

ASPECTOS TEÓRICOS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ABSORVENTES PARA A EQUAÇÃO DA ONDA CLÁSSICA

Kleitton Andre Schneider

Campus de Ponta Porã - UFMS

kleiton.schneider@ufms.br

Manuela Longoni De Castro

Departamento de Matemática Pura e Aplicada - UFRGS

manuela.castro@ufrgs.br

RESUMO

Um problema recorrente em computação científica é resolver numericamente problemas de propagação de ondas em que o domínio original do problema é truncado via uma condição de fronteira artificial. As reflexões causadas pela imposição dessa fronteira devem ser atenuadas, de modo que as ondas refletidas não voltem para o interior do domínio. Neste trabalho, fazemos uma revisão sobre as condições de contorno absorventes (ABCs) para uma equação da onda clássica, bem como a formulação de ABCs exatas não-locais e as ABCs aproximadas de Engquist e Majda. Ademais, explanaremos sobre aspectos teóricos das ABCs de Engquist e Majda, como análise de estabilidade e convergência, de forma a estimular e elucidar a construção de novas ABCs.

ABSTRACT

A common problem in scientific computing is to numerically solve problems related to wave propagation. Basically the original domain is truncated by an artificial boundary condition that can generate reflexions caused by the force-placement of such condition. Thus, the idea is to mitigate the wave reflexions to avoid returning to the interior domain. In this study, we presented a review of absorbing boundary conditions (ABCs) for classic wave equations, as well as the formulation of non-local ABCs together with the approximation of Engquist-Majda's ABCs. Furthermore, we address here the theoretical aspects of the Engquist-Majda's ABCs with respect to the stability and convergence analysis in order to motivate the formulation of new ABCs.

Palavras-chave: Condições de Contorno Absorventes, Condições de Engquist e Majda, Equação da Onda.

1 INTRODUÇÃO

Pela restrição física imposta pelos computadores, afinal não há como representar domínios infinitos na máquina, muitos dos cálculos em computação científica exigem o uso de fronteiras computacionais artificiais. Se nenhuma condição especial fosse aplicada na fronteira, seria necessário um domínio computacional suficientemente grande, para que as instabilidades numéricas afetassem a solução num tempo pré-determinado T (em termos propagativos, que as reflexões só atingissem a solução depois de um certo tempo), e, assim,

antes de T não alterassem a solução que está sendo obtida. Logicamente, isso demandaria um custo computacional altíssimo, limitando o campo de estudos à fenômenos não muito complexos ou exigindo grandes recursos com supercomputadores.

Em problemas envolvendo propagação de ondas, são impostas condições de contorno especiais com o objetivo de atenuar ou eliminar as reflexões indesejadas causadas pela imposição dessas fronteiras (veja a Figura (1)). Tais condições são chamadas *condições de contorno absorventes*. Truncado o domínio, impostas as condições, pode-se resolver por meio de métodos numéricos o problema proposto. A fim de que o procedimento tenha sucesso, as condições impostas sobre as fronteiras artificiais devem ser compatíveis, pelo menos no sentido aproximado, com a solução física do problema. Vale ressaltar que tais fronteiras são somente uma necessidade computacional e não tem significado físico. Um correto tratamento dessas condições de fronteira evita que as instabilidades numéricas e as reflexões causadas pela imposição dessas condições alterem os resultados da simulação.

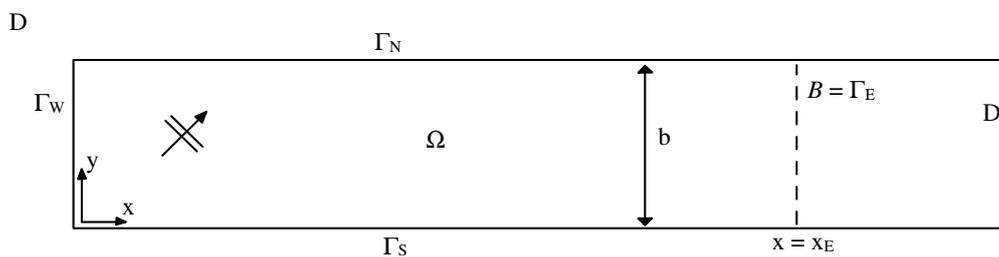


FIGURA 1: Uma *waveguide* semi-infinita, com uma fronteira artificial $B = \Gamma_E$, sobre a qual uma condição de contorno absorvente pode ser aplicada [1].

Dentre os métodos desenvolvidos para tratar condições de contorno artificiais, existem dois que se destacam. O primeiro é o *perfectly matched layer* (PML), ou "camada esponja", desenvolvido por Bérenger [2] em 1994, baseada numa camada absorvente artificial envolvendo a região de simulação, afim de tratar reflexões causadas pela imposição da camada artificial por ondas eletromagnéticas. Muitos outros autores já produziram resultados e aplicações com PMLs como, por exemplo, Díaz e Joly [3], modelando problemas de acústica, entre outros [4–7]. E o segundo, é o método das condições de contorno absorventes, ou *absorbing boundary conditions* (ABC), que vamos discutir nesse artigo. O objetivo aqui é explanar sobre aspectos teóricos das condições de contorno absorventes, dando ênfase a uma classe de problemas típicos de sismologia, usando a equação da onda acústica, em teoria desenvolvida por Engquist e Majda em [8] e [9], detalhando o procedimento de construção dessas condições, bem como a análise de estabilidade e convergência, de forma a estimular e elucidar a construção de novas ABCs, melhorando aspectos como facilidade de implementação e custo computacional [10].

Condições de contorno absorventes têm aplicações em diversas áreas importantes como: meteorologia [11], nas previsões meteorológicas a nível local, onde é utilizada a equação de águas rasas, que modela movimentos de ondas e circulação de fluidos em geometrias cujas dimensão horizontal é muito maior que a profundidade (fenômenos naturais e desastres ecológicos como tsunamis e furacões); geologia, na prospecção sísmica, onde aparecem as ondas elásticas (também chamadas de ondas sísmicas) e acústicas [9, 12, 13]; mecânica quântica [14–16], cuja equação fundamental é a equação de Schrödinger, que descreve a propagação de uma partícula quântica, como um elétron, submetida a um potencial; oceanografia, onde aparece a equação de Helmholtz [17, 18]; para as equações de Maxwell [19, 20], que compõem a base do eletromagnetismo clássico; e numa gama de problemas em dinâmica dos fluidos [21, 22].

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1)$$

em que $\text{supp}(u_0)$ e $\text{supp}(v_0)$ ¹ estão contidos em $(\delta, \infty) \times \mathbb{R}$, para algum $\delta > 0$. Como motivação, considere reduzir o domínio espacial do problema de \mathbb{R}^2 para o meio plano $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$. Esse estudo tem aplicação direta no desenvolvimento de condições de contorno de dutos (*waveguides*, veja a Figura (1)) e domínios poligonais. Dessa forma, teremos o problema de valor inicial e de contorno (PVIC)

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}\varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma, \\ \varphi(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

onde \mathcal{B} é a *condição de contorno artificial exata*, isto é, de perfeita absorção, sobre $\Gamma = \{(x, y) \mid x = 0\}$, ou seja, $\varphi(x, y, t) = u(x, y, t)$ para $x > 0$. Considerando que a solução de (1) é dada apenas por ondas que se movem para a esquerda, \mathcal{B} deve aniquilar as ondas que se movem para a direita, ou seja, absorver as ondas incidentes.

Desde a década de 70, pesquisadores vêm desenvolvendo ABCs, analíticas e discretas, discutindo aspectos de estabilidade das condições e convergência do problema aproximado, isto é, que a solução obtida no subdomínio finito aproxime a solução original. As condições de contorno para as quais a solução do problema no subdomínio finito coincide com a solução original são ditas *condições de contorno exatas* (ou ainda *transparentes* ou *não-reflectantes*), e geralmente são não-locais, no tempo e no espaço, isto é, onde a dependência dos dados iniciais é não-local. Na maioria das vezes, são de difícil implementação, visto que a condição de contorno não é o símbolo de uma equação diferencial, mas de um operador pseudo-diferencial, dado, no caso da onda clássica, por

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - i\omega \sqrt{1 - z^2} \hat{u} = 0,$$

onde $\hat{}$ denota a transformada de Fourier. Outra possibilidade para resolver esse tipo de problema aparece com as denominadas *condições de contorno absorventes*, que permitem pequenas reflexões, mas que possibilitam uma aproximação por operadores locais. O trabalho pioneiro nesse assunto foi o artigo de Engquist e Majda [8]. Os autores observaram que $\sqrt{1 - z^2}$ é a solução de $f(z) = 1 - \frac{z^2}{1+f(z)}$, e usando aproximantes de Padé [24], $f_n(z)$, definidos por $f_{n+1}(z) = 1 - \frac{z^2}{1+f_n(z)}$ e $f_0(z) = 1$, desenvolveram uma sequência de ABCs locais de alta absorção para a equação da onda, dadas por

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N u = 0,$$

as quais são uma aproximação de condições de contorno exatas não-locais. Utilizando o critério de Kreiss [25], mostraram que as ABCs geradas são fortemente bem-postas para a equação da onda em (1), e, além disso, mostraram que o erro, isto é, a diferença entre a solução do problema aproximado e do problema original, decai com a ordem N da condição de contorno. Na década de 80, Trefethen e Halpern [26, 27] generalizaram a ideia de Engquist e Majda, propondo uma aproximação racional para a raiz quadrada do operador pseudo-diferencial, da forma $\sqrt{1 - z^2} \approx p(z)/q(z)$, onde p e q são polinômios com nenhum zero em comum. Em [26], eles também provam que se a razão $p(z)/q(z)$ interpola a raiz

¹Dados Ω um aberto do \mathbb{R}^n e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, definimos $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ [23]

em um número suficiente de pontos em $(-1, 1)$, as condições são fortemente bem-postas para a equação da onda em (1), e em [27] se faz um estudo numérico do problema. Na mesma década, Higdon [28] desenvolveu condições de contorno discretas, e, a partir delas, encontrou condições de contorno analíticas de alta absorção consistentes com as discretas,

$$\prod_{j=1}^N \left(\cos \alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

as quais generalizam as condições de Engquist e Majda. No entanto, a formulação de Higdon envolve derivadas de ordem N , no espaço e no tempo, e dessa forma tornam-se inconvenientes quando N é grande. Além disso, não têm um tratamento eficaz para os *modos evanescentes*, que correspondem às ondas com decaimento exponencial na coordenada x . Como apontado em [29], temos que o controle sobre o erro gerado pelos modos evanescentes torna-se essencial quando deseja-se truncar o domínio ao máximo, de forma a reduzir o custo computacional de simulação. Tal fato não é evidente nos resultados apresentados por Higdon, que analisa essencialmente o coeficiente de reflexão gerado pelos modos propagativos da solução.

Givoli e Neta, em [1], propõem uma reformulação das condições de Higdon, usando variáveis auxiliares especiais ϕ_j , definidas recursivamente por

$$b_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + c \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = \phi_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

com $\phi_0 = u$ e a condição de truncamento $\phi_{N+1} = 0$ na fronteira $x = 0$, que permitiram eliminar as derivadas de alta ordem na implementação [30]. No entanto, elas não fazem um bom tratamento das condições de compatibilidade nos *corners*, condições essenciais quando tem-se domínios poligonais. Hägstrom e Warburton [22] propuseram uma modificação da formulação de Givoli e Neta, fazendo uso de funções auxiliares definidas recursivamente por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 \\ \left(a_j \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_j &= \left(a_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{j+1} \end{aligned}$$

com $\phi_0 = u$ e a condição de truncamento $\phi_{N+1} = 0$ na fronteira $x = 0$, fornecendo uma derivação para as ABCs nos *corners*, e que podem ser extendidas para sistemas de primeira ordem. Uma comparação entre as condições de Givoli e Neta e as condições de Hägstrom e Warburton pode ser vista em [30]. Mas ambas as condições não tratam os modos evanescentes. Apenas recentemente em [31] foi apresentada uma nova classe de ABCs capazes de controlar os modos evanescentes de forma mais efetiva, sem ignorar a necessidade de controle sobre os modos propagativos e tangenciais (ondas que se movem quase que paralelamente ao contorno). Diaz e Joly trazem em [3], através do método de Cagniard-De Hoop, uma expressão explícita para a solução fundamental do problema associado à equação da onda no meio-plano, para as condições de Engquist e Majda e para as condições de Higdon. Broeze e Van Daalen, em [32], propõem a derivação de novas ABCs para a equação bidimensional da onda através de técnicas de métodos variacionais, demonstrando que o PVIC é bem-posto considerando a energia transmitida nas fronteiras. A classe de ABCs construída pode ser considerada uma extensão das condições de primeira ordem de Higdon, e os testes numéricos no paper concluem que a nova classe de condições obtidas é melhor que a classe das condições de Higdon. Gudatti e Tassoulas discutem em [33] novas ABCs locais de alta ordem baseadas em aproximações por frações contínuas, que pode ser considerada uma generalização das ABCs de Engquist e Majda e absorvem ondas multidirecionais.

