

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

**IDENTIFICAÇÃO DE ESTRATÉGIAS COGNITIVAS ELABORADAS POR
ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA EM
MATEMÁTICA POR MEIO DE UMA FERRAMENTA DIGITAL**

JAQUELINE MOLON

PORTO ALEGRE
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

JAQUELINE MOLON

**IDENTIFICAÇÃO DE ESTRATÉGIAS COGNITIVAS ELABORADAS POR
ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA EM
MATEMÁTICA POR MEIO DE UMA FERRAMENTA DIGITAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Informática na Educação.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Roberto Kieling Franco

PORTO ALEGRE
2022

CIP - Catalogação na Publicação

Molon, Jaqueline
Identificação de estratégias cognitivas elaboradas
por estudantes na resolução de situações-problema em
matemática por meio de uma ferramenta digital /
Jaqueline Molon. -- 2022.
308 f.
Orientador: Sérgio Roberto Kieling Franco.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em
Novas Tecnologias na Educação, Programa de
Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto
Alegre, BR-RS, 2022.

1. estratégias cognitivas. 2. resolução de
situações-problema. 3. avaliação do processo de
aprendizagem. 4. ação pedagógica. 5. aplicação Web. I.
Franco, Sérgio Roberto Kieling, orient. II. Título.

DEDICATÓRIA

*Ao meu companheiro de vida, Miguel e aos meus pais,
Jorge e Diva, que sempre acreditaram em mim
e me incentivaram a seguir.
Essa conquista também é uma conquista de vocês!
Mãe: filha de agricultora pode ser doutora e sei que você foi
uma das pessoas que mais levantou essa bandeira!*

Gratidão.

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer...

Ao meu orientador, professor Sérgio, pela paciência e compreensão ao longo de todo processo de doutoramento. Obrigada por auxiliar a superar minhas crises e sempre confiar em meu trabalho.

À minha psicóloga que procurei em função de minhas inseguranças e que me fez acreditar em minhas capacidades desde o primeiro encontro em 2018. Saiba que és uma excelente profissional.

À minha rede de apoio para o desenvolvimento tecnológico dessa ferramenta: Prof. Mariano Nicolao, Prof. Juliana Damásio, aos técnicos do setor de TI do IFRS Canoas, especialmente ao Vinícius pelo apoio na hospedagem da aplicação no servidor institucional, e aos estudantes Paulo Gomes da UFRGS e Luís Auth do IFRS que desenvolveram e implementaram o código de programação da aplicação nos anos de 2020 e 2021, respectivamente.

À Secretaria de Educação à Distância (SEAD) da UFRGS pelo incentivo por meio do edital SEAD/UFRGS EaD nº. 27/2019.

Ao IFRS pela licença capacitação que possibilitou a dedicação exclusiva à realização dos estudos necessários à tese e ao IFRS Campus Canoas pelo incentivo ao desenvolvimento da aplicação por meio do edital nº 64/2019 e edital complementar nº 06/2021 vinculado ao edital IFRS nº 12/2021 –fomento interno para projetos de pesquisa e inovação 2021/2022.

Aos colegas professores do IFRS que integraram o grupo de especialistas na fase de julgamento dos itens para a pesquisa.

Aos alunos que participaram das diferentes fases do estudo.

Aos professores de disciplinas que cursei no PGIE que, com certeza, contribuíram muito ao longo dessa jornada.

Aos colegas do grupo de orientação coletiva do professor Sérgio Franco.

Às amigas construídas durante o doutorado, especialmente à Francieli, Aline e Cíntia.

À minha colega, amiga, irmã de coração, Mariana Duro pelas orientações, conversas, dicas, desabafos, acolhimentos, abraços e cuidados ao longo de todo o processo!

Aos meus pais, por tudo e por tanto! Vocês são meus exemplos de vida, sinônimo de força, coragem, dedicação, persistência e sabedoria.

Ao meu irmão, Vinícius, pelas conversas, pelos momentos de apoio e de desabafo que também foram importantíssimos para que pudesse chegar nesse momento acreditando que tudo valeu a pena!

À Mônica e Ian pelo apoio, incentivo, mimos e cuidados que possibilitaram que minha atenção se voltasse prioritariamente à tese em muitos momentos que sem eles seriam muito mais difíceis, além dos intervalos de descanso, igualmente importantes!

Aos demais familiares e amigos por entenderem minhas ausências durante todo o período de doutoramento, especialmente à minha afilhada Yasmim que por muitas vezes deixei de brincar para poder concluir tarefas do doutorado.

Especialmente ao meu amor, Miguel, pela paciência, ajuda, cuidado, carinho, atenção... Por ser meu parceiro em todos os momentos e de todas as formas, pois sem ele nada disso teria sido possível!

E, principalmente a DEUS, pois sei que nunca estive só, em toda e qualquer situação!



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

**ATA SOBRE A DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
JAQUELINE MOLON**

Às quatorze horas do dia dezessete de maio de dois mil e vinte e dois, no endereço eletrônico mconf.ufrgs.br/webconf/orientandos-prof-sergio-franco, conforme a portaria 2291 de 17/03/2020 que suspende todas as atividades presenciais possíveis, nesta Universidade, reuniu-se a Comissão de Avaliação, composta pelos Professores Doutores: Leandro Krug Wives, Laurete Terezinha Zanol Sauer, Carmen Viera Mathias para a análise da Defesa de Tese de Doutorado intitulada **“Identificação de Estratégias Cognitivas Elaboradas por Estudantes na Resolução de Situações-Problema em Matemática por Meio de Uma Ferramenta Digital.”** da doutoranda de Pós – Graduação em Informática na Educação Jaqueline Molon sob a orientação do Prof. Dr. Sérgio Roberto Kieling Franco.

A Banca, reunida, após a apresentação e arguição, emite o parecer abaixo assinalado.

[X] Considera a Tese Aprovada
() sem alterações;
(X) sem alterações, com voto de louvor;
() e recomenda que sejam efetuadas as reformulações e atendidas as sugestões contidas nos pareceres individuais dos membros da Banca;

[] Considera a Tese Reprovada.

Considerações adicionais (a critério da Banca):

A tese realiza bem a interceção proposta por um programa de pós-graduação interdisciplinar com destaque para o encadeamento de ideias integrando a fundamentação teórica e a exploração dos campos da Matemática e da Informática.



Prof. Dr. Sérgio Roberto Kieling Franco
Orientador

(videoconferência)
Prof. Dr. Leandro Krug Wives
PPGIE

(videoconferência)
Prof.ª Dr.ª Laurete Terezinha Zanol Sauer
UCS

(videoconferência)
Prof.ª Dr.ª Carmen Vieira Mathias
UFSM

*Se começamos a saber como nascem e como se desenvolvem
nossos conhecimentos graças à epistemologia genética, a
perspectiva aberta é aquela de apreensão dos fenômenos de
adaptação da criança à(s) matéria(s) escolar(es) e do professor
a seus alunos. Trata-se de tomá-los tal como são, nem mais nem
menos, no momento em que nos encarregamos deles, o que
supõe que saibamos de quais estruturas de aprendizagem eles
dispõem e como elas funcionam. Em outras palavras, procede-
se a um diagnóstico do desenvolvimento cognitivo antes de
partir com eles para a aventura do conhecimento. Tendo
consciência de que só se pode conduzi-los acompanhando-os e
acompanhá-los conduzindo-os.
Tarefa difícil esta, como todo o professor sabe por experiência.
[...]*

*A pedagogia, como a ciência, é uma aventura.
Elas dependem de nós.
Então, como dizem os marinheiros, bons ventos!*

*DOLLE, Jean-Marie.
Princípios para uma pedagogia científica.
(2011, p. 193-195)*

E na carência de ventos, que tenhamos bons remos!

Jaqueline Molon – maio de 2022

RESUMO

A investigação dos raciocínios utilizados e das relações lógicas estabelecidas pelos estudantes nas atividades que lhes são propostas fornece evidências das estratégias cognitivas que elaboram. Identificar esses elementos pode subsidiar os processos de ensino e de aprendizagem e colaborar para a realização de uma avaliação mais direcionada. Inserida nessa problemática e centrada na teoria piagetiana, pesquisou-se como identificar evidências de estratégias cognitivas elaboradas por estudantes durante a resolução de situações-problema em matemática, cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos, e de que forma obtê-las por meio de um Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP), desenvolvido no decorrer deste estudo. A pesquisa, de caráter qualitativo e objetivo exploratório-descritivo, foi desenvolvida em quatro etapas. Na primeira, voltada à definição e caracterização dos itens de investigação, participaram 37 professores de matemática. Na segunda e terceira etapas participaram 15 estudantes e foram realizadas entrevistas pautadas no método clínico piagetiano, cuja tarefa envolvia a resolução de situações-problema, a fim de identificar evidências de estratégias cognitivas elaboradas, a emergência de dúvidas e o enfrentamento de impasses ao longo do processo. A partir disso, foram elaborados modelos de avaliação para cada uma das situações-problema e um modelo geral que deu origem ao método de identificação de evidências de estratégias cognitivas implementado no appAAP. O desenvolvimento da aplicação ocorreu paralelamente às três primeiras etapas de pesquisa. A quarta etapa destinou-se à validação do método implementado no appAAP, com 48 participantes, e de critérios de qualidade de uso do módulo estudante da ferramenta, por meio da avaliação de 32 estudantes. Os resultados obtidos apontam que o procedimento delineado e implementado na aplicação tecnológica representa uma fonte de coleta de evidências das estratégias cognitivas utilizadas pelos estudantes durante a resolução das situações-problemas propostas. O módulo docente também foi desenvolvido possibilitando o cadastro de novas situações e a extração de relatórios das tentativas de resolução das situações disponibilizadas a cada turma. Nesse sentido, o appAAP demonstrou ser um instrumento de apoio à ação docente, útil para embasar o direcionamento das atividades pedagógicas às necessidades dos estudantes.

Palavras-chave: estratégias cognitivas; resolução de situações-problema; avaliação do processo de aprendizagem; ação pedagógica; aplicação *Web*.

IDENTIFICATION OF COGNITIVE STRATEGIES DEVELOPED BY STUDENTS ON PROBLEM-SITUATIONS RESOLUTION IN MATHEMATICS THROUGH A DIGITAL TOOL

ABSTRACT

The investigation of the reasoning used and the logical relationships established by the students in the activities proposed to them provides evidence of the cognitive strategies they develop. Identifying these elements can support the teaching and learning processes and collaborate to develop a more targeted assessment. Inserted in this problem and centered on Piagetian theory, it was researched how to identify pieces of evidence of cognitive strategies developed by students during the resolution of problem situations in mathematics. Whose modeling involves algebraic knowledge, and how to obtain them through an Application to Support Pedagogical Action (appAAP), developed during this study. The qualitative character and exploratory-descriptive objective research was developed in four stages. The first one aimed at defining and characterizing the investigation items, 37 mathematics teachers participated. In the second and third stages, 15 students participated, and interviews were carried out based on the Piagetian clinical method, whose task involved the problem situations resolution to identify evidence of elaborate cognitive strategies, the emergence of doubts, and the confrontation of impasses throughout the process. From this, evaluation models were developed for each of the problem situations, and a general model gave rise to the method of identifying evidence of cognitive strategies implemented in the appAAP. The development of the application took place in parallel with the first three research stages. The fourth step aimed to validate the method implemented in the appAAP, with 48 participants, and the quality criteria for using the tool's student module through the evaluation of 32 students. The results obtained indicate that the procedure outlined and implemented in the technological application represents a source of evidence collection of the cognitive strategies used by the students during the resolution of the proposed problems. The teacher's module was also developed, enabling the registration of new situations and the extraction of reports with the attempts to solve the situations made available to each class. In this sense, the appAAP proved to be a valuable instrument to support teacher action to support the direction of pedagogical activities to the needs of students.

