

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

A INFLUÊNCIA DOS PADRÕES DE ENTRELAÇAMENTO NA RESPOSTA
MECÂNICA EFETIVA DE COMPÓSITOS REFORÇADOS - UM ESTUDO POR
HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL

por

Jonas Tieppo da Rocha

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2022

A INFLUÊNCIA DOS PADRÕES DE ENTRELAÇAMENTO NA RESPOSTA
MECÂNICA EFETIVA DE COMPÓSITOS REFORÇADOS - UM ESTUDO POR
HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL

por

Jonas Tieppo da Rocha
Engenheiro

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak
Co-Orientador: Prof. Dr. Tales Vargas de Lisbôa

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rodrigo Rossi PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. José Humberto Almeida Jr Queen's University Belfast, UK

Prof. Dr. Federico Carlos Buroni ETSI / US

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Maio de 2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro para a elaboração desta dissertação.

RESUMO

Nesta dissertação, é apresentado um estudo sobre a influência dos padrões de entrelace na resposta mecânica de compósitos têxteis. Três padrões de tecelagem típicos de interesse industrial são explorados: os padrões plano, 2/2 sarja e o 8-harness cetim. Analisa-se, do mesmo modo, o caso de um laminado cross-ply (cruzado) simétrico. Técnicas de homogeneização foram empregadas: analíticas, e numéricas, com o RVE sendo submetido condições de contorno cinemáticas uniformes (KUBC) e periódicas (PBC). Devido ao caráter delgado habitualmente presente em compósitos têxteis, propôs-se um conjunto diferente de condições de contorno, representadas pela combinação de KUBC e PBC. Todas as condições de contorno foram verificadas para satisfazer a equivalência de energia de Hill-Mandel. As constantes de engenharia estimadas para os quatro compósitos e três conjuntos de condições de contorno são obtidas e comparadas através dos índices de anisotropia e da norma de Frobenius. O tensor constitutivo reduzido, usado em problemas de placa fina e casca, também é derivado de suas contrapartidas 3D homogeneizadas e discutido. Os campos de deformação são investigados para em um modelo de elementos finitos representativo de três têxteis estudados nessa dissertação: os padrões plano, 2/2 sarja e o 8-harness cetim. As constantes de engenharia obtidas foram usadas em uma placa em balanço para ilustrar a influência do padrão de tecelagem em um componente real. Por fim, estudou-se diversos padrões de tecelagem, conservando-se a fração volumétrica, analisando-se os termos de acoplamento da matriz de rigidez resultante.

Palavras-chave: Homogeneização; RVE; compósitos têxteis, padrão de entrelaçamento, propriedades efetivas

ABSTRACT

In this thesis, a study on the influence of weave patterns on the mechanical response of textile composites is presented. Three typical weaving patterns of industrial interest are explored: the plain weave, 2/2 twill weave and 8-harness satin. The case of a symmetrical cross-ply laminate is also analyzed. Homogenization techniques were used: analytical, based on the literature, and numerical, with the RVE being subjected to kinematic uniform (KUBC) and periodic (PBC) boundary conditions. Due to the thin character usually present in textile composites, a different set of boundary conditions was proposed, represented by the combination of SUBC and PBC. All boundary conditions were verified to satisfy the Hill-Mandel energy equivalence. The estimated engineering constants for the four composites and three sets of boundary conditions are obtained and compared using the anisotropy indices and the Frobenius stiffness norm. The reduced constitutive tensor, used in thin plate and shell problems, is also derived from its homogenized 3D counterparts and discussed. Deformation fields are also investigated for one particular textile, and engineering constants were used in a test case - namely, a cantilever plate - to illustrate the influence of the weave pattern on an actual component. Finally, several weaving patterns were studied, conserving the volumetric fraction, analyzing the coupling terms of the resulting stiffness matrix.

Keywords: Homogenization; RVE; textile composites; weave pattern; effective properties

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Breve descrição de materiais têxteis	3
1.1.1	Características principais	3
1.1.2	Tecidos	3
2	MODELAGEM DE COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS ENTRELAÇADAS	8
2.1	Introdução	8
2.1.1	Breve histórico sobre homogeneização computacional	8
2.1.2	Abordagem analítica	10
2.1.3	Abordagem numérica	16
3	UM NOVO CONJUNTO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO	28
3.1	Considerações iniciais	28
4	AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES EFETIVAS	33
4.1	Avaliação das propriedades elásticas efetivas	33
4.1.1	Correção do volume de fibra	35
4.1.2	Direções principais de anisotropia	37
5	FERRAMENTA DE HOMOGENEIZAÇÃO	38
5.1	Descrição do algoritmo	38
5.1.1	Criação da geometria para o ANSYS	40
5.1.2	Aplicação das condições de contorno	46
5.1.3	Módulos de solução e de pós-processamento	50
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	52
6.1	Resultados numéricos	52
6.1.1	Laminados cruzados	54
6.1.2	Compósitos têxteis	60

6.1.3	Campos de tensão e de deformação	71
6.1.4	Resposta mecânica média	73
6.2	Influência do Padrão de entrelaçamento	76
6.2.1	Comparação entre matrizes de rigidez tridimensionais	77
6.2.2	Comparação entre matrizes de rigidez reduzidas	80
6.2.3	Comparação dos termos de acoplamento	82
7	CONCLUSÕES	87
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
	APÊNDICE A Resultados da influência de tecelagem	93

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Compósitos têxteis (sem matriz) e seus padrões: (a) Padrão plano; (b) Padrão 2/2 sarja; (c) 4-harness cetim; (d) 5-harness cetim; (e) 8-harness cetim; (f) Padrão cesta(Dixit e Mali [2013]).	2
Figura 1.2	Tipos de tramas	3
Figura 1.3	Elementos de um tecido	4
Figura 1.4	Diagrama do Padrão plano	5
Figura 1.5	Exemplos de padrão de tecidos do tipo cetim	6
Figura 1.6	Exemplos de padrão sarja	7
Figura 1.7	Esquema do padrão 2/2 sarja	7
Figura 2.1	Representação gráfica do modelo de Série de Ishikawa	14
Figura 2.2	Limites superiores e inferiores para $A_{11}[kg/mm]$ (a) e $b_{11}^*1/[kg]$ (b), conforme Ishikawa [1981].	16
Figura 2.3	Exemplificação do tamanho do RVE e a convergência de uma propriedade média P	17
Figura 2.4	Divisão do volume V em três partes.	19
Figura 2.5	Esquema das condições de contorno para o estado ε_A	21
Figura 2.6	Definição das entidades geométricas para as condições de contorno periódicas.	24
Figura 3.1	Notação das faces usadas na condição de contorno proposta	29
Figura 4.1	Visualização dos estados de deformação ε^i na Eq. (4.2) para os casos particulares de deformações constantes	34
Figura 4.2	Típica camada extra de resina adicionada por ferramentas computacionais	36
Figura 5.1	Visão Geral do algoritmo de homogeneização	40
Figura 5.2	Visão-macro da criação do modelo	41
Figura 5.3	Ângulos para a orientação final do elemento.	45
Figura 5.4	Ilustração da procura do nó mais próximo na face oposta	49
Figura 5.5	Ilustração da abordagem MBC	50

Figura 6.1	Laminado cruzado $[0/90]_s$	55
Figura 6.2	Comparação do módulo de elasticidade obtido por diversas formulações e limites elásticos propostos por Ishikawa [1981]	60
Figura 6.3	Padrões de entrelaçamento para os três compósitos têxteis analisados	61
Figura 6.4	Geometrias do RVE (sem resina) gerada para cada padrão da Fig. 6.3	62
Figura 6.6	Distribuição de tensão σ_{13} para o padrão plano submetido a um estado de deformação ε^1 , para o padrão plano.	72
Figura 6.7	Distribuição de tensão σ_{13} para o padrão plano submetido a um estado de deformação ε^1 , para o padrão 2/2 sarja.	72
Figura 6.8	Distribuição de tensão σ_{13} para o padrão plano submetido a um estado de deformação ε^1 , para o padrão 8-harness cetim.	73
Figura 6.9	Problema da placa em balanço.	74
Figura 6.10	Deslocamento transverso (u_3) da placa em balanço. Resultado para um modelo de casca usando as propriedades do padrão plano, presentes em (6.16).	74
Figura 6.11	Deslocamento transverso (u_3) da placa em balanço. Resultado para um modelo de casca usando as propriedades do padrão 2/2 sarja, presentes em (6.17).	75
Figura 6.12	Deslocamento transverso (u_3) da placa em balanço. Resultado para um modelo de casca usando as propriedades do 8-harness cetim, presentes em (6.18).	75
Figura 6.13	Comparação de propriedades efetivas para E_{11}	78
Figura 6.14	Comparação de propriedades efetivas para E_{22}	78
Figura 6.15	Comparação de propriedades efetivas para E_{33}	79
Figura 6.16	Comparação de propriedades efetivas para G_{12}	79
Figura 6.17	Comparação de propriedades efetivas para G_{31}	80
Figura 6.18	Comparação de propriedades efetivas para E_{11}	81
Figura 6.19	Comparação de propriedades efetivas para E_{22}	81
Figura 6.20	Comparação de propriedades efetivas para G_{12}	82
Figura 6.21	Comparação do termo de acoplamento C_{15}	84
Figura 6.22	Comparação do termo de acoplamento C_{16}	85

Figura 6.23 Comparação do termo de acoplamento C_{24} 86

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1	Propriedades dos materiais utilizados	54
Tabela 6.2	Propriedades geométricas do compósitos analisados	54
Tabela 6.3	Parâmetros do entrelaçamento para as lâmincas superiores do laminado cruzado $[0/90]_s$	54
Tabela 6.4	Laminad cruzado E-glass/Viniléster	57
Tabela 6.5	Invariantes de K E L para um laminado cruzado simétrico E-glass/Viniléster	58
Tabela 6.6	Termos da matriz de rigidez 3D homogeneizada.	58
Tabela 6.7	Constantes de engenharia para o laminado cruzado E-glass/Viniléster	60
Tabela 6.8	Entrada de dados do TexGen utilizada.	61
Tabela 6.9	Comparação das propriedades efetivas dos materiais para o padrão planoreforçado com E-glass/Viniléster.	66
Tabela 6.10	Comparação das propriedades efetivas dos materiais para o padrão 2/2 sarja reforçado com E-glass/Epoxy.	66
Tabela 6.11	Comparação das propriedades efetivas dos materiais para o 8-harness cetim reforçado como E-glass/Epoxy.	66
Tabela 6.12	Indicadores anisotrópicos para os compósitos têxteis analisados. . .	66
Tabela 6.13	Invariantes de K e L para o padrão plano.	67
Tabela 6.14	Invariantes de K e L para o padrão 2/2 sarja.	67
Tabela 6.15	Invariantes de K e L para o 8-harness cetim.	67
Tabela 6.16	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão plano.	69
Tabela 6.17	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão 2/2 sarja.	70
Tabela 6.18	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o 8-harness cetim.	70
Tabela 6.19	Parâmetros de Input no TexGen	76
Tabela 6.20	Propriedades dos materiais utilizados	76
Tabela 6.21	Termo de rigidez C_{15} médio ordenado por magnitude	83
Tabela 6.22	Termo de rigidez C_{16} médio ordenado por magnitude	84
Tabela 6.23	Termo de rigidez C_{24} médio ordenado por magnitude	86

Tabela A.1	Comparação de propriedades efetivas para a trama Padrão cesta	93
Tabela A.2	Invariantes de K e L para o Padrão cesta	94
Tabela A.3	Indicadores anisotrópicos para o Padrão cesta analisado	94
Tabela A.4	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão cesta	94
Tabela A.5	Comparação de propriedades efetivas para a trama 8-harness cetim	95
Tabela A.6	Invariantes de K e L para o 8-harness cetim	96
Tabela A.7	Indicadores anisotrópicos para o 8-harness cetim analisado	96
Tabela A.8	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão 8-harness cetim	96
Tabela A.9	Comparação de propriedades efetivas para a trama 5-harness cetim	97
Tabela A.10	Invariantes de K e L para o 5-harness cetim	98
Tabela A.11	Indicadores anisotrópicos para o 5-harness cetim analisado	98
Tabela A.12	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão 5-harness cetim	98
Tabela A.13	Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão sarga 1/2 esquerdo	99
Tabela A.14	Invariantes de K e L para o padrão sarga 1/2 esquerdo	100
Tabela A.15	Indicadores anisotrópicos para o padrão sarga 1/2 esquerdo analisado	100
Tabela A.16	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão sarja 1/2 esquerdo	100
Tabela A.17	Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão plano	101
Tabela A.18	Invariantes de K e L para o padrão plano	102
Tabela A.19	Indicadores anisotrópicos para o padrão plano analisado	102
Tabela A.20	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão plano	102

Tabela A.21	Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão	
	sarga 1/2 direito	103
Tabela A.22	Invariantes de K e L para o padrão sarga 1/2 direito	104
Tabela A.23	Indicadores anisotrópicos para o padrão sarga 1/2 direito analisado	104
Tabela A.24	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão	
	Padrão sarja 1/2 direito	104
Tabela A.25	Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão	
	2/2 sarja	105
Tabela A.26	Invariantes de K e L para o padrão 2/2 sarja	106
Tabela A.27	Indicadores anisotrópicos para o padrão 2/2 sarja analisado	106
Tabela A.28	Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão	
	Padrão 2/2 sarja	106

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CLT	Teoria Clássica dos Laminados
FEA	Método dos Elementos Finitos
SUBC	Condições de contorno cinemáticas uniformes
MBC	Condições de contorno mistas
PROMECC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
MBC ^U	Condição de contorno mista proposta
MBC ^L	Condições de contorno mistas da literatura
PBC	Condições de contorno periódicas
RUC	Célula unitária de repetição
RVE	Elemento Representativo de Volume
KUBC	Condições de contorno estáticas uniformes
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

A	Rigidez de acoplamento de extensão da CLT, N/mm
A^c	Rigidez de acoplamento de extensão da CLT, corrigida N/mm
a[*]	Flexibilidade de acoplamento de tração, mm/N
a^{*,c}	Flexibilidade de acoplamento de tração, corrigida, mm/N
A_u	Índice universal de Anisotropia
A_z	Índice de Anisotropia de Zener
B	Rigidez de acoplamento de flexo-extensão da CLT, N
B^c	Rigidez de acoplamento de flexo-extensão da CLT, corrigida, N
b[*]	Flexibilidade de acoplamento de tração-flexão da CLT $1/N$
b^{*,c}	Flexibilidade de acoplamento de tração-flexão da CLT, corrigida, $1/N$
C	Rigidez (Voigt), MPa
C	Rigidez (indicial), N/mm^2
\bar{C}	Rigidez homogeneizada, (indicial), MPa
\bar{C}	Rigidez homogeneizada, (Voigt), MPa
\bar{C}	Rigidez 2D N/mm^2
\bar{C}^α	Rigidez homogeneizada computacionalmente, (Voigt), MPa
\bar{C}^e	Rigidez homogeneizada computacionalmente, corrigida, (Voigt), MPa
D	Rigidez de acoplamento de flexão da CLT, N/mm
D^c	Rigidez de acoplamento de flexão da CLT, corrigida, $N \cdot mm$
d[*]	Flexibilidade de acoplamento de flexão da CLT $1/(N \cdot mm)$
d^{*,c}	Flexibilidade de acoplamento de flexão da CLT, corrigida, $1/(N \cdot mm)$
F_r	Norma de Frobenius
f_{wa}	Comprimento do feixe warp
f_{we}	Comprimento do feixe weft
h	Espessura da placa, mm
I	Invariante tensorial
K	Módulo volumétrico tensorial, MPa
L	Módulo deviatório tensorial, MPa
M	Momentos resultantes de placas finas, N

N_{wa}	Número de feixes warp
N_{we}	Número de feixes weft
N_t	Número de feixes na configuração do Têxtil
\mathbf{N}	Forças resultantes de placas finas, N/mm
n	Repetição de feixes warp, em Ishikawa [1981]
s	Passo de um compósito têxtil
$\bar{\mathbf{S}}$	Flexibilidade homogenizada, em notação de Voigt, mm^2/N
$\bar{\bar{\mathbf{S}}}$	Flexibilidade reduzida (bidimensional), mm^2/N
t	Forças de superfícies, N/mm^2
u	Deslocamento, mm
V	Volume, mm^3
V_o	Fração volumétrica geral de fibra
V_g	Fração volumétrica de mesoescala de fibra
V_g^α	Fração volumétrica de mesoescala de fibra, computacional
V_s	Fração volumétrica do feixe de fibra
x_1, x_2, x_3	Coordenadas do plano cartesiano

Símbolos Gregos

ε	Deformação, em notação indicial
ε_{ij}^A	Estado de deformação aplicado
ε^m	Deformação de membrana
κ	Curvatura de placa
λ_i^K	Autovalores do módulo volumétrico
λ_i^L	Autovalores do módulo deviatório
σ	Tensão em notação indicial, MPa
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensão em notação de Voigt, MPa

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos podem ser divididos entre duas categorias, caso utilize-se os tamanhos das fibras e sua distribuição como critério de classificação: (a) particulados, para fibras curtas e com distribuição/orientação aleatórias e (b) reforçados por fibras, para fibras longas e contínuas, cujas orientações/distribuição exercem grande influência nas propriedades mecânicas efetivas do componentes. Outras categorias podem ser derivadas, porém o interesse dessa dissertação consiste em compósitos reforçados por fibras ou, mais especificamente, compósitos reforçados por um aglomerado organizado de fibras, formando um padrão repetitivo de entrelaçamento. Tais compósitos são comumente descritos como compósitos têxteis.

As propriedades efetivas do compósito podem ser controladas pela mudança de orientação de fibra em uma camada, sequência de laminação, propriedades das fibras e matriz, e a combinação da fração de volume dos constituintes. Esse método de manufatura é laborioso e não permite reforço transversal (ao longo da espessura), resultando em baixa resistência à delaminação [ming Huang, 2000; Sankar e Marrey, 1997].

Como alternativa, procedimentos têxteis como tecelagem, trança e knitting podem produzir volumes maiores de material em menor tempo. Em tais técnicas, aglomerados de fibras são entrelaçados seguindo um padrão específico e periódico, e após impregnados com resinas. Por último, o processo de cura em um molde garantirá o formato final da peça. Os tecidos bidimensionais e com trançados assim fabricados garantem resistência ao impacto e ao longo da espessura, devido ao entrelaçamentos entre os feixes de fibras (Mazumda [2002]). Por conta do interlocking ser, em geral, distinto entre cenários na direção da espessura, esse tipo de estrutura é por vezes denominada como têxteis 3D (Long [2005]). Tais processos permitem a manufatura de componentes com formato complexo como unidades integrais, reduzindo ou eliminando o uso de juntas, como colas e parafusos. Os citados avanços em manufatura, entretanto, demandam o desenvolvimento de procedimentos de análise para prever a performance mecânica dos componentes fabricados por tais métodos.

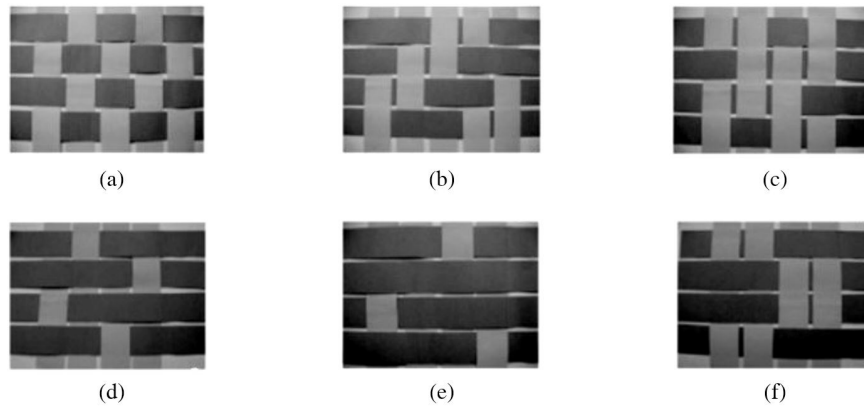


Figura 1.1 – Compósitos têxteis (sem matriz) e seus padrões: (a) Padrão plano; (b) Padrão 2/2 sarja; (c) 4-harness cetim; (d) 5-harness cetim; (e) 8-harness cetim; (f) Padrão cesta (Dixit e Mali [2013]).

Compósitos têxteis também podem ser classificados pelo comportamento mecânicos. Aqueles cujo comportamento geral possa ser abstraído como um laminado, entram na categoria de têxteis bidimensionais. Por outro lado, aqueles cujas tensões triaxiais existem, assim como reforços na direção transversal, classificam-se como têxteis tridimensionais (Long [2005]). O presente estudo fixa-se na primeira categoria dos bidimensionais. Estuda-se processos de homogeneização usados para computar as propriedades efetivas (macroscópicas) de compósitos têxteis. Os módulos de elasticidade efetivos de um RVE linear elástico para três compósitos têxteis comuns serão estudados, por meio de um conjunto de condições de contorno de deslocamento uniforme e condições de contorno periódicas. Atenção especial é dada para as condições de contorno mistas, cujo estudo culminou numa proposição de um novo conjunto a ser utilizado em um estudo de RVE, objetivando um uso futuro geral em uma análise de elementos finitos (FEA) de casca, ou de elementos de contorno (BEA).

Relações constitutivas tridimensionais de um corpo elástico, assim como para as formulações em casca são aplicadas ao compósitos têxteis analisados, com os subsequentes resultados comparados a literatura existente. Constantes mecânicas médias são obtidas e discutidas para os as formulações planas e tridimensionais.

Durante o texto, familiaridade com a Teoria Elástica é assumida, notação indicial, assim como conhecimento básico de homogeneização, análise de RVE, e teoria dos campos médios.

1.1 Breve descrição de materiais têxteis

1.1.1 Características principais

O termo material têxtil pode ser aplicado a um amplo e variado contexto; inclui-se fios, cordas, tecidos e tapetes. Compósitos têxteis, por sua vez, são materiais fibrosos, o que significa conter qualquer tipo de fibras, responsáveis por gerar um reforço em uma direção preferencial. As fibras são agrupadas em fios por impregnação de resina, que se pode dividir em três categorias: monofilamentos, mechas e fios (ver Fig. 1.2). Monofilamentos são feitos de uma única fibra; rovings (do inglês) são fios não torcidos e lisos; tows ou strand, são fios não torcidos e espessos. Aqui adota-se a tradução de tow como *aglomerado de fibras* e strand como *feixe de fibras*, sendo estes tratados como sinônimos e intercambiáveis.

Os materiais têxteis são considerados hierárquicos em termos de geometria. Neste quesito de geometria utilizado, as fibras individuais classificam-se como microescala; fios, resina e lâminas são classificados em mesoescala e tecidos aparecem em macroescala. As propriedades mecânicas em macroescala são, em geral, anisotrópicas homogêneas. No entanto, em porções menores, dependendo de distribuições de fibra e padrões de entrelaçamento, a resposta do material depende da posição do corpo. Alguns dos padrões mais utilizados na indústria são discutidos nas seções a seguir.

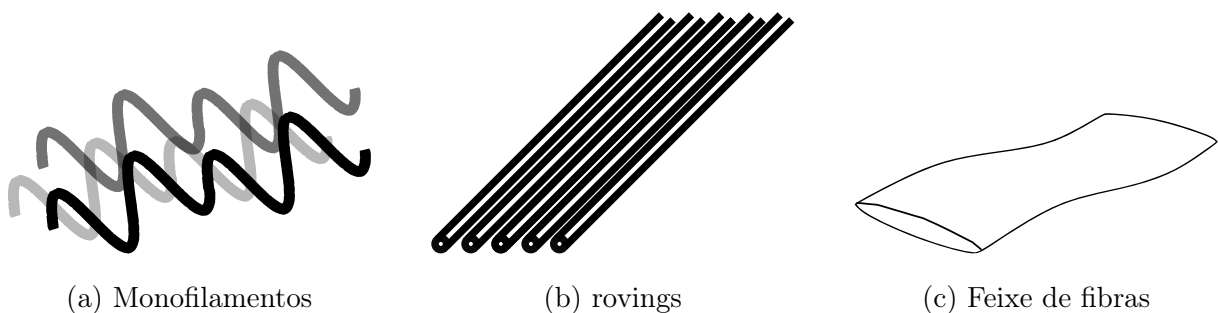


Figura 1.2 – Tipos de tramas

1.1.2 Tecidos

Tecidos são materiais que consistem em dois conjuntos de feixe de fios - denominados weft e warp (ver Fig.1.3) - entrelaçados em direções ortogonais. Caso o ângulo

entre os feixes não seja reto, o tecido é classificado como um compósito padrão angular (ou *braided*, do inglês), segundo Long [2005]. Os compósitos têxteis possuem um padrão de tecido periódico, do qual se usufrui para sua classificação. Na seção seguinte, será mostrada uma breve discussão sobre tais padrões e suas nomenclaturas.

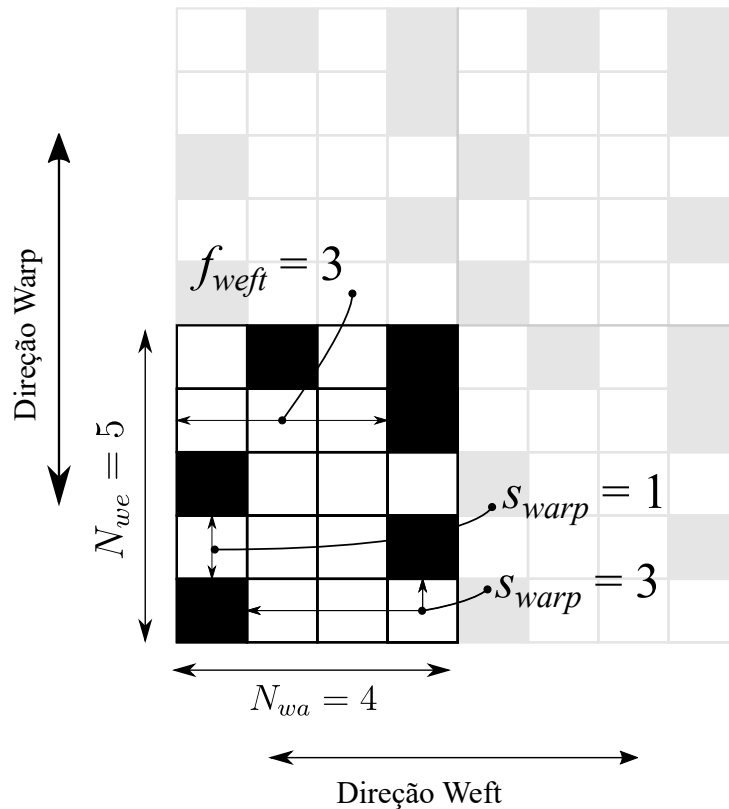


Figura 1.3 – Elementos de um tecido

1.1.2.1 Padrão de tecido

Um padrão de tecido é caracterizado por diagrama padronizado, convencionado por quadrados brancos e pretos. Quadrados brancos são os feixes weft, os pretos, warp (ver Fig. 1.3). O padrão de tecido pode ser integralmente descrito pela seguinte lista de parâmetros (Long [2005]):

1. N_{wa}/N_{we} : Número de feixes warp e weft, respectivamente.
2. n : Unidade de repetição para o padrão de tecido.
3. f_{wa}/f_{we} : Comprimento dos feixes warp/weft. É medido em termos de interseções sequenciais em uma determinada direção - warp ou weft. Basicamente, acaba sendo

o número de quadrados entre dois tipos de tramas. A exemplo, para o f_{wa} , seria o número de quadrados brancos no meio de duas tramas warp (ver Fig. 1.3)

4. Passo (s): É a distância entre dois feixes weft adjacentes medidos por feixes warp (quadrados brancos).

1.1.2.2 Tipos de padrão de tecido

Há três tipos básicos de padrão de tecido: Padrão plano, padrão sarja e padrão cetim. Nessas configurações, $N_{wa} = N_{we} = N_t$, e o passo s constante.

Padrão plano

O padrão plano é o padrão mais simples, com $N_t = 2$ e $s = 1$ (ver Fig. 1.4).

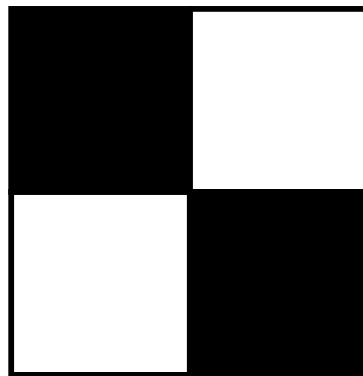


Figura 1.4 – Diagrama do Padrão plano

Padrão cetim

O padrão cetim contém $N_t > 5$ e um passo $s > 2$. Além disso, ocorre apenas uma interseção por direção *warp*. A Fig. 1.5 mostra essa ideia. Na nomenclatura padrão, usa-se padrão cetim N_t/s para diferenciar os compostos; portanto, um padrão cetim $7/4$ subentende-se que $N_t = 7$ e $s = 4$. Uma nomenclatura especial é dada para padrão cetim $5/2$ e padrão cetim $8/3$, que são comumente chamados de 5-harness cetim e 8-harness cetim, respectivamente. Esses exemplos são desenhados na Fig. 1.5 .