A estrutura do artigo é simples. Na seção 2, abordaremos o desenvolvimento de condições de contorno absorventes exatas, isto é, de perfeita absorção, e porquê são caras

implementá-las numericamente. Na seção 3, abordaremos a construção das condições de contorno absorventes aproximadas de Engquist e Majda para o cálculo numérico de ondas não-dispersivas, utilizando expansões em frações contínuas, além de apresentar resultados sobre aspectos teóricos como a estabilidade dessas ABCs, no sentido de Kreiss [25], e um resultado de convergência do problema aproximado. Na seção 4 apresentamos algumas propostas para novos trabalhos.

2 ABCs EXATAS

Qualquer EDP linear hiperbólica com coeficientes constantes, quando resolvida por séries ou transformadas de Fourier, admite soluções expressas como combinação de termos da forma

$$u(\mathbf{x}, t) = \hat{u}_0(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\psi t)}, \quad (3)$$

com $\mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$, onde \mathbf{k} é o número de onda, ψ é a frequência, e $\hat{\cdot}$ denota a transformada de Fourier [34]. Para satisfazer as equações diferenciais, \mathbf{k} e ψ devem estar relacionados por uma equação do tipo $\psi = \psi(\mathbf{k})$, a qual é conhecida como *relação de dispersão*. Em geral, cada número de onda \mathbf{k} corresponde a m frequências ψ , onde m é a ordem da equação diferencial com respeito a t , e é por isso que $\psi = \psi(\mathbf{k})$ é chamada de relação ao invés de função. Consideremos aqui que os valores de \mathbf{k} são reais, e ψ pode ser real ou complexo, dependendo da EDP.

Considere a equação da onda bidimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, t \geq 0 \quad (4)$$

onde $u = u(x, y, t)$, assumindo que os dados iniciais têm suporte em \mathbb{R}_+^2 . A equação (4) admite soluções por ondas planas da forma

$$u(x, y, t) = e^{i(\omega t + \xi x + \eta y)}, \quad \xi, \eta, \omega \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

onde ω , ξ e η são as variáveis duais de t , x e y , respectivamente. Inseridas em (4), resultam na relação de dispersão

$$\omega^2 = c^2(\xi^2 + \eta^2), \quad (6)$$

ilustrada na Figura 2. Essas ondas viajam com *velocidade de fase* e *velocidade de grupo* [34] idênticas e iguais a

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_g = c \left(-\frac{c\xi}{\omega}, -\frac{c\eta}{\omega} \right). \quad (7)$$

Uma solução mais geral da EDP (4) pode ser obtida por superposição de ondas planas da forma (5),

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x + \eta y + \omega(\xi, \eta)t)} \hat{u}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8)$$

onde $\hat{u}_0(\xi, \eta)$ é a transformada de Fourier de $u(x, y)$, de modo que cada componente satisfaça a relação de dispersão. Resolvendo para ξ em (6), obtemos

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}. \quad (9)$$

Assumindo que $(\omega/c)^2 - \eta^2 > 0$, $\omega > 0$, e usando (9), podemos chegar à relação de dispersão unidirecional $\xi = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \iff -\frac{c^2\xi}{\omega} \leq 0$ para as ondas viajando para a direita e à relação de dispersão unidirecional $\xi = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \iff -\frac{c^2\xi}{\omega} \geq 0$ para as ondas viajando para a esquerda, onde $-c^2\xi/\omega$ é a componente x da velocidade de propagação da onda, conforme

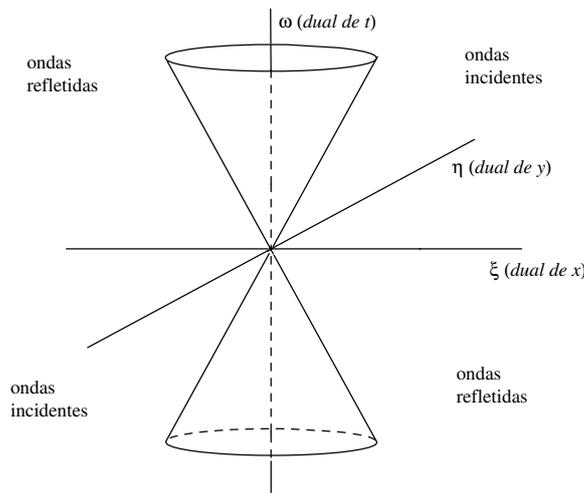


FIGURA 2: Gráfico da relação de dispersão [35]

(7). Assim, existem famílias especiais de soluções da equação da onda, representando ondas viajando para a esquerda, as quais são dadas por

$$u(x, y, t) = e^{i(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}x + \omega t + \eta y)} \tag{10}$$

com $(\omega/c)^2 - \eta^2 > 0$, $\omega > 0$. Tomando a transformada de Fourier na equação (4), com respeito à coordenada espacial y e ao tempo t , usando (6), temos que

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \xi^2\right)\hat{u} = 0, \tag{11}$$

onde $\hat{u} \equiv \hat{u}(x, \eta, \omega)$ é a transformada de Fourier de $u(x, y, t)$. O operador em (11) pode ser fatorado na forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \xi^2\right)\hat{u} = \left(\frac{d}{dx} - i|\xi|\right)\left(\frac{d}{dx} + i|\xi|\right)\hat{u},$$

e, usando (6) novamente, com (η, ω) mantido fixo, a condição de contorno a qual aniquila as ondas planas como em (10) tem a forma

$$\left(\frac{d}{dx} - i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}\right)\hat{u}|_{x=0} = 0. \tag{12}$$

Assim, para todas as ondas como em (10) com (η, ω) mantido fixo, a condição de contorno em (12) não produz reflexões. Uma outra maneira de chegar nessa condição de contorno é simplesmente derivar (10) com relação a variável x , e aplicar o resultado em $x = 0$, donde temos $\frac{du}{dx}|_{x=0} - i\sqrt{\omega^2/c^2 - \eta^2}u|_{x=0} = 0$. De um modo mais geral, por superposição de soluções da forma (10), conforme observado em (8), pacotes de ondas viajando para a esquerda podem ser representados por

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2}x + \omega t + \eta y)} \hat{u}(0, \omega, \eta) d\omega d\eta, \tag{13}$$

onde $\hat{u}(0, \omega, \eta)$ denota a transformada de Fourier de $u(0, y, t)$. Por superposição da condição de contorno em (12), a condição de contorno a qual aniquila exatamente pacotes de onda viajando para a esquerda da forma (13) é dada por

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t + i\eta y} i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \hat{u}(0, \omega, \eta) d\omega d\eta = 0, \tag{14}$$

ou, de outra maneira,

$$\frac{du}{dx} - i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \mathcal{F}u = 0, \quad \text{sobre } x = 0,$$

$$\text{onde } \mathcal{F}v(x, \eta, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\eta y + \omega t)} v(x, y, t) dy dt.$$

A não-localidade da condição de contorno acima fica explícita através das transformadas integrais. Inverter as transformadas explicitamente não é possível, desde que a raiz quadrada em (14) não tem uma transformada inversa explícita. Desde que a raiz quadrada, tanto em (12) como em (14), é uma função irracional de ω e η , (12) e (14) não representam o símbolo de uma equação diferencial parcial, mas uma equação contendo um operador pseudo-diferencial [36]. Esse operador é não-local no espaço e no tempo, e torna-se caro implementá-lo numericamente. No entanto, é possível aproximar a raiz quadrada para produzir uma família de EDP's que podem ser implementadas numericamente. Essas condições não serão exatas e haverá uma pequena quantidade de energia da onda que será refletida em direção ao interior do domínio. Contudo, é possível construir condições de contorno aproximadas de modo que minimizem as reflexões. Necessariamente, essas condições de contorno devem ser:

$$\begin{aligned} (i) & \text{ locais,} \\ (ii) & \text{ bem-postas para } u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Para equações com coeficientes variáveis, a teoria dos operadores pseudo-diferenciais e a reflexão das singularidades [36–38] são empregadas para o desenvolvimento de condições de contorno não-locais, no espaço e no tempo, pelo menos assintoticamente.

3 ABCs DE ENQUIST E MAJDA

Na década de 70, Engquist e Majda propuseram a primeira hierarquia de condições de contorno aproximadas locais de alta absorção para problemas de propagação de ondas. Tomando $z = -c^2 \eta^2 / \omega^2$, as primeiras aproximações para a raiz quadrada do símbolo da condição de contorno em (12), considerando os aproximantes de Padé [0/0], [1/0] e [1/1], respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned} \sqrt{1+z} &= 1 + \mathcal{O}(|z|) \\ \sqrt{1+z} &= 1 + \frac{1}{2}z + \mathcal{O}(|z|^2) \\ \sqrt{1+z} &= 1 + \frac{z}{2 + (z/2)} + \mathcal{O}(|z|^3) \end{aligned}$$

Da transformada de Fourier, e sua inversa, vem as correspondências $i\omega \longleftrightarrow \partial/\partial t$ e $i\eta \longleftrightarrow \partial/\partial y$, de onde, por (12), obtemos as primeiras aproximações para as ABCs exatas sobre a fronteira $x = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u|_{x=0} = 0. \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u|_{x=0} = 0. \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} - \frac{c^2}{4} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{3c}{4} \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2} \right) u|_{x=0} = 0. \tag{18}$$

No trabalho de Ha-Duong e Joly [39], na seção 2.1, utilizando estimativas de energia, mostra-se que a primeira aproximação 16, conjuntamente com a equação da onda, nos leva a um PVIC fortemente bem-posto, no sentido de Kreiss [25]. Originalmente, o critério de Kreiss é aplicado para sistemas de equações lineares de primeira ordem. Higdon, em [35],

forneceu algumas interpretações e explicações sobre a teoria de Kreiss e outros autores, como Majda e Osher [38] e Ralston [40], discutiram com detalhes condições necessárias para um PVIC ser fortemente bem-posto, tanto para sistemas hiperbólicos, como as equações de Maxwell, como para equações lineares, como a equação da onda clássica. Higdon também descreve alguns contra-exemplos, onde os sistemas não satisfazem a condição de Kreiss e, ainda assim, são fracamente bem-postos.

A estabilidade no sentido de Hadamard, em que o PVIC é bem-posto se, para todo $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, existe solução única, e podemos estimar alguma norma da solução pela mesma norma dos dados, é dita *estabilidade fraca*. A estabilidade de acordo com o critério de Kreiss, na qual podemos prescrever as normas para as quais queremos obter alguma estimativa, é dita *estabilidade forte* [39]. Para o nosso caso em particular, Engquist e Majda, em [8], nos dão a seguinte interpretação do critério de Kreiss:

Definição 3.1: *Uma condição de contorno \mathcal{B} , sobre a fronteira $x = 0$, juntamente com a equação da onda, agindo sobre funções definidas em $x \geq 0$, $t \geq 0$, é dita fortemente bem-posta desde que não existam soluções da forma*

$$\varphi(s, \eta) = e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}x + st + i\eta y} \tag{19}$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\text{Re}(s) \geq 0$, satisfazendo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) \varphi(s, \eta) = 0 \quad \text{em } x > 0, \tag{20}$$

$$\mathcal{B}\varphi(s, \eta)|_{x=0} = 0.$$

Além disso, para $|\frac{s}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ e $\text{Re}(s) \geq 0$, deve existir $c_0 > 0$ tal que $|\mathcal{B}(\varphi(s, \eta))| \geq c_0$.