Keywords: cognitive strategies; problem situations resolution; learning process assessment; pedagogical action; web application.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Visão geral da pesquisa.....	23
Figura 2: Síntese sistemas cognitivos.....	52
Figura 3: Representação formal da adição de m parcelas iguais a b	60
Figura 4: Tabuada como exemplo de aritmética generalizada.....	78
Figura 5: Representação geométrica de $(a + b)^2$	80
Figura 6: Ciclo de desenvolvimento design interativo.....	104
Figura 7: Fluxo de Processo de Desenvolvimento Iterativo.....	105
Figura 8: Descrição das etapas metodológicas da pesquisa.....	113
Figura 9: SP4 - item original Enem 2017.....	121
Figura 10: Situação-problema reformulada <i>Vila Lângaro</i>	121
Figura 11: Competências requeridas para a resolução da situação-problema <i>Vila Lângaro</i>	123
Figura 12: SP7 - item original Enem 2016.....	124
Figura 13: Situação-problema <i>Praça dos Arcos</i>	124
Figura 14: Competências requeridas para a resolução da situação-problema <i>Praça dos Arcos</i>	127
Figura 15: SP8 - item original Enem 2017.....	127
Figura 16: Situação-problema <i>Palco em construção</i>	128
Figura 17: SP10 - item original Enem 2016.....	128
Figura 18: Situação-problema <i>Estacionamento</i>	129
Figura 19: Competências requeridas para a resolução das situações-problema <i>Palco em construção e Estacionamento</i>	132
Figura 20: Distribuição por turmas dos participantes da fase 2 do estudo.....	137
Figura 21: Diagrama A8 - <i>Vila Lângaro</i>	146
Figura 22: Representação de A4 para <i>Vila Lângaro</i>	151
Figura 23: Representação de A10 para <i>Vila Lângaro</i>	151
Figura 24: Resolução A14 para <i>Vila Lângaro</i>	155
Figura 25: Diagrama A9 - <i>Vila Lângaro</i>	156
Figura 26: Diagrama A12 - <i>Vila Lângaro</i>	157
Figura 27: Resolução A5 para <i>Vila Lângaro</i>	157
Figura 28: Resolução A13 (2ª tentativa) para <i>Vila Lângaro</i>	159

Figura 29: Modelo para avaliação da situação-problema <i>Vila Lângaro</i>	160
Figura 30: Anotações de A3 para <i>Praça dos Arcos</i>	164
Figura 31: Diagrama de A3 para <i>Praça dos Arcos</i>	165
Figura 32: Diagrama de A4 para <i>Praça dos Arcos</i>	167
Figura 33: Anotações de A11 para <i>Praça dos Arcos</i>	168
Figura 34: Diagrama de A11 para <i>Praça dos Arcos</i>	168
Figura 35: Resolução <i>Praça dos Arcos</i> por A15	169
Figura 36: Resolução A14 por <i>Praça dos Arcos</i>	170
Figura 37: Resolução de A5 para <i>Praça dos Arcos</i>	171
Figura 38: Diagrama A5 - <i>Praça dos Arcos</i>	171
Figura 39: Modelo para avaliação da situação-problema <i>Praça dos Arcos</i>	172
Figura 40: Resolução de A4 - <i>Palco em construção</i>	174
Figura 41: Resolução de A6 para <i>Palco em construção</i>	175
Figura 42: Resolução de A1 para <i>Palco em construção</i>	176
Figura 43: Diagrama de A15 para <i>Palco em construção</i>	177
Figura 44: Resolução de A15 para <i>Palco em construção</i>	177
Figura 45: Resolução de A11 para <i>Palco em construção</i>	178
Figura 46: Diagrama de A16 para <i>Palco em construção</i>	179
Figura 47: Modelo para avaliação da situação-problema <i>Palco em construção</i>	180
Figura 48: Resolução de A1 para <i>Estacionamento</i>	184
Figura 49: Resolução de A2 para <i>Estacionamento</i>	185
Figura 50: Resolução de A15 para <i>Estacionamento</i>	187
Figura 51: Resolução de A9 para <i>Estacionamento</i>	188
Figura 52: Diagrama de A9 para <i>Estacionamento</i>	188
Figura 53: Resolução de A12 para <i>Estacionamento</i>	189
Figura 54: Diagrama de A12 para <i>Estacionamento</i>	190
Figura 55: Modelo para avaliação da situação-problema <i>Estacionamento</i>	190
Figura 56: Estrutura do modelo de avaliação utilizado	192
Figura 57: Dispositivos usados pelos estudantes na fase de teste do appAAP.....	239

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 1: Grupo das quatro transformações INRC	36
Quadro 2: Características das categorias de competências e esquemas relacionados	42
Quadro 3: Competências específicas da área Matemática e suas tecnologias na BNCC Ensino Médio.....	70
Quadro 4: Avaliação de atributos de qualidade de softwares.....	106
Quadro 5: Versão do SUS adaptada e validada por Martins et al. (2015).....	108
Quadro 6: Princípios de usabilidade de Nielsen (1993) e critérios de Brooke (1986) .	108
Quadro 7: Qualidade de aplicações quanto à abordagem pedagógica.....	110
Quadro 8: Constituição dos grupos de especialistas.....	117
Quadro 9: Cálculo do nível de dificuldade de cada situação-problema	118
Quadro 10: Conceitos <i>Vila Lângaro</i> - especialistas grupo A	122
Quadro 11: Procedimentos <i>Vila Lângaro</i> - especialistas grupo A	122
Quadro 12: Validação da contextualização da situação-problema <i>Vila Lângaro</i>	122
Quadro 13: Conceitos <i>Praça dos Arcos</i> - especialistas grupo B	125
Quadro 14: Procedimentos <i>Praça dos Arcos</i> - especialistas grupo B	125
Quadro 15: Validação da contextualização da situação-problema <i>Praça dos Arcos</i> ...	126
Quadro 16: Conceitos <i>Palco em construção</i> - especialistas grupo B	129
Quadro 17: Conceitos <i>Estacionamento</i> - especialistas grupo B	129
Quadro 18: Procedimentos <i>Palco em construção</i> - especialistas grupo B	130
Quadro 19: Procedimentos <i>Estacionamento</i> - especialistas grupo B	131
Quadro 20: Validação da contextualização da situação-problema <i>Palco em construção</i>	131
Quadro 21: Validação da contextualização da situação-problema <i>Estacionamento</i>	131
Quadro 22: Estudantes participantes da fase 2 e situações-problema trabalhadas	137
Quadro 23: Estratégias evidenciadas para a situação-problema <i>Vila Lângaro</i>	147
Quadro 24: Procedimentos <i>Vila Lângaro</i>	148
Quadro 25: Ajudas <i>Vila Lângaro</i>	149
Quadro 26: Ajudas geradas das tentativas de E4 para <i>Vila Lângaro</i>	158
Quadro 27: Estratégias evidenciadas para a situação-problema <i>Praça dos Arcos</i>	161
Quadro 28: Procedimentos <i>Praça dos Arcos</i>	162
Quadro 29: Ajudas <i>Praça dos Arcos</i>	162
Quadro 30: Ajudas geradas das tentativas de E7 para <i>Praça dos Arcos</i>	165
Quadro 31: Procedimentos de E8 em <i>Praça dos Arcos</i>	166
Quadro 32: Ajudas geradas das tentativas de E8 para <i>Praça dos Arcos</i>	167
Quadro 33: Estratégias mapeadas para a situação-problema <i>Palco em construção</i>	173
Quadro 34: Procedimentos <i>Palco em construção</i>	173
Quadro 35: Ajudas <i>Palco em construção</i>	174
Quadro 36: Procedimentos realizados nas tentativas de E4 para <i>Vila Lângaro</i>	176
Quadro 37: Estratégias mapeadas para a situação-problema <i>Estacionamento</i>	181
Quadro 38: Procedimentos <i>Estacionamento</i>	182
Quadro 39: Ajudas <i>Estacionamento</i>	183

Quadro 40: Procedimentos realizados nas tentativas de E16 para <i>Estacionamento</i>	186
Quadro 41: Ajudas geradas das tentativas de E16 para <i>Estacionamento</i>	187
Quadro 42: Procedimentos específicos de cada estratégia para <i>Vila Lângaro</i>	195
Quadro 43: Identificação de Ei elaboradas pelos estudantes para <i>Vila Lângaro</i>	195
Quadro 44: Lista padrão procedimentos <i>Praça dos Arcos</i>	198
Quadro 45: Identificação de Ei elaboradas pelos estudantes para <i>Praça dos Arcos</i>	198
Quadro 46: Lista padrão procedimentos <i>Palco em construção</i>	200
Quadro 47: Identificação de Ei elaboradas pelos estudantes para <i>Palco em construção</i>	200
Quadro 48: Lista padrão procedimentos <i>Estacionamento</i>	202
Quadro 49: Identificação de Ei elaboradas pelos estudantes para <i>Estacionamento</i>	202
Quadro 50: <i>Vila Lângaro</i> - usuário appAAP id_95.....	218
Quadro 51: <i>Vila Lângaro</i> - id_usuários appAAP indicados para E3	221
Quadro 52: <i>Vila Lângaro</i> - id_usuários appAAP indicados para E5	223
Quadro 53: <i>Praça dos arcos</i> - id_usuários appAAP indicados para E8.....	226
Quadro 54: <i>Praça dos arcos</i> - id_usuários appAAP indicados para E9.....	227
Quadro 55: <i>Palco em construção</i> - id_usuários appAAP indicados para E10.....	229
Quadro 56: <i>Palco em construção</i> - id_usuários appAAP indicados para E11	230
Quadro 57: <i>Estacionamento</i> - usuário appAAP id_85	231
Quadro 58: <i>Estacionamento</i> - ajudas consultadas pelos usuários que NER.....	232
Quadro 59: <i>Estacionamento</i> - usuário appAAP id_76	233
Quadro 60: <i>Estacionamento</i> - id_usuários appAAP indicados para E14	234
Quadro 61: <i>Estacionamento</i> - id_usuários appAAP indicados para E15	235
Quadro 62: Avaliação critérios de qualidade de uso do appAAP	240

Tabela 1: Principais atividades envolvendo o uso do computador e da internet com os alunos.....	87
Tabela 2: Pontuação médio obtida por cada item do <i>SUS</i>	237
Tabela 3: Avaliação dos princípios de usabilidade de Nielsen (1993) a partir do <i>SUS</i>	238

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Ai	Estudante <i>i</i>
AP	Avaliação da aprendizagem
appAAP	Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEP	Conselho de Ética em Pesquisa
CETIC	Centro de Estudos Tecnologias da Informação e da Comunicação
CGI.br	Comitê Gestor da Internet no Brasil
DRi	Dica de resolução <i>i</i>
EAi	Especialista <i>i</i> do grupo A
EBi	Especialista <i>i</i> do grupo B
Ei	Estratégia <i>i</i>
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
ERE	Ensino Remoto Emergencial
Gi	Grupo de conceitos <i>i</i>
GPS	Sistema de Posicionamento Global
IFRS	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MSL	Mapeamento Sistemático da Literatura
Pi	Procedimento <i>i</i>
PNi	Pergunta e resposta norteadora <i>i</i>
PWA	<i>Progressive Web Application</i>
Qi	Questionamento <i>i</i>
QRi	Questionamento reflexivo <i>i</i>
SDP	Solução de problemas dinâmicos
SEAD	Secretaria de Educação à Distância
SPC	Solução de problemas complexos
SPi	Situação-problema <i>i</i>
SUS	<i>System Usability Scale</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TD	Tecnologias Digitais
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UERGS	Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Web App	Aplicação Web Móvel
API	<i>Application Programming Interface</i>
JSON	<i>JavaScript Object Notation</i>
CSS	<i>Cascade Style-Sheet</i>
CI	<i>Continuous Integration</i>
NAP	Não Assinalou Procedimento(s)
NCA	Não Consultou Ajuda
GS= <i>i</i>	Grau de Similaridade <i>i</i>

