

Cinética espacial na teoria da difusão de nêutrons: uma solução via abordagens nodais e exponenciais matriciais

Rodrigo Zanette¹

PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, RS

Liliane B. Barichello²

IME/UFRGS, Porto Alegre, RS

Claudio Z. Petersen³

IFM/UFPEL, Pelotas, RS

Resumo. Neste trabalho, uma solução para o problema da cinética espacial na teoria da difusão de nêutrons multigrupo em geometria cartesiana unidimensional é derivada. A partir da divisão do domínio espacial em nodos homogêneos, uma integração nodal é aplicada nas equações da cinética espacial, obtendo variáveis médias em cada nodo: fluxos, concentrações de precursores e densidades de correntes. As densidades de correntes para cada interface são aproximadas pela média ponderada dos coeficientes de difusão e pelos fluxos médios. Uma solução analítica na variável temporal na forma de uma exponencial matricial é proposta e, essa exponencial matricial, é avaliada pela aproximação de Padé e pelo método de Schur-Parlett. Os resultados numéricos obtidos são comparáveis aos resultados existentes na literatura e o método de Schur-Parlett mostra uma maior eficiência à aproximação de Padé.

Palavras-chave. Cinética Espacial, Teoria da Difusão de Nêutrons, Exponencial Matricial.

1 Introdução

As Equações da Cinética Espacial (ECE) modelam a evolução temporal da população de nêutrons nos reatores nucleares. O modelo consiste de dois conjuntos de equações acoplados: um descreve os nêutrons emitidos pela fissão e o outro os nêutrons emitidos no decaimento dos produtos de fissão (precursores) [6]. As ECE na teoria da difusão de nêutrons são amplamente utilizadas por fornecer resultados satisfatórios para cálculos globais em física de reatores [6]. Ao longo dos anos, diversas metodologias foram propostas para solucionar este problema da cinética espacial, por exemplo, por diferenças finitas [12], por expansão em séries [4], pelo método ortogonal quase estático [9], entre outras. Além da relevância do ponto de vista físico, os sistemas são rígidos e o tratamento numérico é desafiador.

Neste trabalho, aplicamos uma integração nodal na variável espacial das ECE e, para as incógnitas adicionais que são geradas, relativas as densidades de corrente, propomos uma nova forma de aproximação. Além disto, na dependência temporal das equações resultantes da integração nodal, investigamos particularmente neste trabalho soluções analíticas que estão relacionadas as exponenciais matriciais. Em problemas de cinética, essas exponenciais muitas vezes são avaliadas através das aproximações de Padé [1]. Nós introduzimos a solução via o método de Schur-Parlett [5]. Apresentamos resultados numéricos para a verificação da proposta.

¹rodrigozanette@hotmail.com

²lbaric@mat.ufrgs.br

³claudio.petersen@ufpel.edu.br

2 Formulação Matemática

As ECE na teoria da difusão de nêutrons para o caso unidimensional em geometria cartesiana, um intervalo $[x_0, x_f]$ contido em \mathbb{R} , são escritas como [6]

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(x, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(-D_g(x, t) \frac{\partial \phi_g(x, t)}{\partial x} \right) - \Sigma_{Rg}(x, t) \phi_g(x, t) \\ &+ (1 - \beta) \frac{\chi_g^p}{K} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(x, t) \phi_{g'}(x, t) \\ &+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g}(x, t) \phi_{g'}(x, t) + \chi_g^d \sum_{p=1}^P \lambda_p C_p(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_p(x, t)}{\partial t} = -\lambda_p C_p(x, t) + \frac{\beta_p}{K} \sum_{g=1}^G \nu_g \Sigma_{fg}(x, t) \phi_g(x, t),$$