Observe que se a condição (20) não é satisfeita, temos soluções da forma (19) satisfeitas também para $x > 0$, o que fisicamente não é aceitável. Aplicando o critério para a segunda aproximação, temos que (17) nos leva a um problema bem-posto, a menos que

$$-s\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} = \frac{1}{c}s^2 + \frac{c}{2}\eta^2. \tag{21}$$

Aplicando o quadrado em ambos os lados, obtemos que $s^2(s^2/c^2 + \eta^2) = (1/c^2)s^4 + s^2\eta^2 + (c^2/4)\eta^4$, e assim, obrigatoriamente, temos $\eta = 0$. Mas quando $\eta = 0$ em (21), obtemos $\frac{2}{c}s^2 = 0$, e assim, teremos somente a solução trivial. Logo, (17) é bem-posta. Para checar que a condição de contorno (18) nos leva a um problema bem-posto, precisamos somente mostrar que não existem raízes com $\text{Re}(s) \geq 0$ para

$$\left(s^2 + \frac{c^2}{4}\eta^2 \right) \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{1}{c}s^3 + \frac{3c}{4}s\eta^2 = 0. \tag{22}$$

Se definirmos $z = s/|\eta|$, obtemos

$$0 = \frac{1}{|\eta|^2} \left(s^2 + \frac{c^2}{4}\eta^2 \right) \frac{1}{|\eta|} \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{1}{c} \frac{s^3}{|\eta|^3} + \frac{3c}{4} \frac{s\eta^2}{|\eta|^3} = \left(z^2 + \frac{c^2}{4} \right) \sqrt{\frac{z^2}{c^2} + 1} + \frac{1}{c}z^3 + \frac{3c}{4}z$$

ou seja, $(z^2 + c^2/4)\sqrt{z^2/c^2 + 1} = -((1/c)z^3 + (3c/4)z)$. Elevando ao quadrado em ambos os lados chegamos que $c^4/16 = 0$, absurdo, pois sempre temos $c \neq 0$, ou seja, não existem soluções em (22) e a terceira aproximação é bem-posta.

Em contraste com a situação acima, vamos mostrar que a condição de contorno derivada da expansão em séries de Taylor

$$\sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2\eta^2}{\omega^2} - \frac{1}{8} \frac{c^4\eta^4}{\omega^4} + \mathcal{O}\left(\frac{c^6\eta^6}{\omega^6}\right)$$

é fortemente mal-posta. Aplicando a aproximação em (12) temos que

$$0 = \left(\frac{d}{dx} - i\frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{c^2 \eta^2}{(i\omega)^2} + \frac{1}{8} \frac{c^4 \eta^4}{(i\omega)^4} \right) \right) u|_{x=0} = \left((i\omega)^3 \frac{d}{dx} - \frac{1}{c} (i\omega)^4 + \frac{c^2}{2} (i\eta)^2 (i\omega)^2 + \frac{c^4}{8} (i\eta)^4 \right) u|_{x=0},$$

e usando as correspondências $i\omega \leftrightarrow \partial/\partial t$, $i\eta \leftrightarrow \partial/\partial y$, temos a aproximação dada por

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x \partial t^3} - \frac{1}{c} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{c^4}{8} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u|_{x=0} = 0. \quad (23)$$

Para verificar que a condição (23) é bem-posta, não devem existir raízes com $\Re e(s) \geq 0$ para

$$-s^3 \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} - \frac{1}{c} s^4 - \frac{c^2}{2} \eta^2 s^2 + \frac{c^4}{8} \eta^4 = 0.$$

Dividindo por $|\eta|^4$ e fazendo $z = s/|\eta|$, obtemos

$$0 = -\frac{s^3}{|\eta|^3 |\eta|} \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} - \frac{1}{c} \frac{s^4}{|\eta|^4} - \frac{c^2}{2} \frac{\eta^2 s^2}{|\eta|^4} + \frac{c^4}{8} \frac{\eta^4}{|\eta|^4} = -z^3 \sqrt{\frac{z^2}{c^2} + 1} - \frac{1}{c} z^4 - \frac{c^2}{2} z^2 + \frac{c^4}{8}.$$

Considere z , com $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$. Para $z = 0$, a expressão acima tem valor $c^4/8$. Quando $z \rightarrow \infty$, a expressão acima tende para $-\infty$. Assim, existe uma raiz real positiva e essa condição é fortemente mal-posta. Assim, podemos observar que uma aproximação polinomial em séries de Taylor para a raiz em (12) nem sempre levará a uma condição de contorno local bem-posta. Portanto, é necessário um cuidado na escolha de aproximações locais apropriadas para a condição de contorno não-local a fim de garantir estabilidade.

3.1 CONSTRUÇÃO DAS ABCs APROXIMADAS DE ENGQUIST E MAJDA

Visto que as condições exatas obtidas inicialmente são não-locais, em [9], Engquist e Majda propuseram a seguinte seqüência de condições de contorno locais aproximadas

$$\mathcal{B}^N u = 0 \quad (24)$$

sobre a fronteira $x = a$, onde os operadores $\mathcal{B}^N = \mathcal{B}^N(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $N \geq 0$, são uma família de operadores diferenciais homogêneos definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^0 &= 2I \\ \mathcal{B}^1 &= \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \\ &\vdots \\ \mathcal{B}^{N+1} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}^N - \frac{c^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{B}^{N-1} \end{aligned} \quad (25)$$

Observação 3.1: No que segue, escolhemos o ramo da raiz quadrada bem definido para $-\pi < \arg z < \pi$, com o entendimento implícito que $\sqrt{x} = \pm i\sqrt{|x|}$, quando $x < 0$, é o limite da forma $x = \lim_{y \rightarrow 0} (x + iy)$, com $y > 0$ ou $y < 0$, respectivamente.

Considere $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, y, t) = g(y, t), & \text{em } x = 0 \\ u(x, y, t) = 0, & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

onde $g(y, t) \in L^2 \cap L^1$ é uma função arbitrária tal que $g(y, t) = 0$ para $t \leq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que g é suficientemente suave. Aplicando transformada de Laplace em t e transformada de Fourier em y , chegamos à EDO

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} = \left(\frac{s^2}{c^2} + \eta^2 \right) \hat{u}, & \text{em } \mathbb{R} \\ \hat{u}(0, \eta, s) = \hat{G}(\eta, s), & \text{em } x = 0 \end{cases} \quad (27)$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\Re(s) > 0$. Aqui, $\hat{G}(\eta, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-st - i\eta y} g(y, t) dy dt$. Resolvendo a EDO, encontramos

$$\hat{u}(x, \eta, s) = c_1 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} + c_2 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}.$$

Aplicando a condição de contorno em $x = 0$, temos que

$$c_1 + c_2 = \hat{G}(\eta, s).$$

Observe que, se $u \in L^1$, a transformada de Fourier-Laplace em $u(x, y, t)$ está bem definida. Mas isso não implica necessariamente que tenhamos $\hat{u} \in L^1$. No entanto, como estamos aplicando a transformada apenas nas variáveis y e t , temos implicitamente que $\hat{u}(x, \eta, s) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, pela interpretação física da solução. Isso implica que $c_2 = 0$. Logo, $\hat{G}(\eta, s) = c_1$, e assim

$$\hat{u}(x, \eta, s) = \hat{G}(\eta, s) e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}. \tag{28}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e de Fourier, obtemos

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} e^{st} \hat{G}(\eta, s) e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} ds \right) d\eta. \tag{29}$$

Observe que $\sqrt{s^2/c^2 + \eta^2} = \frac{\sqrt{s^2}}{c} \sqrt{1 + c^2 \eta^2 / s^2}$. Assim, pela observação (3.1), ao fazermos o limite quando $\rho \rightarrow 0$, temos que considerar dois casos: quando $\omega < 0$, temos que $\arg s \approx -\pi/2$, o que implica que $\arg s^2 = 2 \arg s \approx -\pi$. Logo $\sqrt{s^2} \rightarrow -i|\omega| = i\omega$; quando $\omega > 0$, temos que $\arg s \approx \pi/2$, o que implica que $\arg s^2 = 2 \arg s \approx \pi$. Logo $\sqrt{s^2} \rightarrow i|\omega| = i\omega$. Deste modo, quando $\rho \rightarrow 0$, temos que

$$\sqrt{\frac{(i\omega)^2}{c^2} + \eta^2} = \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}}.$$

Agora, observe que, quando $\rho \rightarrow 0$, o integrando em (29) tende a

$$e^{-\sqrt{\frac{(i\omega)^2}{c^2} + \eta^2} x + i\omega t + i\eta y} \hat{G}(i\omega, \eta),$$

e esta função é dominada por $\hat{G}(i\omega, \eta) \in L^2 \cap L^1$. Assim, considerando a observação (3.1), pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega/c)x \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} + i\omega t + i\eta y} \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta, \tag{30}$$

onde $\hat{g}(\omega, \eta) = \hat{G}(i\omega, \eta)$. Se introduzirmos o operador, o qual é não-local no espaço e no tempo, definido por

$$\mathcal{R}u \Big|_{x=a} = \int \int e^{i\omega t + i\eta y} i(\omega/c) \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} \hat{u}(a, \omega, \eta) d\omega d\eta$$

a solução u satisfaz a condição de contorno de absorção não-local em $x = a$ dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{R} \right) u \Big|_{x=a} = 0. \tag{31}$$

Para desenvolver as condições de contorno \mathcal{B}^N , para serem usadas como as condições de contorno absorventes locais bem-postas em $x = a$, usamos a expansão em frações contínuas finitas para $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Note que $\sqrt{1 - x^2} \approx 1$ quando $x \rightarrow 0$. Então escrevemos

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 + (\sqrt{1 - x^2} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{1 - x^2} - 1)(\sqrt{1 - x^2} + 1)}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Logo,

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}. \tag{32}$$

Aplicando (32) em si mesma, repetidas vezes, obtemos a expansão em frações contínuas

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}}} = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}}}} = \dots$$

Temos então a seqüência

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad f_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2}}, \quad f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2 - \frac{x^2}{2}}}, \dots$$

Genericamente,

$$f_{N+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + f_N(x)}.$$

Vemos que existem polinômios $T_N(x)$ e $S_N(x)$ tais que

$$f_N(x) = 1 + \frac{T_N(x)}{S_N(x)}. \tag{33}$$

Da equação (33) segue que

$$\frac{T_{N+1}(x) + S_{N+1}(x)}{S_{N+1}(x)} = f_{N+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{1 + f_N(x)} = \frac{(2-x^2)S_N(x) + T_N(x)}{2S_N(x) + T_N(x)}.$$

Então, podemos considerar que os polinômios em (33) satisfazem as recorrências

$$\begin{cases} T_{N+1}(x) = -x^2 S_N(x) \\ S_{N+1}(x) = 2S_N(x) + T_N(x) \end{cases} \tag{34}$$

Note que (34), mais os valores iniciais $T_1(x) = 0$, $S_1(x) = 1$, $T_2(x) = -x^2$, $S_2(x) = 2$, permitem calcular as seqüências.

Proposição 3.1: *As seqüências de polinômios acima satisfazem a recorrência*

$$\begin{cases} T_{N+1}(x) = 2T_N(x) - x^2 T_{N-1}(x) \\ S_{N+1}(x) = 2S_N(x) - x^2 S_{N-1}(x) \end{cases} \tag{35}$$

Demonstração Utilizando (34), escrevemos

$$\begin{aligned} T_{N+1}(x) &= -x^2 S_N(x) \\ 2T_N(x) &= -2x^2 S_{N-1}(x) \end{aligned}$$

Subtraindo as duas igualdades acima, obtemos

$$T_{N+1}(x) - 2T_N(x) = -x^2 (S_N(x) - 2S_{N-1}(x)) = -x^2 T_{N-1}(x).$$

Para a última igualdade da linha acima, usamos a segunda igualdade de (34). Da igualdade dos dois extremos da linha acima, segue a primeira igualdade de (35). Utilizando novamente (34), escrevemos

$$S_{N+1}(x) - 2S_N(x) = T_N(x) = -x^2 S_{N-1}(x),$$

donde segue a segunda igualdade de (35). □ ■

Lema 3.1: *Dado $\epsilon_0 > 0$, existe um $a(\epsilon_0) > 0$ tal que:*

- (i) para $x^2 \leq 1 - \epsilon_0$, $0 < a(\epsilon_0) < f_N(x) \leq 1$, $f_N(1) > 0$
- (ii) para $x^2 \leq 1 - \epsilon_0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1-x^2} - f_N(x)| = 0$
- (iii) $\sqrt{1-x^2} - f_N(x) = \mathcal{O}(x^{2N})$

Demonstração Mostraremos os três itens fazendo indução em N .

(i) Para $N = 1$, temos que $f_1(x) = 1$, para todo $x \in [-1, 1]$. Logo, dado $\epsilon_0 > 0$, para $|x| = \sqrt{1 - \epsilon_0}$, necessariamente existe um $a(\epsilon_0) > 0$ tal que $0 < a(\epsilon_0) < f_1(x) = 1$. Observe que, para $N = 2$, onde $f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, o máximo ocorre em $x = 0$, onde a função é igual a 1, logo $f_2(x) \leq 1$. Observe que o domínio de $\sqrt{1 - x^2}$ é o intervalo $[-1, 1]$, logo $f_2(1) > 0$. Nossa hipótese de indução então é que, para $N \leq k$, temos $0 < a(\epsilon_0) < f_k(x) \leq 1$, com $f_k(1) > 0$. Obviamente

$$f_{k+1}(1) = 1 - \frac{1}{1 + f_k(1)} > 0.$$

Agora, observe que $a(\epsilon_0) < f_k(x) \leq 1$ é equivalente à $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + f_k(x)} < \frac{1}{a(\epsilon_0) + 1}$. Multiplicando a desigualdade por $-x^2$, obtemos

$$1 - \frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} < f_{k+1}(x) \leq 1$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a(\epsilon_0) \leq \epsilon_0 < 1$. Assim, temos que

$$1 - \frac{x^2}{a(\epsilon_0) + 1} \geq 1 - \frac{1 - \epsilon_0}{a(\epsilon_0) + 1} = \frac{a(\epsilon_0) + \epsilon_0}{a(\epsilon_0) + 1} \geq \frac{2a(\epsilon_0)}{a(\epsilon_0) + 1} > a(\epsilon_0) > 0,$$

o que completa nossa indução.