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA	20
1.2 OBJETIVOS	20
1.3 ESTRUTURA DA PESQUISA	20
2. DESENVOLVIMENTO COGNITIVO E COMPETÊNCIA COGNITIVA	24
2.1 APRENDIZAGEM E ESTRUTURAS DO CONHECIMENTO	28
2.1.1 <i>Pensamento operatório formal</i>	35
2.2 RELAÇÕES ENTRE ESQUEMAS, ESTRUTURAS E COMPETÊNCIAS COGNITIVAS	39
2.2.1 <i>Lógica das formas e atravessamento dos conteúdos</i>	44
2.3 ESTRATÉGIAS COGNITIVAS: RELAÇÕES ENTRE FAZER E COMPREENDER, SABER E CONHECER	46
2.3.1 <i>Perturbações e desequilíbrios cognitivos: fontes dos progressos</i>	54
3. MATEMÁTICA PARA GENERALIZAR E RESOLVER PROBLEMAS	58
3.1 RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA E ESTRATÉGIAS COGNITIVAS	62
3.1.1 <i>Situações-problema no Enem: avaliando competências e habilidades</i>	66
3.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO: CARACTERIZAÇÃO E HABILIDADES	68
3.2.1 <i>Pensar algebricamente: apontamentos sobre estratégias, dificuldades e erros</i>	74
4. TECNOLOGIA DIGITAL COMO APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA	85
4.1 ACOMPANHAR A APRENDIZAGEM DOS ESTUDANTES: A AVALIAÇÃO ENQUANTO PROCESSO	88
4.2 FERRAMENTAS DIGITAIS NA AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM	92
4.3 MOBILIDADE E CONECTIVIDADE: DISPOSITIVOS MÓVEIS NA EDUCAÇÃO	99
4.3.1 <i>Requisitos para desenvolvimento de um aplicativo educacional</i>	103
5. A BUSCA POR EVIDÊNCIAS DE ESTRATÉGIAS COGNITIVAS	112
5.1 DEFINIÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA USADAS NA INVESTIGAÇÃO	114
5.1.1 <i>Geração de dados</i>	114
5.1.2 <i>Procedimentos e critérios para seleção das situações-problema</i>	116
5.1.3 <i>Resultados: análise e discussão das situações-problema selecionadas</i>	119
5.1.4 <i>Considerações I</i>	133
5.2 DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO PARA IDENTIFICAR EVIDÊNCIAS DE ESTRATÉGIAS COGNITIVAS	135
5.2.1 <i>Geração de dados</i>	135
5.2.2 <i>Procedimentos e critérios para seleção e análise dos dados</i>	140
5.2.3 <i>Resultados: elaboração de modelos de avaliação para cada situação-problema</i>	141
5.2.3.1 <i>Modelo de avaliação Vila Lângaro</i>	147
5.2.3.2 <i>Modelo de avaliação Praça dos Arcos</i>	161
5.2.3.3 <i>Modelo de avaliação Palco em construção</i>	172
5.2.3.4 <i>Modelo de avaliação Estacionamento</i>	181

5.2.4 Resultados: um método para identificar evidências de estratégias cognitivas	191
5.2.4.1 Vila Lângaro: testagem do método de identificação	194
5.2.4.2 Praça dos Arcos: testagem do método de identificação	197
5.2.4.3 Palco em construção: testagem do método de identificação	199
5.2.4.4 Estacionamento: testagem do método de identificação	202
5.2.5 Considerações II	205
5.3 O APLICATIVO DE APOIO A AÇÃO PEDAGÓGICA - APPAAP	211
5.3.1 Resultados: testes e avaliações do módulo estudante do appAAP	217
5.3.1.1 Vila Lângaro: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP	218
5.3.1.2 Praça dos Arcos: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP	224
5.3.1.3 Palco em construção: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP	228
5.3.1.4 Estacionamento: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP	231
5.3.2 Resultados: avaliação de critérios de qualidade de uso do appAAP	237
5.3.3 Considerações III	242
5.3.4 Apresentação do módulo docente do appAAP	245
6. CONCLUSÕES	248
REFERÊNCIAS	252
APÊNDICE 1 – APROVAÇÃO CEP – UERGS E CEP – IFRS	264
APÊNDICE 2 – ITENS DO ENEM SELECIONADOS: ESCRITA ORIGINAL E REFORMULAÇÃO	265
APÊNDICE 3 – TCLE E QUESTIONÁRIO ESPECIALISTAS – 1ª ETAPA	269
APÊNDICE 4 – TCLE E CONVITE AOS ALUNOS – 2ª ETAPA	274
APÊNDICE 5 – ROTEIRO PARA REALIZAÇÃO DAS ENTREVISTAS CLÍNICAS	276
APÊNDICE 6 – MODELO DE AVALIAÇÃO E DIAGRAMAS <i>VILA LÂNGARO</i>	277
APÊNDICE 7 – MODELO DE AVALIAÇÃO E DIAGRAMAS <i>PRAÇA DOS ARCOS</i>	281
APÊNDICE 8 – MODELO DE AVALIAÇÃO E DIAGRAMAS <i>PALCO EM CONSTRUÇÃO</i>	285
APÊNDICE 9 – MODELO DE AVALIAÇÃO E DIAGRAMAS <i>ESTACIONAMENTO</i>	289
APÊNDICE 10 – POLÍTICA DE PRIVACIDADE E AUTORIZAÇÃO PARA USO DE DADOS – 4ª ETAPA	293
APÊNDICE 11 – DADOS ACERCA DA TESTAGEM DO APPAAP – 4ª ETAPA	294
APÊNDICE 12 – TCLE E AVALIAÇÃO DO APPAAP – 4ª ETAPA	299
APÊNDICE 13 – GRÁFICOS DA AVALIAÇÃO DE USABILIDADE (SUS) DO APPAAP	304
APÊNDICE 14 – PRODUÇÃO CIENTÍFICA DURANTE O PERÍODO DE DOUTORAMENTO	306

1. INTRODUÇÃO

[...] a era digital requer aprendizagens de ordem superior que ajudem a viver na incerteza e na complexidade.
(GÓMEZ, 2015, p. 24).

No cenário atual, considerando os desafios impostos pela pandemia COVID-19, em todos os âmbitos fica cada vez mais evidente o papel das tecnologias de informação e comunicação (CGI.br, 2020). Vive-se em um mundo de acesso facilitado a múltiplas fontes de informação em virtude do avanço das Tecnologias Digitais (TD) (MOLON *et al.*, 2020). Por isso, referenciando a GÓMEZ (2015) trazido na epígrafe acima, exige-se dos sujeitos no século XXI o exercício de pensamento analítico para buscar, selecionar, analisar, compreender e validar informações que possam ser transformadas em conhecimento mobilizado na busca por soluções a velhos e novos problemas.

Para um engenheiro mecânico, por exemplo, saber “de cor” uma lista de fórmulas de resolução de integrais para cálculo de vibrações mecânicas não é imprescindível. Contudo, é fundamental que ele saiba onde buscar informações (inclusive essas) de forma confiável e, principalmente, que consiga aplicar corretamente os conceitos relacionados e procedimentos adequados diante de uma situação nova ou problema a resolver.

Nesse sentido, o essencial é a capacidade de elaborar estratégias cognitivas para a obtenção de êxito nas tarefas demandadas, seja em ambientes de educação formal ou não. E, por conseguinte, a compreensão do que se faz e de como fazer, ou seja, da lógica subjacente a cada procedimento ou conteúdo, o que torna possível o reconhecimento de situações semelhantes que possam ser resolvidas partindo de processos transpostos de experiências anteriores.

Essa capacidade geral para a resolução de problemas é compreendida enquanto competência cognitiva (SPERAFICO; DORNELES; GOLBERT, 2015) e deveria ser o fio condutor da educação escolar. Desenvolver competência cognitiva não se refere à capacidade de memorizar informações dadas, mas à mobilização de informações, conhecimentos ou procedimentos variados e a possibilidade de recorrer a conhecimentos (re)construídos por cada sujeito a partir de interações com objetos (PIAGET, 2007).

Sendo assim, é importante pensar de que forma a educação formal pode proporcionar espaços para que os estudantes desenvolvam suas competências cognitivas. Ao encontro disso, direciona-se ao professor a tarefa de desafiar seus estudantes propondo-lhes atividades que os levem a articular recursos (conceitos, procedimentos, habilidades etc.) para solucionar novos e variados problemas e a construírem seus próprios conhecimentos. Por consequência, ao professor recai, ainda, a responsabilidade de acompanhar e avaliar o processo de aprendizagem de seus estudantes.

Acredita-se na necessidade de que os professores devam ser pesquisadores em sala de aula no sentido de buscar entender onde estão as dificuldades de compreensão de seus alunos para que possam fornecer auxílio mais direcionado. Para tanto, o professor deve ter a investigação como intenção básica por trás de toda e qualquer tarefa realizada pelo aluno (HOFFMANN, 2017). É compromisso docente buscar compreender como auxiliar cada estudante a desenvolver a sua própria capacidade de aprender e de resolver problemas variados.

Aliado a isso, o professor precisa interpretar os processos e resultados apresentados pelos estudantes nas tarefas propostas. Um ensino comprometido deve considerar, entre outros aspectos, “sondar a capacidade cognitiva do sujeito da aprendizagem como condição de qualquer prática docente e sondá-la por intermédio de práticas centradas na atividade discente” (BECKER, 2012, p. 42). Portanto, é necessário que o professor tome conhecimento acerca de elementos relacionados ao desenvolvimento cognitivo de seu aluno e busque compreender “que tipo de raciocínio está construindo; como lida com as operações lógicas; que características têm o seu pensamento: se é reversível, se é transitivo, se a sua capacidade de representação está bem desenvolvida etc.” (FRANCO, 1995, p. 82).

Investigar aspectos gerais acerca do desenvolvimento cognitivo é importante, porém, “além das estruturas gerais de pensamento, pode-se investigar os procedimentos de resolução de problemas, isto é, os aspectos funcionais do raciocínio” (SILVA; FREZZA, 2011, p. 192). Logo, questionamentos como “Por que meu aluno respondeu dessa forma? Por que não respondeu? O que entendeu ou deixou de entender? Como posso ajudá-lo?” (HOFFMANN, 2017, p. 74) fazem parte da atividade docente.

Destaca-se que a investigação dessas características funcionais ganha relevância ainda maior na medida em que se considera estudantes dos anos finais da educação básica

ou ingressantes do ensino superior, ou seja, jovens ou adultos. Tomando por base estudos de Piaget e Inhelder, Silva e Frezza (2011) discutem que o sujeito, ao se envolver na busca pela solução de algum problema, age e opera com base em seus esquemas e estruturas cognitivas, o que permite que ele aborde a situação de forma lógico-matemática, na perspectiva do sujeito epistêmico (PIAGET, 2007). Apesar disso, há elementos do comportamento dos sujeitos e de suas ações e condutas diante de situações que lhe exigem ação e busca por solução, que dependem também de aspectos inerentes ao sujeito psicológico (INHELDER, 1978).

Ademais, no caso dos adolescentes e adultos, não se pode desconsiderar o aspecto dos conteúdos, pois aqueles que estão mais próximos de experiências vivenciadas ou conhecidas pelo sujeito implicam numa maior facilidade de estabelecimento de relações e de aplicabilidade a situações variadas e, portanto, maior possibilidade de acionamento de esquemas e estruturas já construídas por reconhecimento de situações (reconhecimento). Por sua vez, a falta de familiaridade com conteúdo pode levar o sujeito a enfrentar dificuldades para assimilar às suas estruturas cognitivas o novo objeto de conhecimento, gerando por vezes perturbações, que podem ocorrer em erros ou lacunas (PIAGET, 1976a).