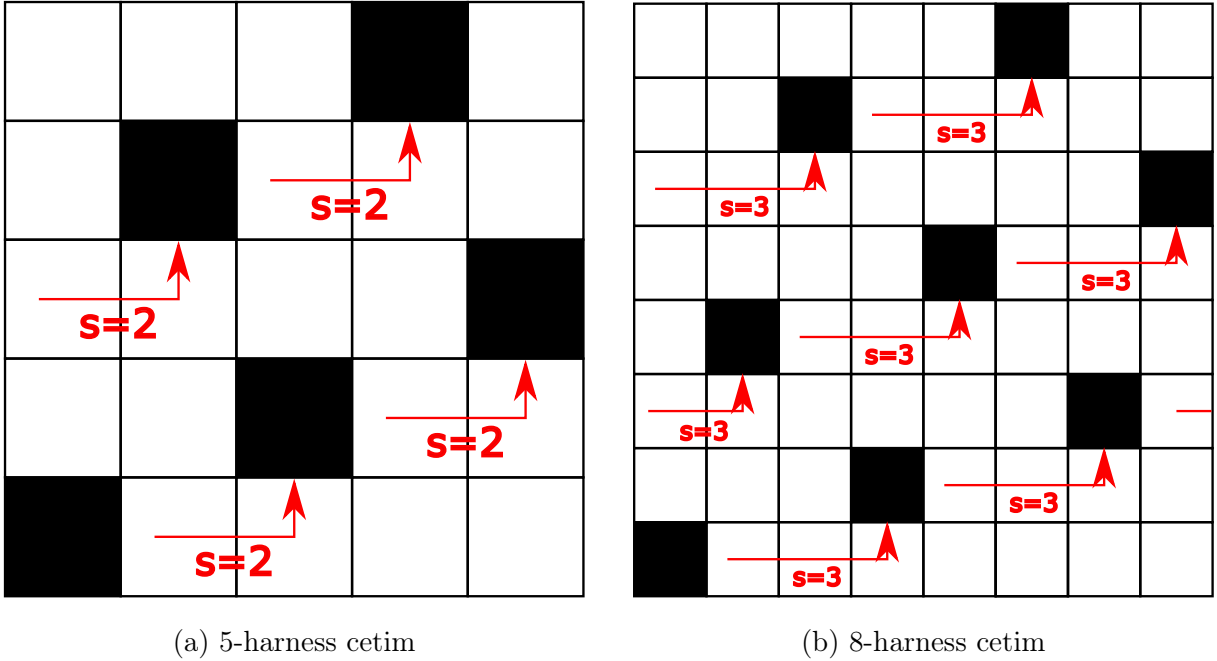


Figura 1.5 – Exemplos de padrão de tecidos do tipo cetim

Padrão sarja

O padrão sarja é um padrão com $N_t > 2$ e $s = 1/ -1$. O parâmetro s é positivo se o deslocamento for direcionado para a direita e negativo no caso contrário. O nome completo padrão é designado pelo número de interseções warp seguidas por interseções de weft (f_{wa} / f_{we}). Portanto, um padrão sarja 1/2 tem $f_{wa} = 1$ e $f_{we} = 2$. Se $s = 1$, é dito uma sarja direita, enquanto para $s = -1$ é representado como sarja esquerda. Este conceito é facilmente observado em um desenho estendido do padrão (Fig. 1.6)

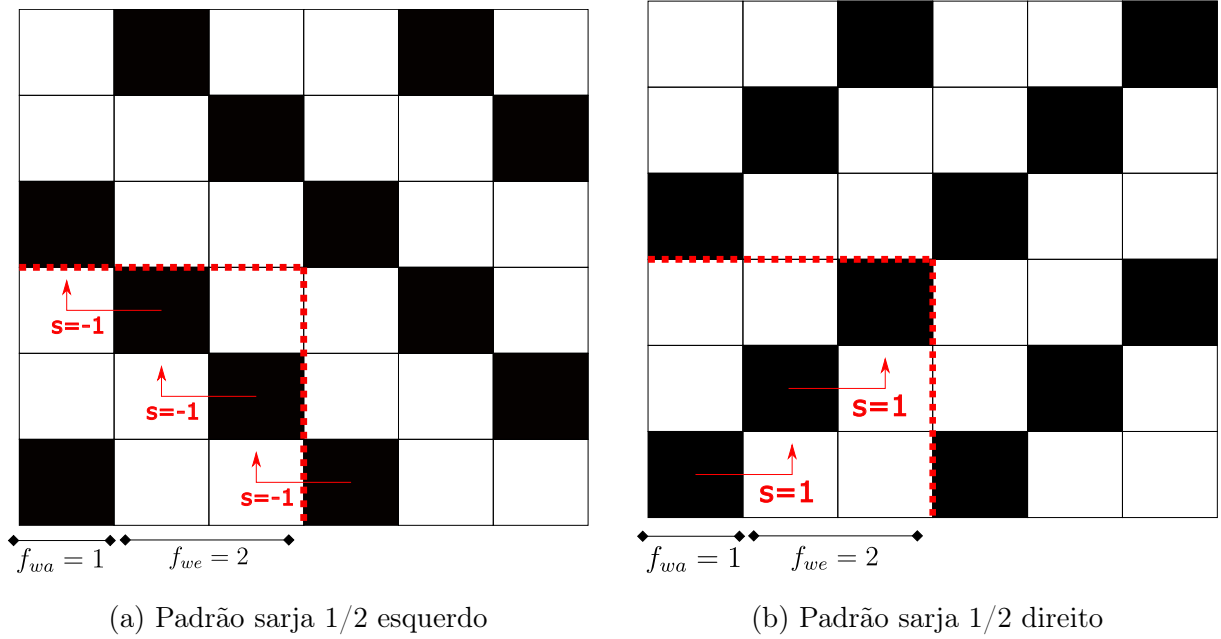


Figura 1.6 – Exemplos de padrão sarja

Um caso especial que merece atenção é o padrão 2/2 sarja, uma vez que é comumente usado em aplicações industriais. A nomenclatura segue a mesma lógica. Logo, possui feixes $f_{wa} = 2$ e $f_{we} = 2$, com o passo $s = 1$. Para fins de clareza, um esquema é ilustrado na Fig. 1.7 .

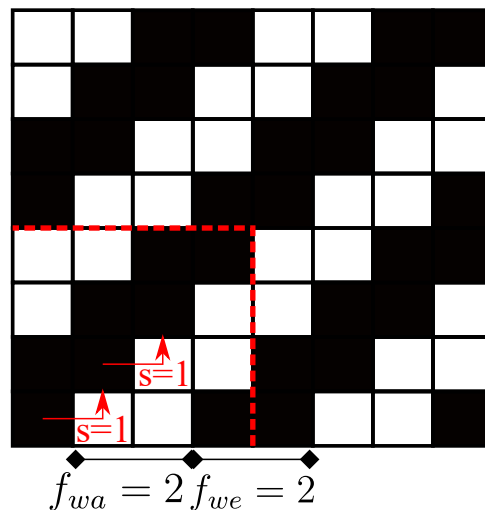


Figura 1.7 – Esquema do padrão 2/2 sarja

2 MODELAGEM DE COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS ENTRELACADAS

2.1 Introdução

A modelagem de compósitos reforçados por fibras entrelaçadas pode ser dividida em duas metodologias: analítica e numérica. A importância de resultados analíticos pode ser resumida pela capacidade de representar o comportamento mecânico do compósito e fornecer métricas importantes ao projeto, como a magnitude de acoplamento entre extensão-flexão, rigidez média, e cargas de falha aproximadas. Entretanto, tais modelos são limitados caso o projetista queira explorar construções mais complexas de fibra e matriz. Além disso, a maior parte das formas analíticas são baseadas na Teoria Clássica dos Laminados (CLT). Portanto, as soluções analíticas negligenciam o cisalhamento na direção da espessura (fora do plano), o que torna a análise incapaz de prever alguns efeitos como a delaminação. Metodologias computacionais são mais poderosas, porém possuem o grande viés de serem computacionalmente custosas.

Devido a microestrutura complexa de compósitos têxteis, homogeneização computacional é comumente utilizada para a estimativa das constantes elásticas. A presente dissertação estará concentrada na utilização metodologia conhecida como "Relação entre as médias": um aporte teórico extenso relativo a processos de homogeneização, cujo aprofundamento foge do escopo do texto, sendo devidamente descrito em textos como Nemat-Nasser et al. [1996]. Um RVE (Elemento Representativo de Volume) pode ser visto como uma amostra de material heterogêneo grande o suficiente para representar estatisticamente seus constituintes. Em tal bloco de material, aplica-se condições de contorno de deslocamento, de trações, ou de forma generalizada, condições mistas, para obter a matriz de rigidez homogeneizada. Esses conceitos estão detalhados na seção 2.1.3.

Uma vez que o cerne da dissertação é a homogeneização computacional utilizando o conceito de RVE, faz-se uma breve introdução cronológica sobre o tema, citando as principais contribuições.

2.1.1 Breve histórico sobre homogeneização computacional

O aporte teórico necessário para a homogeneização computacional fora proposto inicialmente por Hill [1963], conhecido como "relação entre as médias". Em seu modelo,

partiu-se do princípio de que um sólido é composto por duas fases homogêneas e isotrópicas, firmemente coladas entre si. Hill [1963] provou a condição de que a imposição de deslocamentos na fronteira do corpo (KUBC), ou de trações (SUBC), que produzam um campo de deformações (ou de tensões) uniforme em um corpo homogêneo, seja esse corpo um elemento representativo de volume (RVE), a média da energia dos campos de tensões e deformações locais é igual à média de energia de deformação média do RVE. Essa equivalência implica na imposição de condições de contorno específicas que produzem campos de tensões/deformações passíveis a serem relacionados com um tensor constitutivo médio, ou homogeneizado. Ou seja, se as propriedades homogeneizadas de um material heterogêneo são energeticamente equivalentes a um material com tensor constitutivo homogêneo, estas podem ser empregadas para modelar corpos em escalas maiores que o RVE para obtenção de uma resposta mecânica igualmente equivalente. Essa definição é explorada na seção 2.1.3.

Originalmente, Hill [1963] propôs dois tipos de condição de contorno a serem aplicadas. Uma das condições de contorno gera deformações uniformes, outra resulta em trações uniformes. Hazanov e Amieur [1995], anos a frente, notou a necessidade de trazer combinações destas condições de contorno tornando-as gerais, o que esboçou os primeiros passos das condições de contorno mistas. Hazanov e Amieur [1995] possibilitaram gerar campos mistos, e logo replicar a resposta de tensão/deformação em condições bastantes específicas, como em um teste de compressão uniaxial, aplicado, por exemplo, na investigação de Shen e Brinson [2006]. Estas abordagens, no entanto, até o momento, careceram de um tratamento específico para estruturas regulares e periódicas.

As primeiras abordagens em homogeneização para estruturas periódicas regulares foi desenvolvida por Panasenko [1988], o “Método de Células”, em que lançou mão do conceito de expansões assintóticas para a caracterização das propriedades médias. A tentativa, embora elegante matematicamente, é restrita a condições de geometria específicas. Anos mais tarde, a metodologia desenvolvida por Luciano e Sacco [1998] permitiu ser geral o suficiente para ser aplicável a qualquer formato de inclusão e proporção em um corpo homogêneo, sendo esta característica atraente para modelagens computacionais. A abordagem introduzida por Luciano e Sacco [1998] fora aplicada, a exemplo, no trabalho de Barbero et al. [2006], na homogeneização de compósitos têxteis.

Barbero et al. [2006] empregou condições de contorno periódicas na homogeneiza-

ção de um padrão plano, comparando com resultados experimentais e cálculos baseados na CLT. Os resultados mostraram uma excelente concordância com os experimentos, sobrepujando o procedimento baseado na CLT, em especial na determinação do módulo de cisalhamento efetivo. Rao et al. [2008] também aplicou condições de contorno periódicas, neste contexto, entretanto, voltado para o efeito da arquitetura (padrão) do têxtil nas propriedades mecânicas finais. O autor também considerou o desacoplamento entre fibras e matriz, por meio da aplicação da técnica de célula unitária, conjuntamente com um modelo de zona coesiva. A abordagem mostrou-se congruente com resultados experimentais, em especial quando o desacoplamento entre fibra e matriz é considerado. Jacques et al. [2014] estudou a aplicação geral das condições de contorno periódicas, propondo uma abordagem para eximir-se da obrigatoriedade de uma malha periódica. Para tal, aplicou restrições em nós de referência gerais localizados na fronteira de um RVE. Ullah et al. [2019] implementou uma metodologia para prever o comportamento elástico de compósitos têxteis 2D e 3D. A implementação lançou mão de três tipos de condições de contorno: condições de contorno estáticas, condições de contorno periódicas, e condições de contorno de tração uniforme. Os resultados mostraram uma diferença menor que 5% entre as condições de contorno testadas e os dados experimentais. Espadas-Escalante et al. [2017] obteve resultados divergentes. Em sua abordagem, ficou constatada que as condições de tração uniforme não eram adequadas para prever os módulos elásticos E_{11} e E_{22} . O autor propôs um conjunto de condições de contorno mistas, cuja a formulação baseia-se em um estado de tração uniforme na direção da espessura (não necessariamente nulo) e em condições periódicas no plano. Os resultados mostraram que a combinação de diferentes condições de contorno conseguiram valores médios mais próximos aos resultados experimentais.

Na seção a seguir, discorrer-se-á a respeito das bases necessárias para as formulações analíticas, e se explorará o conceito de RVE e os requisitos energéticos das condições de contorno, segundo Hill [1963].

2.1.2 Abordagem analítica

Seja um ponto em um espaço tridimensional caracterizado por seu estado de tensão-deformação, em notação de Voigt (Jones [2018]), i.e.:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Nota-se que $\varepsilon_{23} = 2\gamma_{23}$, $\varepsilon_{13} = 2\gamma_{13}$ e $\varepsilon_{12} = 2\gamma_{12}$, sendo que γ é a deformação cisalhante. A relação constitutiva mais geral entre $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, com o estado termodinâmico e restrições tensoriais de simetria já consideradas, a lei de Hook generalizada torna-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{C} contém até 21 constantes constitutivas linearmente independentes. Compósitos laminados em geral possuem elevada razão de aspecto, permitindo modelar a maior parte dos elementos estruturais como modelos de placa ou de casca. Modelos em casca permitem a redução das equações de equilíbrio ao ponto de se obter soluções analíticas simplificadas. Tais formulações contém informação essencial da cinemática de deformação, como tensão e deformação de flexão no plano. Por razões de simplicidade, neste texto apenas será considerado modelos de placa sobre o regime elástico linear.

A superfície média da placa é em geral considerada como plano de referência, dispondo-se no plano (x_1, x_2) , de forma que a espessura h constante é medida através do eixo x_3 , $x_3 = [-h/2, +h/2]$. Entre os diversos modelos de laminados planos propostos, a grande parte das soluções são baseadas na Teoria Clássica dos Laminados (CLT), a qual emprega a cinemática clássica de placas finas. Logo, faz-se importante relembrar as hipóteses principais de Kirchhoff para placas:

1. As Linhas retas e perpendiculares ao plano de referência, assim permanecem após a deformação;
2. As Linhas transversais normais são inextensíveis;

Como consequência da primeira hipótese, as deformações de cisalhamento transversais são anuladas ($\varepsilon_{13} = 0$ e $\varepsilon_{23} = 0$). Da segunda hipótese, as deformações normais transversas são negligenciadas ($\varepsilon_{33} = 0$). Portanto, gera-se ao mesmo tempo um estado

plano de deformação e de tensão, caracterizando-se uma inconsistência da teoria das placas finas. A lei de Hooke generalizada (Eq. (2.2)) é reduzida para:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{16} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{16} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

ou, por simplicidade:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\bar{\mathbf{C}}}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

onde $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$ corresponde a matriz constitutiva plana (Jones [2018]).

As tensões de placa resultantes (tensão por unidade de comprimento) são avaliadas pela integração local das tensões ao longo da espessura, gerando tensões resultantes de membrana e flexão:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{16} \end{pmatrix} = \int_h \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{16} \end{pmatrix} dx_3, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{16} \end{pmatrix} = \int_h \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{16} \end{pmatrix} x_3 dx_3. \quad (2.6)$$

As seguintes hipóteses são assumidas ao lançar mão da teoria clássica dos laminados (CLT).

1. Lâminas perfeitamente unidas;
2. Cada lâmina é linear e ortotrópica;
3. O campo de deformações é contínuo ao longo da espessura da placa.

O campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ da Eq. (2.3) pode ser dividida em sua porção estensional (membrana) e flexional:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + x_3 \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.7)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ representa as deformações de extensão/cisalhamento enquanto que $\boldsymbol{\kappa}$ constitui as mudanças de curvatura da placa. Após inserir a Eq. (2.7) na Eq. (2.3) o termo $\boldsymbol{\kappa}$ pode ser integrado na direção da espessura - Eqs. (2.5) e (2.6) (Reddy [2003]), desta forma adicionando a contribuição de cada lâmina. A resultante tensão-deformação básica da CLT pode então ser obtida:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} são as matrizes de *rigidez* de acoplamento de extensão, flexo-extensão e flexão, respectivamente. O inverso desses termos são denotados como \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* e \mathbf{d}^* , respectivamente, caso os coeficientes de *flexibilidade* sejam requisitados. Além de usar resultantes de tensão, a Eq. (2.8) pode ser diferenciada da Eq. (2.3) pelo fato desta já incorporar a cinemática do modelo de placa de Kirchoff, sendo denotada neste ponto como matriz ABD .

2.1.2.1 Modelo de Ishikawa e Chou

Uma das primeiras abordagens analíticas publicadas para a avaliação da rigidez de compósitos têxteis fora o bem-conhecido modelo de série, proposto por Ishikawa [1981], o qual proveu soluções fechadas para os coeficientes de acoplamento macroscópicos da submatriz \mathbf{B} . O modelo é por consequência baseado nas hipóteses de Kirchoff, o que o torna uma solução interessante a ser comparada com outros métodos. Neste trabalho, os efeitos de temperatura não serão considerados, embora a formulação original de Ishikawa [1981] tenha-os incluído. Por conveniência, os termos da matriz ABD são aqui reescritos para um laminado cruzado geral, por meio das constantes de engenharia, conforme Ishikawa [1981], na seguinte expressão:

$$A_{11} = A_{22} = h \frac{(E_L + E_T)}{2(1 - \nu_{LT}\nu_{TT})}, \quad (2.9a)$$

$$A_{12} = h \frac{\nu_L E_T}{(1 - \nu_{LT}\nu_{TT})}, \quad (2.9b)$$

$$A_{66} = h G_{LT}, \quad (2.9c)$$

$$B_{11} = -B_{22} = \frac{(E_L - E_T) h^2}{8(1 - \nu_{LT}\nu_{TT})}, \quad (2.9d)$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{(E_{LL} + E_{TT}) h^3}{24(1 - \nu_{LT}\nu_{TT})}, \quad (2.9e)$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{LT} E_{LL} h^3}{12(1 - \nu_{LT}\nu_{TT})}, \quad (2.9f)$$

$$D_{66} = \frac{G_{LT} h^3}{12}, \quad (2.9g)$$

onde os subíndices L e T são propriedades efetivas na direção da fibra e transversal a esta, respectivamente, em uma lâmina unidirecional.

A ideia básica do modelo de série é negligenciar o caráter bidimensional da placa, e assumir uma ocorrência repetitiva de um laminado cruzado, com reforços alternados, de comprimento na (ver Fig. 2.1). Despreza-se também os efeitos de ondulação da trama de fios.

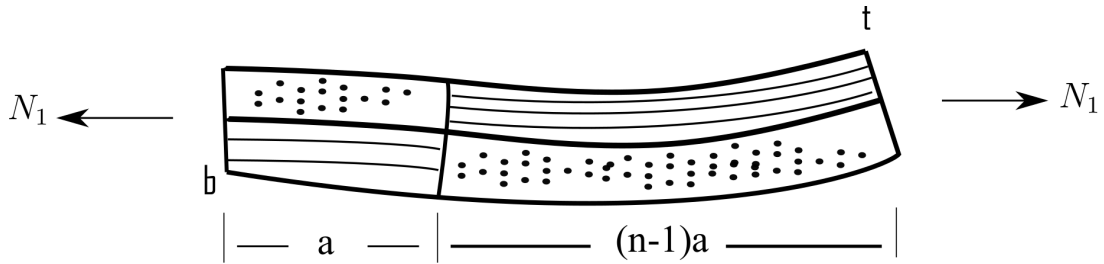


Figura 2.1 – Representação gráfica do modelo de Série de Ishikawa

O modelo é submetido a uma tração uniforme $\mathbf{N} = (N_{11} \ 0 \ 0)^T$ e momento \mathbf{M} nulo. Através da expressão equação (2.8), integrando-se na direção axial, a Eq. (2.10) para a curvatura média do segmento da Fig. 2.1 pode ser obtida.

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{na} \int_0^{na} \kappa_1 dx = \frac{1}{na} \left(\int_0^a \kappa_1^b dx + \int_a^{na} \kappa_1^t dx \right) = \frac{N_1}{na} \left(\int_0^a b_{11}^{*b} dx + \int_a^{na} b_{11}^{*t} dx \right) \quad (2.10)$$

Na expressão, os superíndices t e b representam, respectivamente, a região que a o reforço está no topo e na base, respectivamente, como representado na Fig. 2.1 . Note que $b_{11}^{*t} = -b_{11}^{*b}$, pela alternância da sequência do laminado¹. O lado direito da Eq. (2.10) pode então ser reescrito:

$$\bar{\kappa}_{11} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) b_{11}^{*t} N_1 , \quad (2.11)$$

o que implica, pela expressão inversa da Eq. (2.8) , que o acoplamento \mathbf{b}^* corrigido para uma montagem em série como a da Fig. 2.1 torna-se:

$$\mathbf{b}^{*,c} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \mathbf{b}^{*,t} \quad (2.12)$$

em que o sobreíndice c refere-se à correção. Nota-se que $\mathbf{a}^{*,t} = \mathbf{a}^{*,b}$ e $\mathbf{d}^{*,t} = \mathbf{d}^{*,b}$, portanto, tais termos corrigidos são idênticos aos originais:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{*,c} &= \mathbf{a}^{*,t} , \\ \mathbf{d}^{*,c} &= \mathbf{d}^{*,t} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

A inversão dos termos matriz abd corrigida, fornecidos pelas Eqs. (2.12) e (2.13) geram a matriz ABD corrigida, representando-se um limite inferior de rigidez.

A obtenção do limite superior de rigidez é alcançada através a imposição de tensões de membrana e de flexão uniformes ao longo do modelo. A força resultante média pode ser escrita conforme a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{11} &= \frac{1}{na} \int_0^{na} N_1 dx \\ &= A_{11} \varepsilon_{11}^m + A_{12} \varepsilon_{22}^m + \left(1 - \frac{2}{n}\right) B_{11} \kappa_{11} , \end{aligned} \quad (2.14)$$

que permite obter os coeficientes corrigidos diretamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^c &= \mathbf{A} , \\ \mathbf{B}^c &= \left(1 - \frac{2}{n}\right) \mathbf{B} , \\ \mathbf{D}^c &= \mathbf{D} , \end{aligned} \quad (2.15)$$

¹Para um laminado cruzado, quando alterna-se a sequência de laminação, os termos de acoplamento de flexo-extensão alternam de sinal. É exatamente o que ocorre na Fig. 2.1. Na porção a , as fibras superiores estão na direção transversal ao eixo x_1 , o que representaria uma montagem $[90, 0]$. Na porção $(n-1)a$, a laminação inverte-se, o que resulta uma montagem $[0, 90]$. Logo, $b_{11}^{*t} = -b_{11}^{*b}$.

A Fig. 2.2 mostra os limites inferiores e superiores para o b_{11}^* e A_{11} como função no parâmetro n , que representa a quantidade de feixes transversais entre as alternâncias entre feixes longitudinais. Note que para um Padrão plano, o coeficiente de acoplamento é zerado.

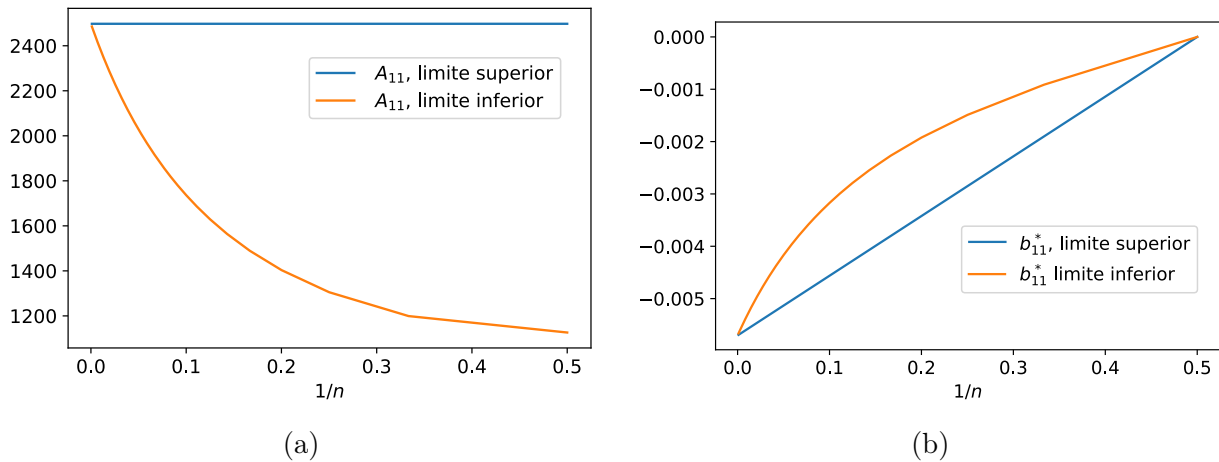


Figura 2.2 – Limites superiores e inferiores para $A_{11}[kg/mm]$ (a) e $b_{11}^*1/[kg]$ (b), conforme Ishikawa [1981].

2.1.3 Abordagem numérica

2.1.3.1 RVE

O *elemento representativo de volume* (RVE) concede uma ferramenta útil para relacionar a microestrutura e as propriedades médias (ou efetivas) de um sólido homogêneo (Nemat-Nasser et al. [1996], Hill [1972]). Abordagens baseadas em RVE voltadas mecânica clássica multi-escala, descrevem ambas as escalas macro e micro em termos de uma cinemática convencional fundada em princípios teóricos sólidos dos trabalhos de Hill [1972] e Mandel [1998]. Portanto, constituem uma metodologia adequada a ser implementada no presente contexto, uma vez que o interesse principal encontra-se na relação macroscópica constitutiva para uma classe de compósitos.

Nemat-Nasser e Hori [1996] postula que o RVE precisa incluir as propriedades que impactam em efeitos de primeira ordem nas grandezas homogenizadas. Portanto, em um estudo de metalurgia, a exemplo, uma certa quantia de microns poderia ser considerado uma micro-escala, e centenas de microns poderiam ser usadas como definição da macro-escala, ou escala contínua. Por outro lado, em mecânica de compósitos, o RVE deverá

conter ao menos alguns milímetros para englobar uma quantia satisfatória de reforços que poderiam capturar propriamente efeitos macroscópicos.

Um RVE precisa representar uma propriedade P de um sólido de forma completa, e mitigar variações estatísticas das propriedades dos constituintes. Ou seja, deverá conter um volume de material adequado (ou de lado D) cujas as propriedades mecânicas efetivas do material sejam passíveis de serem representadas estatisticamente, independentemente do tamanho característico das propriedades dos materiais que o constitui (λ). Para fins de analogia, a Fig. 2.3 ilustra um exemplo da percepção de cor (propriedade P) de uma imagem para um número variáveis de pixels (de tamanho λ) em um RVE de tamanho D . A dimensão D é da magnitude da célula unitária de repetição RUC.

No caso geral, não é factível estabelecer um RUC (célula de repetição unitária), o que implica, por questão de generalidade, D sendo qualquer número real. Ao regular o tamanho o RVE, é esperado que a propriedade P atinja assintoticamente um valor estável das propriedades, em um número de RUC computacionalmente aceitável. O sólido, nessa configuração, é então homogenizado, após a aplicação das técnicas computacionais e teóricas corretas.

Compósitos têxteis possuem fases de reforço entrelaçadas, formando um padrão de tecido, de repetição periódica, o que possibilita representar o RVE por um número determinado de RUC. Nesse caso, o número necessário de RUC é relativamente baixo, sendo suficiente apenas uma unidade, em geral, como ficará evidente das seções futuras deste texto.

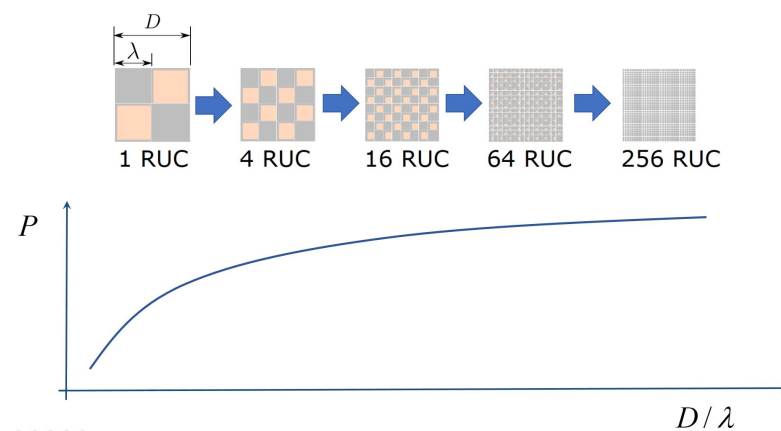


Figura 2.3 – Exemplicação do tamanho do RVE e a convergência de uma propriedade média P

2.1.3.2 Condições de contorno

As condições de contorno impostas em um RVE exercem um grande influência na análise. Tais grandezas precisam respeitar restrições mínimas para assegurar a equivalência de energia entre as tensões locais e pontuais, e as médias (Nemat-Nasser et al. [1996]). Na maioria dos casos, as condições de contorno típicas são provindas de três categorias: condições de contorno estáticas uniformes (KUBC), condições de contorno cinemáticas uniformes (SUBC), e condições de contorno periódicas (PBC) (Hazanov e Amieur [1995], Espadas-Escalante et al. [2017]). Nesse trabalho, um quarto tipo de condição de contorno será proposto, derivado da combinação das anteriores, referenciado aqui como condição de contorno mista (MBC^U).

A equivalência energética mencionada, também conhecida como Princípio de Hill-Mandel da Macro-homogeneidade (ou, de forma abreviada, critério de energia de Hill), precisa ser satisfeito por todas as condições de contorno, e está, a priori, restrito ao contexto de problemas estáticos sobre o regime linear (Hill [1965], Mandel [1998], de Souza Neto e Feijóo [2008]). Denotando a média volumétrica como $\langle \cdot \rangle_V$, as tensões e deformações em macro-escala definidas sobre uma amostra de material tornam-se:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle_V &= \frac{1}{|V|} \int_V \sigma_{ij} dV , \\ \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V &= \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon_{ij} dV . \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que $|V|$ é o volume do corpo. Evidentemente, σ_{ij} e ε_{ij} são as tensões e as deformações em escala microscópica, logo a lei de Hooke deve-se referir a um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) . \quad (2.17)$$

A nível macroscópico, o tensor elástico representa uma relação constitutiva média em V , portanto:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_V = \bar{C}_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V , \quad (2.18)$$

onde a dependência da magnitude de V está em evidência.

A condição de energia de Hill requer que a densidade média de energia $\langle U \rangle$ seja equivalente em ambos os casos. Lançando-se mão das Eqs. (2.17) e (2.18), tem-se, na ausência de taxas de tensão:

$$\langle U \rangle_V = \frac{1}{2} \langle \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle_V = \frac{1}{2} \langle \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V \bar{C}_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_V \rangle_V, \quad (2.19)$$

ou

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_V = \langle \sigma_{ij} \rangle_V \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V. \quad (2.20)$$

Antes de prosseguir nos detalhes de cada tipo de condição de contorno, é importante provar a relação entre $\langle \varepsilon_{kl} \rangle_V$ e as condições de contorno do tipo KUBC, isto é:

$$u_i|_{\partial V} = \varepsilon_{ij}^A x_j, \quad (2.21)$$

onde ε_{ij}^A denota um estado de deformação constante prescrito aplicado, e x um vetor posição. Essa prova será conduzida utilizando a notação matricial. Da definição da deformação média (Eq. (2.16)), têm-se:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \frac{1}{2V} \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV. \quad (2.22)$$

Para fins de generalidade, assume-se que o volume V é composto por duas sub-regiões de volume V_1 e V_2 conectadas por uma interface de volume $V_1 \cap V_2$, de forma que $V = V_1 + V_2 + V_1 \cap V_2$ como representado na Fig. 2.4 .

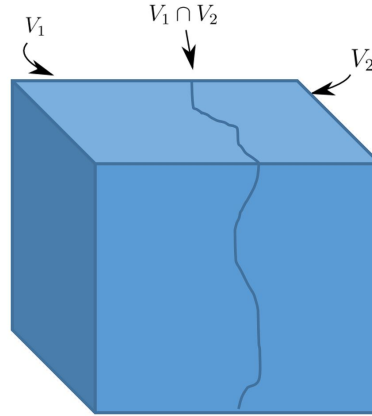


Figura 2.4 – Divisão do volume V em três partes.

