h^n(v)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^i(\theta)). \tag{2.2}$$

De fato, fixando $v \in \mathbb{R}^2$ qualquer, para mostrarmos que a afirmação acima é válida, observe inicialmente que a relação dada em (1.2) nos diz $h(v) = \Phi(\overline{v})N(\overline{v})|v|$. Assim, pela homogeneidade da função h temos para qualquer $n \geq 1$ que

$$h^n(v) = N(\Phi^{n-1}(\overline{v}))...N(\Phi(\overline{v}))N(\overline{v})|v|\Phi^n \circ ... \circ \Phi^2 \circ \Phi(\overline{v}).$$

Desse modo, como Φ tem norma unitária, obtemos que

$$|h^n(v)| = N(\Phi^{n-1}(\overline{v}))...N(\Phi(\overline{v}))N(\overline{v})|v|. \tag{2.3}$$

Aplicando logaritmo na expressão (2.3) temos que

$$\begin{aligned} \log|h^n(v)| &= \log(N(\Phi^{n-1}(\overline{v}))...N(\Phi(\overline{v}))N(\overline{v})|v|) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^i(\overline{v})) + \log|v|. \end{aligned}$$

Dessa forma, pela Observação 2.1.1, obtemos que

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|h^n(v)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^i(\overline{v})) + \log|v| \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^i(\overline{v})) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^i(\theta)) \end{aligned}$$

Essa afirmação que acabamos de provar, nos mostra como o expoente pontual de uma função homogênea h depende do par de funções (Φ, N). Note que o comportamento da função N acaba dependendo da escolha da função Φ, dessa forma, vamos fixar uma N qualquer e assumir algumas possibilidades para Φ.

Fixada $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ assuma que $\Phi(\theta) = \theta + 2\pi\omega$ a rotação por algum ângulo ω. Nesse caso, temos para cada $j \geq 1$ que $\Phi^j(\theta) = \theta + 2\pi j\omega$, para qualquer ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Assim, para cada ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, a expressão do expoente pontual em θ será

$$\lambda(\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\theta + 2\pi i\omega). \tag{2.4}$$

Note que caso $\omega = 0$, ou seja, Φ é a rotação pelo ângulo 0 ou a função identidade, temos que $N(\theta + 2\pi i\omega) = N(\theta)$. Então, o expoente dependerá da escolha do vetor v e é fácil exibir qual será seu valor explicitamente

$$\lambda(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\theta)^n = \log N(\theta).$$

Sendo assim, observe que dependendo da escolha de h, podem existir infinitos valores para os expoentes pontuais associados a uma determinada função homogênea.

De modo similar, caso $\omega \in \mathbb{Q}$ é não nulo ou seja, se Φ é uma rotação racional não nula, o expoente também dependerá da escolha do vetor v, no entanto para obtermos seu valor dependerá da ação que Φ gera sobre N, conforme pode-se observar na expressão do expoente dada em (2.4).

No exemplo a seguir exibimos como pode ocorrer tal dependência e variação no valor do expoente conforme variamos a função Φ.

Exemplo 2.1.2. *Defina $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ por $N(\theta) = 1/2 + \tan^2(\theta)$. Note que $N(\theta) > 0$ para qualquer $\theta \in \mathbb{S}^1$. Agora defina $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ por $\Phi(\theta) = \theta + \pi/k$ uma rotação racional, com $k \neq 0$ inteiro. Note que $\Phi^n(\theta) = \theta + \frac{n\pi}{k}$, para todo $n \geq 1$. Vamos escolher um vetor u de modo que $\overline{u}$ seja identificado com o ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$. Pela definição da função N, temos que*

$$N\left(\Phi^n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + \tan^2\left(\Phi^n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{k}\right).$$

Afirmação. *Para todo $n \geq 1$ e tomando k como um inteiro positivo*

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{k}\right) = \frac{\sqrt{3} + 4\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)}{-4\cos^2\left(\frac{n\pi}{k}\right) + 3}. \tag{2.5}$$

De fato, usando que $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$ *e algumas relações trigonométricas, temos que*

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{k}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{k}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 4\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)}{-4\cos^2\left(\frac{n\pi}{k}\right) + 3}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova da afirmação.

Para podermos exibir os valores de alguns expoentes, vamos considerar os valores $k = 1, 2$.

k=1. *Nesse caso para todo* $n \geq 1$ *temos*

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} + n\pi\right) = -\sqrt{3},$$

e assim, $\tan^2\left(\frac{\pi}{3} + n\pi\right) = 3$. *Dessa forma,* $N(\Phi^n(\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$. *Logo, obtemos que o expoente será* $\lambda(\frac{\pi}{3}) = \log(\frac{7}{2}) > 0$.

k=2. *Pela expressão dada em* (2.5) *temos que*

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

e assim $\tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$. *Dessa forma,* $N(\Phi^n(\frac{\pi}{3})) = \frac{5}{6}$, *para todo* $n \geq 1$. *Obtemos assim, que o expoente será* $\lambda(\frac{\pi}{3}) = \log(\frac{5}{6}) < 0$.

Agora vamos supor que $\omega \notin \mathbb{Q}$ e então Φ é uma rotação irracional. Nessa caso, utilizando a unicidade ergódica dessa aplicação com respeito a medida de Lebesgue, pelo Teorema 1.1.5, teremos para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$ que

$$\lambda(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^i(\theta)) = \int_0^{2\pi} \log N(t)dt.$$

Assim, o valor do expoente não vai depender da escolha do vetor v e apenas da escolha da função N.

Como para cada número irracional é possível determinar um racional tão próximo quanto se queira, a discussão acima nos motiva a seguinte questão: o expoente pontual de Lyapunov varia continuamente com respeito a função Φ? Na verdade, os comentários que realizamos acima nos induzem a supor que a resposta para essa pergunta é não! De fato, no exemplo a seguir descrevemos com mais detalhes como o expoente não varia continuamente com respeito a função Φ.

Exemplo 2.1.3. *Sejam* $\Phi, \Phi_\omega : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *para* $\omega \notin \mathbb{Q}$ *dadas por* $\Phi(\theta) = \theta$ *e* $\Phi_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega$, *ou seja,* Φ *é a identidade (ou rotação pelo ângulo zero) e* Φ_ω *é uma rotação irracional. Definimos agora a função* $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ *por* $N(\theta) = 1 + \sin^2(\theta/2)$. *Denotamos por* h *e* h_ω *as funções homogêneas geradas pelos pares* (Φ, N) *e* (Φ_ω, N), *respectivamente. Além disso, escreveremos da forma* λ *e* λ^ω *os expoentes de Lyapunov associados a* h *e* h_ω, *respectivamente. Pela expressão dada em* (2.1) *e pela unicidade ergódica da rotação irracional com respeito a* *medida de Lebesgue, temos para todo $u \in \mathbb{R}^2$ que*

$$\begin{aligned}
\lambda^{\omega}(u) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi_{\omega}^{n}(\theta)) \\
&= \int_{[0,2\pi]} \log N(t)dt \\
&= \int_{[0,2\pi]} \log(1+\sin^2(t/2))dt \approx 2,3653227846146...
\end{aligned}$$

Note que o valor do expoente não depende da escolha de ω e assim, podemos tomar o irracional ω tão próximo de zero quanto queiramos. Por outro lado, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\Phi^{n}(\theta)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N(\theta) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(1+\sin^2(\theta/2)) \\
&= \log(1+\sin^2(\theta/2)).
\end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $u \in \mathbb{R}^2$ obtemos que $\lambda(u) \in [0, \log 2]$. Logo,

$$\lambda(u) \leq \log 2 < 2 < \lambda^{\omega}(u),$$

para todo $u \in \mathbb{R}^2$ e para qualquer $\omega \notin \mathbb{Q}$. Sendo assim, obtemos que o expoente de Lyapunov é descontínuo com respeito a escolha da função Φ.

Agora podemos pensar também se o expoente pontual de Lyapunov varia continuamente com relação a escolha da função N. Afirmamos que neste caso a resposta é afirmativa. De fato, fixada $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, consideramos $N_1, N_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ quaisquer suficientemente próximas. Pela expressão (2.1) para cada $\theta \in [0, 2\pi)$ e cada $i = 1, 2$ vale que

$$\lambda_i(\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log N_i(\Phi^{n}(\theta)).$$

Agora dado $\varepsilon > 0$, como tomamos $N_1(\Phi^n(\theta))$ e $N_2(\Phi^n(\theta))$ suficientemente próximas, pela continuidade da função logarítmica temos que $|\log N_1(\Phi^n(\theta)) - \log N_2(\Phi^n(\theta))| < \varepsilon$, para todo $n \geq 0$. Dessa forma, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$ obtemos que

$$|\lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\log N_1(\Phi^n(\theta)) - \log N_2(\Phi^n(\theta))| < \varepsilon.$$

Logo, obtemos que os expoentes de Lyapunov variam continuamente com respeito a escolha da função N, no entanto essa dependência não é contínua com relação a escolha da função Φ.

2.2 Fórmula do tipo Herman-Avila-Bochi

Neste momento do trabalho, apresentaremos uma cota inferior para o expoente de Lyapunov de um cociclo homogêneo motivadas a partir dos trabalhos [1], [6] e [18], como já citamos anteriormente. Inicialmente, em 1983, Herman conseguiu estabelecer uma cota inferior para o valor do expoente de Lyapunov de uma classe de cociclos gerado por matrizes definidas em $SL(2, \mathbb{R})$ e sobre uma transformação ergódica. Posteriormente, em 2002, Avila e Bochi mostraram que tal estimativa inferior assume o valor do expoente. Na sequência descreveremos os resultados de Herman e Avila-Bochi mencionados acima, a fim de tornar a leitura auto inclusa.

Seja (X, μ) um espaço de probabilidade e $f : X \to X$ uma transformação ergódica invariante por μ. Considere uma aplicação $A : X \to SL(2, \mathbb{R})$ mensurável. Tomamos então o cociclo $\mathcal{A} : X \times SL(2, \mathbb{R}) \to X \times SL(2, \mathbb{R})$ gerado por A sobre f e definimos o maior expoente de Lyapunov de tal cociclo pela expressão

$$\lambda(f, A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \log ||A_n(x)|| d\mu(x),$$

onde $A_n(x) = A(f^{n-1}(x))...A(f(x))A(x)$. Considere ainda a seguinte matriz de rotação pelo ângulo θ definida por

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

O foco dos trabalhos que citamos é estudar a família de cociclos $\theta \mapsto (f, R_\theta A)$. No trabalho de Herman, ele estabelece a seguinte estimativa

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(f, R_\theta A) d\theta \geq \int_X \log\left(\frac{||A(x)|| + ||A(x)||^{-1}}{2}\right) d\mu(x).$$

Avila e Bochi em [1] mostraram que de fato vale a igualdade na relação apresentada por Herman, ou seja,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(f, R_\theta A)d\theta = \int_X \log\left(\frac{||A(x)|| + ||A(x)||^{-1}}{2}\right) d\mu(x).$$

A partir de tais trabalhos, analisaremos algumas estimativas que podem ser obtidas quando a família de cociclos é gerada por uma aplicação homogênea. Mais precisamente, considerando que $f_1, f_2, ..., f_n$ são funções homogêneas definidas em $\mathbb{R}^2$, objetivamos uma cota inferior positiva para a expressão

$$\int_{\mathbb{S}^1} \log ||R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1|| d\theta. \tag{2.6}$$

Quando for necessário assumir alguma condição extra além da homogeneidade sobre alguma das funções f_i, as colocaremos no momento oportuno. Além disso, para $i \geq 1$, a cada f_i associaremos um par de funções (Φ_i, N_i) onde vale a expressão (1.2), com $\Phi_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ e $N_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ e ainda, denotaremos por $\Phi_{i,\theta} = R_\theta \Phi_i$.

Lema 2.2.1. *Para qualquer sequência de funções homogêneas $f_1, f_2, ..., f_n$ vale que*

$$||R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1|| \geq N_n(\Phi_{n-1,\theta} \circ ... \circ \Phi_{1,\theta}(v)) ... N_2(\Phi_{1,\theta}(v)) N_1(v), \tag{2.7}$$

para qualquer vetor $v \in \mathbb{S}^1$.

Observação 2.2.2. *Como enfatizamos acima, no lado esquerdo da expressão dada em* (2.7) *temos uma composição de funções, enquanto no lado direito é um produto entre as funções N_i, já que elas assumem valores reais. Note ainda, que para evitarmos confusão quando escrevemos o argumento da função N_n enfatizamos que é uma composição.*

Demonstração. Lema 2.2.1. De fato, pela definição da norma das funções homogêneas, temos para qualquer $v \in \mathbb{S}^1$ que

$$||R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1|| = \sup_{|u|=1} |R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1(u)| \geq |R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1(v)|.$$

Note que, fixado $v \in \mathbb{S}^1$ qualquer, pela expressão (1.2) temos que

$$\begin{aligned}
|R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1(v)| &= |R_\theta f_n ... R_\theta f_2 (R_\theta \Phi_1(v) N_1(v))| \\
&= N_1(v) |R_\theta f_n ... R_\theta f_2(\Phi_{1,\theta}(v))| \\
&= .... \\
&= N_n(\Phi_{n-1,\theta} \circ ... \circ \Phi_{1,\theta}(v)) ... N_2(\Phi_{1,\theta}(v)) N_1(v) |\Phi_{n,\theta} \circ ... \circ \Phi_{2,\theta} \circ \Phi_{1,\theta}(v)|.
\end{aligned}$$

Observe que $\Phi_{i,\theta}$ tem norma unitária para qualquer $i \geq 1$, já que Φ tem norma unitária e R_θ é uma matriz de rotação. Dessa forma, decorre que

$$|R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1(v)| = N_n(\Phi_{n-1,\theta} \circ ... \circ \Phi_{1,\theta}(v))...N_2(\Phi_{1,\theta}(v))N_1(v).$$

Assim, garantimos a validade do resultado.

□

Aplicando o Lema 2.2.1 obtemos a seguinte expressão:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \log ||R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1|| d\theta \geq \int_{\mathbb{S}^1} \log \left(N_n(\Phi_{n-1,\theta} \circ ... \circ \Phi_{1,\theta}(v))...N_2(\Phi_{1,\theta}(v))N_1(v) \right) d\theta. \quad (2.8)$$

A partir dessa inequação, vamos obter uma fórmula do tipo Herman-Avila-Bochi acima citada. Relembremos que cada vetor $v \in \mathbb{S}^1$ pode ser associado a um ângulo $\rho \in [0, 2\pi)$ tal que $v = v(\rho) = (\cos\rho, \sin\rho)$.

Lema 2.2.3. *Para cada $i \geq 1$, seja $\Phi_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\Phi_i(v(\rho)) = \rho + \omega_i$, para todo $i \geq 1$, isto é, uma rotação pelo ângulo ω_i. Assumindo ainda que as funções contínuas $N_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ são tais que $N_1 > 1$ e N_j são quaisquer, para $j \geq 2$. Definindo as funções homogêneas $f_1, f_2, ..., f_n$ geradas pelos pares (Φ_i, N_i) a partir da expressão (1.2), obtemos*

$$\int_{\mathbb{S}^1} \log ||R_\theta f_n ... R_\theta f_2 R_\theta f_1|| d\theta \geq \int_{\mathbb{S}^1} \sum_{i=1}^{n} \log N_i(u) du.$$

Demonstração. Inicialmente, observe que como Φ_i e R_θ são rotações para qualquer $i \geq 1$ e qualquer ângulo θ vale que

$$\begin{aligned}
\Phi_{i,\theta} \circ ... \circ \Phi_{2,\theta} \circ \Phi_{1,\theta}(v(\rho)) &= \Phi_{i,\theta} \circ ... \circ \Phi_{2,\theta}(R_\theta \Phi_1(v(\rho))) \\
&= \Phi_{i,\theta} \circ ... \circ \Phi_{2,\theta}(\theta + \rho + \omega_1) \\
&= \Phi_{i,\theta} \circ ... \circ \Phi_{3,\theta}(2\theta + \rho + \omega_1 + \omega_2) \\
&= .... \\
&= i\theta + \rho + \omega_i + ... + \omega_2 + \omega_1.
\end{aligned}$$

Dessa forma, considerando que $\omega_0 = 0$ é o ângulo nulo podemos escrever

$$\log(N_n(\Phi_{n-1,\theta} \circ ... \circ \Phi_{1,\theta}(v(\rho)))...N_1(v(\rho))) = \sum_{i=1}^{n} \log(N_i((i-1)\theta + \rho + w_{i-1} + ... + \omega_0))$$

Logo, como pela expressão (1.2) vale que $|h_i(u)| = N_i(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{S}^1$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^1} \log(N_n(\Phi_{n-1,\theta} \circ ... \circ \Phi_{1,\theta}(v(\rho)))...N_1(v(\rho)))d\theta \\ = & \int_{\mathbb{S}^1} \sum_{i=1}^{n} \log(N_i((i-1)\theta + \rho + w_{i-1} + ... + \omega_0))d\theta \\ = & \int_{\mathbb{S}^1} \sum_{i=1}^{n} \log N_i((i-1)\theta)d\theta \\ = & \int_{\mathbb{S}^1} \sum_{i=1}^{n} \log N_i(u)du. \end{aligned}$$

□

Vamos escolher as funções N_i como uma família das funções tenda. Ou seja, para $0 < C < 1$ fixo, definimos para cada $1 \leq i \leq n$

$$N_i(x) = \begin{cases} ix + C, \ x \in [0, \frac{1}{2}) \\ i(1-x) + C, \ x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

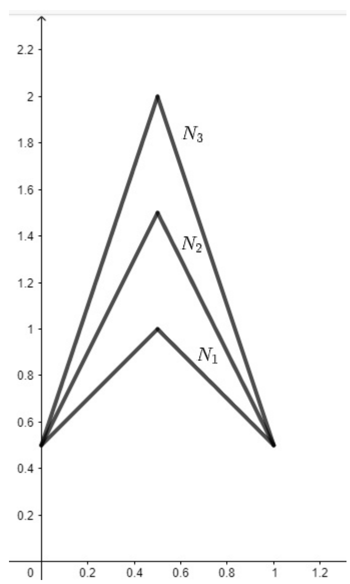

Figura 2.1: Gráfico de N_i, para $1 \leq i \leq 3$ e $C = 0.5$.

Temos nesse caso que $N_1(x) \leq N_i(x)$, para todo $x \in [0,1)$ e $2 \leq i \leq n$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} \sum_{i=1}^{n} \log N_i(x)dx &\geq n\int_0^1 \log N_1(x)dx \\
&= n\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \log(x+C)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \log(1-x+C)dx\right) \\
&= n\left(2\left(C+\frac{1}{2}\right)\log\left(C+\frac{1}{2}\right) - 2C\log C - 1\right).
\end{aligned}$$

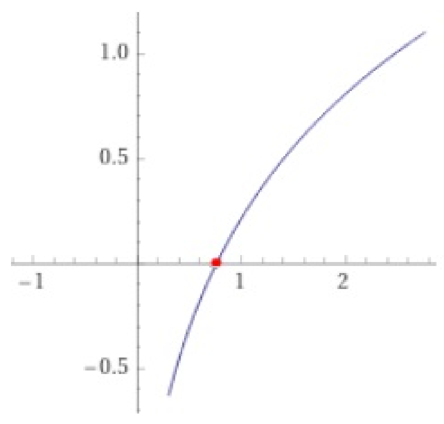

Figura 2.2: Gráfico da função $2\left(C+\frac{1}{2}\right)\log\left(C+\frac{1}{2}\right) - 2C\log C - 1$.

Existe $C_0 \approx 0.76045$ tal que para todo $C_0 < C < 1$ temos que $2\left(C+\frac{1}{2}\right)\log\left(C+\frac{1}{2}\right) - 2C\log C - 1 > 0$. Dessa forma, usando o Lema 2.2.3, concluímos que

$$\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^1} \log\|R_\theta f_n \dots R_\theta f_2 R_\theta f_1\|d\theta \geq 2\left(C+\frac{1}{2}\right)\log\left(C+\frac{1}{2}\right) - 2C\log C - 1 > 0.$$

Temos assim um exemplo que onde é possível uma cota inferior para o qual o expoente será positivo no caso homogêneo. Note que restringimos a escolha da constante C sendo menor que 1, pois no caso em que $C \geq 1$ seria mais fácil de obter uma cota inferior positiva. Esse exemplo numérico, nos motiva a buscar condições de modo que seja possível estabelecer uma fórmula do tipo Herman-Ávila-Bochi no contexto dos cociclos homogêneos.

2.3 Aproximação Periódica para os Expoentes de Lyapunov

Neste momento do trabalho, apresentaremos um resultado envolvendo os expoentes de Lyapunov para cociclos gerados por aplicações homogêneas. Mais precisamente, mostraremos que é possível aproximar periodicamente em termos da norma, o maior e o menor expoente de Lyapunov associados a um cociclo homogêneo. Esse resultado foi inspirado nos trabalhos de Kalinin e Sadvoskaya [22] e [23].

Antes de enunciarmos tal resultado, consideremos a definição abaixo que nos fornecerá a existência do ponto periódico que será usado para a aproximação de fato exista. Essa é uma definição que se faz necessária, pois a dinâmica que é base do cociclo não possui a regularidade para que valha algum resultado do tipo *closing lemma*. Para resultados nesse contexto, citamos como referência a seção 6.4.c da referência [25].

Definição 2.3.1. *Um homeomorfismo $f : X \to X$ satisfaz a* ***closing property*** *se existem constantes $C, \gamma, \delta_0 > 0$ tais que para qualquer $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$ com $d(x, f^k(x)) < \delta_0$, existe um ponto $p \in X$ com $f^k(p) = p$, onde os segmentos de órbita $x, f(x), \cdots, f^k(x)$ e $p, f(p), \cdots, f^k(p)$ são exponencialmente próximos, isto é,*

$$d(f^i(x), f^i(p)) \leq Cd(x, f^k(x))e^{-\gamma \min\{i,k-i\}}, \tag{2.9}$$

para qualquer $i = 0, \cdots, k$.

Antes de enunciarmos o teorema principal, apresentaremos algumas definições importantes e que serão consideradas até o final do texto. Relembrando que definimos o cociclo homogêneo na Seção 1.3. Inicialmente, será necessário definirmos o cociclo tomando valores no seguinte espaço

$$\mathcal{H}^1_*(E) = \{g \in \mathcal{H}^1(E) : |g(u+v)| \leq |g(u)| + |g(v)|, \ \forall \ u, v \in E\}.$$

Ou seja, vamos supor que o cociclo seja definido como uma aplicação $\mathbb{H} : X \times \mathbb{Z} \to \mathcal{H}^1_*(E)$. Vamos justificar a necessidade dessa hipótese na seção 2.3.2 e mostrar que mesmo com essa condição, ainda estaremos abordando um caso mais geral do apresentado no contexto linear.

Assumiremos que o cociclo seja α-Hölder contínuo, para algum $0 < \alpha \leq 1$. Isto significa que a função $H : X \to \mathcal{H}^1_*(E)$ que gera o cociclo α-Hölder, isto é, existe uma $0 < \alpha \leq 1$ tal que $||H(x) - H(y)|| \leq Md(x, y)^\alpha$, para todos $x, y \in X$.

Na sequência, enunciaremos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 2.3.2. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo satisfazendo a closing property, X é um espaço métrico compacto munido de uma medida de probabilidade ergódica μ que é invariante por f. Suponha que o cociclo homogêneo $\mathbb{H}$ é α-Hölder contínuo. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe um ponto periódico p, de período $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left|\lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||\right| < \varepsilon \text{ e } \left|\lambda_-(\mathbb{H},\mu) - \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)^{-1}||^{-1}\right| < \varepsilon.$$

Observação 2.3.3. *Na demonstração do Teorema 2.3.2 teremos que, por construção, o período k de cada ponto periódico p pode ser tomado tão grande quanto se queira. Ou seja, para qualquer $N \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ existe um ponto periódico p de período k e com propriedade desejada, de modo que $k > N$.*

Na sequência definiremos os expoentes de Lyapunov para cociclos homogêneos, e ainda mostraremos que será necessário considerar tais cociclos gerados por funções em um espaço de funções homogêneas com uma propriedade adicional. Mesmo assim, será possível perceber que de fato esse resultado generaliza o apresentado em [23]. Descreveremos na sequência as ferramentas que serão empregadas para prova do Teorema 2.3.2 e realizaremos sua demonstração no capítulo seguinte.

2.3.1 Expoentes de Lyapunov para Cociclos Homogêneos

Motivados pelo Teorema 1.3.7, definiremos os maior e o menor expoentes pontuais de Lyapunov associados a um cociclo gerado por uma aplicação homogênea. Salientamos que para essa seção, o cociclo pode assumir valores apenas em $\mathcal{H}^1(E)$.

Definição 2.3.4. *Considere (X,μ) um espaço de medida e $f : X \to X$ um homeomorfismo tal que μ é $f-$invariante e ergódica. Para cada $x \in X$ sejam λ_+ o **maior** e λ_- o **menor** expoentes pontuais de Lyapunov associados a um cociclo homogêneo $\mathbb{H}$ com respeito a μ, as aplicações dadas abaixo*

$$\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||\mathbb{H}(x,n)||, \tag{2.10}$$

$$\lambda_-(\mathbb{H},\mu)(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||^{-1}. \tag{2.11}$$

Enfatizamos que pode-se garantir que os expoentes estão bem definidos mesmo sem assumirmos que a medida μ é ergódica. No entanto, tal hipótese nos garantirá que os expoentes são constantes em quase todos os pontos $x \in X$.

Proposição 2.3.5. *As aplicações $\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$ e $\lambda_-(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$ estão bem definidas e são constantes μ-quase todo ponto x em X.*

Demonstração. Inicialmente, provaremos o resultado para o caso da aplicação $\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$. Considere a sequência de funções $a_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $a_n(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n)||$. Pelo Lema 1.3.5 e pela Observação 1.3.6 temos que o cociclo homogêneo $\mathbb{H}$ satisfaz a equação do cociclo. Então para quaisquer $n, k \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in X$, segue pelo Lema 1.2.15 que

$$||\mathbb{H}(x,n+k)|| = ||\mathbb{H}(f^k(x),n) \circ \mathbb{H}(x,k)|| \leq ||\mathbb{H}(f^k(x),n)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,k)||.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+k}(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n+k)|| &\leq \log(||\mathbb{H}(f^k(x),n)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,k)||) \\ &= \log ||\mathbb{H}(f^k(x),n)|| + \log ||\mathbb{H}(x,k)|| \\ &= a_n(f^k(x)) + a_k(x), \end{aligned}$$

ou seja, (a_n) é uma sequência subaditiva. Pelo Teorema 1.1.5 e do Teorema 1.1.6, decorre que

$$\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n(\mu) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n(\mu),$$

onde $a_n(\mu) = \int_X a_n(x) d\mu$, vale para μ-quase todo ponto x.

Dessa forma, a convergência da sequência $a_n(\cdot)/n$ não depende de x para $\mu-$quase todo ponto e assim, obtemos que a aplicação $\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$ está bem definida e é constante em $\mu-$quase todo ponto.

Para justificarmos o resultado no caso da aplicação $\lambda_-(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$, tomamos a sequência $b_n(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||$. Utilizando uma argumentação similar a empregada no caso anterior, temos que a sequência $b_n(\cdot)/n$ converge para $\mu-$quase todo ponto e ainda,

$$-\lambda_-(\mathbb{H},\mu)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} b_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} b_n(\mu) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} b_n(\mu),$$

onde $b_n(\mu) = \int_X b_n(x) d\mu$ e o resultado segue de modo similar ao caso anterior.

□

Pela Proposição 2.3.5 temos que as aplicações $\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$ e $\lambda_-(\mathbb{H},\mu)(\cdot)$ são constantes μ-quase todo ponto. Então existem constantes $\lambda_+(\mathbb{H},\mu)$ e $-\lambda_-(\mathbb{H},\mu)$ tais que

$$\lambda_+(\mathbb{H},\mu)(x) = \lambda_+(\mathbb{H},\mu) \text{ e } \lambda_-(\mathbb{H},\mu)(x) = \lambda_-(\mathbb{H},\mu), \text{ para } \mu - \text{quase todo ponto.} \quad (2.12)$$

Ainda, como $\lambda_+ = \lambda_+(\mathbb{H},\mu)$ e $\lambda_- = \lambda_-(\mathbb{H},\mu)$ estão bem definidos, os chamaremos de o **maior** e o **menor** expoentes de Lyapunov, respectivamente, para qualquer cociclo homogêneo $\mathbb{H}$.

Observação 2.3.6. *Considerando a sequência* $\tilde{a}_n(x) = \log||\mathbb{H}(f^{-n}(x), n)||$, *é fácil ver que* $a_n(\mu) = \tilde{a}_n(\mu)$. *Assim, temos que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tilde{a}_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||\mathbb{H}(f^{-n}(x), n)|| = \lambda_+.$$

Observação 2.3.7. *Note que* $\lambda_+ \geq \lambda_-$ *e ambos os expoentes são finitos pelas hipóteses que colocamos sobre o cociclo.*

Observação 2.3.8. *Pela Observação 1.4.2, existe um conjunto infinito de n's para o qual o Teorema Principal 2.3.2 valerá ao aplicarmos para os cociclos* $a_n(x) = \log||\mathbb{H}(x, n)||$ *e* $b_n(x) = \log||\mathbb{H}(x, n)^{-1}||$ *com expoentes* λ_+ *e* λ_-, *respectivamente.*

Para finalizar essa seção, definiremos o seguinte conjunto

$$\Lambda = \{x \in X : \text{as equações dadas em (2.12) são válidas}\}, \tag{2.13}$$

o qual será utilizado posteriormente. Note que $\mu(\Lambda) = 1$.

2.3.2 Espaço $\mathcal{H}^1_*(E)$ e Norma de Lyapunov Adaptada

A fim de obtermos estimativas necessárias para provar as aproximações periódicas dos expoentes de Lyapunov, utilizaremos uma norma que depende da dinâmica. Para definir essa norma, precisamos que o cociclo tome valores no seguinte conjunto:

$$\mathcal{H}^1_*(E) = \{g \in \mathcal{H}^1(E) : |g(u+v)| \leq |g(u)| + |g(v)|,\ \forall\ u, v \in E\}.$$

Mais precisamente, é necessário considerar esse espaço para que a norma a qual definiremos, satisfaça a desigualdade triangular.

Outro ponto importante é garantir que o espaço $\mathcal{H}^1_*(E)$ não seja vazio. No entanto, um exemplo imediato é que toda aplicação linear A é homogênea e satisfaz a relação $|A(u+v)| \leq |A(u)| + |A(v)|$. No exemplo a seguir, mostraremos que existe uma função homogênea e não linear satisfazendo a condição de $\mathcal{H}^1_*(E)$. No entanto, o seguinte exemplo não é necessariamente invertível.

Exemplo 2.3.9. *Inspirados no trabalho [20] vamos construir nosso exemplo. Considere* X_A *um subshift do tipo finito sobre* $I^{\mathbb{N}}$, *onde* I *é o conjunto dos números inteiros positivos. Seja*

$E = CB(X_A)^+$ o conjunto das funções reais positivas contínuas e limitadas definidas sob X_A. Ou seja, estamos assumindo que se $\varphi \in E$, então $\varphi > 0$. Tomamos ainda $\sigma : X_A \to X_A$ a aplicação shift, $f : X \to X$ um homeomeorfismo sob um espaço métrico compacto X e a aplicação $\mathcal{M}_F : X \to \mathcal{H}^1_*(E)$ dada por

$$\mathcal{M}_{F(x)}(\varphi)(\underline{w}) := \sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} (F(x)\cdot\varphi)(\underline{y}) = \sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} F(x)(\underline{y})\cdot\varphi(\underline{y}),$$

para qualquer $\varphi \in E$ e $\underline{w} \in X_A$, onde $F(x) \in E$, para cada $x \in X$. Observe que $\mathcal{M}_{F(x)}$ é homogênea pois, para todo $\lambda > 0$

$$\mathcal{M}_{F(x)}(\lambda\varphi)(\underline{w}) = \sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} (F(x)\cdot(\lambda\varphi))(\underline{y}) = \lambda \sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} (F(x)\cdot\varphi)(\underline{y}) = \lambda\mathcal{M}_{F(x)}(\varphi)(\underline{w}).$$

Além disso, dadas $\varphi, \psi \in E$, temos que

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{M}_{F(x)}(\varphi+\psi)(\underline{w})\right| &= \left|\sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} (F(x)\cdot(\varphi+\psi))(\underline{y})\right| \\ &\leq \left|\sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} (F(x)\cdot\varphi)(\underline{y})\right| + \left|\sup_{\underline{y}\in\sigma^{-1}(\underline{w})} (F(x)\cdot\psi)(\underline{y})\right| \\ &= \left|\mathcal{M}_{F(x)}(\varphi)(\underline{w})\right| + \left|\mathcal{M}_{F(x)}(\psi)(\underline{w})\right|. \end{aligned}$$

Mostramos que a aplicação $\mathcal{M}_F$ está bem definida. Agora, consideramos o cociclo gerado por $\mathcal{M}_F$, ou seja, o cociclo $\mathfrak{M} : X \times \mathbb{N} \to \mathcal{H}^1_*(E)$ dado por

$$\mathfrak{M}(x,n)(\varphi)(\underline{w}) = \sup\left\{ \left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} F_{f^j(x)} \circ \sigma^j \right) \cdot \varphi \right) (a_{\underline{w}}\underline{w}) : a_{\underline{w}} \in I^n \text{ e } \underline{w} \in X_A \right\},$$

onde $a_{\underline{w}}\underline{w}$ denota a concateção entre o bloco $a_{\underline{w}}$ de tamanho n com a sequência $\underline{w}$. Note que o cociclo $\mathfrak{M}$ é homogêneo, isto é, $\mathfrak{M}(x,n)(\lambda\varphi) = \lambda\mathfrak{M}(x,n)(\varphi)$, para todo $\lambda > 0$ e $\varphi \in E$.

Agora, para todo $n \geq 1$, *dadas* $\varphi, \psi \in E$ *temos que*

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}(x,n)(\varphi+\psi)(\underline{w})| &= \left|\sup\left\{\left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} F_{f^j(x)} \circ \sigma^j\right) \cdot (\varphi+\psi)\right)(a_{\underline{w}}\underline{w}) : a_{\underline{w}} \in I^n \ e \ \underline{w} \in X_A\right\}\right| \\ &\leq \left|\sup\left\{\left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} F_{f^j(x)} \circ \sigma^j\right) \cdot \varphi\right)(a_{\underline{w}}\underline{w}) : a_{\underline{w}} \in I^n \ e \ \underline{w} \in X_A\right\}\right| + \\ &\quad \left|\sup\left\{\left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} F_{f^j(x)} \circ \sigma^j\right) \cdot \psi\right)(a_{\underline{w}}\underline{w}) : a_{\underline{w}} \in I^n \ e \ \underline{w} \in X_A\right\}\right| \\ &= |\mathfrak{M}(x,n)(\varphi)(\underline{w})| + |\mathfrak{M}(x,n)(\psi)(\underline{w})|. \end{aligned}$$

Obtemos assim que $\mathfrak{M}(x,n) \in \mathcal{H}^1_*(E)$ *e com isso, concluímos que o cociclo está bem definido.*

No exemplo a seguir, apresentamos condições para que uma aplicação em $\mathcal{H}^1_*(E)$ ainda gere um cociclo em $\mathcal{H}^1_*(E)$.