onde $x \in [x_0, x_f]$, $t \in [t_0, \infty)$ sendo t_0 o tempo inicial, $g = 1, \dots, G$ são os grupos de energia e $p = 1, \dots, P$ são os grupos das concentrações de precursores. Para cada grupo de energia g : ϕ_g é o fluxo escalar de nêutrons, $[\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$; v_g é a velocidade dos nêutrons, $[\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}]$; D_g é o coeficiente de difusão, $[\text{cm}]$; Σ_{Rg} é a seção de choque macroscópica de remoção, $[\text{cm}^{-1}]$; χ_g^p é o espectro de fissão dos nêutrons prontos; χ_g^d é o espectro de fissão dos nêutrons atrasados; ν_g é o número médio de nêutrons liberado por fissão; Σ_{fg} é a seção de choque macroscópica de fissão, $[\text{cm}^{-1}]$ e $\Sigma_{sg'g}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o g , $[\text{cm}^{-1}]$. Para cada grupo de precursores p : C_p é a concentração de precursores de nêutrons atrasados, $[\text{cm}^{-3}]$; β_p é a fração de nêutrons atrasados e λ_p é a constante de decaimento dos precursores de nêutrons atrasados, $[\text{s}^{-1}]$. Além destes parâmetros, β é a fração de nêutrons atrasados e K é o fator de multiplicação efetivo.

As condições de contorno mais usuais para as Eqs. (1) são do tipo de Dirichlet, Neumann ou Robin, que são escritas na forma

$$a_g \phi_g(x, t) \Big|_{x_i} + b_g \frac{\partial \phi_g(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_i} = 0, \quad (2)$$

onde x_i é o valor da variável x no contorno e $|a_g| + |b_g| > 0$ para a_g e b_g constantes reais. Em meios heterogêneos (diferentes materiais), temos também as condições de continuidade do fluxo e da densidade de corrente nas interfaces dos materiais. Além das condições de contorno e das condições de continuidade, no problema da cinética espacial definimos as condições iniciais

$$\phi_g(x, 0) = \phi_{g0}(x) \quad \text{e} \quad C_p(x, 0) = \frac{\beta_p}{\lambda_p K} \sum_{g=1}^G \nu_g \Sigma_{fg}(x, 0) \phi_{g0}(x), \quad (3)$$

onde $x \in [x_0, x_f]$ e $\phi_{g0}(x)$ são os fluxos obtidos no problema estacionário [13].

Nas equações (1), aplicamos uma integração nodal. Para isso, dividimos o domínio em N subintervalos (nodos) com propriedades constantes (meio homogêneo) de dimensões $\Delta x^{(i)}$, para um nodo arbitrário (i) , e, em cada nodo, integramos para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$ e dividimos por $\Delta x^{(i)}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\bar{\phi}_g^{(i)}(t)}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x^{(i)}} \left(J_g^{(i)}(x_i, t) - J_g^{(i)}(x_{i-1}, t) \right) - \Sigma_{Rg}^{(i)}(t) \bar{\phi}_g^{(i)}(t) \\ &+ (1 - \beta) \frac{\chi_g^p}{K} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}^{(i)}(t) \bar{\phi}_{g'}^{(i)}(t) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'g}^{(i)}(t) \bar{\phi}_{g'}^{(i)}(t) + \chi_g^d \sum_{p=1}^P \lambda_p \bar{C}_p^{(i)}(t), \quad (4) \\ \frac{d\bar{C}_p^{(i)}(t)}{dt} &= -\lambda_p \bar{C}_p^{(i)}(t) + \frac{\beta_p}{K} \sum_{g=1}^G \nu_g \Sigma_{fg}^{(i)}(t) \bar{\phi}_g^{(i)}(t), \end{aligned}$$

onde $\bar{\phi}_g^{(i)}(t)$ é o fluxo médio de nêutrons, $\bar{C}_p^{(i)}(t)$ é a concentração média de precursores e $J_g^{(i)}(x, t)$ é a densidade de corrente de nêutrons definidos, respectivamente, como

$$\bar{\phi}_g^{(i)}(t) = \frac{1}{\Delta x^{(i)}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_g^{(i)}(x, t) dx, \quad (5)$$

$$\bar{C}_p^{(i)}(t) = \frac{1}{\Delta x^{(i)}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} C_p^{(i)}(x, t) dx \quad (6)$$

e

$$J_g^{(i)}(x, t) = -D_g^{(i)}(t) \frac{\partial}{\partial x} \phi_g^{(i)}(x, t). \quad (7)$$