Uma disciplina escolar em que essas dificuldades são evidenciadas e reconhecidas no senso comum é a matemática, que, historicamente, é considerada difícil pelos estudantes da educação básica ao ensino superior. A aprendizagem da matemática exige habilidades e conhecimentos em níveis cada vez mais complexos e estruturados, assim como capacidade de mobilizar diferentes recursos cognitivos para elaborar estratégias e resolver situações-problema, também, mais elaboradas e articuladas (BRASIL, 2018).

Desde a educação básica, a construção do conhecimento matemático apresenta complexidades (conceituais, simbólicas etc.) e, com o passar dos anos escolares, são introduzidas estruturas teóricas para representar e explicitar essas situações (NUNES; BRYANT, 1997). Além da estruturação lógica do conhecimento matemático, há de se considerar, especificidades inerentes aos próprios conteúdos. Existem dificuldades intrínsecas à transposição do conhecimento matemático da sala de aula para a resolução de situações-problema contextualizadas. Nem sempre os estudantes conseguem transpor de uma forma de pensar a outra, adaptando as representações anteriores a novas situações

e, ainda, conseguindo utilizá-las em contextos nos quais a necessidade do emprego de conhecimento matemático esteja implícita.

Considerando o exposto, é importante pensar em recursos que possam favorecer os processos de ensino e de aprendizagem e, mais especificamente, apoiar o docente no acompanhamento dos estudantes. A busca por evidências das estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes ao longo da resolução das atividades que lhes são propostas pode auxiliar o professor a entender as dificuldades enfrentadas por eles. Assim, ele pode auxiliá-los a superar lacunas e retomar os erros numa perspectiva construtiva, através da proposição de desafios mais adequados e apoio pedagógico direcionado, na medida do possível.

Conseguir realizar tal tarefa seria muito bom para o processo de ensino, porém, a execução de atividades avaliativas com o viés investigativo aqui proposto impõem dificuldades de execução, seja em função do quantitativo de alunos das turmas atendidas, seja pelo tempo que seria necessário para tal. Na maioria das vezes, cada professor atua em múltiplas turmas em cada período letivo e isso dificulta a realização de um mapeamento eficiente das dificuldades específicas de cada estudante e das estratégias cognitivas que estes utilizam ao lidar com problemas de diferentes ordens.

Com base nos argumentos apresentados, justifica-se a necessidade da presente pesquisa que teve origem da inquietação docente da autora diante das dificuldades de aprendizagem em matemática (área de atuação) que os estudantes demonstram, tanto no ensino médio quanto ao ingressar no ensino superior. Por sua vez, com a pandemia de COVID-19, essa necessidade tornou-se ainda mais evidente, já que o “fechamento das escolas e universidades direcionou as atividades educacionais para as redes e os ambientes virtuais” (CGI.br, 2020, p. 73). Isso levou docentes de todos os níveis de ensino a busca por estratégias de acompanhamento da aprendizagem dos seus alunos de forma remota e, muitas vezes, por meio de atividades assíncronas (LUDOVICO *et al.*, 2020; MOLON *et al.* 2022), tendo em vista problemas de acesso e conectividade, conforme a pesquisa Tic Educação 2019¹ (CGI.br, 2020), que dificultou atividades on-line síncronas.

Independentemente do momento pandêmico, a complexidade inerente à realização da avaliação dos processos de aprendizagem dos alunos, aliada a possibilidade de utilizar as TD em um contexto de avaliação formativa (PERRENOUD, 1999) ou mediadora

¹ https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/20201123090444/tic_edu_2019_livro_eletronico.pdf

(HOFFMANN, 2018) são aspectos que evidenciam a contribuição que esse trabalho pode trazer.

O mapeamento sistemático da literatura realizado com a finalidade de apontar ferramentas ou recursos digitais utilizados para a avaliação da aprendizagem em contextos educacionais, publicado em outro momento por Molon, Nicolao e Franco (2020), pode evidenciar o caráter inovador da proposta. Um aspecto diferencial se refere, justamente, à busca por uma ferramenta de apoio ao trabalho docente na identificação de evidências das estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes ao longo do processo de resolução de situações-problema, possibilitando o acompanhamento dos raciocínios dos alunos.

Em outras palavras, a própria concepção da ferramenta, pautada nos pressupostos teóricos adotados na pesquisa, diferencia-se. Destacam-se as teorizações de Jean Piaget do desenvolvimento cognitivo, da equilibração² e da abstração reflexionante³, com enfoque nas relações lógicas, e de seus colaboradores no que tange ao processo de aprendizagem, especialmente a compreensão de Inhelder (1978) acerca de aspectos inerentes aos procedimentos e estratégias de resolução de problemas. Além disso, Perrenoud integra o arcabouço teórico da pesquisa, dialogando com as abordagens piagetianas supracitadas, tanto ao que se refere às competências cognitivas (PERRENOUD, 2007) quanto ao processo de avaliação formativa (PERRENOUD, 1999) em paralelo à avaliação mediadora na perspectiva de Hoffmann (2018).

Optou-se pelo pensamento algébrico, como campo de investigação, em função desse ser caracterizado, em essência, enquanto capacidade de estabelecer relações, modelar, generalizar, operar com o desconhecido (incógnitas, variáveis etc.) e construir significados a esses elementos (ALMEIDA; SANTOS, 2017). Essas ações podem ser manifestações das competências cognitivas (PERRENOUD, 1999) ou dos esquemas e estruturas cognitivas (PIAGET, 1976a) dos sujeitos presentes na atividade de resolução

² A Teoria da Equilibração (PIAGET, 1976a) procura explicar o desenvolvimento e a formação do conhecimento a partir de perturbações e da necessidade de busca de um novo patamar de equilíbrio que implica em avanço cognitivo (PIAGET, 2007). Ver seção 2.1.

³ A Abstração Reflexionante (PIAGET, 1995) apoiando-se nas coordenações de ações do próprio sujeito sob um objeto de conhecimentos, explica a criação de novidades por meio dos processos de reflexionamento e reflexão dando origem a novos conceitos cada vez mais complexos por meio da projeção e reorganização em patamares superiores de conhecimento. Ver seção 2.1.

de um problema dessa natureza que, ainda, envolve outros conhecimentos (geométrico, aritmético etc.).

1.1 Problema de pesquisa

A partir do contexto apresentado configurou-se a questão-problema desta pesquisa: *Como identificar evidências de estratégias cognitivas elaboradas por estudantes durante a resolução de situações-problema em matemática e de que forma obtê-las por meio de uma ferramenta digital?*

1.2 Objetivos

Esta pesquisa teve por objetivo geral delinear um método para identificar evidências de estratégias cognitivas utilizadas por estudantes durante a resolução de problemas matemáticos, vinculados ao pensamento algébrico, para ser implementado em um Aplicativo web de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP).

Para o alcance desse objetivo, a presente pesquisa desdobrou-se nos objetivos específicos listados abaixo:

1. Investigar e compreender processos cognitivos vinculados à resolução de situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos;
2. Definir requisitos técnicos e pedagógicos para o desenvolvimento da aplicação *web* correspondente;
3. Avaliar o atendimento a critérios de qualidade de uso do appAAP.

1.3 Estrutura da pesquisa

Com o intuito de contemplar os temas de interesse para essa pesquisa, o texto foi estruturado em seis capítulos, detalhados a seguir.

O capítulo 1, “*Introdução*”, é destinado à apresentação da temática, do contexto e da problematização do estudo.

O capítulo 2, “*Desenvolvimento Cognitivo e Competência Cognitiva*”, apresenta uma densa revisão acerca das teorias que embasam o estudo, especialmente ao que se refere a aprendizagem e ao desenvolvimento cognitivo na perspectiva piagetiana. De forma concomitante, este capítulo discute a compreensão acerca da manifestação de competências cognitivas dos sujeitos na medida em que aspectos estruturais e funcionais do pensamento são abordados, tendo em vista o público-alvo da pesquisa, jovens e adultos. Outros elementos essenciais para a análise de dados também fazem parte do escopo desse capítulo, tais como as relações entre fazer e compreender e a elaboração de estratégias cognitivas frente a um problema a resolver, os desequilíbrios cognitivos enquanto fonte para progressos no estado de conhecimento dos sujeitos e o atravessamento dos conteúdos na lógica formal, tendo em vista as experiências de vida dos sujeitos.

O capítulo 3, “*Matemática para generalizar e resolver problemas*”, retoma, de certa forma, os aspectos do capítulo anterior, mas, agora, com centro no desenvolvimento do conhecimento matemático. Discute a elaboração de estratégias cognitivas especialmente no contexto da resolução de situações-problema cuja modelagem e resolução exijam conhecimentos algébricos, caracterizando esse tipo de situação-problema a partir da matriz de referência utilizada no Enem. Apresentam-se diferentes formas do pensamento algébrico e, por fim, discutem-se estratégias, dificuldades e erros apontados na literatura que são frequentemente associados a cada uma dessas formas.

O capítulo 4, “*Tecnologia Digital como apoio à ação pedagógica*”, discute a temática da utilização das tecnologias digitais nos processos educacionais. Essa seção direciona o trabalho à importância da avaliação como instrumento de apoio aos processos de ensino e de aprendizagem e da instrumentalização do professor para a efetivação de uma avaliação formativa ou mediadora em sala de aula. Discute, ainda, características de tecnologias digitais e, enfatiza aspectos relativos à conectividade e mobilidade no uso de aplicações móveis na educação. Por fim, apresenta características a serem consideradas no desenvolvimento de aplicativos educacionais e critérios para a avaliação de qualidade de uso dessas aplicações.

No capítulo 5, “*A busca por evidências de estratégias cognitivas*”, optou-se por apresentar o percurso metodológico da pesquisa, que contempla quatro etapas. Tendo em vista que as escolhas metodológicas para geração e análise de dados diferenciava-se em

função dos objetivos a serem atingidos, optou-se por fracionar, em três subseções, a apresentação do percurso metodológico e apresentar de modo concomitante os respectivos resultados. Acredita-se que essa estrutura contribuirá para a compreensão do leitor acerca de todo o trabalho desenvolvido. Assim, a seção 5.1 aborda a etapa de definição dos itens de investigação; a seção 5.2 explora os movimentos realizados para a elaboração do modelo de avaliação de cada uma das situações-problema elencadas e da obtenção do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas; e, finalmente, a seção 5.3 dedica-se ao trabalho de concepção, desenvolvimento e testagem do Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP) disponível em: <https://aapaap-teste.vercel.app/>. Nesta última parte do capítulo 5, descreve-se também o processo de validação do método descrito na subseção anterior e os apontamentos em termos de usabilidade que foram realizados por estudantes que testaram a aplicação. Além disso, o módulo docente (<https://aapaap-teste.vercel.app/professor>) também é apresentado.