Exemplo 2.3.10. *Seja* $H : X \to \mathcal{H}^1(E)$ *uma aplicação tal que*

$$|H(x)(u+v)| \leq |H(x)(u)| + |H(x)(v)|, \tag{2.14}$$

para todo $x \in X$ *e* $u, v \in E$. *Fixado* $x \in X$, *denotando por* Φ_x *e* N_x *as aplicações associadas a* $H(x)$ *conforme a expressão (1.2), temos que por* (2.14) *obtemos para todo* $u, v \in E$ *que*

$$N_x(\overline{u+v})|u+v| \leq N_x(\overline{u})|u| + N_x(\overline{v})|v|, \tag{2.15}$$

onde $\overline{w} = \frac{w}{|w|} \in \mathbb{S}^1$ *a normalização do vetor* w. *Vamos supor para algum* $x \in X$ *fixo, a aplicação* $H : X \to \mathcal{H}^1(E)$ *seja tal que*

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ \ldots \circ \Phi_x(\overline{u+v}))}{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ \ldots \circ \Phi_x(\overline{u}))} \leq 1, \tag{2.16}$$

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ \ldots \circ \Phi_x(\overline{u+v}))}{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ \ldots \circ \Phi_x(\overline{v}))} \leq 1, \tag{2.17}$$

para todo $k \geq 1$. *Observe que as condições acima são válidas se tomarmos por exemplo* $N_{f^i(x)} \equiv C_i$, *para alguma constante* $C_i > 0$, *para todo* $1 \leq i \leq j$. *Afirmamos que para todo*

$x \in X$, $n \geq 1$ e $u \in E$, vale

$$|\mathbb{H}(x,n)(u)| = N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})) \cdots N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u|.$$

Para $n = 1$, como Φ_x tem norma unitária, segue que

$$|\mathbb{H}(x,1)(u)| = |H(x)(u)| = |\Phi_x(\overline{u})N_x(\overline{u})|u|| = N_x(\overline{u})|u|.$$

Para $n = 2$, usando que $\Phi_{f(x)}$ e Φ_x tem norma unitária, o caso anterior e a homogeneidade de $H(\cdot)$, temos que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{H}(x,2)(u)| &= |H(f(x)) \circ H(x)(u)| \\
&= |H(f(x))(\Phi_x(\overline{u})N_x(\overline{u})|u|)| \\
&= N_x(\overline{u})|u||\Phi_{f(x)} \circ \Phi_x(\overline{u})N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))|\Phi_x(\overline{u})|| \\
&= N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u|.
\end{aligned}$$

Recursivamente, para qualquer $n \geq 1$ fixo temos que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{H}(x,n)(u)| &= |H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x)) \circ H(x)(u)| \\
&= H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x))(\Phi_x(\overline{u})N_x(\overline{u})|u|)| \\
&= N_x(\overline{u})|u||H(f^n(x)) \circ H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f^2(x))(\Phi_{f(x)} \circ \Phi_x(\overline{u})N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))|\Phi_x(\overline{u})|)| \\
&= N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u||H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f^2(x))(\Phi_{f(x)} \circ \Phi_x(\overline{u}))| \\
&= ... \\
&= N_{f^{n-2}(x)}(\Phi_{f^{n-3}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})) \cdots N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u| \\
&\quad\ |H(f^{n-1}(x))(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u}))| \\
&= N_{f^{n-2}(x)}(\Phi_{f^{n-3}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})) \cdots N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u| \\
&\quad\ |\Phi_{f^{n-1}(x)} \circ \Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u}))|\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})|| \\
&= N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})) \cdots N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u|.
\end{aligned}$$

Logo a afirmação é válida. Agora, dados $u, v \in E$, observe que $|\mathbb{H}(x,1)(u+v)| = |H(x)(u+v)|$. Como assumimos que $H(\cdot)$ satisfaz (2.14), segue que

$$|\mathbb{H}(x,1)(u+v)| \leq |\mathbb{H}(x,1)(u)| + |\mathbb{H}(x,1)(v)|.$$

Usando a afirmação, (2.15) *e as condições* (2.16) *e* (2.17)*, com k=1, note que*

$$\begin{aligned}
|\mathbb{H}(x,2)(u+v)| &= N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u+v}))N_x(\overline{u+v})|u+v| \\
&\leq N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u+v}))(N_x(\overline{u})|u| + N_x(\overline{v})|v|) \\
&= \frac{N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u+v}))}{N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))}N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u| + \frac{N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u+v}))}{N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{v}))}N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{v}))N_x(\overline{v})|v| \\
&\leq N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u}))N_x(\overline{u})|u| + N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{v}))N_x(\overline{v})|v| \\
&= |\mathbb{H}(x,2)(u)| + |\mathbb{H}(x,2)(v)|.
\end{aligned}$$

Agora, para qualquer $n \geq 1$ fixo, usando a afirmação, (2.15) *e as condições* (2.16) *e* (2.17)*, com k=n-1, temos que*

$$\begin{aligned}
|\mathbb{H}(x,n)(u+v)| &= N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u+v})) \cdots N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u+v}))N_x(\overline{u+v})|u+v| \\
&\leq N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u+v})) \cdots N_{f(x)}(\Phi_x(\overline{u+v}))(N_x(\overline{u})|u| + N_x(\overline{v})|v|) \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u+v}))}{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u}))} N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})) \cdots N_x(\overline{u})|u| \\
&+ \prod_{j=1}^{n-1} \frac{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u+v}))}{N_{f^j(x)}(\Phi_{f^{j-1}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{v}))} N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{v})) \cdots N_x(\overline{v})|v| \\
&\leq N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{u})) \cdots N_x(\overline{u})|u| \\
&+ N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{f^{n-2}(x)} \circ ... \circ \Phi_x(\overline{v})) \cdots N_x(\overline{v})|v| \\
&= |\mathbb{H}(x,n)(u)| + |\mathbb{H}(x,n)(v)|.
\end{aligned}$$

Nesse exemplo obtemos a partir das condições (2.16) *e* (2.17) *que se a função $H \in \mathcal{H}^1_*(E)$ então, o cociclo gerado por tal H também pertencerá a $\mathcal{H}^1_*(E)$. Além disso, nesse caso podemos ter o ciclo invertível e satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3.2.*

Observação 2.3.11. *Os Exemplos 2.3.9 e 2.3.10 nos mostram que existe função homogênea e não linear que toma valores em $\mathcal{H}^1_*(E)$ tal que a composição também satisfaça as condições $\mathcal{H}^1_*(E)$. Sendo assim, a condição de assumirmos o cociclo tomando valores em $\mathcal{H}^1_*(E)$ ainda é mais geral do que a linearidade.*

Considere um cociclo $\mathbb{H} : X \times \mathbb{Z} \to \mathcal{H}^1_*(E)$ sobre um homeomorfismo $f : X \to X$. Pelo que foi visto na seção 3.1, podemos associar o maior e o menor expoentes de Lyapunov λ_+ e λ_- ao cociclo $\mathbb{H}$. Assim, definiremos a ε-**norma adaptada de Lyapunov** do seguinte modo: dado $\varepsilon > 0$ e para qualquer $x \in \Lambda$, seja a aplicação

$$|\cdot|_{x,\varepsilon} : u \in E \mapsto |u|_{x,\varepsilon} := \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n}. \tag{2.18}$$

Observe que $|\cdot|_{x,\varepsilon}$ está bem definida pois, as séries $\sum |\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n}$ e $\sum |\mathbb{H}(x,-n)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n}$ são exponencialmente convergentes.

Agora, mostraremos que $|\cdot|_{x,\varepsilon}$ define de fato uma norma:

1º) $|u|_{x,\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$.

Se $|u|_{x,\varepsilon} = 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} = 0$. Como ambas as séries são formadas por termos não negativos segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} = 0,$$

e ainda, $|\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} = 0$ para todo $n \geq 0$ e $|\mathbb{H}(x,-m)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)m} = 0$ para todo $m \geq 1$. Como $e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n}, e^{(\lambda_- - \varepsilon)m} > 0$ para quaisquer n e m, decorre que

$$|\mathbb{H}(x,n)(u)| = |\mathbb{H}(x,-m)(u)| = 0 \Rightarrow \mathbb{H}(x,n)(u) = \mathbb{H}(x,-m)(u) = 0,$$

para todo $n \geq 0$ e $m \geq 1$. Como composição de funções homogêneas é uma função homogênea pela Observação 1.2.16, obtemos que $u = 0_E$ pela Observação 1.2.1.

2º) $|\alpha u|_{x,\varepsilon} = |\alpha|_{\mathbb{K}} |u|_{x,\varepsilon}, \forall\, u \in E$ e α escalar.

Dados $u \in E$ e α escalar do corpo $\mathbb{K}$, pela homogeneidade de $\mathbb{H}(x,k)$ para quaisquer $x \in X$ e $k \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\begin{aligned}
|\alpha u|_{x,\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(\alpha u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(\alpha u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} |\mathbb{H}(x,n)(\alpha u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{k} |\mathbb{H}(x,-n)(\alpha u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) \\
&= |\alpha|_{\mathbb{K}} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} |\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{k} |\mathbb{H}(x,-n)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) \\
&= |\alpha|_{\mathbb{K}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) \\
&= |\alpha|_{\mathbb{K}} |u|_{x,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

3º) $|u+v|_{x,\varepsilon} \leq |u|_{x,\varepsilon} + |v|_{x,\varepsilon}$, para todo $u, v \in E$.

De fato, dados $u, v \in E$, como $\mathbb{H}(x,n) \in \mathcal{H}^1_*(E)$ temos que

$$|\mathbb{H}(x,n)(u+v)| \leq |\mathbb{H}(u)| + |\mathbb{H}(v)|,$$

e assim,

$$\begin{aligned}
|u+v|_{x,\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u+v)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u+v)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} |\mathbb{H}(x,n)(u+v)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{k} |\mathbb{H}(x,-n)(u+v)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (|\mathbb{H}(x,n)(u)| + |\mathbb{H}(x,n)(v)|) e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} \right) + \\
&\quad \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} (|\mathbb{H}(x,-n)(u)| + |\mathbb{H}(x,-n)(v)|) e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (|\mathbb{H}(x,n)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{k} (|\mathbb{H}(x,-n)(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) + \\
&\quad \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} (|\mathbb{H}(x,n)(v)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{k} (|\mathbb{H}(x,-n)(v)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \right) \\
&= |u|_{x,\varepsilon} + |v|_{x,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

A ε-norma adaptada de Lyapunov induz também uma norma no espaço dos operadores. Para $x, y \in \Lambda$, considere

$$||H||_{y\leftarrow x} = \sup \left\{ \frac{|H(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} : 0 \neq u \in E \right\}. \tag{2.19}$$

Vamos mostrar agora que $||\cdot||_{y\leftarrow x}$ define de fato uma norma no espaço dos operadores homogêneos definidos em $\mathcal{H}^1_*(E)$.

1º) Dada $H \in \mathcal{H}^1_*(E)$, vale que $||H||_{y\leftarrow x} = 0 \Longleftrightarrow H \equiv 0$.

Suponha que $||H||_{y\leftarrow x} = 0$. Então, como a norma é definida pela expressão (2.19), temos que $|H(u)|_{y,\varepsilon} = 0$, para todo $0 \neq u \in E$. Como $|\cdot|_{y,\varepsilon}$ é uma norma em X, segue que $H(u) = 0$, para todo $0 \neq u \in E$. Como $H(0_E) = 0_E$, pela Observação 1.2.1, decorre que $H \equiv 0$.

Por outro lado, sendo $H \equiv 0$, é óbvio que $||H||_{y\leftarrow x} = 0$.

2^o) Para qualquer $H \in \mathcal{H}^1_*(E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, vale que $||\alpha H||_{y\leftarrow x} = |\alpha|||H||_{y\leftarrow x}$.

De fato, como $|u|_{x,\varepsilon}$ é uma norma em E, temos

$$||\alpha H||_{y\leftarrow x} = \sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|\alpha H(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}}\right\} = |\alpha|\sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|H(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}}\right\} = |\alpha|||H||_{y\leftarrow x}.$$

3^o) Dados $H, G \in \mathcal{H}^1_*(E)$ segue que $||H+G||_{y\leftarrow x} \leq ||H||_{y\leftarrow x} + ||G||_{y\leftarrow x}$.

Sejam $H, G \in \mathcal{H}^1_*(E)$ aplicações quaisquer, então como $|.|_{x,\varepsilon}$ define uma norma em E, decorre que

$$|(H+G)(u)|_{y,\varepsilon} \leq |H(u)|_{y,\varepsilon} + |G(u)|_{y,\varepsilon}.$$

Dividindo em ambos os lados da inequação acima por $|u|_{x,\varepsilon}$, onde $0 \neq u \in E$, obtemos

$$\frac{|(H+G)(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq \frac{|H(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} + \frac{|G(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq ||H||_{y\leftarrow x} + ||G||_{y\leftarrow x}.$$

Tomando o supremo sobre todos os vetores $u \in E$ não nulos no lado esquerdo na inequação acima, concluímos que

$$||H+G||_{y\leftarrow x} \leq ||H||_{y\leftarrow x} + ||G||_{y\leftarrow x}.$$

Reiteramos que a relevância de tal norma consiste no fato de que a partir dela conseguimos controlar a contração e expansão em cada interação do cociclo. Além disso, é possível compara-lá com a norma do espaço $\mathcal{H}^1_*(E)$.

Na sequência, apresentaremos alguns resultados técnicos os quais serão utilizados posteriormente para obtermos as estimativas da aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov.

Observação 2.3.12. *Denotamos por $\mathbb{S}^1 = \{u \in E : |u| = 1\}$ a esfera unitária de um espaço de Banach $(E, |\cdot|)$ qualquer. Sejam $g_1, g_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, então pela desigualdade triangular temos*

$$\sup_{|u|=1}|g_1(u) - g_2(u)| = \sup_{|u|=1}|g_1(u) + (-g_2(u))| \leq \sup_{|u|=1}(|g_1(u)| + |g_2(u)|) \leq 2,$$

onde usamos a desigualdade triangular e o fato que $g_1(u), g_2(u) \in \mathbb{S}^1$.

Observação 2.3.13. *Seja $\mathbb{H}$ um coclico homogêneo gerado por uma aplicação $H \in \mathcal{H}^1_*(E)$.*

Denotando por $\Phi_{y,n} = \Phi_{f^{n-1}(y)} \circ ... \circ \Phi_y$ *e* $N_{y,n} = N_{f^{n-1}(y)} \cdots N_y$*, pela relação* (1.2)*, da definição do cociclo e pelo fato de que* H *é homogênea, temos que*

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(x,n)|| &= ||H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x)) \circ H(x)|| \\
&= \sup_{|v|=1} |H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x)) \circ H(x) \cdot v| \\
&= \sup_{|v|=1} |H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x))(\Phi_x(v)N_x(v))| \\
&= \sup_{|v|=1} N_x(v)|H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(f(x))(\Phi_x(v))| \\
&= \sup_{|v|=1} N_x(v)|H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ [\Phi_{f(x)}(\Phi_x(v))N_{f(x)}(\Phi_x(v))]| \\
&= \sup_{|v|=1} N_{f(x)}(\Phi_x(v))N_x(v)|H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ \Phi_{f(x)} \circ \Phi_x(v)| \\
&= .... \\
&= \sup_{|v|=1} N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{x,n-1}(v)) \cdots N_x(v)|\Phi_{x,n}(v)| \\
&= \sup_{|v|=1} N_{f^{n-1}(x)}(\Phi_{x,n-1}(v)) \cdots N_x(v) \\
&= \sup_{|v|=1} N_{x,n}(v),
\end{aligned}$$

onde usamos que Φ *tem norma unitária e que ainda assumimos que ela é bijetiva conforme Observação 1.2.3.*

Observação 2.3.14. *Considerando ainda um cociclo homogêneo* $\mathbb{H}$ *gerado por uma aplicação* $H(\cdot) \in \mathcal{H}^1_*(E)$ *associadas as aplicações* Φ *e* N *e utilizando ideias similares as da Observação 2.3.13, temos que*

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(x,n) - \mathbb{H}(y,n)|| &= ||H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(x) - H(f^{n-1}(y)) \circ ... \circ H(y)|| \\
&= \sup_{|v|=1} |H(f^{n-1}(x)) \circ ... \circ H(x) \cdot v - H(f^{n-1}(y)) \circ ... \circ H(y) \cdot v| \\
&= \sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v)\Phi_{x,n}(v) - N_{y,n}(v)\Phi_{y,n}(v)|.
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular, o fato de Φ *ter norma unitária e que* $N > 0$

obtemos

$$
\begin{aligned}
& \sup_{|v|=1} |N_{f^j(x),k}(v) - N_{f^j(y),k}(v)| \\
= \ & \sup_{|v|=1} \left| N_{f^j(x),k}(v) |\Phi + f^j(x), k(v)| - N_{f^j(y),k}(v) |\Phi_{f^j(y),k}(v)| \right| \\
= \ & \sup_{|v|=1} \left| |N_{f^j(x),k}(v) \Phi_{f^j(x),k}(v)| - |N_{f^j(y),k}(v) \Phi_{f^j(y),k}(v)| \right| \\
\leq \ & \sup_{|v|=1} |N_{f^j(x),k}(v) \Phi_{f^j(x),k}(v) - N_{f^j(y),k}(v) \Phi_{f^j(y),k}(v)| \\
= \ & ||\mathbb{H}(f^j(x), k) - \mathbb{H}(f^j(y), k)||.
\end{aligned}
$$

A observação a seguir é de fundamental importância na obtenção do resultado principal. Além disso, aqui evidencia-se o aumento da dificuldade na obtenção das estimativas quando passamos do caso linear para o homogêneo.

Observação 2.3.15. *Dados $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ temos para qualquer $v \in E$ que*

$$
\begin{aligned}
|N_{x,n}(v) - N_{y,n}(v)| &= |N_{x,n}(v) - N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v) + N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v) - N_{y,n}(v)| \\
&\leq |N_{x,n}(v) - N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v)| + |N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v) - N_{y,n}(v)| \\
&= N_{f(x),n-1}(v) |N_{x,1}(v) - N_{y,1}(v)| + |N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v) - N_{f(y),n-1} N_{y,1}(v)|,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $N_{z,n} = N_{f^{n-1}(z)} \cdots N_{f(z)} N_z = N_{f(z),n-1} N_{z,1}$.

Desse modo, aplicando supremo na estimativa acima e usando as Observações 2.3.13 e 2.3.14 obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v) - N_{y,n}(v)| &\leq \sup_{|v|=1} N_{f(x),n-1}(v) |N_{x,1}(v) - N_{y,1}(v)| \\
&+ \sup_{|v|=1} |N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v) - N_{f(y),n-1} N_{y,1}(v)| \\
&\overset{(I)}{\leq} ||\mathbb{H}(f(x), n-1)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,1) - \mathbb{H}(y,1)|| \\
&+ \sup_{|v|=1} |N_{f(x),n-1} N_{y,1}(v) - N_{f(y),n-1} N_{y,1}(v)|.
\end{aligned}
$$

De modo similar ao realizado acima, vale que

$$\begin{aligned}
& |N_{f(x),n-1}N_{y,1}(v) - N_{f(y),n-1}N_{y,1}(v)| \\
= & |N_{f(x),n-1}N_{y,1}(v) - N_{f^2(x),n-2}N_{y,2}(v) + N_{f^2(x),n-2}N_{y,2}(v) - N_{f(y),n-1}N_{y,1}(v)| \\
\leq & |N_{f(x),n-1}N_{y,1}(v) - N_{f^2(x),n-2}N_{y,2}(v)| + |N_{f^2(x),n-2}N_{y,2}(v) - N_{f(y),n-1}N_{y,1}(v)| \\
= & N_{f^2(x),n-2}(v)|N_{f(x),1}(v) - N_{f(y),1}(v)|N_{y,1}(v) + N_{f^2(x),n-2}N_{y,2}(v) - N_{f^2(y),n-2}N_{y,2}(v)|,
\end{aligned}$$

onde usamos que $N_{z,n-1} = N_{f^{n-2}(z)} \cdots N_{f(z)}N_z = N_{f(z),n-2}N_{f(z),1}$.

Desse modo, aplicando supremo na estimativa acima e novamente pelas Observações 2.3.13 e 2.3.14 obtemos que

$$\begin{aligned}
& \sup_{|v|=1} |N_{f(x),n-1)}(v) - N_{f(y),n-1}(v)| \\
\leq & \sup_{|v|=1} N_{f^2(x),n-2}(v)|N_{f(x),1}(v) - N_{f(y),1}(v)|N_{y,1}(v) \\
+ & \sup_{|v|=1} |N_{f^2(x),n-2}(v)N_{y,1}(v) - N_{f^2(y),n-2}(v)N_{y,1}(v)| \\
\overset{(II)}{\leq} & ||\mathbb{H}(f^2(x), n-2)|| \cdot ||\mathbb{H}(f(x), 1) - \mathbb{H}(f(y), 1)|| \cdot ||\mathbb{H}(y, 1)|| \\
+ & \sup_{|v|=1} |N_{f^2(x),n-2}(v)N_{y,1}(v) - N_{f^2(y),n-2}(v)N_{y,1}(v)|.
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas (I) *e* (II) *podemos concluir que*

$$\begin{aligned}
\sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v) - N_{y,n}(v)| \leq & ||\mathbb{H}(f(x), n-1)|| \cdot ||\mathbb{H}(x, 1) - \mathbb{H}(y, 1)|| \\
+ & ||\mathbb{H}(f^2(x), n-2)|| \cdot ||\mathbb{H}(f(x), 1) - \mathbb{H}(f(y), 1)|| \cdot ||\mathbb{H}(y, 1)|| \\
+ & \sup_{|v|=1} |N_{f^2(x),n-2}(v)N_{y,1}(v) - N_{f^2(y),n-2}(v)N_{y,1}(v)| \\
= & \sum_{i=0}^{1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-1-i)|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x), 1) - \mathbb{H}(f^i(y), 1)|| \cdot ||\mathbb{H}(y, i)|| \\
+ & \sup_{|v|=1} |N_{f^2(x),n-2}(v)N_{y,1}(v) - N_{f^2(y),n-2}(v)N_{y,1}(v)|.
\end{aligned}$$

Repetindo esse processo recursivamente mais n-2 passos, somando e subtraindo sempre um termo da forma $N_{f^j(x),n-j}(v)N_{y,j}(v)$, *para* $j = 3, ..., n-1$, *obtemos que*

$$\sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v) - N_{y,n}(v)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-i-1)|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x), 1) - \mathbb{H}(f^i(y), 1)|| \cdot ||\mathbb{H}(y, i)||.$$

Observação 2.3.16. *Note que a Observação 2.3.15 é válida também para* $\mathbb{H}^{-1}$ *pois, como esse cociclo também é gerado por uma aplicação homogênea então, existe uma decomposição em aplicações* $\tilde{\Phi}$ *e* $\tilde{N}$*. Sendo assim, podemos inferir que vale a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned}&\sup_{|v|=1} |\tilde{N}_{x,n}(v) - \tilde{N}_{y,n}(v)| \\ \leq\ & \sum_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-1-i)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x),1)^{-1} - \mathbb{H}(f^i(y))^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(y,i)^{-1}||.\end{aligned}$$

2.3.3 Resultados Auxiliares

Neste momento, provaremos algumas estimativas para a norma em $\mathcal{H}^1_*(E)$ utilizando a ε-norma adaptada e a norma de operador definidas na seção 2.3.2. Utilizaremos tais estimativas para, posteriormente, realizar a aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov. Salientamos que os resultados, bem como as provas dessa seção são fortemente baseadas na seção 3 de [23].

Antes de realizar a prova do Teorema 2.3.2, justificaremos alguns resultados técnicos fundamentais para a apresentação da demonstração. De fato, para demonstração do Teorema 2.3.2, deixaremos apenas a realização das estimativas superiores e inferiores em termos das normas dos cociclos pela órbita de um ponto periódico. Os demais resultados técnicos, serão apresentados nessa seção.

Nesse momento, definiremos a noção de uma função ser temperada. Seja $g : X \to X$ uma função invertível, definida em um espaço métrico compacto X munido de uma medida de probabilidade μ. Diremos que a aplicação φ é **temperada superiormente** em um conjunto $Y \subset X$, com $\mu(Y) = 1$, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \varphi(g^n(x)) = 0, \text{ para todo } x \in Y.$$

De modo similar, diremos que $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é **temperada inferiormente** em um conjunto $\tilde{Y} \subset X$, com $\mu(\tilde{Y}) = 1$, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \varphi(g^{-n}(x)) = 0, \text{ para todo } x \in \tilde{Y}.$$

Ainda, diremos que φ é uma aplicação **temperada** se ela for temperada superior e inferiormente. Em outras palavras, uma função é temperada se ela possui o maior e o menor expoentes de Lyapunov nulos. Para mais resultados sobre esse assunto, citamos como referência [8].

Note que fixados $\varepsilon > 0$ e $x \in \Lambda$ quaisquer, pela definição dos expoentes de Lyapunov, existe $N_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_\varepsilon(x)$ vale que

$$||\mathbb{H}(x,n)|| \leq e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} \text{ e } ||\mathbb{H}(x,-n)|| \leq e^{(-\lambda_- + \varepsilon)n}. \tag{2.20}$$

Assim, para todo $n > N_\varepsilon(x)$ temos que

$$||\mathbb{H}(x,n)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} \leq 1 \text{ e } ||\mathbb{H}(x,-n)||e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \leq 1.$$

Desse modo, para $\varepsilon > 0$ e $x \in \Lambda$ fixados, vale que

$$\sup_{n\geq 0}\{||\mathbb{H}(x,n)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n}\} = \max\{1, ||\mathbb{H}(x,0)||, ||\mathbb{H}(x,1)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)}, ..., ||\mathbb{H}(x, N_\varepsilon(x))||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)N_\varepsilon(x)}\},$$
$$\sup_{n\geq 0}\{||\mathbb{H}(x,-n)||e^{(-\lambda_- + \varepsilon)n}\} = \max\{1, ||\mathbb{H}(x,0)||, ||\mathbb{H}(x,1)||e^{(-\lambda_- + \varepsilon)}, ..., ||\mathbb{H}(x, N_\varepsilon(x))||e^{(-\lambda_- + \varepsilon)N_\varepsilon(x)}\}.$$

Observe que os supremos acima são finitos, pois temos que o cociclo $\mathbb{H}$ é limitado. Assim, consideramos as funções $M_\varepsilon, \tilde{M}_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(x) &= \sup_{n\geq 0}\{||\mathbb{H}(x,n)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n}\}, \\ \tilde{M}_\varepsilon(x) &= \sup_{n\geq 0}\{||\mathbb{H}(x,-n)||e^{(-\lambda_- + \varepsilon)n}\}. \end{aligned}$$

As funções M_ε e $\tilde{M}_\varepsilon$ são mensuráveis, pois são o máximo entre funções mensuráveis.

Neste momento, garantiremos que a função $M'(\varepsilon) = \left(\frac{M_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}\right)$ é temperada. Para isso, afirmamos que é suficiente mostrar que M_ε e $\tilde{M}_\varepsilon$ são funções temperadas. De fato, observe que caso M_ε e $\tilde{M}_\varepsilon$ sejam temperadas, então

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log M'_\varepsilon(f^n(x)) &= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{M_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x)) + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x))}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}\right) \\ &= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log(M_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x)) + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x))) - \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}) \\ &\leq \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log(M_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x)) + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x))) \\ &\leq \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log(2\max\{M_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x)), \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(f^n(x))\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

No lema a seguir, mostraremos que M_ε é temperada. Para isso garantiremos que ela é temperada superior e inferiormente. Nos inspiramos no Lema 3.2 de [23] para obter o resultado abaixo.

Lema 2.3.17. *Para cada $\varepsilon > 0$, a função $M_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$M_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0}\{||\mathbb{H}(x,n)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n}\},$$

é temperada superiormente e inferiormente em um conjunto $\mathcal{R} \subset \Lambda$ com $\mu(\mathcal{R}) = 1$.

Demonstração. Mostramos que M_ε é temperada superiormente. Para isso, suponha por contradição que M_ε não seja temperada superiormente, isto é, assuma que para algum $x \in \Lambda$, existe $s > 0$ com

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_\varepsilon(f^n(x)) > s > 0.$$

Desse modo, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k}\log M_\varepsilon(f^k(x)) > s$, para todo $k \in \mathbb{N}'$, o que equivale a dizer que $M_\varepsilon(f^k(x)) > e^{sk}$, para todo $k \in \mathbb{N}'$.

Como para cada $x \in \Lambda$ podemos escrever

$$M_\varepsilon(x) = \max\{||\mathbb{H}(x,n)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} : 0 \leq n \leq N_\varepsilon(x)\},$$

conforme comentado anteriormente, decorre que, para cada $k \in \mathbb{N}'$, existe $0 \leq n_k \leq N_\varepsilon(x)$ onde

$$M_\varepsilon(f^k(x)) = ||\mathbb{H}(f^k(x), n_k)||e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n_k}. \tag{2.21}$$

Assim, como supomos que M_ε não é temperada superiormente, segue que

$$||\mathbb{H}(f^k(x), n_k)|| = e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n_k} M_\varepsilon(f^k(x)) > e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n_k} e^{sk}. \tag{2.22}$$

Observe que, como supomos que o cociclo $\mathbb{H}$ é limitado, existem constantes $\lambda' > \lambda_+$ e $\lambda^* < \lambda_-$ tais que para todo $x \in \Lambda$

$$||\mathbb{H}(x,1)|| \leq M_\varepsilon(x)e^\varepsilon e^{\lambda_+} \leq e^{\lambda'} \text{ e } ||\mathbb{H}(x,-1)|| \leq \tilde{M}_\varepsilon(x)e^\varepsilon e^{-\lambda_-} \leq e^{-\lambda^*}. \tag{2.23}$$

Afirmação 2.3.18. *Se k e n satisfazem $||\mathbb{H}(f^k(x), n)|| > e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n}e^{sk}$ e ainda, $k > N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$,* *com* $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ *obtido nas estimativas* (2.20)*, então*

$$C_1 k < n < C_2 k,$$

onde $C_1 = \frac{s}{\lambda' - \lambda_+}$ *e* $C_2 = 1 + \frac{2(\lambda_+ - \lambda^*)}{\varepsilon}$.

De fato, assumindo que $k > N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ segue de (2.20) que

$$||\mathbb{H}(x, n+k)|| < e^{(\lambda_+ + \frac{\varepsilon}{2})(n+k)}.$$

Assim, pela equação do cociclo, pelo Lema 1.2.15, pela estimativa acima e pela expressão (2.23) obtemos que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(f^k(x), n)|| &= ||\mathbb{H}(x, n+k) \circ \mathbb{H}(x, -k)|| \\ &\leq ||\mathbb{H}(x, n+k)|| \cdot ||\mathbb{H}(x, -k)|| \\ &\leq e^{(\lambda_+ + \frac{\varepsilon}{2})(k+n)} e^{-\lambda^* k}. \end{aligned}$$

Como supomos que $||\mathbb{H}(f^k(x), n)|| > e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} e^{sk}$, pela estimativa acima obtemos

$$\begin{aligned} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} e^{sk} < e^{(\lambda_+ + \frac{\varepsilon}{2})(k+n)} e^{-\lambda^* k} &\Rightarrow (\lambda_+ + \varepsilon)n + sk < (\lambda_+ + \frac{\varepsilon}{2})(k+n) - \lambda^* k \\ &\Rightarrow n < \left[1 + \frac{2(\lambda_+ - \lambda^* - s)}{\varepsilon}\right] k. \end{aligned}$$

Como $\lambda_+ - \lambda^* > 0$, segue que $\lambda_+ - \lambda^* - s < \lambda_+ - \lambda^*$ e assim, denotando $C_2 = 1 + \frac{2(\lambda_+ - \lambda^*)}{\varepsilon}$, decorre que $n < C_2 k$. Por outro lado, segue da expressão (2.23), do fato de assumirmos $||\mathbb{H}(f^k(x), n)|| > e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} e^{sk}$, e de $\lambda' > \lambda_+$ que

$$\begin{aligned} e^{sk} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} < e^{\lambda' + n} &\Rightarrow sk + (\lambda_+ + \varepsilon)n < \lambda' n \\ &\Rightarrow n > \frac{s}{\lambda' - \lambda_+} k, \end{aligned}$$

e daí $n > C_1 k$, onde $C_1 = \frac{s}{\lambda' - \lambda_+}$ e, isso conclui a prova da afirmação.

Considerando as constantes $C_1, C_2 > 0$ dadas na Afirmação 2.3.18, escolhemos $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{C_1}{C_2 + 1} < 1$. Para tal δ, pelo Teorema 1.1.8, existe um conjunto $Y_\delta \subset \Lambda$, com $\mu(Y_\delta) > 1 - \delta$, tal que a sequência $\tilde{a}_n(y) = \log ||\mathbb{H}(f^{-n}(y), n)||$ converge uniformemente à λ_+, para todo $y \in Y_\delta$. Desse modo, existe $N'_\varepsilon = N'_\varepsilon(Y_\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{a}_n(y) \leq (\lambda_+ + \varepsilon)n, \tag{2.24}$$

para todo $y \in Y_\delta$ e $n > N'_\varepsilon$.