Observamos que nas Eqs. (4) temos GN incógnitas relativas aos fluxos, $G(N + 1)$ incógnitas relativas às densidades de corrente e PN incógnitas relativas às concentrações de precursores. Entretanto, temos apenas um conjunto de $(G + P)N$ equações. Como usual em metodologias nodais, introduzimos equações auxiliares para a resolução do problema. Para essas equações auxiliares, propomos aproximar as densidades de correntes em função dos fluxos médios, que são inspiradas no estudo comparativo realizado na ref. [13] para o problema da criticidade. Desta forma, aproximamos as densidades de correntes nas interfaces do nodo (i) como

$$J_g^{(i)}(x_i, t) \cong -\frac{2 \left(D_g^{(i+1)}(t) \Delta x^{(i+1)} + D_g^{(i)}(t) \Delta x^{(i)} \right)}{\left(\Delta x^{(i+1)} + \Delta x^{(i)} \right)^2} \left(\bar{\phi}_g^{(i+1)}(t) - \bar{\phi}_g^{(i)}(t) \right) \quad (8)$$

e

$$J_g^{(i)}(x_{i-1}, t) \cong -\frac{2 \left(D_g^{(i)}(t) \Delta x^{(i)} + D_g^{(i-1)}(t) \Delta x^{(i-1)} \right)}{\left(\Delta x^{(i)} + \Delta x^{(i-1)} \right)^2} \left(\bar{\phi}_g^{(i)}(t) - \bar{\phi}_g^{(i-1)}(t) \right). \quad (9)$$

Observamos que essas aproximações não estão definidas para os contornos do problema, pois elas dependem das condições de contorno, Eq. (2). Nesse caso, definimos as aproximações das densidade de corrente como

$$J_g^{(1)}(x_0, t) \cong -\frac{2D_g^{(1)}(t)a_g^{(x_0)}}{a_g^{(x_0)} \Delta x^{(1)} - 2b_g^{(x_0)}} \bar{\phi}_g^{(1)}(t) \quad (10)$$

e

$$J_g^{(N)}(x_f, t) \cong \frac{2D_g^{(N)}(t)a_g^{(x_f)}}{a_g^{(x_f)} \Delta x^{(N)} + 2b_g^{(x_f)}} \bar{\phi}_g^{(N)}(t), \quad (11)$$

onde $a_g^{(x_0)}$ e $b_g^{(x_0)}$ são as constantes da condição de contorno em x_0 e $a_g^{(x_f)}$ e $b_g^{(x_f)}$ são as constantes da condição de contorno em x_f . Cabe ressaltar que estamos impondo $a_g^{(x_0)} \Delta x^{(1)} \neq 2b_g^{(x_0)}$ e $a_g^{(x_f)} \Delta x^{(N)} \neq -2b_g^{(x_f)}$. Por fim, quando substituimos todas estas aproximações na Eq. (4), obtemos um sistema de equações diferenciais na variável temporal. Este sistema de equações obtido pode ser escrito como um único sistema global da forma

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}(t) = \mathbf{A}(t) \bar{\Psi}(t), \tag{12}$$

onde $\mathbf{A}(t)$ é a matriz de ordem $(G + P)N \times (G + P)N$, que contém os parâmetros nucleares do problema e $\bar{\Psi}(t)$ é o vetor de ordem $(G + P)N$, que contém os fluxos médios e as concentrações médias de precursores. Se $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz cujos elementos são funções contínuas em t e $\mathbf{A}(t)$ comutar com $\int_0^t \mathbf{A}(s)ds$, então o sistema de EDO's (12) possui uma solução analítica [7] na forma

$$\bar{\Psi}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(s)ds} \bar{\Psi}_0, \tag{13}$$

onde $\bar{\Psi}_0$ é o vetor que contém as condições iniciais. Se os parâmetros nucleares forem constantes, os elementos da matriz \mathbf{A} são funções contínuas e a condição de comutatividade é satisfeita. Caso os parâmetros forem dependentes do tempo e a comutatividade não for satisfeita, aproximamos os parâmetros por constantes em pequenos intervalos de tempo. Em ambos os casos, a solução é escrita na forma de uma exponencial matricial vezes a condição inicial

$$\bar{\Psi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \bar{\Psi}_0. \tag{14}$$

Nas próximas subseções, apresentamos duas propostas para calcular as exponenciais matriciais.