(ii) Considere a seqüência

$$M_N = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} - f_N(x)|.$$

Queremos mostrar que $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = 0$. Para $N = 1$, temos que

$$M_1 = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |1 - \sqrt{1 - x^2}| = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} (1 - \sqrt{1 - x^2}).$$

Agora, observe que $\frac{d}{dx}(1 - \sqrt{1 - x^2}) = 0$ se e somente se $x = 0$, o qual é um ponto de mínimo. Logo, o máximo ocorre nos extremos de $\{x \in [-1, 1] / x^2 \leq 1 - \epsilon_0\}$, ou seja, $M_1 = 1 - \sqrt{1 - (1 - \epsilon_0)} = 1 - \sqrt{\epsilon_0}$. Suponhamos que o item (ii) seja válido para $N \leq k$, ou seja, nossa conjectura é de que

$$M_k = \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |f_k(x) - \sqrt{1 - x^2}| = |f_k(x) - \sqrt{1 - x^2}| \Big|_{x^2 = 1 - \epsilon_0}$$

Vamos mostrar que vale para $N = k + 1$. Observe que

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |f_{k+1}(x) - \sqrt{1 - x^2}| \\ &= \max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} \left| \frac{(f_k(x) - \sqrt{1 - x^2})(1 - \sqrt{1 - x^2})}{1 + f_k(x)} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + a(\epsilon_0)} \right) M_k M_1 \end{aligned}$$

Note que, seguindo este raciocínio,

$$M_{k+2} \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right) M_{k+1} \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right)^2 M_k$$

ou seja,

$$M_k \leq \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_0}}{1 + a(\epsilon_0)} \right)^{k-1} M_1.$$

Como $\frac{1-\sqrt{\epsilon_0}}{1+a(\epsilon_0)} < 1$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} M_{k+1} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{\epsilon_0}}{1+a(\epsilon_0)}\right)^k M_1 = 0$, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x^2 \leq 1-\epsilon_0} |f_{k+1}(x) - \sqrt{1-x^2}| = 0.$$

(iii) Considerando a expansão em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função $\sqrt{1-x^2}$, temos que, para $N = 1$

$$\sqrt{1-x^2} - f_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots - 1 = \mathcal{O}(x^2)$$

e para $N = 2$

$$\sqrt{1-x^2} - f_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathcal{O}(x^4)$$

Suponhamos que o item (iii) seja válido para $N \leq k$. Para $N = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} - f_{k+1}(x) &= \sqrt{1-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{1+f_k(x)}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{1-x^2} - f_k(x)) + f_k(x)\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)}{1+f_k(x)} \\ &= \frac{(\sqrt{1-x^2} - f_k(x))(1 - \sqrt{1-x^2})}{1+f_k(x)} \\ &= \mathcal{O}(x^{2k+2}) \end{aligned}$$

o que completa a prova. □ ■

Lema 3.2: Os polinômios T_{N+1} e S_{N+1} satisfazem

$$\begin{aligned} \text{para } N \text{ ímpar: grau } T_N(x^2) &= N - 1, \text{ grau } S_N(x^2) = N - 1, \\ \text{para } N \text{ par: grau } T_N(x^2) &= N, \text{ grau } S_N(x^2) = N - 2, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \text{para } N \text{ ímpar: } S_N(x^2) &= (-1)^{(N-1)/2} x^{N-1} + \mathcal{O}(x^{N-3}), \\ \text{para } N \text{ par: } T_N(x^2) &= (-1)^{N/2} x^N + \mathcal{O}(x^{N-2}). \end{aligned} \tag{37}$$

Demonstração Vamos provar (36) e (37) por indução em N . Para (36), com $N = 1$, temos que grau $T_1 = 0$ e grau $S_1 = 0$. Com $N = 2$, temos que grau $T_2 = 2$ e grau $S_2 = 0$. Supomos que (36) seja válida para $N \leq k - 1$. Para $N = k$ ímpar

$$\begin{aligned} \text{grau } T_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{T_{k-1}}_{\text{par}} - x^2 \underbrace{T_{k-2}}_{\text{ímpar}} \right) \\ \text{grau } S_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{S_{k-1}}_{\text{par}} - x^2 \underbrace{S_{k-2}}_{\text{ímpar}} \right), \end{aligned}$$

e como, nesse caso, grau $(2T_{k-1}) = k - 1$ e grau $(-x^2T_{k-2}) = (2) + (k - 3) = k - 1$, grau $(2S_{k-1}) = k - 3$ e grau $(-x^2S_{k-2}) = (2) + (k - 3) = k - 1$, temos que

$$\begin{aligned} \text{grau } T_k &= k - 1 \\ \text{grau } S_k &= k - 1. \end{aligned}$$

Para $N = k$ par

$$\begin{aligned} \text{grau } T_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{T_{k-1}}_{\text{ímpar}} - x^2 \underbrace{T_{k-2}}_{\text{par}} \right) \\ \text{grau } S_k &= \text{grau} \left(2 \underbrace{S_{k-1}}_{\text{ímpar}} - x^2 \underbrace{S_{k-2}}_{\text{par}} \right), \end{aligned}$$

e como, nesse caso, grau $(2T_{k-1}) = k-2$ e grau $(-x^2T_{k-2}) = (2)+(k-2) = k$, grau $(2S_{k-1}) = k-2$ e grau $(-x^2S_{k-2}) = (2) + (k-4) = k-2$, temos que

$$\begin{aligned} \text{grau } T_k &= k \\ \text{grau } S_k &= k-2. \end{aligned}$$

Para (37), com $N = 3$, temos $S_3(x^2) = 4 - x^2 = (-1)^1x^2 + \mathcal{O}(x^0)$, e com $N = 4$, temos $T_4(x^2) = x^4 - 4x^2 = (-1)^2x^4 + \mathcal{O}(x^2)$. Supomos que (37) seja válida para $N \leq k-1$. Assim, para $N = k$ ímpar

$$\begin{aligned} S_k(x^2) &= 2 \underbrace{S_{k-1}}_{\text{par}} - x^2 \underbrace{S_{k-2}}_{\text{ímpar}} \\ &= 2\mathcal{O}(x^{k-3}) - x^2 \left((-1)^{\frac{(k-2)-1}{2}} x^{(k-2)-1} + \mathcal{O}(x^{(k-2)-3}) \right) \\ &= (-1)^{\frac{k-1}{2}} x^{k-1} + \mathcal{O}(x^{k-3}), \end{aligned}$$

e para $N = k$ par

$$\begin{aligned} T_k(x^2) &= 2 \underbrace{T_{k-1}}_{\text{ímpar}} - x^2 \underbrace{T_{k-2}}_{\text{par}} \\ &= 2\mathcal{O}(x^{k-2}) - x^2 \left((-1)^{\frac{k-2}{2}} x^{k-2} + \mathcal{O}(x^{(k-2)-2}) \right) \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}} x^k + \mathcal{O}(x^{k-2}), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □ ■

Para derivar as condições de contorno \mathcal{B}^N , façamos a transformada de Fourier em (31) e assim podemos reescrever a condição de contorno como

$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \hat{u} \Big|_{x=a}.$$

Observe que $\mathcal{R}u|_{x=a}$ é a transformada de Fourier inversa de $i(\omega/c)\sqrt{1 - (c^2\eta^2/\omega^2)}\hat{u}(a, \omega, \eta)$. Do lema (3.1), segue que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \hat{u} \Big|_{x=a} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} f_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) \hat{u} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \mathcal{O} \left(\left| \frac{c\eta}{\omega} \right|^{2N} \right) \hat{u} \Big|_{x=a}.$$

Usando (33), a condição de contorno absorvente aproximada é da forma

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(1 + \frac{T_N(\frac{c\eta}{\omega})}{S_N(\frac{c\eta}{\omega})} \right) \hat{u} \Big|_{x=a} = 0, \tag{38}$$

a qual é equivalente a

$$S_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \Big|_{x=a} + \frac{i\omega}{c} \left(S_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) + T_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) \right) \hat{u} \Big|_{x=a} = 0. \tag{39}$$

Observe pelo lema (3.2) que grau $S_N(c\eta/\omega) \leq N-1$ e grau $T_N(c\eta/\omega) \leq N$. Como cada condição de contorno absorvente é definida por um operador de símbolo polinomial em ω e η , podemos multiplicar (39) por $(i\omega)^{N-1}$,

$$\left[(i\omega)^{N-1} S_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^N}{c} \left(S_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) + T_N \left(\frac{c\eta}{\omega} \right) \right) \right] \hat{u} \Big|_{x=a} = 0.$$

Deste modo, podemos definir o operador $\mathcal{B}^N = \mathcal{B}^N\left(i\omega, i\eta, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ da forma

$$\mathcal{B}^N = \frac{1}{2^N} \left[(i\omega)^{N-1} S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^N}{c} \left(S_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_N\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \right) \right], \quad (40)$$

onde (40) é um polinômio de grau no máximo N em (ω, η) . Quando referenciarmos (40), é importante também observar (38). Se usarmos a correspondência $i\omega \leftrightarrow \partial/\partial t$, $i\eta \leftrightarrow \partial/\partial y$, para definir $\mathcal{B}^N(\partial/\partial t, \partial/\partial y, \partial/\partial x)$, então $\mathcal{B}^N(\partial/\partial t, \partial/\partial y, \partial/\partial x)$ é a condição de contorno local de Padé em $x = a$. Usando (40) e as identidades do lema (3.2) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^N &= \frac{(i\omega)^{N-1}}{2^N} \left(2S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2} S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \frac{(i\omega)^N}{2^N c} \left(2S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2} S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + 2T_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2} T_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \right) \\ &= \frac{i\omega}{2^{N-1}} \left((i\omega)^{N-2} S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^{N-1}}{c} \left(S_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_{N-1}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \right) \right) \\ &+ \frac{1}{2^{N-2}} \frac{c^2\eta^2}{4} \left((i\omega)^{N-3} S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(i\omega)^{N-2}}{c} \left(S_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) + T_{N-2}\left(\frac{c\eta}{\omega}\right) \right) \right), \end{aligned}$$

e por (40), chegamos à

$$\mathcal{B}^N = i\omega \mathcal{B}^{N-1} + \frac{c^2\eta^2}{4} \mathcal{B}^{N-2}, \quad (41)$$

que correspondem às condições em (25).

Observação 3.2: Para soluções suaves (próximas da fronteira em $x = a$) da equação da onda, a condição de contorno (24) pode ser reescrita em termos das derivadas de t e y somente. De fato, \mathcal{B}^N é par com respeito à variável x e, graças a equação da onda, a derivada de segunda ordem com respeito a x pode ser trocada por derivadas de t e y , ou seja, $\partial^2/\partial x^2 = (1/c^2)\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial y^2$. Em consequência, podemos mostrar que \mathcal{B}^N escreve-se formalmente como

$$\mathcal{B}^N = \frac{1}{2^{N-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N, \quad (42)$$

e, por conseguinte,

$$\mathcal{B}^N u = 0 \iff \tilde{\mathcal{B}}^N u = 0, \quad \tilde{\mathcal{B}}^N = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N. \quad (43)$$

A demonstração é imediata por indução em N : é evidente que \mathcal{B}^0 e \mathcal{B}^1 satisfazem (42). Se \mathcal{B}^{N-1} e \mathcal{B}^N satisfazem (42), então, pela definição (25) de \mathcal{B}^{N+1} , temos que

$$\mathcal{B}^{N+1} = \frac{1}{2^{N-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N - \frac{1}{2^N} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^{N-1}$$

Observe que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

logo

$$\mathcal{B}^{N+1} = \frac{1}{2^{N-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^N \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right).$$

Como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

segue que

$$\mathcal{B}^{N+1} = \frac{1}{2^N} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^{N+1}.$$

3.2 ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA

Agora, considere $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisfazendo o problema (26),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0, y, t) = g(y, t), & \text{em } x = 0, \\ u(x, y, t) = 0, & \text{para } t \leq 0. \end{cases}$$

Suponha que δ , um erro aceitável, e $a_0 > 0$ são dados. Considere o domínio $\Omega_a = \{x / 0 < x < a\}$. O objetivo é encontrar uma condição de contorno, \mathcal{B}^N , sobre a fronteira $x = a$, com $a \geq a_0$ tão próximo de a_0 quanto possível, de modo que se $u_N : \overline{\Omega}_a \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_N = 0, & \text{em } \Omega_a \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u_N(0, y, t) = g(y, t), & \text{em } x = 0 \\ \mathcal{B}^N u_N = 0, & \text{em } x = a \\ u_N(x, y, t) = 0, & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (44)$$

então

$$\left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{a_0} |u - u_N|^2 dx dy dt \right)^{1/2} < \delta \quad (45)$$

para tempos T prolongados (na prática, para longos períodos de simulação), de modo que o tempo de movimento das ondas pudesse produzir M reflexões na fronteira artificial em $x = a$, onde M é um inteiro positivo dado. Além disso, a condição de contorno \mathcal{B}^N deve satisfazer (15). Obviamente, a fim de que (45) possa ser satisfeita, a condição de contorno \mathcal{B}^N deve também minimizar a amplitude das ondas refletidas. Considerando o problema (44), enunciemos agora o teorema central de [9]:

Teorema 3.1: (a) Toda \mathcal{B}^N é uma condição de contorno local fortemente bem-posta para a equação da onda em (1).