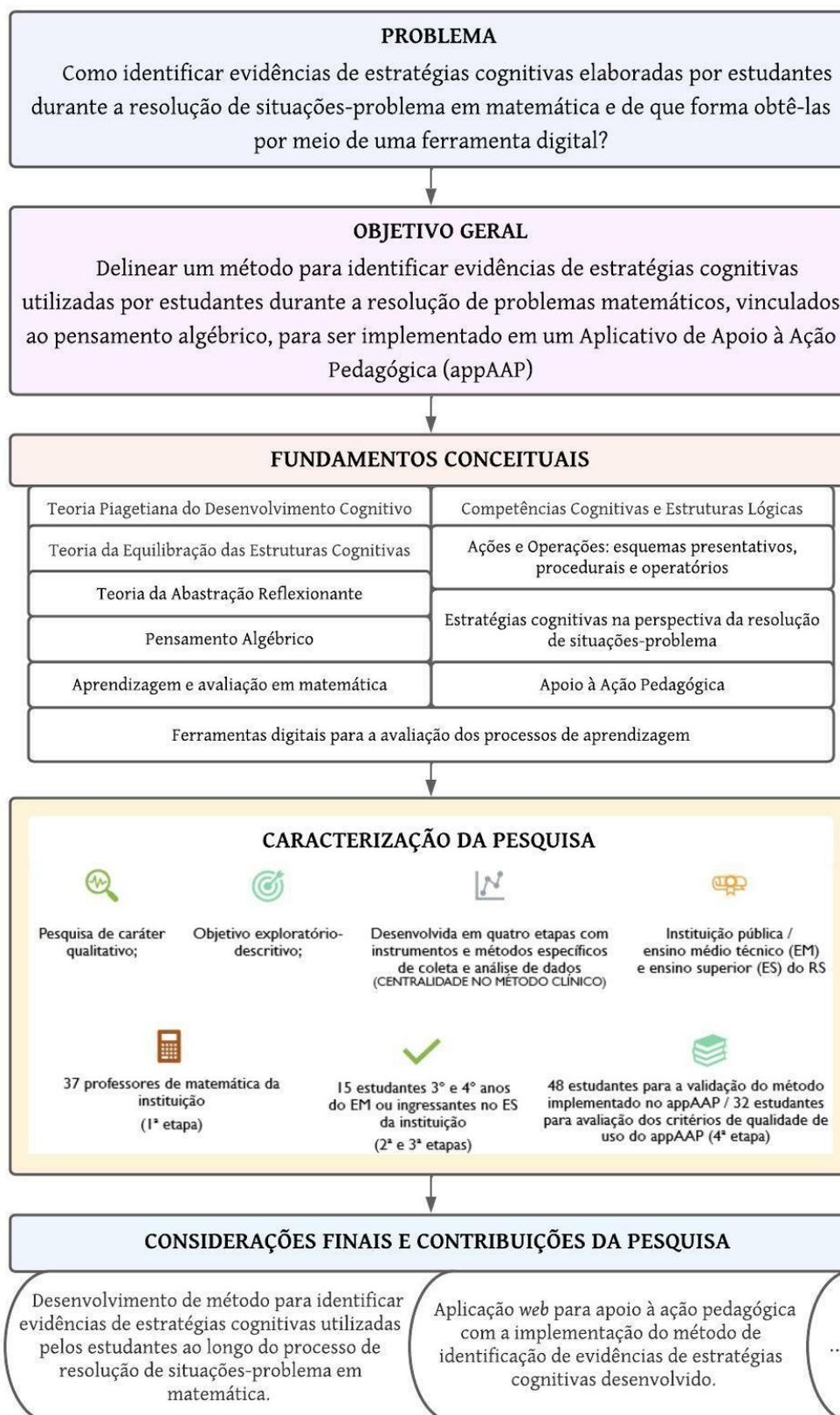
Finalmente, o capítulo 6, “*Considerações Finais*”, encerra o trabalho retomando o problema de pesquisa e os objetivos traçados. Além disso, aponta novos horizontes para a continuidade da pesquisa e descreve limitações e dificuldades enfrentadas ao longo do processo, especialmente em relação ao desenvolvimento desta pesquisa em meio à uma pandemia. Nesse momento, a autora do trabalho também optou por discorrer algumas palavras acerca do seu próprio processo de aprendizagem ao longo do período de doutoramento.

Em “*Referências Bibliográficas*” citam-se as obras usadas na tese.

Os *Apêndices* (de 1 a 13) trazem documentos elaborados para apoiar à realização da pesquisa ou a apresentação de seus resultados, os quais são mencionados ao longo do texto. Por fim, o *Apêndice 14* apresenta a produção científica da autora durante o período de doutoramento.

Finaliza-se essa introdução com a Figura 1 com uma visão geral da pesquisa.

Figura 1: Visão geral da pesquisa



2. DESENVOLVIMENTO COGNITIVO E COMPETÊNCIA COGNITIVA

Aprender algo exige uma competência intelectual de acordo com a complexidade do que se aprende, mas exige, sobretudo, que se saiba utilizar adequadamente tal competência.
(COLL, César; 1987, p. 182)

A Epistemologia Genética de Piaget é uma teoria do desenvolvimento do conhecimento que “tem como interesse estudar a gênese das estruturas cognitivas, explicando-a pela construção” (MARQUES, 2005, p. 50). Ao falar de desenvolvimento cognitivo, é preciso esclarecer o que a Epistemologia Genética entende por cognição e, paralelamente, por inteligência, procurando compreender de que formas elas se relacionam. Cognição e inteligência não podem ser entendidas como sinônimos, mas possuem estreitas relações que têm início na ação do sujeito sobre um objeto de conhecimento.

Uma ação, seja prática ou mental⁴, caracteriza-se “por ser uma conduta ou comportamento do sujeito com um objetivo delineado por ele próprio” (MOLON; TOEBE; FRANCO, 2018, p. 3). Considera-se, assim, que todo conhecimento surge das ações do sujeito sobre o mundo a partir do que lhe afeta, do que lhe desperta interesse ou diante de uma necessidade a ser satisfeita. Logo, a partir de experiências e percepções individuais o próprio sujeito vai construindo, progressivamente, seu conhecimento que “não só surge da ação, como sempre consistirá numa ação” (FRANCO, 1995, p.22).

A necessidade do sujeito de conhecer, ou seja, de tornar semelhante a algo que já conhece, um objeto que lhe impõe certa resistência, o coloca em ação e o leva a modificar-se, a adaptar as estruturas cognitivas já construídas ou a construir novas a fim de ampliar a sua capacidade de conhecer, a sua cognição. A cognição é uma forma de adaptação e reorganização das estruturas cognitivas do sujeito em função do meio externo (PIAGET, 2007).

Entende-se inteligência, no âmbito da Epistemologia Genética, como capacidade de resolução de problemas. Assim, a inteligência subordina-se ao desenvolvimento cognitivo, uma vez que a cognição, como capacidade de conhecer, se amplia na medida

⁴ Uma ação mental é entendida como operação, que será definida na sequência.

em que o sujeito constrói estruturas de conhecimento cada vez mais complexas em função da necessidade de adaptação ao meio. Dessa forma, a inteligência se relaciona ao processo de adaptação diante da necessidade da busca por soluções ou caminhos para o enfrentamento desses problemas. Esse processo de adaptação envolve, necessariamente, dois momentos não ordenados: a assimilação e a acomodação (PIAGET, 1982), através dos quais o próprio sujeito constrói ou reorganiza suas estruturas cognitivas que lhe possibilitarão fazer inferências e envolver-se na busca por solução a problemas cada vez mais complexos e dinâmicos.

A assimilação é o movimento propulsor, interno, operado pelo sujeito, que visa a construção de capacidades cognitivas e conhecimentos cada vez mais elaborados, o que implica a atribuição de significados aos objetos de conhecimento. Portanto, é através da assimilação que o sujeito “confere uma significação às coisas” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 117). Por sua vez, a atribuição de significado relaciona-se ao sistema de significações do próprio sujeito, o qual vai se constituindo a partir da sua própria capacidade de inferir (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1991), sendo esse significado sempre pessoal, já que é fruto de construção de conhecimento por parte do próprio sujeito (MACHADO, 2002).

Em resumo, a assimilação e acomodação são dois movimentos complementares do processo de adaptação que se constitui como elemento primordial para que ocorra a construção de conhecimentos em níveis cada vez mais avançados. Frente a um objeto de conhecimento existem duas possibilidades para o sujeito: ou ele assimila imediatamente, sendo capaz de estabelecer relações, significando, a partir de esquemas ou estruturas já construídas, ou é necessário que o sujeito modifique suas estruturas assimiladoras, melhorando-as para que seja possível assimilar, processo denominado de acomodação.

A passagem de um conhecimento mais simples a um mais avançado reconstruído em um patamar superior é fruto de equilíbrios. A partir de um desequilíbrio (da necessidade de adaptação do sujeito ao meio), gerado pela tentativa do sujeito de assimilar um objeto desconhecido, é necessário avançar para atingir o equilíbrio, num processo de acomodação dessas novas estruturas (PIAGET, 2007). Equilibrar-se, após uma perturbação provocada pela resistência imposta por um objeto de conhecimento na tentativa de ser assimilado, exige avançar em termos de estruturação cognitiva para adaptar-se ao meio (PIAGET, 1976a). Por isso, trata-se de um processo dinâmico. Assim,

“no caso da adaptação, podemos precisar que o equilíbrio se faz entre dois polos: - a assimilação, relativa ao organismo, que conserva sua forma; - a acomodação, relativa à situação exterior, em função da qual o organismo se modifica” (PIAGET, 2014, p.5).

Por isso, é melhor fazer referência a esse processo como equilibração, já que o termo explicita a ideia de movimento, como o andar de bicicleta, onde o sujeito para manter-se equilibrado deve movimentar-se e avançar, sendo que o equilíbrio não significa retorno ao ponto em que se encontrava antes da perturbação (PIAGET, 2007). Esse novo estado de equilíbrio é alcançado em patamar superior daquele que não possibilitou ao sujeito assimilar o objeto anteriormente e, portanto, representa um avanço no seu estado de conhecimento, seja em compreensão ou extensão.

São as transformações nas estruturas do organismo que implicam em mudanças na sua organização. Por isso, a adaptação, enquanto invariante funcional, assim como as transformações são necessárias para a manutenção dessa organização, tanto no aspecto biológico quanto cognitivo. Nesse sentido, a assimilação e a acomodação são duas funções que, na medida em que promovem modificações estruturais, garantem a continuidade e o funcionamento da organização. Piaget (1958, p. 59) *apud* Montangero e Maurice-Naville (1998, p. 115) resume a assimilação como “uma associação acompanhada de inferência” que comporta três aspectos: reprodução (repetição / exercício), reconhecimento (discriminação) e generalização (transposição). Esses três processos (repetição, reconhecimento e generalização) também constituem um esquema de ação (PIAGET, 1982). Na teoria piagetiana, o esquema de ação é considerado como instrumento de assimilação que tem por função tornar "transponível, generalizável ou diferenciável" uma situação (PIAGET, 1973c, p. 16).

Os esquemas de ação “manifestam-se pelo reconhecimento de situações em que o esquema é aplicável, isto é, reproduzível, por sua transposição generalizadora a situações novas, e por sua significação implicativa que confere às ações” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 27). Logo após executada determinada ação, a repetição, não como cópia, mas como retomada do comportamento, é fundamental para seu aperfeiçoamento. Dessa forma, cada vez que se faz algo outra vez, não se está copiando o que havia sido feito antes, pois cada ciclo diferencia-se do anterior por estar mais evoluído.

Já a reconhecimento, por se tratar do reconhecimento de uma ação (ou de um esquema de ação), representa um caminho para se chegar à generalização, ou seja, à utilização de

um esquema de ação para fim diferente daquele que lhe deu origem. E, por fim, quando determinado problema é resolvido utilizando certo raciocínio transposto de outras situações é porque houve generalização, é evidência de construção dessa estrutura cognitiva, da mesma forma como ocorre com os esquemas de ação (PIAGET, 1982). Assim sendo, a capacidade de mobilizar múltiplos recursos na busca de solução para novos problemas que se caracteriza enquanto competência cognitiva é uma forma de manifestação de uma estrutura construída, de certo nível de desenvolvimento cognitivo, possibilitado pelo alcance da generalização desses esquemas e estruturas.