2.1 Exponencial matricial por aproximação de Padé

O primeiro método que escolhemos para avaliar essas exponenciais é a aproximação de Padé juntamente com a técnica *scaling and squaring* [2]. A aproximação Padé para $e^{\mathbf{A}t}$ é definida como

$$\mathbf{R}_{pq}(\mathbf{A}t) = [\mathbf{Q}_{pq}(\mathbf{A}t)]^{-1} \mathbf{P}_{pq}(\mathbf{A}t), \tag{15}$$

$$\mathbf{P}_{pq}(\mathbf{A}t) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)!p!}{(p+q)!j!(p-j)!} (\mathbf{A}t)^j \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_{pq}(\mathbf{A}t) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)!q!}{(p+q)!j!(q-j)!} (-\mathbf{A}t)^j. \tag{16}$$

Segundo a ref. [10], a melhor escolha dos índices da aproximação é $p = q$, pois o custo computacional das aproximações $p \neq q$ e $p = q$ são os mesmos, entretanto, aproximações $p \neq q$ são menos precisas que $p = q$. Além disto, Higham (2005) [8] indica que $p = q = 13$ é a escolha mais eficiente. A técnica *scaling and squaring* é usada para reduzir a norma da matriz, pois o erro na aproximação da exponencial pelas aproximações de Padé aumenta à medida que a norma da matriz $\mathbf{A}t$ aumenta [10]. Essa técnica explora a propriedade das potências das funções exponenciais

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(e^{\mathbf{A}t/m} \right)^m, \tag{17}$$

onde a escolha ideal para m são potências de dois [10]. Assim, devemos tomar a menor potência de dois, em que $\|2^{-s} \mathbf{A}t\| \leq \theta$ para θ suficientemente pequeno a fim de reduzir o erro. Neste trabalho, adotamos $\theta = 5,3719$, esse escolha é baseada no estudo de Al-Mohy e Higham (2009) [2]. Desta forma, a aproximação de Padé juntamente com a técnica *scaling and squaring* para as exponenciais matriciais usada neste trabalho é da forma

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \left(\mathbf{R}_{13,13}(2^{-s} \mathbf{A}t) \right)^{2^s}. \tag{18}$$

2.2 Exponencial matricial por Schur-Parlett

A segunda proposta para avaliar a exponencial matricial é o método Schur-Parlett [5]. Esse método utiliza a triangularização de Schur juntamente com o método recursivo de Parlett [11] para matrizes triangulares. Como a matriz $\mathbf{A}t$ possui todas as entradas reais, aplicamos a triangularização real de Schur, para obter

$$\mathbf{A}t = \mathbf{Q}\mathbf{T}t\mathbf{Q}^T, \quad (19)$$

onde \mathbf{T} é uma matriz triangular superior de blocos e \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal. Desta forma, se aplicamos a triangularização real de Schur em $\mathbf{A}t$, juntamente com a ortogonalidade da matriz \mathbf{Q} , temos

$$(\mathbf{A}t)^n = \mathbf{Q}(\mathbf{T}t)^n\mathbf{Q}^T \quad (20)$$

para qualquer n natural. Além disto, definindo a matriz exponencial de $\mathbf{A}t$ pela série de potências [10] e usando a definição da Eq. (20), podemos afirmar que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{Q}e^{\mathbf{T}t}\mathbf{Q}^T. \quad (21)$$

Observamos que na Eq. (21) ainda temos uma exponencial matricial para avaliar, porém não mais uma matriz cheia, mas uma triangular superior. Uma forma de determinar a exponencial de uma matriz triangular superior é apresentada por Parlett [11], onde ele constrói uma fórmula de recorrência, Eq. (22), para determinar a exponencial de uma matriz triangular superior em blocos \mathbf{T} . Seja a matriz $\mathbf{H} = e^{\mathbf{T}}$, então para $r < s$ temos

$$\mathbf{T}_{r,r}\mathbf{H}_{r,s} - \mathbf{H}_{r,s}\mathbf{T}_{s,s} = \sum_{k=0}^{s-r-1} (\mathbf{H}_{r,r+k}\mathbf{T}_{r+k,s} - \mathbf{T}_{r,s-k}\mathbf{H}_{s-k,s}), \quad (22)$$

onde r e s são os índices dos blocos. A diagonal de \mathbf{H} é dada pela exponencial dos blocos da diagonal de \mathbf{T} , ou seja $\mathbf{H}_{r,r} = e^{\mathbf{T}_{r,r}}$. A fórmula de recorrência deve ser aplicada da esquerda para a direita e de baixo para cima, caso contrário nem todos os blocos do somatório são conhecidos.