(b) Dados $\delta > 0$, um inteiro arbitrariamente grande $M > 0$, e uma função forçante arbitrária $g(y, t) \in L^2 \cap L^1$ tal que $g(y, t) = 0$ para $t \leq 0$, existem $N_0 = N_0(\delta, M)$ e $a_0 = a_0(\delta, M)$ tal que se, para todo $N \geq N_0$ e $a \geq a_0$, temos que u_N resolve o problema de valor de contorno em (44), então

$$\left(\int_0^T \int_0^{a_0} \int_{\mathbb{R}} |u - u_N|^2 dy dx dt \right)^{1/2} < \delta \quad (46)$$

para todo tempo T com $0 \leq T \leq 2aM$.

Observemos que a parte (b) do teorema é apenas um resultado de convergência e não fornece uma estimativa de erro. Os parâmetros N da ordem da condição de contorno e a da distância do suporte dos dados iniciais são muito importantes. Na demonstração desse teorema requer-se que a seja suficientemente grande. Isso mostra que os modos evanescentes não são corretamente tratados pelas ABCs de Engquist e Majda, ou seja, é necessário que o suporte dos dados iniciais esteja suficientemente longe do contorno $x = a$ a fim de aniquilar a amplitude dos modos evanescentes. Para a demonstração do Teorema (3.1), vamos precisar de alguns resultados preliminares.

Definição 3.2: Um problema de valor inicial escalar

$$\begin{aligned} \left(A_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) u &= 0, \quad x > 0, \\ u(0, y, t) &= u_0(y, t) \end{aligned}$$

com $A_1(\omega, \eta)$, $A_2(\omega, \eta)$ polinômios homogêneos de graus $N - 1$, N , respectivamente, é (fracamente) bem posto como um operador evolutivo em x na direção $x > 0$, se

$$A_1(i\omega, i\eta)K + A_2(i\omega, i\eta) = 0, \quad (47)$$

para $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 > 0$, implica que $\text{Re}(K) \leq 0$. □

Proposição 3.2: Assuma que $\mathcal{B}^N(i\omega, i\eta, K)$ é um polinômio homogêneo de grau N da forma

$$\frac{\partial^N}{\partial t^N} + P_N^1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} + P_N^2\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde $P_N^1(i\omega, i\eta)$, $P_N^2(i\omega, i\eta)$ são polinômios homogêneos de grau $N - 1$. Assuma também que \mathcal{B}^N , como um operador evolutivo em x com direção $x > 0$, é bem-posto. Então, dados η, K com $\text{Re}(K) > 0$, o número de raízes $\tau_j(\eta, K)$ satisfazendo $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K) = 0$ e $\text{Re}(\tau_j) > 0$ é uma constante independente de η e K com $\text{Re}(K) > 0$. Em particular, quando \mathcal{B}^N é dado pela condição de contorno de Padé, o número de raízes é zero, independentemente de η e K , com $\text{Re}(K) > 0$.

Demonstração Para (η, K) fixos, $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K)$ é um polinômio de grau N em τ cujos coeficientes dependem continuamente de $(i\eta, K)$. Conseqüentemente, as raízes $\tau_j, j = 1, \dots, N$, de $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K)$ são funções contínuas de $(i\eta, K)$. Assim, por contraposição, se o número de raízes τ_j com $\text{Re}(\tau_j) > 0$ é não constante, então existe um η_0 e um K_0 com $\text{Re}(K_0) > 0$ e uma raiz puramente imaginária $\tau = i\omega_0$ satisfazendo $\mathcal{B}^N(i\omega_0, i\eta_0, K_0) = 0$. Ou seja, o número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K)$ é fixo, N , no entanto o número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau_j, i\eta, K)$ com $\text{Re}(\tau_j) > 0$, num dado instante, é m , e para $\text{Re}(\tau_j) < 0$ é $N - m$; num outro instante, para $\text{Re}(\tau_j) > 0$ é $m - 1$, e para $\text{Re}(\tau_j) < 0$ é $N - (m - 1)$. Logo, em algum instante, para algum η_0 e K_0 com $\text{Re}(K_0) > 0$, de fato haverá uma raiz puramente imaginária $\tau = i\omega_0$ satisfazendo $\mathcal{B}^N(i\omega_0, i\eta_0, K_0) = 0$. Mas isso contradiz o fato que \mathcal{B}^N é um operador evolutivo bem-posto com direção $x > 0$, pois para isso teríamos que ter $\text{Re}(K) \leq 0$. Logo, (47) é satisfeita. Aplicando a primeira parte dessa proposição para as condições de contorno de Padé, precisamos somente contar as raízes τ com $\text{Re}(\tau) > 0$ quando $i\eta \equiv 0$, pois o número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K)$ para todo η e K com $\text{Re}(K) > 0$ deve ser igual ao número de raízes de $\mathcal{B}^N(\tau, 0, K)$, com $\text{Re}(K) > 0$. Mas, por (33), $f_N(0) = 1$, e, de acordo com (40) e (47), $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K)$ pode ser escrito como

$$\frac{1}{2^N} \tau^{N-1} \left[K + \frac{\tau}{c} f_N\left(c \frac{i\eta}{\tau}\right) \right],$$

e assim satisfaz

$$\left(K + \frac{\tau}{c} \right) \tau^{N-1} = 0,$$

o que implica que $\tau^{N-1} = 0$ ou $\tau = -Kc$. Desde que $\text{Re}(\tau) > 0$ e $\text{Re}(K) > 0$, o número de raízes é zero, o que completa a prova. □ ■

Note que, dada uma combinação linear

$$\varphi = c_1 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y},$$

temos que

$$0 = \mathcal{B}^N \varphi = c_1 \mathcal{B}^N(e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}) + c_2 \mathcal{B}^N(e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y}),$$

o que implica que

$$c_1 = - \frac{\mathcal{B}^N(e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y})}{\mathcal{B}^N(e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x + st + i\eta y})} c_2.$$

Mas $\mathcal{B}^N(s, i\omega, \partial/\partial x)$ pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2^N} s^{N-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{s}{c} f_N\left(c \frac{i\eta}{s}\right) \right],$$

logo

$$c_1 = - \frac{\left(-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N\left(\frac{c i \eta}{s}\right) \right)}{\left(\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N\left(\frac{c i \eta}{s}\right) \right)} c_2.$$

Assim, definimos o coeficiente de reflexão $R_N(s, i\eta)$ dado por

$$R_N(s, i\eta) = \frac{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N\left(\frac{c i \eta}{s}\right)}{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} + \frac{s}{c} f_N\left(\frac{c i \eta}{s}\right)} = \frac{-f\left(\frac{c i \eta}{s}\right) + f_N\left(\frac{c i \eta}{s}\right)}{f\left(\frac{c i \eta}{s}\right) + f_N\left(\frac{c i \eta}{s}\right)}. \tag{48}$$

Observação 3.3: Segue de (48) que $R_N(s, i\eta)$ é holomorfo em s para $\Re(s) > 0$, pois não há pólos, nem singularidades essenciais, no máximo singularidades removíveis. Para $\Re(s) = 0$, podemos escrever (48) como

$$R_N(i\omega, i\eta) = \frac{-\sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(\frac{c i \eta}{i\omega}\right)}{\sqrt{1 - \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(\frac{c i \eta}{i\omega}\right)}, \quad \omega \neq 0. \tag{49}$$

Para $c^2 \eta^2 / \omega^2 \geq 1$, R_N tem a forma $R_N = (-ia + b)/(ia + b)$ o que implica que $|R_N| = |\bar{z}|/|z| = 1$, isto é, $|R_N(i\omega, i\eta)| = 1$, enquanto para $c^2 \eta^2 / \omega^2 < 1$, R_N tem a forma $R_N = (-a + b)/(a + b)$ com $a, b > 0$; assim $|R_N(i\omega, i\eta)| < 1$. Pelo Lema (3.1), $|\rho R_N(i\omega + \rho, i\eta)| < M$; assim segue do princípio do máximo que

$$|R_N(s, i\eta)| \leq 1 \quad \Re(s) \geq 0. \tag{50}$$

Observe que a equação da onda (4) resulta na relação de dispersão (6) que pode ser reescrita como $1 = (c\xi/\omega)^2 + (c\eta/\omega)^2$, ou ainda, $(c\xi/\omega)^2 = 1 - (c\eta/\omega)^2$. Se $c^2 \eta^2 / \omega^2 \approx 1$, então temos que $\xi \approx 0$, ou seja, a incidência é tangencial, e além disso, $\mathbf{v}_g \approx (0, \pm 1)$. Se $c^2 \eta^2 / \omega^2 < 1$, teríamos que $c^2 \xi^2 / \omega^2 > 0$, o que implicaria que $\xi \in \mathbb{R}$. Logo as soluções seriam senóides e/ou cossenóides da forma $Ae^{i\xi x} + Be^{-i\xi x}$, ou seja, temos modos propagativos. Se $c^2 \eta^2 / \omega^2 > 1$, então $c^2 \xi^2 / \omega^2 < 0$, o que implica que ξ é puramente imaginário. Logo a solução seria da forma $Ae^{|\xi|x} + Be^{-|\xi|x}$. No entanto, a solução exponencial $e^{|\xi|x}$ não é uma solução fisicamente aceitável, e portanto temos soluções com decaimento exponencial em x , ou seja, temos modos evanescentes. Assim, definimos, para todo $\epsilon_0 > 0$, as regiões

$$G_1 = \left\{ (\omega, \eta) \mid 1 - \epsilon_0 \leq \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} \leq 1 + \epsilon_0 \text{ ou } |\omega|^2 + |c\eta|^2 < \epsilon_0 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ (\omega, \eta) \mid \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} < 1 - \epsilon_0, |\omega|^2 + |c\eta|^2 > \epsilon_0 \right\}$$

$$G_3 = \left\{ (\omega, \eta) \mid \frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} > 1 + \epsilon_0, |\omega|^2 + |c\eta|^2 > \epsilon_0 \right\}$$

onde G_1 representa a região dos modos tangenciais, G_2 representa a região propagativa, e G_3 representa a região dos modos evanescentes. Além disso, considere

$$F_j = \left(\int \int_{G_j} |\hat{g}(\omega, \eta)|^2 d\omega d\eta \right)^{1/2} \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

Uma vez que o domínio do problema (44) situa-se à esquerda do contorno artificial, convém interpretar o critério de Kreiss da seguinte forma [9]:

Definição 3.3: A condição de contorno \mathcal{B}^N , sobre a fronteira $x = 0$, juntamente com a equação da onda em (1), agindo sobre funções definidas em $x \leq 0$, $t \geq 0$, é fortemente bem-posta desde que não existam soluções da forma

$$\varphi(s, \eta) = e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}x + st + i\eta y} \quad (51)$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\text{Re}(s) \geq 0$, satisfazendo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) \varphi(s, \eta) = 0 \quad \text{em } x < 0, \quad (52)$$

$$\mathcal{B}^N \varphi(s, \eta)|_{x=0} = 0.$$

Além disso, para $|\frac{s}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ e $\text{Re}(s) \geq 0$, deve existir $c_0 > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(\varphi(s, \eta))| \geq c_0. \quad (53)$$

3.3 DEMONSTRAÇÃO DA PARTE (a) DO TEOREMA (3.1)

Usando as definições (3.3) e (3.2), começaremos por provar que

$$\mathcal{B}_N \text{ é um operador evolutivo (fracamente) bem-posto para } x > 0. \quad (54)$$