A expressão “competência cognitiva”, na teoria piagetiana, refere-se às condições preliminares, ou seja, estruturas mentais que tornam possível a realização de algo, considerando os aspectos funcionais dessas estruturas e as condições do meio. De acordo com Inhelder e Piaget (1976, p. 16), “para que um organismo seja capaz de fornecer uma resposta, ele deve ter alcançado um certo nível de ‘competência’ que é traduzida por uma sensibilidade específica às incitações do meio que, até então, haviam permanecido ineficazes”⁵.

Essa compreensão justifica a escolha da epígrafe que abre esse capítulo. De acordo com a EG, as estruturas operatórias constituem a base do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo é marcado por progressivas conquistas individuais em termos de estruturação mental ou lógica. Deste modo, patamares de conhecimento cada vez mais complexos são alcançados através de construções realizadas pelo sujeito, de acordo com suas possibilidades biológicas (maturação) a partir de experiências e interações com objetos de conhecimento (PIAGET, 1972a).

Do nascimento à vida adulta as estruturas mentais do sujeito evoluem de acordo com os seguintes estágios⁶ do desenvolvimento cognitivo: sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal, estando presente a capacidade de realizar operações a partir do estágio operatório concreto. Uma operação “é um grupo de ações modificando o objeto, e possibilitando ao sujeito do conhecimento alcançar as

⁵ Destaca-se, assim, que ao longo de todo o texto, o termo “competência” deve ser compreendido dentro do contexto aqui descrito e, portanto, distanciando-se das compreensões associadas à competência no “mundo do trabalho”, que nesse caso, atendem demandas do capitalismo neoliberal, que não se adequa a esse estudo. A seção 2.2 aprofunda essa discussão.

⁶ Alguns autores preferem fazer referência aos “estádios” de desenvolvimento cognitivo. Aqui se optou por utilizar o termo “estágio” e não “estádio” acreditando que a caracterização quanto à constituição de um estágio trazida ao longo do texto é suficiente para excluir interpretações que não condizem com a EG quanto aos diferentes significados do termo.

estruturas da transformação” (PIAGET, 1972a, p. 1). A noção de operação é tanto de natureza “estrutural (enquanto elemento de estrutura) e funcional, porque se trata de uma atividade intelectual que assegura a ligação entre o sujeito pensante e o real” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 215), sendo, essa “ação reversível”, o centro de todo processo de construção.

Piaget (1956, 1972a, 1982, 1993) considera os estágios como “cortes” naturais do desenvolvimento, sendo que cada estágio é caracterizado a partir de estruturas cognitivas que ampliam as possibilidades do anterior. Neste estudo, considerando os indivíduos participantes da pesquisa, estudantes dos anos finais do Ensino Médio ou os ingressantes do Ensino Superior, o interesse volta-se, especialmente, ao último dos estágios do desenvolvimento cognitivo, o das operações formais.

Antes de abordar as características do pensamento operatório formal, no entanto, é preciso falar sobre a construção de esquemas e estruturas de modo associado ao processo de aprendizagem. Torna-se necessário, ainda, ampliar a discussão acerca da Teoria da Equilibração das Estruturas Cognitivas para explicar a construção de conhecimentos cada vez mais complexos e agregar a Teoria da Abstração Reflexionante para explicar a construção de novidades e dos conhecimentos formais. Todos esses aspectos intervêm no processo de aprendizagem, particularmente ao se considerar o público participante deste estudo (adolescentes e adultos) e a necessidade de compreensão de conceitos e procedimentos associados ao conhecimento algébrico, objetos de conhecimento que serão foco da investigação empírica dessa tese. A próxima seção destina-se a esse fim.

2.1 Aprendizagem e estruturas do conhecimento

*Aprender é proceder a uma síntese indefinidamente renovada
entre a continuidade e a novidade.*
(INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 263)

Como mencionado anteriormente, no âmbito da teoria piagetiana “a aprendizagem humana ocorre por força da ação do sujeito” (BECKER, 2012, p. 33). Aprender implica “ir atrás”, “buscar”, “agir”. Isso significa que a ação é o elemento propulsor de toda aprendizagem e toda ação é resultado de uma necessidade, de um objetivo a alcançar ou um desejo a satisfazer (LUDOVICO et al, 2021). O desejo de conhecer algo exige que o

sujeito se movimenta na direção de satisfazer sua necessidade da mesma forma com que se busca por alimento diante da fome, por exemplo.

Com centro na ação e nas relações entre sujeito e objeto de conhecimento, Piaget e Gréco (1974) distinguem duas variedades de aprendizagem. A primeira volta-se às aprendizagens oriundas das ações do sujeito que têm como resultado uma mudança de hábito ou de comportamento do sujeito da aprendizagem. A segunda refere-se à descoberta de alguma propriedade ou lei do próprio objeto, que de alguma forma retoma as ações da primeira variedade, porém exige certo grau de compreensão e de construção que excede a ação prática.

Considerando o exposto, a aprendizagem pode ser definida como ação prática, que ocorre quando o sujeito obtém êxito em suas atividades, tratando-se da aquisição de conhecimento com mudança de comportamento, conforme a primeira categoria. Sendo que uma aprendizagem mais ampla, segunda categoria, ocorre quando esta é acompanhada de equilibrações (PIAGET; GRECO, 1974), ou seja, de novos patamares de compreensão ou extensão de um domínio de conhecimento (descoberta ou ampliação acerca de propriedade do próprio objeto).

Salienta-se, entretanto, que Piaget e Greco (1974, p. 53) reservam “o termo aprendizagem a uma aquisição em função da experiência, mas se desenvolvendo no tempo, quer dizer, mediata e não imediata como a percepção ou a compreensão instantânea”.

Sendo assim, retomando o exposto no início deste capítulo, é através do processo de equilibração, de forma mediata, com o passar do tempo, que o sujeito consegue reconstruir suas ações em patamares superiores, atribuindo significados ao que realiza e aos conceitos que elabora, em processo de adaptação. Logo, a aprendizagem assim compreendida e acompanhada de equilibração amplia o poder de resolução de problemas, ou seja, aumenta o arsenal de recursos disponíveis para o enfrentamento de situações novas, a partir da construção de estruturas cognitivas, que oportunizam a (re)elaboração de conceitos cada vez mais complexos.

Contudo, é importante compreender que a aprendizagem está subordinada ao desenvolvimento cognitivo, cuja base é a construção de estruturas cognitivas enquanto prolongamento das estruturas biológicas (PIAGET, 1972a). Assim, para Piaget (1972a) as estruturas operatórias ou lógicas são a base do conhecimento e, portanto, do

desenvolvimento e, por consequência, também da aprendizagem, uma vez que um sujeito só pode aprender aquilo que é possível considerando as capacidades do estágio de desenvolvimento em que se encontra.

Toda estrutura cognitiva, para a Epistemologia Genética (EG), possui uma função ou finalidade específica, sendo justamente o seu funcionamento o que garante a sua existência. Além disso, é ao funcionamento da estrutura, não à sua existência propriamente, que se relaciona o estabelecimento de conexões lógicas (PIAGET, 1979a).

Na dicotomia estabelecida por Piaget entre organização e adaptação (sendo as duas funções estreitamente ligadas), o conceito de estrutura situa-se no polo da organização, o que estabelece relações entre partes e todo no interior do sujeito, e não no polo da adaptação que concerne às relações entre o sujeito e o meio. A partir de um certo nível de desenvolvimento, as condutas dos sujeitos são regidas pelas estruturas subjacentes que resultam da coordenação de suas atividades mentais. O sujeito não tem consciência dessas estruturas. São elas que dão às condutas um caráter lógico (MONTANGERO, MAURICE-DEVILLE, 1998, p. 181).

Vale destacar que as estruturas cognitivas são (re)construídas por cada sujeito, tendo características individuais, inclusive em termos de funcionamento. Metaforicamente, é como se houvesse vários caminhos possíveis para viajar de uma cidade (A) até outra (B). O modo de pensar do condutor, ou seja, o seu funcionamento, por razões diversas (tempo de viagem menor, conhecimento do caminho com melhores condições de trafegabilidade, escolha do caminho com menor número de pedágios etc.), o fará ir de (A) até (B) por um dos trajetos. Essa opção, por sua vez, poderá ser diferente da escolha que o passageiro que viaja ao seu lado faria, uma vez que o modo de pensar varia de um sujeito a outro.

Em resumo, de acordo com Piaget (1973b, p. 24), estrutura é “um sistema de transformações comportando as suas leis enquanto sistema, sendo estas, portanto, distintas das propriedades dos elementos”. Esse sistema possibilita autorregulações, que fazem com que seu funcionamento mantenha as propriedades características, de modo que qualquer elemento resultante desse processo esteja sempre contido no mesmo sistema. Uma estrutura pode admitir, também, subsistemas internos distintos do sistema total, mas mantendo a propriedade que o caracteriza, sendo possível, contudo, passar de um subsistema a outro através de transformações (PIAGET, 1973b). Em outras palavras, uma estrutura “é um conjunto de elementos relacionados entre si de tal forma que não se

podem definir ou caracterizar os elementos independentemente destas relações” (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 13).

A abstrata definição desse conceito pode ser ilustrada com a metáfora a seguir. Considerando o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$) e a operação adição como um sistema de transformações (uma estrutura), ao somar dois números naturais quaisquer, ainda se obtêm um número natural, ou seja, a operação soma, transforma, dois elementos distintos desse conjunto em um terceiro, o qual possui a característica invariante de todos os elementos do conjunto: ser número inteiro positivo.

Por outro lado, podemos considerar dois subconjuntos desse sistema, o dos números pares e o dos números ímpares (juntamente com a mesma operação de adição), como sendo subsistemas dessa estrutura geral. No entanto, ao somar dois números ímpares, por exemplo, tem-se como resultado um número par, ou seja, a transformação ocasionada pela soma de dois elementos que pertencem ao mesmo subconjunto resulta em um elemento que está contido em outro subconjunto. A transformação, nesse caso, ocasiona a passagem de um subsistema a outro, mas preserva a característica do sistema total, ou seja, o resultado da soma de dois números naturais será sempre um número inteiro positivo.

Assim, o conceito de estrutura, que deve ser concebido enquanto totalidade e não como soma simples de partes (LUDOVICO et al., 2021), possui o aspecto de continuidade sempre presente, bem como outros dois fatores fundamentais: a autorregulação e a transformação das estruturas cognitivas. Esses, na medida em que promovem a adaptação e garantem a existência da organização em termos de funcionamento, também ampliam a capacidade de enfrentamento de situações cada vez mais complexas e a assimilação de novos objetos de conhecimento.

Cabe também destacar que para explicar o processo de construção e evolução das estruturas cognitivas devem ser considerados, em conjunto, quatro fatores fundamentais que contribuem igualmente (PIAGET, 1972a, 1973c): a maturação biológica (ligada ao processo de embriogênese); a experiência (física ou lógico-matemática); a transmissão social (através da linguagem, por exemplo) e a equilibração (considerada como fator fundamental). Esses fatores contribuem não somente para explicar a evolução de um estágio a outro do desenvolvimento, mas são de grande valor para a compreensão das diferenças existentes entre indivíduos em um mesmo estágio intelectual.

Os aspectos que tornam a equilibração um elemento central já foram abordados ao longo desse texto. Em relação aos demais fatores, embora a maturação e a transmissão social sejam indispensáveis, uma vez que nenhum dos quatro fatores consegue explicar o desenvolvimento dos conhecimentos de modo isolado dos demais, Inhelder, Bovet e Sinclair (1977), assim como Piaget (1972a), destacam o importante papel que a experiência desempenha durante a gênese⁷ de todos os modos de conhecimento.

Todavia, esse papel é diferente no que tange à experiência física e à experiência lógico-matemática. “A experiência física consiste no agir sobre os objetos e construir algum conhecimento sobre os objetos mediante a abstração dos objetos” (PIAGET, 1972a, p.3), ou seja, refere-se à experiência no sentido mais comum da palavra. Já a experiência lógico-matemática diferencia-se, pois “é uma experiência das ações dos sujeitos e não uma experiência de objetos em si mesmos [...] que se faz necessária antes que possa haver operações” (PIAGET, 1972a, p. 4).