Nessa partição do volume, Eq. (2.22) é reescrita:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \frac{1}{2V} \left[\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV + \int_{V_1 \cap V_2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \right], \quad (2.23)$$

o que pode ser convertida em uma equação restrita ao contorno usando-se o teorema da divergência:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \frac{1}{2V} \left[\int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dA + \int_{\partial V_1 \cap \partial V_2} (u_i n_j + u_j n_i) dA \right]. \quad (2.24)$$

Agora a condição de contorno (eq. (2.21)) pode ser imposta, resultando em:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V &= \frac{1}{2V} \left[\int_{\partial V} (\varepsilon_{ik}^A x_k n_j + \varepsilon_{jk}^A x_k n_i) dA + \int_{\partial V_1 \cap \partial V_2} (u_i n_j + u_j n_i) dA \right], \\ &= \frac{1}{2|V|} \left[\int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{ik}^A x_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{jk}^A x_k) \right) dV + \int_{\partial V_1 \cap \partial V_2} (u_i n_j + u_j n_i) dA \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

o que, depois de manipulações algébricas, simplifica-se para:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \varepsilon_{ij}^A + \frac{1}{2V} \int_{\partial V_1 \cap \partial V_2} (u_i n_j + u_j n_i) dA. \quad (2.26)$$

O termo $u_i n_j + u_j n_i$ na Eq. (2.26) representa uma mudança abrupta no campo de deslocamentos ao longo da interface entre V_1 e V_2 . Na situação em que os volumes estão perfeitamente justapostos, os termos da integral de contorno são anulados, resultando na equivalência conhecida como *Teorema da Deformação Média*, escrito como:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \varepsilon_{ij}^A. \quad (2.27)$$

2.1.3.3 Condições de contorno estáticas uniformes

Uma vez que a Eq. (2.27) está demonstrada, é possível detalhar as diferentes tipos de condições de contorno. Como mencionado anteriormente, as condições de contorno cinemáticas uniformes (KUBC) são estabelecidas se os deslocamentos nas fronteiras são descritos como na Eq. (2.21). Outros autores, como Espadas-Escalante et al. [2017] e Shen e Brinson [2006], alternativamente nomearam a mesma condição como Condição de Contorno de Deslocamento Uniforme. Essencialmente, a KUBC é um campo de deslocamentos cinematicamente admissível imposto em um cubo, como ilustrado na Fig. 2.5, escreve-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Caso o sistema de coordenadas global é localizado no centro do cubo, torna-se trivial escrever:

$$u|_{\mathbf{x}_i=(a_1,0,0)^T} = -u|_{\mathbf{x}_i=(-a_1,0,0)^T} = \varepsilon_{11}^A a_1 ,$$

onde a_1 é metade do tamanho da aresta do cubo.

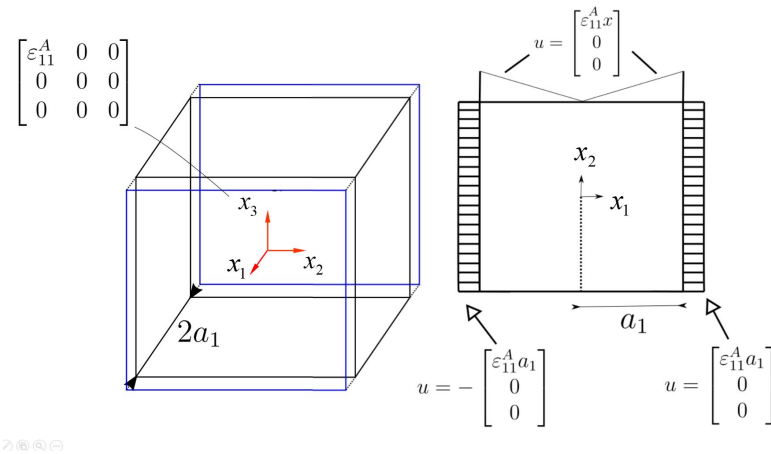


Figura 2.5 – Esquema das condições de contorno para o estado ε_A

Agora é necessário mostrar que a condição de energia de Hill é satisfeita para a condição de contorno $u_i|_{\partial V} = \varepsilon_{ij}^A x_j$. O trabalho realizado pela força de superfície t_i na superfície ∂V do sólido é escrito como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} u_i t_i dA &= \int_{\partial V} u_i \sigma_{ij} n_j dA , \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) dV , \\ &= \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) \sigma_{ij} dV , \\ &= \int_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Alternativamente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} u_i t_i dA &= \int_{\partial V} \varepsilon_{ij}^A x_j \sigma_{ij} n_j dA , \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{ij}^A x_j) \sigma_{ij} dV , \\
&= \int_V \varepsilon_{ij}^A \sigma_{ij} dV .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Usufruindo-se do Teorema da Deformação média (Eq. (2.27)), observa-se que as resultantes das Eqs. (2.28) e (2.29) provam a equivalência de energia:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V \sigma_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}^A \sigma_{ij} . \tag{2.30}$$

2.1.3.4 Condições de contorno periódicas

Luciano e Sacco [1998] introduziram o conceito de avaliação das propriedades médias de um meio periódico sujeito a um estado de tensão ou de deformação médio. Em um prisma periódico $2a_1 \times 2a_2 \times 2a_3$ (ver Fig. 2.6), o campo de deslocamentos em seu contorno pode ser escrito como:

$$u_i(a_1, x_2, x_3) - u_i(-a_1, x_2, x_3) = 2\varepsilon_{i1} a_1, x_2 = [-a_2, a_2], \forall x_3 \in [-a_3, a_3] , \tag{2.31a}$$

$$u_i(x_1, a_2, x_3) - u_i(x_1, -a_2, x_3) = 2\varepsilon_{i2} a_2, x_1 = [-a_1, a_1], \forall x_3 \in [-a_3, a_3] , \tag{2.31b}$$

$$u_i(x_1, x_2, a_3) - u_i(x_1, x_2, -a_3) = 2\varepsilon_{i3} a_3, x_1 = [-a_1, a_1], \forall x_2 \in [-a_2, a_2] . \tag{2.31c}$$

A Eq. (2.31) é conhecida como condição de contorno periódica (PBC). Maiores detalhes da derivação das Eqs. (2.31) são omitidas nesse texto. Podem ser encontradas, todavia, em Luciano e Sacco [1998]. As micro-deformações e micro-tensões em um meio periódico são representadas pelas equações:

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) , \tag{2.32}$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) , \tag{2.33}$$

em que ε_{ij}^0 and σ_{ij}^0 representa as deformações médias e tensões médias, respectivamente. ε_{ij}^p and σ_{ij}^p são as deformações e tensões V-periódicas. Tais entidades são definidas pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) dV = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V, \quad (2.34a)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) dV = \langle \sigma_{ij} \rangle_V, \quad (2.34b)$$

$$0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) dV, \quad (2.34c)$$

$$0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) dV. \quad (2.34d)$$

As equações (2.31) estabelecem uma relação entre deslocamentos em faces opostas. Logo, os deslocamentos não são diretamente impostos, diferentemente do que a Eq. (2.21) propõe. Buscando sua implementação computacional, a Eq. (2.31a) pode ser reescrita como:

$$u_i(a_1, x_2, x_3) - u_i(-a_1, x_2, x_3) = 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

O mesmo procedimento é aplicado às Eqs. (2.31b) e (2.31c). A Eq. (2.35) indica que faces opostas são sujeitas a restrições definidas na posição central de cada face. Elas produzem, entretanto, ambiguidades nos vértices e arestas, uma vez que tais regiões ficam sobre-definidas em termos de condições de contorno, como explicitado por Barbero [2007].

Considerando um corpo periódico como na Fig. 2.6, arestas simétricas em relação ao centro do corpo precisam ser vinculadas, visando o equilíbrio do corpo (Barbero et al. [2006]). Para fins de exemplificação da implementação computacional, arestas paralelas a x_3 precisam respeitar a seguinte condição:

$$u_i(a_1, a_2, x_3) - u_i(-a_1, -a_2, x_3) = 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

E o vértices tais como os localizados em $x_i = (a_1, a_2, a_3)$ e $x_i = (-a_1, -a_2, -a_3)$ precisam ser vinculados por:

$$u_i(a_1, a_2, a_3) - u_i(-a_1, -a_2, a_3) = 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Equações análogas podem ser definidas para outros vértices e arestas.

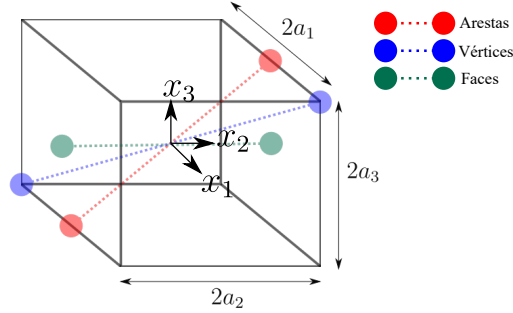


Figura 2.6 – Definição das entidades geométricas para as condições de contorno periódicas.

O cumprimento da condição de energia de Hill para esse tipo de condição de contorno não é facilmente encontrado na literatura. Para fins de completeza, deriva-se aqui uma *tentativa* de prova. Sabe-se que a prova necessitaria de um maior formalismo, porém para o escopo do texto é suficiente. Hazanov e Amieur [1995], entre outros, mostrou a seguinte equivalência:

$$\int_{\partial V} (t_i - \langle \sigma_{ij} \rangle n_j) (u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j) dA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_V - \langle \sigma_{ij} \rangle_V \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = 0, \quad (2.38)$$

que pode ser transformada em uma integral de volume como:

$$\frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle_V) (\varepsilon_{ij} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V) dV = \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_V - \langle \sigma_{ij} \rangle_V \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = 0. \quad (2.39)$$

Inserindo as Eqs. (2.32) e (2.33) na Eq. (2.39) e expandindo o resultado, deriva-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V \left(\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V - \langle \sigma_{ij} \rangle_V \varepsilon_{ij}^0 + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^p + \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^0 + \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p + \right. \\ \left. - \sigma_{ij}^p \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V - \langle \sigma_{ij} \rangle_V \varepsilon_{ij}^p + \langle \sigma_{ij} \rangle_V \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V \right) dV = \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_V - \langle \sigma_{ij} \rangle_V \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

e, após cancelar os termos equivalentes na Eq. (2.40), pode-se escrever que:

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p dV = 0. \quad (2.41)$$

Outra forma de examinar a Eq. (2.41) vem da interpretação de uma simples convolução circular entre dois sinais periódicos σ e ε com período V , isto é, $\int_V \sigma \varepsilon dV$, o que neste caso, resulta em uma função com o mesmo período. Uma vez que os sinais são simétricos, a convolução é automaticamente nula.

2.1.3.5 Condição de Contorno Mista

Uma das primeiras aplicações de condições de contorno mistas (MBC) no contexto do problema de homogeneização de RVE fora apresentado por Hazanov e Amieur [1995], levando em consideração tanto trações (t_i) como deslocamentos (u_i) nas fronteiras como explicita a seguinte equação:

$$\left(t_i - \langle \sigma_{ij} \rangle_V n_j \right) \left(u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j \right) = 0, \quad \text{on } \partial V, \quad (2.42)$$

portanto, combinando um conjunto de SUBC e KUBC. É importante grifar que esse tipo de condição de contorno é limitada a materiais elásticos que com simetria ortotrópica. Qualquer material com menos simetrias, como simetrias monoclinicas ou triclinicas (também conhecidas como anisotropia geral), gerariam tensões de acoplamento que não respeitariam a Eq. (2.42). Uma grande vantagem dessa abordagem é reproduzir efetivamente condições de contorno representativas de testes experimentais, como em Shen e Brinson [2006], contexto em que fora imposto SUBC em faces perpendiculares ao carregamento e KUBC em faces paralelas.

Recentemente, em um esquema de homogeneização geral proposto por Glüge [2013], a fronteira do RVE é dividida em k partes, cada qual sujeito a uma deformação média $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V$:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V \int_{\partial V_k} x_j n_i dA = \int_{\partial V_k} u_j n_i dA . \quad (2.43)$$

A equação acima leva a importantes observações:

1. Se $k \rightarrow \infty$, então $u|_{\partial V} = \varepsilon_{ij}^A x_j$ como em KUBC.

Prova: A integral torna-se a avaliação de uma função em um ponto, em Eq. (2.43), e segue que:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j n_i dA &= u_j n_i dA, \text{ em } \partial V, \\ u|_{\partial V} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j, \\ u|_{\partial V} &= \varepsilon_{ij}^A x_j. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2. Se $k \rightarrow \infty$, se os pontos infinitesimais de área estão espelhados de forma que $n_i dA^+ = -n_i dA^-$, Eq. (2.43) corresponde a uma PBC.

Prova: A equação (2.43) é dividida entre $n_i dA^+$ e $n_i dA^-$, com vetores de posição $x_j^+ = -x_j^-$, com sobreíndices significando faces opostas de um RVE, como segue:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j^+ n_i dA^+ + \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j^- n_i dA^- &= u_i^+ n_j dA^+ + u_i^- n_j dA^-, \\ 2\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j^+ &= u_i^+ - u_i^-. \end{aligned} \quad (2.45)$$

o que é equivalente à Eq. (2.31) .

3. Se $k = 1$, $\partial V_n \rightarrow \partial V$, e Eq. (2.43) representa SUBC. A Eq. (2.43) então torna-se:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_{\partial V} u_i n_j dA, \quad (2.46)$$

o que pode ser mostrado que é equivalente a um campo de tensão homogêneo.

Em um estudo focado em têxteis, Espadas-Escalante et al. [2017] propôs um conceito de MBC baseado numa combinação de PBC e SUBC. Nas direções planas, o compósito é tratado como periódico, enquanto que da direção perpendicular ao plano, tração uniforme é imposta. Tal abordagem permite aplicar uma condição de tração livre na direção da espessura, o que replicaria a condição de estado plano de tensões esperada para estruturas finas como os têxteis. Ênfase é dada para o fato que a homogeneização é altamente dependente das condições de contorno, quando trata-se de um têxtil de uma camada. Os resultados mais importantes podem ser numerados da seguinte forma:

- Diferenças entre a KUBC e SUBC na avaliação de E_{11} possuem magnitudes da ordem de 200%;
- A abordagem de MBC converge assintoticamente para a PBC, ao passo que o número de camada de têxteis é aumentado;
- O módulo transversal E_{33} aparentemente é menos sensível, em comparação com o E_{11} aos tipos de condição de contorno (diferenças na ordem de 10%);
- Os resultados mostraram que KUBC e PBC tiveram maior êxito na avaliação das propriedades mecânicas no plano em comparação com resultados experimentais;

3 UM NOVO CONJUNTO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO

3.1 Considerações iniciais

O estudo de Espadas-Escalante et al. [2017] motivou a implementação de um conjunto distinto de MBC. Uma vez que PBC e KUBC forneceram melhores resultados em comparação com os dados experimentais, a ideia básica neste texto é mesclar PBC para os graus de liberdade no plano e KUBC para os fora do plano, objetivando-se, dessa forma, extrair o melhor dos dois tipos de condição de contorno. Essa proposta será referenciada como $MBC^{\tilde{v}}$ no restante deste texto.

Considerando novamente um prisma $2a_1 \times 2a_2 \times 2a_3$ com um sistema de coordenadas centrado, os graus de liberdade na direções 1-2 são especificados como Luciano e Sacco [1998] propôs, enquanto que para a direção 3, KUBC será usada. Cada face é identificada pela sua posição relativa: *west, east, north, south, upper and lower* (oeste, leste, norte, sul, superior e inferior), como na Fig. 3.1 . Naturalmente, para os graus de liberdade no plano 1-2 os campos de tensão e de deformação admitem a distribuição dada pelas Eqs. (2.32) e (2.33), repetidas abaixo por conveniência. Hipóteses prévias sobre os campos de tensão e deformação na direção trasnversal x_3 não são feitas.

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V + \varepsilon_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) , \quad \text{for } i = 1, 2 , \quad (3.1a)$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \langle \sigma_{ij} \rangle_V + \sigma_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) , \quad \text{for } i = 1, 2 , \quad (3.1b)$$

$$\int_V \varepsilon_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) dV = 0 , \quad (3.1c)$$

$$\int_V \sigma_{ij}^p(x_1, x_2, x_3) dV = 0 . \quad (3.1d)$$

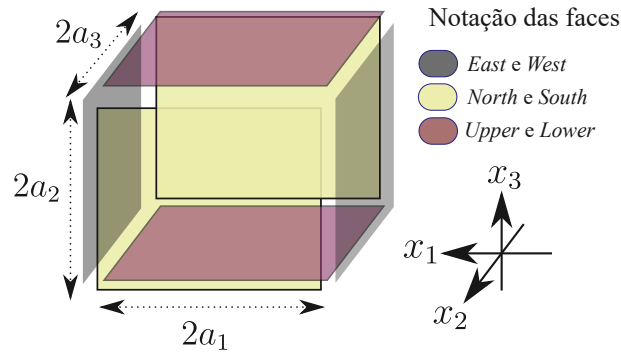


Figura 3.1 – Notação das faces usadas na condição de contorno proposta

Logo, nas faces oeste e leste:

$$\begin{cases} u_1(a_1, x_2, x_3) - u_1(-a_1, x_2, x_3) = 2\varepsilon_{11}^A a_1, & \forall x_1 \in (-a_1, a_1), \\ u_2(a_1, x_2, x_3) - u_2(-a_1, x_2, x_3) = 2\varepsilon_{21}^A a_1, & \forall x_2 \in [-a_2, a_2], \\ u_3(a_1, x_2, x_3) - u_3(-a_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{3j}^A x_j, & \forall x_3 \in [-a_3, a_3], \end{cases} \quad (3.2)$$

a nas faces norte e sul:

$$\begin{cases} u_1(x_1, a_2, x_3) - u_1(x_1, -a_2, x_3) = 2\varepsilon_{11}^A a_2, & \forall x_1 \in [-a_1, a_1], \\ u_2(x_1, a_2, x_3) - u_2(x_1, -a_2, x_3) = 2\varepsilon_{21}^A a_2, & \forall x_2 \in (-a_2, a_2), \\ u_3(x_1, a_2, x_3) - u_3(x_1, -a_2, x_3) = \varepsilon_{3j}^A x_j, & \forall x_3 \in [-a_3, a_3], \end{cases} \quad (3.3)$$

nas faces superiores e inferiores:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, a_3) - u_1(x_1, x_2, -a_3) = 2\varepsilon_{11}^A a_2, & \forall x_1 \in [-a_1, a_1], \\ u_2(x_1, x_2, a_3) - u_2(x_1, x_2, -a_3) = 2\varepsilon_{21}^A a_2, & \forall x_2 \in [-a_2, a_2], \\ u_3(x_1, x_2, a_3) - u_3(x_1, x_2, -a_3) = \varepsilon_{3j}^A x_j, & \forall x_3 \in (-a_3, a_3). \end{cases} \quad (3.4)$$

Partindo-se na análise das condições de contorno propostas em termos do Teorema da Deformação Média, a média volumétrica é conduzida para o contorno pelo teorema da divergência, como segue:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V &= \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon_{ij} \, dV, \\
&= \frac{1}{2|V|} \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV, \\
&= \frac{1}{2|V|} \int_{\partial V} \left(u_i n_j + u_j n_i \right) dA.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A fronteira pode ser dividida em seis partes, conforme as faces coloridas da Fig. 3.1

$$\partial V = \partial V^e + \partial V^w + \partial V^n + \partial V^s + \partial V^u + \partial V^l \tag{3.6}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V &= \frac{1}{2|V|} \left\{ \int_{\partial V^e} \left(u_i^e n_j^e + u_j^e n_i^e \right) dA + \int_{\partial V^w} \left(u_i^w n_j^w + u_j^w n_i^w \right) dA + \dots \right. \\
&\quad \left. \int_{\partial V^u} \left(u_i^u n_j^u + u_j^u n_i^u \right) dA + \int_{\partial V^l} \left(u_i^l n_j^l + u_j^l n_i^l \right) dA \right\}, \\
&= \frac{1}{2|V|} \left\{ \Psi^{w/e} + \Psi^{n/s} + \Psi^{u/l} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Nas faces oeste e leste, notando que $n^e = -n^w$:

$$\Psi^{w/e} = \int_{\partial w/e} \left\{ (u_i^e - u_i^w) n_j^e + (u_j^e - u_j^w) n_i^e \right\} dA. \tag{3.8}$$

Da mesma forma, notando que $u_i^e = u_i(a_1, x_2, x_3)$ e $u_i^w = u_i(-a_1, x_2, x_3)$, a partir da utilização das condições de contorno da Eq. (3.2):

$$\Psi^{w/e} = 2 \int_{\partial w/e} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{11} a_1 \\ 2\varepsilon_{21} a_1 \\ 2\varepsilon_{3i} x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^e & n_2^e & n_3^e \end{bmatrix} dA, \tag{3.9}$$

e observando que $n^e = [1 \ 0 \ 0]$:

$$\Psi^{w/e} = 4 \int_{\partial w/e} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} a_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{21} a_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{3i} x_i & 0 & 0 \end{bmatrix} dA. \tag{3.10}$$

Uma vez que a terceira linha requer uma abordagem diferenciada, na próximas linhas escreve-se a tratativa implementada. O primeiro passo é separar a expressão em três integrais, escritas por:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial w/e} \varepsilon_{3i} x_i dA &= \int_{\partial w/e} \left(\varepsilon_{31} a_1 + \varepsilon_{32} x_2 + \varepsilon_{33} x_3 \right) dx_2 dx_3, \\
&= \varepsilon_{31} a_1 (4a_2 a_3) + \varepsilon_{32} \frac{x_2^2}{2} \Big|_{-a_2}^{a_2} \cdot 2a_3 + \varepsilon_{33} \frac{x_3^2}{2} \Big|_{-a_3}^{a_3} \cdot 2a_2, \\
&= \varepsilon_{31} a_1 (4a_2 a_3).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nota-se que os últimos dois termos da segunda linhas anulam-se, pois

$$\frac{x_2^2}{2} \Big|_{-a_2}^{a_2} = \frac{x_3^2}{2} \Big|_{-a_3}^{a_3} = 0 \tag{3.12}$$

A Eq. (3.10) pode ser reescrita como segue:

$$\Psi^{w/e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} 2|V|, \tag{3.13}$$

onde $|V| = 8a_1 a_2 a_3$. Adotando-se passos similares para $\Psi^{n/s}$ e $\Psi^{u/l}$, chega-se que:

$$\Psi^{n/s} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} & 0 \end{bmatrix} 2|V|, \tag{3.14}$$

$$\Psi^{u/l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} 2|V|. \tag{3.15}$$

Agora as Eqs. (3.13), (3.14), e (3.15) podem ser inseridas na expressão para $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V$ (Eq. (3.7) e resultando em:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \varepsilon_{ij}^A, \tag{3.16}$$

o que prova que o Teorema da Deformação Média prevalece sobre as Eqs. (3.2)- (3.4). Em outras palavras, significa a condição de contorno gera um estado de deformação homogêneo para um corpo homogêneo.

Para fins de comprovar que esse conjunto de condições de contorno satisfaz a condição de energia de Hill, segue a abordagem introduzida por Hazanov e Amieur [1995].

É importante lembrar que a Eq. (2.38) é automaticamente satisfeita se $u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_V x_j$ em ∂V , o que é naturalmente verificado para u_3 . Todavia, para os graus de liberdade restantes, faz-se necessária uma investigação separada. Como primeiro passo, escreve-se a Eq. (2.39) para u_1 e u_2 , e usando o teorema da divergência, obtêm-se (Hazanov e Amieur [1995]):

$$\frac{1}{V} \int_V (\sigma_{1j} - \langle \sigma_{1j} \rangle_V) \cdot (\varepsilon_{1j} - \langle \varepsilon_{1j} \rangle_V) dV = 0, \quad (3.17a)$$

$$\frac{1}{V} \int_V (\sigma_{2j} - \langle \sigma_{2j} \rangle_V) \cdot (\varepsilon_{2j} - \langle \varepsilon_{2j} \rangle_V) dV = 0, \quad (3.17b)$$

$$\int_{\partial V} (t_3 - \langle \sigma_{3j} \rangle_V n_j) \cdot (u_3 - \langle \varepsilon_{3j} \rangle_V x_j) dA = 0. \quad (3.17c)$$

Como já mencionado, considerando que a terceira equação nas Eqs. (3.2)-(3.4) em qualquer uma das superfícies de contorno, $u_3 = \langle \varepsilon_{3j} \rangle x_j$ e a Eq. (3.17c) anula-se automaticamente, em vista da Eq. (3.16). Para u_1 e u_2 , os mesmos passos aplicados para provar o critério de Hill para condições de contorno periódicas pode ser utilizado, no entanto para os campos de tensão e de deformação da Eq. (3.1), resultando em um resultado similiar a Eq. (2.41), como segue:

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p dV = 0, \quad i = 1, 2.$$

4 AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES EFETIVAS

4.1 Avaliação das propriedades elásticas efetivas

O procedimento básico para avaliação das propriedades elásticas efetivas é bastante conhecido (Zohdi [2002]). Essencialmente, a Eq. (2.18), repetida abaixo por conveniência, necessita ser resolvida para um RVE sujeito a qualquer uma das condições de contorno discutidas nas seções anteriores:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_V = \bar{C}_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_V . \quad (4.1)$$

Agora se o campo de tensões locais $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser numericamente calculado através de uma análise de FEA ou BEA, logo $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V$, e a Eq. (4.1) provém seis equações. Uma forma de superar esse número insuficiente de equações é pela solução do problema de RVE utilizando-se as condições de contorno, juntamente com diversos estados de deformação. Isso irá provir o número necessário de equações para recuperar todas as entradas de $\bar{\mathbf{C}}$ na relação constitutiva macroscópica dada pela Eq. (4.1). Por conta da dimensionalidade de $\bar{\mathbf{C}}$, será suficiente a aplicação de seis estados de deformação independentes (ver Fig. 4.1):

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \\ \varepsilon^4 &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

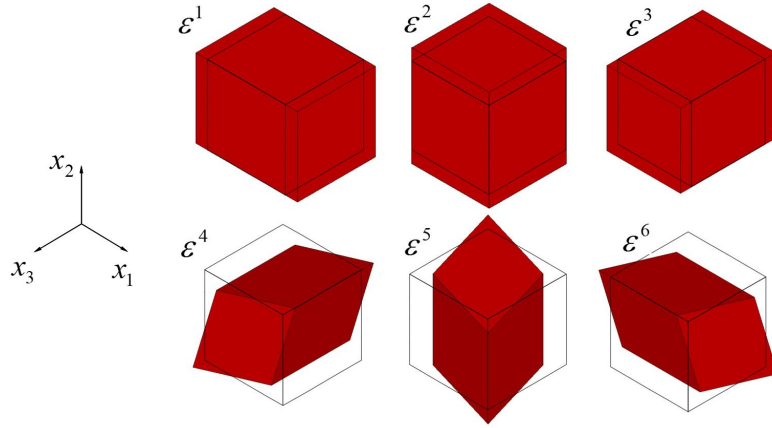


Figura 4.1 – Visualização dos estados de deformação ε^i na Eq. (4.2) para os casos particulares de deformações constantes

O sistema final de equações lineares pode ser derivado como segue:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma^1 \rangle_{6 \times 1} \\ \langle \sigma^2 \rangle_{6 \times 1} \\ \langle \sigma^3 \rangle_{6 \times 1} \\ \langle \sigma^4 \rangle_{6 \times 1} \\ \langle \sigma^5 \rangle_{6 \times 1} \\ \langle \sigma^6 \rangle_{6 \times 1} \end{bmatrix}_V = \begin{bmatrix} [C]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} & \dots & \dots & \dots & [0]_{6 \times 6} \\ [0]_{6 \times 6} & [C]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} & \dots & \dots & [0]_{6 \times 6} \\ \vdots & [0]_{6 \times 6} & [C]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} & \dots & [0]_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & [0]_{6 \times 6} & [C]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & [0]_{6 \times 6} & [C]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 6} \\ [0]_{6 \times 6} & \dots & \dots & \dots & [0]_{6 \times 6} & [C]_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon^1 \rangle \\ \langle \varepsilon^2 \rangle \\ \langle \varepsilon^3 \rangle \\ \langle \varepsilon^4 \rangle \\ \langle \varepsilon^5 \rangle \\ \langle \varepsilon^6 \rangle \end{bmatrix}_V, \quad (4.3)$$

onde $\langle \sigma^k \rangle$ e $\langle \varepsilon^k \rangle$, $k = 1..6$ são as médias volumétricas das tensões e deformações, pela notação de Voigt. A Eq. (4.3) pode ser simplificado para fins de implementação computacional. Começa-se pela vetorização de cada submatriz $[C]$:

$$[C]_{36 \times 1} = [M]_{36 \times 36}^{-1} [\langle \sigma \rangle_V]_{36 \times 1}, \quad (4.4)$$

com $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{ab}^1 \dots \mathbf{M}_{ab}^k]_{k=1..6}^T$, onde k é um dos casos de deformação na Eq. (4.2), e \mathbf{M}_{ab}^k é a matriz concatenada (6 linhas \times 36 colunas):

$$\mathbf{M}_{ab}^k = \begin{cases} [\langle \varepsilon^k \rangle_1 \ \langle \varepsilon^k \rangle_2 \ \dots \ \langle \varepsilon^k \rangle_6], & \text{se } a = b \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], & \text{se } a \neq b \end{cases}, \quad (4.5)$$

ou, em representação matricial:

$$\mathbf{M}_{ab}^k = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon^k \rangle_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & \dots & \dots & \dots & [0]_{1 \times 6} \\ [0]_{1 \times 6} & \langle \varepsilon^k \rangle_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & \dots & \dots & [0]_{1 \times 6} \\ \vdots & [0]_{1 \times 6} & \langle \varepsilon^k \rangle_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & \dots & [0]_{1 \times 6} \\ \vdots & \vdots & [0]_{1 \times 6} & \langle \varepsilon^k \rangle_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & [0]_{1 \times 6} & \langle \varepsilon^k \rangle_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} \\ [0]_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & [0]_{1 \times 6} & \langle \varepsilon^k \rangle_{1 \times 6} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Equações redundantes podem ser eliminadas ao assumir as várias simetrias de $\bar{\mathbf{C}}$. Alternativamente, restrições também podem ser usadas. As constantes de engenharia podem ser obtidas pela inversão da matriz de rigidez obtida pela solução da Eq. (4.4), $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}^{-1}$, como segue:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & \eta_{1,23}/G_{23} & \eta_{1,13}/G_{13} & \eta_{1,12}/G_{12} \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & \eta_{2,23}/G_{23} & \eta_{2,13}/G_{13} & \eta_{2,12}/G_{12} \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & \eta_{3,23}/G_{23} & \eta_{3,13}/G_{13} & \eta_{3,12}/G_{12} \\ \eta_{23,1}/E_1 & \eta_{23,2}/E_2 & \eta_{23,3}/E_3 & 1/G_{23} & \mu_{23,13}/G_{13} & \mu_{23,12}/G_{12} \\ \eta_{13,1}/E_1 & \eta_{13,2}/E_2 & \eta_{13,3}/E_3 & \mu_{13,23}/G_{23} & 1/G_{13} & \mu_{13,12}/G_{12} \\ \eta_{12,1}/E_1 & \eta_{12,2}/E_2 & \eta_{12,3}/E_3 & \mu_{12,23}/G_{23} & \mu_{12,13}/G_{13} & 1/G_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

4.1.1 Correção do volume de fibra

Em modelagem computacional de compósitos têxteis, é comum permitir uma fina camada de resina entre os lados inferiores e superiores de um RVE, como mostrado na Fig. 4.2. Tal medida evita problemas na geração de malha (ver, por exemplo, Long e Brown [2011]). Como resultado, a fração de volume obtida computacionalmente é diminuída, afetando-se o processo de homogeneização. Para corrigir esse efeito, a metodologia de Barbero (Barbero et al. [2006]) é seguida nesta dissertação.