Quando $\omega \neq 0$, (40) e (47) implicam que $K + \frac{i\omega}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) = 0$ e, como f_N tem coeficientes reais, temos que

$$\text{Re}(K) + i\text{Im} \left(K + \frac{\omega}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{i\omega} \right) \right) = 0,$$

o que implica que $\text{Re}(K) = 0$. Por outro lado, quando $\omega = 0$, segue do Lema (3.2) e de (40) que

$$\begin{aligned} (-1)^{(N-1)/2} 2^{-N} c^{N-1} (i\eta)^{N-1} K &= 0, \quad \text{se } N \text{ é ímpar} \\ (-1)^{N/2} 2^{-N} c^{N-1} (i\eta)^N &= 0, \quad \text{se } N \text{ é par.} \end{aligned} \quad (55)$$

De fato, para N ímpar, do Lema (3.2) e de (40), segue que

$$\begin{aligned} 2^N \mathcal{B}^N(i\omega, i\eta, K) &\equiv (i\omega)^{N-1} \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-1} \frac{(i\eta)^{N-1}}{(i\omega)^{N-1}} + \mathcal{O} \left(c^{N-3} \frac{(i\eta)^{N-3}}{(i\omega)^{N-3}} \right) \right) K \\ &+ \frac{(i\omega)^N}{c} \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-1} \frac{(i\eta)^{N-1}}{(i\omega)^{N-1}} + \mathcal{O} \left(c^{N-3} \frac{(i\eta)^{N-3}}{(i\omega)^{N-3}} \right) \right) \\ &+ \frac{(i\omega)^N}{c} \mathcal{O} \left(c^{N-1} \frac{(i\eta)^{N-1}}{(i\omega)^{N-1}} \right) \\ &\equiv \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-1} (i\eta)^{N-1} + \mathcal{O} \left(c^{N-3} (i\omega)^2 (i\eta)^{N-3} \right) \right) K \\ &+ \left((-1)^{(N-1)/2} c^{N-2} (i\eta)^{N-1} (i\omega) + \mathcal{O} \left(c^{N-4} (i\eta)^{N-3} (i\omega)^3 \right) \right) \\ &+ \mathcal{O} \left(c^{N-2} (i\eta)^{N-1} (i\omega) \right) \end{aligned}$$

logo, para $\omega = 0$, temos a primeira parte de (55). Agora, para N par, segue do Lema (3.2) e de (40) que

$$\begin{aligned} 2^N \mathcal{B}^N(i\omega, i\eta, K) &\equiv (i\omega)^{N-1} \left(\mathcal{O} \left(c^{N-2} \frac{(i\eta)^{N-2}}{(i\omega)^{N-2}} \right) \right) K + \frac{(i\omega)^N}{c} \left(\mathcal{O} \left(c^{N-2} \frac{(i\eta)^{N-2}}{(i\omega)^{N-2}} \right) \right) \\ &+ \frac{(i\omega)^N}{c} \left((-1)^{N/2} c^N \frac{(i\eta)^N}{(i\omega)^N} + \mathcal{O} \left(c^{N-2} \frac{(i\eta)^{N-2}}{(i\omega)^{N-2}} \right) \right) \\ &\equiv \left(\mathcal{O} \left(c^{N-2} (i\omega) (i\eta)^{N-2} \right) \right) K + \left(\mathcal{O} \left(c^{N-3} (i\omega)^2 (i\eta)^{N-2} \right) \right) \\ &+ \left((-1)^{N/2} c^{N-1} (i\eta)^N + \mathcal{O} \left(c^{N-3} (i\omega)^2 (i\eta)^{N-2} \right) \right), \end{aligned}$$

logo, para $\omega = 0$, temos a segunda parte de (55). Assim, no primeiro caso, $K = 0$, enquanto no segundo, não existe raiz de K . Isso verifica a afirmação em (54).

Agora, suponhamos que $\varphi(s, \eta) = e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}x + st + i\eta y}$, com $\Re e(s) > 0$, satisfaz (52). Tomemos $K = \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}$ e $\tau = s$. Naturalmente temos $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}))\varphi(s, \eta) = (s^2 - c^2((\frac{s^2}{c^2} + \eta^2) - \eta^2))\varphi = 0$. Por (40), temos que $\mathcal{B}^N\varphi = 0$ se, e somente se,

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{s}{c}f_N\left(c\frac{i\eta}{s}\right)\right)\varphi = \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}\varphi + \left(\frac{s}{c}f_N\left(c\frac{i\eta}{s}\right)\right)\varphi = \left(K + \frac{\tau}{c}f_N\left(c\frac{i\eta}{\tau}\right)\right)\varphi.$$

Assim, (τ, K) é raiz de $\mathcal{B}^N(\tau, i\eta, K) = 0$ com $\Re e(K) > 0$ e $\Re e(\tau) > 0$, e isso contradiz a última sentença da proposição (3.2). Logo, (52) é satisfeita para $\Re e(s) > 0$. Observe que $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ é compacto, e $|\mathcal{B}^N\varphi(\omega, \eta)|_{x=0}$ é contínua, logo assume máximo e mínimo em $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$. Assim,

$$|\mathcal{B}^N\varphi(\omega, \eta)|_{x=0} \geq \min_{|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1} |\mathcal{B}^N\varphi(\omega, \eta)|_{x=0}.$$

Desse modo, para verificar (53) por compacidade, precisamos somente verificar que, para $s = i\omega$ fixo, com $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$,

$$\left| (i\omega)^N S_N\left(c\frac{i\eta}{i\omega}\right) \left(1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}\right)^{1/2} + \frac{(i\omega)^N}{c} \left(S_N\left(c\frac{i\eta}{i\omega}\right) + T_N\left(c\frac{i\eta}{i\omega}\right)\right) \right| \neq 0, \tag{56}$$

pois isso acontecerá se, e somente se, $\min_{|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1} |\mathcal{B}^N\varphi(\omega, \eta)| > 0$. Para $\omega \neq 0$, a condição em (56) é equivalente a

$$\left| \left(1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{c}f_N\left(c\frac{i\eta}{i\omega}\right) \right| > 0. \tag{57}$$

Para $c^2\eta^2/\omega^2 \geq 1$, o termo $(1 - c^2\eta^2/\omega^2)^{1/2}$ é puramente imaginário, logo (57) é satisfeita. Se $c^2\eta^2/\omega^2 = 1$, o termo $(1 - c^2\eta^2/\omega^2)^{1/2}$ desaparece, e como temos que f_N é real com $f_N(1) \neq 0$, (57) tem módulo positivo. Para $c^2\eta^2/\omega^2 < 1$, temos que $(1 - c^2\eta^2/\omega^2)^{1/2} > 0$, e pelo Lema (3.1), $0 < f_N \leq 1$, o que satisfaz (57). Quando $\omega = 0$, observe que $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ implica que $\eta \neq 0$. Assim, usando ambas as expressões em (55), aplicando a primeira com $K = \sqrt{\eta^2}$, temos que $|\mathcal{B}^N\varphi(0, \eta)| = 2^{-N}c^{N-1}|\eta|^N > 0$. Logo (53) é satisfeita para $\Re e(s) = 0$.

Agora note que, para $\Re e(s) = 0$ temos que $|\mathcal{B}^N\varphi(\omega, \eta)|_{x=0} \geq c_0$ em $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$, ou seja, $|\mathcal{B}^N\varphi(\omega, \eta)|_{x=0} \neq 0$ para algum (s, η) . Assim, (51) não é solução de (52) para todo (s, η) com $\Re e(s) = 0$. Note ainda que, por contraposição, se existem soluções da forma (51) satisfazendo (52) para todo (s, η) com $\Re e(s) > 0$, então $\mathcal{B}^N\varphi(s, \eta)$ não satisfaz (53) para $|\frac{\omega}{c}|^2 + |\eta|^2 = 1$ com $\Re e(s) > 0$. Assim, completamos a prova da parte (a) do teorema. \square

3.4 DEMONSTRAÇÃO DA PARTE (b) DO TEOREMA (3.1)

Associado com a condição de contorno \mathcal{B}^N e a exponencial, com $\Re e(s) \geq 0$, dada por

$$e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}x + st + i\eta y}$$

está o coeficiente de reflexão $R_N(s, i\eta)$ definido em (48). Sem perda de generalidade, podemos assumir que g é suficientemente suave. Usando transformada de Fourier-Laplace em (44), chegamos ao problema

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}_N}{dx^2} - \left(\frac{s^2}{c^2} + \eta^2\right)\hat{u}_N = 0, & \text{em } \Omega_a \\ \hat{u}_N(0, \eta, s) = \hat{G}(\eta, s), & \text{em } x = 0 \\ \mathcal{B}^N\hat{u}_N|_{x=a} = 0, & \text{em } x = a, \end{cases} \tag{58}$$

onde $s = \rho + i\omega$, com $\Re(s) > 0$. Aqui, $\hat{G}(\eta, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-st - i\eta y} g(y, t) dy dt$. Resolvendo a EDO, temos que

$$\hat{u}_N(x, \eta, s) = c_1 e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}. \quad (59)$$

Aplicando a primeira condição de contorno, temos que $c_1 + c_2 = \hat{G}(\eta, s)$ e assim

$$\hat{u}_N(x, \eta, s) = (\hat{G}(\eta, s) - c_2) e^{\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2} x}. \quad (60)$$

Observe que a segunda condição de contorno pode ser reescrita como

$$\mathcal{B}^N \hat{u}_N|_{x=a} = \frac{\partial \hat{u}_N}{\partial x} \Big|_{x=a} + \hat{u}_N \Big|_{x=a} \frac{s}{c} f_N \left(c \frac{i\eta}{s} \right).$$

Assim, denotando $\hat{G} = \hat{G}(\eta, s)$, $f_N = f_N(c i \eta / s)$, $\tilde{s} = s/c$ e $(\tilde{s}^2 + \eta^2) = \lambda$, aplicando a segunda condição de contorno em (60), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\hat{G} - c_2) \sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} + (\hat{G} - c_2) e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N + c_2 e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N \\ &= \hat{G} (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) + c_2 (-\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N + e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) \end{aligned}$$

o que implica que

$$c_2 (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N) = \hat{G} (\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N)$$

ou ainda

$$c_2 = \frac{\hat{G}}{1 + \frac{\sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}}.$$

Observe que

$$1 + \frac{\sqrt{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}} - e^{-a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} e^{a\sqrt{\lambda}} + e^{a\sqrt{\lambda}} \tilde{s} f_N} = 1 + \frac{e^{-a\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda} - \tilde{s} f_N)}{e^{a\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda} + \tilde{s} f_N)} = 1 - \left(\frac{-\sqrt{\lambda} + \tilde{s} f_N}{\sqrt{\lambda} + \tilde{s} f_N} \right) e^{-2a\sqrt{\lambda}}.$$

Pela definição de $R_N = R_N(i\eta, s)$, em (48), temos que

$$c_2 = \frac{\hat{G}}{1 - R_N e^{-2a\sqrt{\lambda}}} = \hat{G} (1 - R_N e^{-2a\sqrt{\lambda}})^{-1}.$$

Expandindo o último termo numa série binomial temos

$$c_2 = \hat{G} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}} \right).$$

Logo

$$c_1 = \hat{G} - c_2 = -\hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}}.$$

Substituindo c_1 e c_2 em (59) temos

$$\begin{aligned} \hat{u}_N(x, \eta, s) &= -\hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}} e^{x\sqrt{\lambda}} + \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} + \hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-2aj\sqrt{\lambda}} e^{-x\sqrt{\lambda}} \\ &= \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\hat{G} (-1)^{j+1} R_N^j e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}} + \hat{G} (-1)^{j+1} R_N^j e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}} \right) \\ &= \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} + \hat{G} \sum_{j=1}^{\infty} \left((-1)^j R_N^j e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}} + (-1)^{j+1} R_N^j e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Aplicando a inversa de Fourier-Laplace obtemos

$$\begin{aligned}
 u_N(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iny} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{st} \hat{G} e^{-x\sqrt{\lambda}} ds \right) d\eta \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{iny} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{st} e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}} (-1)^j R_N^j \hat{G} ds \right) d\eta \right. \\
 &\left. + \int_{\mathbb{R}} e^{iny} \left(\frac{1}{i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{st} e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}} (-1)^{j+1} R_N^j \hat{G} ds \right) d\eta \right] \tag{61}
 \end{aligned}$$

para todo $\rho > 0$. Agora, observe que, quando $\rho \rightarrow 0$, o limite de ambos os integrandos das três parcelas da soma acima em (61) são dominados pela função $\hat{G}(i\omega, \eta) \in L^2 \cap L^1$. Assim, considerando a observação (3.1), pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned}
 u_N(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x\sqrt{\lambda}+i\omega t+iny} \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-2aj)\sqrt{\lambda}+i\omega t+iny} (-1)^j R_N^j \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \right. \\
 &\left. + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+2aj)\sqrt{\lambda}+i\omega t+iny} (-1)^{j+1} R_N^j \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \right] \tag{62}
 \end{aligned}$$

onde $\hat{g}(\omega, \eta) = \hat{G}(i\omega, \eta)$. Assim, fazendo $\rho \rightarrow 0$, observando (30), temos que a solução u_N de (44) é dada por

$$u_N(x, y, t) = u(x, y, t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_N^j(x, y, t), \tag{63}$$

onde

$$\begin{aligned}
 u_N^j(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega t+iny} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \\
 &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega t+iny} (-1)^{j+1} R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta.
 \end{aligned}$$