Seja Λ_{Y_δ} o conjunto de medida total com respeito a μ, onde vale o Teorema Ergódico de Bikhoff para a função indicador de Y_δ, isto é, para todo $y \in \Lambda_{Y_\delta}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{l : 1 \leq l \leq N \text{ e } f^l(y) \in Y_\delta\} = \mu(Y_\delta) > 1 - \delta.$$

Tomamos $y \in \Lambda \cap \Lambda_{Y_\delta}$. Então pelo limite acima e para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, vale que

$$\#\{l : 1 \leq l \leq m + N \text{ e } f^l(y) \notin Y_\delta\} < \delta(m + N).$$

Observe que, diminuindo δ se necessário, para cada n_k fixado, existe $\tilde{n}_k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < (1-\delta)n_k - \delta k < \tilde{n}_k \leq n_k$ e $\tilde{y} = f^{k+\tilde{n}_k}(y) \in Y_\delta$ pois, o tempo médio de visita no conjunto determinado pela função indicador de Y_δ é positivo. Pela definição de $\tilde{n}_k$, temos

$$(1-\delta)n_k - \delta k < \tilde{n}_k \Rightarrow n_k - \tilde{n}_k < \delta(k + n_k).$$

Pela Afirmação 2.3.18, temos $n_k < C_2 k$ e, assim, obtemos que

$$n_k - \tilde{n}_k < \delta(k + n_k) < \delta(k + C_2 k) \tag{2.25}$$

De (2.25) e da Afirmação 2.3.18, decorre que

$$\tilde{n}_k = n_k - (n_k - \tilde{n}_k) > C_1 k - \delta k(1 + C_2) = [C_1 - \delta(1 + C_2)]k.$$

Podemos escolher $k \in \mathbb{N}'$ suficientemente grande tal que $\tilde{n}_k > N'_\varepsilon$. Além disso, como $\tilde{y} = f^{k+\tilde{n}_k}(x) \in Y_\delta$, pela equação do cociclo e pelo Lema 1.2.15, segue que

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(f^k(\tilde{y}), n_k)|| &= ||\mathbb{H}(f^k(f^{k+\tilde{n}_k}(x))(n_k - \tilde{n}_k + \tilde{n}_k)|| \\
&= ||\mathbb{H}(f^{\tilde{n}_k+k}(x), n_k - \tilde{n}_k) \circ \mathbb{H}(f^k(x), \tilde{n}_k)|| \\
&\leq ||\mathbb{H}(f^{\tilde{n}_k+k}(x), n_k - \tilde{n}_k)|| \cdot ||\mathbb{H}(f^k(x), \tilde{n}_k)||.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Observe que, pela definição da sequência $(\tilde{a}_n)$, temos que

$$\tilde{a}_{\tilde{n}_k}(\tilde{y}) = \log||\mathbb{H}(f^{-\tilde{n}_k}(\tilde{y}), \tilde{n}_k)|| = \log||\mathbb{H}(f^{-\tilde{n}_k}(f^{k+\tilde{n}_k}(x)), \tilde{n}_k)|| = \log||\mathbb{H}(f^k(x), \tilde{n}_k)||. \tag{2.27}$$

Além disso, como $n_k < N_\varepsilon(x)$ e consequentemente $n_k - \tilde{n}_k < N_\varepsilon(x)$ e ainda, $M_\varepsilon(f^l(x)) \leq M_\varepsilon(x)$ para todo $l \geq 1$, então pela relação dada em (2.21) decorre que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(f^{\tilde{n}_k+k}(x), n_k - \tilde{n}_k)|| &= e^{(\lambda_+ + \varepsilon)(n_k - \tilde{n}_k)} M_\varepsilon(f^{k+\tilde{n}_k}(x)) \\ &= e^{(\lambda_+ + \varepsilon)(n_k - \tilde{n}_k)} M_\varepsilon(f^{k+\tilde{n}_k}(x)) \\ &\leq e^{(\lambda_+ + \varepsilon)(n_k - \tilde{n}_k)} M_\varepsilon(x) \\ &\leq e^{\lambda'} e^{n_k - \tilde{n}_k}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde a última desigualdade vale por (2.23). Logo, combinando as relações obtidas em (2.24), (2.26), (2.27) e (2.28), obtemos

$$||\mathbb{H}(f^k(\tilde{y}), n_k)|| \leq e^{\lambda'} e^{n_k - \tilde{n}_k} e^{\tilde{a}_{\tilde{n}_k}(\tilde{y})} \leq e^{\lambda'} e^{n_k - \tilde{n}_k} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)\tilde{n}_k}.$$

Dessa forma, combinando a estimativa acima com a obtida em (2.22), temos

$$e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n_k} e^{sk} < ||\mathbb{H}(f^k(\tilde{y}), n_k)|| \leq e^{\lambda'} e^{n_k - \tilde{n}_k} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)\tilde{n}_k}.$$

Assim, aplicando logaritmo nas desigualdades acima

$$(\lambda_+ + \varepsilon)n_k + sk < \lambda'(n_k - \tilde{n}_k) + (\lambda_+ + \varepsilon)\tilde{n}_k,$$

e a partir dessa estimativa, pela relação dada em (2.25), pela definição de δ, pela Afirmação 2.3.18 e o fato de que $C_1 = \frac{s}{\lambda' - \lambda_+}$, concluímos que

$$\begin{aligned} sk &< \lambda'(n_k - \tilde{n}_k) + (\lambda_+ + \varepsilon)\tilde{n}_k - (\lambda_+ + \varepsilon)n_k \\ &= (n_k - \tilde{n}_k)(\lambda' - \lambda_+ - \varepsilon) \\ &< \delta k(1 + C_2)(\lambda' - \lambda_+) \\ &< C_1 k(\lambda' - \lambda_+) \\ &< sk, \end{aligned}$$

o que nos fornece uma contradição. Além disso, para cada $s > 0$, existe um conjunto de medida total $\Lambda_Y = \Lambda_Y(s)$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_\varepsilon(f^n(x)) \leq s, \forall\ x \in \Lambda \cap \Lambda_Y.$$

Tomando $x \in \Lambda \cap \Lambda_Y(\frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, garante-se que a função M_ε é temperada superiormente.

Agora mostraremos que M_ε é temperada inferiormente utilizando uma justificativa por contradição similar ao caso anterior. Suponha que, para algum $x \in \Lambda$ vale que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_\varepsilon(f^{-n}(x)) > s > 0. \tag{2.29}$$

Então, $M_\varepsilon(f^{-k}(x)) > e^{sk}$ para uma quantidade infinita de $k \in \mathbb{N}$ e para algum $n_k \in \mathbb{N}$ segue que

$$||\mathbb{H}(f^{-k}(x), n_k)|| > e^{sk} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n_k}. \tag{2.30}$$

Do mesmo modo que na prova que f é temperada superiormente, existe $N'_\varepsilon(x)$ tal que $b_k(x) < (\lambda_+ + \varepsilon)k$, para todo $k > N'_\varepsilon$. Assuma que $n_k > k > N'_\varepsilon(x)$ (no caso anterior tínhamos que $n_k \leq k$). Pela equação do cociclo, pelo Lema 1.2.15, pela relação dada em (2.21) e da definição da sequência (b_n) temos

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(f^{-k}(x), n_k)|| &= ||\mathbb{H}(x, n_k - k) \circ \mathbb{H}(f^{-k}(x), k)|| \\ &\leq ||\mathbb{H}(x, n_k - k)|| \cdot ||\mathbb{H}(f^{-k}(x), k)|| \\ &\leq M_\varepsilon(x) e^{(\lambda_+ + \varepsilon)(n-k)} e^{b_k(x)} \\ &< M_\varepsilon(x) e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n}. \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade acima e de (2.30), segue que

$$e^{sk} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} < M_\varepsilon(x) e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n}.$$

Logo $e^{sk} < M_\varepsilon(x)$. Aplicando logaritmo em ambos os lados da inequação acima obtemos

$$s < \frac{1}{k} \log M_\varepsilon(x).$$

A desigualdade acima é uma contradição com (2.29) e assim, $n_k \leq k$. Dessa forma, pela expressão (2.30) vale que $||\mathbb{H}(f^{-k}(x), n)|| > e^{sk} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n}$. Usando que $||\mathbb{H}(f^{-k}(x), n)|| \leq e^{\lambda' n}$ com $\lambda_+ \leq \lambda'$, decorre

$$e^{sk} e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n_k} < e^{\lambda' n_k} \Rightarrow sk < (\lambda' - \lambda_+)n_k \Rightarrow C_3 k < n_k,$$

onde $C_3 = \frac{s}{\lambda' - \lambda_+}$. Para k suficientemente grande, qualquer n_k dado pela relação em (2.30) satisfaz $C_3 k < n_k \leq k$.

Escolhamos δ_s o qual satisfaz $0 < \delta_s < C_3$ e consideramos como no caso anterior, o conjunto Y_{δ_s} com $\mu(Y_{\delta_s}) > 1 - \delta_s$ e $\Lambda_{Y_{\delta_s}}$.

Então se $x \in \Lambda \cap \Lambda_{Y_{\delta_s}}$ e k é tomado suficientemente grande, existe $n'_k \leq n_k$ com $n_k - n'_k < \delta_s k$ tal que $y' = f^{-k+n'_k}(x) \in Y_{\delta_s}$.

Como $\delta_s < C_3$ e $n_k > C_3 k$ e ainda, pela definição de n'_k, temos que

$$n'_k = n_k - (n_k - n'_k) > C_3 k - \delta_s k = (C_3 - \delta_s)k.$$

Dessa forma, para tal k, pela equação do cociclo, o Lema 1.2.15, pela definição de y', de modo similar ao caso anterior, podemos concluir que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(f^{-k}(x), n_k)|| &= ||\mathbb{H}(f^{-k+n'_k}(x), n_k - n'_k) \circ \mathbb{H}(f^{-k}(x), n'_k)|| \\ &\leq ||\mathbb{H}(f^{-k+n'_k}(x), n_k - n'_k)||.||\mathbb{H}(f^{-k}(x), n'_k)|| \\ &\leq e^{b_{n'_k}(f^{-k+n'_k}(x))} e^{\lambda'(n_k - n'_k)} \\ &< e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n'_k} e^{\lambda'(n_k - n'_k)}. \end{aligned}$$

Então, de (2.30) e a estimativa acima, segue que

$$e^{sk} e^{\lambda_+ + \varepsilon)n_k} < e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n'_k} e^{\lambda'(n_k - n'_k)}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da expressão anterior, obtemos que

$$sk < (\lambda_+ + \varepsilon)n'_k - (\lambda_+ + \varepsilon)n_k + \lambda'(n_k - n'_k) < (\lambda' - \lambda_+)(n_k - n'_k) < sk,$$

o qual é uma contradição, o que nos garante que M_ε é temperada inferiormente e assim, é uma função temperada, concluindo a prova do lema.

□

Observação 2.3.19. *O conjunto $\mathcal{R}$ com medida total citado no enunciado do Lema 2.3.17 é definido por $\mathcal{R} = \Lambda \cap \Lambda_Y$, onde Λ é dado em (2.13) e Λ_Y é obtido no Lema 2.3.17 pelo Teorema de 1.1.8.*

Para ver que a função $\tilde{M}_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0}\{||\mathbb{H}(x, -n)||e^{(-\lambda_- + \varepsilon)n}\}$ é temperada, basta adaptar o Lema anterior considerado o tempo reverso.

A proposição a seguir foi baseada na Proposição 3.1 de [23].

Proposição 2.3.20. *Seja $f : X \to X$ uma função invertível definida sobre um espaço de probabilidade (X, μ), onde μ é ergódica e f-invariante. Além disso, considere $\mathbb{H}$ um cociclo homogêneo e limitado definido sobre f com maior expoente de Lyapunov λ_+ e menor expoente de Lyapunov λ_-. Então, para cada $\varepsilon > 0$, a norma adaptada de Lyapunov dada por* (2.18) *satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) para cada $x \in \Lambda$,

$$||\mathbb{H}(x,1)||_{f(x)\leftarrow x} \leq e^{\lambda_+ + \varepsilon} \text{ e } ||\mathbb{H}(x,-1)||_{f^{-1}(x)\leftarrow x} \leq e^{-\lambda_- + \varepsilon}. \tag{2.31}$$

(ii) existe um subconjunto $\mathcal{R} \subset \Lambda$ com medida total e f-invariante, e para cada $\rho > 0$, existe uma função mensurável $K_\rho(x)$ tal que, para todo $x \in \mathcal{R}$, vale que

$$|u| \leq |u|_{x,\varepsilon} \leq K_\rho(x)|u|, \text{ para todo } u \in E \tag{2.32}$$

e

$$K_\rho(x)e^{-\rho|n|} \leq K_\rho(f^n(x)) \leq K_\rho(x)e^{\rho|n|}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.33}$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração provando o item (i). Fixados $x \in \Lambda$ e $u \in E$ quaisquer, como $\lambda_- \leq \lambda_+$, pela definição da ε-norma adaptada de Lyapunov segue que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{H}(x,1)(u)|_{f(x),\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(f(x),n)(\mathbb{H}(x,1)(u))|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(f(x),-n)(\mathbb{H}(x,1)(u))|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n+1)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n+1)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= e^{(\lambda_+ + \varepsilon)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n+1)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)(n+1)} + |u|e^{\lambda_- - \varepsilon - (\lambda_+ + \varepsilon)} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n+1)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)n - (\lambda_+ + \varepsilon)}\Big) \\
&\leq e^{(\lambda_+ + \varepsilon)}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,k)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)k} + |u| + \sum_{n=2}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n+1)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)(n-1)}\Big) \\
&= e^{(\lambda_+ + \varepsilon)}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,k)(u)|e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)k} + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-k)(u)|e^{(\lambda_- - \varepsilon)k}\Big) \\
&= e^{(\lambda_+ + \varepsilon)}|u|_{x,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $x \in \Lambda$ e $0 \neq u \in E$ obtemos que

$$\frac{|\mathbb{H}(x,1)(u)|_{f(x),\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq e^{(\lambda_+ + \varepsilon)}.$$

Tomando o supremo sobre todos os $u \in E$ não nulos, segue que

$$||\mathbb{H}(x,1)||_{f(x)\leftarrow x} \leq e^{\lambda_+ + \varepsilon},$$

provando a primeira desigualdade do item (i).

Para a segunda estimativa, note que

$$\begin{aligned}
|\mathbb{H}(x,-1)(u)|_{f^{-1}(x),\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(f^{-1}(x),n)(\mathbb{H}(x,-1)(u))| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(f^{-1}(x),-n)(\mathbb{H}(x,-1)(u))| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n-1)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-(n+1))(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= e^{-\lambda_- + \varepsilon}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n-1)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n + \lambda_- - \varepsilon} + |\mathbb{H}(x,-1)(u)| e^{\lambda_- - \varepsilon} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-(n+1))(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)(n+1)} \Big) \\
&\leq e^{-\lambda_- + \varepsilon}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,k)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)k} + |\mathbb{H}(x,-1)(u)| e^{\lambda_- - \varepsilon} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-k)(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)k} \Big) \\
&= e^{-\lambda_- + \varepsilon}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,k)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)k} + \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-k)(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)k} \Big) \\
&= e^{-\lambda_- + \varepsilon} |u|_{x,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $x \in \Lambda$ e $0 \neq u \in E$ obtemos que

$$\frac{|\mathbb{H}(x,-1)(u)|_{f^{-1}(x),\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq e^{(-\lambda_- + \varepsilon)}.$$

Tomando o supremo sobre todos os $u \in E$ não nulos, segue que

$$||\mathbb{H}(x,-1)||_{f^{-1}(x)\leftarrow x} \leq e^{-\lambda_- + \varepsilon},$$

o que conclui a justificativa do item (i).

Agora vamos justificar as estimativas dadas no item (ii). Dados $\varepsilon > 0$ e $u \in E$, para cada $x \in \Lambda$ fixado, pela definição (2.18), temos que

$$\begin{aligned}
|u|_{x,\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&= |u| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&\geq |u|.
\end{aligned}$$

Isso prova a primeira estimativa em (2.32). Para a segunda, fixando $\varepsilon > 0$ e tomando $x \in \Lambda$ quaisquer, consideramos as funções $M_\varepsilon, \tilde{M}_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ definidas por

$$M_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \{||\mathbb{H}(x,n)|| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n}\} \text{ e } \tilde{M}_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \{||\mathbb{H}(x,-n)|| e^{(-\lambda_- + \varepsilon)n}\}.$$

Vimos que as funções M_ε e $\tilde{M}_\varepsilon$ são temperadas e mensuráveis. Além disso, pelas definições de M_ε e $\tilde{M}_\varepsilon$, para todo $n \geq 0$, vale que

$$||\mathbb{H}(x,n)|| \leq M_\varepsilon(x) e^{(\lambda_+ + \varepsilon)n} \text{ e } ||\mathbb{H}(x,-n)|| \leq \tilde{M}_\varepsilon(x) e^{(-\lambda_- + \varepsilon)n}.$$

Usando as desigualdades dadas acima com $\frac{\varepsilon}{2}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|u|_{x,\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{H}(x,n)(u)| e^{-(\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{H}(x,-n)(u)| e^{(\lambda_- - \varepsilon)n} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |u| M_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) e^{(\lambda_+ + \frac{\varepsilon}{2})n - (\lambda_+ + \varepsilon)n} + \sum_{n=1}^{\infty} |u| \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) e^{(-\lambda_- + \frac{\varepsilon}{2})n + (\lambda_- - \varepsilon)n}
\end{aligned}$$

onde usamos acima que $|\mathbb{H}(x,n)(u)| \leq ||\mathbb{H}(x,n)|| \cdot |u|$, para todo $u \in E$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
|u|_{x,\varepsilon} &= |u| \left(M_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2}n} + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2}n} \right) \\
&\leq |u| \left(\frac{M_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}} \right) \\
&= |u| M'_\varepsilon(x),
\end{aligned}$$

onde $M'_\varepsilon(x) := \left(\frac{M_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) + \tilde{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}} \right)$.

Na seção 2.3.3 provamos que a função M'_ε é temperada em um conjunto $\mathcal{R}$ de medida total. Além disso, para cada $\rho > 0$, vale que

$$K_\rho(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} M'_\varepsilon(f^n(x))e^{-\rho|n|}.$$

é uma função mensurável definida em $\mathcal{R}$ e satisfaz (2.33). Como $M'_\varepsilon(x) \leq K_\rho(x)$, obtemos

$$|u|_{x,\varepsilon} \leq M'_\varepsilon(x)|u| \leq K_\rho(x)|u|,$$

mostrando que (2.32) é válida, e então, concluindo a prova da Proposição.

$\square$

Observação 2.3.21. *Dados $x, y \in \mathcal{R}$, fixamos $\varepsilon > 0$ qualquer. Usando a relação (2.32) com $h(u)$, sendo $h : E \to E$ uma função homogênea qualquer, temos para todo $0 \neq u \in E$ que*

$$|h(u)|_{y,\varepsilon} \leq K_\varepsilon(y)|h(u)|,$$

Como $|u| \leq |u|_{x,\varepsilon}$ e $K_\varepsilon \geq 0$, pela expressão (2.32), obtemos que

$$\frac{|h(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq K_\varepsilon(y)\frac{|h(u)|}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq K_\varepsilon(y)\frac{|h(u)|}{|u|} = K_\varepsilon(y)h\left(\frac{u}{|u|}\right) \leq K_\varepsilon(y)||h||, \tag{2.34}$$

onde $||h|| = \sup\{h(x) : |x| = 1\}$. Assim, em (2.34) tomando o supremo em u, obtemos

$$||h||_{y\leftarrow x} \leq K_\varepsilon(y)||h||.$$

Além disso, novamente pela relação (2.32), temos que

$$\begin{aligned} |u|_{x,\varepsilon} \leq K_\varepsilon(x)|u| \quad &\Rightarrow \quad |h(u)||u|_{x,\varepsilon} \leq K_\varepsilon(x)|h(u)||u| \leq K_\varepsilon(x)|h(u)|_{y,\varepsilon}|u| \\ &\Rightarrow \quad \frac{|h(u)|}{|u|} \leq K_\varepsilon(x)\frac{|h(u)|_{y,\varepsilon}}{|u|_{x,\varepsilon}} \leq K_\varepsilon(x)||h||_{y\leftarrow x}, \end{aligned}$$

e assim, tomando o supremo em u no lado esquerdo das desigualdade acima, obtemos

$$||h|| \leq K_\varepsilon(x)||h||_{y\leftarrow x}.$$

Fixado $\varepsilon > 0$, para qualquer $l > 1$ considere

$$\mathcal{R}_l = \{x \in \mathcal{R}; K_\varepsilon(x) \leq l\}, \tag{2.35}$$

onde $\mathcal{R}$ está definido no Observação 2.3.19. Note que $\mu(\mathcal{R}_l) \to 1$ quando $l \to \infty$.

Observação 2.3.22. *Note que fixado $m \in \mathbb{N}$, se $x, f^m(x) \in \mathcal{R}_l$, por* (2.33)*, temos para $\leq i \leq m$ que*

$$K_\varepsilon(f^i(x)) \leq K_\varepsilon(x)e^{\varepsilon i} \leq le^{\varepsilon i}. \tag{2.36}$$

Por outro lado, utilizando novamente (2.33)*, vale que*

$$K_\varepsilon(f^i(x)) = K_\varepsilon(f^{-(m-i)}(f^m(x))) \leq K(f^m(x))e^{\varepsilon(m-i)} \leq le^{\varepsilon(m-i)}. \tag{2.37}$$

Combinando as expressões (2.36) *e* (2.37)*, obtemos que*

$$K(x_i) \leq le^{\varepsilon \min\{i, m-i\}}.$$

Apresentaremos agora, um resultado de caráter técnico o qual será utilizado na prova da Proposição 2.3.24.

Lema 2.3.23. *Sejam X espaço métrico compacto e $f : X \to X$ invertível. Então dados $x, y \in X$, para qualquer cociclo homogêneo $\mathbb{H}$ definido sobre a função f e gerado por uma aplicação $H : X \to \mathcal{H}^1(E)$ vale que:*

(i) $||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n \leftarrow x_0} \leq \prod_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(y_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i}$.

(ii) $||\mathbb{H}(y_n,-n)||_{x_0 \leftarrow x_n} \leq \prod_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(y_{i+1}, -1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}}$.

onde $x_i = f^i(x)$ e $y_i = f^i(y)$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Demonstração. Provaremos inicialmente o item (i). Relembramos que pela definição da norma do operador para qualquer $z \in X$ e $n \geq 1$, temos a expressão

$$||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n \leftarrow x_0} = \sup_{0 \neq u \in E} \left\{ \frac{|\mathbb{H}(y,n)(u)|_{x_n}}{|u|_{x_0}} \right\}.$$

Agora, dados $x, y \in X$ quaisquer e denotando $x_i = f^i(x)$ e $y_i = f^i(y)$, para todo

$0 \leq i \leq n$, observe que:

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbb{H}(y,n)(u)|_{x_n}}{|u|_{x_0}} &= \frac{|H(f^{n-1}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_n}}{|u|_{x_0}} \\ &= \frac{|H(y)(u)|_{x_1}}{|u|_{x_0}} \cdot \frac{|H(f(y)) \circ H(y)(u)|_{x_2}}{|H(y)(u)|_{x_1}} \cdots \\ &\quad \frac{|H(f^{n-1}(y)) \circ H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_n}}{|H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_{n-1}}}.\end{aligned}$$

Note que como $H(z)$ é homogênea para qualquer $z \in X$, temos que

$$\frac{H(y)(u)}{|u|_{x_0}} = H(y)\left(\frac{u}{|u|_{x_0}}\right),$$

$$\frac{H(f(y)) \circ H(y)(u)}{|H(y)(u)|_{x_1}} = H(f(y))\left(\frac{H(y)(u)}{|H(y)(u)|_{x_1}}\right),$$

$$\vdots$$

$$\frac{H(f^{n-1}(y)) \circ H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)}{|H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_{n-1}}} = H(f^{n-1}(y))\left(\frac{H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)}{|H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_{n-1}}}\right).$$

Dessa forma, pelas relações estabelecidas acima e como $H(x)$ e bijeção podemos concluir que

$$\sup_{0 \neq u \in E}\left\{\frac{|H(y)(u)|_{x_1}}{|u|_{x_0}}\right\} = \sup_{0 \neq v \in E}\left\{\frac{|H(y)(v)|_{x_1}}{|v|_{x_0}}\right\},$$

$$\sup_{0 \neq u \in E}\left\{\frac{|H(f(y)) \circ H(y)(u)|_{x_2}}{|H(y)(u)|_{x_1}}\right\} = \sup_{0 \neq v \in E}\left\{\frac{|H(f(y))(v)|_{x_2}}{|v|_{x_1}}\right\},$$

$$\vdots$$

$$\sup_{0 \neq u \in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y)) \circ H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_n}}{|H(f^{n-2}(y)) \circ \cdots \circ H(y)(u)|_{x_{n-1}}}\right\} = \sup_{0 \neq v \in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y))(v)|_{x_n}}{|v|_{x_{n-1}}}\right\}.$$

Logo, obtemos pelas relações acima e o fato de o supremo do produto ser menor ou igual ao produto dos supremos

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n\leftarrow x_0} &= \sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|\mathbb{H}(y,n)(u)|_{x_n}}{|u|_{x_0}}\right\}\\
&= \sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|H(y)(u)|_{x_1}}{|u|_{x_0}}\cdots\frac{|H(f^{n-1}(y))\circ H(f^{n-2}(y))\circ\cdots\circ H(y)(u)|_{x_n}}{|H(f^{n-2}(y))\circ\cdots\circ H(y)(u)|_{x_{n-1}}}\right\}\\
&\leq \sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(y)(v)|_{x_1}}{|v|_{x_0}}\right\}\cdots\sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y))(v)|_{x_n}}{|v|_{x_{n-1}}}\right\}\\
&= ||\mathbb{H}(y,1)||_{x_1\leftarrow x_0}\cdots||\mathbb{H}(f^{n-1}(y),1)||_{x_n\leftarrow x_{n-1}}\\
&= \prod_{i=0}^{n-1}||\mathbb{H}(y_i,1)||_{x_{i+1}\leftarrow x_i},
\end{aligned}$$

o que justifica o item (i) do Lema 2.3.23. Seguimos agora com a prova do item (ii). Novamente pela definição da norma do operador para qualquer $z\in X$ e $n\geq 1$ temos a expressão

$$||\mathbb{H}(z,-n)||_{x_0\leftarrow x_n} = \sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|\mathbb{H}(z,-n)(u)|_{x_0}}{|u|_{x_n}}\right\}.$$

De modo similar ao item (i), analisamos a fração dada no lado direito da expressão na norma. Dados $x,y\in X$ e escrevendo $x_i=f^i(x)$ e $y_i=f^i(y)$, para todo $0\leq i\leq n$, vale:

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathbb{H}(y_n,-n)(u)|_{x_0}}{|u|_{x_n}} &= \frac{|H(f^{-n}(y_n))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{-1}(y_n))^{-1}(u)|_{x_0}}{|u|_{x_n}}\\
&= \frac{|H(f^{-n}(f^n(y)))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{-1}(f^n(y)))^{-1}(u)|_{x_0}}{|u|_{x_n}}\\
&= \frac{|H(y)^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_0}}{|u|_{x_n}}\\
&= \frac{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}}{|u|_{x_n}}\cdot\frac{|H(f^{n-2}(y))^{-1}\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-2}}}{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}}\cdots\\
&\quad\frac{|H(y)^{-1}\circ H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_0}}{|H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_1}}.
\end{aligned}$$

Agora, pela pela homogeneidade de $H(z)$ e Observação 1.2.17 temos que $H(z)^{-1}$ é uma função homogênea para qualquer $z\in X$, e assim

$$\frac{H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)}{|u|_{x_n}} = H(f^{n-1}(y))^{-1}\left(\frac{u}{|u|_{x_n}}\right),$$

$$\frac{H(f^{n-2}(y))^{-1}\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)}{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}} = H(f^{n-2}(y))^{-1}\left(\frac{H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)}{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}}\right),$$

$$\vdots$$

$$\frac{H(y)^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)}{|H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_1}} = H(y)^{-1}\left(\frac{H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)}{|H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_1}}\right).$$

Logo, pelas expressões obtidas acima e o fato de $H(x)$ ser bijeção temos que

$$\sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}}{|u|_{x_n}}\right\} = \sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(v)|_{x_{n-1}}}{|v|_{x_n}}\right\},$$

$$\sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-2}(y))^{-1}\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-2}}}{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}}\right\} = \sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-2}(y))^{-1}(v)|_{x_{n-2}}}{|v|_{x_{n-1}}}\right\},$$

$$\vdots$$

$$\sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|H(y)^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_0}}{|H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_1}}\right\} = \sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(y)^{-1}(v)|_{x_0}}{|v|_{x_1}}\right\}.$$

Novamente pelo fato de o supremo do produto ser menor ou igual ao produto dos supremos e pelas estimativas acima obtidas, segue que

$$\begin{aligned}
||\,\mathbb{H}(y_n,-n)||_{x_0\leftarrow x_n} &= \sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|\mathbb{H}(y_n,-n)(u)|_{x_0}}{|u|_{x_n}}\right\}\\
&= \sup_{0\neq u\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_{n-1}}}{|u|_{x_n}}\cdots\frac{|H(y)^{-1}\circ H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_0}}{|H(f(y))^{-1}\circ\cdots\circ H(f^{n-1}(y))^{-1}(u)|_{x_1}}\right\}\\
&\leq \sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(f^{n-1}(y))^{-1}(v)|_{x_{n-1}}}{|v|_{x_n}}\right\}\cdots\sup_{0\neq v\in E}\left\{\frac{|H(y)^{-1}(v)|_{x_0}}{|v|_{x_1}}\right\}\\
&= ||\mathbb{H}(y_n,-1)||_{x_{n-1}\leftarrow x_n}\cdots||\mathbb{H}(y_1,-1)||_{x_0\leftarrow x_1}\\
&= \prod_{i=0}^{n-1}||\mathbb{H}(y_{i+1},-1)||_{x_i\leftarrow x_{i+1}},
\end{aligned}$$

□

A seguir, apresentaremos um resultado importante que garante estimativas para a norma do cociclo. Essa Proposição é inspirada no trabalho de Kalinin e Sadvoskaya [23].

Proposição 2.3.24. *Seja X um espaço métrico compacto munido de uma medida de probabilidade ergódica μ, invariante por uma aplicação invertível $f : X \to X$. Suponha que o cociclo homogêneo $\mathbb{H}$ definido sobre f é α-Hölder contínuo, com $0 \leq \alpha < 1$, e denotamos o maior expoente de Lyapunov por λ_+ e o menor expoente Lyapunov por λ_-. Suponha também* *que dado $\varepsilon > 0$, para todo $x \in \mathcal{R}_l$ com $f^m(x) \in \mathcal{R}_l$, para $m \geq 1$, e qualquer $y \in X$ os segmentos de órbita $x, f(x), \cdots, f^m(x)$ e $y, f(y), \cdots, f^m(y)$ satisfazem para algum $\delta > 0$*

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq \delta e^{-\gamma \min\{i, m-i\}}, \text{ para todo } i = 0, \cdots, m, \tag{2.38}$$

para qualquer $\gamma > \frac{\varepsilon}{\alpha}$ e para $0 \leq n \leq m$. Então existe uma constante $C = C(\mathbb{H}, \alpha, \gamma, \varepsilon, \lambda_+, \lambda_-)$ tal que as seguintes estimativas são válidas:

(i) $||\mathbb{H}(y, n)|| \leq l||\mathbb{H}(y, n)||_{x_n \leftarrow x_0} \leq l e^{Cl\delta^\alpha} e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)}$;

(ii) $||\mathbb{H}(y_n, -n)|| \leq l e^{\varepsilon \min\{n, m-n\}} ||(\mathbb{H}(y_n, -n)||_{x_0 \leftarrow x_n} \leq l e^{\varepsilon \min\{n, m-n\}} e^{Cl\delta^\alpha} e^{n(-\lambda_- + \varepsilon)}$.

Demonstração. Inicialmente, provaremos as estimativas do item (i). Denotamos $x_i = f^i(x)$ e $y_i = f^i(y)$, para todo $0 \leq i \leq m$, com $m \in \mathbb{N}$. Tomando $0 \leq n \leq m$, pelo item (i) do Lema 2.3.23 e pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(y, n)||_{x_n \leftarrow x_0} &\leq \prod_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(y_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (||\mathbb{H}(y_i, 1) - \mathbb{H}(x_i, 1) + \mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i}) \\ &\leq \prod_{i=0}^{n-1} (||\mathbb{H}(y_i, 1) - \mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i} + ||\mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i}). \end{aligned}$$

Como $x_i = f^i(x) \in \mathcal{R}_l \subset \Lambda$, para $0 \leq i \leq m$, então pelo item (i) da Proposição 2.3.20 temos que $||\mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i} \leq e^{\lambda_+ + \varepsilon}$ e assim,

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(y, n)||_{x_n \leftarrow x_0} &\leq \prod_{i=0}^{n-1} (||\mathbb{H}(y_i, 1) - \mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_i \leftarrow x_i} + e^{\lambda_+ + \varepsilon}) \\ &\leq e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{||\mathbb{H}(y_i, 1) - \mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i}}{e^{\lambda_+ + \varepsilon}} + 1 \right), \end{aligned}$$

e dessa forma, concluímos que

$$\frac{||\mathbb{H}(y, n)||_{x_n \leftarrow x_0}}{e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)}} \leq \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{||\mathbb{H}(y_i, 1) - \mathbb{H}(x_i, 1)||_{x_{i+1} \leftarrow x_i}}{e^{\lambda_+ + \varepsilon}} + 1 \right). \tag{2.39}$$

Como supomos que o cociclo homogêneo $\mathbb{H}$ é α-Hölder contínuo e pela relação dada em (2.38), obtemos que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)|| &\leq Md(x_i,y_i)^{\alpha} \\ &\leq M(\delta e^{-\gamma\min\{i,m-i\}})^{\alpha}. \end{aligned}$$

Como pela Observação 2.3.22 vale que $K_{\varepsilon}(x_i)\leq le^{\varepsilon\min\{i,m-i\}}$ e pela Observação 2.3.21 temos que $||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)||_{x_{i+1}\leftarrow x_i}\leq K_{\varepsilon}(x_{i+1})|||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)||$, combinando com a estimativa acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)||_{x_{i+1}\leftarrow x_i} &\leq K_{\varepsilon}(x_{i+1})||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)|| \\ &\leq le^{\varepsilon\min\{i+1,m-(i+1)\}}M\delta^{\alpha}e^{-\gamma\alpha\min\{i,m-i\}}. \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da desigualdade (2.39), pela estimativa acima obtida e o fato de que $\log(1+x)\leq x$, para todo $x\geq 0$, decorre que

$$\begin{aligned} \log||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n\leftarrow x_0}-n(\lambda_{+}+\varepsilon) &= \log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)||_{x_{i+1}\leftarrow x_i}}{e^{\lambda_{+}+\varepsilon}}+1\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\frac{||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)||_{x_{i+1}\leftarrow x_i}}{e^{\lambda_{+}+\varepsilon}}+1\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{||\mathbb{H}(y_i,1)-\mathbb{H}(x_i,1)||_{x_{i+1}\leftarrow x_i}}{e^{\lambda_{+}+\varepsilon}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}e^{-(\lambda_{+}+\varepsilon)}le^{\varepsilon\min\{i+1,m-(i+1)\}}M\delta^{\alpha}e^{-\gamma\alpha\min\{i,m-i\}} \\ &= e^{-(\lambda_{+}+\varepsilon)}lM\delta^{\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}e^{\varepsilon\min\{i+1,m-(i+1)\}-\gamma\alpha\min\{i,m-i\}}. \end{aligned}$$

Observe que, $\min\{i+1,m-(i+1)\}\leq i+1$ e $\min\{i,m-1\}\leq i$ e assim, a estimativa acima fica da forma

$$\begin{aligned} \log||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n\leftarrow x_0}-n(\lambda_{+}+\varepsilon) &\leq e^{-(\lambda_{+}+\varepsilon)}lM\delta^{\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}e^{\varepsilon(i+1)-\gamma\alpha i} \\ &= e^{-(\lambda_{+}+\varepsilon)}lM\delta^{\alpha}e^{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}e^{(\varepsilon-\gamma\alpha)i} \\ &\leq Ml\delta^{\alpha}e^{-(\lambda_{+}+\varepsilon)}e^{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}e^{(\varepsilon-\gamma\alpha)i} \\ &= C_1 l\delta^{\alpha}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = Me^{-\lambda_+}S_1$, com $S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(\varepsilon-\gamma\alpha)i}$ é a soma da série a qual é convergente pois, $\gamma > \frac{\varepsilon}{\alpha}$, isto é, $\varepsilon - \gamma\alpha < 0$.