A correção é baseada em três frações de volume de fibra: a fração de volume geral, de mesoescala e do feixe de fibras, denotas como V_o , V_g e V_s , respectivamente. V_o é a razão entre o volume das fibras secas e o volume total (após a cura) do compósito. A medida de V_g é definida como o volume ocupado pelo feixe de fibras com resina impregnada no compósito curado, ou alternativamente, na representação computacional do aglomerado de fibras. Finalmente, V_s é a fração de volume interna do feixe. V_s é, em geral, alto

(superior a 0.8), e laborioso para se obter experimentalmente. Barbero et al. [2006] utiliza as seguintes relações entre as três frações de volume:

$$V_s = \frac{V_0}{V_g} . \quad (4.8)$$

V_g é obtida computacionalmente, enquanto que V_o é um valor experimental, de esperado conhecimento. Além disso, Barbero et al. [2006] sugere a seguinte correção de fração volumétrica para os módulos de Young:

$$E = \frac{V_g}{V_g^\alpha} E^\alpha ; \quad (4.9)$$

com o sobreíndice α significando o valor obtido no modelo de FEA. Objetivando a análise da matriz de rigidez, essa correção é aplicada à matriz de rigidez obtida no processo de homogeneização:

$$\bar{\mathbf{C}}^e = \frac{V_g}{V_g^\alpha} \bar{\mathbf{C}}^\alpha . \quad (4.10)$$

Essa abordagem é direta e corrige efeitos indesejados no tensor final homogenizado. Os problemas de tal abordagem não aparecem na validação com resultados experimentais, uma vez que apenas as constantes de engenharia comum são obtidas da diagonal principal do tensões de flexibilidade. Portanto, é necessária cautela ao interpretar os coeficientes de acoplamento. Uma investigação aprofundada dessa correção e sua influência nos tensores rigidez/flexibilidade está fora do escopo dessa dissertação.

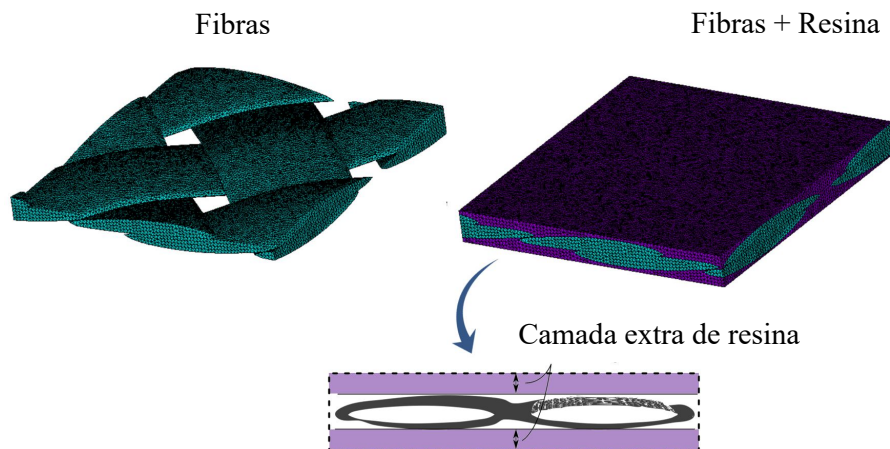


Figura 4.2 – Típica camada extra de resina adicionada por ferramentas computacionais

4.1.2 Direções principais de anisotropia

Rand e Rovenski [2007] introduziu uma metodologia direta para a definição das direções principais de de uma materila anisotrópico, baseada no tensor de módulo volumétrico e de módulo deviatórico. Tais são também contrações do tensor de rigidez, e são obtidos através das seguintes definições:

- Tensor de Módulo Volumétrico

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}, \quad K_{ij} = \sum_{k=1}^3 S_{ijkk}. \quad (4.11)$$

- Tensor de módulo deviatórico

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad L_{ij} = \sum_{k=1}^3 S_{ikjk}. \quad (4.12)$$

As direções principais de \mathbf{K} coincide com as direções principais de anisotropia do material. Objetivando-se assegurar um sistema canônico, os autovalores λ_i^K de \mathbf{K} (ou λ_i^L de \mathbf{L}) precisam ser ordenados $\lambda_3^K > \lambda_2^K > \lambda_1^K$, tal que a direção do material mais rígida será orientada no eixo 3, enquanto que a mais fraca permanece no 1. Além disso, uma condição necessário (porém não suficiente) para que dois materiais sejam considerados os mesmos, é que os invariantes de \mathbf{K} e de \mathbf{L} sejam os mesmos. Consequentemente, os autovalores desses tensores irão desenvolver uma métrica útil para comparar os efeitos dos diferentes tipos de condição de contorno nos resultados as homogeneização. Há um total de três invariantes associadas aos tensores \mathbf{K} e \mathbf{L} . Tais são escritos como segue:

$$\begin{aligned} I_1^K &= \lambda_1^K + \lambda_2^K + \lambda_3^K & I_1^L &= \lambda_1^L + \lambda_2^L + \lambda_3^L \\ I_2^K &= \lambda_1^K \lambda_2^K + \lambda_1^K \lambda_3^K + \lambda_2^K \lambda_3^K & I_2^L &= \lambda_1^L \lambda_2^L + \lambda_1^L \lambda_3^L + \lambda_2^L \lambda_3^L \\ I_3^K &= \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K & I_3^L &= \lambda_1^L \lambda_2^L \lambda_3^L \end{aligned}$$

5 FERRAMENTA DE HOMOGENEIZAÇÃO

Nesse capítulo, uma descrição detalhada da ferramenta desenvolvida nesse trabalho será fornecida. O código completo encontra-se em um repositório virtual¹. Os principais ganhos dessa ferramenta serão:

1. Tradução de um arquivo de malha do TexGen para uma macro do ANSYS APDL;
2. Aplicação de três tipos de condições de contorno (SUBC, PBC e MBC), assim como de qualquer estado de deformação;
3. Resolver qualquer arquivo de geometria cuja origem esteja em um arquivo CDB do ANSYS (válido apenas para geometrias hexaédricas);

O principal objetivo da ferramenta é localizar nós dispostos na fronteira e aplicar as devidas configurações de carregamento. Em especial, as PBC apresentam um maior desafio, uma vez que requerem uma malha periódica. O TexGen é apto a gerar uma malha periódica, o que facilita grande parte do processo. Entretanto, a interface do TexGen apenas exporta as informações necessárias para um arquivo *.inp de ABAQUS. Logo, um desafio adicional será a tradução de tais dados para um arquivo compatível ao ANSYS. Na próxima seção, o esquema do algoritmo implementado será detalhado.

5.1 Descrição do algoritmo

A figura 5.1 representa uma visão geral do código desenvolvido para homogeneização (sem as devidas variáveis). O algoritmo é composto pelos módulos²:

1. Módulo de Geometria: Responsável por obter a informação do usuário aplicada no TexGen, e traduzí-la para um arquivo legível pelo ANSYS. A saída será um arquivo *.CDB (arquivo de Elementos Finitos do ANSYS Mechanical APDL).
2. Módulo de KUBC: Cria uma macro com as condições de contorno cinemáticas uniaxiais (SUBC);

¹<https://github.com/jonastieppo/HomogenizationTool>

²Há ainda alguns módulos adicionais; por exemplo, o módulo utilizado para a comparação dos resultados obtidos com a teoria clássica dos laminados (CLT). Estes módulos serão usados no capítulo de resultado, porém não fazem parte do algoritmo central.

3. Módulo de PBC: Cria uma macro com as condições de contorno periódicas (PBC);
4. Módulo das condições mistas: Aplica condições de contorno mistas (MBC);
5. Módulo de Solução: Responsável por executar uma macro de ANSYS em *batch*;
6. Módulo de Pós-processamento: Executa a leitura de arquivos de textos com os resultados de tensão e de deformação do modelo completo. Além disso, também aplica a equação (4.4) e retorna matriz de flexibilidade (ou de rigidez) homogeneizada, assim como as constantes de engenharia.

O fluxo de uso exemplo do algoritmo é como o que segue:

- Abrir o software TexGen, definir a geometria do compósito têxtil (padrão de entrelaçamento, camadas) e tamanho de malha;
- Exportar a informação de malha. Por padrão, três arquivos são gerados; um arquivo de input *.inp (padrão Abaqus, com informação de malha e de conectividade), um arquivo *.ori (sistema de coordenadas local de todos os elementos) e um arquivo *.eld (informação de material do modelo). Esse conjunto de três arquivos são lidos pelo tradutor de malha desenvolvido nessa dissertação.
- Definir propriedades dos materiais; o usuário deve indicar propriedades básicas das fibras e da matriz.
- Escolher o tipo da condição de contorno;
- Checar os resultados obtidos em termos das constantes de engenharia;

Na seção seguinte, um descrição detalhada da tradução da geometria é apresentada. Como saída desta tradução será um arquivo CDB de ANSYS, o que torna possível utilizá-lo em outras análises e facilita a aplicação as condições de contorno para a dissertação.

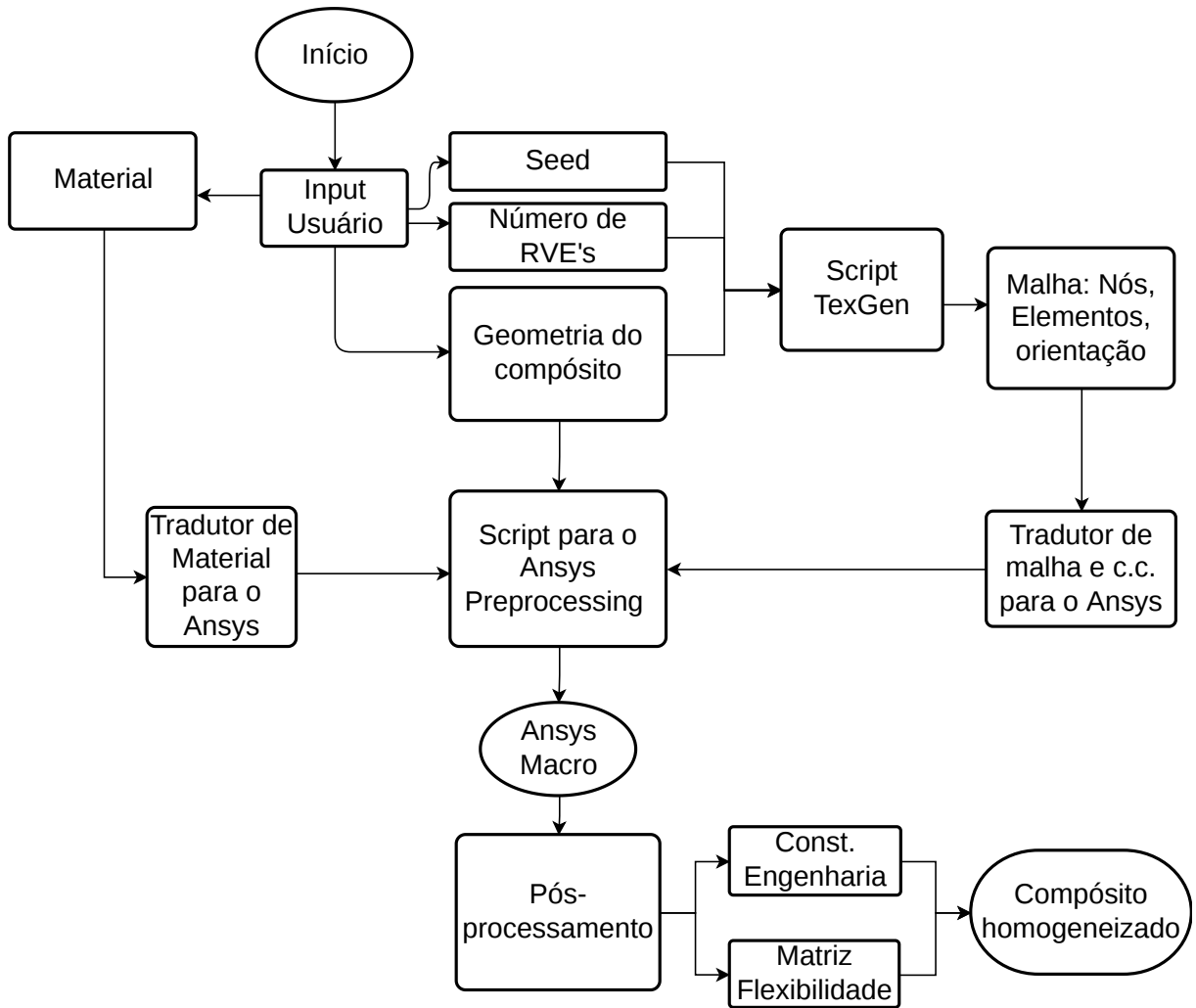


Figura 5.1 – Visão Geral do algoritmo de homogeneização

5.1.1 Criação da geometria para o ANSYS

O módulo é denominado `Model_creation.py`. Os aspectos gerais do módulo encontram-se descritos na Figura 5.2. O algoritmo abre os três arquivos de saída do TexGen (`*.inp`, `*.eld` e `*.ori`) e os traduz em termos de comandos do ANSYS APDL, guardando as informações em arquivos temporários (`*.temp`). Todos os arquivos temporários são concatenados em um Macro de ANSYS APDL final. A estratégia aplicada baseia-se em ler os arquivos de saída (`*.inp`, `*.eld` e `*.ori`) apenas uma vez, e gerar um arquivo `*.CDB` geral a ser lido pelo ANSYS, pois os comandos nesse arquivo são armazenados em blocos (ou seja, não são lidos linha a linha), o que torna a execução do arquivo extremamente rápida. A seguir, uma descrição detalhada dos arquivos temporários será feita.

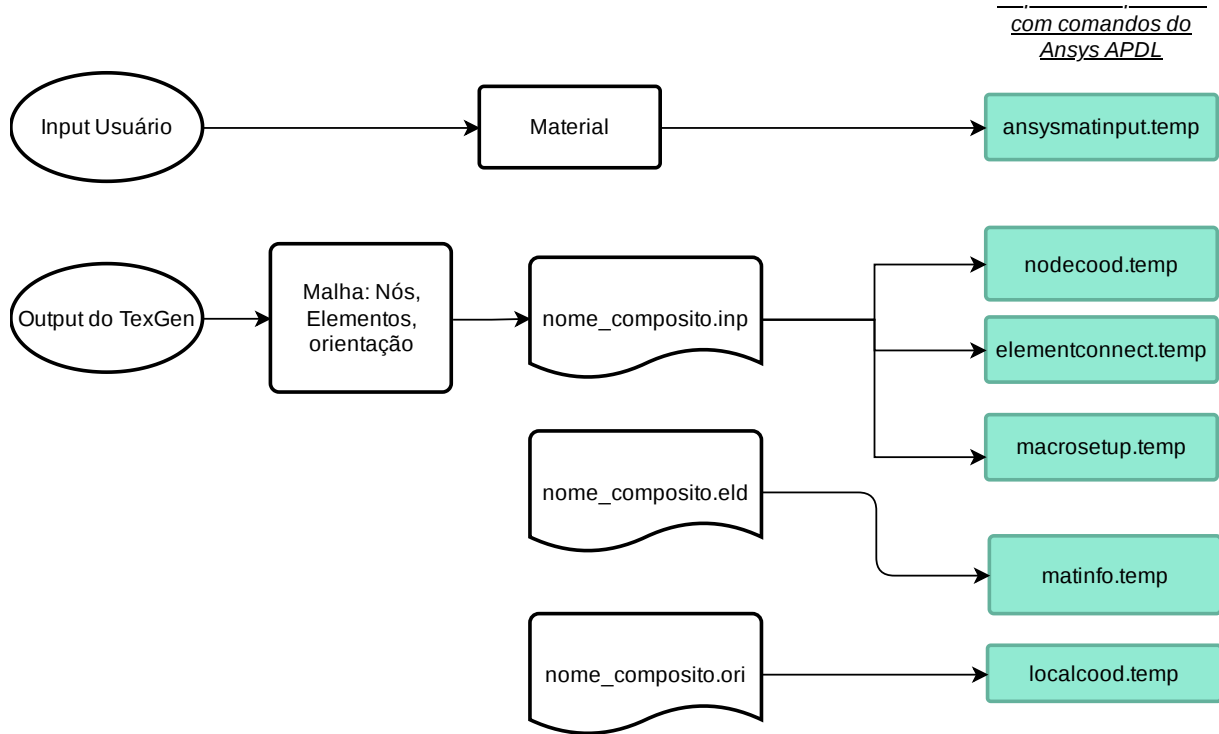


Figura 5.2 – Visão-macro da criação do modelo

5.1.1.1 Arquivos temporários de input de material no ANSYS

O usuário insere a informação como um dicionário de Python, cuja estrutura é dada por meio de chaves e valores (ver Van Rossum e Drake [2009]). O usuário precisa inserir as informações com as palavras chaves padrão como as explicitadas abaixo:

```

Fiber_material = {
    "E1": 57.3E3,
    "E2": 18.8E3,
    "G12": 7.44E3,
    "G23": 7.26E3,
    "v12": 0.25,
    "v23": 0.29,
    "vf": 1,
    "Name": "Vinylester com fibra de vidro"
}
  
```

```

resin_material = {
    "E1": 3.4E3,
    "v12": 0.34,
    "Name": "Vinylester"
}
  
```

```
}

```

Após, o usuário chama o método `pythAssignMaterial()` para salvar os dados de materiais nas devidas variáveis. Após isso, o algoritmo automaticamente gera comandos de ANSYS APDL em um arquivo temporário `ansysmatinput.temp`. A exemplo, segue um trecho do que se espera de saída no arquivo traduzido:

```
!Material Input
!Matrix Vinylester Mat Properties
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,3400.0
MPDATA,PRXY,1,,0.34
!Fiber Vinylester with fiber glass Mat Properties
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,57300.0
MPDATA,EY,2,,18800.0
MPDATA,EZ,2,,18800.0
MPDATA,PRXY,2,,0.25
MPDATA,PRYZ,2,,0.29
MPDATA,PRXZ,2,,0.29
MPDATA,GXY,2,,7440.0
MPDATA,GYZ,2,,7260.0
MPDATA,GXZ,2,,7260.0
```

5.1.1.2 Tradução dos arquivos exportados pelo TexGen

Nós e conectividade dos Elementos

O procedimento principal de tradução dos arquivos exportados do TexGen é encontrar os campos onde os nós e elementos são definidos. Uma vez encontrados, a informação é salva em `dataframes`, para mais tarde ser escrita em arquivos `*.csv`. A seguir, mostra-se os campos a serem procurados no arquivo de saída do TexGen:

- Informação dos nós:

```
*Node
1, -0.606903, -0.32388, -0.01
2, -0.606903, -0.32388, -0.00793906
```

- Conectividade dos Elementos:

```
*Element , Type=C3D10
1, 40692, 94923, 118223 ,... 144466, 144467, 144468,
2, 40693, 94923, 118223, ... , 144470, 144471, 144472
```

A estratégia para transformar a informação acima em comandos de APDL é escrever uma arquivo *.csv, separado por vírgulas, adicionado colunas com "N", "E" e "EMORE" para a correta definição de nós e suas conectividades no ANSYS APDL. Os arquivos temporários de saída serão como os exemplos a seguir:

- nodecod.temp:

```
N,1,-0.282078,0.282078,-0.01
N,2,-0.282078,0.282078,0.0345263
```

- elementconnect.temp:

```
E,325,155,749,326,5221,5222,5223,5224
EMORE,5225,5226
```

Na Figura 5.2 ainda falta a descrição de um arquivo, o macrosetup.temp. Trata-se apenas de um arquivo estilo cabeçalho em que consiste na configuração do elemento a ser usado.

Atribuição de material

O próximo passo é identificar os elementos constituem a resina e aqueles que formam os feixes de fibra. A informação para tal é obtida no arquivo *.eld exportado pelo TexGen. O arquivo possui a seguinte organização:

```
1,-1,0,0,0,0
```

O primeiro índice é o número de elemento e segundo é a informação de material (-1 para matriz, e para fibras, inicia-se em 0). A obtenção da informação é executada em um único laço. A estratégia para transformar essa informação em algo legível ao ANSYS foi a criação de um array Nx2, em que N é o número total de elementos no modelo. Nesse array, a primeira posição indica o número de elemento, e a segunda, se é fibra ou matriz. Essa abordagem, facilita a criação de grupos de elementos. Os comandos gerados são armazenados num arquivo temporário chamado matinfo.temp, como exemplificado abaixo:

```

*dim,mat_info,array,23440,2
...
mat_info(16186,1)=10903.0
mat_info(16186,2)=2
...
*DO,i,1,23440,1
EMODIF,mat_info(i,1),MAT,mat_info(i,2)
*ENDDO
...
!Creating Elements Components
ESEL,S,,1.0
ESEL,A,,13729.0

```

Coordenadas locais dos elementos

As coordenadas locais dos elementos são uma informação crucial para a homogeneização. Haver um sistema de coordenadas para cada elemento, o que garante à análise detalhes ricos da influência do padrão de entrelaçamento. O TexGen exporta tal informação no arquivo *.ori. Os dados de orientação vem na forma de vetores, como no exemplo a seguir:

```
6460, 0.99809, 0.000213813, -0.061777, 0.000213472, -1, -1.21215e-05
```

Em suma, a estrutura consiste:

```
Element, [vector 1], [vector 2]
```

em que **vector 1** é a direção da fibra e **vector 2** é um vetor perpendicular aleatório. Logo, o produto cruzado entre **vector 1** e **vector 2** resultará em um sistema de coordenadas cartesiano completo. No ANSYS APDL, pode-se definir um sistema de coordenadas local de um elemento da seguinte forma:

```
EMODIF, [Element], ESYS, |local cs|
```

em que **local cs** é definido pelo seguinte comando:

```
CLOCAL, KCN, KCS, XL, YL, ZL, THXY, THYZ, THZX, PAR1, PAR2
```

Nesse ponto, é necessário ser rigoroso às convenções do ANSYS. THXY é a rotação do x positivo em direção ao y. THXZ é a rotação do z positivo em direção ao x. O **vector 1** fornecerá a rotação α ao redor do eixo z global, o que consiste para as tramas estudadas nessa dissertação de 0° ou 90° . O produto cruzado entre **vector 1** e **vector 2** gera um

vetor perpendicular, em que o ângulo de arfagem γ da fibra é obtido, ou o THZX na convenção do ANSYS APDL. O processo é ilustrado na figura 5.3:

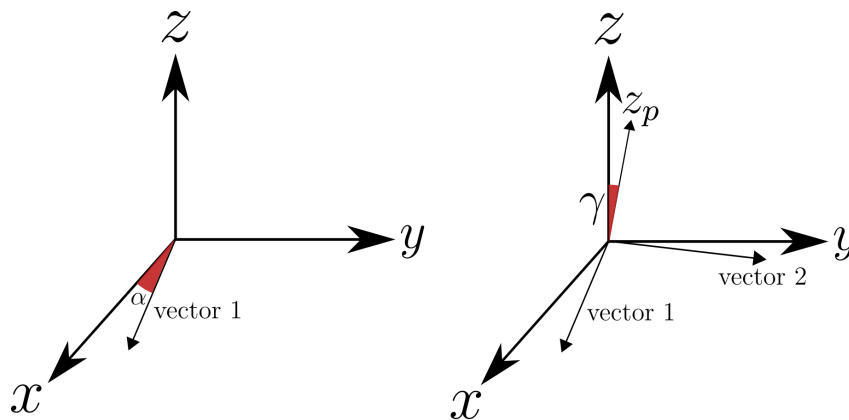


Figura 5.3 – Ângulos para a orientação final do elemento.

O código traduzido de ANSYS APDL é fornecido a seguir. Consiste em duas rotações: Primeiro, rotaciona-se o elemento em α no eixo z, para depois rotacioná-lo sobre essa configuração em γ , o que produzirá o efeito ondulatório na fibra.

```
*DO,i,1,|Total Elements|
CSYS,0
CLOCAL, Label1, 0, 0, 0, 0, Alpha, , ,
CSYS,Label
CLOCAL, Label, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Gamma
EMODIF, i, ESYS, Label1
*ENDDO
```

5.1.1.3 Geração do arquivo CDB final do ANSYS

O arquivo final de ANSYS é gerado após escrever todos os arquivos temporários em uma macro única. Esse arquivo gerado pode ser bastante custoso para o ANSYS ler, uma vez que as informações são passadas linha a linha. Para superar tal dificuldade, as informações são lidas apenas uma vez, e o seguinte comando é executado:

```
"CDWRITE,DB,'path\name','cdb',,',' ,'"
```

em que path e nome são o o caminho completo e nome do arquivo .CDB. Esse arquivo contém comandos em bloco, cuja leitura é extremamente célere. O resultado é ilustrado a seguir:

```

/COM,ANSYS RELEASE Release 18.1      BUILD 18.1      UP20170403      20:53:07
/PREP7
...
NBLOCK,6,SOLID,      36289,      36289
(3i9,6e21.13e3)
...
EBLOCK,19,SOLID,      23440,      23440
(19i9)

```

O arquivo final *.CDB será lido pelos próximos módulos de Python, que aplicarão as devidas condições de contorno. Esse processo é detalhado a seguir.

5.1.2 Aplicação das condições de contorno

As subseções a seguir irão descrever os códigos de Python desenvolvidos para aplicar a condições de contorno no processo de homogeneização. Os módulos de Python desenvolvidos compartilham de um mesmo método, chamado `Write_macro()`, cuja função baseia-se em escrever uma macro de ANSYS APDL a ser executada. A macro, em linhas gerais, insere a geometria por meio de um arquivo *.CDB, devidamente explicitado na seção anterior, e aplica as devidas condições de contorno (KUBC, PBC, MBC). Por padrão, as macros estão configuradas a salvar os resultados de deformação e de tensão em um subdiretório (automaticamente criado, caso não exista), chamado "Results". O usuário, todavia, poderá designar um diretório distinto, o que é recomendado caso diversos compósitos têxteis estejam sendo analisados.

5.1.2.1 Módulo de SUBC

O módulo SUBC é importado na rotina em Python como `Uniform_Strain_Filed_in_CDB.py`. O algoritmo é direto:

1. Localizar a informação dos nós no arquivo *.CDB;
2. Identificar os nós do contorno;
3. Criar componentes dos nós (nós-oeste, nós-leste, etc);
4. Criar funções de deslocamento;
5. Aplicar as condições de contorno conforme Eq. (2.21)

6. Exportar os resultados de tensão e de deformação;

O módulo assume que um arquivo *geo_macro_created.cdb* existe em uma pasta "*CDB Files*". Caso contrário, o usuário deve informar a localização completa do arquivo *.CDB. O uso mínimo do módulo pode ser reproduzido como a seguir:

```
from Uniform_Strain_Field_in_CDB import Non_Periodic_BC
BoundaryConditions = Non_Periodic_BC()
BoundaryConditions.Write_Macro()
```

5.1.2.2 Módulo de PBC

O módulo de PBC é referenciado como *PBC_on_CDB.py*. A aplicação dessa condição de contorno segue três passos básicos:

1. Identificar todas as fronteiras e entidades geométricas (faces, arestas e nós);
2. Identificar os nós pareados nas fronteiras;
3. Aplicar as condições de contorno conforme (2.31);

O uso mínimo do módulo é exatamente como o *Uniform_Strain_Fielded_in_CDB.py*. Para efeitos de clareza, o código abaixo exemplifica seu uso:

```
from PBC_on_CDB import PeriodicCommandSetup
BoundaryConditions = PeriodicCommandSetup()
BoundaryConditions.Write_Macro()
```

A subseção a seguir fornece uma explicação detalhada sobre o algoritmo desenvolvido para as condições de contorno periódicas.

Fronteiras e entidades geométricas

O algoritmo separa os nós em três entidades geométricas:

1. Faces;
2. Edges;
3. Vertices;

O processo de classificação é bastante simplório, que pode ser resumido por:

1. Localizar nós pertencentes às fronteiras;
2. Assumir que todos os nós pertencem às faces, exclusivamente, atribuindo-se a um grupo;
3. Nós com qualquer coordenada em comum (x,y,z) são arestas;
4. Excluir os nós das seleção, e criar o grupo de arestas;
5. Similarmente, nós das arestas, com coordenadas em comum, são vértices;
6. Excluir os nós encontrados e criar o grupo dos vértices;

Na sub-sessão a seguir, o procedimento aplicado para detectar os nós pareados é implementado.

Procura dos nós homólogos (pareados)

O Algoritmo de procura é resumido a seguir. Para cada nó da fronteira:

1. Encontrar o nó exato na coordenada oposta; por exemplo, se um nós possui coordenadas (L,y,z) , seu par oposto será $(-L,y,z)$;
2. Caso o passo 1) não seja possível:
 - (a) Criar uma coleção de nós que encaixam em um quadrado (definido por uma tolerância, como ilustrado na Figura 5.4;
 - (b) Subtração elemento-a-elemento entre o nó examinado, e os candidatos dentro do quadrado;
 - (c) Ordenar a lista em ordem crescente;
 - (d) O nó par é o elemento da primeira posição da lista;

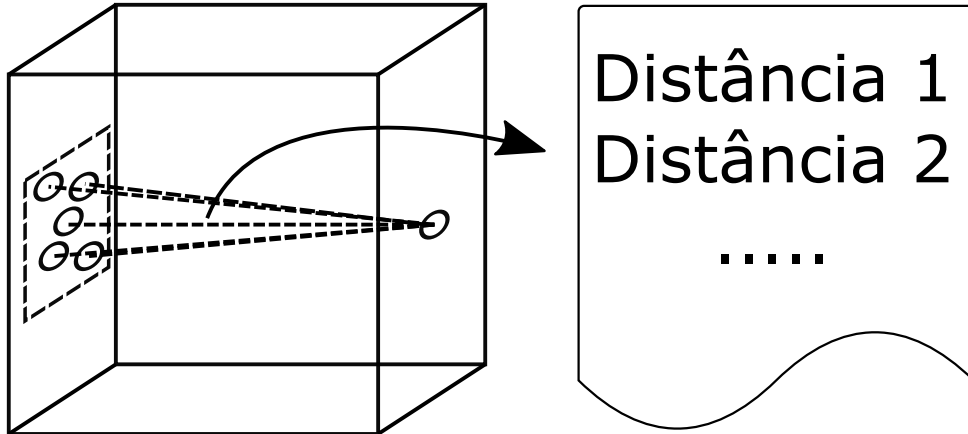


Figura 5.4 – Ilustração da procura do nó mais próximo na face oposta

Aplicação dos comandos de APDL

As condições de contorno podem ser aplicadas através do seguinte comando:

```
CE,NEXT, Strain , node_master ,DOF,1 , node_slave ,DOF,-1
```

que estabelece a relação entre o `node_master` e o `node_slave` no grau de liberdade `DOF`.

Por exemplo, o comando a seguir:

```
CE,NEXT,10 , node_1 ,UX,1 , node_2 ,UX,-1
```

replicaria a equação $10 = \text{node}_1 - \text{node}_2$ no grau de liberdade `UX`. Com os nós pareados organizados no código, linhas de código similares aplicarão as condições nos nós de fronteira, seguindo a Equação 2.31.

5.1.2.3 Módulo de MBC

As o módulo das condições mistas de contorno (MBC) aplica as estratégias combinadas das SUBC e PBC. É referenciado como `Mixed_BC_UDBC_and_PBC.py`. O algoritmo aplicado é idêntico ao SUBC e PBC. A única diferença é que as PBC estarão restritas aos graus de liberdade u_1 e u_2 , e as SUBC ao grau de liberdade u_3 . Portanto, todas os nós das fronteiras estarão sobre condições mistas: dois graus de liberdade de nós pareados estarão ligados pelas equações de periodicidade, e um grau de liberdade sofrerá a imposição direta de deslocamento. A Figura 5.5 ilustra tal conceito.