Além disso, segue de (50) e do teorema de Paley-Wiener [41] que, dado T com $T \leq 2aM$, $u_N^j(x, y, t) \equiv 0$ para $t \leq T$ e $j > M$. De fato, defina

$$\begin{aligned}
 \varphi_N^j(x, y, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega(\tau+T)+iny} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta \\
 &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}+i\omega(\tau+T)+iny} (-1)^{j+1} R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta) d\omega d\eta,
 \end{aligned}$$

onde $\tau = t - T$. Observe que $\varphi_N^j(x, y, \tau) = u_N^j(x, y, t - T)$. Note que, como $g(y, t) \in L^2 \cap L^1$, temos que $\hat{g}(i\eta, s) \in H^2(0)$ (Veja [41], pg. 163). Da observação (3.1), segue que $e^{(\pm x - 2aj)\sqrt{\eta^2 + \frac{s^2}{c^2}}}$ é holomorfa para $\text{Re}(s) > 0$. Da observação (3.3), segue que $R_N(i\eta, s)$ é holomorfa para $\text{Re}(s) > 0$. Assim, temos que $\hat{\varphi}_N^j$ é holomorfa para $\text{Re}(s) > 0$. Como $\text{Re}(\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}) > \text{Re}(s) > 0$, temos

$$|e^{(x-2aj)\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}} e^{sT}| < |e^{((x-2aj)+T)s}|. \tag{64}$$

Como $0 < x \leq a$, temos que $(x - 2aj) + T \leq a(1 - 2j) + T \leq a(1 - 2j) + 2Ma$. Assim, a expressão (64) ficará menor que 1 somente se $j > M$. Analogamente, $|e^{-(x+2aj)\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + \eta^2}} e^{sT}| < 1$ somente se $j > M$. Logo, por (50), temos que

$$\begin{aligned}
 &|e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 + \frac{s^2}{c^2}}+sT} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta)| \\
 &+ |e^{-(x+2aj)\sqrt{\eta^2 + \frac{s^2}{c^2}}+sT} (-1)^j R_N^j(i\omega, i\eta) \hat{g}(\omega, \eta)| < 2|\hat{g}(\omega, \eta)|
 \end{aligned}$$

para $j > M$, e deste modo, temos que $\hat{\varphi}_N^j \in L^2$. Assim, temos que $\hat{\varphi}_N^j \in H^2(0)$ (Veja [41], pg. 163). Logo, pelo teorema de Paley-Wiener, temos que $\varphi_N^j(x, y, \tau)$ se anula para $\tau < 0$. Isso implica que $w_N^j(x, y, t - T)$ se anula para $t - T < 0$, isto é, para $t < T$.

Agora precisamos mostrar que

$$\sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} < \delta. \tag{65}$$

Note que, por (63),

$$\hat{u}_N^j = e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^j R_N^j \hat{g} + e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{j+1} R_N^j \hat{g}$$

e portanto

$$\begin{aligned} (\hat{u}_N^j)^2 &= \left(e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^j + e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{j+1} \right)^2 (R_N^j \hat{g})^2 \\ &= \left(e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{2j} + e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{2j+2} \right. \\ &\quad \left. + e^{-4aji(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} (-1)^{2j+1} \right) (R_N^j \hat{g})^2 \\ &= \left(e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} + e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} - e^{-4aji(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} \right) (R_N^j \hat{g})^2 \\ &\leq \left(e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} + e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} \right) (R_N^j \hat{g})^2 \end{aligned}$$

e por conseqüência

$$\begin{aligned} |\hat{u}_N^j|^2 &\leq \left| e^{2(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^{2j} \hat{g}^2 \right| + \left| e^{-2(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^{2j} \hat{g}^2 \right| \\ &= \left| e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^j \hat{g} \right|^2 + \left| e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} R_N^j \hat{g} \right|^2 \end{aligned} \tag{66}$$

Para fazer a estimativa sobre a região G_1 , considere (50), e observe que se $1 - c^2\eta^2/\omega^2 \geq 0$, temos que $(x - 2aj)(\omega/c)\sqrt{1 - c^2\eta^2/\omega^2} \in \mathbb{R}$, e portanto $|e^{i[(x-2aj)(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}]}| = 1$. Se $1 - c^2\eta^2/\omega^2 < 0$, tomemos o ramo de $\sqrt{\cdot}$ tal que $\sqrt{1 - c^2\eta^2/\omega^2} = -i\sqrt{|1 - c^2\eta^2/\omega^2|}$, conforme observação (3.1). Note que, como $0 \leq x \leq a$, temos que $x - 2aj \leq a(1 - 2j) < 0$, pois $j \geq 1$. Assim, como $\omega > 0$,

$$\left| e^{(x-2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} \right| = \left| e^{(x-2aj)(\omega/c)\sqrt{|1-c^2\eta^2/\omega^2|}} \right| \leq 1. \tag{67}$$

Analogamente temos

$$\left| e^{-(x+2aj)i(\omega/c)\sqrt{1-c^2\eta^2/\omega^2}} \right| = \left| e^{-(x+2aj)(\omega/c)\sqrt{|1-c^2\eta^2/\omega^2|}} \right| \leq 1. \tag{68}$$

Logo, $|\hat{u}_N^j| \leq 2|\hat{g}|^2$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_1} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\omega d\eta \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_1} 2|\hat{g}|^2 a_0 d\omega d\eta \right)^{1/2} \\ &= M(2a_0)^{1/2} \left(\int \int_{G_1} |\hat{g}|^2 d\omega d\eta \right)^{1/2} \\ &= (2a_0)^{1/2} M F_1 \end{aligned}$$

Como a região G_1 é limitada, podemos escolher ϵ_0 tão pequeno de modo que

$$F_1 \leq \frac{\delta}{3(2a)^{1/2}M},$$

e deste modo

$$\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_1} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\omega d\eta \right)^{1/2} \leq \frac{\delta}{3}. \tag{69}$$

Agora, precisamos estimar a contribuição da região G_2 correspondendo aos modos propagativos. Como G_2 é uma região ilimitada, vamos encontrar uma melhor estimativa para R_N . Pela propriedade (i) do Lema (3.1), dado ϵ_0 ,

$$\min_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} + f_N(x)| \geq \sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0) > 0. \tag{70}$$

De fato, observe que $\frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, logo $x = 0$ é ponto de máximo de $\sqrt{1 - x^2}$. Assim, o ponto de mínimo ocorre em $|x| = \sqrt{1 - \epsilon_0}$, o que implica em $\sqrt{1 - (1 - \epsilon_0)} = \sqrt{\epsilon_0}$. Da propriedade (i) do Lema (3.1), temos que $f_N(x) > a(\epsilon_0) > 0$. Logo

$$\min_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} + f_N(x)| \geq \min_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2}| + \min_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |f_N(x)| > \sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0) > 0.$$

Agora, dado δ' , pela propriedade (ii) do Lema (3.1), existe N_0 tal que, para todo $N \geq N_0$,

$$\max_{x^2 \leq 1 - \epsilon_0} |\sqrt{1 - x^2} - f_N(x)| < \delta'(\sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0)) \tag{71}$$

Pela definição de $R_N(i\eta, s)$ em (48), temos que, para $s = i\omega$, vale (49), o que implica que

$$|R_N(i\eta, i\omega)| = \frac{\left| \sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} - f_N\left(\frac{c\eta}{i\omega}\right) \right|}{\left| \sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(\frac{c\eta}{i\omega}\right) \right|}.$$

Assim

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_2} |R_N(i\omega, i\eta)| \leq \frac{\max \left| \sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} - f_N\left(\frac{c\eta}{i\omega}\right) \right|}{\min \left| \sqrt{1 - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}} + f_N\left(\frac{c\eta}{i\omega}\right) \right|} < \frac{\delta'(\sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0))}{\sqrt{\epsilon_0} + a(\epsilon_0)} = \delta'$$

Logo, para a região G_2 , por (66), (67) e (68), temos que

$$|\hat{u}_N^j|^2 \leq 2|R_N^j|^2|\hat{g}|^2 < 2(\delta')^{2j}|\hat{g}|^2.$$

Assim, com $\delta' < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_2} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_2} 2a_0 |R_N^j \hat{g}|^2 d\eta d\omega \right)^{1/2} \\ &< \sum_{j=1}^M (\delta')^j \sqrt{2a_0} \left(\int \int_{G_2} |\hat{g}|^2 d\eta d\omega \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^M (\delta')^j \sqrt{2a_0} F_2 \end{aligned}$$

Observe que, tomando $S = \sum_{j=1}^M (\delta')^j$, temos que

$$\frac{1 - \delta' \delta' + (\delta')^2 + \dots + (\delta')^M}{1 - \delta'} = \frac{S}{\delta'}.$$

Desde que $(1 - \delta')(1 + \delta' + (\delta')^2 + \dots + (\delta')^{M-1}) = 1 - (\delta')^M$, temos que

$$S = \delta' \left(\frac{1 - (\delta')^M}{1 - \delta'} \right).$$

Deste modo, escolhendo δ' apropriadamente, temos que

$$\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_2} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} < \sqrt{2a_0} F_2 \delta' \left(\frac{1 - (\delta')^M}{1 - \delta'} \right) \leq \frac{\delta}{3} \tag{72}$$

Finalmente, para a estimativa sobre os modos evanescentes da região G_3 , somente as propriedades de estabilidade das condições de contorno, como a expressa em (50), entram nas estimativas. Sobre a região G_3 , $c^2 \eta^2 / \omega^2 \geq 1 + \epsilon_0$ e $(|\omega|^2 + |c\eta|^2)^{1/2} \geq \sqrt{\epsilon_0}$; assim

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_3} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \geq \sqrt{\epsilon_0} > 0. \tag{73}$$

De fato,

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_3} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \geq \max_{|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

e

$$\max_{(\omega, \eta) \in G_3} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \geq \max_{\frac{c^2 \eta^2}{\omega^2} = 1 + \epsilon_0} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

O máximo de $\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$ ocorre no mesmo ponto que o máximo de $\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ ocorre. Assim, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos $(\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2})$ sujeito à restrição $|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0$. Definimos que $F(\eta, \omega) = \eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ e $G(\eta, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} + \eta^2$, e deste modo temos $\nabla F = \lambda \nabla G$ e $|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0$. Logo, temos o sistema

$$\begin{aligned} 2\eta &= \lambda 2\eta \\ -2\frac{\omega}{c^2} &= \lambda 2\frac{\omega}{c^2} \\ |\omega|^2 + |c\eta|^2 &= \epsilon_0. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 1$, temos que $\omega = 0$, o que implica que $\eta = \pm \sqrt{\epsilon_0}/c$. Se $\eta = 0$, temos que $\omega = \pm \sqrt{\epsilon_0}$. Logo

$$\max_{|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0} F(\eta, \omega) = \frac{\epsilon_0}{c^2}$$

o que implica que

$$\max_{|\omega|^2 + |c\eta|^2 = \epsilon_0} \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c}.$$

Note que, para a curva $c^2 \eta^2 / \omega^2 = 1 + \epsilon_0$, o método dos multiplicadores de Lagrange fornece apenas a localização do mínimo de $\sqrt{\eta^2 - \omega^2 / c^2}$. Como $i(\omega/c) \sqrt{1 - (c^2 \eta^2 / \omega^2)} = \sqrt{\eta^2 - \omega^2 / c^2}$, temos que

$$\max_{\substack{(\omega, \eta) \in G_3 \\ 0 \leq x \leq a_0}} (|e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}|, |e^{-(x+2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}|) = \max_{\substack{(\omega, \eta) \in G_3 \\ 0 \leq x \leq a_0}} |e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}|$$

Desde que $a \geq a_0$ e $j \geq 1$, a última exponencial na expressão acima é decrescente. Assim, denotando $\tilde{\epsilon}_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c}$, por (73),

$$\max_{\substack{(\omega, \eta) \in G_3 \\ 0 \leq x \leq a_0}} |e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}| \leq e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0}.$$