Desse modo, elevando ambos os lados da estimativa acima obtemos que

$$||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n \leftarrow x_0} \leq e^{C_1 l \delta^\alpha} e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)}.$$

Como $||K_\varepsilon(x_0)|| \leq l$ pela definição do conjunto $\mathcal{R}_l$ dado em (2.35) e ainda pela Observação 2.3.22, temos que $||h|| \leq K_\varepsilon(x)||h||_{y \leftarrow x}$ para qualquer $h : E \to E$ homogênea e daí, pela desigualdade acima segue que

$$||\mathbb{H}(y,n)|| \leq l||\mathbb{H}(y,n)||_{x_n \leftarrow x_0} \leq le^{C_1 l \delta^\alpha} e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)},$$

assim, provando a validade das estimativas dadas no item (i). Agora, para demonstrarmos a validade das desigualdades dadas no item (ii) observe que, pelo Lema 2.3.23 temos

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(y_n,-n)||_{x_0 \leftarrow x_n} &\leq \prod_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(y_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(y_{i+1},-1) - \mathbb{H}(x_{i+1},-1) + \mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} \\
&\leq \prod_{i=0}^{n-1} (||\mathbb{H}(y_{i+1},-1) - \mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} + ||\mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}}),
\end{aligned}$$

onde a última estimativa vale pela desigualdade triangular. Observe que, pela Proposição 2.3.20 temos que $||\mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} \leq e^{-\lambda_- + \varepsilon}$, para todo $i = 0, ..., n-1$, e então

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(y,-n)||_{x_0 \leftarrow x_n} &\leq \prod_{i=0}^{n-1} (||\mathbb{H}(y_{i+1},-1) - \mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} + e^{-\lambda_- + \varepsilon}) \\
&= e^{n(-\lambda_+ + \varepsilon)} \prod_{i=0}^{n-1} \left(e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)}||\mathbb{H}(y_{i+1},-1) - \mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} + 1\right),
\end{aligned}$$

e dessa forma

$$e^{-n(-\lambda_- + \varepsilon)}||\mathbb{H}(y,-n)||_{x_0 \leftarrow x_n} \leq \prod_{i=0}^{n-1} \left(e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)}||\mathbb{H}(y_{i+1},-1) - \mathbb{H}(x_{i+1},-1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} + 1\right) \quad (2.40)$$

Como $\mathbb{H}$ é α-Hölder, então $\mathbb{H}^{-1}$ também é, e assim similarmente ao caso anterior, usando a relação dada em (2.38) vale para $i = 0, ..., n-1$ que

$$||\mathbb{H}(y_{i+1}, -1) - \mathbb{H}(x_{i+1}, -1)|| \leq M d(y_{i+1}, x_{i+1})^\alpha \leq M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha.$$

A partir da estimativa acima e pela Observação 2.3.21 vale que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(y_{i+1}, -1) - \mathbb{H}(x_{i+1}, -1)||_{x_i \leftarrow x_{i+1}} &\leq K(x_i)||\mathbb{H}(y_{i+1}, -1) - \mathbb{H}(x_{i+1}, -1)|| \\ &\leq K(x_i) M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha \\ &\leq l e^{\varepsilon \min\{i, m-i\}} M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha, \end{aligned}$$

onde a última estimativa é obtida usando a Observação 2.3.22. Logo, usando essa última estimativa em (2.40) obtemos que

$$e^{-n(-\lambda_- + \varepsilon)}||\mathbb{H}(y_n, -n)||_{x_0 \leftarrow x_n} \leq \prod_{i=0}^{n-1} \left(e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)} l e^{\varepsilon \min\{i, m-i\}} M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha + 1\right).$$

Aplicando logaritmo na estimativa acima e usando que $\log(1+x) \leq x$, decorre que

$$\begin{aligned} \log ||\mathbb{H}(y_n, -n)||_{x_0 \leftarrow x_n} - n(-\lambda_- + \varepsilon) &= \log \prod_{i=0}^{n-1} \left(e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)} l e^{\varepsilon \min\{i, m-i\}} M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha + 1\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \log \left(e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)} l e^{\varepsilon \min\{i, m-i\}} M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha + 1\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)} l e^{\varepsilon \min\{i, m-i\}} M \left(\delta e^{-\gamma \min\{i+1, m-(i+1)\}}\right)^\alpha \\ &\leq l M \delta^\alpha e^{-(-\lambda_- - \varepsilon) - \gamma\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} e^{(\varepsilon - \gamma\alpha)i} \\ &\leq l M \delta^\alpha e^{-(-\lambda_- - \varepsilon) - \gamma\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} e^{(\varepsilon - \gamma\alpha)i} \\ &= C_2 l \delta^\alpha, \end{aligned}$$

onde $C_2 = M S_1 e^{\lambda_- - \varepsilon}$ sendo $S_1 = \sum_{i=0}^{\infty} e^{(\varepsilon - \gamma\alpha)i}$.

Dessa forma, elevando à exponencial ambos os lados da última desigualdade

$$||\mathbb{H}(y_n, -n)||_{x_0 \leftarrow x_n} \leq e^{C_2 l \delta^\alpha} e^{n(-\lambda_- + \varepsilon)}.$$

Como da Observação 2.3.21 $||H|| \leq K(x)||H||_{y \leftarrow x}$ s pela Observação 2.3.22 temos que

$||K(x_n)|| \leq le^{\min\{n,m-n\}}$, podemos concluir que

$$||\mathbb{H}(y_n - n)|| \leq le^{\min\{n,m-n\}}||\mathbb{H}(y_n, -n)||_{x_0 \leftarrow x_n} \leq le^{\min\{n,m-n\}}e^{C_2 l\delta^\alpha}e^{n(-\lambda_- + \varepsilon)}.$$

Tomando a constante finita $C = \max\{C_1, C_2\}$ terminamos a prova desse resultado. □

Observação 2.3.25. *Pela definição do cociclo temos que* $\mathbb{H}(x, -n) = \mathbb{H}(f^{-n}(x), n)^{-1}$ *e assim, no item (ii) da Proposição 2.3.24 anterior temos que*

$$||\mathbb{H}(y_n, -n)|| = ||\mathbb{H}(f^n(y), -n)|| = ||\mathbb{H}(y, n)^{-1}||.$$

2.4 Demonstração do Teorema 2.3.2

Nesta seção realizaremos a demonstração do Teorema 2.3.2. Na Seção 2.3 preparamos os resultados e estimativas necessárias para elaborarmos essa prova. Dividimos esta etapa do trabalho em mostrar inicialmente a escolha do ponto periódico p que será usado na aproximação, e após dividiremos em seções cada aproximação dos expoentes de Lyapunov.

2.4.1 Escolha do ponto periódico p

Descrevemos a escolha do ponto periódico p. Ressaltamos que a existência do ponto periódico está atrelada ao fato de assumirmos que a base do cociclo f satisfaz a *closing property* que é dada na Definição 2.3.1. Desse modo, o objetivo dessa seção será enfatizar algumas propriedades que tal ponto possui e que utilizaremos posteriormente.

Inicialmente obteremos um elemento $x \in X$ tal que $d(x, f^k(x)) < \delta_0$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e alguma constante positiva δ_0. Para isso, consideramos o conjunto $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$ onde $\mathcal{R}$ é dado na Observação 2.3.19 e $\mathcal{P}$ é o conjunto de medida total dado no Lema 1.4.3. Observe que $\mathcal{R}$ também tem medida total, dessa forma $\mathcal{R}^*$ também é um conjunto de medida total.

Tomando $x \in \mathcal{R}^*$ segue pelo Lema 1.4.3 que para dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe um número inteiro $N = N(x, \varepsilon, \delta)$ onde, se $n > N$ então para algum inteiro k, vale que

$$n(1+\varepsilon) < k < n(1+2\varepsilon) \text{ e } d(x, f^k(x)) < \delta. \tag{2.41}$$

Observe que as constantes ε e δ utilizadas na relação (2.41) são quaisquer. Nesse momento construiremos estimativas com propriedades que nos auxiliem na obtenção do resultado principal.

Para isso, fixamos $0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{\alpha\gamma}{4}\right\}$ qualquer, onde $\gamma > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$, e definimos $\varepsilon' = \frac{4\varepsilon}{\alpha\gamma} > 0$. Dado $l > 1$, definimos o conjunto $\mathcal{R}_l^* := \mathcal{R}_l \cap \mathcal{R}^*$, onde $\mathcal{R}_l$ é definido em (2.35).

Escolhamos agora $l > 1$ de modo que $\mu(\mathcal{R}_l^*) > 1 - \frac{\varepsilon'}{2}$ e isso é possível pois, $\mu(R_l) \to 1$ quando $l \to \infty$.

Suponhamos então que $x \in \mathcal{R}_l^*$ seja tomado de tal forma que vale o Teorema 1.1.5 para a função indicador de $\mathcal{R}_l^*$, isto é, escolhemos x satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{i; 1 \leq i \leq n \text{ e } f^i(x) \in \mathcal{R}_l^*\} = \mu(\mathcal{R}_l^*) > 1 - \frac{\varepsilon'}{2}. \tag{2.42}$$

Para esse mesmo x aplicamos o Lema 1.4.1 para os seguintes cociclos

$$a_n(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n)|| \text{ e } \tilde{a}_n(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||.$$

Suponhamos que $\varepsilon' > 0$ seja pequeno o suficiente de modo que pelo Lema 1.4.1 existam conjuntos $\mathcal{O}_{\varepsilon'}, \tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon'} \subset X$ com medida suficientemente grande para que $x \in \mathcal{O}_{\varepsilon'} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon'}$ (lembrando que $\mathcal{O}_{\varepsilon'}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon'}$ possuem medida maior do que $1 - \varepsilon'$). Além disso, existem sequências $\delta_l, \tilde{\delta}_l \to 0$ tais que pela Observação 1.4.2 existe um conjunto $A^* \subset \mathbb{N}$ de inteiros positivos n onde para todo $l \leq n$ segue que

$$a_n(x) - a_{n-i}(f^i(x)) \geq (\lambda_+ - \delta_l)l \text{ e } \tilde{a}_n(x) - \tilde{a}_{n-i}(f^i(x)) \geq (-\lambda_- - \tilde{\delta}_l)l. \tag{2.43}$$

Agora, fixe uma constante positiva $L = L(x, \varepsilon')$ tal que $L \leq l \leq n$ e ainda, valham as estimativas dadas em (2.43) para L.

Além disso, como $x \in \mathcal{P}$, segue do Lema 1.4.3 que para ε' e algum $\delta_0 > 0$ qualquer, existe um inteiro positivo $N = N(x, \varepsilon', \delta_0)$ tal que se $n > N$ existe $k \in \mathbb{N}$ onde

$$n(1 + \varepsilon') < k < n(1 + 2\varepsilon') \text{ e } d(x, f^k(x)) < \delta_0. \tag{2.44}$$

Como assumimos que o homeomorfismo $f : X \to X$ satisfaz a Definição 2.3.1, existem constantes $C, \gamma > 0$ e um ponto periódico $p = f^k(p)$, onde k satisfaz a relação em (2.44), tal que para todo $i = 0, ..., k$, vale

$$d(f^i(x), d(f^i(p)) \leq C d(x, f^k(x)) e^{-\gamma \min\{i, k-i\}} < C\delta_0 e^{-\gamma \min\{i,k-i\}}.$$

Uma vez que, pela relação (2.44) temos $d(x, f^k(x)) < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $\delta_0 = \frac{\delta}{C}$. Assim, obtemos para qualquer $i = 0, ..., k$ que

$$d(f^i(x), d(f^i(p)) < \delta e^{-\gamma \min\{i,k-i\}}. \tag{2.45}$$

Para que valham as relações (2.43), (2.44) e (2.45) ao mesmo tempo, assumiremos que $n > \max\{L, N\}$. Além disso, pela relação (2.42) se n é suficientemente grande, podemos assumir que $f^n(x) \in \mathcal{R}_l^*$.

Observação 2.4.1. *As seguintes relações são válidas:*

1. $\max\{L, N\} < n \leq n(1+\varepsilon') < k < n(1+2\varepsilon')$ *;*

2. *n satisfaz a relação* (2.43) *e* $x, f^n(x) \in \mathcal{R}_l^*$*;*

3. *$p = f^k(p)$ ponto periódico de período k satisfaz* (2.45).

Neste momento, estabelecemos todas as estimativas necessárias para provarmos a aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov. A fim de facilitar a leitura, optamos por fazer a estimativa superior e inferior de cada um dos expoentes em seções separadas.

2.4.2 Estimativa superior para $||\mathbb{H}(p,k)||$

Iniciaremos apresentando a estimativa superior para a aproximação periódica em termos da norma do cociclo. Para isso, observe que podemos aplicar o item (i) da Proposição 2.3.20 com $y = p$, onde p é o ponto periódico de período k obtido na seção 2.4.1 pois, o ponto p satisfaz (2.45) que é a mesma condição dada em (2.38) e então

$$||\mathbb{H}(p,n)|| \leq l e^{Cl\delta^\alpha} e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)}.$$

Note que $n < k$ pelo item 1 da Observação 2.4.1. Usando a equação do cociclo temos

$$||\mathbb{H}(p,k)|| = ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n) \circ \mathbb{H}(p,n)|| \leq ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)|| \cdot ||\mathbb{H}(p,n)||.$$

Como supomos que o cociclo $\mathbb{H}$ é limitado, existe uma constante $\lambda' > \lambda_+$ tal que

$$||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)|| \leq e^{(\lambda_+ + \varepsilon)(k-n)} \leq e^{\lambda'(k-n)}.$$

Observe que, novamente pelo item 1 da Observação 2.4.1, temos que $n < k \leq n(1+2\varepsilon')$ e assim, $k - n \leq 2n\varepsilon' < 2k\varepsilon'$. Logo, combinando as estimativas acima podemos concluir que

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(p,k)|| &\leq ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)|| \cdot ||\mathbb{H}(p,n)|| \\
&\leq e^{\lambda'(k-n)} l e^{Cl\delta^\alpha} e^{n(\lambda_+ + \varepsilon)} \\
&\leq l e^{Cl\delta^\alpha} e^{n(\lambda_+ + \varepsilon) + 2\lambda' k\varepsilon'} \\
&\leq l e^{Cl\delta^\alpha} e^{k(\lambda_+ + \varepsilon + 2\lambda'\varepsilon')},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $n < k$. Dessa, forma aplicando logaritmo na estimativa acima, segue que

$$\log ||\mathbb{H}(p,k)|| \leq \log l + Cl\delta^{\alpha} + k(\lambda_{+} + \varepsilon + 2\lambda'\varepsilon'),$$

e multiplicando em ambos os lados da inequação anterior, obtemos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)|| \leq \frac{1}{k}(\log l + Cl\delta^{\alpha}) + \lambda_{+} + \varepsilon + 2\lambda'\varepsilon'.$$

Como $k < n$, tomando n, e consequentemente k, suficientemente grandes, teremos que $\frac{1}{k}(\log l + Cl\delta^{\alpha}) < \varepsilon$ e como $\varepsilon' = \frac{4\varepsilon}{\alpha\gamma}$, concluímos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)|| \leq \lambda_{+} + 2\varepsilon + 2\lambda'\varepsilon' = \lambda_{+} + 2\varepsilon + \frac{8\varepsilon\lambda'}{\alpha\gamma} = \lambda_{+} + \varepsilon\left(2 + \frac{8\lambda'}{\alpha\gamma}\right).$$

Como as constantes λ', α e γ são fixadas, podemos fazer $\varepsilon_1 = \varepsilon\left(2 + \frac{8\lambda'}{\alpha\gamma}\right) > 0$ tão pequeno quanto se queira.

2.4.3 Estimativa inferior para $||\mathbb{H}(p,k)||$.

Nesta seção, obteremos uma estimativa inferior para $||\mathbb{H}(p,k)||$ em função do maior expoente de Lyapunov associado ao cociclo $\mathbb{H}$ e assim, findarmos a primeira parte da prova do Teorema 2.3.2.

Como $\mathbb{H}$ é um cociclo gerado por uma aplicação homogênea $H(\cdot) \in \mathcal{H}^1_*(E)$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in E$ podemos associar as seguintes aplicações $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ e $N : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{S}^1 = \{u \in E : |u| = 1\}$ é a esfera unitária de E, pela Observação 2.3.14. Temos

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(x,n) - \mathbb{H}(p,n)|| &= \sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v)\ \Phi_{x,n}(v) - N_{p,n}(v)\ \Phi_{p,n}(v)| \\
&\leq \sup_{|v|=1} |[N_{x,n}(v) - N_{p,n}(v)]\ \Phi_{x,n}(v)| \\
&+ \sup_{|v|=1} N_{p,n}(v)|\Phi_{x,n}(v) - \Phi_{p,n}(v)| \\
&\leq \sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v) - N_{p,n}(v)||\Phi_{x,n}(v)| \\
&+ \sup_{|v|=1} N_{p,n}(v) \sup_{|v|=1} |\Phi_{x,n}(v) - \Phi_{p,n}(v)| \\
&\leq \sup_{|v|=1} |N_{x,n}(v) - N_{p,n}(v)| + 2||\mathbb{H}(p,n)||,
\end{aligned}$$

onde na última estimativa usamos que Φ tem norma unitária e a Observação 2.3.12. Usando a Observação 2.3.15 obtemos que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(x,n)-\mathbb{H}(p,n)|| &\leq 2||\mathbb{H}(p,n)|| \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1}||\mathbb{H}(f^{i+1}(x),n-i-1)||\cdot||\mathbb{H}(f^i(x),1)-\mathbb{H}(f^i(p),1)||\cdot||\mathbb{H}(p,i)||. \end{aligned} \tag{2.46}$$

O objetivo agora é estimar cada um dos termos do lado direito da desigualdade (2.40). Escolhendo n que satisfaz a Observação 2.4.1, existe $C' \geq 1$ onde, pela relação (1.5), vale para $C' \leq l \leq n$ que

$$a_n(x) - a_{n-l}(f^l(x)) \geq (\lambda_+ - \delta_l)l.$$

E assim, como assumimos que $a_n(x) = \log||\mathbb{H}(x,n)||$, para $l = i+1$ e $\delta_l = \varepsilon$ obtemos para $C' \leq i \leq n$ (tomando outra constante C' se necessário) que

$$\log||\mathbb{H}(x,n)|| - \log||\mathbb{H}(f^{i+1}(x),n-(i+1))|| \geq (\lambda_+ - \varepsilon)(i+1),$$

implicando que

$$\log||\mathbb{H}(f^{i+1}(x),n-(i+1))|| \leq \log||\mathbb{H}(x,n)|| - (\lambda_+ - \varepsilon)(i+1),$$

e, portanto

$$||\mathbb{H}(f^{i+1}(x),n-(i+1))|| \leq ||\mathbb{H}(x,n)||e^{-(\lambda_+-\varepsilon)(i+1)}, \tag{2.47}$$

onde na última estimativa elevamos ambos os lados na exponencial.

Agora, utilizando que o cociclo $\mathbb{H}$ é α-Hölder e pela relação dada em (2.45) decorre que

$$||\mathbb{H}(f^i(x),1)-\mathbb{H}(f^i(p),1)|| \leq Md(f^i(x),f^i(p))^\alpha \leq M\delta^\alpha e^{-\gamma\delta\min\{i,k-i\}}. \tag{2.48}$$

Afirmação 2.4.2. *Se* $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{\alpha\gamma}{4}\}$, *então*

$$\alpha\gamma\min\{i,k-i\} \geq 4\varepsilon i \textit{ para todo } i = 1,\cdots,n.$$

Demonstração. De fato, suponha inicialmente que $\min\{i,k-i\} = i$. Como $\varepsilon < \min\{1,\frac{\alpha\gamma}{4}\}$, então $\varepsilon \leq \frac{\alpha\gamma}{4}$ e assim,

$$\alpha\gamma \geq 4\varepsilon \Rightarrow \alpha\gamma\min\{i,k-i\} \geq 4\varepsilon i.$$

Por outro lado, assuma que $\min\{i, k-i\} = k - i$. Pela Observação 2.4.1 temos que $i \leq n - 1 < n < k$ então $k - i \geq 1$. Além disso, como $k > n(1 + \varepsilon')$, onde $\varepsilon' = \frac{4\varepsilon}{\alpha\gamma}$ segue que

$$\begin{aligned} i < n < \frac{k}{1+\varepsilon'} = \frac{k\alpha\gamma}{\alpha\gamma + 4\varepsilon} &\Rightarrow i(\alpha\gamma + 4\varepsilon) < k\alpha\gamma \\ &\Rightarrow 4\varepsilon i \leq (k-i)\alpha\gamma = \alpha\gamma \min\{i, k-i\}. \end{aligned}$$

Logo a afirmação é válida.

$\square$

Dessa forma, utilizando a Afirmação 2.4.2 acima com $\gamma = \delta$ na relação (2.48), vale para todo $i = 1, ..., n$ que

$$||\mathbb{H}(f^i(x), 1) - \mathbb{H}(f^i(p), 1)|| \leq M\delta^\alpha e^{-4\varepsilon i}. \tag{2.49}$$

Pela Proposição 2.3.24 temos que $||\mathbb{H}(p, i)|| \leq le^{Cl\delta^\alpha} e^{i(\lambda_+ + \varepsilon)}$, para $i = 1, \cdots, m$. Além disso, utilizando as relações (2.47) e (2.49), obtemos que

$$\begin{aligned} & ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-(i+1))|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x), 1) - \mathbb{H}(f^i(p), 1)|| \cdot ||\mathbb{H}(p, i)|| \\ \leq\ & ||\mathbb{H}(x, n)|| e^{-(\lambda_+ - \varepsilon)(i+1)} M\delta^\alpha e^{-4\varepsilon i} le^{Cl\delta^\alpha} e^{i(\lambda_+ + \varepsilon)} \\ =\ & C_1(\delta)||\mathbb{H}(x, n)|| e^{-2\varepsilon i}, \end{aligned}$$

para $C' \leq i \leq n$, com $C_1(\delta) = \delta^\alpha M l e^{Cl\delta^\alpha - \lambda_+ + \varepsilon}$.

Logo pela desigualdade acima, decorre que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=C'}^{n-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-(i+1))|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x), 1) - \mathbb{H}(f^i(p), 1)|| \cdot ||\mathbb{H}(p, i)|| \\ \leq\ & C_1(\delta)||\mathbb{H}(x, n)|| \sum_{i=C'}^{n-1} e^{-2\varepsilon i} \\ \leq\ & C_1(\delta)|||\mathbb{H}(x, n)|| \sum_{i=0}^{\infty} e^{-2\varepsilon i} \\ \leq\ & C_1(\delta) \frac{1}{1 - e^{-2\varepsilon}} ||\mathbb{H}(x, n)|| \\ =\ & C_2(\delta)||\mathbb{H}(x, n)||, \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde $C_2(\delta) = C_1(\delta)\frac{1}{1-e^{-2\varepsilon}}$.

Neste instante, obtemos uma estimativa similar para $i < C'$. Como supomos que o cociclo $\mathbb{H}$ é limitado então consideremos $\lambda^* < \lambda_-$ tal que $||\mathbb{H}(x, n)^{-1}|| \leq e^{-\lambda^* n}$. Desse modo, podemos inferir a seguinte relação

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(f^i(x), n-i)|| &\leq ||\mathbb{H}(x,n) \circ \mathbb{H}(x,i)^{-1}|| \\ &\leq ||\mathbb{H}(x,n)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,i)^{-1}|| \\ &\leq ||\mathbb{H}(x,n)|| e^{-\lambda^* i}. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{C'-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-(i+1))|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x),1) &- \mathbb{H}(f^i(p),1)|| \cdot ||\mathbb{H}(p,i)|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{C'-1} ||\mathbb{H}(x,n)|| e^{-\lambda^*(i+1)} M\delta^\alpha e^{-4\varepsilon i} l e^{Cl\delta^\alpha} e^{i(\lambda_+ + \varepsilon)} \\ &= M\delta^\alpha l e^{Cl\delta^\alpha} ||\mathbb{H}(x,n)|| \sum_{i=0}^{C'-1} e^{i(\lambda_+ - (\lambda^*+1) - 3\varepsilon)} \\ &\leq M\delta^\alpha l e^{Cl\delta^\alpha} ||\mathbb{H}(x,n)|| \sum_{i=0}^{C'-1} e^{i(\lambda_+ - \lambda)} \\ &\leq M\delta^\alpha l e^{Cl\delta^\alpha} ||\mathbb{H}(x,n)|| C' e^{(C'-1)(\lambda_+ - \lambda^*)} \\ &\leq C_3(\delta) ||\mathbb{H}(x,n)||, \end{aligned} \tag{2.51}$$

onde usamos que $\lambda_+ - \lambda^* > 0$, já que $\lambda^* < \lambda_- \leq \lambda_+$, e tomamos $C_3(\delta) = M\delta^\alpha l e^{Cl\delta^\alpha} C' e^{(C'-1)(\lambda_+ - \lambda^*)}$.

Observe que, evidenciamos que as constantes C_2 e C_3 dependem de δ, que é tomada arbitrariamente. Desse modo, escolhemos δ de modo que $C_2(\delta) + C_3(\delta) < \frac{1}{2}$. Logo, combinando as estimativas (**??**), (2.50) e (2.51) concluímos que

$$||\mathbb{H}(x,n) - \mathbb{H}(p,n)|| \leq 2||\mathbb{H}(p,n)|| + (C_2(\delta) + C_3(\delta))||\mathbb{H}(x,n)|| \leq 2||\mathbb{H}(p,n)|| + \frac{1}{2}||\mathbb{H}(x,n)||.$$

Observe que da desigualdade acima, temos que

$$2||\mathbb{H}(p,n)|| \geq ||\mathbb{H}(x,n) - \mathbb{H}(p,n)|| - \frac{1}{2}||\mathbb{H}(x,n)||.$$

Dessa forma, utilizando a desigualdade triangular obtemos que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(p,n)|| &\geq \frac{1}{2}||\mathbb{H}(x,n) - \mathbb{H}(p,n)|| - \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)|| \\ &\geq \frac{1}{2}\Big|||\mathbb{H}(x,n)|| - ||\mathbb{H}(p,n)||\Big| - \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)|| \\ &\geq \frac{1}{2}||\mathbb{H}(x,n)|| - \frac{1}{2}||\mathbb{H}(p,n)|| - \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)|| \\ &= \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)|| - \frac{1}{2}||\mathbb{H}(p,n)||, \end{aligned}$$

e assim, concluímos a seguinte estimativa

$$\frac{3}{2}||\mathbb{H}(p,n)|| \geq \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)|| \Longrightarrow ||\mathbb{H}(p,n)|| \geq \frac{1}{6}||\mathbb{H}(x,n)||.$$

Assim, as relações acima implicam para, n suficientemente grande, que

$$||\mathbb{H}(p,n)|| \geq \frac{||\mathbb{H}(x,n)||}{6} > \frac{e^{(\lambda_+ - \varepsilon)n}}{6}. \tag{2.52}$$

Além disso, pela Observação 2.4.1 temos que $n < k$ e assim

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(p,n)|| &= ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)^{-1} \circ \mathbb{H}(p,k)|| \\ &\leq ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(p,k)|| \\ &\leq e^{\lambda^*(k-n)}||\mathbb{H}(p,k)||, \end{aligned} \tag{2.53}$$

onde $\lambda^* < \lambda_-$ e usamos o fato de supormos que o cociclo $\mathbb{H}$ é limitado. Combinando as estimativas obtidas em (2.52) e (2.53) e, usando novamente que $n < k$ obtemos que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(p,k)|| &\geq e^{-\lambda^*(k-n)}||\mathbb{H}(p,n)|| \\ &> \frac{1}{6}e^{-\lambda^*(k-n)+(\lambda_+-\varepsilon)n} \\ &= \frac{1}{6}e^{-\lambda^*(k-n)+\lambda_+k-\lambda_+k+(\lambda_+-\varepsilon)n} \\ &= \frac{1}{6}e^{-(\lambda_+-\lambda^*)(k-n)+\lambda_+k-\varepsilon n} \\ &> \frac{1}{6}e^{-(\lambda_+-\lambda^*)(k-n)+(\lambda_+-\varepsilon)k}. \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da última desigualdade tem-se que

$$\log||\mathbb{H}(p,k)|| > -(\lambda_+ - \lambda^*)(k-n) + (\lambda_+ - \varepsilon)k - \log 6.$$

Pela Observação 2.4.1 vale que $k-n<2\varepsilon' n<2\varepsilon' k$ e desse modo temos

$$\log ||\mathbb{H}(p,k)|| > -(\lambda_+-\lambda^*)2\varepsilon' k+(\lambda_+-\varepsilon)k-\log 6.$$

Multiplicando em ambos os lados por $\frac{1}{k}$, obtemos

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)|| > -(\lambda_+-\lambda^*)2\varepsilon'+(\lambda_+-\varepsilon)-\frac{\log 6}{k}.$$

Como $\varepsilon' = 4\varepsilon/(\alpha\gamma)$, decorre que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)|| > -(\lambda_+-\lambda^*)\frac{8\varepsilon}{\alpha\gamma}+(\lambda_+-\varepsilon)-\frac{\log 6}{k}.$$

Fazendo n, e consequentemente k suficiente grande, obtemos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)|| > \lambda_+-2\varepsilon-(\lambda_+-\lambda^*)\frac{8\varepsilon}{\alpha\gamma}=\lambda_+-\varepsilon\left(2+8\frac{\lambda_+-\lambda^*}{\alpha\gamma}\right).$$

Como $2+(\lambda_+-\lambda^*)\frac{8\varepsilon}{\alpha\gamma}>0$ pois $\lambda_+-\lambda^*>0$, vamos denotar $\varepsilon_2=\varepsilon\left(2+8\frac{\lambda_+-\lambda^*}{\alpha\gamma}\right)$, consideramos $\epsilon=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ e assim, temos que

$$\lambda_+-\epsilon<\frac{1}{k}||\mathbb{H}(p,k)||<\lambda_++\epsilon,$$

o que conclui a justificativa da aproximação do maior expoente de Lyapunov λ_+. Note que essa aproximação é periódica pela Observação 2.4.1 e dessa forma, concluímos a prova da primeira aproximação do Teorema 2.3.2.

2.4.4 Estimativa superior para $||\mathbb{H}(p,k)^{-1}||$

Nesta seção, realizaremos a aproximação periódica para o menor expoente de Lyapunov λ_- associado ao cociclo $\mathbb{H}$. As ideias empregas neste momento são similares as usadas na aproximação do maior expoente de Lyapunov nas seções 4.2 e 4.3. Sendo assim, daremos mais evidência aos detalhes que diferem do caso anterior.

Inicialmente vamos obter a estimativa superior de $||\mathbb{H}(p,k)^{-1}||$. Para isso, usando o Lema 2.3.24 com $y=p$, observe que

$$||\mathbb{H}(p,n)^{-1}||\leq le^{Cl\delta^\alpha}e^{n(-\lambda_-+\varepsilon)}.$$

Como pela Observação 2.4.1 vale que $k-n<2\varepsilon' n<2\varepsilon' k$ e, portanto, obtemos pela desigualdade acima que

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| &= ||\mathbb{H}(p,n)^{-1} \circ \mathbb{H}(f^n(p), k-n)^{-1}|| \\
&\leq ||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)^{-1}|| \\
&\leq le^{Cl\delta^\alpha} e^{n(-\lambda_- + \varepsilon)} e^{-\lambda^*(k-n)} \\
&\leq le^{Cl\delta^\alpha} e^{k(-\lambda_- + \varepsilon)} e^{-2\lambda^*\varepsilon' k}.
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $\mathbb{H}^{-1}$ ser limitado e escolhemos algum $\lambda^* < \lambda_-$.

Tomando logaritmo em ambos os lados da estimativa acima segue que

$$\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \leq \log l + cl\delta^\alpha + k(-\lambda_- + \varepsilon) - 2\lambda^*\varepsilon' k.$$

Multiplicando em ambos os lados por $\frac{1}{k}$ obtemos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \leq \frac{\log l + cl\delta^\alpha}{k} - \lambda_- + \varepsilon - 2\lambda^*\varepsilon'.$$

Como $\varepsilon' = \frac{4\varepsilon}{\alpha\gamma}$ e tomando n, e consequentemente k, suficientemente grandes, a partir da estimativa acima concluímos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \leq -\lambda_- + 2\varepsilon - 2\lambda^*\varepsilon' = -\lambda_- + 2\varepsilon - \frac{8\varepsilon\lambda^*}{\alpha\gamma} = -\lambda_- + \varepsilon\left(2 - \frac{8\lambda^*}{\alpha\gamma}\right).$$

Denotando $\varepsilon_1 = \varepsilon\left(2 - \frac{8\lambda^*}{\alpha\gamma}\right) > 0$ pois $\lambda^* < \lambda_- < 0$, obtemos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \leq -\lambda_- + \varepsilon_1.$$

2.4.5 Estimativa inferior para $||\mathbb{H}(p,k)^{-1}||$

De modo similar ao empregado no caso da estimativa inferior de $||\mathbb{H}(p,k)||$ realizaremos a estimativa inferior $||\mathbb{H}(p,k)^{-1}||$. Pela Observação 2.3.16 podemos afirmar que vale a seguinte relação

$$\begin{aligned}
&||\mathbb{H}(x,n)^{-1} - \mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \leq 2||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \\
+ &\sum_{i=0}^{n-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-(i+1))^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x),1)^{-1} - \mathbb{H}(f^i(p),1)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(p,i)^{-1}||.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Estimaremos as normas que aparecem no somatório no lado direito da relação acima. Pela estimativa 1.5 para $b_n(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||$, para $\tilde{C} \leq i \leq n$, onde $\tilde{C}$ é uma constante positiva, concluímos que

$$\log ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| - \log ||\mathbb{H}(f^i(x), n-i)^{-1}|| \geq (-\lambda_- - \varepsilon)i,$$

assim,

$$\log ||\mathbb{H}(f^i(x), n-i)^{-1}|| \leq \log ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| - (-\lambda_- - \varepsilon)i$$

e, portanto,

$$||\mathbb{H}(f^i(x), n-i)^{-1}|| \leq ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)i}. \tag{2.55}$$

Como $\mathbb{H}^{-1}$ é α-Hölder, segue pela relação dada em (2.45), para todo $i = 1, ..., n$, que

$$||\mathbb{H}(f^i(x), 1)^{-1} - \mathbb{H}(f^i(p), 1))^{-1}|| \leq \tilde{M} d(f^i(x), f^i(p) \leq \tilde{M}\delta^\alpha e^{-4\varepsilon i}, \tag{2.56}$$

onde na última relação usamos também a Afirmação 2.4.2.

Além disso, pelo Lema 2.3.24 para $i = 1, ..., n$ vale que

$$||\mathbb{H}(p,i)^{-1}|| \leq l e^{\varepsilon \min\{i, n-i\}} e^{Cl\delta^\alpha} e^{i(-\lambda_- + \varepsilon)}. \tag{2.57}$$

Dessa forma, combinando as relações (2.55), (2.56) e (2.57), obtemos para $\tilde{C} \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
& ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-(i+1))^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x), 1)^{-1} - \mathbb{H}(f^i(p), 1)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(p,i)^{-1}|| \\
\leq\ & ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| e^{-(-\lambda_- - \varepsilon)(i+1)} \tilde{M}\delta^\alpha e^{-4\varepsilon i} l e^{\varepsilon \min\{i,n-i\}} e^{Cl\delta^\alpha} e^{i(-\lambda_- + \varepsilon)} \\
\leq\ & \tilde{M}\delta^\alpha l e^{Cl\delta^\alpha} ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| e^{\lambda_- + \varepsilon - \varepsilon i} \\
\leq\ & C_4(\delta) ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| e^{-\varepsilon i},
\end{aligned}$$

onde $C_4(\delta) = \tilde{M}\delta^\alpha l e^{cl\delta^\alpha + \lambda_- + \varepsilon}$. Logo, fazendo a soma da expressão acima de $\tilde{C}$ até $n-1$ e escrevendo $C_5(\delta) = C_4(\delta)(1 - e^{-\varepsilon})^{-1}$, obtemos

$$\sum_{i=\tilde{C}}^{n-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n-(i+1))^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x), 1)^{-1} - \mathbb{H}(f^i(p), 1)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(p,i)^{-1}|| \ \leq\ C_5(\delta) ||(\mathbb{H}_x^n)^{-1}||,$$

Por outro lado, para $i < \tilde{C}$, como o cociclo $\mathbb{H}$ é limitado, então existe $\lambda' > \lambda_+$ tal que $||\mathbb{H}(x,n)|| \leq e^{\lambda'}$, para todo $x \in X$ e assim

$$||\mathbb{H}(f^i(x), n-i)^{-1}|| = ||\mathbb{H}(x,i) \circ \mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \leq ||\mathbb{H}(x,i)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \leq e^{\lambda' i} ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||.$$

Logo, usando a estimativa acima e ainda as relações dadas em (2.56) e (2.57) para

$i < \tilde{C}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\tilde{C}-1} ||\mathbb{H}(f^{i+1}(x), n &- (i+1))^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^i(x),1)^{-1} - \mathbb{H}(f^i(p),1)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(p,i)^{-1}|| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\tilde{C}-1} ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| e^{\lambda' i} \tilde{M} \delta^{\alpha} e^{-4\varepsilon i} l e^{\varepsilon \min\{i, n-i\}} e^{Cl\delta^{\alpha}} e^{i(-\lambda_- + \varepsilon)} \\
&\leq \tilde{M} \delta^{\alpha} e^{Cl\delta^{\alpha}} ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \sum_{i=0}^{\tilde{C}-1} e^{(\lambda' - \lambda_- - 2\varepsilon) i} \\
&\leq \tilde{M} \delta^{\alpha} e^{Cl\delta^{\alpha}} ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \tilde{C} e^{(\lambda' - \lambda_-)(\tilde{C}-1)} \\
&\leq C_6(\delta) ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||,
\end{aligned}$$

onde $C_6(\delta) = \tilde{M} \delta^{\alpha} l e^{cl\delta^{\alpha}} \tilde{C} e^{(\lambda' - \lambda_-)(\tilde{C}-1)}$.