O uso mínimo do módulo é exemplificado nas linhas seguintes:

```
from PBC_on_CDB import MixedBCCommandSetup
BoundaryConditions = MixedBCCommandSetup()
```

```
BoundaryConditions.Write_Macro()
```

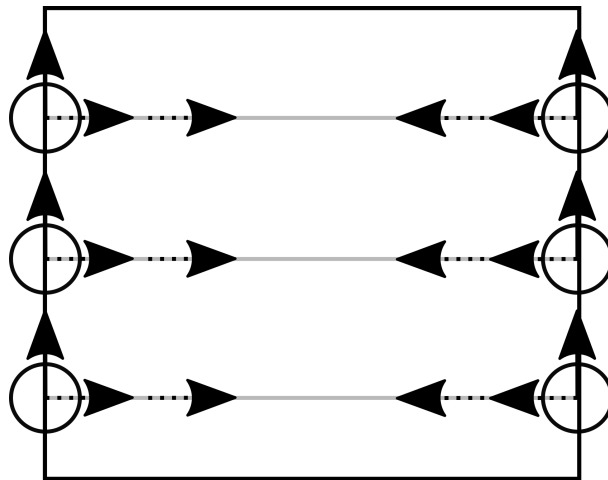


Figura 5.5 – Ilustração da abordagem MBC

5.1.3 Módulos de solução e de pós-processamento

Os módulos discutidos nas sub-seções 5.1.2.1 a 5.1.2.2 produzem uma macro a ser executada pelo ANSYS em modo batch. O módulo de solução é descrito por `Solve.py`. Seu uso mínimo é:

```
from Solve import Bath
Solution.RunAnsys()
```

em que o método `RunAnsys()` inicia a análise com parâmetros padrão. Entretanto, tais parâmetros frequentemente mudam entre máquinas. Recomenda-se utilizar o método `ChangeAnsysSolverParameters()` para alterar os seguintes valores:

1. Caminho do Executável de Ansys;
2. Produto ANSYS;
3. Diretório de trabalho;
4. Memória inicial a ser reservada;
5. Caminho para a macro do ANSYS;
6. Nome da macro do ANSYS;

7. Caminho do arquivo de saída *file.out*;

Dentre tais parâmetros, o caminho do executável do ANSYS, em geral, é o que mais ocasiona erros por meio do usuário, pois seu valor muda em cada distribuição/versão do ANSYS. Logo, recomenda-se diretamente indicar o executável do ANSYS, como no exemplo a seguir:

```
ansys_exe = r"C:\Program Files\ANSYS Inc\v181\ansys\bin\winx64\MAPDL.exe
"
Solution.ChangeAnsysSolverParameters(['ANSYSexe'], [ansys_exe])
Solution.RunAnsys()
```

O módulo de pós-processamento é referenciado como `PostProcessing.py`. O usuário pode importá-lo através dos seguintes comandos:

```
from PostProcessing import PostProcessing
PostPos = PostProcessing()
```

Por default, quando o usuário inicializa a classe `PostProcessing()` a Equação (4.4) é executada. Esse método lê os resultados exportados da execução do ANSYS, e computa a matriz de rigidez homogenizada. A classe possui alguns métodos úteis como os seguintes:

1. `CalculateEngConstants()`: Calcula as constantes de engenharia, através da matriz de flexibilidade, segundo a Equação (4.7);
2. `ShowEngineeringConstantsCorrected(factor)`: Imprime as constantes de engenharia corrigidas pela Equação (ver seção 4.1);
3. `ExportStiffness()`: Exporta a matrix de rigidez homogenizada como um arquivo de texto.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Resultados numéricos

Nesta seção, diversos resultados obtidos pela homogeneização considerando as condições de contorno descritas ao longo da presente dissertação serão apresentados e discutidos para um conjunto de compósitos. Para cada caso (conjunto de compósito + condição de contorno), a matriz de rigidez homogenizada é determinada. Algumas métricas usando tais tensores são calculadas de forma a permitir uma melhor análise das diferenças que cada conjunto de condição de contorno possa produzir.

Em vista do sistema da Eq. (4.4), considerando-se a natureza numérica de sua solução, o tensor $\bar{\mathbf{C}}$ pode não ser perfeitamente simétrico. Essa assimetria é evitada ao impor a simetria antes do cálculo de resultados futuros, como segue:

$$\bar{\mathbf{S}}^{-1} = \bar{\mathbf{C}} \doteq \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{C}}^T + \bar{\mathbf{C}}), \quad (6.1)$$

Alguns índices são determinados a partir de uma comparação direta entre o $\bar{\mathbf{C}}$ resultante, o que seria laborioso e não objetivo. Portanto, o presente trabalho usou os seguintes indicadores para comparar rigidezes distintas:

1. Dois índices anisotrópicos: O índice universal de anisotropia (A_u), e índice anisotrópico de Zener (A_z), seguindo Ranganathan e Ostoja-Starzewski [2008];
2. A norma de Frobenius da matriz de rigidez;
3. Os invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} , no contexto dos planos principais de anisotropia (subseção 4.1.2);
4. Comparação da Teoria Clássica dos Laminados (CLT) através do tensor constitutivo reduzido (de Vargas Lisbôa e Marczak [2017]);

O índice universal de anisotropia (A_u), o índice de anisotropia de Zener (A_z) e a norma de Frobenius (F_r) são calculados como segue:

$$A_u(\bar{\mathbf{C}}) = 5 \frac{G^V}{G^R} + \frac{K^V}{K^R} - 6, \quad (6.2)$$

onde

$$\begin{aligned} 9K_v &= (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} + \bar{C}_{33} + 2(\bar{C}_{12} + \bar{C}_{23} + \bar{C}_{13})) , \\ 15G_v &= (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} + \bar{C}_{33}) - (\bar{C}_{12} + \bar{C}_{23} + \bar{C}_{13}) + 3(\bar{C}_{44} + \bar{C}_{55} + \bar{C}_{66}) , \end{aligned} \quad (6.3)$$

e

$$A_z(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{2\bar{C}_{44}}{\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}} , \quad (6.4)$$

$$F_r(\bar{\mathbf{C}}) = \sqrt{\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{C}})} . \quad (6.5)$$

Para comparações com a CLT, a Eq. (2.3) será usada. Dadas as hipóteses cinemáticas assumidas para a teoria de placas finas e $\sigma_{33} = 0$, a redução do tensor constitutivo 6×6 pode ser derivado após ajustar a rigidez remanescente como segue:

$$\bar{C}_{ij} = C_{IJ} - \frac{C_{I3}C_{3J}}{C_{33}} , \quad (6.6)$$

onde $\{I, J\} = \{1, 2, 6\}$. Os índices i, j devem seguir a seguinte relação:

$$i, j = \min(I!, 3), \min(J!, 3)$$

apenas para os índices irem até 3, uma vez que matriz bidimensional é 3×3 . Evidentemente, $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{S}}^{-1}$.

Os resultados desta seção serão divididos em duas partes. Na primeira, estuda-se um compósito laminado cross-ply (cruzado) $[0/90]_s$, usufruindo-se da vantagem de sua simplicidade para análise sobre o ponto de vista da CLT. Na segunda seção, compósitos têxteis manufaturados com entrelaçamentos típicos serão analisadas e comparados com resultados experimentais da literatura Scida et al. [1998]. Visando o cálculo de A_u , A_z e F_r de dados experimentais, a matriz de flexibilidade é calculado da Eq. (4.7) usando as contantes de engenharia aferidas.

As propriedades mecânicas e geométricas dos compósitos analisados nesta dissertação estão listadas nas tabelas 6.1 e 6.2, respectivamente.

Tabela 6.1 – Propriedades dos materiais utilizados

Material	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}
E-glass	73	73	30.4	30.4	0.2	0.2
Epoxy	3.2	3.2	1.16	1.16	0.38	0.38
Viniléster derakane	3.4	3.4	1.49	1.49	0.35	0.35
E-glass/Viniléster, $V_s = 0.8$	57.5	18.8	7.44	7.26	0.25	0.29
E-glass/Epoxy, $V_s = 0.8$	59.3	23.2	8.68	7.60	0.21	0.32
E-glass/Epoxy, $V_s = 0.75$	55.7	18.5	6.89	6.04	0.22	0.34

Tabela 6.2 – Propriedades geométricas do compósitos analisados

Material	E-glass/Viniléster	E-glass/Viniléster	E-glass/Epoxy	E-glass/Epoxy
Weave class	$[0/90]_s$	Padrão plano	Padrão 2/2 sarja	8-harness cetim
Largura feixe (mm)	0.20	0.60	0.83	0.60
Espessura feixe (mm)	0.20	0.05	0.09	0.09
Espessura célula unitária (mm)	0.88	0.10	0.2275	0.18
FVF [†]	Feixe (V_s)	0.80	0.75	0.80
	Compósito (V_o)	0.26	0.38	0.52
	Meso-escala (V_m)	0.26	0.687	0.507

[†] Fração de volume

6.1.1 Laminados cruzados

Nesta seção, os resultados para o laminado cruzado $[0/90]_s$ (ver Fig. 6.1) são discutidos. As propriedades geométricas e de material usadas nesse caso são listadas nas tabelas 6.1 e 6.2, respectivamente. Uma vez que a geometria do problema fora gerada no software TexGen Long e Brown [2011]; Lin et al. [2011], os parâmetros de entrada do TexGen são mostrados na Tab. 6.3, para fins de reprodutibilidade.

Tabela 6.3 – Parâmetros do entrelaçamento para as lâminas superiores do laminado cruzado $[0/90]_s$

Material	N. lâminas	Warp/Weft trama	Gap trama (mm)	Larg. trama (mm)	Esp. Tecido (mm)
E-glass/Epoxy	2	5	0.5	0.2	0.4

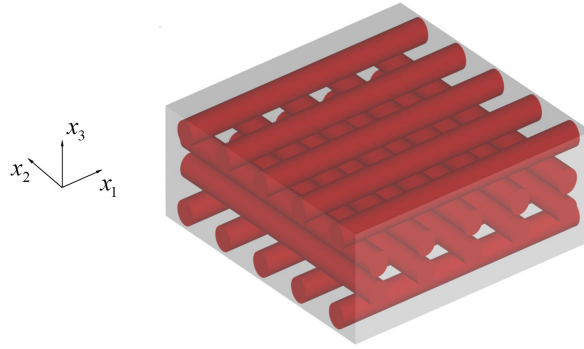


Figura 6.1 – Laminado cruzado $[0/90]_s$

6.1.1.1 Homogeneização da rigidez

A matriz $\bar{\mathbf{C}}$ avaliada para cada tipo de condição de contorno discutida nas seções 2.1.3.2 e 3.1, nominamente KUBC E PBC, serão aqui referenciados pelos superíndices correspondentes. O conjunto de condições de contorno proposto descrito na seção 3.1, $MBC^{\mathcal{O}}$, será utilizada de ambos os contextos de $\bar{\mathbf{C}}$ e de estruturas finas como placas e cascas utilizando $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$. Os resultados para o tensor de rigidez tridimensional de um laminado cruzado $[0/90]_S$ são:

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 15525.50 & 3256.47 & 3585.68 & 0.70 & 0.03 & -0.01 \\ 3315.44 & 15426.91 & 3612.21 & 0.61 & 0.07 & 0.01 \\ 3585.76 & 3485.87 & 9505.93 & 0.35 & -0.03 & -0.01 \\ 1.43 & 0.25 & 0.23 & 2307.38 & -0.01 & -0.02 \\ -0.01 & 0.10 & -0.06 & -0.01 & 2671.86 & 0.17 \\ -0.01 & -0.01 & -0.01 & -0.04 & 0.48 & 2508.81 \end{bmatrix}, \quad (6.7a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 15343.92 & 3240.38 & 3527.00 & 0.20 & 0.01 & -0.01 \\ 3240.34 & 15334.77 & 3527.50 & 0.18 & 0.00 & 0.01 \\ 3526.94 & 3527.50 & 9101.15 & 0.16 & -0.03 & -0.02 \\ 0.20 & 0.18 & 0.16 & 1944.53 & 0.01 & -0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.03 & 0.01 & 2255.10 & 0.12 \\ -0.00 & 0.01 & -0.02 & -0.00 & 0.12 & 2255.68 \end{bmatrix}, \quad (6.7b)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^v} = \begin{bmatrix} 15351.59 & 3238.43 & 3548.45 & 0.20 & 0.02 & -0.01 \\ 3238.39 & 15342.42 & 3548.96 & 0.17 & 0.02 & 0.00 \\ 3548.39 & 3548.95 & 9425.97 & 0.15 & -0.03 & -0.03 \\ 0.20 & 0.17 & 0.15 & 1944.53 & 0.01 & -0.00 \\ -0.00 & 0.00 & -0.06 & 0.01 & 2352.61 & 0.18 \\ -0.01 & 0.01 & -0.03 & -0.00 & 0.43 & 2306.12 \end{bmatrix}. \quad (6.7c)$$

6.1.1.2 Anisotropia 3D e constantes de engenharia

Uma vez que as matrizes homogenizadas dadas pela Eq. (6.7) são geradas, os indicadores anisotrópicos são computados juntamente com as constantes de engenharia para fins de comparação. A Tab. 6.4 resume esses cálculos para um laminado cruzado de E-glass/Viniléster.

Tabela 6.4 – Laminad cruzado E-glass/Viniléster

b.c.	E_{11}	E_{22}	E_{33}	ν_{13}	ν_{12}	A_u	A_z	F_r
KUBC	13.9	13.8	8.15	0.32	0.138	1.53	0.437	25703.14
MBC [∪]	13.8	13.7	8.07	0.32	0.136	1.84	0.388	25414.39
PBC	13.7	13.7	7.76	0.33	0.134	1.94	0.373	25261.47

Se a norma F_r for considerada, assumindo que tal métrica possa fornecer uma fraca indicação da rigidez do compósito, os resultados da Tab. 6.4 mostram que:

$$F_r(\bar{\mathbf{C}}^{KUBC}) > F_r(\bar{\mathbf{C}}^{MBC^\cup}) > F_r(\bar{\mathbf{C}}^{PBC}) . \quad (6.8)$$

Espadas-Escalante et al. [2017] conduziu um estudo similar para uma condição de contorno mista consistindo da combinação de PBC com SUBC, aqui referenciado como MBC^\perp . Os resultados mostram que:

$$F_r(\bar{\mathbf{C}}^{KUBC}) > F_r(\bar{\mathbf{C}}^{PBC}) > F_r(\bar{\mathbf{C}}^{MBC^\perp}) > F_r(\bar{\mathbf{C}}^{SUBC}) , \quad (6.9)$$

sugerindo que a combinação MBC^\perp de SUBC e PBC produziram uma resultante $\bar{\mathbf{C}}$ mais rígida que $\bar{\mathbf{C}}^{MBC^\perp}$. Por outro lado, a condição de contorno MBC^\cup proposta nessa dissertação, consistindo de uma combinação de KUBC e PBC, produziu uma $\bar{\mathbf{C}}^{MBC^\cup}$ menos rígida que $\bar{\mathbf{C}}^{KUBC}$. Tais conclusões frisam que combinações de distintas condições de contorno tem o potencial de representar corretamente a rigidez do compósito, pois tais combinações permitem a geração de campos de deformação intermediários, particularmente para distribuições de fibras mais complexas.

A restrição PBC infere um domínio tridimensional infinito. A despeito de ser válido para corpos 3D largos, em compósitos têxteis ou estruturas de casca tal condição de contorno pode não ser acurada para representar a direção normal ao plano. Além disso, KUBC impõem diretamente um estado de deformação, o que pode ser visto como um limite superior das propriedades elásticas. Consequentemente, espera-se que condições do tipo MBC possam gerar resultados com rigidezes intermediárias entre KUBC e PBC.

A Tab. 6.5 apresenta uma comparação entre I_i^K e I_i^L para os conjuntos de condições de contorno avaliados. Como mencionado na seção 4.1.2, uma condição necessária para que dois materiais anisotrópicos tenham comportamentos idênticos, é que seus invariantes I_i^K e I_i^L sejam iguais. A Tab. 6.5 mostra claramente que as três condições de

contorno geram resultados similares. As pequenas diferenças aparecem como consequência de campos de deformações locais gerados pela aplicação da condição de contorno, fato que também refletiu nos valores numéricos das constantes de engenharia (Tab. 6.4).

Tabela 6.5 – Invariantes de **K E L** para um laminado cruzado simétrico
E-glass/Viniléster

b.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	6.13×10^4	1.24×10^9	8.30×10^{12}	5.54×10^4	10.1×10^9	6.05×10^{12}
MBC ^U	6.08×10^4	1.22×10^9	8.10×10^{12}	5.33×10^4	9.35×10^9	5.37×10^{12}
PBC	6.04×10^4	1.20×10^9	7.90×10^{12}	5.27×10^4	9.12×10^9	5.16×10^{12}

Uma comparação direta com outras termos da matriz de flexibilidade 3D é apresentada na Tab. 6.6 para completeza. Em particular, valores de flexibilidade fora do plano são providos por referência, uma vez que não são facilmente encontrados na literatura.

Tabela 6.6 – Termos da matriz de rigidez 3D homogeneizada.

Model	\bar{S}_{13}	\bar{S}_{32}	\bar{S}_{63}	\bar{S}_{12}	\bar{S}_{33}	\bar{S}_{66}
KUBC	$-2.34 \cdot 10^{-5}$	$-2.32 \cdot 10^{-5}$	$-2.67 \cdot 10^{-10}$	$-9.93 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$4.33 \cdot 10^{-4}$
MBC ^U	$-2.36 \cdot 10^{-5}$	$-2.37 \cdot 10^{-5}$	$-4.79 \cdot 10^{-9}$	$-9.87 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$5.14 \cdot 10^{-4}$
PBC	$-2.44 \cdot 10^{-5}$	$-2.45 \cdot 10^{-5}$	$-5.54 \cdot 10^{-9}$	$-9.77 \cdot 10^{-6}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$	$5.14 \cdot 10^{-4}$

6.1.1.3 Anisotropia 2D e constantes de engenharia

Após efetuada a redução (Eq. (6.6)) das matrizes homogeneizadas $\bar{\mathbf{C}}^{\text{KUBC}}$, $\bar{\mathbf{C}}^{\text{PBC}}$ e $\bar{\mathbf{C}}^{\text{MBC}^U}$, suas versões bidimensionais são obtidas como segue:

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 14172.94 & 1947.23 & -0.01 \\ 1947.23 & 14101.88 & 0.00 \\ -0.01 & 0.00 & 2508.81 \end{bmatrix} \quad (6.10a)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{MBC^{\text{is}}} = \begin{bmatrix} 14015.78 & 1902.40 & 0.00 \\ 1902.40 & 14006.21 & 0.02 \\ 0.00 & 0.02 & 2306.12 \end{bmatrix} \quad (6.10b)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 13977.11 & 1873.35 & 0.00 \\ 1873.35 & 13967.55 & 0.02 \\ 0.00 & 0.02 & 2255.68 \end{bmatrix} \quad (6.10c)$$

Faz-se necessário grifar que a redução tensorial descarta as seguintes entradas da matriz de rigidez homogenizada 3D devido a hipótese cinemática da teoria de placas de Kirchoff:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cancel{C_{14}} & \cancel{C_{15}} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cancel{C_{24}} & \cancel{C_{25}} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cancel{C_{34}} & \cancel{C_{35}} & C_{36} \\ \cancel{C_{41}} & \cancel{C_{42}} & \cancel{C_{43}} & \cancel{C_{44}} & \cancel{C_{45}} & \cancel{C_{46}} \\ \cancel{C_{51}} & \cancel{C_{52}} & \cancel{C_{53}} & \cancel{C_{56}} & \cancel{C_{55}} & \cancel{C_{56}} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & \cancel{C_{64}} & \cancel{C_{65}} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Consequentemente, algumas das entradas na Eq. (6.7) responsáveis pela assimetria não são consideradas.

As constantes de engenharia podem ser obtidas através dos termos da matriz de flexibilidade obtida através da inversa das Eqs. (6.10), como segue:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{\bar{\bar{S}}_{11}} & E_{22} &= \frac{1}{\bar{\bar{S}}_{22}} \\ G_{12} &= \frac{1}{\bar{\bar{S}}_{33}} & \nu_{12} &= -\frac{\bar{\bar{S}}_{12}}{\bar{\bar{S}}_{22}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Na Tab. 6.7, as propriedades efetivas calculadas da Eq. (6.12) são comparadas. O acrônimo CLT refere-se aos valores obtidos pelo homogeneização seguindo um laminado

cruzado, via teoria clássica dos laminados. Os procedimentos analíticos para tal podem ser facilmente encontrados em texto da literatura (Jones [2018]; Nettles [1994]). Os resultados entre diferentes abordagens produzem resultados consistentes para os módulos elásticos. Outra comparação, presente na Tab. 6.7 é fornecida na Fig. 6.2, onde E_{11} de várias formulações são grafados em conjunto com os limites elásticos descritos na seção 2.1.2.1. Observa-se que para um laminado simétrico cross-ply ($n = 2$) os valores homogenizados estão em congruência com o limite superior de Ishikawa [1981].

Tabela 6.7 – Constantes de engenharia para o laminado cruzado E-glass/Viniléster

b.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	13.90	13.83	2.508	0.1374
MBC ^U	13.76	13.75	2.306	0.1357
PBC	13.73	13.72	2.255	0.1340
CLT	13.39	13.39	2.05	0.118

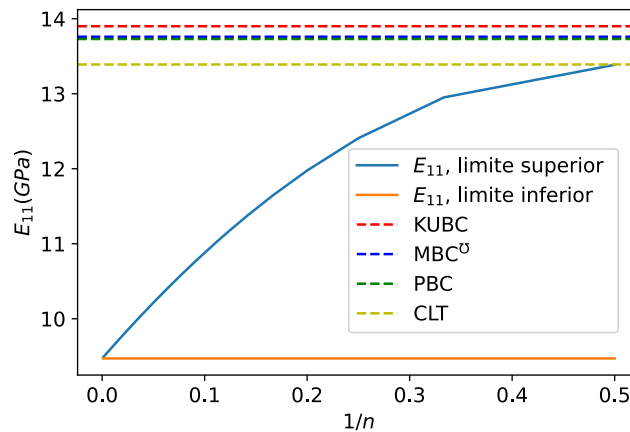


Figura 6.2 – Comparação do módulo de elasticidade obtido por diversas formulações e limites elásticos propostos por Ishikawa [1981]

6.1.2 Compósitos têxteis

Nesta seção, o processo de homogeneização é conduzido para alguns compósitos têxteis tipicamente encontrados na indústria. A geometria é gerada em um software de modelagem de compósitos têxteis (TexGen) e os resultados são comparados a avaliações

experimentais e numéricas encontradas na literatura. Em seguida, a matriz de rigidez homogenizada é reduzida para CLT e também comparada. Os casos analisados são:

1. Padrão plano reforçado com E-glass/Viniléster;
2. Padrão 2/2 sarja reforçado com E-glass/Epoxy;
3. 8-harness cetim reforçado com E-glass/Epoxy;

Os padrões de entrelaçamento são diagramados na Fig. 6.3 e as geometrias correspondentes geradas pelo TexGen são mostradas na Fig. 6.4 . Os parâmetros do entrelaçamento usados para gerar tais modelos aparecem listados na Tab. 6.8 , e são originários de Scida et al. [1999]. As matrizes de rigidez foram corrigidas objetivando-se simular a fração de volume real do compósito, como descrito na seção 4.1.1, Eq. (4.10) .

Tabela 6.8 – Entrada de dados do TexGen utilizada.

Material	Entrelaçamento	Larg. feixe de fi-bras(mm)	Esp. Comp. (mm)	Gap trama(mm)	V_g^α	V_g/V_g^α
E-glass/Viniléster	Padrão plano	0.6	0.1	0.625	0.589	1.165
E-glass/Epoxy	2/2 Padrão 2/2 sarja	0.83	0.2275 [†]	1	0.498	1.017
E-glass/Epoxy	8-harness cetim	0.6	0.18	0.8	0.526	1.235

[†] A espessura total do compósito é 0.2275 mm. Entretanto, 0.18(mm) de fato fora inserido no TexGen. Com a camada adicional padrão de resina (ver Fig. 4.2), a espessura aproxima-se da encontrada na prática, e se verificou que $V_g \approx V_g^\alpha$

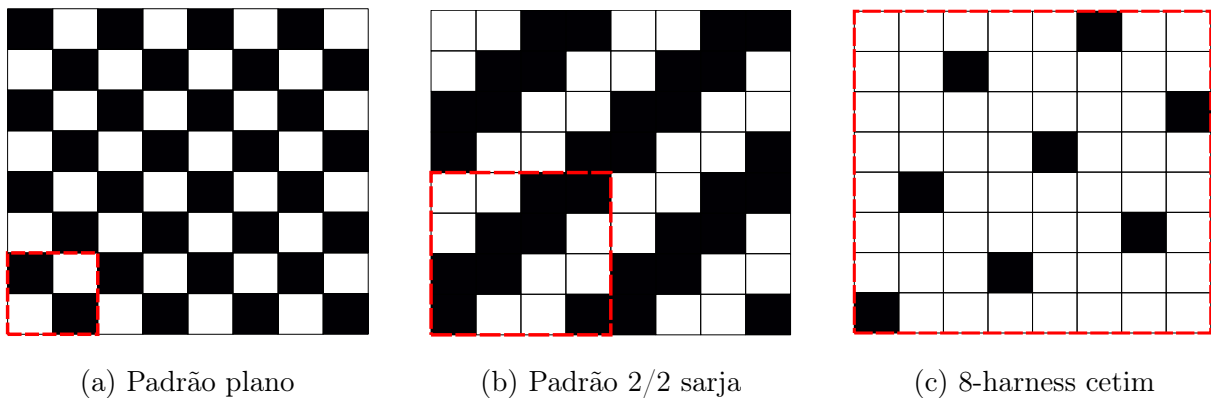


Figura 6.3 – Padrões de entrelaçamento para os três compósitos têxteis analisados

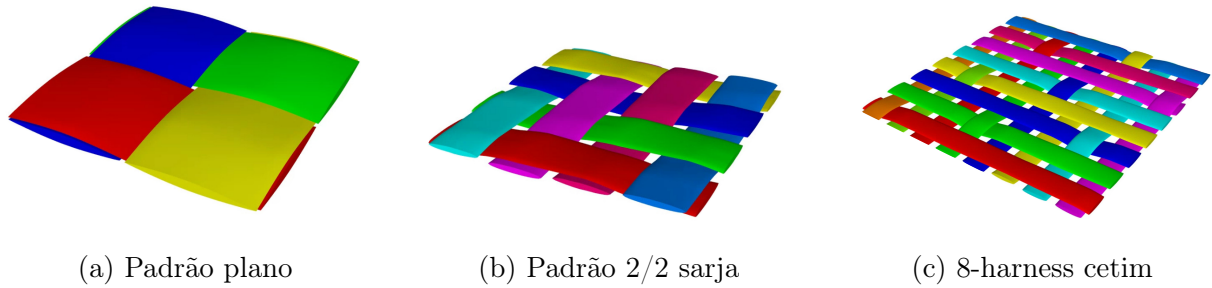


Figura 6.4 – Geometrias do RVE (sem resina) gerada para cada padrão da Fig. 6.3 .

6.1.2.1 Rigidez Homogeneizada

Nesta subseção, a matriz de rigidez 3D (e corrigida por Eq. (4.10)) de três compósitos têxteis, provinda a homogeneização, será discutida. Os resultados serão distinguidos por seus nomes adicionados à matriz $\bar{\mathbf{C}}^e$, juntamente com a condição de contorno:

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{plano}}^{\mathbf{e},KUBC} = \begin{bmatrix} 28874.13 & 6117.78 & 6305.27 & -18.19 & -481.47 & 732.65 \\ 6478.04 & 29131.20 & 6312.37 & 759.37 & 1.27 & -4.18 \\ 6305.42 & 5584.47 & 13194.71 & 12.05 & -0.56 & 18.27 \\ -47.26 & 634.76 & 0.54 & 2721.56 & 5.10 & -10.19 \\ -481.44 & -1.84 & -0.59 & 2.74 & 2983.75 & -17.24 \\ 988.30 & -9.13 & 26.10 & -7.48 & -31.46 & 4775.66 \end{bmatrix} \quad (6.13a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{plano}}^{\mathbf{e},PBC} = \begin{bmatrix} 28331.60 & 6452.85 & 6197.92 & -30.53 & -457.13 & 957.37 \\ 6453.30 & 28634.90 & 6211.23 & 465.35 & -4.90 & 7.81 \\ 6197.87 & 6210.75 & 13084.94 & 0.92 & -0.58 & 30.03 \\ -30.52 & 465.35 & 0.93 & 2772.56 & 1.67 & -10.37 \\ -457.13 & -4.90 & -0.58 & 1.67 & 2771.43 & -30.76 \\ 957.37 & 7.83 & 30.05 & -10.38 & -30.76 & 4876.75 \end{bmatrix} \quad (6.13b)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{plano}}^{\mathbf{e},MBC^v} = \begin{bmatrix} 28433.07 & 6382.58 & 6218.58 & -12.93 & -425.32 & 965.06 \\ 6382.95 & 28736.06 & 6231.57 & 540.20 & 1.89 & 2.27 \\ 6218.54 & 6231.17 & 13149.13 & 2.16 & 2.04 & 29.91 \\ -41.71 & 432.58 & -1.67 & 2450.17 & 1.75 & -12.08 \\ -425.34 & 1.89 & 2.02 & 0.84 & 2892.14 & -25.63 \\ 965.06 & 2.27 & 29.92 & -6.21 & -25.63 & 4877.89 \end{bmatrix} \quad (6.13c)$$

para o Padrão plano;

$$\bar{C}_{\text{sarja}}^{\text{e},KUBC} = \begin{bmatrix} 22170.91 & 4914.31 & 5076.26 & -5.64 & -194.87 & 289.69 \\ 5192.57 & 22055.12 & 5080.02 & 311.95 & 0.86 & -7.25 \\ 5075.87 & 4633.46 & 10108.11 & 4.63 & 0.37 & 10.33 \\ -17.74 & 261.84 & -0.20 & 2076.20 & 5.42 & -2.96 \\ -194.42 & -2.72 & 0.26 & 2.48 & 2224.88 & -3.69 \\ 418.73 & -12.08 & 15.33 & -1.86 & -10.68 & 3470.17 \end{bmatrix} \quad (6.14a)$$

$$\bar{C}_{\text{sarja}}^{\text{e},PBC} = \begin{bmatrix} 21837.35 & 5160.93 & 5015.48 & -13.78 & -188.56 & 398.70 \\ 5160.86 & 21993.03 & 5020.53 & 189.97 & 0.77 & -8.24 \\ 5014.96 & 5020.10 & 10029.43 & 0.31 & -0.19 & 15.17 \\ -13.77 & 189.98 & 0.32 & 2090.10 & 2.94 & -3.50 \\ -188.57 & 0.76 & -0.20 & 2.94 & 2089.89 & -9.37 \\ 398.71 & -8.23 & 15.19 & -3.50 & -9.37 & 3504.09 \end{bmatrix} \quad (6.14b)$$

$$\bar{C}_{\text{sarja}}^{\text{e},MBC^v} = \begin{bmatrix} 21915.77 & 5121.05 & 5028.02 & -6.63 & -178.92 & 402.97 \\ 5120.99 & 22076.02 & 5033.40 & 220.81 & 3.25 & -9.55 \\ 5027.62 & 5033.08 & 10078.52 & 2.14 & 0.85 & 16.21 \\ -18.22 & 180.12 & -0.64 & 1870.07 & 3.05 & -4.16 \\ -178.93 & 3.22 & 0.77 & 2.11 & 2155.16 & -7.72 \\ 402.99 & -9.54 & 16.22 & -1.93 & -7.72 & 3505.08 \end{bmatrix} \quad (6.14c)$$

para o Padrão 2/2 sarja, e

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{cetim}}^{\text{e},KUBC} = \begin{bmatrix} 27304.15 & 5970.20 & 6365.65 & -10.42 & -157.92 & 202.39 \\ 6286.58 & 27858.86 & 6370.29 & 239.53 & -0.02 & 4.42 \\ 6364.15 & 5909.39 & 12948.78 & 5.73 & -1.05 & 7.11 \\ -17.03 & 179.75 & 0.00 & 2786.00 & 1.67 & -3.91 \\ -157.59 & -0.62 & -0.14 & 0.78 & 2940.36 & -12.73 \\ 293.66 & -1.20 & 9.81 & -2.32 & -10.03 & 4159.94 \end{bmatrix} \quad (6.15a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{cetim}}^{\text{e},PBC} = \begin{bmatrix} 26809.47 & 6210.06 & 6264.62 & -11.56 & -158.35 & 269.87 \\ 6211.52 & 26985.12 & 6273.02 & 161.25 & -1.54 & 2.28 \\ 6259.36 & 6266.59 & 12817.02 & 1.49 & -1.49 & 10.61 \\ -11.37 & 162.08 & 1.63 & 2685.45 & 0.51 & -2.77 \\ -158.34 & -1.56 & -1.54 & 0.51 & 2684.54 & -8.53 \\ 269.90 & 2.32 & 10.66 & -2.77 & -8.58 & 3992.46 \end{bmatrix} \quad (6.15b)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{cetim}}^{\text{e},MBC^v} = \begin{bmatrix} 26899.39 & 6179.88 & 6285.15 & -15.72 & -151.36 & 274.57 \\ 6181.20 & 27078.99 & 6294.05 & 85.15 & 1.01 & 1.05 \\ 6281.49 & 6289.15 & 12902.98 & 7.00 & -0.82 & 10.68 \\ -16.82 & 155.13 & -0.10 & 2430.36 & 0.62 & -3.52 \\ -151.82 & 1.04 & 0.11 & 0.46 & 2843.23 & -6.85 \\ 274.58 & 1.07 & 10.72 & -0.88 & -6.92 & 3993.26 \end{bmatrix} \quad (6.15c)$$

para o 8-harness cetim.