A experiência lógico-matemática é aquela que faz com que o sujeito tire conclusões a partir de suas ações e coordenações de ações acerca de propriedades que não pertencem propriamente aos objetos. Por exemplo: uma criança diante de um punhado de balas pode ordená-las de diferentes formas e ao contá-las perceber que a quantidade de balas é sempre a mesma, independentemente do modo como as ordena. Ou seja, por exemplo, o número 1 que ela atribui à primeira bala de cada ordenamento não pertence a bala, ele é inerente a sua ação de ordenar e enumerar.

Piaget (1972a) destaca uma importância pedagógica à diferenciação do papel assumido por cada tipo de experiência. A partir das experiências físicas, os sujeitos abstraem informações dos próprios objetos. Porém, é justamente a partir de experiências do tipo lógico-matemáticas que o sujeito abstrai conhecimentos que não estão dados nos objetos, mas que podem ser deduzidos, apreendidos, a partir de suas próprias ações sobre os objetos. A abstração caracteriza-se como atividade do sujeito conhecedor que conduz à construção de seu conhecimento a partir das características extraídas/retiradas dos objetos ou de suas coordenações de ações sobre estes objetos (PIAGET, 1995). Desde quando nascem, todas as pessoas ao interagir com o mundo, abstraem elementos que servirão de base para a formação e desenvolvimento de seus esquemas e estruturas cognitivas. Desse modo, todo “conhecimento é, de fato, abstraído, isto é, retirado do real

⁷ Gênese enquanto processo de constituição de esquemas e estruturas cognitivas.

e transformado em algo ‘humano’” (FRANCO, 1995, p. 35). Ao abstrair, o sujeito acrescenta relações aos dados perceptivos.

Há dois tipos de abstrações, as empíricas e as reflexionantes (PIAGET, 1995) cuja distinção também é de grande relevância numa teoria de aprendizagem. Na abstração empírica, o sujeito extrai características, informações ou qualidades do próprio objeto a conhecer a partir do que é sensível, do que pode ser abstraído pelos sentidos, por exemplo, observado ou tateado (PIAGET, 1995). Na abstração reflexionante, esses elementos são retirados, pelo sujeito, da coordenação das suas ações (ou das coordenações de coordenações das suas ações e assim por diante) e de operações (ações reversíveis interiorizadas), ou seja, não são realizadas a partir, unicamente, das propriedades físicas dos objetos, não são perceptíveis diretamente por meio dos sentidos (PIAGET, 1995).

Assim, “a abstração reflexionante é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores” (PIAGET, 1995, p. 193). Esse tipo de abstração “se apoia sobre as formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas, coordenações de ações, operações, estruturas, etc.) que delas retira certos caracteres e os utiliza para outras finalidades” (BECKER, 2013, p. 72).

A abstração reflexionante contempla dois aspectos: reflexionamento e reflexão. O reflexionamento é a projeção no patamar superior de qualidades retiradas das coordenações de ações do sujeito em um patamar inferior. A reflexão consiste na reorganização mental do que foi transferido pelo reflexionamento ao patamar superior em função do que já existia, dando origem a uma nova organização (BECKER, 2012).

Também dentre as abstrações reflexionantes temos que diferenciar duas: a pseudoempírica e a refletida. A abstração refletida ocorre quando há tomada de consciência do processo reflexionante percorrido para a aquisição de conhecimento, ou seja, “é o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente” (PIAGET, 1995, p. 274). O processo de tomada de consciência implica “transformar um esquema em conceito, de ideias explicitadas e reconstruir no plano das representações o que foi realizado no plano das ações, organizar no plano do discurso o que assimila na ação” (DONEL, 2015, p. 54). Ele ocorre acompanhado de abstrações reflexionantes, por meio das quais o sujeito torna-se capaz de levantar hipóteses e realizar generalizações

construindo conhecimentos cada vez mais complexos que permitem compreender conceitos em seu mais alto nível de formalização (PIAGET, 1995).

Por sua vez, a abstração pseudoempírica apoia-se sobre os observáveis (do que pode ser percebido pelos sentidos), mas não retira características do que é diretamente observado, mas aquelas atribuídas pelo próprio sujeito ao que foi observado. Por exemplo, ao reconhecer que a boca de um copo de café (plástico de cor branca) é de formato circular o sujeito está realizando abstração reflexionante do tipo pseudoempírica, pois o círculo bem como a circunferência são entes abstratos cujo conceito é construído pela mente do sujeito a partir de suas coordenações de ações, uma vez que o copo em si, não contém o círculo, nem a circunferência, ou seja, não são características extraídas diretamente do objeto. Ao passo que concluir que o copo é branco ocorre por abstração do tipo empírica, ou seja, a cor é uma característica retirada diretamente do observável.

Assim, os conceitos que o sujeito elabora ao longo de sua vida são construídos via abstrações reflexionantes. O conceito de circunferência é muito diferente de reconhecer uma circunferência. O conceito é mais complexo por envolver diferentes níveis de compreensão de elementos anteriores, deve ser construído pelo sujeito, não pode ser transmitido por outra pessoa, por um professor, por exemplo.

Afinal, transmitem-se informações; capacidades cognitivas operatórias, como os conceitos, de modo todo especial os conceitos matemáticos, precisam ser construídas. É essa construção que produz conhecimento novo, que possibilita a passagem de conhecimentos ou capacidades cognitivas mais simples a conhecimentos ou capacidades cognitivas mais complexos (BECKER, 2019, p. 985).

Portanto, a teoria da abstração reflexionante (PIAGET, 1995) é muito importante para explicar o pensamento que está por trás de toda construção matemática e da construção de conhecimentos universais e necessários. Esta teoria pode ser usada para explicar a construção de conceitos cada vez mais complexos como as construções em nível operatório formal, no qual o sujeito consegue transformar os conteúdos em formas de pensamento tirando conclusões que independem da observação de elementos reais.

A próxima seção destina-se a explorar as características do pensamento operatório formal, último estágio de desenvolvimento cognitivo da teoria piagetiana, e discutir a influência dos conteúdos nas condutas e escolhas dos sujeitos no estágio operatório formal, frente a um problema a resolver.

2.1.1 Pensamento operatório formal

*Este é o pensamento do cientista, que não fica só observando a realidade, mas levanta hipóteses e ainda por cima faz previsões a partir de cálculos matemáticos, que não são nada reais.
(Ninguém jamais viu um teorema passeando por aí...)
(FRANCO, 1995, p. 4)*

Um sujeito operatório formal é assim considerado porque é capaz de operar sobre as formas de pensamento (sobre operações) de modo desvinculado do seu conteúdo, ou melhor, transforma formas em conteúdo do pensamento. Assim, faz-se necessário esclarecer o que se entende por *forma* e *conteúdo*. Pode-se dizer que a forma se refere à lógica que o sujeito utiliza para resolver determinado problema, tirar certa conclusão, independentemente dos conteúdos associados que, nesse caso, são os conhecimentos próprios de uma disciplina ou a temática abordada em uma proposição, por exemplo.

Desde Kant⁸, a palavra forma significa “relação generalizável, ordem, coordenação ou, mais simplesmente, universalidade” (ABBAGNANO, 2007, p. 469). Esse sentido é o utilizado pelos lógicos como representação de relações que se mantêm independentemente da associação de conteúdo. Esse autor traz, como ilustração, a forma da inferência: “*Se p, então q*” que permanece constante apesar das proposições *p* e *q* e indica uma necessidade lógica: sempre que se tem *p* então se tem também *q*. Por exemplo: a sentença “*Se entrar na água então irei me molhar*” traz as proposições *p*: *entrar na água* e *q*: *irei me molhar*. A condicional “*Se p, então q*” implica dizer que *se entrar na água*, necessariamente, *irei me molhar*.

A elaboração do pensamento formal marca o período operatório formal (início aos 11-12 anos em média). Nesse estágio de desenvolvimento cognitivo o sujeito desenvolve a capacidade de raciocínio hipotético-dedutivo, de operar sobre os possíveis sem a necessidade de recorrer ao real ou a sua representação, de construir o pensamento probabilístico, combinatório e proporcional.

O pensamento formal constitui, ao mesmo tempo, uma reflexão da inteligência sobre si mesma (a lógica das proposições constitui um sistema operatório de segunda potência, e que opera com as proposições cuja verdade depende de

⁸ Immanuel Kant (1724-1804), filósofo alemão, autor do livro *Crítica da Razão Pura*. Para ele a intuição sensível (por meio dos sentidos) é o que permite conhecer os objetos, sendo as categorias (espaço, tempo, quantificação, causalidade etc.) construídas a partir dessa intuição, ou seja, a posteriori. Por exemplo: o que um indivíduo conhece sobre um objeto foi construído por ele como imagem mental, mas não conhece o objeto em si. Assim, percebe-se a aproximação entre os pensamentos de Kant e Piaget.

operações de classes, de relações e de números) e uma inversão das relações entre o possível e o real (pois o real é colocado, como setor particular, no conjunto das combinações possíveis) (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 254).

A capacidade de pensar de forma operatória, ou seja, de “organizar as informações em sistemas, conservando essas informações, e conseguindo lidar com as várias relações possíveis neste sistema, reversivelmente (indo e vindo)” (FRANCO, 1995, p. 47) já marca o estágio das operações concretas. O que diferencia a estruturação do período operatório formal é, justamente, a coordenação (ou integração) das negações e inversões em um único sistema que constitui o *grupo INRC de quatro transformações*, sendo essa a estrutura lógica de conjunto, base das conquistas desse estágio de desenvolvimento cognitivo. O INRC “constitui um grupo comutativo relativamente à sua composição” (PIAGET, 1976b, p.272), conforme representado no Quadro 1.

Quadro 1: Grupo das quatro transformações INRC

	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Fonte: PIAGET, 1976b.

Nota-se que a partir de uma combinação de proposições obtemos: a operação identidade (I) que remete à própria combinação; a sua negativa (N); a sua recíproca (R), que se dá por inversão e a sua correlativa (C), que surge da negação da inversão. Esse quadro garante as cinco propriedades abaixo (PIAGET, 1976b), as quais são congruentes às da estrutura matemática de um “grupo comutativo”, conhecido também como “grupo abeliano”:

1) *Fechamento*: a composição de quaisquer dois elementos do conjunto resulta em um elemento que pertence a ele;

2) *Associatividade*: a composição de dois elementos do grupo, por exemplo, A e B, com um terceiro C, fornece igual resultado da composição entre A com a composição de B com C, obtida previamente, ou seja, $(AB)C=A(BC)$;

3) *Elemento neutro*: existe um elemento neutro tal que o resultado da sua composição com qualquer elemento do grupo é esse próprio elemento;

4) *Elemento inverso*: cada elemento do grupo possui um inverso e a composição de um elemento com seu inverso resulta no elemento neutro;

5) *Comutatividade*: a composição de dois elementos do grupo fornece igual resultado independentemente da ordem de realização da composição.

Dessa forma, no grupo das quatro transformações (INRC) tem-se, por exemplo, que a negativa da recíproca é a correlativa ($NR = C$), a negativa da correlativa corresponde à recíproca ($NC=R$), a recíproca da correlativa equivale à negativa ($RC = N$). Por fim, é possível retornar à identidade através da composição entre a recíproca, a negativa e a correlativa ($RNC^9 = I$). Nesse grupo, a identidade (I) é o elemento neutro, de modo que, $NI = N$, $RI = R$ e $CI=C$. No conjunto INRC cada elemento é seu próprio inverso, o que significa que a realização de duas transformações iguais de forma sucessiva retorna ao estado inicial da combinação, $NN=I$, $RR=I$ e $CC=I$. Já a comutatividade garante, por exemplo, que $NR = C = RN$ ou $CR = N = RC$.