Como $\delta > 0$ é escolhido arbitrariamente, podemos tomar ele pequeno suficiente de modo que $C_5(\delta) + C_6(\delta) \leq \frac{1}{2}$ e assim, aplicando a estimativa acima na expressão (2.55) obtemos que

$$||\mathbb{H}(x,n)^{-1} - \mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \leq 2||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| + \frac{1}{2}||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||.$$

Pela desigualdade triangular e esse última estimativa, temos que

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| &\geq \frac{1}{2}||\mathbb{H}(x,n)^{-1} - \mathbb{H}(p,n)^{-1}|| - \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \\
&\geq \frac{1}{2}\left| ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| - ||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \right| - \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \\
&\geq \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| - \frac{1}{2}||\mathbb{H}(p,n)^{-1}||.
\end{aligned}$$

Dessa forma, vale que

$$\frac{3}{2}||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \geq \frac{1}{4}||\mathbb{H}(x,n)^{-1}|| \Rightarrow ||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| \geq \frac{1}{6}||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||. \tag{2.58}$$

Agora observe novamente que, pelo fato de o cociclo $\mathbb{H}$ ser limitado, decorre que

$$\begin{aligned}
||\mathbb{H}(p,n)^{-1}|| &\leq ||\mathbb{H}(p,k)^{-1} \circ \mathbb{H}(f^n(p), k-n)|| \\
&\leq ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^n(p), k-n)|| \\
&\leq ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| e^{\lambda'(k-n)}.
\end{aligned}$$

Logo, utilizando a estimativa acima juntamente coma obtida em (2.58), segue que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| &\geq ||\mathbb{H}(p,n)^{-1}||e^{-\lambda'(k-n)} \\ &\geq \frac{1}{6}e^{-(\lambda_-+\varepsilon)n}e^{-\lambda'(k-n)} \\ &\geq \frac{1}{6}e^{-(\lambda_-+\varepsilon)k-2\lambda'\varepsilon' k}, \end{aligned}$$

onde na última estimativa usamos a Observação 2.4.1 a qual nos afirma que $n < k$ e ainda, que $k - n < 2\varepsilon' n < 2\varepsilon' k$.

Aplicando logaritmo em ambos os lados da última expressão obtida, segue que

$$\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \geq -(\lambda_- + \varepsilon)k - 2\lambda'\varepsilon' k - \log 6.$$

Dividindo a equação acima em ambos os lados por k, tomamos n, e consequentemente k, grande o suficiente, obtemos que

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \geq -\lambda_- - 2\varepsilon - 2\lambda'\varepsilon'.$$

Utilizando que $\varepsilon' = (4\varepsilon)/\alpha\gamma$, temos

$$\frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \geq -\lambda_- - 2\varepsilon - \frac{8\lambda'\varepsilon}{\alpha\gamma} = -\lambda_- - \varepsilon\left(2 + \frac{8\lambda'}{\alpha\gamma}\right).$$

Consideramos $\varepsilon_4 = \varepsilon\left(2 + \frac{8\lambda'}{\alpha\gamma}\right)$ e note que, $\varepsilon_4 > 0$ pois $\lambda' > \lambda_+ > 0$. Tomando $\epsilon = \max\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$, obtemos que

$$-\lambda_- - \epsilon \leq \frac{1}{k}\log ||\mathbb{H}(p,k)^{-1}|| \leq -\lambda_- + \epsilon,$$

obtemos que vale a aproximação periódica para o menor expoente de Lyapunov λ_- associado ao cocilco $\mathbb{H}$.

Terminamos assim a demonstração do Teorema 2.3.2.

□

2.5 Aplicação

Nesta seção apresentaremos uma aplicação da aproximação periódica dos expoentes de Lyapunov associados a cociclos homogêneos obtida no Teorema 2.3.2. Iremos mostrar que a taxa de crescimento exponencial maximal e a distorção quase-conforme associados a um cociclo homogêneo podem ser dados em função dos pontos periódicos.

Considere uma dinâmica $f : X \to X$, com (X, μ) um espaço métrico compacto X munido de uma medida ergódica $f-$invariante e considere uma função $F : X \times \mathbb{N} \to X$ subaditiva com respeito a f, isto é, para todo $x \in X$ e $m, n \in \mathbb{N}$ vale que $F(x, m+n) \leq F(x, m) + F(f^m(x), n)$. Definimos então a **taxa de crescimento de F com respeito a** μ pelo valor

$$\tau(F, \mu) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_X F(x, n) d\mu.$$

Como F é subaditiva com respeito a f e μ é uma medida ergódica, pelo Teorema Ergódico Subaditivo de Kigmann, Teorema 1.1.6, temos que

$$\tau(F, \mu) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_X F(x, n) d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_X F(x, n) d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} F(x, n), \ \mu - \text{q.t.p } x \in X.$$

Dessa forma, definiremos a **a taxa de crescimento maximal de** F pela expressão

$$\tau(F) = \sup_{x \in X} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} F(x, n).$$

Em [32], é mostrado num contexto mais geral, que a taxa de crescimento maximal pode ser escrita da seguinte forma

$$\tau(F) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \tau(F, \mu) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} F(x, n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} F(x, n), \tag{2.59}$$

onde $\mathcal{M}(f)$ denota o espaço de todas as medidas ergódicas $f-$invariantes.

Fixamos agora um cociclo homogêmeo $\mathbb{H}$ sob as condições dadas no Teorema 2.3.2. Denotamos por $\tilde{\lambda}(\mathbb{H}) = \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} \frac{1}{n} \log ||\mathbb{H}(x, n)||$. Temos que $\tilde{\lambda}(\mathbb{H})$ fornece a taxa de crescimento exponencial do cociclo e afirmamos que $\tilde{\lambda}(\mathbb{H}) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H}, \mu)$, onde $\lambda_+(\mathbb{H}, \mu)$ é o maior expoente de Lyapunov associado ao cociclo $\mathbb{H}$. De fato, para justificar isso, note que da definição de $\lambda_+(\mathbb{H}, \mu)$ segue que

$$\tau(\log ||\mathbb{H}(x, n)||, \mu) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log ||\mathbb{H}(x, n)|| = \lambda_+(\mathbb{H}, \mu).$$

Pelas relações dadas em (2.59) obtemos

$$\tilde{\lambda}(\mathbb{H}) \quad = \quad \tau(\log ||\mathbb{H}(x, n)||) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \tau(\log ||\mathbb{H}(x, n)||, \mu) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H}, \mu).$$

Neste momento, definiremos a **distorção quase-conforme** do cociclo $\mathbb{H}$ do seguinte modo

$$Q(x,n) := ||\mathbb{H}(x,n)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||.$$

No resultado a seguir mostraremos que a taxa de crescimento maximal, e consequentemente a taxa de crescimento exponencial, e a distorção quase-conforme de um cociclo homogêneo podem ser obtidas em função dos pontos periódicos da dinâmica f.

Proposição 2.5.1. *Considere um homeomorfismo $f : X \to X$ satisfazendo a closing property, sendo X um espaço métrico compacto munido com uma medida de probabilidade ergódica e invariante por f. Suponha que o cociclo $\mathbb{H}$ seja $\alpha-$Hölder contínuo. Então:*
(i)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} ||\mathbb{H}(x,n)||^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \sup_{p=f^k(p)\in X} ||\mathbb{H}(p,k)||^{\frac{1}{k}}.$$

Em particular, se existem constantes reais C e s tais que

$$||\mathbb{H}(p,k)|| \leq Ce^{sk},$$

para todo $p \in Fix(f^k)$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$||\mathbb{H}(x.n)|| \leq C_\varepsilon e^{(s+\varepsilon)n},$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.
(ii)

$$\lim_{n\to\pm\infty} \sup_{x\in X} Q(x,n)^{\frac{1}{|n|}} = \limsup_{n\to\infty} \sup_{p=f^k(p)\in X} Q(p,k)^{\frac{1}{k}}.$$

Em particular, se existem constantes C e s onde

$$Q(p,k) \leq Ce^{sk},$$

para todo $p \in Fix(f^k)$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $\tilde{C}_\varepsilon > 0$ tal que

$$Q(x,n) \leq \tilde{C}_\varepsilon e^{(s+\varepsilon)n},$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para provarmos o item (i), inicialmente vamos denotar:

$$\tilde{\tau}(\mathbb{H}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} ||\mathbb{H}(x,n)||^{\frac{1}{n}} \text{ e } \tilde{\tau}_p(\mathbb{H}) = \limsup_{k\to\infty} \sup_{p=f^k(p)\in X} ||\mathbb{H}(p,k)||^{\frac{1}{k}}.$$

Já vimos na seção 1.3 que $a_n(x) = \log ||\mathbb{H}(x,n)||$ é um cociclo subaditivo e assim, $a_n = \sup_{x\in X} a_n(x)$ é uma sequência subaditiva, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, dados $m, n \in \mathbb{N}$

temos pelo fato de f ser homeomorfismo que

$$a_{m+n} = \sup_{x\in X} a_{m+n}(x) = \sup_{x\in X}(a_m(x) + a_n(f^m(x))) \leq \sup_{x\in X} a_m(x) + \sup_{x\in X} a_n(f^m(x)) = a_m + a_n.$$

Desse modo, temos que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} a_n(x) =: \tilde{\lambda}(\mathbb{H}).$$

Dessa forma, pela expressão dada em (2.59) temos que

$$\tilde{\lambda}(\mathbb{H}) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H},\mu). \tag{2.60}$$

Afirmamos que $\sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H},\mu) \leq \sup_{p=f^k(p)\in X} \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||$. Suponha por absurdo que $\delta = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \sup_{p=f^k(p)\in X} \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)|| > 0$. Note que pela definição de supremo, existe $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(f)$ tal que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \frac{\delta}{2} < \lambda_+(\mathbb{H},\tilde{\mu}) < \sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H},\mu).$$

Logo, da expressão acima, temos que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \frac{\delta}{4} < \lambda_+(\mathbb{H},\tilde{\mu}) - \frac{\delta}{2}. \tag{2.61}$$

Agora, pelo Teorema 2.3.2, dada μ ergódica e para cada $\varepsilon > 0$ existe um ponto p periódico tal que

$$\left|\lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||\right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\lambda_+(\mathbb{H},\mu) \leq |\lambda_+(\mathbb{H},\mu)| &= \left|\lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)|| + \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||\right| \\
&\leq \left|\lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||\right| + \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)|| \\
&< \varepsilon + \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||.
\end{aligned}$$

Dessa forma, para $\mu = \tilde{\mu}$ e $\varepsilon = \frac{\delta}{2} > 0$ existe um ponto $\tilde{p}$ periódico de modo que

$$\lambda_+(\mathbb{H},\tilde{\mu}) - \frac{\delta}{2} < \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(\tilde{p},k)||. \tag{2.62}$$

Logo, pela definição de δ e pelas estimativas (2.61) e (2.62), obtemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{p=f^k(p)\in X}\frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)|| &< \sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)}\lambda_+(\mathbb{H},\mu)-\delta\\
&< \sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)}\lambda_+(\mathbb{H},\mu)-\frac{\delta}{4}\\
&< \lambda_+(\mathbb{H},\tilde{\mu})-\frac{\delta}{2}\\
&< \frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(\tilde{p},k)||,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, vale que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)}\lambda_+(\mathbb{H},\mu)\leq \sup_{p=f^k(p)\in X}\frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||. \tag{2.63}$$

Combinando (2.60) e (2.63) temos que $\tilde{\lambda}(\mathbb{H})\leq \sup_{p=f^k(p)\in X}\frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||$. Note que,

$$\begin{aligned}
\log\tilde{\tau}(\mathbb{H}) &= \log\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in X}||\mathbb{H}(x,n)||^{\frac{1}{n}}\\
&= \limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\log||\mathbb{H}(x,n)||^{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\frac{1}{n}a_n(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n\\
&= \tilde{\lambda}(\mathbb{H})\\
&\leq \sup_{p=f^k(p)\in X}\frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||.
\end{aligned}$$

Tomando o $\limsup$ quando $k\to\infty$ no último termo da expressão acima, decorre que $\log\tilde{\tau}(\mathbb{H})\leq\log\tilde{\tau}_p(\mathbb{H})$ e daí, concluímos que $\tilde{\tau}(\mathbb{H})\leq\tilde{\tau}_p(\mathbb{H})$. Usando a definição temos que $\tilde{\tau}_p(\mathbb{H})\leq\tilde{\tau}(\mathbb{H})$. Portanto, $\tilde{\tau}(\mathbb{H})=\tilde{\tau}_p(\mathbb{H})$.

Para provarmos a segunda parte do item (i), suponhamos que existam constantes C e s tais que

$$||\mathbb{H}(p,k)||\leq Ce^{sk},$$

onde $p=f^k(p)$ é um ponto periódico qualquer de f com período k.

Assim, $s>\frac{1}{k}\log||\mathbb{H}(p,k)||-\frac{\log C}{k}$. Logo, tomando o supremo sobre todo os pontos periódicos p e fazendo o $\limsup$ quando $k\to\infty$, temos que

$$s>\log\tilde{\tau}_p(\mathbb{H})=\log\tilde{\tau}(\mathbb{H})=\tilde{\lambda}(\mathbb{H})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_n.$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq (s+\varepsilon)n$, para todo $n \geq N$. Assim, para todo $x \in X$ e $n \geq N$ obtemos

$$\log ||\mathbb{H}(x,n)|| \leq \sup_{x \in X} \log ||\mathbb{H}(x,n)|| = a_n \leq (s+\varepsilon)n,$$

e portanto, $||\mathbb{H}(x,n)|| \leq e^{(s+\varepsilon)n}$, para todo $x \in X$ e $n \geq N$. Definimos agora a constante $C_\varepsilon = \max_{1 \leq n < N} \max_{x \in X} ||\mathbb{H}(x,n)||$. Afirmamos que $||\mathbb{H}(x,n)|| \leq C_\varepsilon e^{(s+\varepsilon)n}$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Para justificar isso, note que $s > \tilde{\lambda}(\mathbb{H}) \geq \lambda_+(\mathbb{H},\mu) \geq 0$ e assim, $e^{(s+\varepsilon)n} \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $C_\varepsilon \geq \max_{1 \leq n < N} ||\mathbb{H}(0,n)|| = 1$.

A prova do item (ii) pode ser obtida de modo similar ao apresentado na justificativa do item (i). A fim de contribuir com a fluidez do texto, apenas apresentaremos as adaptações necessárias. Denotamos neste momento

$$\kappa(Q) = \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} Q(x,n)^{\frac{1}{n}} \text{ e } \kappa_p(Q) = \limsup_{k \to \infty} \sup_{p = f^k(p) \in X} Q(p,k)^{\frac{1}{k}}.$$

Além disso, seja o cociclo $q_n(x) = \log Q(x,n) = \log ||\mathbb{H}(x,n)|| + \log ||\mathbb{H}(x,n)^{-1}||$. Temos que $q_n(x)$ é um cociclo subaditivo sobre f e assim, segue que

$$\tau(Q,\mu) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} q_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log Q(x,n) = \lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \lambda_-(\mathbb{H},\mu).$$

Observe agora que a sequência $q_n = \sup_{x \in X} q_n(x)$ é subaditiva e então, temos que o limite a seguir existe

$$\tau(Q) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} q_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} q_n(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \left(\lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \lambda_-(\mathbb{H},\mu)\right),$$

onde a última igualdade é válida pela expressão dada em (2.59). De modo similar ao caso anterior, pode-se mostrar que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \left(\lambda_+(\mathbb{H},\mu) - \lambda_-(\mathbb{H},\mu)\right) \leq \sup_{p = f^k(p) \in X} \frac{1}{k} \log Q(p,k).$$

Dessa forma, novamente usando argumentos similares ao caso anterior

$$\log \kappa(Q) = \tau(Q) \leq \sup_{p = f^k(p) \in X} \frac{1}{k} \log Q(p,k),$$

e assim, podemos concluir que $\kappa(Q) = \kappa_p(Q)$.

Para provar a segunda parte do item (ii), note que para todo $n \geq 0$ e $x \in X$, para provar a estimativa $Q(x,n) \leq \tilde{C}_\varepsilon e^{(s+\varepsilon)n}$ basta repetir a ideia utilizada na justificativa do item

(i). Agora para $n < 0$ e $x \in X$, observe que

$$Q(x,-n) = ||\mathbb{H}(x,-n)|| \cdot ||\mathbb{H}(x,-n)^{-1}|| = ||\mathbb{H}(f^{-n}(x),n)^{-1}|| \cdot ||\mathbb{H}(f^{-n}(x),n)|| = Q(f^{-n}(x),n).$$

Logo, temos que $\sup_{x\in X} Q(x,-n)^{\frac{1}{|n|}} = \sup_{x\in X} Q(f^{-n}(x),n)^{\frac{1}{|n|}} = \sup_{x\in X} Q(x,n)^{\frac{1}{|n|}}$, pois f é homeomorfismo. Portanto, podemos concluir que vale também o item (ii) da proposição.

$\square$

Como $\log \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} ||\mathbb{H}(x,n)||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \log ||\mathbb{H}(x,n)||^{\frac{1}{n}}$, pela proposição 2.4 temos que

$$\tilde{\lambda}(\mathbb{H}) = \limsup_{p\to\infty} \sup_{p=f^k(p)\in X} \log ||\mathbb{H}(p,k)||^{\frac{1}{k}},$$

e então, a taxa de crescimento exponencial do cociclo $\mathbb{H}$ é dado em termos dos pontos periódicos de f.

Capítulo 3

Shift com longa memória

Nesse capítulo introduziremos uma nova classe de *subshifts* em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que são sequências infinitas formadas por 0's e 1's, cuja principal propriedade é que suas palavras são construídas a partir de uma restrição sobre a quantidade de 1's. Mais precisamente, a partir de um parâmetro $p_c \in [0,1]$, as transições do elemento 1 para 0 ou 1 dependerão do valor da densidade de 1's comparado ao valor p_c. Tal conjunto será denotado por $P(p_c)$ e chamado de **frequency shift**.

Veremos nas Seções 3.1 e 3.2 algumas propriedades e caracterizações desse subconjunto $P(p_c)$. Após, na Seção 3.3 mostraremos que tal espaço simbólico não será invariante pela aplicação *shift* σ quando $p_c \in (0,1)$ e então, não é possível definir o conceito de entropia topológica para o sistema dinâmico $(P(p_c),\sigma)$. No entanto, definiremos nesta seção o conceito de entropia das palavras sobre esse conjunto e mostraremos que ela é não-crescente com respeito ao parâmetro p_c. Nas Subseções 3.3.1 e 3.3.2 daremos exemplos do cálculo da entropia das palavras nos casos em que $p_c = \frac{k}{k+1}$, para todo $k \geq 1$.

Posteriormente, na Seção 3.4, a partir do subconjunto $P(p_c)$ definiremos um novo subconjunto, que será denotado por $\Sigma(p_c)$, sendo este invariante sob a aplicação *shift*. Além disso, mostraremos que para $p_c \in \{0,1\}$ tal espaço será um *subshift* do tipo finito, enquanto para todo $p_c \in (0,1)$ tal conjunto não será um *subshift* do tipo finito. Por fim, na seção 3.5 trataremos sobre a entropia topológica do sistema dinâmico $(\Sigma(p_c),\sigma)$. Mostraremos que é possível obter uma cota inferior para entropia topológica a fim de garantir que a mesma seja positiva.

Salientamos que os resultados obtidos até o momento desse trabalho são parciais.

3.1 O subconjunto $P(p_c)$

Fixado um inteiro $n \geq 1$ qualquer, considere uma palavra finita $x = x_1x_2...x_n$ de comprimento n formada por uma quantidade M de 0's e N de 1's, com $M \geq 0$ e $N \geq 0$ inteiros tais que $0 \neq M + N = n$. Definimos a densidade de 1's em x pelo número $\delta_1(x) = \frac{N}{M+N} = \frac{N}{n}$, isto é, a razão entre a quantidade de 1's na palavra x sobre o tamanho da palavra. Por exemplo, a palavra 0111010011 possui densidade $\delta_1 = \frac{3}{5}$. Observe que, a densidade $\delta_1(x)$ é sempre um número racional e ainda $0 \leq \delta_1(x) \leq 1$, para qualquer palavra finita x.

Na sequência definiremos o conjunto $P(p_c)$ a partir de suas restrições sobre as transições. Observe que, para construir uma palavra que pertence ao conjunto que será definido, sempre que tivermos um elemento 1, precisamos analisar a quantidade de 1's do bloco inicial da palavra até o elemento analisado, ou seja, cada transição carrega a memória da densidade de 1's desde o início da palavra.

Definição 3.1.1. *Denotando por $\delta_1^k(\underline{x})$ a densidade de 1's na palavra $\underline{x} = x_1x_2x_3... \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ até o k-ésimo elemento, definimos o* ***frequency shift*** *como o subconjunto $P(p_c) \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, para qualquer $p_c \in [0,1]$, formado pelas sequências $\underline{x}$ que satisfazem:*

- *se $x_i = 0$, então $x_{i+1} \in \{0,1\}$, para qualquer $i \geq 1$;*
- *se $x_i = 1$, então $x_{i+1} = 0$ quando $\delta_1^i(\underline{x}) > p_c$ e $x_{i+1} = 1$ quando $\delta_1^i(\underline{x}) \leq p_c$.*

Observação 3.1.2. *De modo informal, podemos entender o conjunto $P(p_c)$ do seguinte modo: fixado $p_c \in [0,1]$ qualquer, o conjunto $P(p_c)$ é formado por todas as palavras $\underline{x}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ que satisfazem as seguintes condições*

(i) *as transições $0 \to 0$ e $0 \to 1$ são livres;*

(ii) *a transição $1 \to 1$ ocorre se a densidade de 1' do bloco formado a partir do primeiro elemento de $\underline{x}$ até o elemento 1 analisado, é menor ou igual a p_c ;*

(iii) *a transição $1 \to 0$ ocorre se a densidade de 1's do bloco formado a partir do primeiro elemento de $\underline{x}$ até o elemento 1 analisado, é maior que p_c.*

Dessa forma, para verificarmos se um elemento $\underline{x}$ pertence a $P(p_c)$, para $p_c \in [0,1]$, temos de olhar desde o primeiro elemento de $\underline{x}$ e verificar se são satisfeitas as condições de transição sobre a densidade de 1's.

Exemplo 3.1.3. *Note que $\underline{x} = 0110101... = 011(01)^\infty \in P(\frac{1}{2})$.*

Exemplo 3.1.4. *Temos que $\underline{x} = 10101010... = (10)^\infty \in P(\frac{1}{3})$.*

Exemplo 3.1.5. *Para qualquer $k \geq 1$ fixo, considere* $\underline{x} = \underbrace{0...0}_{3k}\underbrace{1...1}_{4k}10^{\infty} \in P(\frac{4}{7})$.

Diremos que uma palavra finita ou infinita é **admissível** em $P(p_c)$ se a palavra satisfaz as condições de restrição dadas por p_c, sendo que a análise das restrições deve sempre ser tomada a partir do primeiro elemento da sequência. É importante ressaltar que $P(p_c)$ contém somente palavras infinitas. No entanto, para verificarmos que uma palavra $\underline{x} = x_1x_2x_3...$ pertence a $P(p_c)$ devemos proceder do seguinte modo: quando houver um elemento $x_j = 1$, considere o bloco finito $x = x_1x_2....x_j$ de comprimento j. Se o elemento $x_{j+1} = 0$, então densidade δ_1 de x precisa ser maior do que p_c; se $x_{j+1} = 1$, então a densidade δ_1 de x deve ser menor ou igual a p_c. É fácil ver que palavra 0^{∞} é admissível em $P(p_c)$ para todo $p_c \in [0, 1]$.

Dessa forma, a admissibilidade de uma palavra infinita em $P(p_c)$ implica que ela pertence a $P(p_c)$. E a verificação dessa admissibilidade deve ser realizada em todos os blocos finitos inicias da palavra com final 1. Quando falamos em blocos inicias, estamos nos referindo aos blocos cujo primeiro elemento do bloco é também o primeiro elemento da palavra.

Temos dois casos particulares de conjuntos $P(p_c)$ as quais chamaremos de **casos limite**: quando $p_c = 0$ ou $p_c = 1$. Tais casos estão descritos abaixo.

Exemplo 3.1.6. *Dada uma palavra $\underline{x} \in P(0)$ qualquer, com $\underline{x} \neq 0^{\infty}$. Seja $j \geq 1$ o menor inteiro tal que $x_j = 1$. Então, o bloco inicial $B = x_1x_2...x_j$ de $\underline{x}$ terá densidade $\delta_1^j(\underline{x}) > 0 = p_c$. Assim, o elemento x_{j+1} deve ser um 0. Note que isso vai ocorrer para qualquer elemento $x_k = 1$, ou seja, quando tivermos um elemento 1, valerá apenas a transição $1 \to 0$. Desse modo, $P(0)$ é o conjunto de todas as palavras cujo bloco 11 é proibido. Esse subconjunto é um subshift do tipo finito e conhecido como **Golden Mean Shift**.*

Exemplo 3.1.7. *Agora se considerarmos $\underline{x} \in P(1)$, com $\underline{x} \neq 0^{\infty}$, uma palavra qualquer, seja $j \geq 1$ um inteiro tal que $x_j = 1$. Assim, o bloco inicial $B = x_1x_2...x_j$ de $\underline{x}$ terá a densidade de 1's satisfazendo $\delta_1^j(\underline{x}) \leq 1 = p_c$, então a única transição válida para o elemento 1 é $1 \to 1$. Sendo assim, nesse caso teremos 10 como bloco proibido em $P(1)$. Esse conjunto é também um subshift do tipo finito composto pelas sequências $0^{\infty}, 1^{\infty}$ e pelas sequências compostas por uma quantidades k de 0's seguidos de infinitos 1's.*

Na sequência, buscaremos caracterizar as sequências dos subconjuntos $P(p_c)$, para todo $p_c \in (0, 1)$, com o objetivo de compreender mais esses novos conjuntos. Convencionamos como notação que $\underbrace{0...0}_{k}$ significa que esse bloco é composto por uma quantidade k de 0's.

Inicialmente, fixado $p_c \in (0, 1)$, consideramos sequências $\underline{x} \in P(p_c)$ da forma

$$\underline{x} = \underbrace{0\ldots0}_{m_1}\underbrace{1\ldots1}_{n_1}\underbrace{0\ldots0}_{m_2}\underbrace{1\ldots1}_{n_2}\ldots, \tag{3.1}$$

onde $m_i, n_i \geq 1$ são inteiros, para todo $i \geq 1$, ou seja, formada por blocos de 0's e 1's consecutivos. Como as transições $0 \to 0$ e $0 \to 1$ são livres, podemos escolher quaisquer valores para m_i e assim, iremos determinar os valores n_i em função dos valores m_i e do valor crítico p_c, para todo $i \geq 1$. Ou seja, estamos sempre assumindo que possamos colocar qualquer quantidade finita de 0's em uma palavra de $P(p_c)$, no entanto a quantidade de 1's vai sempre depender da quantidade de 0's escolhidas, bem como do parâmetro p_c.

Para obter as expressões para as quantidades de 1's, consideremos o seguinte lema técnico.

Lema 3.1.8. *Dados números $a, b > 0$ quaisquer temos que $\frac{a}{a+b} < \frac{a+1}{a+b+1}$.*

Demonstração. Suponha que existam $a, b > 0$ tais que $\frac{a}{a+b} \geq \frac{a+1}{a+b+1}$. Assim,

$$a^2 + ab + a \geq a^2 + a + ab + b,$$

e daí, obtemos que $b \leq 0$, o que é uma contradição.

$\square$

Fixamos $p_c \in (0,1)$ qualquer e consideremos uma sequência $\underline{x}$ da forma (3.1). Iniciaremos analisaremos a admissibilidade do primeiro bloco de 0's e 1's, que é $\underbrace{0\ldots0}_{m_1}\underbrace{1\ldots1}_{n_1}$. Para isso, precisamos que

$$\frac{1}{m_1+1} \leq p_c, \frac{2}{m_1+2} \leq p_c, \ldots, \frac{n_1-1}{m_1+n_1-1} \leq p_c$$

e

$$\frac{n_1}{m_1+n_1} > p_c.$$

Sendo assim, pelo Lema 3.1 basta analisarmos as seguintes inequações

$$\frac{n_1-1}{m_1+n_1-1} \leq p_c < \frac{n_1}{m_1+n_1},$$

o que equivale a escrever

$$n_1 - 1 \leq \beta m_1 < n_1,$$

onde $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$. Denotando o maior inteiro menor ou igual a x por $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, obtemos que $n_1 - 1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor$ e assim, para qualquer $p_c \in (0,1)$, temos

$$n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1. \tag{3.2}$$

Note que a expressão de n_1 é válida para todo $p_c \in (0,1)$. Agora, para obtermos uma expressão para n_2, precisamos analisar até o segundo bloco de 0's e 1's, isto é, devemos olhar para o seguinte bloco

$$\underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}\underbrace{0...0}_{m_2}\underbrace{1...1}_{n_2}.$$

Logo, a expressão de n_2 além de depender de m_2 e de p_c, dependerá também de m_1 e de n_1 (o qual depende de m_1 e p_c) obtido em (3.2). Recursivamente, para obtermos expressões para n_i, para $i > 2$, vamos ter de levar em consideração m_i, p_c e ainda, todas as expressões dos n_j, com $1 \leq j < i$.

Então para determinarmos as expressões dos inteiros n_i em função dos inteiros m_i e do parâmetro p_c para uma palavra $\underline{x}$ dada em (3.1), dividiremos em dois casos: $p_c \geq \frac{1}{2}$ e $p_c < \frac{1}{2}$. Escrevendo $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$, tal divisão deve-se essencialmente pelo fato que para $p_c \geq \frac{1}{2}$ teremos $\beta \geq 1$ e então βm_i será sempre maior igual a 1, para qualquer valor de m_i; enquanto para $p_c < \frac{1}{2}$ tem-se $\beta < 1$ e daí, βm_i pode ser maior ou menor que 1. Note que pela expressão de n_1 dada em (3.2), fica clara a dependência que os inteiros n_i terão de β e precisamos garantir que todo n_i seja sempre um inteiro maior ou igual a 1.

Teorema 3.1.9. *Para cada $p_c \in [\frac{1}{2}, 1)$, temos para todo $k \geq 2$ que*

$$\begin{aligned} n_k \;=\; & \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\ & - \lfloor \sum_{i=1}^{k-2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$, $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1$ e $m_i \geq 1$ são inteiros quaisquer, para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Fixe $p_c \in [\frac{1}{2}, 1)$ qualquer. Para $k = 2$, analisaremos o bloco $\underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}\underbrace{0...0}_{m_2}\underbrace{1...1}_{n_2}$. Pelas condições de admissibilidade e pelo Lema 3.1, temos que

$$\frac{n_1 + n_2 - 1}{m_1 + n_1 + m_2 + n_2 - 1} \leq p_c < \frac{n_1 + n_2}{m_1 + n_1 + m_2 + n_2},$$

o que é equivalente a

$$n_1 + n_2 - 1 \leq \beta(m_1 + m_2) < n_1 + n_2. \tag{3.4}$$

Como $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1$, obtemos da expressão (3.4) que

$$\lfloor \beta m_1 \rfloor + 1 + n_2 - 1 \leq \beta(m_1 + m_2) < \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1 + n_2,$$

e assim, segue que

$$n_2 + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 \leq \beta m_2 < n_2 + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 + 1. \tag{3.5}$$

Escolhemos então $n_2 = \lfloor \beta(m_1 + m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor$. Note que n_2 é inteiro e ainda $n_2 \geq 1$ pois, como $\lfloor x \rfloor \leq x$, para qualquer $x > 0$ real, temos que

$$\beta(m_1 + m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \geq \beta m_2 \geq 1,$$

uma vez que $m_2 \geq 1$ e $\beta \geq 1$ (já que tomamos $p_c \geq \frac{1}{2}$). Sendo assim, n_2 está bem definido.

Além disso, novamente pelo fato que $\lfloor x \rfloor \leq x$, para qualquer $x > 0$ real, obtemos

$$n_2 + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 = \lfloor \beta(m_1 + m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 \leq \beta m_2. \tag{3.6}$$

Por outro lado, como $x < \lfloor x \rfloor + 1$, para qualquer $x > 0$ real, segue que

$$n_2 + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 + 1 = \lfloor \beta(m_1 + m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 + 1 > \beta m_2. \tag{3.7}$$

Logo, pelas inequações dadas em (3.6) e (3.7), obtemos que a expressão (3.5) é verdadeira para $n_2 = \lfloor \beta(m_1 + m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor$.