3 Resultados numéricos

A fim de testar a metodologia proposta, resolvemos o problema teste BSS-6 disponível na literatura [12]. Os nossos resultados são gerados por programas implementados em Fortran95 e executados em um computador com um processador Intel Core i5 – 8250U, 1,60GHz e 8GB de RAM. Além disso, utilizamos as subrotinas do LAPACK [3] para a decomposição de Schur (*dgehrd*, *dorghr* e *dhseqr*) e para a solução dos sistemas lineares (*dgetrf* e *dgetrs*).

O problema teste BSS-6 é um *Benchmark* clássico, ele é composto por três regiões dispostas em uma placa de 240cm, sendo a Região 1: $0 \leq x \leq 40$; a Região 2: $40 \leq x \leq 200$ e a Região 3: $200 \leq x \leq 240$, e, na Tabela 1, apresentamos os parâmetros nucleares. As condições de contorno deste problema testes são de fluxos nulos em ambos os contornos.

No tempo $t_0 = 0s$ é inserida uma perturbação no sistema crítico, que consiste em um aumento de 3% da seção de choque de remoção do grupo térmico da Região 1 no primeiro segundo

$$\Sigma_{R2}(t) = \begin{cases} 0,18 \cdot (1 + \frac{3}{100}t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1,0 \\ 0,1854 & \text{se } 1,0 < t \end{cases}. \quad (23)$$

Na Tabela 2, apresentamos as potências obtidas pelas duas diferentes propostas usadas na avaliação das exponenciais matriciais. Além das potências, apresentamos os erros relativos com

Tabela 1: Parâmetros nucleares.

Região	g	D_g	Σ_{ag}	$\nu_g \Sigma_{fg}$	Σ_{sg2}	χ_g^p	χ_g^d	v_g	p	λ_p	β_p
1	1	1,5	0,026	0,010	0,015	1,0	1,0	$1,0 \times 10^7$	1	0,00025	0,0124
1	2	0,5	0,180	0,200	0,000	0,0	0,0	$3,0 \times 10^5$	2	0,00164	0,0305
2	1	1,0	0,020	0,005	0,010	1,0	1,0	$1,0 \times 10^7$	3	0,00147	0,1110
2	2	0,5	0,080	0,099	0,000	0,0	0,0	$3,0 \times 10^5$	4	0,00296	0,3010
3	1	1,5	0,026	0,010	0,015	1,0	1,0	$1,0 \times 10^7$	5	0,00086	1,1400
3	2	0,5	0,180	0,200	0,000	0,0	0,0	$3,0 \times 10^5$	6	0,00032	3,0100

Fonte: Pollard (1977) [12].

relação aos resultados apresentados por Pollard (1977) [12] e os tempos computacionais. Pollard implementa o código POW, que utiliza diferenças finitas para discretizar tanto a variável temporal quanto espacial.

Tabela 2: Potências do problema BSS-6 usando $\Delta x = 2\text{cm}$.

Δt (ms)	POW	Schur-Parlett		Padé			
	10,0	100,0	10,0	1,0	100,0	10,0	1,0
$t = 0,0\text{s}$	1,00000 (-)	1,00000 (0,00%)	1,00000 (0,00%)	1,00000 (0,00%)	1,00000 (0,00%)	1,00000 (0,00%)	1,00000 (0,00%)
$t = 0,1\text{s}$	0,9298 (-)	0,92728 (0,27%)	0,92843 (0,15%)	0,92968 (0,01%)	0,92728 (0,27%)	0,92843 (0,15%)	0,92968 (0,01%)
$t = 0,2\text{s}$	0,8732 (-)	0,87074 (0,28%)	0,87234 (0,10%)	0,87329 (0,01%)	0,87074 (0,28%)	0,87234 (0,10%)	0,87329 (0,01%)
$t = 0,5\text{s}$	0,7596 (-)	0,75753 (0,27%)	0,75939 (0,03%)	0,75989 (0,04%)	0,75753 (0,27%)	0,75939 (0,03%)	0,75989 (0,04%)
$t = 1,0\text{s}$	0,6587 (-)	0,65735 (0,20%)	0,65887 (0,03%)	0,65912 (0,06%)	0,65735 (0,20%)	0,65887 (0,03%)	0,65912 (0,06%)
$t = 1,5\text{s}$	0,6432 (-)	0,64228 (0,14%)	0,64345 (0,04%)	0,64358 (0,06%)	0,64228 (0,14%)	0,64345 (0,04%)	0,64358 (0,06%)
$t = 2,0\text{s}$	0,6306 (-)	0,62992 (0,11%)	0,63092 (0,05%)	0,63102 (0,07%)	0,62992 (0,11%)	0,63092 (0,05%)	0,63102 (0,07%)
tempo (s)	-	27,64	292,08	3015,21	38,36	381,59	4841,34