6.1.2.2 Anisotropia 3D, constantes de engenharia, e comparação com a literatura

Nesse ponto, com posse da $\bar{\mathbf{C}}^e$ 3D de cada padrão de entrelaçamento, fornecida pelas Eqs. (6.13), (6.14), e (6.15), as propriedades efetivas dos materiais podem ser computadas, assim como os indicadores anisotrópicos. Com a ausência de qualquer tipo de restrição de simetria, as matrizes $\bar{\mathbf{C}}^e$ são permitidas a resultarem em anisotropia completa. As Tab. 6.9, 6.10, e 6.11 listam todos as 9 propriedades efetivas dos materiais obtidas para os três compósitos têxteis submetidos a cada condição de contorno, assim como

valores provindos da literatura, quando disponíveis. Nas tabelas 6.10 e 6.11, os valores com estrela (*) foram obtidos de cálculos analíticos de Scida et al. [1999], não de valores experimentais.

Tabela 6.9 – Comparação das propriedades efetivas dos materiais para o padrão planoreforçado com E-glass/Viniléster.

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	25.18	25.81	11.06	4.74	2.70	2.97	0.42	0.35	0.13
PBC	24.66	25.12	10.87	4.84	2.76	2.76	0.41	0.41	0.13
MBC ^U	24.78	25.52	10.92	4.84	2.44	2.88	0.41	0.41	0.13
Barbero et al. [2006]	24.44	24.53	10.25	5.51	3.15	3.16	0.38	0.38	0.13
Scida et al. [1999]	24.8	24.8	8.5	6.5	4.2	4.2	0.28	0.28	0.11

Tabela 6.10 – Comparação das propriedades efetivas dos materiais para o padrão 2/2 sarja reforçado com E-glass/Epoxy.

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	19.92	19.93	8.29	3.46	2.07	2.22	0.44	0.39	0.13
PBC	18.91	19.10	8.17	3.50	2.01	2.01	0.43	0.43	0.14
MBC ^U	19.00	19.92	8.21	3.49	1.87	2.15	0.43	0.43	0.13
Scida et al. [1999]	19.2	19.2	10.92*	3.6	3.78*	3.78*	0.305*	0.305*	0.13

Tabela 6.11 – Comparação das propriedades efetivas dos materiais para o 8-harness cetim reforçado como E-glass/Epoxy.

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	23.81	24.59	10.65	4.16	2.79	2.94	0.44	0.39	0.13
PBC	23.36	23.54	10.47	3.99	2.69	2.69	0.42	0.42	0.13
MBC ^U	23.46	23.6	10.54	3.99	2.43	2.84	0.44	0.39	0.13
Scida et al. [1999]	25.6	25.6	15.65*	5.7	5.42*	5.42*	0.283*	0.283*	0.13

Tabela 6.12 – Indicadores anisotrópicos para os compósitos têxteis analisados.

c.c.	Padrão plano			Padrão 2/2 sarja			8-harness cetim		
	A_u	A_z	F_r	A_u	A_z	F_r	A_u	A_z	F_r
KUBC	3.26	0.241	39597	3.24	0.243	34788	3.00	0.263	35800
PBC	3.22	0.253	39081	3.25	0.251	34578	3.05	0.261	35071
MBC ^U	3.40	0.222	39189	3.43	0.223	34678	3.14	0.235	35183

A Tab. 6.12 sumariza os indicadores anisotrópicos para todos os três tipos de compósitos sujeitos a cada uma das três condições de contorno estudadas. Finalmente, as Tabs. 6.13, 6.14, e 6.15 listam os cálculos dos invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para cada padrão de entrelaçamento. As constantes de engenharia efetivas são compiladas nas Tabs. 6.13, 6.14, e 6.15 para cada têxtil analisado.

Tabela 6.13 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o padrão plano.

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	1.08×10^5	3.82×10^9	4.36×10^{13}	9.22×10^4	2.76×10^9	2.65×10^{13}
PBC	1.08×10^5	3.79×10^9	4.31×10^{13}	9.09×10^4	2.68×10^9	2.55×10^{13}
MBC ^U	1.08×10^5	3.80×10^9	4.34×10^{13}	9.08×10^4	2.68×10^9	2.55×10^{13}

Tabela 6.14 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o padrão 2/2 sarja.

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.43×10^4	2.32×10^9	2.07×10^{13}	6.99×10^4	1.58×10^9	1.15×10^{13}
PBC	8.43×10^4	2.32×10^9	2.07×10^{13}	6.92×10^4	1.56×10^9	1.12×10^{13}
MBC ^U	8.44×10^4	2.33×10^9	2.08×10^{13}	6.91×10^4	1.55×10^9	1.12×10^{13}

Tabela 6.15 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o 8-harness cetim.

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	1.06×10^5	3.65×10^9	4.09×10^{13}	8.81×10^4	2.52×10^9	2.32×10^{13}
PBC	1.04×10^5	3.56×10^9	3.95×10^{13}	8.55×10^4	2.38×10^9	2.12×10^{13}
MBC ^U	1.05×10^5	3.58×10^9	3.99×10^{13}	8.56×10^4	2.38×10^9	2.14×10^{13}

6.1.2.3 Anisotropia 2D e constantes de engenharia

$$\bar{\bar{C}}_{\text{plano}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 25861.00 & 3455.34 & 849.87 \\ 3455.34 & 26449.54 & -16.66 \\ 849.87 & -16.66 & 4775.62 \end{bmatrix} \quad (6.16a)$$

$$\bar{\bar{C}}_{\text{plano}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 25395.87 & 3511.14 & 943.14 \\ 3511.14 & 25686.75 & -6.44 \\ 943.14 & -6.44 & 4876.68 \end{bmatrix} \quad (6.16b)$$

$$\bar{\bar{C}}_{\text{plano}}^{MBC^{\bar{v}}} = \begin{bmatrix} 25492.15 & 3435.79 & 950.91 \\ 3435.79 & 25783.02 & -11.91 \\ 950.91 & -11.91 & 4877.82 \end{bmatrix} \quad (6.16c)$$

para o padrão plano;

$$\bar{\bar{C}}_{\text{sarja}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 19621.82 & 2614.49 & 347.77 \\ 2614.49 & 19721.56 & -15.83 \\ 347.77 & -15.83 & 3470.15 \end{bmatrix} \quad (6.17a)$$

$$\bar{\bar{C}}_{\text{sarja}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 19329.49 & 2650.48 & 391.11 \\ 2650.48 & 19480.07 & -15.83 \\ 391.11 & -15.83 & 3504.07 \end{bmatrix} \quad (6.17b)$$

$$\bar{\bar{C}}_{\text{sarja}}^{MBC^{\bar{v}}} = \begin{bmatrix} 19407.57 & 2610.11 & 394.89 \\ 2610.11 & 19562.41 & -17.64 \\ 394.89 & -17.64 & 3505.05 \end{bmatrix} \quad (6.17c)$$

para o padrão 2/2 sarja, e

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{\text{cetim}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 24175.52 & 3110.39 & 243.87 \\ 3110.39 & 24947.57 & -2.40 \\ 243.87 & -2.40 & 4159.93 \end{bmatrix} \quad (6.18a)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{\text{cetim}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 23750.06 & 3147.56 & 264.69 \\ 3147.56 & 23918.07 & -2.90 \\ 264.69 & -2.90 & 3992.45 \end{bmatrix} \quad (6.18b)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{\text{cetim}}^{MBC^{\text{U}}} = \begin{bmatrix} 23839.62 & 3116.74 & 269.36 \\ 3116.74 & 24011.15 & -4.16 \\ 269.36 & -4.16 & 3993.25 \end{bmatrix} \quad (6.18c)$$

para o 8-harness cetim, notando que a simetria fora forçada (ver Eq. (6.1)) antes da contração tensorial da matriz de rigidez homogenizada.

As rigidezes dadas pelas Eqs. (6.16), (6.17), e (6.18) podem ser invertidas, e delas as constantes de engenharia computadas. Por fim, far-se-á a validação com resultados experimentais de Scida et al. [1999], e valores numéricos baseados na CLT (Jones [2018]; Nettles [1994]). A constantes de engenharia homogenizadas são listadas nas Tabs. 6.16, 6.17, e 6.18.

Tabela 6.16 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão plano.

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	25.26	25.98	4.75	0.21
PBC	24.73	25.20	4.84	0.22
MBC ^U	24.85	25.32	4.84	0.22
CLT	27.18	27.18	4.05	0.11
Scida et al. [1999]	24.8 ± 1.1	24.8 ± 1.1	6.5 ± 0.8	0.11 ± 0.01

Tabela 6.17 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão 2/2 sarja.

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	19.24	19.37	3.46	0.22
PBC	18.92	19.12	3.50	0.23
MBC ^U	19.01	19.21	3.50	0.23
CLT	18.76	18.97	2.48	0.12
Scida et al. [1999]	19.2 ± 1.1	19.2 ± 1.1	3.6 ± 0.1	0.13 ± 0.005

Tabela 6.18 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o 8-harness cetim.

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	23.77	24.55	4.16	0.22
PBC	23.32	23.50	3.98	0.23
MBC ^U	23.42	23.60	3.99	0.23
CLT	25.74	25.74	3.74	0.12
Scida et al. [1999]	25.6 ± 0.2	25.6 ± 0.2	5.7 ± 0.3	0.13 ± 0.005

A mesma abordagem executada para o laminado cruzado na Fig. 6.2 pode ser repetida para todos os três compósitos têxteis. Visualizar-se-á a posição relativa de E_{11} com os limites analíticos descritos na seção 2.1.2.1. Tais resultados são plotados na Fig. 6.5 .

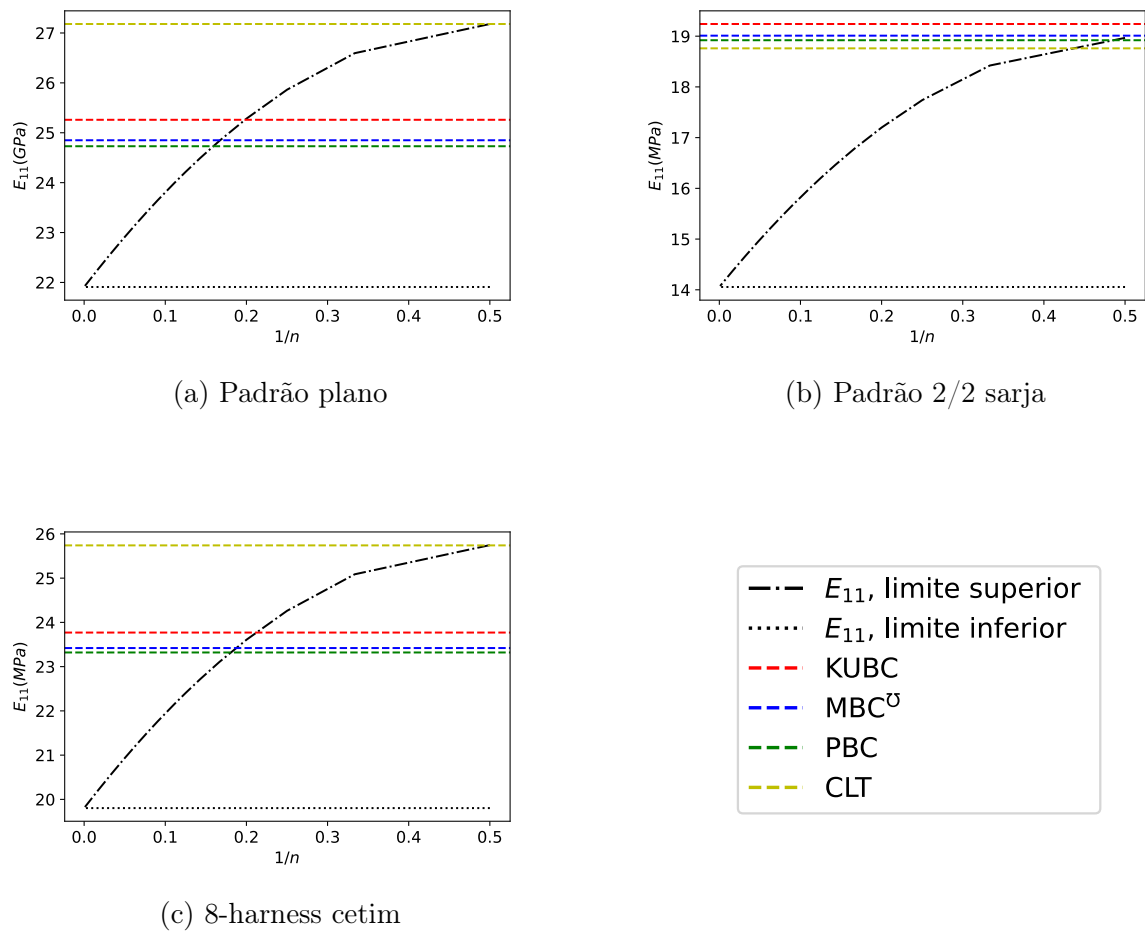


Figura 6.5 – Comparação do módulo elástico obtido mediante a redução das matrizes homogenizadas, CLT e limites propostos por Ishikawa [1981], para (a) Padrão plano, (b) Padrão 2/2 sarja e (c) 8-harness cetim

6.1.3 Campos de tensão e de deformação

Nesta seção, investiga-se a influência de diferentes padrões de entrelaçamento na distribuição de tensão e de deformação. As Figs. 6.6, 6.7, e 6.8 mostram o gráfico de tensão dos padrões para cada condição de contorno estudada, sobre um estado de deformação ε^1 (ver Eq. (4.2)). A malha de elementos finitos da resina encontra-se suprimida, para fins de clareza. Nesta seção, plota-se apenas a componente σ_{13} , porém tal já é suficiente para evidenciar como diferentes padrões comandam o mecanismo de deformação dos têxteis. Embora não ilustrado nessa dissertação, têxteis com a mesma composição de fibra/matriz, contudo distintos padrões de entrelaçamento, respondem diferentemente a

esforços mecânicos. A homogeneização do RVE aparentemente é única ferramenta capaz de reproduzir os mecanismos internos gerados pelo tecido, com os efeitos diretamente refletidos nas matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$. As Figs. 6.6, 6.7, e 6.8 evidenciam a particularidade da concentração de tensão para cada padrão, informações que seriam perdidas em metodologias analíticas ou experimentais.

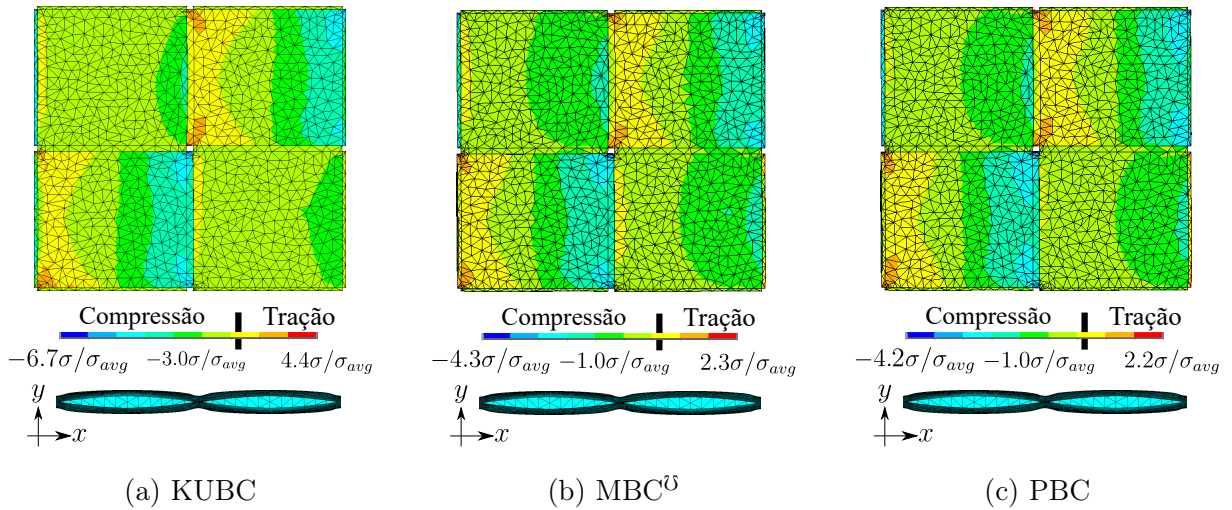


Figura 6.6 – Distribuição de tensão σ_{13} para o padrão plano submetido a um estado de deformação ε^1 , para o padrão plano.

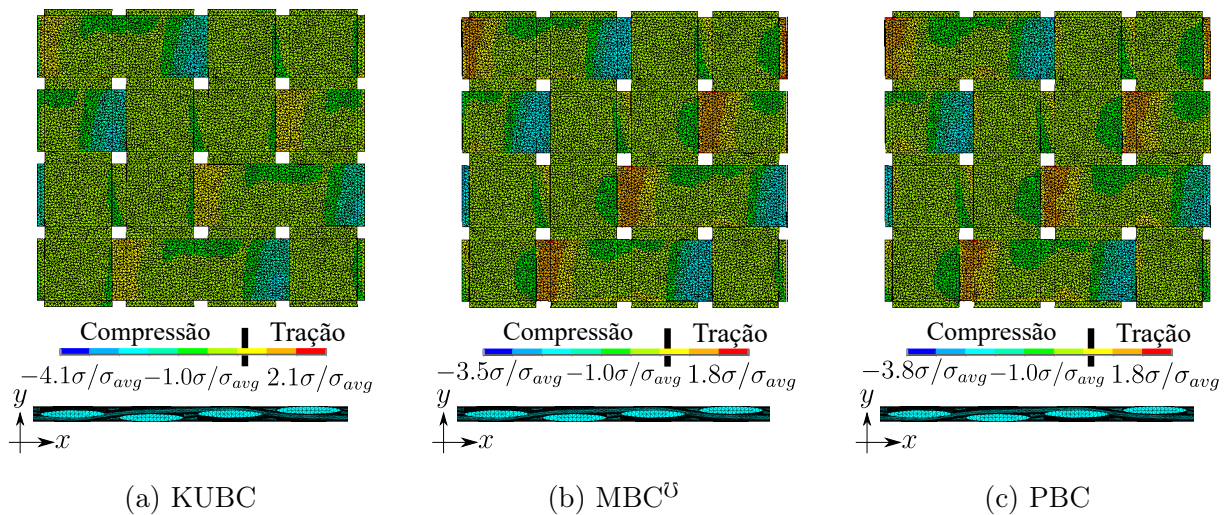


Figura 6.7 – Distribuição de tensão σ_{13} para o padrão plano submetido a um estado de deformação ε^1 , para o padrão 2/2 sarja.

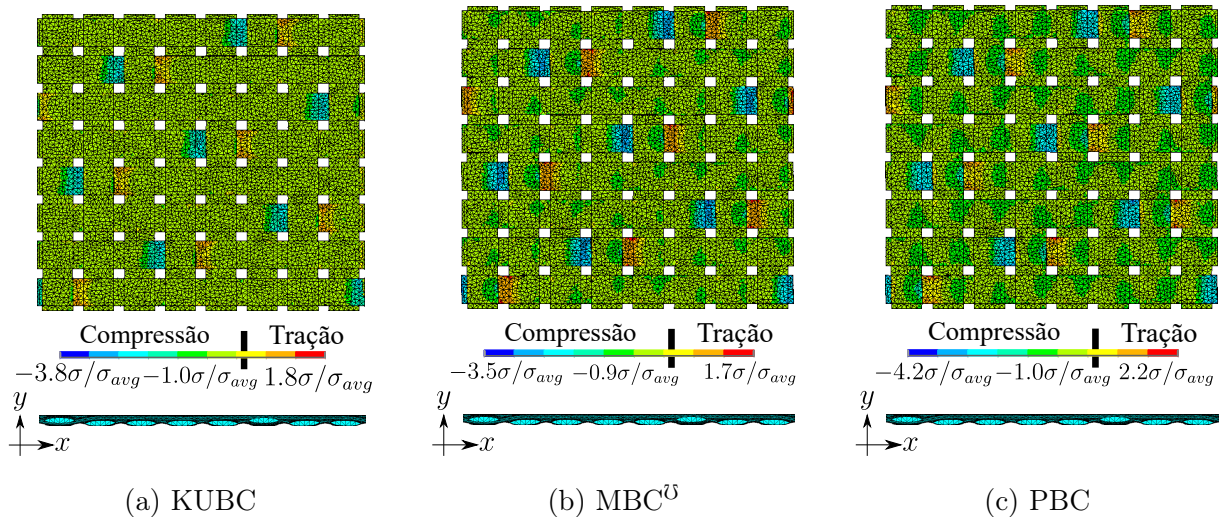


Figura 6.8 – Distribuição de tensão σ_{13} para o padrão plano submetido a um estado de deformação ε^1 , para o padrão 8-harness cetim.

6.1.4 Resposta mecânica média

Esta seção tem por objetivo incentivar futuras investigações quanto à influência das condições de contorno na resposta mecânica média de um componente mecânico. Para tal, um simples exercício baseado na simulação de uma placa em balanço sujeito a um momento fletor (Fig. 6.9). Esse exemplo fora selecionado por emular um problema governado por flexão, âmbito que em geral usa-se uma formulação de placas finas/casca. As propriedades mecânicas que serão inseridas na software de simulação são baseadas na matrizes reduzidas, presentes nas Eqs. (6.16), (6.17), e (6.18). Os dados utilizados para esse problema são $L = 300$ mm, $w = 100$ mm, and $h = 1$ mm, com um momento unitário na extremidade livre, $M = 1$ N mm.

Os gráficos do deslocamento transversal são mostrados nas Figs. 6.10, 6.11, e 6.12, para os três entrelaçamentos homogeneizados nessa dissertação. As condições de contorno exerceram influência evidente para o padrão 2/2 sarja. A magnitude desta influência apenas poderá ser verificada em um estudo comparativo entre diversos entrelaçamentos, entre os quais são comum a fração volumétrica de fibra/resina.

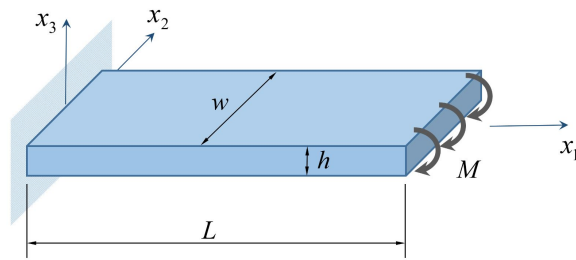


Figura 6.9 – Problema da placa em balanço.

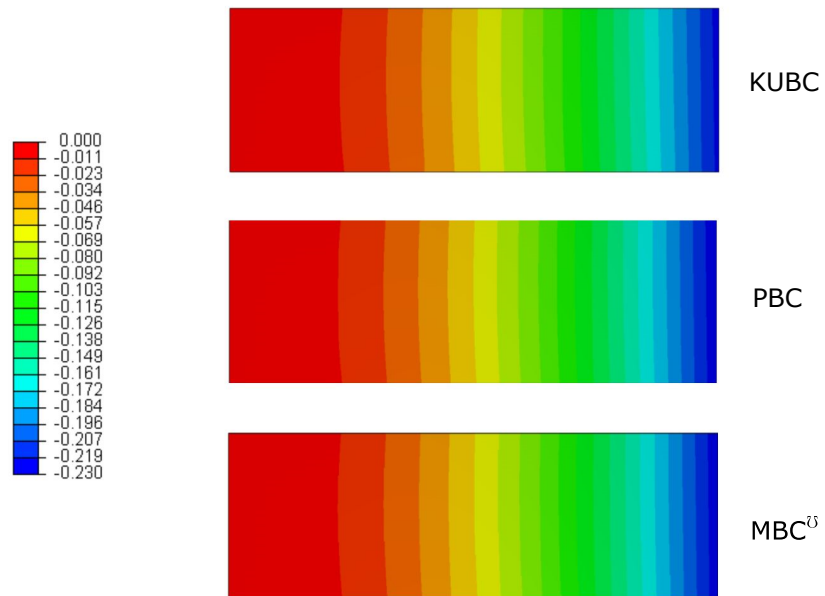


Figura 6.10 – Deslocamento transverso (u_3) da placa em balanço. Resultado para um modelo de casca usando as propriedades do padrão plano, presentes em (6.16).

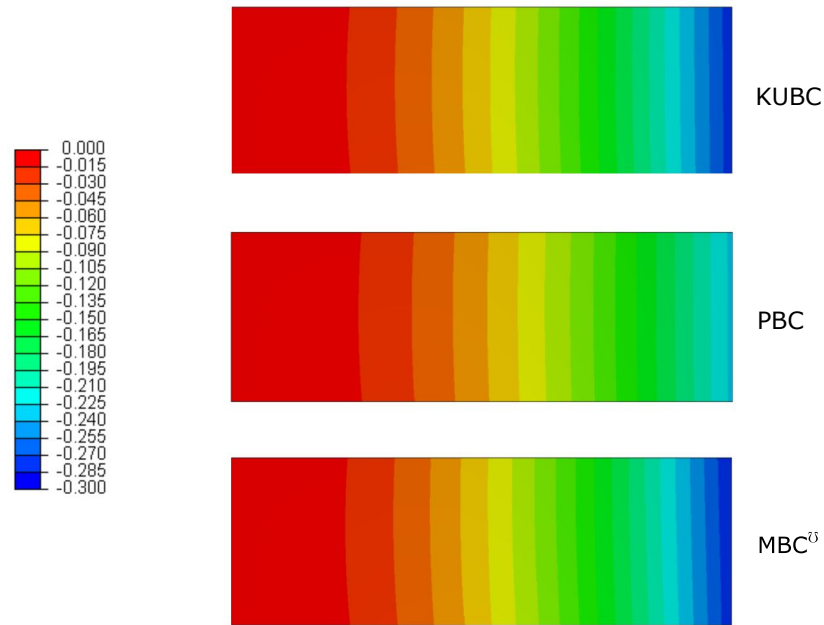


Figura 6.11 – Deslocamento transverso (u_3) da placa em balanço. Resultado para um modelo de casca usando as propriedades do padrão 2/2 sarja, presentes em (6.17).

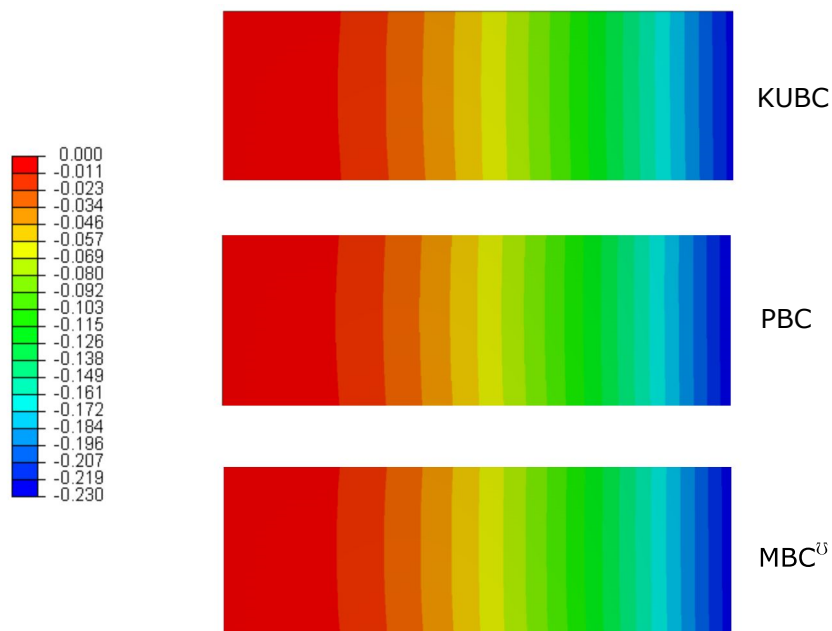


Figura 6.12 – Deslocamento transverso (u_3) da placa em balanço. Resultado para um modelo de casca usando as propriedades do 8-harness cetim, presentes em (6.18).

6.2 Influência do Padrão de entrelaçamento

Nesta seção objetiva-se analisar a influência do padrão de entrelaçamento nas propriedades mecânicas homogenizadas. Um compósito com a mesma fração volumétrica V_g e diferentes padrões de tecido é analisado. As geometrias foram analisadas no Texgen, e os parâmetros de entrada, junto com as V_g obtidas, são apresentados na Tab. 6.19. Ajustes finos foram empregados no espaçamento da trama (ver Tab. 6.19), para obter V_g similares, com a diferença máxima de 0.18%, magnitude que pode ser considerada desprezível.

Tabela 6.19 – Parâmetros de Input no TexGen

Textiles	Seed	Esp. Trama	V_g	Grupo
Padrão plano	0.05	0.95	0.554	A
Padrão 2/2 sarja	0.05	1	0.553	B
5-harness cetim	0.05	1.005	0.554	C
8-harness cetim	0.08	1.01	0.554	D
Padrão cesta	0.05	1	0.553	E
Padrão sarja 1/2 esquerdo	0.05	0.99	0.553	F
Padrão sarja 1/2 direito	0.05	0.99	0.553	G

Também objetiva-se investigar qual seria o erro de uma análise ao utilizar técnicas baseadas na CLT para a previsão das propriedades mecânicas finais. A fim de simular esse fato, assume-se possuir os dados corretos de fração de volume dos componentes, como descrito na Tab. 6.20. A homogenização por meio da CLT segue a metodologia de Barbero et al. [2006], tratando-se de uma montagem de um laminado simétrico $[0/90]_s$. O mesmo procedimento fora empregado na comparação com resultados experimentais na seção anterior.