Fixado $k \geq 2$, vamos assumir como hipótese de indução que a expressão (3.3) vale para todo $2 \leq l \leq k$ fixo. Provaremos para o caso $k + 1$. De fato, pelas condições de admissibilidade temos,

$$\frac{\sum_{i=1}^{k+1} n_i - 1}{\sum_{i=1}^{k+1} (m_i + n_i) - 1} \leq p_c < \frac{\sum_{i=1}^{k+1} n_i}{\sum_{i=1}^{k+1} (m_i + n_i)},$$

sendo que tal expressão é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i - 1 \leq \sum_{i=1}^{k+1} \beta m_i < \sum_{i=1}^{k+1} n_i. \tag{3.8}$$

Usando que $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1$ e as expressões dadas em (3.3) para todo $2 \leq l \leq k$, obtemos de (3.8) que

$$\begin{aligned}
& n_{k+1}+\lfloor\beta m_1\rfloor+\lfloor\beta(m_1+m_2)-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor+... \\
+ \quad & \lfloor\sum_{i=1}^{k}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{k-1}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-...-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor...\rfloor\rfloor-\sum_{i=1}^{k}\beta m_i \\
\leq \quad & \beta m_{k+1} \qquad (3.9)\\
< \quad & n_{k+1}+\lfloor\beta m_1\rfloor+\lfloor\beta(m_1+m_2)-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor+... \\
+ \quad & \lfloor\sum_{i=1}^{k}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{k-1}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-...-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor...\rfloor\rfloor-\sum_{i=1}^{k}\beta m_i+1.
\end{aligned}$$

Considere $n_{k+1}=\lfloor\sum_{i=1}^{k+1}\beta m_i-\lfloor\sum_{i=1}^{k}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{k-1}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor...-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor...\rfloor\rfloor\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{k-1}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor...-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor...\rfloor\rfloor-...-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor$, onde simplesmente tomamos a expressão (3.3) com $k+1$. Note que n_{k+1} é um número inteiro. Além disso, já vimos para o caso $k=2$ que

$$\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\geq 1. \qquad (3.10)$$

Assim, $n_2=\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor\geq 1$. Agora, usando que $\lfloor x\rfloor\leq x$, para qualquer x real e ainda (3.10), decorre que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor &= \beta m_3+\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor \\
&\geq \beta m_3+1 \\
&\geq 1. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Logo, $n_3=\lfloor\sum_{i=1}^{3}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor-\lfloor\sum_{i=1}^{2}\beta m_i-\lfloor\beta m_1\rfloor\rfloor\rfloor\geq 1$. Novamente utilizando que $\lfloor x \rfloor \leq x$, para qualquer x real e agora por (3.11), segue que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{4} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \rfloor \\
= \ & \beta m_4 + \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \rfloor \\
\geq \ & \beta m_4 + \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \\
\geq \ & \beta m_4 + 1 \\
\geq \ & 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $n_4 = \lfloor \sum_{i=1}^{4} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \rfloor \rfloor \geq 1$. Utilizando um processo de recorrência, vamos assumir que $n_k \geq 1$. E assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k+1} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\
& - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \\
= \ & \beta m_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\
& - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \\
\geq \ & \beta m_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \\
\geq \ & \beta m_{k+1} + 1 \geq 1.
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que $n_{k+1} \geq 1$. Obtemos assim, que n_{k+1} está bem definido.

Agora, observe que como $\lfloor x \rfloor < x$, para todo $x > 0$ real segue que

$$\begin{aligned}
& n_{k+1} + \lfloor \beta m_1 \rfloor + \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + ... \\
& + \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - \sum_{i=1}^{k} \beta m_i \\
= \; & \sum_{i=1}^{k+1} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\
& - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \\
& + \lfloor \beta m_1 \rfloor + \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + ... \\
& + \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - \sum_{i=1}^{k} \beta m_i \\
\leq \; & \beta m_{k+1}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $x < \lfloor x \rfloor + 1$, para qualquer $x > 0$ real, obtemos que

$$\begin{aligned}
& n_{k+1} + \lfloor \beta m_1 \rfloor + \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + ... \\
& + \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - \sum_{i=1}^{k} \beta m_i + 1 \\
= \; & \sum_{i=1}^{k+1} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\
& - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \\
& + \lfloor \beta m_1 \rfloor + \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + ... \\
& + \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - \sum_{i=1}^{k} \beta m_i + 1 \\
> \; & \beta m_{k+1}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Combinando as expressões (3.12) e (3.13) decorre que as inequações dadas em (3.20) são válidas. Logo, concluímos que o resultado é válido para qualquer $k \geq 2$.

$\square$

Pôde-se obter uma única expressão para cada n_k quando $p_c \geq \frac{1}{2}$ essencialmente pelo fato que o produto βm_i, onde $m_i \geq 1$ é um inteiro e $1 \leq i \leq k$, é sempre maior ou igual a 1. Agora quando considerarmos o caso $p_c < \frac{1}{2}$, podemos ter que o produto βm_i seja maior que 1 ou menor que 1, e ainda, ao somar algum valor a esse produto ele também pode variar acima ou abaixo de 1. Isso acabará gerando algumas possibilidades diferentes para os inteiros n_i no próximo caso, sendo que as expressões acabam dependendo das escolhas dos outros valores envolvidos.

Corolário 3.1.10. *Para qualquer $k \geq 1$, considere $p_c = \frac{k}{k+1}$. Então $n_1 = km_1 + 1$ e $n_j = km_j$, para todo $j \geq 2$.*

Demonstração. Fixamos um inteiro $k \geq 1$ qualquer. Caso $p_c = \frac{k}{k+1}$, teremos que

$$\beta = \frac{p_c}{1-p_c} = \frac{\frac{k}{k+1}}{1-\frac{k}{k+1}} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{k+1}} = k.$$

Assim, nesse caso segue que:

$$n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1 = km_1 + 1.$$

$$n_2 = \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor = k(m_1+m_2) - km_1 = km_2.$$

$$n_3 = \lfloor \sum_{i=1}^{3} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \rfloor = \sum_{i=1}^{3} km_i - km_1 - \sum_{i=1}^{2} km_i + km_1 = km_3.$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
n_j &= \lfloor \sum_{i=1}^{j} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{j-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{j-2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\
&\quad - \lfloor \sum_{i=1}^{j-2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor \\
&= \sum_{i=1}^{j} km_i - \sum_{i=1}^{j-1} km_i + km_1 + \sum_{i=1}^{j-2} km_i - km_1 - ... - \sum_{i=1}^{2} km_i + km_1 - \sum_{i=1}^{j-2} km_i + km_1 \\
&\quad - ... + \sum_{i=1}^{2} km_i + km_1 - ... - \sum_{i=1}^{2} km_i - km_1 + km_1 \\
&= km_j.
\end{aligned}$$

$\square$

Para o caso $p_c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ainda não conseguimos justificar uma expressão para os inteiros n_i em função dos inteiros m_i e de β, para todo $i \geq 1$. Esse caso é mais difícil pois, dependendo da escolha de p_c e de algum inteiro $m_i \geq 1$, podemos ter $\lfloor \beta m_i \rfloor \geq 1$ ou $\lfloor \beta m_i \rfloor < 1$, gerando assim, mais possibilidades de descrever os inteiros n_i. No entanto, foi possível determinar expressões até para o inteiro n_4 e assim, conjecturamos o resultado a seguir.

Conjectura 1. *Seja $p_c \in (0, \frac{1}{2})$ qualquer. Considere $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$ e $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1$. Então para todo $k \geq 2$, temos que n_k assume uma única possibilidade abaixo a qual depende da escolha de p_c e dos m_i, para $1 \leq i \leq k$:*
(i) Existe algum $0 \leq j \leq k-2$ tal que

$$n_k = \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k-(j+1)} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-(j+2)} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor$$
$$- \lfloor \sum_{i=1}^{k-(j+2)} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - j.$$

(ii) $n_k = 1$.

Observe que uma sequência em $\underline{x} \in P(p_c)$ também pode ser escrita da seguinte forma

$$\underline{x} = 1 \underbrace{0...0}_{m_1} \underbrace{1...1}_{n_1} \underbrace{0...0}_{m_2} \underbrace{1...1}_{n_2} ..., \tag{3.14}$$

onde $m_i, n_i \geq 1$ são inteiros. Não podemos ter sequências em $P(p_c)$ para $p_c \in (0,1)$ iniciando com dois ou mais 1's seguidos pois, teríamos um bloco inicial com densidade $\delta_1 = 1 > p_c$ mas, com a transição $1 \to 1$. Desse modo, as palavras em $P(p_c)$ podem iniciar com apenas um único elemento 1.

Nos resultados a seguir, iremos novamente expressar cada um dos inteiros n_i em função dos inteiros m_i, para todo $i \geq 1$, e também do parâmetro p_c, agora para palavras dadas da forma em (3.14).

Teorema 3.1.11. *Para cada $p_c \in [\frac{1}{2}, 1)$, considerando $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$, se $\underline{x} \in P(p_c)$ é da forma (3.14) então $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor$ e para todo $k \geq 2$*

$$\begin{aligned} n_k \; = \; & \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\ & - \lfloor \sum_{i=1}^{k-2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $m_i \geq 1$ são inteiros quaisquer.

Demonstração. Fixa $p_c \in [\frac{1}{2}, 1)$ qualquer, então $\beta \geq 1$. Nesse caso, olhando para o bloco

$1\underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}$, pelas condições de admissibilidade temos

$$\frac{n_1}{m_1+n_1} \leq p_c < \frac{n_1+1}{m_1+n_1+1},$$

o que é equivalente a expressão

$$n_1 \leq \beta m_1 < n_1 + 1. \tag{3.16}$$

Logo, $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor$ está bem definido pois, $\beta m_1 \geq 1$, e satisfaz as desigualdades dadas em (3.16). Olhando para o bloco $1\underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}\underbrace{0...0}_{m_2}\underbrace{1...1}_{n_2}$, pelas condições de admissibilidade segue que

$$\frac{n_1+n_2}{m_1+n_1+m_2+n_2} \leq p_c < \frac{n_1+n_2+1}{m_1+n_1+m_2+n_2+1},$$

o que é equivalente a

$$n_1 + n_2 \leq \beta(m_1+m_2) < n_1+n_2+1. \tag{3.17}$$

Como $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor$, obtemos da expressão (3.17) que

$$n_2 + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 \leq \beta m_2 < n_2 + \lfloor \beta m_1 \rfloor - \beta m_1 + 1. \tag{3.18}$$

Observe que a expressão (3.18) é a mesma que a dada em (3.5), então pela demonstração da Proposição 3.3 temos $n_2 = \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor$.

Como hipótese de indução, assumiremos agora que fixado $k \geq 2$ a expressão (3.15) para todo n_j, com $2 \leq j \leq k$. Então para $k+1$ temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{k+1} n_i - 1}{\sum_{i=1}^{k+1}(m_i+n_i) - 1} \leq p_c < \frac{\sum_{i=1}^{k+1} n_i}{\sum_{i=1}^{k+1}(m_i+n_i)},$$

o qual podemos reescrever do seguinte modo abaixo

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i - 1 \leq \sum_{i=1}^{k+1} \beta m_i < \sum_{i=1}^{k+1} n_i. \tag{3.19}$$

Usando que $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor$ e pela hipótese de indução, obtemos que

$$\begin{aligned}
& n_{k+1} + \lfloor \beta m_1 \rfloor + \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + ... \\
+ & \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - \sum_{i=1}^{k} \beta m_i \\
\leq & \beta m_{k+1} \\
< & n_{k+1} + \lfloor \beta m_1 \rfloor + \lfloor \beta(m_1+m_2) - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor + ... \\
+ & \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-1} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - \sum_{i=1}^{k} \beta m_i + 1,
\end{aligned}$$

que é a mesma expressão de (3.20) dada na Proposição 3.3.

□

Corolário 3.1.12. *Fixado um inteiro $k \geq 1$ qualquer, considerando $p_c = \frac{k}{k+1}$, temos que $n_1 = km_1$, e $n_j = km_j$, para todo $j \geq 2$.*

Demonstração. Segue de modo similar a prova do Corolário 3.1.10. □

Novamente para o caso $p_c \in (0, \frac{1}{2})$, não conseguimos obter uma expressão para os inteiros n_i. No entanto, na sequência conjecturamos expressões para esses valores inteiros.

Conjectura 2. *Seja $p_c \in (0, \frac{1}{2})$ qualquer. Considere $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$ e $n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor$. Então para todo $k \geq 2$, temos que n_k assume uma única possibilidade abaixo a qual depende da escolha de p_c e dos m_i, para $1 \leq i \leq k$:*
(i) Existe algum $0 \leq j \leq k-2$ tal que

$$\begin{aligned}
n_k = & \lfloor \sum_{i=1}^{k} \beta m_i - \lfloor \sum_{i=1}^{k-(j+1)} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor \sum_{i=1}^{k-(j+2)} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor \rfloor \\
- & \lfloor \sum_{i=1}^{k-(j+2)} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor - \lfloor ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor ... \rfloor \rfloor - ... - \lfloor \sum_{i=1}^{2} \beta m_i - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - \lfloor \beta m_1 \rfloor \rfloor - j.
\end{aligned}$$

(ii) $n_k = 1$.

Consideramos agora os seguintes conjuntos

$$P_1(p_c) = \{\underline{x} \in P(p_c) : \underline{x} \text{ é dado em } (3.1)\},$$

$$P_2(p_c) = \{\underline{x} \in P(p_c) : \underline{x} \text{ é dado em } (3.14)\}.$$

Então, para $p_c \in [\frac{1}{2}, 1)$, temos que $P(p_c)$ é formado pelas palavras $\underline{x}$ tais que $\underline{x} \in P_1(p_c) \cup P_2(p_c)$ ou $\underline{x}$ é a concatenação de um bloco inicial finito de uma palavra de $P_1(p_c) \cup P_2(p_c)$ com a palavra 0^∞ (é importante destacar que a palavra 0^∞ também é um elemento de $P(p_c)$). Dessa forma, conseguimos caracterizar todos os elementos de $P(p_c)$, para todo $p_c \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Na Seção 3.3 mostraremos que o conjunto $P(p_c)$ não é invariante pela aplicação *shift*, para todo $p_c \in (0, 1)$. Por isso, a fim de termos essa propriedade, na Seção 3.4 definiremos a partir de $P(p_c)$ um novo subconjunto.

3.2 Algumas propriedades de $P(p_c)$

Neste momento apresentaremos algumas propriedades presentes no conjunto $P(p_c)$ para alguns valores de p_c. Para fixarmos a notação, para qualquer $x > 0$ real, definimos $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$, ou seja, $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x.

Lema 3.2.1. *Para qualquer $p_c \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ o número máximo de 1's em uma palavra finita e admissível de tamanho n em $P(p_c)$ é $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista uma palavra finita $x = x_1 x_2 ... x_n$ de comprimento n com o número máximo de 1's igual a $l \neq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Primeiramente, assumiremos que $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq l \leq n$. Então, como supomos que o número de 1's é maior do que a metade da quantidade de elementos da palavra, existe um bloco B_k de comprimento k formado apenas por 1's, onde $2 \leq k \leq l$. Caso B_k seja o bloco final de $x = x_1 x_2 ... x_{k-1} B_k$, como $x \leq \lceil x \rceil$, teremos que

$$\frac{l-1}{n-1} > \frac{l-1}{n} \geq \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \geq \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, acabamos de mostrar que o último elemento de x deve ser 0, no entanto como assumimos que B_k é o bloco final e ele é formado apenas por 1's, obtemos uma contradição.

Agora, se B_k não é o bloco final de x, vamos considerar uma palavra finita $\tilde{x} = x_1 x_2 ... x_{\tilde{n}}$ com comprimento $\tilde{n} < n$ terminando em B_k mas, sendo B_k o último bloco de tamanho maior ou igual a 2 de x. Note que $\tilde{n} = n - M - N$, onde M é a quantidade de 0's e N é a quantidade de 1's que foram retiradas do final de x para obtermos $\tilde{x}$. Observe que $N \leq M$ pois, caso contrário haveria outro bloco de tamanho pelo menos 2 formado apenas por 1's e assumimos que o bloco final de $\tilde{x}$ é o último onde isso ocorre. Temos que $\tilde{x}$ possui $l - N$ quantidade de 1's e assim:

$$\frac{l-N-1}{\tilde{n}-1} = \frac{l-N-1}{n-(M+N)-1} > \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - N}{n-(M+N)}.$$

Afirmamos que $\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - N}{n-(M+N)} \geq \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}$ pois, se $\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - N}{n-(M+N)} < \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}$ teríamos que

$$(M+N)\lceil \frac{n}{2} \rceil < nN,$$

e como $n - \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, obtemos que

$$M\lceil \frac{n}{2} \rceil < N\left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil\right) \leq N\lceil \frac{n}{2} \rceil$$

o que implica que $M < N$, uma contradição já que acima comentamos que deve ocorrer $N \leq M$. Dessa forma

$$\frac{l-N-1}{\tilde{n}-1} > \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \geq \frac{1}{2},$$

o que contradiz o fato de o último elemento de $\tilde{x}$ ser um 1. Dessa forma, o número máximo de 1's de uma palavra finita em $P(p_c)$ não pode ser maior do que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Assumimos neste momento que $1 \leq l < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e tomamos o bloco $B_{2l} = \underbrace{10...10}_{2l}$ de comprimento $2l$. Como $l < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, temos que $2l < n$. Caso $l < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, escrevemos $x = B_{2l}1\underbrace{0...0}_{n-2l-1}$ e se $l = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ escolhemos $x = B_{2l}1$, obtemos uma palavra com comprimento n e que possui $l+1$ 1's. Ou seja, sempre que supormos que a quantidade de 1's em uma palavra for um número menor que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, conseguimos construir uma palavra com uma quantidade maior de 1's. Dessa forma, obtemos uma contradição, sendo que isso ocorre por assumirmos que $l < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Portanto, concluímos que o resultado é válido.

$\square$

O próximo lema traz uma caracterização das palavras finitas de comprimento n, para n ímpar, e que possuem a quantidade máxima de 1's.

Lema 3.2.2. *Fixado $p_c \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, todas as palavras finitas e admissíveis de comprimento n em $P(p_c)$, com n ímpar, e que possuem o máximo de 1's, terminam com o elemento* 1.

Demonstração. De fato, pelo Lema 3.2.1 o número máximo de 1's em uma palavra finita de comprimento n é $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, para todo $p_c \in (0, \frac{1}{2}]$. Suponha por contradição que existe uma palavra finita x de comprimento n e com o máximo de números 1's mas, que termina em 0. Então, existe uma palavra finita $\tilde{x}$ de comprimento $n-1$ tal que $x = \tilde{x}0$ e $\tilde{x}$ também tem $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 1's. No entanto, pelo Lema 3.2.1 o número máximo de 1's em $\tilde{x}$ é $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ e ainda, pelo fato de n ser ímpar, temos que $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Dessa forma, x termina em um elemento 1.

$\square$

Observação 3.2.3. *Note que para cada palavra finita de comprimento n com final 0 é possível gerar duas palavras finitas de comprimento $n+1$ pois, as transições $0 \to 0$ e $0 \to 1$ são livres.*

No entanto, se considerarmos uma palavra finita de comprimento n com final 1, vamos gerar apenas uma palavra de comprimento $n+1$ com final 0 ou 1, devido as condições impostas sobre as transições $1 \to 0$ e $1 \to 1$. Então, sempre que tivermos mais palavras com final 0, mais palavras poderemos gerar na próxima geração.

3.3 Entropia das Palavras do Conjunto $P(p_c)$

Note que para qualquer $p_c \in (0,1)$ o conjunto $P(p_c)$ não é invariante pela aplicação *shift* $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. De fato, fixe $p_c \in (0,1)$ qualquer, e considere uma palavra da forma $\underline{x} = \underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}0^{\infty} \in P(p_c)$ tal que $m_i \geq 1$ é um inteiro qualquer. Note que, $\sigma(\underline{x}) = \underbrace{0...0}_{m_1-1}\underbrace{1...1}_{n_1}0^{\infty}$. Se supormos que $\sigma(\underline{x}) \in P(p_c)$, pelas condições de admissibilidade, deve valer que

$$\frac{n_1 - 1}{m_1 + n_1 - 2} \leq p_c < \frac{n_1}{m_1 + n_1 - 1}. \tag{3.20}$$

Desse modo, obtemos a seguinte expressão equivalente a (3.20)

$$n_1 - 1 \leq \beta(m_1 - 1) < n_1. \tag{3.21}$$

A expressão (3.21) nos diz que $n_1 - 1 = \lfloor \beta(m_1 - 1) \rfloor$, isto é, $n_1 = \lfloor \beta(m_1 - 1) \rfloor + 1$. No entanto, vimos na seção 3.1 que pelo fato de $\underline{x}$ ser admissível em $P(p_c)$ que

$$n_1 = \lfloor \beta m_1 \rfloor + 1 > \lfloor \beta(m_1 - 1) \rfloor + 1 = n_1,$$

o que é um absurdo. Logo, $P(p_c)$ não é invariante pela aplicação shift. Dessa forma, não poderemos definir a entropia topológica para $P(p_c)$, com $p_c \in (0,1)$. Vamos considerar então, o conceito de entropia das palavras em $P(p_c)$, o qual difere-se do conceito usual de entropia topológica, no entanto possui objetivo similar: determinar a taxa de crescimento exponencial do número de palavras de $P(p_c)$, mas sem depender de um sistema dinâmico.

Definição 3.3.1. *Para qualquer $p_c \in (0,1)$ denotamos por $A_n(p_c)$ o número de palavras finitas e admissíveis com comprimento n em $P(p_c)$. A* **Entropia das Palavras** *de $P(p_c)$ é dada pelo número*

$$\mathcal{E}(p_c) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log(A_n(p_c))}{n}. \tag{3.22}$$

Observe que o limite sempre existe pois, $A_n(p_c) \geq 1$, para todo $p_c \in (0,1)$, e como cada palavra finita e admissível de comprimento n gera uma ou duas palavras de comprimento $n+1$, temos que a sequência $(A_n(p_c))_{n\in\mathbb{N}}$ é não decrescente e ainda, limitada superiormente por 2^n.

O objetivo nesse momento será mostrar que a entropia das palavras é não-crescente em função do parâmetro p_c. No entanto, antes de provarmos essa afirmação, consideremos alguns comentários e resultados auxiliares.

Observação 3.3.2. *Para qualquer $p_c \in (0,1)$, existe uma única palavra finita de comprimento n admissível em $P(p_c)$ com densidade de 1's nula. É fácil ver que essa palavra é $\underbrace{0...0}_{n}$.*

Observação 3.3.3. *Fixe $p_c \in (0,1)$ qualquer. As palavras admissíveis de comprimento 1 em $P(p_c)$ são 0 e 1. Enquanto, as palavras de comprimento 2 admissíveis em $P(p_c)$ são $00, 01$ e 10. Isto é, as palavras de comprimento até 2 são as mesmas para qualquer subconjunto $P(p_c)$. No entanto, para palavras maiores ou iguais a 3, podemos ter palavras diferentes para $P(p_c)$ com parâmetros distintos. Por exemplo, a palavra 010 é admissível em $P(p_c)$ para $p_c < \frac{1}{2}$, enquanto 011 é admissível em $P(q_c)$ para $q_c \geq \frac{1}{2}$.*

Observação 3.3.4. *Considere dois parâmetros $p_c, q_c \in (0,1)$ tais que $p_c \neq q_c$. A observação 3.3.3 pode ser interpretada de outra forma. Dada uma palavra $\underline{x} = x_1x_2x_3... \in P(p_c)$, temos que existem uma palavra $\underline{y} = y_1y_2y_3... \in P(q_c)$ e um inteiro $j \geq 2$ tais que $\underline{y} \neq \underline{x}$ e $x_i = y_i$, para todo $1 \leq i \leq j$.*

O próximo resultado é bem simples e será utilizado posteriormente para provarmos a monotonicidade da entropia das palavras.

Lema 3.3.5. *Dado um número racional qualquer $r \in (0,1)$, existem inteiros $m, n \geq 1$ tal que $r = \frac{n}{m+n}$.*

Demonstração. De fato, como r é um número racional com $0 < r < 1$, existem inteiros $1 \leq p < q$ tal que $r = \frac{p}{q}$. Tomamos $n = p$. Agora, pelo fato de $n < q$, existe um inteiro $m \geq 1$ satisfazendo $q = n + m$, o que conclui a justificativa do lema.

□

No próximo resultado mostraremos que para parâmetros distintos existem palavras finitas que não são admissíveis em ambos os conjuntos.

Lema 3.3.6. *Para quaisquer $0 < p_c < q_c < 1$ existe uma palavra finita x de comprimento $k \geq 3$ admissível em $P(q_c)$, mas que não é admissível em $P(p_c)$.*

Demonstração. Fixamos $p_c, q_c \in (0,1)$ quaisquer com $p_c < q_c$. Pela densidade dos números racionais no conjunto dos números reais, existe um racional r com $p_c < r \leq q_c$. Pelo Lema 3.3.5, podemos escrever $r = \frac{n}{m+n}$, onde $n, m \geq 1$ são inteiros. Agora, defina $x = \underbrace{0...0}_{m}\underbrace{1...1}_{n+1}$, uma palavra finita de comprimento $k = m + n + 1$. Como $p_c < \frac{n}{m+n} \leq q_c$, obtemos que x é admissível em $P(q_c)$ e não é admissível em $P(p_c)$.

$\square$

Observação 3.3.7. *Como entre dois números quaisquer existem infinitos números racionais, o Lema 3.3.6 nos mostra na realidade que existe uma quantidade infinita de palavras finitas as quais são admissíveis em $P(q_c)$ e não são admissíveis em $P(p_c)$, para quaisquer $p_c, q_c \in (0,1)$ com $p_c < q_c$. Reciprocamente, existem infinitas palavras de comprimento finito que são admissíveis em $P(p_c)$ mas, não são admissíveis em $P(q_c)$, para $p_c < q_c$. De fato, a justificativa dessa afirmação é similar a prova do Lema 3.3.6 no entanto, tomando a palavra $x = \underbrace{0...0}_{m}\underbrace{1...1}_{n}0$.*

No resultado a seguir mostraremos que quando os parâmetros satisfazem $p_c < q_c$, o número de palavras finitas de comprimento n admissíveis em $P(p_c)$ será a maior do que a quantidade de palavras de comprimento n admissíveis em $P(q_c)$. Isso se deverá essencialmente pelo fato de que quanto menor é o valor do parâmetro mais palavras de final 0 podem ser obtidas. Assim, conforme comentado na Observação 3.2.3, usaremos o fato de que palavras com final 0 com um certo comprimento n geram duas palavras de comprimento $n+1$, enquanto as palavras com final 1 de comprimento n geram apenas uma palavra de comprimento $n+1$.

Observação 3.3.8. *Denotaremos por $W_n(p_c)$ o conjunto de todas as palavras finitas admissíveis de comprimento n em $P(p_c)$. Então, $A_n(p_c) = \#W_n(p_c)$, onde $\#W_n(p_c)$ é a cardinalidade do conjunto $W_n(p_c)$.*

Observação 3.3.9. *Dada uma palavra finita $x = x_1 x_2 ... x_k$ de comprimento k e $w_x \in \{0,1\}^l$, para algum $l \geq 1$, então a concatenação entre x e w_x é a palavra xw_x de comprimento $k+l$.*

Proposição 3.3.10. *Dados quaisquer parâmetros $p_c, q_c \in (0,1)$ tais que $p_c < q_c$, temos que existe um inteiro $k \geq 3$ tal que $A_i(p_c) > A_i(q_c)$, para todo $i \geq k$.*

Demonstração. Pela observação 3.3.3 podemos supor que existe um menor inteiro $k_0 \geq 2$ tal que $W_i(p_c) = W_i(q_c)$, para todo $1 \leq i \leq k_0$ e ainda, $W_{k_0+1}(p_c) \neq W_{k_0+1}(q_c)$. Considere

$x = x_1x_2...x_{k_0}$ uma palavra finita qualquer de comprimento k_0 admissível em $W_{k_0}(p_c)$ e $W_{k_0}(q_c)$ mas, usando a notação de concatenação dada na Observação 3.3.9, que satisfaz

$$xx_{k_0+1} \in W_{k_0+1}(q_c) - W_{k_0+1}(p_c) \tag{3.23}$$

para algum $x_{k_0+1} \in \{0, 1\}$. Note que, como as transições do elemento 0 são livres então para que x satisfaça (3.23), ela possui 1 como último elemento.

Afirmamos que (3.23) implica $x_{k_0+1} = 1$. De fato, se tivéssemos $x_{k_0+1} = 0$ então como $xx_{k_0+1} \in W_{k_0+1}(q_c)$, temos que a densidade δ_1 de 1's em x satisfaz $\delta_1 > q_c > p_c$ e assim, valeria que $xx_{k_0+1} \in W_{k_0+1}(p_c) \cap W_{k_0+1}(q_c)$, o que contradiz (3.23). Dessa forma, obtemos que $x1 \in W_{k_0+1}(q_c)$ e então $x0 \in W_{k_0+1}(p_c)$. Desse modo, como a palavra $x0$ gera duas novas palavras admissíveis em $P(p_c)$ de comprimento $k_0 + 2$, à saber $x00$ e $x01$, enquanto $x1$ irá fornecer apenas uma única nova palavra admissível em $P(q_c)$ de comprimento $k_0 + 2$, que pode ser $x10$ ou $x11$ dependendo da densidade de 1's de x. Como a palavra finita x foi tomada qualquer, concluímos que $A_{k_0+2}(p_c) > A_{k_0+2}(q_c)$.

Caso tivéssemos escolhido $xx_{k_0+1} \in W_{k_0+1}(p_c) - W_{k_0+1}(q_c)$, temos que $x_{k_0+1} = 0$ pois, se $x_{k_0+1} = 1$ então a densidade δ_1 de 1's em x satisfaz $\delta_1 \leq p_c < q_c$ e portanto, $xx_{k_0+1} \in W_{k_0+1}(p_c) \cap W_{k_0+1}(q_c)$, o que por sua vez contradiz $xx_{k_0+1} \in W_{k_0+1}(p_c) - W_{k_0+1}(q_c)$. Então novamente vale que $x0 \in W_{k_0+1}(p_c)$ e $x1 \in W_{k_0+1}(q_c)$, e da mesma forma podemos concluir que $A_{k_0+2}(p_c) > A_{k_0+2}(q_c)$.

Afirmamos que $A_i(p_c) > A_i(q_c)$, para todo $i > k_0 + 2$. De fato, fixamos $i > k_0 + 2$ qualquer e vamos escolher um inteiro $k_0 \leq l < i$ tal que existe uma palavra finita y de comprimento l, onde $y \in W_l(p_c) \cap W_l(q_c)$ porém $yy_{l+1} \notin W_{l+1}(p_c) \cap W_{l+1}(q_c)$, sendo que $y_{l+1} \in \{0, 1\}$.

Similarmente ao argumentado no caso anterior, é possível provar que $y0 \in W_{l+1}(p_c)$ enquanto $y1 \in W_{l+1}(q_c)$. Se $l = i - 1$, então y gera a mesma quantidade de palavras em $W_i(p_c)$ e $W_i(q_c)$.Vamos supor então que que $k_0 \leq l < i - 1$. Com a memória da densidade δ_1 de 1's em y, mostraremos que a palavra $y0$ gera mais palavras de comprimento i em $W_i(p_c)$ do que a palavra $y1$ em $W_i(q_c)$, onde $p_c < q_c$.

Para que o número de palavras finitas de comprimento i geradas por w_l1 em $W_i(q_c)$ seja a maior possível, levando em consideração a memória da densidade de 1's de y, assumiremos que cada palavra com final 1 terá sempre densidade de 1's maior do que q_c, e assim, o próximo elemento sempre será 0. Sob essas condições, obteremos que o número de elementos gerados pela palavra $y1$ em $W_i(q_c)$ com a memória da densidade de 1's de y, é dada em termos da sequência de Fibonacci $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_j = a_{j-1} + a_{j-2}$ onde a_{j-1} é a quantidade de palavras com final 0 e a_{j-2} a quantidade de palavras com final 1, para $j \geq 3$. De fato,

- iniciamos com a palavra $y1$ de comprimento $l+1$;

- para palavras de comprimento $l+2$, a fim de obtermos o maior número possível de palavras admissíveis em $W_i(q_c)$ como comentamos acima, temos apenas a palavra $y10$;

- já que as transições $0 \to 0$ e $0 \to 1$ são livres, as palavras de comprimento $l+3$ são $y100$ e $y101$, onde uma palavra possui final 0 e a outra palavra tem final l;

- novamente objetivando obter o maior número possível de palavras em $W_i(q_c)$, para palavras de comprimento $l+4$, temos $y1000, y1001$ e $y1010$, onde duas palavras com final 0 e apenas uma palavra com final 1;

- de modo geral, para palavras de comprimento $l+k$, para algum inteiro $2 < k \leq i-l-1$, assumimos que a quantidade de palavras é dada da forma $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, onde temos a_{k-1} palavras com final 0 e a_{k-2} palavras de final 1. Então, das palavras de final 0, serão geradas a_{k-1} palavras de comprimento $l+k+1$ com final 0 e a_{k-1} palavras de comprimento $l+k+1$ de final 1 . Além disso, das palavras com final 1, serão geradas a_{k-2} palavras de comprimento $l+k+1$ de final 0 pois, consideramos a condição a qual iremos gerar o máximo de palavras. Assim, temos $a_{k-1} + a_{k-2} = a_k$ palavras finitas de comprimento $l+k+1$ de final 0 e a_{k-1} palavras finitas de comprimentos $l+k+1$ de final 1. Logo, o número de palavras finitas com comprimento $l+k+1$ é $a_k + a_{k-1} = a_{k+1}$.

Vamos determinar agora o número de palavras em $W_i(p_c)$ geradas a partir de y. Nesse caso, buscaremos gerar a menor quantidade possível de palavras, assumindo que, quando possível, toda palavra de final 1 gere uma palavra também de final 1. No entanto, é importante enfatizar que como $p_c < q_c$, sempre que tivermos uma palavra com final 1 admissível em $P(p_c)$ e com mesma densidade de 1's de alguma palavra de mesmo comprimento admissível em $P(q_c)$, a palavra gerada precisará ter final 0, pelas condições impostas no caso anterior. Desse modo, para que uma palavra finita admissível em $P(p_c)$ de final 1 gere uma palavra de final 0, precisaremos que a densidade de 1's dessa palavra seja menor do que a densidade de 1's das palavras de mesmo tamanhos admissíveis em $P(q_c)$.

Na sequência, mostrarmos que apesar de todas essas condições, existirá pelo menos uma palavra a mais em$W_i(p_c)$ do que em $W_i(p_c)$. Com efeito,

- começamos com a palavra $y0$ de comprimento $l+1$;

- como as transições $0 \to 0$ e $0 \to 1$ são livres, as palavras de comprimento $l+2$ são $y00$ e $y01$;

- gerando a menor quantidade possível de palavras de comprimento $l+3$ admissíveis em $P(p_c)$, teremos as seguintes palavras $y000, y001$ e $y011$. Então, temos uma palavra de final 0, uma palavra de final 1 e a mesma densidade de 1's da palavra em $W_{l+3}(q_c)$ (que é $y101$), e ainda uma palavra com final 1 mas, com densidade de 1's menor;

- por conseguinte, para obter o menor número de palavras finitas de comprimento $l+4$, temos as palavras $y0000, y0001, y0011$ e $y0110$, onde a palavra $y011$ gerou a palavra $y0110$ pelas condições impostas no caso anterior. Temos assim duas palavras com final 0, uma palavra com final 1 e mesma densidade de 1's de palavras do que as palavras em $W_{l+4}(q_c)$ e, uma palavra com final 1 porém, tal palavra possui densidade de 1's menor;

- de modo geral, assumimos que as palavras finitas de comprimento $l+k$, para algum inteiro $2 < k \leq i-l-1$ é $a_k + 1$, onde $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, sendo a_{k-1} palavras de final 0, $a_{k-2}+1$ palavras de final 1 e a_{k-2} palavras de mesma densidade de 1's do que as palavras em $W_{l+k}(q_c)$ e apenas uma única palavra com densidade menor. Observe que a hipótese de indução é similar a utilizada no caso anterior, com a diferença que agora existe uma palavra com final 1 e densidade de 1's menor do que as palavras de $W_{l+k}(q_c)$. Essa palavra que garantirá que o conjunto $W_i(p_c)$ terá pelo menos uma palavra a mais do que $W_i(q_c)$.

Como y foi tomado qualquer e impomos condições que garantissem que o conjunto $W_i(q_c)$ fosse o maior possível, podemos concluir que $A_i(p_c) > A_i(q_c)$, para todo $i > k_0 + 2$.