Logo, por (66) e (50), temos que

$$\begin{aligned} |\hat{u}_N^j|^2 &\leq |e^{(x-2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} R_N^j \hat{g}|^2 + |e^{-(x+2aj)\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} R_N^j \hat{g}|^2 \\ &\leq |e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2 + |e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2 \\ &= 2|e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_3} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_3} 2|e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \hat{g}|^2 a_0 d\eta d\omega \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^M e^{(a_0-2aj)\tilde{\epsilon}_0} \sqrt{2a_0} \left(\int \int_{G_3} |\hat{g}|^2 d\omega d\xi \right)^{1/2} \\ &= e^{a_0\tilde{\epsilon}_0} \sum_{j=1}^M e^{-2aj\tilde{\epsilon}_0} \sqrt{2a_0} F_3. \end{aligned}$$

Como $e^{-2a\tilde{\epsilon}_0} < 1$, temos uma soma geométrica $S = \sum_{j=1}^M e^{-2aj\tilde{\epsilon}_0}$, e logo,

$$\frac{1 - e^{2a\tilde{\epsilon}_0}}{1 - e^{-2a\tilde{\epsilon}_0}} \left(\frac{e^{-2a\tilde{\epsilon}_0} + e^{-4a\tilde{\epsilon}_0} + \dots + e^{-2Ma\tilde{\epsilon}_0}}{e^{-2a\tilde{\epsilon}_0}} \right) = \frac{S}{e^{-2a\tilde{\epsilon}_0}}.$$

Desde que $(1 - e^{2a\tilde{\epsilon}_0})(1 + e^{-2a\tilde{\epsilon}_0} + e^{-4a\tilde{\epsilon}_0} + \dots + e^{-(2M-2)a\tilde{\epsilon}_0}) = 1 - e^{-2Ma\tilde{\epsilon}_0}$, temos então que

$$\begin{aligned} e^{a_0\tilde{\epsilon}_0} \sum_{j=1}^M e^{-2aj\tilde{\epsilon}_0} \sqrt{2a_0} F_3 &= e^{a_0\tilde{\epsilon}_0} e^{-2a\tilde{\epsilon}_0} \left(\frac{1 - e^{-2Ma\tilde{\epsilon}_0}}{1 - e^{-2a\tilde{\epsilon}_0}} \right) \sqrt{2a_0} F_3 \\ &= \sqrt{2a_0} e^{-(2a-a_0)\tilde{\epsilon}_0} \left(\frac{1 - e^{-2Ma\tilde{\epsilon}_0}}{1 - e^{-2a\tilde{\epsilon}_0}} \right) F_3. \end{aligned}$$

Por fim, dado δ ,

$$\sum_{j=1}^M \left(\int \int_{G_3} \int_0^{a_0} |\hat{u}_N^j|^2 dx d\eta d\omega \right)^{1/2} \leq \frac{\delta}{3} \tag{74}$$

de modo que a seja escolhido suficientemente grande. Somando (69), (72) e (74), chegamos à estimativa em (65). Pelo Teorema de Plancherel [41], temos que

$$\sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} < \delta. \tag{75}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} &< \sum_{j=1}^M \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^M \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{a_0} |u_N^j|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Assim, chegamos ao resultado de convergência em (46). □

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Em muitas áreas da atividade econômica, como agroindústria, indústria civil e militar, medicina, aeronáutica, indústria do petróleo, entre outras áreas de aplicação, uma simulação numérica é a única possibilidade de solução dos problemas, visto que os dados de entrada de muitos desses problemas são coletados via radares e sensores. E mesmo que, em muitos casos, o experimento real seja possível, a simulação numérica soa mais interessante, evitando gastos desnecessários com tempo e experimentos que podem levar à nada. A teoria à respeito das ABCs ainda está falha, poucos são os métodos que permitem a utilização de domínios poligonais, onde um tratamento adequado aos *corners* se faz necessário, e há muito pouco ainda sobre ABCs para problemas não-lineares, mas muito se tem progredido no sentido de mapear a teoria dos problemas lineares.

O texto apresentado tem o intuito de que, a partir dessas ideias, possamos elucidar a formulação de novas ABCs, melhorando aspectos como facilidade de implementação e custo computacional. Como perspectivas futuras de pesquisa, os resultados de estabilidade e convergência apresentados para as ABCs de Engquist e Majda [8, 9], tanto para a equação com coeficientes constantes como para coeficientes variáveis, podem ser estendidos para outros problemas hiperbólicos como, por exemplo, Fevens e Jiang mencionam em [14] para a equação de Schrödinger com condições de contorno absorventes dadas por $\prod_{j=1}^p (i\partial/\partial x - (ma_j/\hbar))\hat{\Psi}(s) = 0$, as quais têm uma generalização similar como a considerada por Higdon [28, 42]. O método para a obtenção da solução explícita apresentada por Diaz e Joly em [3] também pode ser estendida para a obtenção de soluções explícitas em outros problemas hiperbólicos ou para PMLs [43]. Ademais, é possível formalizar a solução fundamental de Diaz e Joly através da teoria das distribuições [44].

REFERÊNCIAS

- [1] D. GIVOLI and B. NETA, “High-order Non-reflecting Boundary Scheme for Time-dependent Waves,” *Journal of Computational Physics*, vol. 186, no. 1, pp. 24–46, 2003.
- [2] J. P. BÉRENGER, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 185–200, 1994.
- [3] J. DIAZ and P. JOLY, “An Analysis of High-order Boundary Conditions for the Wave Equation,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 65, pp. 1547–1575, 2005.
- [4] D. APPELÖ, T. HAGSTROM, and G. KREISS, “Perfectly Matched Layers for Hyperbolic Systems: General Formulation, Well-posedness and Stability,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 67, pp. 1–23, 2006.
- [5] F. COLLINO and P. MONK, “The Perfect Matched Layer in Curvilinear Coordinates,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 19, pp. 2061–2090, 1998.
- [6] E. TURKEL and A. YEFET, “Absorbing PML Boundary Layers for Wave-like Equations,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 27, pp. 533–557, 1998.
- [7] P. JOLY and J. TUOMELA, “A New Theoretical Approach to Absorbing Layers,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, pp. 671–698, 1997.
- [8] B. ENGQUIST and A. MAJDA, “Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves,” *Mathematics of Computation*, vol. 31, no. 629–651, 1977.
- [9] B. ENGQUIST and A. MAJDA, “Radiation Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Calculations,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 32, no. 313–357, 1979.

- [10] K. A. SCHNEIDER, *Condições de Contorno Absorventes para a Equação da Onda*. Dissertação de mestrado, PPGMAp - UFRGS, 2009.
- [11] T. ELVIUS and A. SUNDSTRÖM, “Computationally Efficient Schemes and Boundary Conditions for a Fine-mesh Barotropic Model based on the Shallow-Water Equations,” *Tellus*, vol. 25, pp. 132–156, 1973.
- [12] R. CLAYTON and B. ENGQUIST, “Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Waves,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 67, no. 6, pp. 1529–1540, 1977.
- [13] M. L. DE CASTRO, J. DIAZ, and V. PERÓN, “Equivalent absorbing Boundary Conditions for Heterogeneous Acoustic Media,” *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 15, no. 3, pp. 301–310, 2014.
- [14] T. FEVENS and H. JIANG, “Absorbing Boundary Conditions for the Schrödinger Equation,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 21, no. 1, pp. 255–282, 1999.
- [15] I. ALONSO-MALLO and N. REGUERA, “Condiciones de Frontera Absorbentes para Ecuaciones de tipo Schrödinger,” *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.*, vol. 20, pp. 31–56, 2002.
- [16] X. ANTOINE, A. ARNOLD, C. BESSE, M. EHRHARDT, and A. SCHÄDLE, “A Review of Transparent and Artificial Boundary Conditions Techniques for Linear and Nonlinear Schrödinger Equations,” *Communications in Computational Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 729–796, 2008.
- [17] A. ARNOLD and M. EHRHARDT, “Discrete Transparent Boundary Conditions for Wide Angle Parabolic Equations in Underwater Acoustics,” *Journal Comput. Phys.*, vol. 145, pp. 611–638, 1998.
- [18] D. GIVOLI, “High-order Nonreflecting Boundary Conditions without High-order Derivatives,” *Journal of Computational Physics*, vol. 170, pp. 849–870, 2001.
- [19] M. J. GROTE and J. B. KELLER, “Nonreflecting Boundary Conditions for Maxwell’s Equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 139, pp. 327–342, 1998.
- [20] T. HAGSTROM, “Radiation Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves,” *Acta Numerica*, vol. 8, pp. 47–106, 1999.
- [21] A. BAYLISS and E. TURKEL, “Radiation Boundary Conditions for Wave-like Equations,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, no. 33, pp. 707–725, 1980.
- [22] T. HAGSTROM and T. WARBURTON, “A New Auxiliary Variable Formulation of High-order Local Radiation Boundary Conditions: Corner Compatibility Conditions and Extensions to First-order Systems,” *Wave Motion*, vol. 39, no. 4, pp. 327–338, 2004.
- [23] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Berkeley, 1997.
- [24] G. A. BAKER and P. R. GRAVES-MORRIS, *Padé Approximants – Vol. 59*. Cambridge University Press, 1996.
- [25] H. O. KREISS, “Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 23, pp. 277–298, 1970.
- [26] L. N. TREFETHEN and L. HALPERN, “Well-Posedness of One-Way Wave-Equations and Absorbing Boundary Conditions,” *Mathematics Of Computation*, vol. 47, no. 176, pp. 421–435, 1986.

- [27] L. HALPERN and L. N. TREFETHEN, “Wide-Angle One-Way Wave-Equations,” *Journal Of The Acoustical Society Of America*, vol. 84, no. 4, pp. 1397–1404, 1988.
- [28] R. L. HIGDON, “Absorbing Boundary-Conditions for Difference Approximations to the Multidimensional Wave-Equation,” *Mathematics Of Computation*, vol. 47, no. 176, pp. 437–459, 1986.
- [29] T. HAGSTROM, M. DE CASTRO, D. GIVOLI, and D. TZEMACH, “Local High-order Absorbing Boundary Conditions for Time-dependent Waves in Guides,” *Journal of Computational Acoustics*, vol. 15, no. 1, pp. 1–22, 2007.
- [30] D. GIVOLI, T. HAGSTROM, and I. PATLASHENKO, “Finite Element Formulation with High-order Absorbing Boundary Conditions for Time-dependent Waves,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 3666–3690, 2006.
- [31] T. HAGSTROM, A. MAR-OR, and D. GIVOLI, “High-order Local Absorbing Conditions for the Wave Equation: Extensions and improvements,” *Journal of Computational Physics*, vol. 227, pp. 3322–3357, 2008.
- [32] J. BROEZE and E. F. G. VAN DALLEN, “Radiation Boundary Conditions for the Two-dimensional Wave Equation from a Variational Principle,” *Mathematics of Computation*, vol. 58, no. 197, pp. 73–82, 1992.
- [33] M. N. GUDATTI and J. L. TASSOULAS, “Continued-Fraction Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation,” *Journal of Computational Acoustics*, vol. 8, no. 1, pp. 139–156, 2000.
- [34] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [35] R. L. HIGDON, “Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems,” *SIAM Review*, vol. 28, pp. 177–217, 1986.
- [36] M. TAYLOR, “Reflection of Singularities of Solutions to Systems of Differential Equations,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 28, pp. 457–478, 1975.
- [37] L. NIRENBERG, “Lectures on Linear Partial Differential Equations, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Regional Conference Series in Mathematics, no. 17,” *American Mathematical Society, Providence RI*, 1973.
- [38] A. MAJDA and S. OSHER, “Reflection of Singularities at the Boundary,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 28, pp. 479–499, 1975.
- [39] T. HA-DUONG and P. JOLY, “On the Stability Analysis of Boundary Conditions for the Wave Equation by Energy Methods. Part 1: The Homogeneous Case,” *Mathematics of Computation*, vol. 62, no. 206, pp. 539–563, 1994.
- [40] J. V. RALSTON, “Note on a Paper of Kreiss,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 24, pp. 759–762, 1971.
- [41] K. YOSIDA, *Functional Analysis*. Springer-verlag, Berlin, 6th ed., 1980.
- [42] R. L. HIGDON, “Numerical Absorbing Boundary-Conditions for the Wave-Equation,” *Mathematics Of Computation*, vol. 49, no. 179, pp. 65–90, 1987.
- [43] J. DIAZ and P. JOLY, “A Time Domain Analysis of PML Models in Acoustics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 3820–3853, 2006.
- [44] W. RUDIN, *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science, New York, 1991.