Tabela 6.20 – Propriedades dos materiais utilizados

Material	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}
E-glass/ Viniléster derakane(80%)	57.5	18.8	7.44	7.26	0.25	0.29
Viniléster derakane $V_g = V_o$	3.4	3.4	1.49	1.49	0.35	0.35

6.2.1 Comparação entre matrizes de rigidez tridimensionais

Nesta seção, os resultados tridimensionais são apresentados nas Fig. 6.13-6.17. O cálculo obtido por meio da CLT é representado por uma linha contínua, nos casos em que seus valores encontram-se disponíveis. Os resultados são agrupados por tipo de entrelaçamento. A nomenclatura utilizada segue os valores dispostos na Tab. 6.19. Para cada entrelaçamento, foram aferidas diversas constantes de engenharia para cada uma das condições de contorno estudadas ao longo da dissertação: KUBC, PBC e MBC^U.

Os resultados mostraram diferenças pouco significativas entre as condições de contorno para as constantes de engenharia calculadas, o que é congruente com o estudo de Ullah et al. [2019]. As condições de contorno aparentam ter maior influência sobre os módulos cisalhantes G_{12} e G_{31} , com diferenças pequenas entre os resultados na ordem de 8%. A cálculo via CLT apresentou um erro relativo máximo de $\approx 7\%$ para E_{11} , E_{22} , considerando a condição de contorno MBC^U. Outro ponto interessante foi o fato de que a homogeneização via CLT apresentou-se como um limite superior dos módulos, o que é lógico, haja vista que a hipótese de $\sigma_{33} = 0$ gera uma redução da flexibilidade da matriz.

Quanto à influência do padrão de trama, nota-se que há pouca diferença entre os entrelaçamentos, salvo para o padrão plano, ao avaliar os módulos E_{11} e E_{22} , como pode-se notar nas Fig. 6.13 e Fig. 6.14. A diferença máxima nas propriedades está na ordem de $\approx 10\%$.

De forma geral, não é possível estabelecer alguma tendência clara entre as propriedades mecânicas elásticas lineares e o padrão de entrelaçamento.

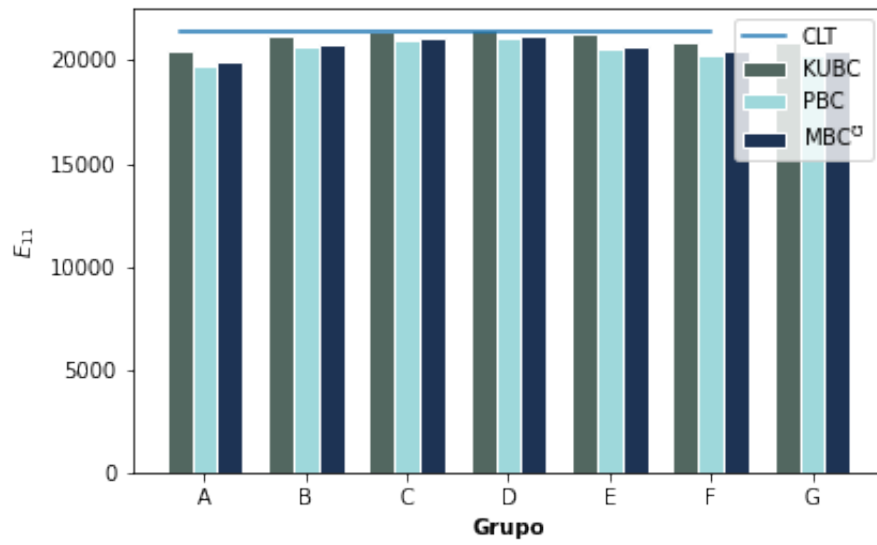


Figura 6.13 – Comparação de propriedades efetivas para E_{11}

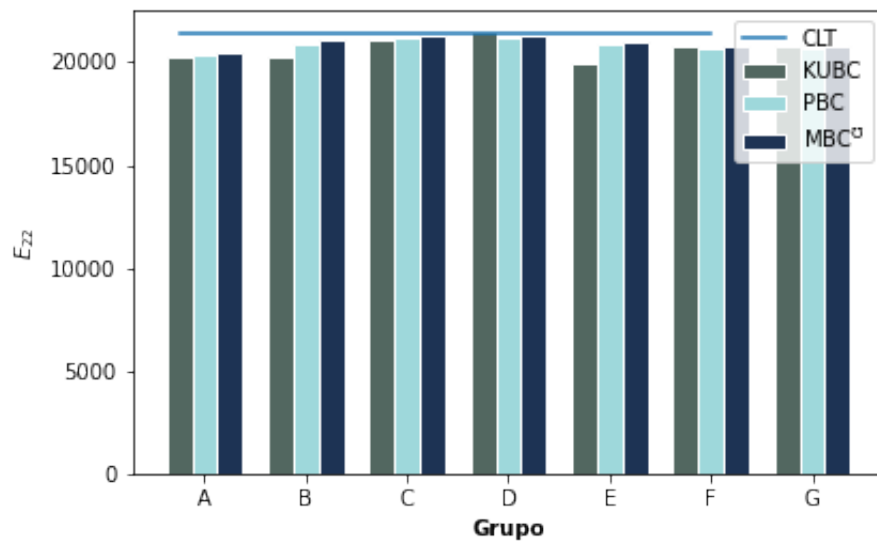


Figura 6.14 – Comparação de propriedades efetivas para E_{22}

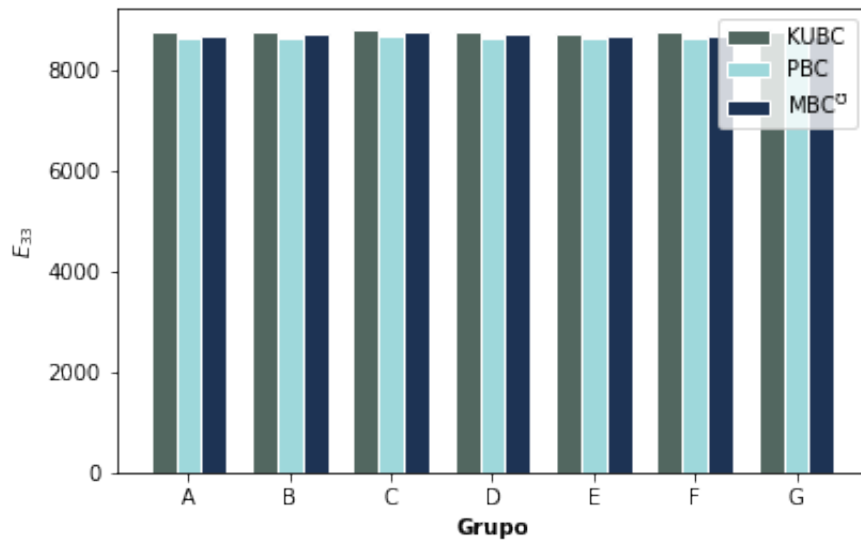


Figura 6.15 – Comparação de propriedades efetivas para E_{33}

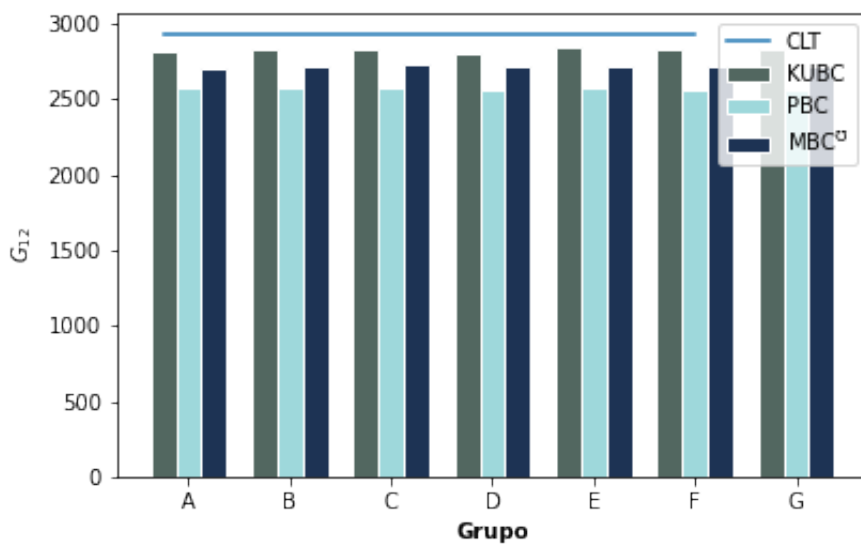


Figura 6.16 – Comparação de propriedades efetivas para G_{12}

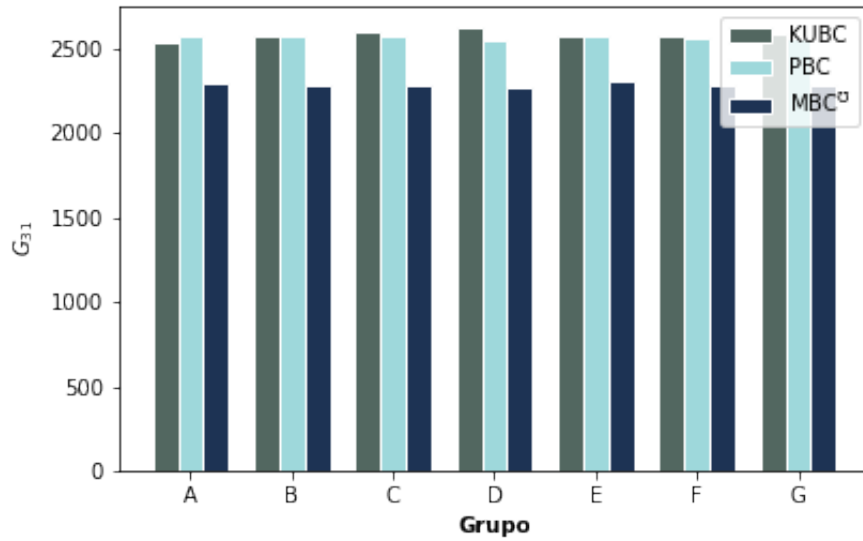


Figura 6.17 – Comparação de propriedades efetivas para G_{31}

6.2.2 Comparação entre matrizes de rigidez reduzidas

Nesta seção, os resultados utilizando a Eq. (6.6) de redução são apresentados, presentes nas figuras Fig. 6.18 -Fig. 6.20 Na análise dos tensores reduzidos, há muito pouca influência das condições de contorno. Mesmo para o módulo G_{12} , as diferenças máximas estão menores que $\approx 1\%$. A previsão pela CLT conseguiu obter bons resultados, com o erro máximo de $\approx 7\%$ para os módulos E_1 e E_2 . De forma análoga ao caso tridimensional, não há influências significativas do padrão de entrelaçamento nas propriedades elásticas lineares obtidas.

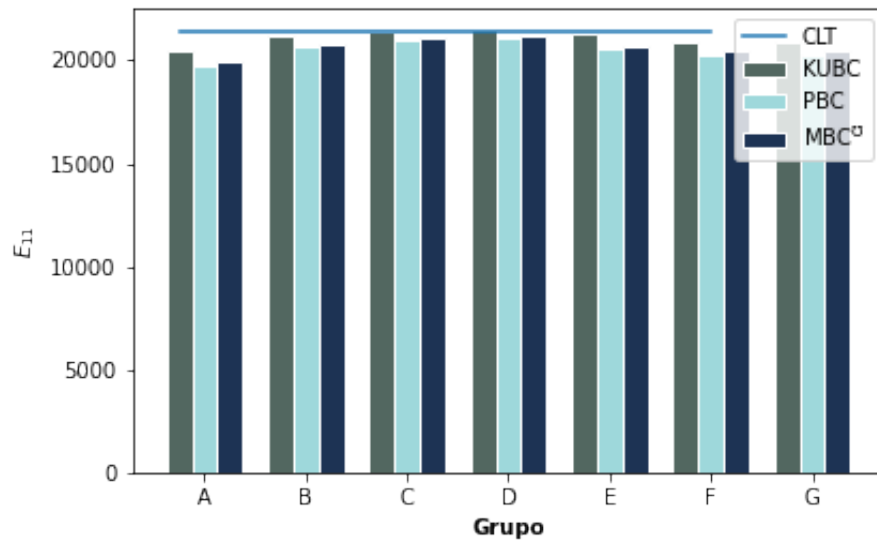


Figura 6.18 – Comparação de propriedades efetivas para E_{11}

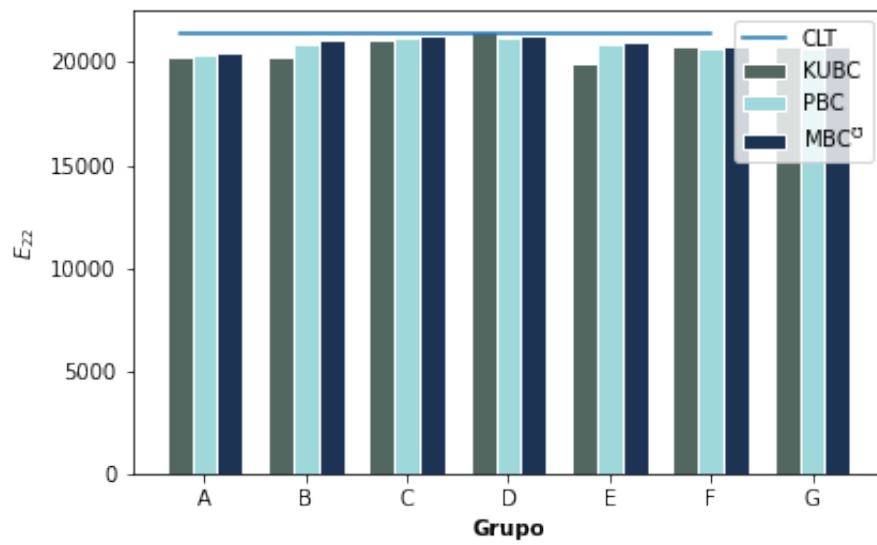


Figura 6.19 – Comparação de propriedades efetivas para E_{22}

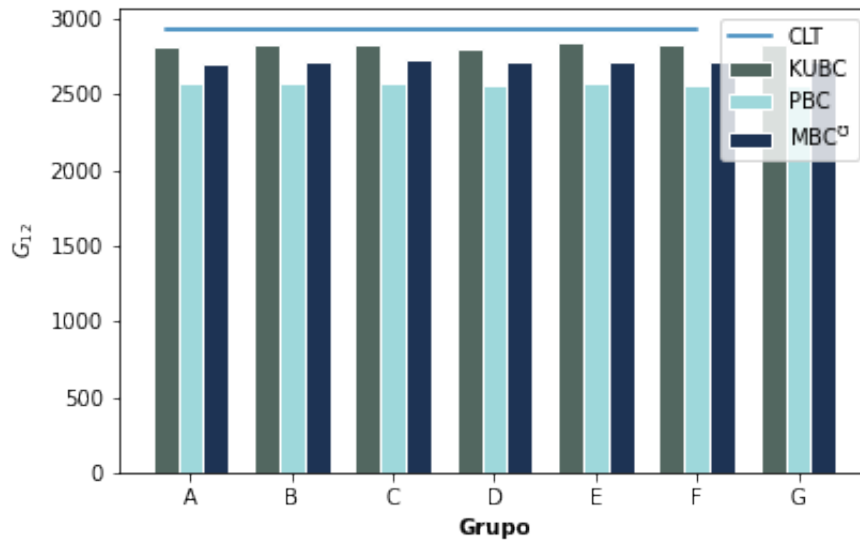


Figura 6.20 – Comparação de propriedades efetivas para G_{12}

6.2.3 Comparação dos termos de acoplamento

Nota-se, nos resultados numéricos obtidos na seção anterior, a pouca diferenciação entre as constantes de engenharia obtidas. A similaridade das constantes é devido à semelhança entre os termos da diagonal principal das matrizes de rigidez obtidas, transcritas nos anexos H. Todavia, os termos fora da diagonal (responsáveis pelo acoplamento de tração com tensões cisalhantes) aparentam ter uma variação significativa, o que pode quantificar a influência de cada padrão no comportamento mecânico do têxtil. Essa influência será explorada nesta seção.

Nas Fig. 6.21 -Fig. 6.23 , apresenta-se a variação dos termos de rigidez C_{15} , C_{16} , C_{24} . Os termos restantes foram desconsiderados devido às magnitudes pouco relevantes. Para uma discussão mais eficiente, recorda-se aqui os acoplamentos de rigidez de cada termo a ser estudado:

1. $C_{15} = C_{1133}$: Acoplamento entre tensões σ_{11} e deformações ε_{31} ;
2. $C_{16} = C_{1112}$: Acoplamento entre tensões σ_{11} e deformações ε_{12} ;
3. $C_{24} = C_{2223}$: Acoplamento entre tensões σ_{22} e deformações ε_{23} ;

6.2.3.1 Termo de acoplamento C_{15}

A magnitude de C_{15} é dominada pelo padrão de entrelaçamento. Os resultados indicam que o têxtil padrão plano apresenta o maior acoplamento entre tensões axiais σ_{11} e deformações cisalhantes ε_{31} , em torno de quatro vezes a ordem de magnitude dos acoplamentos obtidos para o 8-harness cetim. Um resultado interessante pode ser obtido ao apresentar o termo C_{15} médio de cada padrão, filtrado pela sua magnitude, conforme a Tab. 6.21. Na tabela, f_{we}/f_{wa} é a relação de comprimento entre feixes weft/warp, visando ilustrar o número de intersecções.

Tabela 6.21 – Termo de rigidez C_{15} médio ordenado por magnitude

Entrelaçamento	C_{15}	f_{we}/f_{wa}
8-harness cetim	-117.92	8/1
5-harness cetim	-193.97	5/1
Padrão cesta	-211.61	2/2
Padrão 2/2 sarja	-237.26	2/2
Padrão sarja 1/2 esquerdo	-300.05	2/1
Padrão sarja 1/2 direito	-301.98	2/1
Padrão plano	-428.64	1/1

É visível que o acoplamento é proporcional ao número de intersecção. No padrão 8-harness cetim, há apenas 1 intersecção Warp a cada 8 unidades dos feixes Weft. Em comparação, o 5-harness cetim, em que há 1 intersecção Warp a cada 5 unidades de feixes Weft, obteve um aumento de 64%, ou seja, na mesma ordem do aumento de frequência das intersecções (60%). Em geral, *padrões com número de intersecções similares, apresentam acoplamentos C_{15} similares*, e o acoplamento é *proporcional* ao número de intersecções.

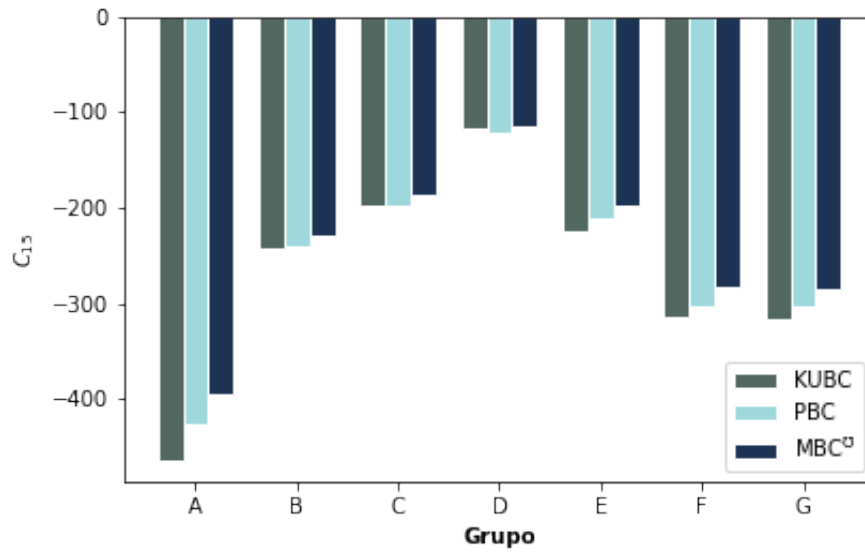


Figura 6.21 – Comparação do termo de acoplamento C_{15}

6.2.3.2 Termo de acoplamento C_{16}

É possível notar que a magnitude de C_{16} é dominada pelo padrão de entrelaçamento. Portanto, assim como fora executado para o termo C_{15} , apresenta-se os resultados do acoplamento em forma de tabela, filtrados pela sua magnitude, conforme a Tab. 6.22

Tabela 6.22 – Termo de rigidez C_{16} médio ordenado por magnitude

Entrelaçamento	C_{16}	f_{we}/f_{wa}
8-harness cetim	226.38	8/1
5-harness cetim	369.46	5/1
Padrão cesta	392.97	2/2
Padrão 2/2 sarja	437.60	2/2
Padrão sarja 1/2 direito	578.76	2/1
Padrão sarja 1/2 esquerdo	589.63	2/1
Padrão plano	872.25	1/1

Comparando têxteis da mesma classe, o aumento do acoplamento C_{16} do 5-harness cetim em comparação com 8-harness cetim fora de 63%. Aumento da mesma ordem de magnitude da frequência de intersecções (f_{we}/f_{wa}) entre os dois padrões. Nota-se que C_{15} é proporcional ao número de intersecções. De forma geral, *padrões com número*

de intersecções similares, apresentam acoplamentos C_{16} similares. Todos os resultados estão em congruência com os obtidos para o C_{15} , indicando que os padrões magnificam o acoplamento de forma global, para os padrões estudados.

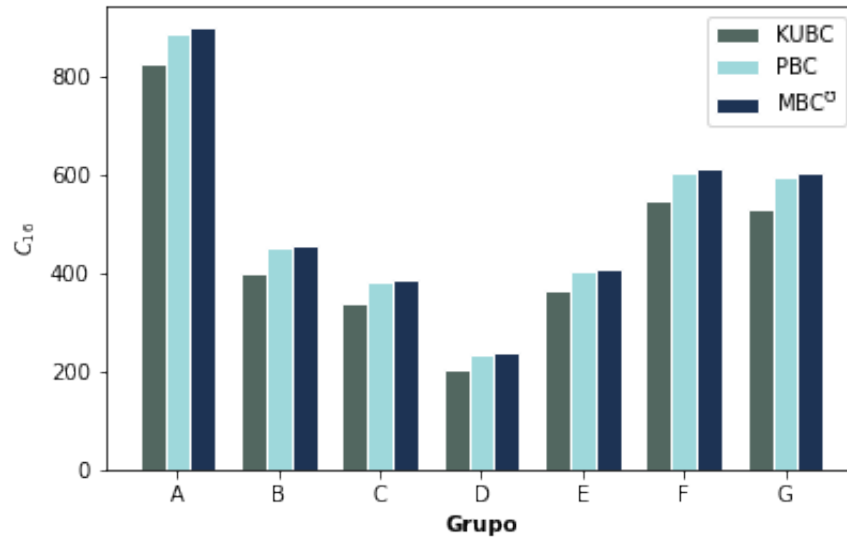


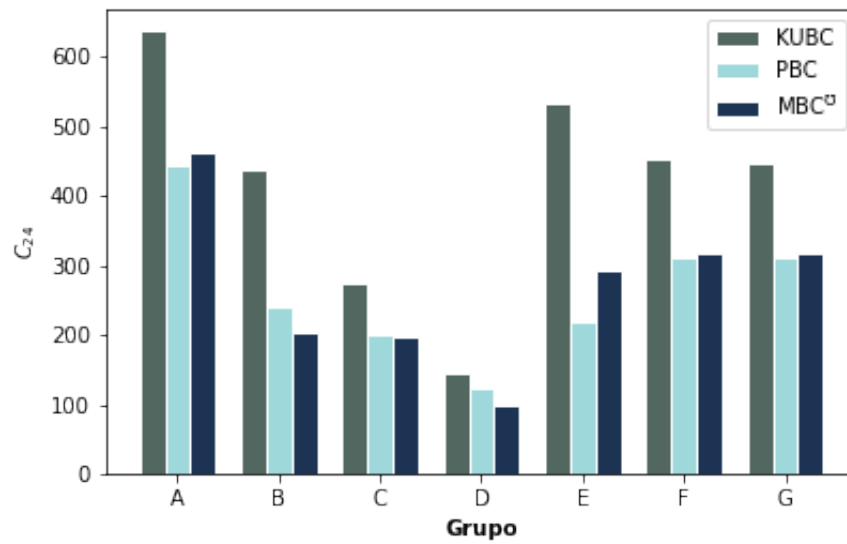
Figura 6.22 – Comparação do termo de acoplamento C_{16}

6.2.3.3 Termo de acoplamento C_{24}

Diferentemente do que foi obtido para os coeficientes C_{16} e C_{15} , o coeficiente C_{24} comportou-se de forma bastante distinta para a condição de contorno KUBC. O valor obtido fora, em média, $\approx 50\%$ maior do que o obtido por PBC e MBC^U. As diferenças entre PBC e MBC^U, por sua vez, são desprezíveis. Seria esperado que as MBC^U fornecessem resultados mais próximos aos da KUBC, contudo esse fato não fora verificado. Isso pode indicar, até o momento, que o *tipo de imposição das condições de contorno do plano exercem maior influência sobre o comportamento de acoplamento do material*. Contudo, o tipo de condição de contorno que garante o acoplamento mais próximo ao real, ainda carece de investigação. O acoplamento C_{24} também foi proporcional ao número de intersecções dos padrões, conforme a Tab. 6.23 .

Tabela 6.23 – Termo de rigidez C_{24} médio ordenado por magnitude

Entrelaçamento	C_{24}	f_{we}/f_{wa}
8-harness cetim	122.61	8/1
5-harness cetim	223.55	5/1
Padrão 2/2 sarja	293.37	2/2
Padrão cesta	349.24	2/2
Padrão sarja 1/2 direito	358.32	2/1
Padrão sarja 1/2 esquerdo	361.05	2/1
Padrão plano	514.62	1/1

Figura 6.23 – Comparação do termo de acoplamento C_{24}

7 CONCLUSÕES

Essa dissertação discutiu algumas possibilidades numéricas para a obtenção das matrizes constitutivas homogenizadas de compósitos têxteis cujas fibras são compostas de aglomerados, impregnados por uma resina, que formam padrões periódicos no plano. Na tentativa de sobrepujar condições de contorno periódicas usuais utilizadas em compósitos têxteis finos como placas e cascas, propôs-se um novo conjunto de condições de contorno mistas e provou-se que atende aos critérios de Hill-Mandel. Dentre os resultados obtidos, destacam-se:

1. A norma de Frobenius da matriz de rigidez obtida pelas condições de contorno proposta, $MBC^{\bar{U}}$, possui um valor intermediário entre a KUBC e MBC. Ou seja, $F_r(\bar{C}^{KUBC}) > F_r(\bar{C}^{MBC^{\bar{U}}}) > F_r(\bar{C}^{PBC})$. E de forma geral, os módulos de elasticidade seguiram o mesmo padrão.
2. A formulação analítica de Ishikawa e Chou (ver seção 2.1.2.1) trás resultados congruentes com a CLT. Entretanto, fica um pouco afastada dos resultados numéricos obtidos. A abordagem numérica, sobretudo, prevaleceu sobre a abordagem analítica, aproximando-se dos valores obtidos em trabalhos prévios (Scida et al. [1999]; Barbero et al. [2006]).
3. A influência do padrão de entrelaçamento é clara na distribuição das tensões, como vê-se nas Fig. 6.6 a 6.8. Entretanto, esse efeito não é observado nas constantes de engenharia obtidas. No escopo dos testes numéricos efetuados, o efeito da fração de volume da fibra é dominante nos elementos da diagonal principal, cujos valores influenciam diretamente o módulo de elasticidade. Isso garante assertividade ao usar metodologias mais simples, como a CLT, em que pese, há de ser consciência que tais abordagens desprezam os termos de acoplamento entre extensão e cisalhamento. Tais termos podem ser importantes no início de fenômenos de falha, como a delaminação.

Embora os fundamentos da homogeneização via análise RVE sejam bem compreendidos para análise multi-escala simples, mostra-se que as condições de contorno impostas ao RVE possuem influência nos resultados, sobre o ponto de vista da matriz de rigidez tridimensional. Dentre as conclusões obtidas, destacam-se:

1. Os termos de acoplamento entre extensão e cisalhamento são proporcionais à quantidade de entrelaçamento no padrão do têxtil. Logo, o padrão plano é o que apresentará o maior acoplamento entre todos os têxteis. A magnitude desses efeitos, entretanto, não é grande o suficiente para influenciar os resultados globais em termos de constantes de engenharia, uma vez que os termos das diagonais principais são dominantes para a caracterização da rigidez do componente.
2. O tipo de imposição de condição de contorno no plano é dominante para o comportamento de acoplamento no material. Embora, intuitivamente, o grau de liberdade u_3 (supondo que u_1 e u_2 estejam no plano) pareça exercer uma grande influência, notou-se que pouca diferença nos coeficientes C_{15} , C_{16} e C_{24} obtidos entre as condições PBC e MBC^U . Uma vez que a única diferença entre a PBC e MBC^U é a tratativa no grau de liberdade u_3 , concluí-se que esse grau de liberdade pouco age sobre os termos de acoplamento. Entretanto, os resultados do coeficiente C_{24} para a KUBC apresentaram uma diferença em torno de 50% para o PBC e MBC^U . Visto que o que diferencia a KUBC das outras duas condições de contorno são os graus de liberdade u_1 e u_2 , concluí-se o tipo de imposição no plano é dominante sobre os resultados de acoplamento.

Um segundo aspecto explorado no presente estudo refere-se especificamente às matrizes constitutivas homogeneizadas utilizadas na modelagem de estruturas finas. Apesar dessas matrizes serem originadas de uma contração, e portanto desprezando termos que poderiam significar a contribuição do padrão de entrelaçamento, os resultados mostraram poucas diferenças em relação a análise tridimensional. Seria esperado que as constantes de engenharia calculadas fossem afetadas pela contração das matrizes, porém esse fato não se confirmou.

Um terceiro aspecto abordado nessa dissertação foi o uso de vários indicadores de anisotropia para comparar objetivamente as variações nos coeficientes de rigidez para cada tipo de condição de contorno. Contudo, os indicadores obtidos não foram capazes de diferenciar, de forma significativa, as condições de contorno impostas, visto que suas formulações desprezam alguns termos fora da diagonal principal, como o C_{15} , C_{16} , e o C_{24} , importantes para a distinção entre as condições impostas.

Por fim, a dissertação buscou a produção de uma ferramenta homogeneização de fácil utilização, e disponibilizada à comunidade. Junto com todos os arquivos necessários,

há uma documentação completa e exemplos de uso. A ferramenta fora utilizada ao longo da dissertação. Portanto, fora capaz de estimar as matrizes de rigidez 2D e 3D, com resultados validados por trabalhos experimentais e numéricos disponíveis na literatura. A ferramenta, dentre suas funcionalidades, é capaz de:

1. Converter os arquivos gerados pelo TexGen em uma macro passível de ser utilizada no software de elementos finitos ANSYS APDL, com criação de grupos de elementos e atribuição de orientação a estes;
2. Em qualquer modelo prismático, pode-se aplicar três tipos diferentes de condições de contorno - KUBC, PBC e $MBC^{\bar{U}}$. Com restrição às condições PBC e $MBC^{\bar{U}}$, que necessitam, devido a sua formulação, de malhas periódicas;
3. Módulo de pós-processamento, capaz de aferir constantes de engenharia, norma de Frobenius da matriz de rigidez (F_r), e indicadores de anisotropia: direções principais de anisotropia, invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} , índice universal de anisotropia (A_u) e índice de Zener (A_z).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbero, E., Trovillion, J., Mayugo, J., and Sikkil, K. Finite element modeling of plain weave fabrics from photomicrograph measurements, **Composite Structures**, vol. 73(1), p. 41–52, 2006.

Barbero, E. J. **Finite element analysis of composite materials**. CRC press, 2007.

de Souza Neto, E. and Feijóo, R. On the equivalence between spatial and material volume averaging of stress in large strain multi-scale solid constitutive models, **Mechanics of Materials**, vol. 40, p. 803–811, 2008.

de Vargas Lisbôa, T. and Marczak, R. J. A recursive methodology for the solution of semi-analytical rectangular anisotropic thin plates in linear bending, **Applied Mathematical Modelling**, vol. 48, p. 711–730, 2017.