□

Observação 3.3.11. *O inteiro k_0 usado na proposição anterior existe e pode ser maior do que 2 pois, a cada palavra x de comprimento l, para algum inteiro $l \geq 1$, a admissibilidade de x em $P(p_c)$ e $P(q_c)$ depende de p_c e q_c pertencerem a um mesmo intervalo da forma $\left[\frac{j-1}{l}, \frac{j}{l}\right)$, para algum $j = 1, ..., l-1$. Então, é factível que se escolham parâmetros p_c e q_c de modo que todas as palavras de comprimento até um certo inteiro l, tenham densidades de 1's satisfazendo $p_c, q_c \in \left[\frac{j-1}{l}, \frac{j}{l}\right)$, para algum $j = 1, ..., l-1$ mas, $p_c < \frac{i-1}{l+1} < q_c < \frac{i}{l+1}$, para algum $i = 1, ..., l$. Logo, vale que $A_j(p_c) = A_j(q_c)$, para todo $1 \leq j \leq l+1$, e $A_i(p_c) > A_i(q_c)$, para $i > l+1$.*

Logo, pela Proposição 3.3.10, segue que $\mathcal{E}(p_c) \geq \mathcal{E}(q_c)$, para quaisquer parâmetros que satisfaçam $p_c < q_c$. Esse resultado é importante pois, sempre que garantirmos que a entropia das palavras de algum conjunto $P(q_c)$ é positiva, obteremos como consequência que a entropia das palavras de $P(p_c)$ também é positiva.

3.3.1 Entropia das Palavras de $P(\frac{1}{2})$

Nestas seção provaremos que $\mathcal{E}(\frac{1}{2}) = \frac{\log 2}{2}$. Para isso precisamos determinar $A_n(\frac{1}{2})$ que é o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{1}{2})$. Pelas Proposições 3.1.9 e 3.1.11 obtemos caracterizações das palavras infinitas de $P(\frac{1}{2})$. À saber, as palavras podem ser da forma:

$$\underbrace{0...0}_{n_1}\underbrace{1...1}_{n_1+1}\underbrace{0...0}_{n_2}\underbrace{1...1}_{n_2}\underbrace{0...0}_{n_3}\underbrace{1...1}_{n_3}... \text{ e } 1\underbrace{0...0}_{n_1}\underbrace{1...1}_{n_1}\underbrace{0...0}_{n_2}\underbrace{1...1}_{n_2}\underbrace{0...0}_{n_3}\underbrace{1...1}_{n_3}... \tag{3.24}$$

Temos ainda palavras que são formadas por blocos finitos admissíveis expressos da forma acima concatenados com a palavra 0^∞. Denotamos:

- $A_n(\frac{1}{2})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{1}{2})$.
- $A_{n,0}(\frac{1}{2})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{1}{2})$ com final 0.
- $A_{n,1}(\frac{1}{2})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{1}{2})$ com final 1.
- $A^j_{n,i}(\frac{1}{2})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{1}{2})$ com final i e densidade de 1's igual a j.

Pelo Lema 3.2.1 mostramos que o número máximo de 1's em uma palavra de comprimento n é igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, onde $\lceil y \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : y \leq k\}$. Assim, a densidade máxima de 1's numa palavra finita de comprimento n admissível é $\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}$.

Quando n é par, temos que $\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} = \frac{1}{2}$, então todas as palavras de comprimento n e de final 1 geram palavras de comprimento $n+1$ e também de final 1 pois, todas as palavras de final 1 terão densidade menor ou igual a $\frac{1}{2}$. Logo, no caso do n ser par, temos as seguintes fórmulas de recorrência:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{n+1,0}(\frac{1}{2}) & = & A_{n,0}(\frac{1}{2}) \\ A_{n+1,1}(\frac{1}{2}) & = & A_{n,0}(\frac{1}{2}) + A_{n,1}(\frac{1}{2}) \end{array} \right. . \tag{3.25}$$

Agora, se n é ímpar, temos que $\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} = \frac{n+1}{2} > \frac{1}{2}$, então todas as palavras de comprimento n, com final 1 e densidade igual a $\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}$ geram palavras de comprimento $n+1$ de final 0. Além disso, como para todo $1 \leq j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, temos que $\frac{j}{n} \leq \frac{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}{n} = \frac{\frac{n-1}{2}}{n} < \frac{1}{2}$, pois n é ímpar. Então todas as palavras de admissíveis com comprimento n de final 1 e com número de 1's igual a j, para $1 \leq j \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, vão gerar palavras de comprimento $n+1$ com final 1. Dessa forma, as seguintes fórmulas de recorrência para n ímpar:

$$\begin{cases} A_{n+1,0}(\frac{1}{2}) &= \qquad A_{n,0}(\frac{1}{2}) + A_{n,1}^{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}} \\ A_{n+1,1}(\frac{1}{2}) &= A_{n,0}(\frac{1}{2}) + A_{n,1}(\frac{1}{2}) - A_{n,1}^{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}} \end{cases} . \tag{3.26}$$

Agora vamos mostrar que para n ímpar vale que $A_{n,1}^{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}} = 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} = 2^{\frac{n+1}{2}-1}$.

De fato, fixado n ímpar, queremos determinar $A_{n,1}^{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}}$ que é o número de palavras de comprimento n com final 1 e que possuem $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ 1's. Pelas expressões das palavras em $P(\frac{1}{2})$ dadas em (3.24), vamos dividir a contagem em dois casos:

1º) As palavras que iniciam com 0;

Note que nesse caso, as palavras devem ser formadas por blocos de 0's e 1's, onde o primeiro bloco de 1's tem um elemento a mais do que o primeiro bloco de 0's, os segundos blocos tem mesmo comprimento, bem como os terceiros e assim sucessivamente. Então, o primeiro bloco de 0's e 1's de uma palavra finita admissível de comprimento n iniciando em 0, para cada inteiro $0 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$, é da forma

$$\underbrace{0...0}_{\frac{n-2j-1}{2}} \underbrace{1...1}_{\frac{n-2j+1}{2}} . \tag{3.27}$$

Então para cada inteiro $0 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$, precisamos contar quantos blocos formados por j 0's e j 1's conseguimos formar de modo que, quando concatenarmos cada bloco com o bloco dado em (3.27), tenhamos palavras sob as condições impostas. Esses blocos que contém j 0's e j 1's precisam começar com 0, terminar com 1 e o primeiro bloco de 0's deve ter o mesmo comprimento do primeiro bloco de 1's, os segundos mesmos comprimentos, os terceiros mesma coisa, e assim por diante.

Quando $j = 0$ temos uma única palavra de comprimento n que é $\underbrace{0...0}_{\frac{n-1}{2}}\underbrace{1...1}_{\frac{n+1}{2}}$. Desse modo, fixaremos $1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$ para realizar a contagem.

Para cada inteiro $1 \leq k \leq j$ vamos denotar por $B_k = \underbrace{0...0}_{k}\underbrace{1...1}_{k}$, isto é, um bloco de tamanho $2k$ formado por k 0's e por k 1's. Note que, para cada inteiro $1 \leq l \leq j$ precisamos determinar de quantos modos podemos concatenar os blocos $B_{k_1}B_{k_2}...B_{k_l}$, onde $1 \leq k_1, k_2...k_l \leq j$ e $k_1 + k_2 + ... + k_l = j$. No entanto, isso é equivalente a determinar o número de soluções positivas da equação

$$k_1 + k_2 + ... + k_l = j,$$

para cada $1 \leq k \leq j$. Tomando $x_i = k_i + 1$, para todo $1 \leq i \leq l$, temos que o problema é equivalente a encontrar o número de soluções não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_l = j - l.$$

É possível justificar que para cada l fixo, o número de soluções da equação será $\frac{(j-1)!}{(j-l)!(l-1)!}$. Como $1 \leq l \leq j$, teremos então

$$\sum_{l=1}^{j} \frac{(j-1)!}{(j-l)!(l-1)!}$$

formas de organizar os blocos com j 0's e j 1's, para cada $1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$. Note que $\frac{(j-1)!}{(j-l)!(l-1)!} = \begin{pmatrix} j-1 \\ l-1 \end{pmatrix}$, isto é, a combinação de $j-1$ elementos tomados $l-1$ a $l-1$. Assim, para cada $1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$ segue que

$$\sum_{l=1}^{j} \frac{(j-1)!}{(j-l)!(l-1)!} = 2^{j-1}.$$

Dessa forma, para cada $1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}$ o número de palavras de comprimento n é igual a 2^{j-1}. Como, quando $j = 0$ temos uma única palavra, obtemos que o número de palavras de comprimento n nesse caso é

$$1 + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} 2^{j-1} = 1 - (1 - 2^{\frac{n-3}{2}}) = 2^{\frac{n-3}{2}}. \tag{3.28}$$

2º) As palavras que começam com 1;

Observe que, pela expressão dada em (3.24), o primeiro elemento da palavra deve ser 1 e após, haverão blocos de 0's e 1's onde, o primeiro bloco de 0's tenha o mesmo comprimento que o primeiro bloco de 1's, os segundos também tenham o mesmo comprimento, e assim por diante. Além disso, a quantidade total de 0's e 1's será a mesma, à saber cada um dos elementos aparecerá $\frac{n-1}{2}$ vezes.

Denotamos novamente para cada inteiro $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ o bloco de comprimento $2k$ da seguinte forma $B_k = \underbrace{0...0}_{k}\underbrace{1...1}_{k}$. Vamos determinar de quantas maneiras podemos concatenar blocos da forma $B_{k_1}B_{k_2}...B_{k_l}$, onde $1 \leq k_1, k_2..., k_l \leq \frac{n-1}{2}$ e $k_1 + k_2 + ... + k_l = \frac{n-1}{2}$.

De modo similar ao caso anterior, isso equivale a determinar o número de soluções positivas da equação

$$k_1 + k_2 + ... + k_l = \frac{n-1}{2}.$$

Dessa forma, o número de possibilidades de concatenarmos os blocos e consequentemente, o número de palavras de comprimento n iniciando por 1 é igual a

$$\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\frac{n-1}{2}-1)!}{(\frac{n-1}{2}-l)!(l-1)!} = 2^{\frac{n-1}{2}-1} = 2^{\frac{n-3}{2}}.$$

Logo, pelos casos descritos acima concluímos que

$$A_{n,1}^{\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}} = 2^{\frac{n-3}{2}} + 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}-1} = 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}.$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação de recorrência para n ímpar dada em (3.26) do seguinte modo

$$\begin{cases} A_{n+1,0}(\frac{1}{2}) & = & A_{n,0}(\frac{1}{2}) + 2^{\frac{n-1}{2}} \\ A_{n+1,1}(\frac{1}{2}) & = & A_{n,0}(\frac{1}{2}) + A_{n,1}(\frac{1}{2}) - 2^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}.$$

Lembrando que para n par temos as relações:

$$\begin{cases} A_{n+1,0}(\frac{1}{2}) & = & A_{n,0}(\frac{1}{2}) \\ A_{n+1,1}(\frac{1}{2}) & = & A_{n,0}(\frac{1}{2}) + A_{n,1}(\frac{1}{2}) \end{cases}.$$

Fazendo uma mudança de variável, podemos escrever

$$\begin{cases} A_{n,0}(\frac{1}{2}) & = & A_{n-1,0}(\frac{1}{2}) + 2^{\frac{n-2}{2}} \\ A_{n,1}(\frac{1}{2}) & = & A_{n-1,0}(\frac{1}{2}) + A_{n-1,1}(\frac{1}{2}) - 2^{\frac{n-2}{2}} \end{cases} \quad \text{para } n \text{ par.} \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} A_{n,0}(\frac{1}{2}) & = & A_{n-1,0}(\frac{1}{2}) \\ A_{n,1}(\frac{1}{2}) & = & A_{n-1,0}(\frac{1}{2}) + A_{n-1,1}(\frac{1}{2}) \end{cases} \quad \text{para } n \text{ ímpar.} \tag{3.30}$$

Vamos obter expressões para $A_{n,0}(\frac{1}{2})$ e $A_{n,1}(\frac{1}{2})$ a partir das fórmulas de recorrência dadas em (3.29) e (3.30). Sabemos que $A_{1,0}(\frac{1}{2}) = A_{1,1}(\frac{1}{2}) = 1$ pois, as únicas palavras admissíveis de comprimento 1 são 0 e 1. Fixamos n um inteiro par qualquer. Então

$$
\begin{aligned}
A_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) &\overset{n \text{ par}}{=} A_{n-1,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} \\
&\overset{n-1 \text{ ímpar}}{=} A_{n-2,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} \\
&\overset{n-2 \text{ par}}{=} A_{n-3,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} \\
&\overset{n-3 \text{ ímpar}}{=} A_{n-4,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}}
\end{aligned}
$$

Conjecturamos que para k expansões tenhamos

$$A_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{n-k,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + ... + 2^{\frac{n-2\lceil\frac{k}{2}\rceil}{2}}.$$

Podemos supor que a expansão irá até $n-k=1$, isto é, quando $k=n-1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
A_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) &= A_{1,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + ... + 2^{\frac{n-2\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}{2}} \\
&\overset{n-1 \text{ ímpar e } A_{1,0}(\frac{1}{2})=1}{=} 1 + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + ... + 2^{\frac{n-2\frac{n}{2}}{2}} \\
&= 2 + 2 + 4 + ... + 2^{\frac{n-4}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} \\
&= 2^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Como n é par, podemos supor que $n=2k$, para algum $k \geq 1$. Vamos provar por indução que

$$A_{2k,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{2k}{2}}.$$

Para $k=1$ temos $A_{2,0}=2$ (de fato, as palavras admissíveis de comprimento 2 e final 0 são 00 e 10). Assumimos válida a afirmação para alguma $k \geq 1$ fixo. Então, para $k+1$ temos

$$
\begin{aligned}
A_{2(k+1),0}\left(\frac{1}{2}\right) &\overset{2(k+1) \text{ par}}{=} A_{2k+1,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{2k+2-2}{2}} \\
&\overset{2k+1 \text{ ímpar}}{=} A_{2k,0}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{2k}{2}} \\
&\overset{\text{hip de indução}}{=} 2^{\frac{2k}{2}} + 2^{\frac{2k}{2}} \\
&= 2^{\frac{2(k+1)}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo, concluímos que para qualquer n par vale que

$$A_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{n}{2}}. \tag{3.31}$$

Como por (3.29) temos $A_{n,0}(\frac{1}{2}) = A_{n-1,0}(\frac{1}{2}) + 2^{\frac{n-2}{2}}$ para qualquer n par, obtemos de (3.31) que

$$A_{n-1,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{n}{2}} - 2^{\frac{n-2}{2}} = 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Sendo n par, temos que $n-1$ é ímpar e assim, fazendo uma mudança de variáveis, podemos concluir para qualquer n ímpar que

$$A_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{n+1}{2}-1}. \tag{3.32}$$

Vamos assumir novamente que n é um inteiro par qualquer e por (3.29) temos que

$$\begin{aligned}
A_{n,1}\left(\frac{1}{2}\right) &\overset{n \text{ par}}{=} A_{n-1,0}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{n-1,1}\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{\frac{n-2}{2}} \\
&\overset{n-1 \text{ ímpar e (3.32)}}{=} 2^{\frac{n-2}{2}} + A_{n-1,1}\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{\frac{n-2}{2}} \\
&\overset{n-1 \text{ ímpar}}{=} A_{n-2,0}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{n-2,1}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\overset{n-2 \text{ par e (3.31)}}{=} 2^{\frac{n-2}{2}} + A_{n-2,1}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\overset{n-2 \text{ par}}{=} 2^{\frac{n-2}{2}} + A_{n-3,0}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{n-3,1}\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{\frac{n-4}{2}} \\
&\overset{n-3 \text{ ímpar e (3.32)}}{=} 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + A_{n-3,1}\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{\frac{n-4}{2}} \\
&\overset{n-3 \text{ ímpar}}{=} 2^{\frac{n-2}{2}} + A_{n-4,0}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{n-4,1}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\overset{n-4 \text{ par e (3.31)}}{=} 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + A_{n-4,1}\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Conjecturamos que para k expansões temos

$$A_{n,1}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{n-k,1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + ... + 2^{\frac{n-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{2}},$$

onde $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$. Podemos supor que a expansão irá até $n-k=1$, isto é,

$k = n-1$. Assim

$$\begin{aligned} A_{n,1}\left(\frac{1}{2}\right) &= A_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-4}{2}} + \dots + 2^{\frac{n-2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}{2}} \\ &\overset{n-1 \text{ ímpar e } A_{1,1}(\frac{1}{2})=1}{=} 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{\frac{n-4}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} \\ &= -1 + 2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Como supomos que n é par vamos assumir que $n = 2k$, para algum inteiro $k \geq 1$. Vamos provar por indução que

$$A_{2k,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2^{\frac{2k}{2}}.$$

Para $k = 1$ temos $A_{2,1}(\frac{1}{2}) = 1$ (o que ocorre pois a única palavra admissível de comprimento 2 e final 1 é 01). Vamos assumir que a afirmação é válida para algum $k \geq 1$ fixo. Então, para $k+1$

$$\begin{aligned} A_{2(k+1),0}\left(\frac{1}{2}\right) &\overset{2(k+1) \text{ par e } (3.29)}{=} A_{2k+1,0}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2k+1,1}\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{\frac{2k+2-2}{2}} \\ &\overset{2k+1 \text{ ímpar e } (3.32)}{=} 2^{\frac{2k+1+1}{2}-1} + A_{2k+1,1}\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{\frac{2k}{2}} \\ &\overset{2k+1 \text{ ímpar}}{=} A_{2k,0}(\frac{1}{2}) + A_{2k,1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\overset{2k \text{ par e hip de indução}}{=} 2^{\frac{2k}{2}} - 1 + 2^{\frac{2k}{2}} \\ &= -1 + 2^{\frac{2(k+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, para todo n par obtemos que

$$A_{n,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2^{\frac{n}{2}}. \tag{3.33}$$

Como por (3.29) para todo n par temos que $A_{n,1}(\frac{1}{2}) = A_{n-1,0}(\frac{1}{2}) + A_{n-1,1}(\frac{1}{2}) - 2^{\frac{n-2}{2}}$, então pelas relações (3.32) e (3.33) obtemos que

$$A_{n-1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2^{\frac{n}{2}}.$$

Sendo n par temos que $n-1$ é ímpar e assim, por uma mudança de variável concluímos

$$A_{n,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2^{\frac{n+1}{2}}. \tag{3.34}$$

Logo, pelas relações (3.31), (3.33), (3.32) e (3.34) obtemos para todo $n \geq 1$ que

$$\begin{cases} A_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ A_{n,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \end{cases}. \tag{3.35}$$

Dessa forma, $A_n(\frac{1}{2}) = A_{n,0}(\frac{1}{2}) + A_{n,1}(\frac{1}{2}) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Essa expressão pode ser reescrita da forma

$$A_n(\frac{1}{2}) = \begin{cases} -1 + 2^{\frac{n}{2}+1}, \text{ para } n \text{ par} \\ -1 + 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}, \text{ para } n \text{ ímpar} \end{cases}. \tag{3.36}$$

Obtemos que

$$A_n(\frac{1}{2}) = -1 + 3^{x_n} \cdot 2^{\frac{n}{2} + \frac{(-1)^n}{2^{x_n}}}, \tag{3.37}$$

onde $x_n = 0$ se n é par e $x_n = 1$ se n e ímpar.

Portanto, a entropia das palavras de $P(\frac{1}{2})$ é

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log 2}{2}.$$

3.3.2 Entropia das Palavras de $P\left(\frac{k}{k+1}\right)$, para todo $k \geq 1$

Agora fixamos um inteiro $k \geq 1$ qualquer e tomamos $p_c = \frac{k}{k+1}$. Vamos mostrar que a entropia das palavras $\mathcal{E}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{\log 2}{k+1}$.

Lema 3.3.12. *Fixado inteiro $k \geq 1$ qualquer, para cada inteiro $j \geq 1$, o número máximo de 1's nas palavras de tamanho $j(k+1)$ é igual a jk.*

Demonstração. De fato, dado inteiro $j \geq 1$, considere a palavra

$$x = \underbrace{0...0}_{j}\underbrace{1...1}_{jk}.$$

Lembrando que convencionamos anteriormente que a notação acima da palavra x representa que ela é formada por um bloco de 0's com tamanho j e um bloco de 1's de tamanho jk. Temos que x tem comprimento $j(k+1)$, possui jk quantidade de 1's e ainda

como
$$\frac{jk-1}{j(k+1)-1} < \frac{jk}{j(k+1)} = \frac{k}{k+1} = p_c,$$
vale que x é admissível em $P(p_c)$. Logo, existe pelo menos uma palavra admissível em $P(p_c)$ de comprimento $j(k+1)$ com jk 1's. Afirmamos que jk é o valor máximo de 1's possível para uma palavra de comprimento $j(k+1)$. De fato, suponha que exista um inteiro $j_0 \geq 1$ tal que para alguma palavra x_0 admissível em $P(p_c)$ de comprimento $j_0(k+1)$ o número de 1's seja $N_1 \geq j_0k+1$.

Note que
$$N_1 > j_0k \geq \frac{j_0(k+1)}{2} \tag{3.38}$$
pois, se $j_0k < \frac{j_0(k+1)}{2}$ teríamos $k < 1$, o que é uma contradição. Então por (3.38) temos que existe um bloco B de tamanho ao menos 2 em x_0 formado apenas por 1's. Vamos supor que B é o bloco final de x_0. Desse modo, como x_0 tem N_1 1's, pelas condições de admissibilidade precisamos que
$$\frac{N_1-1}{j_0(k+1)-1} \leq \frac{k}{k+1} = p_c.$$

No entanto isso não ocorre pois,
$$\frac{N_1-1}{j_0(k+1)-1} \geq \frac{j_0k+1-1}{j_0(k+1)-1} > \frac{j_0k}{j_0(k+1)} = p_c.$$

Logo obtemos uma contradição caso B seja o bloco final de x_0. Vamos supor agora que B não seja o bloco final de x_0. Então considere a palavra $\tilde{x}_0$ de comprimento $l < j_0(k+1)$ que inicia no primeiro elemento de x_0 e termina num bloco B formado apenas por 1's de comprimento maior do que 2 e que seja o último bloco de x_0 com tal propriedade. Note que $l = j_0(k+1)-(M+N)$, onde M é a quantidade de 0's e N é a quantidade de 1's tiradas de x_0 para obtermos $\tilde{x}_0$. Note que $N \leq M$ pois caso contrário, haveria um bloco de tamanho pelo menos dois em x_0 que não está em $\tilde{x}_0$) e supomos que B era o último bloco com a propriedade de ser formado apenas por 1's e ter comprimento maior ou igual a 2. Temos que $\tilde{x}_0$ possui $N_1 - N$ 1's e assim,
$$\frac{N_1-N-1}{l-1} = \frac{N_1-N-1}{j_0(k+1)-(M+N)-1} > \frac{j_0k-N}{j_0(k+1)-(M+N)}.$$

Afirmamos que $\frac{j_0k-N}{j_0(k+1)-(M+N)} \geq \frac{j_0k}{j_0(k+1)}$ pois, caso contrário, isto é, se ocorresse

$$\frac{j_0k - N}{j_0(k+1) - (M+N)} < \frac{j_0k}{j_0(k+1)}$$

teríamos

$$(M+N)j_0k < Nj_0(k+1),$$

e daí, obtemos que $M \leq Mk < N$, o que é uma contradição comentamos anteriormente que $N \leq M$. Então

$$\frac{N_1 - N - 1}{l-1} > \frac{j_0k}{j_0(k+1)} = p_c.$$

Logo, o último elemento de $\tilde{x}_0$ precisa ser um 0, o que contradiz o fato de assumirmos que essa palavra termina num bloco formado apenas por 1's. Logo, podemos concluir que o Lema é verdadeiro.

$\square$

Observação 3.3.13. *Pelo Lema 3.3.12 temos que para as palavras admissíveis de comprimento $j(k+1)$, para todo $j \geq 1$, que a densidade máxima de 1's é igual a $\frac{jk}{j(k+1)} = \frac{k}{k+1} = p_c$. Assim, todas as palavras admissíveis de comprimento $j(k+1)$ com densidade máxima de 1's e de final 1, vão gerar palavras de comprimento $j(k+1)+1$ com final 1 e com $jk+1$ 1's.*

Observação 3.3.14. *Como a quantidade máxima de 1's em uma palavra de comprimento $j(k+1)$ é jk, teremos que a quantidade máxima de 1's em uma palavra de comprimento $j(k+1)+1$ é igual a $jk+1$.*

Observação 3.3.15. *Note que*

$$\frac{jk+1}{j(k+1)+1} > \frac{jk}{j(k+1)} = p_c.$$

Assim, todas as palavras de comprimento $j(k+1)+1$ com $jk+1$ 1's e de final 1, vão gerar palavras de comprimento $j(k+1)+2$ de final 0.

Observação 3.3.16. *Considere uma palavra qualquer x admissível em $P(p_c)$ de comprimento n com*

$$(j-1)(k+1)+2 \leq n \leq j(k+1). \tag{3.39}$$

Afirmamos que o número máximo de 1's em x é menor ou igual do que jk. De fato, suponha que o número máximo de 1's em x seja $M_1 > jk$. Note que

$$M_1 > jk \geq \frac{n}{2} \tag{3.40}$$

pois, se $jk < \frac{n}{2} \leq \frac{j(k+1)}{2}$, teríamos $k < 1$, o que é uma contradição. Então, por (3.40) *existe um bloco B em x de tamanho pelo menos 2 formado apenas por 1's. Vamos supor que B é o bloco final de x, então precisamos que $\frac{M_1-1}{n-1} \leq p_c$. No entanto*

$$\frac{M_1 - 1}{n-1} > \frac{jk}{n-1} > \frac{jk}{j(k+1)-1} > \frac{jk}{j(k+1)} = p_c.$$

Logo, obtemos uma contradição. Caso B não seja o bloco final de x, podemos repetir o argumento utilizado na prova do Lema 3.3.12 e com isso, concluir que a afirmação é verdadeira.

Observação 3.3.17. *A densidade de 1's de uma palavra x de tamanho n é sempre menor ou igual a densidade de 1's das palavras de tamanho $n+1$ geradas por x. Note que na Observação anterior mostramos que o número de 1's em uma palavra x de comprimento $j(k+1)-1$ é menor ou igual do que jk. Assim, teremos que a densidade de 1's da palavra x é menor ou igual a $\frac{jk}{j(k+1)} = p_c$. Concluímos então que todas as palavras com final 1 e comprimento n satisfazendo* (3.39) *vão gerar palavras de comprimento $n+1$ com final 1.*

Utilizaremos novamente a seguinte notação

- $A_n(\frac{k}{k+1})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{k}{k+1})$.
- $A_{n,0}(\frac{k}{k+1})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{k}{k+1})$ com final 0.
- $A_{n,1}(\frac{k}{k+1})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{k}{k+1})$ com final 1.
- $A^j_{n,i}(\frac{k}{k+1})$ o número de palavras de comprimento n admissíveis em $P(\frac{k}{k+1})$ com final i e densidade de 1's igual a j.

Fixado um inteiro $j \geq 1$, a partir das Observações acima e do Lema 3.3.12, obtemos as seguintes fórmulas de recorrência

$$\begin{cases} A_{j(k+1)+2,0}(p_c) & = & A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + A^{\frac{jk+1}{j(k+1)+1}}_{j(k+1)+1,1}(p_c) \\ A_{j(k+1)+2,1}(p_c) & = & A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + A_{j(k+1)+1,1}(p_c) - A^{\frac{jk+1}{j(k+1)+1}}_{j(k+1)+1,1}(p_c) \end{cases}.$$

Agora para todo inteiro $n = (j-1)(k+1)+2, ..., j(k+1)$, teremos que

$$\begin{cases} A_{n+1,0}(p_c) & = & A_{n,0}(p_c) \\ A_{n+1,1}(p_c) & = & A_{n,0}(p_c) + A_{n,1}(p_c) \end{cases}.$$

Vamos mostrar agora que para cada $j \geq 1$ vale que $A^{\frac{jk+1}{j(k+1)+1}}_{j(k+1)+1,0}(p_c) = 2^j$, isto é, o número de palavras de comprimento $j(k+1)+1$ de final 1 e que possuem $jk+1$ 1's é igual a 2^j.

Pelas Proposições 3.1.9 e 3.1.11 as palavras em $P(\frac{k}{k+1})$ podem ser da forma

$$\underbrace{0...0}_{n_1}\underbrace{1...1}_{kn_1+1}\underbrace{0...0}_{n_2}\underbrace{1...1}_{kn_2}\underbrace{0...0}_{n_3}\underbrace{1...1}_{kn_3}... \text{ e } 1\underbrace{0...0}_{n_1}\underbrace{1...1}_{kn_1}\underbrace{0...0}_{n_2}\underbrace{1...1}_{kn_2}\underbrace{0...0}_{n_3}\underbrace{1...1}_{kn_3}... \tag{3.41}$$

Temos ainda palavras que são formadas por blocos finitos admissíveis expressos da forma acima concatenados com a palavra 0^∞. Vamos dividir a justificativa em dois casos:

1º) As palavras que iniciam com 0;

Tomando um inteiro $0 \leq s \leq j-1$, considere o bloco

$$\underbrace{0...0}_{j-s}\ \underbrace{1...1}_{(j-s)k+1}.$$

Note que quando $s = 0$, temos o bloco $\underbrace{0...0}_{j}\underbrace{1...1}_{jk+1}$ e assim, obtemos uma palavra de tamanho $j(k+1)+1$ e com $jk+1$ 1's. Fixamos $1 \leq s \leq j-1$. Agora denotamos por $B_l = \underbrace{0...0}_{l}\underbrace{1...1}_{kl}$, para todo inteiro $1 \leq l \leq s$, o bloco de tamanho $l(k+1)$ que contém l 0's e kl 1's.

Note que para cada inteiro $1 \leq i \leq s$, precisamos determinar de quantos modos podemos concatenar blocos $B_{l_1}B_{l_2}...B_{l_i}$, onde $1 \leq l_1, l_2, ..., l_i \leq s$ e $l_1 + l_2 + ... + l_i = s$.

Logo, determinar o número de concatenações possíveis dos blocos equivale ao número de soluções positivas da equação $l_1 + l_2 + ... + l_i = s$. Tomando $x_p = l_p + 1$, para todo $1 \leq p \leq i$, devemos determinar o número de soluções não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_i = j - i.$$

É possível justificar que para cada i fixo, o número de soluções da equação acima é

$\frac{(j-1)!}{(j-i)!(i-1)!}$. Como $1 \leq i \leq s$, teremos então

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{(j-1)!}{(j-l)!(l-1)!} = 2^{s-1}.$$

Como, quando $j = 0$ temos uma única palavra e $1 \leq s \leq j-1$, obtemos que o número de palavras de comprimento $j(k+1)+1$ que possuem $jk+1$ 1's é

$$1 + \sum_{s=1}^{j-1} 2^{s-1} = 1 - (1 - 2^{j-1}) = 2^{j-1}. \tag{3.42}$$

2º) As palavras que começam com 1:

Observe que pela expressão dada em (3.41) fixamos o elemento 1 no início da palavra e precisamos contar de quantas formas podemos concatenar j 0's e jk 1's em blocos onde, o primeiro bloco de 1's tenha k vezes o comprimento do primeiro bloco de 0's e os blocos seguintes de 0's satisfaçam a mesma condição. Denotaremos novamente para cada inteiro $1 \leq l \leq j$ o bloco de tamanho $l(k+1)$ com l 0's e kl 1's por $B_l = \underbrace{0...0}_{l}\underbrace{1...1}_{kl}$. Vamos determinar de quantas maneiras podemos concatenar blocos da forma $B_{l_1}B_{l_2}...B_{l_i}$, onde $1 \leq l_1, l_2..., l_i \leq j$ e $l_1 + l_2 + ... + l_i = j$.

De modo similar ao caso anterior, podemos obter que o número de formas de concatenar os blocos e consequentemente, o número de palavras é igual a

$$\sum_{s=1}^{j} \frac{(j-1)!}{(j-s)!(s-1)!} = 2^{j-1}.$$

Logo, pelos casos descritos acima concluímos que

$$A_{j(k+1)+1,0}^{\frac{jk+1}{j(k+1)+1}}(p_c) = 2^{j-1} + 2^{j-1} = 2^j.$$

Logo podemos reescrever as equações de recorrência da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_{j(k+1)+2,0}(p_c) & = & A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + 2^j \\ A_{j(k+1)+2,1}(p_c) & = & A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + A_{j(k+1)+1,1}(p_c) - 2^j \end{array} \right. . \tag{3.43}$$

Lembrando que para todo inteiro $n = (j-1)(k+1)+2, ..., j(k+1)$ temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{n+1,0}(p_c) & = & A_{n,0}(p_c) \\ A_{n+1,1}(p_c) & = & A_{n,0}(p_c) + A_{n,1}(p_c) \end{array} \right. . \tag{3.44}$$

Temos que $A_{1,0}(p_c) = A_{1,1}(p_c) = A_{2,1}(p_c) = 1$ e $A_{2,0}(p_c) = 2$. Observe que

$$\begin{array}{rcl} A_{j(k+1)+2,0}(p_c) & \overset{(3.43)}{=} & A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + 2^j \\ & \overset{(3.44)}{=} & A_{j(k+1),0}(p_c) + 2^j \\ & = & ... \\ & \overset{(3.44)}{=} & A_{(j-1)(k+1)+2,0}(p_c) + 2^j \\ & \overset{(3.43)}{=} & A_{(j-1)(k+1)+1,0}(p_c) + 2^{j-1} + 2^j. \end{array}$$

Conjecturamos que após $l(k+1)+1$ expansões tenhamos

$$A_{j(k+1)+2,0}(p_c) = A_{(j-l)(k+1)+1,0}(p_c) + 2^{j-(l-1)} + ... + 2^{j-1} + 2^j.$$

Podemos supor que $(j-l)(k+1)+1 = (k+1)+1$, então $l = j$. Assim, obtemos

$$\begin{array}{rcl} A_{j(k+1)+2,0}(p_c) & = & A_{(k+1)+1,0}(p_c) + 2 + ... + 2^{j-1} + 2^j \\ & \overset{(3.44)}{=} & A_{(k+1),0}(p_c) + 2 + ... + 2^{j-1} + 2^j \\ & = & ... \\ & \overset{(3.44)}{=} & A_{2,0}(p_c) + 2 + ... + 2^{j-1} + 2^j \\ & \overset{A_{2,0}(p_c)=1}{=} & 2 + 2 + ... + 2^{j-1} + 2^j \\ & = & 2^{j+1}. \end{array}$$

Vamos provar por indução que

$$A_{j(k+1)+2,0}(p_c) = 2^{j+1}. \tag{3.45}$$

Para $j = 0$, temos $A_{2,0}(p_c) = 2$ (aqui as palavras são 00 e 10) e para $j = 1$, temos $A_{(k+1)+2,0}(p_c) = 4$ (aqui as palavras são $\underbrace{0...0}_{(k+1)+2}, 1\underbrace{0...0}_{(k+1)+1}, 0\underbrace{1...1}_{(k+1)}0, 10\underbrace{1...1}_{(k+1)-1}0$).

