XXXIII SIC Salão Iniciação Científica

Evento	Salão UFRGS 2021: SIC - XXXIII SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2021
Local	Virtual
Título	UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPs ELÍPTICAS DE SEGUNDA ORDEM
Autor	ADIR MATOS DE SOUZA JÚNIOR
Orientador	LEONARDO PRANGE BONORINO

Autor: Adir Matos de Souza Júnior
Orientador: Leonardo Prange Bonorino
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPs ELÍPTICAS DE SEGUNDA ORDEM

O problema geral que motiva este trabalho é o problema de valor de fronteira $(1)\quad \begin{cases} Lu = f \text{ em } U \\ u = 0 \text{ em } \partial U \end{cases}$, onde U é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, L é um operador diferencial parcial de segunda ordem uniformemente elíptico, f é uma função dada em $L^2(U)$ e $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ é a incógnita, $u = u(x)$. O operador L tem a forma $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$, onde as funções coeficientes a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1, \dots, n)$ são dadas e estão em $L^\infty(U)$. É costume dizermos que o operador L, dado pela expressão acima, está na *forma divergente*. A forma bilinear $B[\ ,\ ]$ associada ao operador elíptico divergente L é definida por $B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}v + cuv\, dx$, para $u, v \in H_0^1(U)$. Dizemos que $u \in H_0^1(U)$ é uma *solução fraca* do problema de valor de fronteira (1) se $B[u, v] = (f, v)$ para qualquer $v \in H_0^1(U)$, onde $(\ ,\ )$ denota o produto interno em $L^2(U)$. Dois teoremas de Análise Funcional importantes no estudo da existência de soluções fracas são o Teorema da Representação de Riesz e o Teorema de Lax-Milgram. Estes teoremas, junto com alguns resultados auxiliares (denominados *estimativas de energia*), nos permitem obter o chamado *Primeiro Teorema de Existência para soluções fracas*. Este teorema afirma que existe um número $\gamma \geq 0$ tal que, para cada $\mu \geq \gamma$ e cada função $f \in L^2(U)$, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(U)$ do problema de valor de fronteira $(2)\quad \begin{cases} Lu + \mu u = f \text{ em } U \\ u = 0 \text{ em } \partial U \end{cases}$. Como exemplos, podemos citar os casos $Lu = -\Delta u$ e $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}u_{x_i}\right)_{x_j} + cu$, com $c \geq 0$ em U. No caso $Lu = -\Delta u$, podemos verificar usando a desigualdade de Poincaré que o Teorema de Existência vale com $\gamma = 0$. Uma afirmação análoga vale para o outro exemplo.