Na Tabela 2, observamos que as nossas duas propostas geram os resultados com a mesma precisão. Entretanto, o custo computacional da aproximação de Padé é significativamente maior, possivelmente devido ao fato de que essa aproximação e a técnica *scaling and squaring* utilizam potências de matrizes, sendo necessário um grande número de operações. Por fim, destacamos a concordância dos nossos resultados com os resultados do código POW, quando comparamos mesmas malhas temos um erro de até 0,15%.

4 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos uma técnica de integração nodal juntamente com novas aproximações para as densidades de correntes nas interfaces para o problema da cinética espacial. Além disso, introduzimos o método Schur-Parlett para avaliar as exponenciais matriciais nos problemas da cinética espacial. Após os testes realizados, concluímos que as propostas descritas neste trabalho são promissoras por demonstrar uma boa concordância com resultados presentes na literatura e por apresentar ganhos computacionais significativos perante a aproximação de Padé. Em trabalhos futuros, pretendemos explorar esta mesmas propostas em problemas multidimensionais.

Agradecimentos

Este estudo foi financiado em parte: pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – Brasil; pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Brasil: Código Financeiro 001; pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS): Proc. 19/2551-0001766-9.

Referências

- [1] Aboanber, A. E. and Nahla, A.A. Solution of two-dimensional space-time multigroup reactor kinetics equations by generalized Padé and cut-product approximations, *Annals of Nuclear Energy*, 33: 209–222, 2006. DOI:10.1016/j.anucene.2005.11.003.
- [2] Al-Mohy, A. and Higham, N. A New Scaling and Squaring Algorithm for the Matrix Exponential, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 31: 970–989, 2009. DOI:10.1137/09074721X.
- [3] Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A. and Sorensen, D. *LAPACK Users' guide*. SIAM, Philadelphia, 1999.
- [4] Ceolin, C., Schramm M., Vilhena, M. T. and Bodmann, B. E. J. On the Neutron multi-group kinetic diffusion equation in a heterogeneous slab: An exact solution on a finite set of discrete points, *Annals of Nuclear Energy*, 76:271–282, 2015. DOI:10.1016/j.anucene.2014.09.038.
- [5] Davies, P. and Higham, N. A Schur-Parlett Algorithm for Computing Matrix Functions, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25:464–485, 2003. DOI:10.1137/S0895479802410815.
- [6] Duderstadt, J. J. and Hamilton, L. J. *Nuclear Reactor Analysis*. John Wiley, New York, 1976.
- [7] Evard, J. C. On matrix functions which commute with their derivative, *Linear Algebra and its Applications*, 68:145–178, 1985. DOI:10.1016/0024-3795(85)90212-5.
- [8] Higham, N. The Scaling and Squaring Method for the Matrix Exponential Revisited, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26:1179–1193, 2005. DOI:10.1137/04061101X.
- [9] Li, M., Chen, W., and Hao, J. A quasi-static orthogonal method for solving spatial-time neutron kinetics equations in non-steady processes, *Progress in Nuclear Energy*, 120:103229, 2020. DOI:10.1016/j.pnucene.2019.103229.
- [10] Moler, C. and Van Loan, C. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later, *SIAM Review*, 45:3–49, 2003. DOI:10.1137/S0036144502418.
- [11] Parlett, B. N. A recurrence among the elements of functions of triangular matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 14:117–121, 1976. DOI:10.1016/0024-3795(76)90018-5.
- [12] Pollard, J. P. *AUS Diffusion Module POW Checkout - 1- and 2- Dimensional Kinetics Calculations*. Australian Atomic Energy Commission AAEC/387, 1977.
- [13] Zanette, R., Barichello, L. B. e Petersen, C. Z. Cálculo de criticalidade pela teoria de difusão de nêutrons: uma análise comparativa de aproximação da densidade de corrente, *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 6:e4006, 2020. DOI: 10.35819/remat2020v6i2id4248.