Vamos supor que (3.45) vale para algum inteiro $j \geq 1$ fixo. Para o caso $j+1$, temos

$$\begin{aligned}
A_{(j+1)(k+1)+2,0}(p_c) &\overset{(3.43)}{=} A_{(j+1)(k+1)+1,0}(p_c) + 2^{j+1} \\
&\overset{(3.44)}{=} A_{(j+1)(k+1),0}(p_c) + 2^{j+1} \\
&\overset{(3.44)}{=} ... \\
&\overset{(3.44)}{=} A_{j(k+1)+2,0}(p_c) + 2^{j+1} \\
&\overset{(3.45)}{=} 2^{j+1} + 2^{j+1} \\
&= 2^{(j+1)+1}
\end{aligned}$$

Dessa forma a expressão (3.45) é válida para todo $j \geq 1$. Note agora que por (3.43) e (3.45) temos que

$$2^{j+1} = A_{j(k+1)+2,0}(p_c) = A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + 2^j,$$

e assim

$$A_{j(k+1)+1,0}(p_c) = 2^{j+1} - 2^j = 2^j.$$

Como por (3.44) para todo inteiro $n = (j-1)(k+1)+2, ..., j(k+1)$ temos que $A_{n+1,0}(p_c) = A_{n,0}(p_c)$, decorre que

$$A_{n,0}(p_c) = 2^j, \text{ para todo } n = (j-1)(k+1)+2, ..., j(k+1). \tag{3.46}$$

Neste momento determinaremos a quantidade de palavras admissíveis com final 1. Como por (3.46) temos $A_{j(k+1)+1,0}(p_c) = 2^j$, para todo $j \geq 1$, então pela relação $A_{j(k+1)+2,1}(p_c) = A_{j(k+1)+1,0}(p_c) + A_{j(k+1)+1,1}(p_c) - 2^j$ dada em (3.44), obtemos para todo $j \geq 1$ que

$$A_{j(k+1)+2,1}(p_c) = A_{j(k+1)+1,1}(p_c). \tag{3.47}$$

Desse modo, temos que

$$\begin{array}{rcl} A_{j(k+1)+2,1}(p_c) & = & A_{j(k+1)+1,1}(p_c) \\ & \overset{(3.44)}{=} & A_{j(k+1),0}(p_c) + A_{j(k+1),1}(p_c) \\ & \overset{(3.46)}{=} & 2^j + A_{j(k+1),1}(p_c) \\ & \overset{(3.44)}{=} & 2^j + A_{j(k+1)-1,0}(p_c) + A_{j(k+1)-1,1}(p_c) \\ & \overset{(3.46)}{=} & 2^j + 2^j + A_{j(k+1)-1,1}(p_c) \\ & = & ... \\ & = & k2^j + A_{(j-1)(k+1)+2,1}(p_c) \\ & \overset{(3.47)}{=} & k2^j + A_{(j-1)(k+1)+1,1}(p_c) \end{array}$$

Conjecturamos que após $l(k+1)$ expansões tenhamos

$$A_{j(k+1)+2,1}(p_c) = k(2^j + 2^{j-1} + ... + 2^{j-(l-1)}) + A_{(j-l)(k+1)+1,1}(p_c).$$

Podemos supor que $(j-l)(k+1)+1 = (k+1)+1$ e daí, temos $j = l$. Dessa forma,

$$\begin{array}{rcl} A_{j(k+1)+2,1}(p_c) & = & k(2^j + 2^{j-1} + ... + 2) + A_{1,1}(p_c) \\ & \overset{A_{1,1}(p_c)}{=} & k(2^j + 2^{j-1} + ... + 2) + 1 \\ & = & k\left(\dfrac{2(1-2^j)}{1-2}\right) + 1 \\ & = & k(2^{j+1} - 2) + 1. \end{array}$$

Vamos provar por indução que para cada $j \geq 0$ temos

$$A_{j(k+1)+2,1}(p_c) = k(2^{j+1} - 2) + 1. \tag{3.48}$$

Se $j = 0$ temos $A_{2,1}(p_c) = 1$ (a saber 01) e se $j = 1$ temos $A_{(k+1)+2,1}(p_c) = 2k+1$. (aqui temos: $\underbrace{0...0}_{(k+1)+1}1, \underbrace{0...0}_{k+1}11, ..., 00\underbrace{1...1}_{k+1}$ já são $k+1$ palavras; $1\underbrace{0...0}_{k+1}1, 1\underbrace{0...0}_{k}11, ..., 100\underbrace{1...1}_{k}$ que são mais k palavras; obtemos assim $2k+1$ palavras.)

Vamos assumir que para algum inteiro $j \geq 1$ fixo, a expressão (3.48) é verdadeira.

Então para o caso $j+1$ temos

$$\begin{aligned}
A_{(j+1)(k+1)+2,1}(p_c) &\overset{(3.47)}{=} A_{(j+1)(k+1)+1,1}(p_c)\\
&\overset{(3.44)}{=} A_{(j+1)(k+1),0}(p_c) + A_{(j+1)(k+1),1}(p_c)\\
&\overset{(3.46)}{=} 2^{j+1} + A_{(j+1)(k+1),1}(p_c)\\
&\overset{(3.44)}{=} 2^{j+1} + A_{(j+1)(k+1)-1,0}(p_c) + A_{(j+1)(k+1)-1,1}(p_c)\\
&\overset{(3.46)}{=} 2^{j+1} + 2^{j+1} + A_{(j+1)(k+1)-1,1}(p_c)\\
&= ...\\
&= k2^{j+1} + A_{j(k+1)+2,1}(p_c)\\
&\overset{(3.48)}{=} k2^{j+1} + k(2^{j+1}-2)+1\\
&= k(2^{(j+1)+1}-2)+1.
\end{aligned}$$

Obtemos assim, que a expressão (3.48) é verdadeira. Agora combinando (3.47) com (3.48) obtemos que

$$A_{j(k+1)+1,1}(p_c) = k(2^{j+1}-2)+1. \tag{3.49}$$

Dessa forma por (3.44), obtemos que

$$k(2^{j+1}-2)+1 = A_{j(k+1)+1,1}(p_c) = A_{j(k+1),0}(p_c) + A_{j(k+1),1}(p_c) = 2^j + A_{j(k+1),1}(p_c),$$

e assim,

$$A_{j(k+1),1}(p_c) = k(2^{j+1}-2)+1-2^j$$

Como para todo inteiro $n = (j-1)(k+1)+2, ..., j(k+1)$ já sabemos que $A_{n+1,1}(p_c) = A_{n,0}(p_c) + A_{n,1}(p_c)$, segue que

$$\begin{aligned}
A_{n,1}(p_c) &= A_{n+1,1}(p_c) - A_{n,0}(p_c)\\
&= A_{n+1,1}(p_c) - 2^j\\
&= A_{n+2,1}(p_c) - A_{n+1,0}(p_c) - 2^j\\
&= A_{n+2,1}(p_c) - 2^j - 2^j\\
&= ...\\
&= A_{j(k+1),1}(p_c) - (x_{j(k+1)-(l-1)})2^j\\
&= k(2^{j+1}-2)+1-(x_{j(k+1)-(l-1)})2^j,
\end{aligned}$$

onde $x_{j(k+1)-(l-1)} = k - l + 1$, para cada $l = 1, ..., k$.

Logo, obtemos para todo $j \geq 1$ que:

$$\begin{cases} A_{j(k+1)+2,0}(p_c) & = & 2^{j+1} \\ A_{j(k+1)+2,1}(p_c) & = & k(2^{j+1} - 2) + 1 \end{cases}$$

e para cada $n = (j-1)(k+1) + 2, ..., j(k+1)$

$$\begin{cases} A_{n,0}(p_c) & = & 2^j \\ A_{n,1}(p_c) & = & k(2^{j+1} - 2) + 1 - (x_{j(k+1)-(l-1)})2^j \end{cases},$$

onde $x_{j(k+1)-(l-1)} = k - l + 1$, para cada $l = 1, ..., k$.

Obtemos então que

$$\begin{cases} A_{j(k+1)+2}(p_c) & = & k(2^{j+1} - 2) + 1 + 2^{j+1} \\ A_n(p_c) & = & k(2^{j+1} - 2) + 1 - (x_{j(k+1)-(l-1)} + 1)2^j \end{cases},$$

onde $x_{j(k+1)-(l-1)} = k - l + 1$, para cada $l = 1, ..., k$. Portanto, podemos escrever, para todo $j \geq 1$

$$A_n(p_c) = k(2^{j+1} - 2) + 1 + y_n 2^j,$$

onde $y_n = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad n = j(k+1) + 2 \\ -x_{j(k+1)-(l-1)} - 1, & \text{se} \quad (j-1)(k+1) + 2 \leq n \leq j(k+1) \end{cases}$.

Melhorando um pouco a expressão de $A_n(p_c)$, temos

$$A_n(p_c) = (2k + y_n)2^j - 2k + 1.$$

Para obtermos as equações de recorrência olhamos para $n = j(k+1) - i$, onde $-2 \leq i \leq k - 1$, para cada $j \geq 1$. Desse modo, podemos escrever $j = \frac{n-i}{k+1}$ e assim,

$$A_n(p_c) = (2k + y_n)2^{\frac{n-i}{k+1}} - 2k + 1.$$

Logo, a entropia das palavras de $P(p_c)$ para $p_c = \frac{k}{k+1}$, para todo $k \geq 1$ é

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(p_c) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log A_n(p_c) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Big((2k + y_n) 2^{\frac{n-i}{k+1}} - 2k + 1 \Big) \\ &= \frac{\log 2}{k+1}.\end{aligned}$$

3.4 O shift $\Sigma(p_c)$

Conforme comentamos no início da Seção 3.3, o conjunto $P(p_c)$ não é invariante pelo shift. Desse modo, definiremos um outro conjunto a partir de $P(p_c)$ obtendo assim tal propriedade.

Definição 3.4.1. *Para qualquer $p_c \in [0,1]$, considere*

$$\Sigma(p_c) = \overline{\cup_{n\geq 0} \sigma^n(P(p_c))},$$

onde $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é a aplicação shift.

O objetivo dessa seção é mostrar que quando $p_c \in \{0,1\}$ temos que $\Sigma(p_c)$ é um subshift do tipo finito, enquanto para todo $p_c \in (0,1)$ o conjunto $\Sigma(p_c)$ não será um subshift do tipo finito.

Note que na Definição 3.4.1 tomamos o fecho sobre a união de todas as imagens de $P(p_c)$ pela aplicação *shift*, a fim de tornar o conjunto $\Sigma(p_c)$ fechado e consequentemente, compacto. Consideramos a métrica usual de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definida a seguir

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-i}, \text{ com } i = \min\{k : x_k \neq y_k\}, \text{ para todos } \underline{x}, \underline{y} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Por simplicidade, mostraremos inicialmente que nos casos $p_c = 0$ e $p_c = 1$, o *subshift* $\Sigma(p_c)$ é de fato do tipo finito.

Proposição 3.4.2. *Os conjuntos $\Sigma(0)$ e $\Sigma(1)$ são subshifts do tipo finito. Em particular $\Sigma(0)$ é o Golden Mean Shift e $\Sigma(1) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_k = 1 \Rightarrow x_{k+1} = 1\}$.*

Demonstração. Primeiramente provaremos que o conjunto $\Sigma(0)$ é o *subshift* do tipo finito cujo bloco proibido é 11. No Exemplo 3.1.6 mostramos que o conjunto $P(0)$ possui o bloco 11 proibido. Seja $\underline{x} \in \cup_{n\geq 0}\sigma^n(P(0))$ um elemento qualquer. Então existe um bloco B admissível em $P(0)$ tal que $B\underline{x} \in P(0)$. Dessa forma, $\underline{x}$ não pode ter um bloco 11 pois, se tivesse a concatenação $B\underline{x}$ não seria admissível. Logo, 11 é um bloco proibido em $\Sigma(0)$. Note que os demais blocos de tamanho dois $00, 01$ e 10 são todos admissíveis em $P(0)$ e então, consequentemente serão admissíveis em $\Sigma(0)$. Logo podemos concluir que $\Sigma(0)$ é o *subshift* do tipo finito com o bloco proibido 11.

De modo similar, pode-se observar que o bloco 10 é proibido em $\Sigma(1)$ pois, já vimos no exemplo 3.1.7 que 10 é proibido em $P(1)$. Agora, se existisse $\underline{x} \in \Sigma(1)$ que contém o bloco 10, então para qualquer bloco finito admissível B, a concatenação $B\underline{x}$ contém o bloco 10, o que é uma contradição pois, obteríamos que $\underline{x} \notin \Sigma(1)$. Logo, $\Sigma(1)$ é o *subshift* do tipo finito cujo bloco proibido é 10.

$\square$

Na sequência estaremos interessados em provar que $\Sigma(p_c)$ não é um *subshift* do tipo finito, para todo $p_c \in (0,1)$. Esse resultado também é interessante, uma vez que justifica que de fato estamos criando uma nova classe de espaços *shift*. No entanto, antes disso, apresentaremos um lema que será útil para fornecer uma condição para provarmos o resultado desejado.

Lema 3.4.3. *Fixado $p_c \in (0,1)$, escrevemos $\beta = \frac{p_c}{1-p_c}$. Então existem inteiros $n, m \geq 1$ tais que*

$$n - \beta m < -1. \tag{3.50}$$

Demonstração. Fixamos $p_c \in (0,1)$ e um inteiro $k \geq 2$ quaisquer. Consideramos um inteiro $m \geq 1$ tal que

$$m\beta > k. \tag{3.51}$$

Desse modo, a desigualdade dada em (3.51) implica que $-m\beta < -k$. Assim, para qualquer inteiro $n \geq 1$ segue que

$$n - m\beta < n - k. \tag{3.52}$$

Em particular, a desigualdade (3.52) é verdadeira para $n = k - 1$ e daí, obtemos que

$$n - m\beta < n - k = -1.$$

$\square$

Observação 3.4.4. *Observe que os inteiros m e n dependem da escolha do inteiro k. Como $k \geq 2$ é qualquer, o Lema 3.4.3 nos diz que existem infinitos pares (m, n) que satisfazem a* *desigualdade* (3.50).

O Lema 3.4.3 nos fornece a principal ferramenta para justificarmos que $\Sigma(p_c)$ não é um *subshift* do tipo finito, para qualquer $p_c \in (0,1)$. Utilizaremos a expressão (3.50) para construir um bloco proibido em $\Sigma(p_c)$ e pela observação 3.4.4, obteremos infinitos blocos proibidos.

Teorema 3.4.5. *Para cada $p_c \in (0,1)$ o conjunto $\Sigma(p_c)$ não é um subshift do tipo finito.*

Demonstração. Considere o bloco $B = \underbrace{0...0}_{m}\underbrace{1...1}_{n}0$ contendo um bloco com uma quantidade m de 0's e n de 1's, onde os inteiros m e n satisfazem

$$n - \beta m < -1. \tag{3.53}$$

Suponha que exista uma palavra $\underline{x} = x_1x_2x_3... \in \cup_{n\geq 0}\sigma^n(P(p_c))$ que contenha o bloco B. Enfatizamos que B não precisa ser necessariamente o bloco inicial de $\underline{x}$ e assim, podemos escrever $\underline{x} = x_1x_2...x_kBx_{k+|B|+1}...$, onde $|B|$ denota o comprimento do bloco B e k é um inteiro não-negativo. (No caso $k=0$, convencionamos que $\underline{x}$ inicia com o bloco B)

Como $\underline{x} \in \cup_{n\geq 0}\sigma^n(P(p_c))$ existe um bloco finito $\mathcal{B}$ formado por 0's e 1's tal que $\mathcal{B}Bx_{l+1}... \in P(p_c)$, onde $l = |\mathcal{B}|+|B|$ (o bloco $\mathcal{B}$ contém o bloco inicial de $\underline{x}$). Vamos denotar por $\underline{y} = \mathcal{B}Bx_kx_{k+1}...$, sendo que estamos utilizando para definir $\underline{y}$ a concatenação entre os blocos, definida na Observação 3.3.9.

Na sequência, justificaremos que $\underline{y}$ não pode pertencer a $P(p_c)$. Para isso, provaremos que a concatenação $\mathcal{B}B$ não é admissível em $P(p_c)$. Como obloco $\mathcal{B}$ pode ser escrito de diversas formas, vamos dividir a prova nos casos descritos a seguir.

1. Suponha que o bloco $\mathcal{B}$ seja formado apenas por 0's, isto é, $\mathcal{B} = \underbrace{000...0}_{N}$, para algum inteiro $N \geq 1$. Note que $\mathcal{B}$ é admissível em $P(p_c)$. Para que $\underline{y}$ seja admissível, precisamos que o inteiro $N \geq 1$ satisfaça

$$\frac{n-1}{N+m+n-1} \leq p_c < \frac{n}{N+m+n},$$

ou seja, $n - 1 - \beta m \leq \beta N < n - \beta m$. Pela condição (3.53) temos que $n - \beta m < -1$, então N não existe nesse caso.

2. Assuma que $\mathcal{B} = 1\underbrace{000..0}_{N}$ o qual é um bloco admissível em $P(p_c)$. O inteiro $N \geq 1$

precisa satisfazer

$$\frac{n}{N+M+n} \leq p_c < \frac{n+1}{N+m+n+1},$$

ou seja, deve valer que $n - \beta m \leq \beta N < n + 1 - \beta m$. Novamente pela condição (3.53) temos que $n + 1 - \beta m < 0$ e assim, não existe N de modo que $\underline{y}$ seja admissível.

3. Vamos assumir agora que $\mathcal{B} = \underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}...\underbrace{0...0}_{m_i}\underbrace{1...1}_{n_i}$, onde $m_i \geq 1$ and $n_i \geq 1$ são inteiros. Nesse caso, uma das condições necessárias é que

$$\frac{n_1 + ... + n_i - 1}{m_1 + n_1 + ... + m_i + n_i - 1} \leq p_c,$$

isto é, os inteiros m_i and n_i satisfaçam

$$n_1 + ... + n_i - 1 \leq \beta(m_1 + ... + m_i). \tag{3.54}$$

Para que $\underline{y}$ seja admissível, precisamos ainda que

$$\frac{n_1 + ... + n_i + n - 1}{m_1 + n_1 + ... + m_i + n_i + m + n - 1} \leq p_c < \frac{n_1 + ... + n_i + n}{m_1 + n_1 + ... + m_i + n_i + m + n},$$

isto é, reescrevendo a expressão anterior

$$n_1 + ... + n_i + n - 1 - \beta m \leq \beta(m_1 + ... + m_i) < n_1 + ... + n_i + n - \beta m.$$

Pela relação obtida acima e de (3.54), é necessário que o valor $\beta(m_1 + ... + m_i)$ pertença a interseção dos intervalos $I = [n_1 + ... + n_i + n - 1 - \beta m, n_1 + ... + n_i + n - \beta m)$ e $J = [n_1 + ... + n_i - 1, +\infty)$. No entanto pela condição (3.53) temos que $n - \beta m < -1$ e assim

$$n_1 + ... + n_i + n - \beta m < n_1 + ... + n_i - 1,$$

independente da escolha de $n_1, ..., n_i$, ou seja, $I \cap J = \emptyset$. Então segue que $\beta(m_1 + ... + m_i)$ não existe e então, $\underline{y}$ não é admissível em $P(p_c)$.

Pode ocorrer no atual caso, que $n_1 + ... + n_i = 1$ e assim, vai existir apenas $m_1 \geq 1$. Nesse caso a expressão (3.54) será reescrita por

$$0 \leq \beta m_1.$$

Então temos os intervalos $I = [n - 1 - \beta m, n - \beta m)$ e $J = [0, +\infty)$. Novamente por

(3.53) decorre que $I \cap J = \emptyset$ pois, $n - \beta m < -1 < 0$.

4. Agora seja $\mathcal{B} = 1\underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}...\underbrace{0...0}_{m_i}\underbrace{1...1}_{n_i}$, com $m_j, n_j \geq 1$ inteiros, para $1 \leq j \leq i$. De modo similar ao item anterior é necessário que
$$n_1 + ... + n_i \leq \beta(m_1 + ... + m_i). \tag{3.55}$$
Além disso, deve valer que
$$n_1 + ... + n_i + n - \beta m \leq \beta(m_1 + ... + m_i) < 1 + n_1 + ... + n_i + n - \beta m.$$
Considerando os intervalos $I = [n_1 + ... + n_i + n - \beta m, 1 + n_1 + ... + n_i + n - \beta m)$ e $J = [n_1 + ... + n_i, +\infty)$, temos que $I \cap J = \emptyset$ pela condição (3.53), pois
$$1 + n_1 + ... + n_i + n - \beta m < n_1 + ... + n_i,$$
Caso $1 + n_1 + ... + n_i = 1$, teremos $n_1 + ... + n_i = 0$ e assim, os m_i's são todos nulos. Logo, para a admissibilidade da concatenação $\mathcal{B}B$ precisamos ter
$$\frac{n-1}{m+n} \leq p_c < \frac{n}{m+n+1},$$
ou seja, é necessário que $n - \frac{1}{1-p_c} \leq \beta m < n - \beta$. Pela expressão (3.53) segue que $0 < \beta < n - \beta m < -1$, o que é um contradição.

5. Escolhendo $\mathcal{B} = \underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}...\underbrace{0...0}_{m_i}\underbrace{1...1}_{n_i}\underbrace{0...0}_{m_{i+1}}$, para inteiros $m_1, ..., m_i$ e $n_1, ..., n_{i+1}$. Basta repetir a argumentação utilizada no item [3] trocando $m_1 + ... + m_i$ por $m_1 + ... + m_i + m_{i+1}$. Se$\mathcal{B} = \underbrace{0...0}_{m_1}\underbrace{1...1}_{n_1}...\underbrace{0...0}_{m_i}\underbrace{1...1}_{n_i}\underbrace{0...0}_{m_{i+1}}$, para inteiros $m_1, ..., m_i$ e $n_1, ..., n_{i+1}$ basta repetir os argumentos do item [4].

Pelos itens acima obtemos que $\underline{x} \notin \cup_{n\geq 0}\sigma^n(P(p_c))$. Agora, se $\underline{x} \in \overline{\cup_{n\geq 0}\sigma^n(P(p_c))}$, então existe uma sequência $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset \cup_{n\geq 0}\sigma^n(P(p_c))$ tal que $x_k \to x$ quando $k \to \infty$. Pela definição da métrica, existe um $k_0 \geq 1$ tal que z_k contém o bloco B, para todo $k \geq k_0$, o que é uma contradição.

$\square$

3.5 Entropia Topológica de $\Sigma(p_c)$

Mostramos, na seção 3.1, que $\Sigma(0)$ é o *subshift* do tipo finito cujo bloco proibido é 11 e $\Sigma(1)$ é o *subshift* do tipo finito que proíbe o bloco 10. Denotando por $h(\sigma)$ a entropia topológica com respeito a aplicação *shift* $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, já é conhecido que $h(\sigma_{|\Sigma(0)}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $h(\sigma_{|\Sigma(1)}) = 0$. Salientamos que não conseguimos calcular o valor explicito da entropia topológica para $\Sigma(p_c)$, quando $p_c \in (0,1)$. No entanto, iremos garantir que temos entropia positiva para os conjuntos $\Sigma(p_c)$. Para justificar isso, utilizaremos o conceito de entropia das palavras de $P(p_c)$ abordado na seção 3.3.

Antes de mostrar o que estamos propondo para essa seção, vamos definir os conceitos de Entropia Topológica e Dimensão de Minkowski.

Seja (X,d), um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função contínua. Para todo $n \geq 1$, definimos

$$d_n(x,y) = \max_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Fixamos $\varepsilon > 0$ qualquer. Um subconjunto $A \subset X$ é chamado (n,ε)**-spanning** se para qualquer $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $d_n(x,a) < \varepsilon$. Ainda seja **span**(n,f,ε) a cardinalidade mínima de um conjunto (n,ε)-spanning.

Um conjunto $A \subset X$ é (n,ε)**-separado** se para quaisquer $x,y \in A$ tivermos que $d_n(x,y) \geq \varepsilon$. Seja **sep**$(n,\varepsilon,f)$ a cardinalidade máxima de um conjunto (n,ε)-separado.

Definimos também **cov**(n,ε,f) a cardinalidade mínima de uma cobertura de diâmetro menor que ε com respeito a métrica d_n.

Seja

$$h_\varepsilon(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log cov(n,\varepsilon,f),$$

e então, definimos a **entropia topológica** de f por

$$h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon(f).$$

Observação 3.5.1. *É possível justificar que*

$$h(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log span(n,\varepsilon,f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log sep(n,\varepsilon,f).$$

Para maiores detalhes citamos [9].

Agora, dado $A \subset X$, seja $N_\delta(A)$ a cardinalidade mínima de subconjuntos de diâmetro menor ou igual a δ que cobrem A. Definimos a **dimensão de Minkowski superior** e a

dimensão de Minkowski inferior de A como

$$\overline{\dim}_{\mathcal{M}}(A) = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} \text{ e } \underline{\dim}_{\mathcal{M}}(A) = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Caso os limites acima existam e sejam iguais definimos a **dimensão de Minkowski** de A por

$$\dim_{\mathcal{M}}(A) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Afirmamos que, para todo $p_c \in (0,1)$, temos que $h(\sigma_{|_{\Sigma(p_c)}}) \geq (\log 2)\mathcal{E}(p_c)$, isto é, a entropia das palavras de $P(p_c)$ é um cota inferior para a entropia de $\Sigma(p_c)$. De fato, para justificar essa afirmação, observe que podemos associar a $P(p_c)$ um subconjunto, que será denotado por $P^*(p_c)$, do intervalo da reta $[0,1)$, do seguinte modo

- $P^*_0(p_c) = [0,1)$;
- dividimos o intervalo $[0,1)$ nos seguintes intervalos: $P^*(p_c)_0 = [0, \frac{1}{2})$ e $P^*(p_c)_1 = [\frac{1}{2}, 1)$. Como as palavras finitas 0 e 1 são admissíveis em $P(p_c)$, para qualquer p_c, tomamos $P^*_1(p_c) = P^*(p_c)_0 \cup P^*(p_c)_1$.
- agora dividiremos o intervalo $[0,1)$ em quatro novos intervalos: $P^*(p_c)_{00} = [0, \frac{1}{4})$, $P^*(p_c)_{01} = [\frac{1}{4}, \frac{2}{4})$, $P^*(p_c)_{10} = [\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$ e $P^*(p_c)_{11} = [\frac{3}{4}, 1)$. Como as palavras $00, 01$ e 11 são admissíveis em $P(p_c)$, seja $P^*_2(p_c) = P^*(p_c)_{00} \cup P^*(p_c)_{01} \cup P^*(p_c)_{11}$.
- na etapa n estaremos associando cada palavra finita e admissível em $P(p_c)$ de comprimento n a um intervalo de comprimento 2^{-n} e consideramos $P^*_n(p_c)$ a união de todos esses intervalos associados a cada uma das palavras admissíveis.

Logo, definimos $P^*(p_c) = \cap_{n\geq 0} P^*_n(p_c)$. Note que, $P^*(p_c)$ está bem definido pois, $P^*_{n+1}(p_c) \subset P^*_n(p_c)$, para todo $n \geq 1$. De modo similar, podemos construir um conjunto $\Sigma^*(p_c)$ contido no intervalo $[0,1)$ que está associado ao *subshift* $\Sigma(p_c)$, para todo $p_c \in (0,1)$. Como $P(p_c) \subset \Sigma(p_c)$, segue que $P^*(p_c) \subset \Sigma^*(p_c)$. Desse modo, $dim_{\mathcal{M}}(P^*(p_c)) \leq dim_{\mathcal{M}}(\Sigma^*(p_c))$.

Pela Proposição III.1 de [10] temos que

$$\frac{h(\sigma_{|_{\Sigma(p_c)}})}{\log 2} = dim_{\mathcal{M}}(\Sigma^*(p_c)). \tag{3.56}$$

Note que pela construção de $P^*(p_c)$, temos que $\mathcal{E}(p_c) = dim_{\mathcal{M}}(P^*(p_c))$. Além disso, como $dim_{\mathcal{M}}(P^*(p_c)) \leq dim_{\mathcal{M}}(\Sigma^*(p_c))$, pela expressão (3.56), segue que $h(\sigma_{|_{\Sigma(p_c)}}) \geq (\log 2)\mathcal{E}(p_c)$. Ou seja, a entropia das palavras do conjunto $P(p_c)$ é uma cota inferior para a entropia topológica do sistema dinâmico $(\sigma, \Sigma(p_c))$.

Vimos na seção 3.3.2 que $\mathcal{E}(\frac{k}{k+1}) = \frac{\log 2}{k+1} > 0$, para todo $k \geq 1$. Desse modo, teremos que

$$h(\sigma|_{\Sigma(\frac{k}{k+1})}) \geq (\log 2)\mathcal{E}(\frac{k}{k+1}) = (\log 2)\frac{\log 2}{k+1} > 0.$$

Agora, dado $p_c \in (0,1)$ qualquer, como $\frac{k}{k+1} \to 1$, quando $k \to \infty$, temos que existe $k_0 \geq 1$ tal que $p_c \leq \frac{k_0}{k_0+1}$. Pela Proposição 3.3.10, temos que

$$h(\sigma|_{\Sigma(p_c)}) \geq (\log 2)\mathcal{E}(p_c) \geq (\log 2)\mathcal{E}(\frac{k_0}{k_0+1}) > 0,$$

ou seja, concluímos que o sistema dinâmico $(\sigma, \Sigma(p_c))$ possui entropia positiva, para todo $p_c \in (0,1)$.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma nova classe de cociclos gerados por funções homogêneas, o qual englobam o caso linear. Definimos o expoente de Lyapunov para tal classe de cociclos, e mostramos um resultado de aproximação periódica para os expoentes em termos da norma, num espaço de dimensão infinita. Além disso como aplicação desse resultado, mostramos que a taxa de crescimento exponencial e de distorção quase-conforme de um cociclo homogêneo.

Foram dados diversos exemplos de aplicações que são homogêneas e não são lineares, o que mostra que o estudo de dinâmicas com esta propriedade pode ser um ramo bastante interessante de investigação. Nesse contexto, deixamos em aberto as seguintes questões: é possível definir uma fórmula de Furstenberg para cociclos gerados por dinâmicas homogêneas? É possível obter como aplicação do Teorema 2.3.2 um Teorema do tipo Livšic para cociclos homogêneos?

Também, propomos uma nova classe de *subshifts* dentro do conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que possuem uma longa memória, visto que para construir as palavras precisamos sempre analisar qual a densidade de 1's até o elemento investigado. Garantimos que esses *subshifts* não são do tipo finito e ainda, possuem entropia topológica positiva.

Como obtemos uma estimativa da entropia topológica para $\Sigma(p_c)$ a partir da entropia das palavras de $P(p_c)$, fica a seguinte pergunta: é possível expressar com exatidão o valor da entropia topológica $h(\sigma_{|_{\Sigma(p_c)}})$ e esse valor será igual ou maior do que $(\log 2)\mathcal{E}(p_c)$? A partir da análise de alguns casos particulares, aparentemente a quantidade de cilindros de comprimento n que cobrem $\Sigma(p_c)$ é maior do que a quantidade de palavras de comprimento n admissíveis em $P(p_c)$, no entanto, em média ainda não foi possível afirmar nada a respeito.

Nesse trabalho abordamos temas distintos, podendo dividi-lo em dois momentos. Cremos que ambos os temas apresentados propõem ideias novas e interessante dentro do contexto dos sistemas dinâmicos. Além disso, ainda é possível formular perguntas a respeito desses assuntos estudados, abrindo oportunidade para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] Avila, A. Bochi, J. *A formula with applications to the theory of Lyapunov Exponents.* Israel Journal of Mathematics, 131 (2002) 125-137.

[2] Backes, L. *A Remark on the Invertibility of Semi-invertible Cocycles.* Journal of Dynamical and Control Systems, (2019) 25:527–533.

[3] Backes, L. *On the Periodic Approximation of Lyapunov Exponents for Semi-Invertible Cocycles.* - Discrete Contin. Dyn. Syst. 37, 2017, 6353–6368.

[4] Backes, L., Dragičević, D. *Periodic Approximation of Exceptional Lyapunov Exponents for Semi-Invertible Operator Cocycles.* Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Volumen 44, 2019, 183–209.

[5] Baraviera, A.T., Branco, F.M. *Introdução à Álgebra Max-Plus.* III Colóquio de Matemática da Região Sul, Florianópolis, 2014.

[6] Baraviera, A. T. Dias, J. L. Duarte, P. *On the Herman-Avila-Bochi formula for Lyapunov exponents os* $SL(2,\mathbb{R})-$*cocyles.* Nonlinearity, 24 (2011) 2465–2476.

[7] Bartle, R. G. *Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley & Sons, 1995.

[8] Barreira, L. Pesin, Y. *Nonuniform hiperbolicity: dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents.* Cambridge University Press, 2007.

[9] Brin, M. Stuck, G. *Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 2004.

[10] Furstenberg, H. *Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation.* Mathematical Systems Theory, 1(1):1–49, 1967.

[11] Furstenberg, H. *Noncommuting Random Products.* Trans. Amer. Math. Soc., 108:377–428, 1963.

[12] Furstenberg, H. Kesten, H. *Product of random matrices.* The Annals of Mathematical Statistics, 31 (1960) 457-469.

[13] Grabarnik, G. Guysinsky, M. *Livsic theorem for Banach rings.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 37(8) (2017) 4379–4390.

[14] Gouëzel, S. Karlsson, A. *Subadditive and multiplicative ergodic theorems.* Preprint.

[15] Grosse-Erdmann, K.G. Manguillot, A.P. *Linear Chaos.* Springer-Verlag London Limited, 2011.

[16] Hasselblat, B. Katok, A. *Handbook of Dynamical Systems.* Volume 1B. Elsevier, 2006.

[17] Haydn, N. *Phase Transition in One-Dimensional Subshifts.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 33, 5 (2013) 1965-1973.

[18] Herman, M. R. *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d' Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2.* Commentarii Mathematici Helvetici, 58 (1983) 453–502.

[19] Hirsch, M.W., Smith H. *Monotone Dynamical Systems.* In Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, Vol. II, Amsterdam, Elsevier, 2005, pp. 239–357.

[20] Jenkinson, O., Mauldin, R.D., Urbański, M. *Ergodic Optimization for Countable Alphabet Subshifts of Finite Type.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2006), 26, 1791-1803.

[21] Kalinin, B. *Livsic Theorem for matrix cocycles.* Annals of Mathematics, 173 (2011) 1025-1042.

[22] Kalinin, B., Sadovskaya, V. *Lyapunov exponents of cocylces over non-uniformly hyperbolic systems.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 38 (2018) 5105–5118.

[23] Kalinin, B. Sadovskaya, V. *Periodic approximation of Lyapunov exponents for Banach cocycles.* Ergodic Theory an Dynamical Systems, 39 (2019) 689-706.

[24] Karlsson, A. Margulis, G. A. *A Multiplicative Ergodic Theorem and Nonpositively Curved Spaces.* Communications in Mathematical Physics, 208 (1999) 107-123.

[25] Katok, A. Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54).* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[26] Lemmes, B., Nussbaum, R. *Nonlinear Perron-Frobenius Theory*. Cambridge University Press, 2012.

[27] Lind, D. Marcus, B. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.

[28] Mañé, R. *Introdução a Teoria Ergódica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Projeto Euclides, 1983.

[29] Oliveira, K. Viana, M. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Editora SBM, 2019.

[30] Parret, J.M., Nussbaum, R.D. *Eingenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 8, 3, (2002), 519-562.

[31] Parret, J.M., Nussbaum, R.D. *Generalizing the Krein–Rutman Theorem, Measures of Noncompactness and the Fixed Point Index*. J. Fixed Point Theory Appl. 7 (2010) 103–143.

[32] Schreiber, S. J. *On growth rates of subadditive functions for semi-flows*. Differential Equations 148 (1998), 334–350.

[33] Stein, E.M. Shakarchi, R. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.

[34] Viana, M. *Lectures on Lyapunov Exponents*. Cambridge University Press, 2014.