Dixit, A. and Mali, H. Modeling techniques for predicting the mechanical properties of woven-fabric textile composites: a Review, **Mech. Compos. Mater.**, vol. 49, p. 1–20, 2013.

Espadas-Escalante, J. J., van Dijk, N. P., and Isaksson, P. A study on the influence of boundary conditions in computational homogenization of periodic structures with application to woven composites, **Composite Structures**, vol. 160, p. 529–537, 2017.

Glüge, R. Generalized boundary conditions on representative volume elements and their use in determining the effective material properties, **Computational materials science**, vol. 79, p. 408–416, 2013.

Hazanov, S. and Amieur, M. On overall properties of elastic heterogeneous bodies smaller than the representative volume, **International Journal of Engineering Science**, vol. 33(9), p. 1289–1301, 1995.

Hill, R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 11(5), p. 357–372, 1963.

Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials, **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 13(4), p. 213–222, 1965.

Hill, R. On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain, **Proc R Soc Lond A**, vol. 326, p. 131–147, 1972.

Ishikawa, T. Anti-symmetric elastic properties of composite plates of satin weave cloth, **Fibre Science and Technology**, vol. 15(2), p. 127–145, 1981.

Jacques, S., De Baere, I., and Van Paepegem, W. Application of periodic boundary conditions on multiple part finite element meshes for the meso-scale homogenization of textile fabric composites, **Composites Science and Technology**, vol. 92, p. 41–54, 2014.

Jones, R. M. **Mechanics of composite materials**. CRC press, 2018.

Lin, H., Brown, L. P., and Long, A. C. **Modelling and simulating textile structures using TexGen**. In *Advanced Materials Research*, vol. 331, p. 44–47. Trans Tech Publ, 2011.

Long, A. and Brown, L. **Modelling the geometry of textile reinforcements for composites: TexGen**. In *Composite reinforcements for optimum performance*, p. 239–264. Elsevier, 2011.

Long, A. C. **Design and manufacture of textile composites**. Elsevier, 2005.

Luciano, R. and Sacco, E. Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media, **European Journal of Mechanics-A/Solids**, vol. 17(4), p. 599–617, 1998.

Mandel, J. **Plasticité Classique et Viscoplasticité**. CISM Lecture Notes No. 97. Springer, 1998.

Mazumda, S., K. **Composites manufacturing: materials, product, and process engineering**. CRC Press, 2002.

ming Huang, Z. The mechanical properties of composites reinforced with woven and braided fabrics, **Composites science and technology**, vol. 60(4), p. 479–498, 2000.

Nemat-Nasser, S. and Hori, M. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**, 1996.

Nemat-Nasser, S., Lori, M., and Datta, S. **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**, 1996.

Nettles, A. T. *Basic mechanics of laminated composite plates*, vol. 1, 1994.

Panasenko, G. P. Numerical solution of cell problems in averaging theory, **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, vol. 28(1), p. 183–186, 1988.

Rand, O. and Rovenski, V. **Analytical methods in anisotropic elasticity: with symbolic computational tools**. Springer Science & Business Media, 2007.

Ranganathan, S. I. and Ostoja-Starzewski, M. Universal elastic anisotropy index, **Physical review letters**, vol. 101(5), p. 055504, 2008.

Rao, M. V., Mahajan, P., and Mittal, R. Effect of architecture on mechanical properties of carbon/carbon composites, **Composite Structures**, vol. 83(2), p. 131–142, 2008.

Reddy, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. CRC press, 2003.

Sankar, B. V. and Marrey, R. V. Analytical method for micromechanics of textile composites, **Composites Science and Technology**, vol. 57(6), p. 703–713, 1997.

Scida, D., Aboura, Z., Benzeggagh, M., and Bocherens, E. Prediction of the elastic behaviour of hybrid and non-hybrid woven composites, **Composites science and technology**, vol. 57(12), p. 1727–1740, 1998.

Scida, D., Aboura, Z., Benzeggagh, M., and Bocherens, E. A micromechanics model for 3D elasticity and failure of woven-fibre composite materials, **Composites Science and Technology**, vol. 59(4), p. 505–517, 1999.

Shen, H. and Brinson, L. C. A numerical investigation of the effect of boundary conditions and representative volume element size for porous titanium, **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, vol. 1(7), p. 1179–1204, 2006.

Ullah, Z., Zhou, X.-Y., Kaczmarczyk, L., Archer, E., McIlhagger, A., and Harkin-Jones, E. A unified framework for the multi-scale computational homogenisation of 3D-textile composites, **Composites Part B: Engineering**, vol. 167, p. 582–598, 2019.

Van Rossum, G. and Drake, F. L. **Python 3 Reference Manual**. CreateSpace, Scotts Valley, CA, 2009.

Zohdi, T. Computational modeling and design of new random microheterogeneous materials, **CISM Course Notes**, vol. 1, 2002.

APÊNDICE A – Resultados da influência de tecelagem

A.1 Resultados da análise 3D para o Padrão cesta

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 23388.10 & 4183.47 & 4143.74 & -0.44 & -225.80 & 293.32 \\ 4653.68 & 21952.08 & 4148.46 & 553.57 & -5.12 & 9.01 \\ 4142.67 & 3727.64 & 9969.53 & 30.08 & -7.11 & 7.90 \\ -22.03 & 516.25 & 6.26 & 2593.78 & 3.75 & -2.31 \\ -224.61 & -4.12 & -7.12 & 0.78 & 2852.80 & -12.47 \\ 434.64 & 4.33 & 12.10 & -1.59 & -20.32 & 3889.81 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 22726.64 & 4577.74 & 4054.66 & -11.99 & -211.53 & 404.83 \\ 4577.78 & 22990.26 & 4064.28 & 218.93 & -8.08 & 18.82 \\ 4054.59 & 4064.16 & 9866.27 & 6.00 & -6.26 & 13.64 \\ -11.98 & 218.96 & 6.01 & 2580.39 & 1.34 & -1.81 \\ -211.51 & -8.08 & -6.26 & 1.34 & 2579.70 & -14.91 \\ 404.85 & 18.83 & 13.66 & -1.81 & -14.92 & 3888.36 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^{\bar{v}}} = \begin{bmatrix} 22806.69 & 4502.86 & 4065.90 & 2.07 & -198.08 & 410.10 \\ 4502.87 & 23075.76 & 4075.56 & 382.98 & -3.34 & 15.37 \\ 4065.81 & 4075.47 & 9914.34 & 15.04 & -4.40 & 13.47 \\ -20.48 & 204.77 & 4.08 & 2309.14 & 1.29 & -2.36 \\ -198.10 & -3.35 & -4.47 & 0.83 & 2726.18 & -12.89 \\ 410.11 & 15.37 & 13.48 & -1.08 & -12.90 & 3883.55 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Tabela A.1 – Comparação de propriedades efetivas para a trama Padrão cesta

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	21.24	19.94	8.76	2.85	3.88	2.58	0.15	0.32	0.14
PBC	20.61	20.90	8.66	2.58	3.88	2.58	0.15	0.36	0.14
MBC ^{\bar{v}}	20.71	20.99	8.71	2.72	3.88	2.31	0.15	0.36	0.13

Tabela A.2 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o Padrão cesta

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.03×10^4	2.09×10^9	1.75×10^{13}	7.40×10^4	1.78×10^9	1.37×10^{13}
PBC	8.10×10^4	2.12×10^9	1.78×10^{13}	7.37×10^4	1.76×10^9	1.34×10^{13}
MBC ^U	8.11×10^4	2.13×10^9	1.79×10^{13}	7.36×10^4	1.76×10^9	1.35×10^{13}

Tabela A.3 – Indicadores anisotrópicos para o Padrão cesta analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.69	0.27	35547
PBC	2.96	0.28	35765
MBC ^U	3.08	0.25	35863

A.2 Resultados da análise 2D para o Padrão cesta

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão cesta}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 21666.24 & 2781.97 & 359.82 \\ 2781.97 & 20396.51 & 2.72 \\ 359.82 & 2.72 & 3889.80 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão cesta}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 21060.35 & 2907.54 & 399.23 \\ 2907.54 & 21316.08 & 13.20 \\ 399.23 & 13.20 & 3888.35 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão cesta}}^{MBC^U} = \begin{bmatrix} 21139.29 & 2831.50 & 404.58 \\ 2831.50 & 21400.42 & 9.83 \\ 404.58 & 9.83 & 3883.53 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Tabela A.4 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão cesta

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	21.25	20.04	3.88	0.13
PBC	20.62	20.91	3.88	0.14
MBC ^U	20.72	21.02	3.88	0.13

A.3 Resultados da análise 3D para o 8-harness cetim

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 23576.68 & 4245.62 & 4113.95 & -8.61 & -118.50 & 166.97 \\ 4609.30 & 23417.95 & 4116.29 & 175.15 & -2.28 & 5.37 \\ 4112.48 & 3718.89 & 9951.41 & -8.88 & -3.50 & 4.47 \\ -9.33 & 114.36 & 2.30 & 2630.16 & 0.99 & -1.55 \\ -117.91 & -0.69 & -2.63 & 0.83 & 2807.69 & -20.01 \\ 246.18 & 3.60 & 6.25 & -0.86 & -8.55 & 3877.87 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 23159.42 & 4504.51 & 4030.18 & -6.11 & -120.76 & 234.73 \\ 4504.66 & 23279.51 & 4034.49 & 122.91 & -3.31 & 8.91 \\ 4029.35 & 4033.53 & 9850.80 & 3.11 & -3.32 & 7.38 \\ -6.11 & 122.91 & 3.12 & 2556.45 & 0.32 & -0.77 \\ -120.75 & -3.31 & -3.32 & 0.32 & 2556.02 & -7.26 \\ 234.74 & 8.92 & 7.39 & -0.77 & -7.26 & 3823.87 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^{\bar{v}}} = \begin{bmatrix} 23225.66 & 4485.94 & 4048.23 & -9.81 & -114.66 & 237.84 \\ 4486.07 & 23347.57 & 4052.52 & 83.41 & -1.50 & 8.06 \\ 4047.66 & 4051.83 & 9922.88 & -8.51 & -3.31 & 7.36 \\ -9.83 & 116.90 & 2.14 & 2279.35 & 0.33 & -1.04 \\ -114.92 & -1.42 & -2.40 & 0.02 & 2717.18 & -6.26 \\ 237.84 & 8.07 & 7.37 & -0.25 & -6.25 & 3824.35 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Tabela A.5 – Comparação de propriedades efetivas para a trama 8-harness cetim

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	21.50	21.51	8.80	2.81	3.88	2.63	0.15	0.32	0.13
PBC	21.11	21.24	8.68	2.56	3.82	2.56	0.15	0.36	0.13
MBC ^{\bar{v}}	21.19	21.32	8.74	2.72	3.82	2.28	0.15	0.35	0.13

Tabela A.6 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o 8-harness cetim

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.19×10^4	2.17×10^9	1.83×10^{13}	7.56×10^4	1.85×10^9	1.44×10^{13}
PBC	8.14×10^4	2.15×10^9	1.81×10^{13}	7.42×10^4	1.78×10^9	1.36×10^{13}
MBC ^U	8.17×10^4	2.16×10^9	1.82×10^{13}	7.41×10^4	1.78×10^9	1.37×10^{13}

Tabela A.7 – Indicadores anisotrópicos para o 8-harness cetim analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.94	0.27	36565
PBC	3.08	0.27	36177
MBC ^U	3.18	0.24	36279

A.4 Resultados da análise 2D para o 8-harness cetim

$$\bar{\mathbf{C}}_{8\text{-harness cetim}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 21876.57 & 2808.20 & 204.36 \\ 2808.20 & 21875.71 & 2.38 \\ 204.36 & 2.38 & 3877.86 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{8\text{-harness cetim}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 21510.92 & 2854.35 & 231.71 \\ 2854.35 & 21627.54 & 5.89 \\ 231.71 & 5.89 & 3823.86 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{8\text{-harness cetim}}^{MBC^U} = \begin{bmatrix} 21574.34 & 2832.96 & 234.84 \\ 2832.96 & 21692.80 & 5.06 \\ 234.84 & 5.06 & 3824.35 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Tabela A.8 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão 8-harness cetim

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	21.51	21.52	3.88	0.13
PBC	21.12	21.25	3.82	0.13
MBC ^U	21.19	21.32	3.82	0.13

A.5 Resultados da análise 3D para o 5-harness cetim

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 23521.98 & 4243.21 & 4137.48 & -4.84 & -197.63 & 271.55 \\ 4644.21 & 23029.46 & 4141.09 & 300.39 & -3.88 & 8.98 \\ 4135.92 & 3698.30 & 10002.42 & 9.81 & -5.51 & 6.95 \\ -16.02 & 249.40 & 4.12 & 2606.47 & 1.87 & -2.43 \\ -197.01 & -1.38 & -4.71 & 0.65 & 2831.21 & -13.21 \\ 403.99 & 5.10 & 10.30 & -1.51 & -14.94 & 3897.43 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 23027.58 & 4556.80 & 4050.09 & -11.58 & -197.01 & 383.09 \\ 4556.88 & 23220.70 & 4057.17 & 199.74 & -6.04 & 15.84 \\ 4049.52 & 4056.51 & 9893.50 & 4.97 & -5.36 & 11.96 \\ -11.57 & 199.76 & 4.98 & 2576.92 & 1.05 & -1.60 \\ -197.02 & -6.05 & -5.37 & 1.05 & 2576.41 & -12.87 \\ 383.11 & 15.84 & 11.97 & -1.60 & -12.87 & 3880.16 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^v} = \begin{bmatrix} 23120.04 & 4521.81 & 4068.92 & -7.64 & -187.53 & 387.49 \\ 4521.86 & 23314.70 & 4075.82 & 202.05 & -2.96 & 14.28 \\ 4068.47 & 4075.31 & 9972.04 & 7.55 & -4.78 & 11.93 \\ -17.93 & 189.93 & 3.41 & 2290.80 & 0.99 & -2.09 \\ -187.60 & -2.87 & -3.90 & 0.41 & 2733.23 & -11.19 \\ 387.50 & 14.29 & 11.94 & -0.75 & -11.19 & 3881.10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Tabela A.9 – Comparação de propriedades efetivas para a trama 5-harness cetim

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	21.40	21.10	8.83	2.83	3.89	2.60	0.15	0.32	0.14
PBC	20.93	21.15	8.71	2.57	3.87	2.58	0.15	0.35	0.13
MBC ^v	21.03	21.25	8.78	2.73	3.87	2.29	0.15	0.35	0.13

Tabela A.10 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o 5-harness cetim

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.16×10^4	2.15×10^9	1.82×10^{13}	7.52×10^4	1.83×10^9	1.43×10^{13}
PBC	8.15×10^4	2.15×10^9	1.81×10^{13}	7.42×10^4	1.78×10^9	1.37×10^{13}
MBC ^ũ	8.17×10^4	2.16×10^9	1.83×10^{13}	7.42×10^4	1.79×10^9	1.38×10^{13}

Tabela A.11 – Indicadores anisotrópicos para o 5-harness cetim analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.86	0.27	36312
PBC	3.02	0.28	36102
MBC ^ũ	3.14	0.25	36235

A.6 Resultados da análise 2D para o 5-harness cetim

$$\bar{\mathbf{C}}_{5\text{-harness cetim}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 21811.17 & 2822.64 & 334.21 \\ 2822.64 & 21493.43 & 3.66 \\ 334.21 & 3.66 & 3897.43 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{5\text{-harness cetim}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 21369.83 & 2896.21 & 378.20 \\ 2896.21 & 21557.19 & 10.93 \\ 378.20 & 10.93 & 3880.14 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{5\text{-harness cetim}}^{MBC^{\tilde{u}}} = \begin{bmatrix} 21459.97 & 2858.96 & 382.63 \\ 2858.96 & 21649.02 & 9.41 \\ 382.63 & 9.41 & 3881.09 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Tabela A.12 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão 5-harness cetim

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	21.41	21.13	3.89	0.13
PBC	20.94	21.16	3.87	0.14
MBC ^ũ	21.04	21.27	3.87	0.13

A.7 Resultados da análise 3D para o padrão sarga 1/2 esquerdo

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 23098.35 & 4278.45 & 4136.01 & -6.66 & -314.02 & 444.96 \\ 4669.74 & 22747.01 & 4141.80 & 486.93 & -6.89 & 20.18 \\ 4135.67 & 3674.03 & 9961.49 & 20.23 & -8.99 & 9.59 \\ -28.98 & 421.28 & 7.79 & 2592.02 & -1.87 & -3.46 \\ -313.90 & -1.00 & -8.88 & -1.24 & 2831.18 & -15.86 \\ 649.92 & 17.33 & 12.19 & -2.93 & -26.97 & 3950.32 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 22500.77 & 4643.73 & 4042.94 & -18.38 & -302.15 & 607.04 \\ 4643.86 & 22787.29 & 4053.40 & 310.35 & -11.50 & 34.27 \\ 4042.34 & 4052.65 & 9847.63 & 8.03 & -8.62 & 16.72 \\ -18.38 & 310.39 & 8.04 & 2573.69 & -0.16 & -2.72 \\ -302.17 & -11.50 & -8.64 & -0.16 & 2573.00 & -23.08 \\ 607.05 & 34.28 & 16.75 & -2.72 & -23.09 & 3944.16 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^v} = \begin{bmatrix} 22627.05 & 4555.14 & 4063.17 & -7.57 & -284.04 & 614.40 \\ 4555.23 & 22913.27 & 4073.39 & 346.03 & -5.30 & 28.25 \\ 4062.70 & 4072.83 & 9928.70 & 11.06 & -6.61 & 15.47 \\ -29.05 & 291.31 & 5.74 & 2293.79 & -0.33 & -3.54 \\ -284.00 & -5.29 & -6.48 & -0.81 & 2719.23 & -20.14 \\ 614.40 & 28.26 & 15.48 & -1.43 & -20.14 & 3946.08 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Tabela A.13 – Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão sarga 1/2 esquerdo

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	20.89	20.76	8.78	2.83	3.94	2.58	0.15	0.31	0.14
PBC	20.30	20.65	8.64	2.57	3.93	2.57	0.15	0.35	0.14
MBC ^v	20.45	20.80	8.71	2.72	3.93	2.29	0.15	0.35	0.14

Tabela A.14 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o padrão sarga 1/2 esquerdo

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.08×10^4	2.12×10^9	1.78×10^{13}	7.46×10^4	1.80×10^9	1.40×10^{13}
PBC	8.06×10^4	2.11×10^9	1.76×10^{13}	7.33×10^4	1.74×10^9	1.33×10^{13}
MBC ^U	8.09×10^4	2.12×10^9	1.78×10^{13}	7.34×10^4	1.75×10^9	1.34×10^{13}

Tabela A.15 – Indicadores anisotrópicos para o padrão sarga 1/2 esquerdo analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.81	0.28	35868
PBC	2.92	0.29	35512
MBC ^U	3.05	0.25	35673

A.8 Resultados da análise 2D para o padrão sarga 1/2 esquerdo

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão sarga 1/2 esquerdo}}^{\text{KUBC}} = \begin{bmatrix} 21381.22 & 2851.60 & 542.92 \\ 2851.60 & 21213.92 & 14.48 \\ 542.92 & 14.48 & 3950.30 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão sarga 1/2 esquerdo}}^{\text{PBC}} = \begin{bmatrix} 20841.19 & 2979.95 & 600.18 \\ 2979.95 & 21119.17 & 27.39 \\ 600.18 & 27.39 & 3944.13 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão sarga 1/2 esquerdo}}^{\text{MBC}^{\text{U}}} = \begin{bmatrix} 20964.45 & 2888.42 & 608.07 \\ 2888.42 & 21242.33 & 21.91 \\ 608.07 & 21.91 & 3946.06 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Tabela A.16 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão sarga 1/2 esquerdo

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	20.92	20.83	3.94	0.13
PBC	20.33	20.69	3.93	0.14
MBC ^U	20.48	20.84	3.93	0.14

A.9 Resultados da análise 3D para o padrão plano

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 22783.07 & 4400.54 & 4138.04 & -8.66 & -463.65 & 686.74 \\ 4771.48 & 22360.98 & 4148.29 & 707.49 & -11.97 & 26.34 \\ 4137.74 & 3647.14 & 9976.44 & 30.09 & -14.81 & 18.10 \\ -48.28 & 569.77 & 13.16 & 2552.88 & 7.57 & -5.38 \\ -463.31 & -10.27 & -14.81 & 3.61 & 2825.50 & -32.09 \\ 966.87 & 22.68 & 26.33 & -3.64 & -48.15 & 4085.38 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 22087.98 & 4741.40 & 4034.87 & -24.41 & -426.98 & 888.57 \\ 4741.39 & 22534.18 & 4051.12 & 443.42 & -18.73 & 49.24 \\ 4034.92 & 4051.16 & 9853.74 & 11.84 & -12.36 & 28.23 \\ -24.41 & 443.43 & 11.85 & 2586.16 & 2.43 & -4.44 \\ -426.98 & -18.73 & -12.36 & 2.43 & 2584.71 & -43.06 \\ 888.57 & 49.24 & 28.24 & -4.44 & -43.06 & 4129.30 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^v} = \begin{bmatrix} 22234.80 & 4635.94 & 4057.75 & -7.42 & -395.45 & 901.38 \\ 4635.93 & 22685.57 & 4074.12 & 513.74 & -8.07 & 40.11 \\ 4057.72 & 4074.10 & 9936.18 & 15.84 & -9.68 & 28.40 \\ -42.25 & 409.88 & 8.79 & 2312.56 & 2.71 & -6.21 \\ -395.48 & -8.07 & -9.63 & 1.11 & 2717.48 & -37.46 \\ 901.39 & 40.11 & 28.40 & -2.46 & -37.45 & 4130.97 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Tabela A.17 – Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão plano

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	20.41	20.27	8.78	2.82	4.05	2.53	0.15	0.31	0.15
PBC	19.73	20.32	8.64	2.58	4.09	2.58	0.15	0.35	0.15
MBC ^v	19.91	20.49	8.71	2.71	4.09	2.30	0.15	0.35	0.14

Tabela A.18 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o padrão plano

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.04×10^4	2.09×10^9	1.75×10^{13}	7.40×10^4	1.78×10^9	1.38×10^{13}
PBC	8.01×10^4	2.08×10^9	1.73×10^{13}	7.31×10^4	1.73×10^9	1.32×10^{13}
MBC ^U	8.04×10^4	2.10×10^9	1.75×10^{13}	7.32×10^4	1.74×10^9	1.33×10^{13}

Tabela A.19 – Indicadores anisotrópicos para o padrão plano analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.75	0.28	35484
PBC	2.83	0.30	35155
MBC ^U	2.97	0.26	35341

A.10 Resultados da análise 2D para o padrão plano

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão plano}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 21066.81 & 2969.37 & 817.59 \\ 2969.37 & 20838.18 & 15.83 \\ 817.59 & 15.83 & 4085.33 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão plano}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 20435.77 & 3082.54 & 877.01 \\ 3082.54 & 20868.65 & 37.63 \\ 877.01 & 37.63 & 4129.22 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão plano}}^{MBC^U} = \begin{bmatrix} 20577.70 & 2972.15 & 889.79 \\ 2972.15 & 21015.07 & 28.47 \\ 889.79 & 28.47 & 4130.89 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Tabela A.20 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão plano

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	20.48	20.42	4.05	0.14
PBC	19.80	20.40	4.09	0.15
MBC ^U	19.97	20.58	4.09	0.15

A.11 Resultados da análise 3D para o padrão sarga 1/2 direito

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 23093.90 & 4293.28 & 4134.78 & -4.09 & -316.89 & 427.93 \\ 4678.08 & 22789.75 & 4141.71 & 484.90 & -6.65 & 10.53 \\ 4134.44 & 3677.04 & 9960.48 & 20.99 & -8.99 & 14.30 \\ -28.70 & 406.82 & 7.75 & 2593.57 & 10.11 & -2.68 \\ -316.96 & -5.69 & -8.88 & 5.40 & 2831.88 & -18.88 \\ 638.15 & 0.37 & 21.96 & -1.82 & -28.17 & 3954.30 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 22477.56 & 4609.46 & 4041.30 & -16.04 & -303.49 & 597.55 \\ 4609.61 & 22785.99 & 4052.45 & 310.52 & -9.40 & 20.51 \\ 4040.66 & 4051.47 & 9847.58 & 8.15 & -8.60 & 21.76 \\ -16.03 & 310.55 & 8.17 & 2573.79 & 3.24 & -1.96 \\ -303.54 & -9.41 & -8.61 & 3.24 & 2573.37 & -23.99 \\ 597.55 & 20.52 & 21.77 & -1.96 & -23.99 & 3946.90 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^v} = \begin{bmatrix} 22598.46 & 4537.66 & 4061.28 & -6.21 & -285.51 & 605.69 \\ 4537.77 & 22914.65 & 4072.83 & 345.58 & -2.44 & 16.63 \\ 4060.77 & 4072.10 & 9927.81 & 11.81 & -6.54 & 23.17 \\ -28.05 & 291.52 & 5.80 & 2294.15 & 3.47 & -3.05 \\ -285.50 & -2.44 & -6.40 & 2.29 & 2719.37 & -20.84 \\ 605.69 & 16.64 & 23.18 & -1.07 & -20.83 & 3948.46 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Tabela A.21 – Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão sarga 1/2 direito

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	20.89	20.80	8.78	2.83	3.94	2.58	0.15	0.31	0.14
PBC	20.29	20.66	8.64	2.57	3.93	2.57	0.15	0.35	0.14
MBC ^v	20.43	20.80	8.71	2.72	3.93	2.29	0.15	0.35	0.14

Tabela A.22 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o padrão sarga 1/2 direito

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.09×10^4	2.12×10^9	1.78×10^{13}	7.46×10^4	1.80×10^9	1.40×10^{13}
PBC	8.05×10^4	2.10×10^9	1.75×10^{13}	7.33×10^4	1.74×10^9	1.32×10^{13}
MBC ^ü	8.08×10^4	2.12×10^9	1.77×10^{13}	7.34×10^4	1.75×10^9	1.34×10^{13}

Tabela A.23 – Indicadores anisotrópicos para o padrão sarga 1/2 direito analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.81	0.28	35895
PBC	2.92	0.29	35487
MBC ^ü	3.05	0.25	35651

A.12 Resultados da análise 2D para o padrão sarga 1/2 direito

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{\text{Padrão sarja 1/2 direito}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 21377.62 & 2862.89 & 525.52 \\ 2862.89 & 21255.36 & -1.67 \\ 525.52 & -1.67 & 3954.27 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{\text{Padrão sarja 1/2 direito}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 20819.33 & 2946.80 & 588.62 \\ 2946.80 & 21118.74 & 11.56 \\ 588.62 & 11.56 & 3946.85 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_{\text{Padrão sarja 1/2 direito}}^{MBC^{\ddot{u}}} = \begin{bmatrix} 20937.27 & 2871.85 & 596.21 \\ 2871.85 & 21244.09 & 7.13 \\ 596.21 & 7.13 & 3948.40 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Tabela A.24 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão sarja 1/2 direito

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	20.92	20.87	3.94	0.13
PBC	20.32	20.70	3.93	0.14
MBC ^ü	20.46	20.85	3.93	0.14

A.13 Resultados da análise 3D para o padrão 2/2 sarja

$$\bar{\mathbf{C}}^{KUBC} = \begin{bmatrix} 23329.02 & 4227.08 & 4139.59 & -2.53 & -244.13 & 319.85 \\ 4653.71 & 22251.49 & 4145.92 & 389.82 & -5.24 & 6.41 \\ 4138.77 & 3703.19 & 9971.34 & 0.93 & -7.78 & 11.84 \\ -21.10 & 486.29 & 5.53 & 2591.48 & 10.78 & -2.50 \\ -243.00 & -3.97 & -7.60 & 5.44 & 2840.53 & -7.10 \\ 481.93 & -0.60 & 18.83 & -1.90 & -21.46 & 3907.66 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{PBC} = \begin{bmatrix} 22753.06 & 4556.91 & 4051.95 & -14.59 & -239.58 & 452.94 \\ 4556.87 & 22997.79 & 4059.96 & 239.98 & -7.73 & 13.50 \\ 4051.54 & 4059.59 & 9866.17 & 6.47 & -6.46 & 17.59 \\ -14.59 & 239.98 & 6.47 & 2576.02 & 3.49 & -2.95 \\ -239.59 & -7.74 & -6.48 & 3.49 & 2575.58 & -18.28 \\ 452.96 & 13.51 & 17.61 & -2.95 & -18.28 & 3894.05 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{MBC^v} = \begin{bmatrix} 22871.12 & 4505.01 & 4070.26 & -9.33 & -228.58 & 458.97 \\ 4504.98 & 23112.75 & 4079.14 & 177.22 & -2.58 & 10.98 \\ 4069.91 & 4078.81 & 9940.68 & -5.37 & -5.28 & 19.08 \\ -22.85 & 226.93 & 4.18 & 2292.82 & 3.67 & -3.53 \\ -228.70 & -2.58 & -5.00 & 2.54 & 2727.09 & -16.06 \\ 458.98 & 10.99 & 19.09 & -1.13 & -16.06 & 3895.43 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Tabela A.25 – Comparação de propriedades efetivas para a trama padrão 2/2 sarja

c.c	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{12}
KUBC	21.17	20.27	8.78	2.84	3.90	2.58	0.15	0.32	0.14
PBC	20.62	20.91	8.67	2.57	3.88	2.57	0.15	0.35	0.14
MBC ^v	20.76	21.04	8.73	2.72	3.89	2.29	0.15	0.36	0.13

Tabela A.26 – Invariantes de \mathbf{K} e \mathbf{L} para o padrão 2/2 sarja

c.c.	I_1^K	I_2^K	I_3^K	I_1^L	I_2^L	I_3^L
KUBC	8.06×10^4	2.10×10^9	1.76×10^{13}	7.42×10^4	1.79×10^9	1.38×10^{13}
PBC	8.10×10^4	2.12×10^9	1.78×10^{13}	7.37×10^4	1.76×10^9	1.34×10^{13}
MBC ^ũ	8.12×10^4	2.14×10^9	1.80×10^{13}	7.38×10^4	1.76×10^9	1.35×10^{13}

Tabela A.27 – Indicadores anisotrópicos para o padrão 2/2 sarja analisado

c.c.	A_u	A_z	F_r
KUBC	2.73	0.27	35695
PBC	2.97	0.28	35781
MBC ^ũ	3.10	0.25	35938

A.14 Resultados da análise 2D para o padrão 2/2 sarja

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão 2/2 sarja}}^{\text{KUBC}} = \begin{bmatrix} 21610.82 & 2811.28 & 394.52 \\ 2811.28 & 20706.85 & -3.13 \\ 394.52 & -3.13 & 3907.64 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão 2/2 sarja}}^{\text{PBC}} = \begin{bmatrix} 21089.13 & 2889.66 & 445.72 \\ 2889.66 & 21327.26 & 6.26 \\ 445.72 & 6.26 & 3894.02 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Padrão 2/2 sarja}}^{\text{MBC}^{\text{ũ}}} = \begin{bmatrix} 21204.68 & 2834.91 & 451.16 \\ 2834.91 & 21439.01 & 3.15 \\ 451.16 & 3.15 & 3895.39 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

Tabela A.28 – Constantes de engenharia da rigidez reduzida para o padrão Padrão 2/2 sarja

c.c.	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}
KUBC	21.19	20.34	3.90	0.13
PBC	20.65	20.93	3.88	0.14
MBC ^ũ	20.78	21.06	3.89	0.13