Cabe ressaltar ainda a aproximação entre esse grupo e a lógica das proposições com suas combinações possíveis, outra característica desse estágio. Ao considerar duas proposições “ p ” e “ q ”, cada uma delas podendo assumir valor lógico verdadeiro (V) ou falso (F), a relação entre “ p ” e “ q ” junto às suas negações resultam em dezesseis operações: conjunto das partes de um conjunto de quatro elementos (p ; $não-p$; q ; $não-q$). Sobre essas operações agem as transformações do grupo INRC (PIAGET, 1976b) que são “operações sobre operações” ou operações de segundo grau (PIAGET, 1995).

Portanto, enfatiza-se o salto qualitativo em termos de possibilidades de construção cognitiva do estágio das operações formais em relação aos anteriores. Esses aspectos evidenciam que a lógica do adolescente, suas estruturas mentais e a forma como são utilizadas, difere da lógica da criança tanto em termos de operatoriedade do pensamento, quanto pelo arsenal de recursos que aqueles já adquiriram. “A lógica do adolescente é um sistema complexo, porém coerente, que é relativamente diferente da lógica da criança, e constitui a essência da lógica dos adultos cultos e ainda proporciona a base para as formas elementares do pensamento científico” (PIAGET, 1993, p. 5).

⁹ Note que as propriedades elencadas evidenciam também que R, N e C podem ser combinadas em qualquer ordem e resultarão sempre em I.

Inhelder e Piaget (1976, p. 254) enfatizam que a lógica é “a expressão das coordenações operatórias necessárias à ação” e, no caso dos adolescentes em especial, há de se considerar as influências do meio. É nessa fase que ingressam no mundo dos adultos e, as experiências vividas, a leitura de mundo, os desejos e as teorias que os adolescentes criam, impulsionam suas ações. Contudo, isso ocorre porque suas estruturas mentais, já constituídas, lhes dão condições de abertura a novos possíveis (INHELDER; PIAGET, 1976).

O “adolescente é o indivíduo que, embora diante de situações vividas e reais, se volta para a consideração de possibilidades. [...] É o indivíduo que começa a construir sistemas ou teorias” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 252). Diferentemente da criança, que “não procura sistematizar suas ideias, pois não tem reflexão, isto é, um pensamento em segunda potência ou pensamento sobre o próprio pensamento, o que é indispensável para a construção de qualquer teoria” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 253). O adolescente se torna capaz de criar teorias e de explicá-las porque, de um lado, ele “tornou-se capaz de reflexão e, de outro, porque sua reflexão lhe permite fugir do concreto atual na direção do abstrato e do possível” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 254).

A característica mais geral do período operatório formal:

é, talvez, que um indivíduo não raciocina apenas sobre o que ali está, mas também sobre que não está presente, e chega a conclusões que extrapolam os dados imediatos e que, portanto, dizem respeito não só a dados reais como também aspectos simplesmente possíveis. Pode-se dizer, em suma, que o indivíduo raciocina não só sobre o real, mas também sobre o possível, e isto implica que o real se torna apenas uma parte do possível, aquela que se dá nesse instante, mas o possível estende-se sem limites e sempre pode crescer (DELVAL, 2013, p. 112).

Por sua vez, no período de transição entre a adolescência e a vida adulta é correto afirmar que ocorre certa especialização das estruturas cognitivas de cada indivíduo. O sujeito torna-se mais competente em determinado âmbito, uma vez que “as competências representam potenciais desenvolvidos sempre em contextos de relações disciplinares significativas, prefigurando ações a serem realizadas em determinado âmbito de atuação” (MACHADO, 2002, p. 143).

Nesse sentido, embora os adolescentes e adultos possam ser considerados operatórios formais, ou seja, capazes de isolar fatores, criar hipóteses, realizar uma reversibilidade completa, fazendo inferências e deduções, essas ações estarão mais

relacionadas às habilidades¹⁰ aperfeiçoadas em função de seus interesses pessoais ou profissionais (PIAGET, 1993). Por exemplo: o engenheiro mecânico da introdução desse trabalho, muito provavelmente, terá desenvolvido sua competência cognitiva para lidar com problemas matemáticos aplicados à sua área de atuação. Contudo, isso não significa que ele seria capaz de mobilizar, com destreza, os mesmos recursos diante de uma situação mais distante de sua atuação direta ou que exija recorrer a conteúdos que há muito tempo deixou de ter contato.

Sendo assim, é importante trazer à discussão aspectos que aproximam os esquemas e estruturas cognitivas e a manifestação de competências cognitivas dos sujeitos, o que será realizado na próxima seção.

2.2 Relações entre esquemas, estruturas e competências cognitivas

Uma competência seria, então, um simples esquema? Eu diria que antes ela orquestra um conjunto de esquemas. Um esquema é uma totalidade constituída, que sustenta uma ação uma operação única, enquanto uma competência com uma certa complexidade envolve diversos esquemas de percepção, pensamento, avaliação e ação.
(PERRENOUD, 1999, p. 24)

Não há uma definição única para o termo *competência* tendo em vista que ele é utilizado em diferentes contextos. No que tange à educação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define competência “como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8). Portanto, enquadra-se nessa definição o entendimento acerca do que um aluno deve *saber* (em termos de conceitos e procedimentos) e das habilidades que precisa construir para *saber-fazer*¹¹, além das atitudes e valores¹².

¹⁰ Habilidade, nesse contexto, refere-se às atividades realizadas pelo sujeito relacionadas ao “saber-fazer”, conforme será aprofundado nas seções 2.2 e 2.3.

¹¹ Optou-se por explorar a caracterização de *saber* e *saber-fazer* na seção 2.3 ao trabalhar de modo mais direcionado às estratégias cognitivas para enfrentamento de situações-problema.

¹² Embora compreender a importância das atitudes e valores, nesta tese, o foco centrou-se na investigação de conceitos, procedimentos e habilidades, tendo em vista que atitudes e valores são aspectos que exigiriam outras abordagens de pesquisa.

De acordo com Machado (2006), a caracterização da ideia de competência engloba seis aspectos fundamentais: pessoalidade, âmbito, mobilização, conteúdo, abstração e integridade, que podem ser agrupados em três eixos: pessoalidade/integridade; âmbito/abstração (ou extrapolação) e mobilização/conteúdo (MACHADO, 2010). Em resumo,

a competência é um atributo das pessoas, exerce-se em um âmbito bem delimitado, está associada a uma capacidade de mobilização de recursos, realiza-se necessariamente junto com os outros, exige capacidade de abstração e pressupõe conhecimento de conteúdos (MACHADO, 2006, p.1).

Além disso, “não existe uma competência sem a referência a um contexto no qual se materializa: a competência sempre tem um âmbito” (MACHADO, 2002, p. 143). No entanto, não se pode dizer que a competência se restringe a esse âmbito, pois maior será a competência desenvolvida, quanto maior for a capacidade de abstração (extrapolação) a outros contextos. “A competência pressupõe sempre a aderência a um contexto e, simultaneamente, a possibilidade de liberar-se dele, abstraindo suas peculiaridades não para distanciar-se de qualquer contexto, mas sim para descortinar novas contextualizações” (MACHADO, 2010, p. 46).

A mobilização é o terceiro elemento a ser considerado, uma vez que a competência implica retomar e colocar em prática recursos cognitivos de forma articulada para atingir certo objetivo (PERRENOUD, 1999). Nesse sentido, há de se atribuir importância aos conteúdos como recursos que devem ser buscados pelos sujeitos. Logo, o par mobilização/conteúdo também é essencial para a caracterização da noção de competência. Uma competência “não é um conhecimento ‘acumulado’, mas a virtualização de uma ação, a capacidade de recorrer ao que se sabe para realizar o que se deseja, o que se projeta” (MACHADO, 2002, p. 145).

As competências constituem, portanto, padrões de articulação do conhecimento a serviço da inteligência. Podem ser associadas aos esquemas de ação, desde os mais simples até às formas mais elaboradas de mobilização do conhecimento, como a capacidade de expressão nas diversas linguagens, a capacidade de argumentação na defesa de um ponto de vista, a capacidade de tomar decisões, de enfrentar situações-problema, de pensar sobre e elaborar propostas de intervenção na realidade (MACHADO, 2002, p.146).

A compreensão acerca do significado de “competência cognitiva” no contexto considerado nessa pesquisa, e voltado à aprendizagem, implica a aproximação e

articulação com dois conceitos centrais da teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget e de seus colaboradores: esquemas e estruturas. Esses elementos também são referenciados por Perrenoud ao longo de seu trabalho voltado ao desenvolvimento de competências com foco no cenário educacional. Ambos consideram como ponto de partida, seja para o desenvolvimento cognitivo ou de competências, a ação do sujeito e o aspecto construtivo dos esquemas e estruturas operatórias.

Uma característica fundamental para se identificar a constituição de um esquema ou estrutura é o aspecto generalizador (PIAGET, 1982), que se dá a partir da apropriação, por parte do sujeito, de suas ações e coordenações de ações, do estabelecimento de relações e de mensurações. Assim como Piaget, Perrenoud (1999) defende que a constituição de esquemas se deve à ação do próprio sujeito e exige prática e treinamento. Para o autor,

a construção de competências, pois, é inseparável da formação de esquemas de *mobilização* dos conhecimentos com discernimento, em tempo real, ao serviço de uma ação eficaz. Ora, os esquemas de mobilização de diversos recursos cognitivos em uma situação de ação complexa desenvolvem-se e estabilizam-se ao sabor da prática. No ser humano, com efeito, os esquemas não podem ser programados por uma intervenção externa. Não existe, a não ser nas novelas de ficção científica, nenhum “transplante de esquemas”. O sujeito não pode tão pouco [*sic*] construí-los por simples interiorização de um conhecimento procedimental. Os esquemas constroem-se ao sabor de um *treinamento*, experiências renovadas, ao mesmo tempo redundantes e estruturantes, treinamento esse tanto mais eficaz quando associado a uma postura reflexiva (PERRENOUD, 1999, p. 10).

Sendo assim, ao fazer referência à *competência cognitiva* tem-se que considerar a sua aproximação ao próprio processo construtivo de um esquema ou de uma estrutura mental da teoria piagetiana (repetição / reconhecimento / generalização), já que de acordo com Perrenoud (1999, p.23) “só há competência estabilizada quando a mobilização dos conhecimentos supera o tatear reflexivo ao alcance de cada um e aciona esquemas constituídos”. O próprio Perrenoud (1999, p. 23) baseia-se em Piaget e salienta que na “concepção piagetiana, o esquema, como estrutura invariante de uma operação ou de uma ação [...] permite, por meio de acomodações menores, enfrentar uma variedade de situações de estrutura igual”.

Diante do exposto, ao longo deste estudo, as competências cognitivas estão sendo compreendidas como “modalidades estruturais da inteligência, operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas

que deseja conhecer” (PESTANA, 1999, p. 7). Essa definição vai ao encontro dos pressupostos teóricos de Piaget e Perrenoud acima discutidos. Partindo dessa definição de Pestana (1999), três níveis de competências (Quadro 2) podem ser caracterizados: básico (presentativo); operacional (procedural) e global (operatório).

Quadro 2: Características das categorias de competências e esquemas relacionados

	Nível BÁSICO	Nível OPERACIONAL	Nível GLOBAL
Caracterização (ações ou operações)	Presentativos: tornam presente o objeto para o sujeito	Procedurais: pressupõem o estabelecimento de relações com e entre os objetos	Operatórios: envolvem aplicação de conhecimentos e solução de problemas novos
Principais atividades (incluir outras correlatas)	identificar, indicar, localizar, descrever, discriminar, apontar, constatar, nomear, ler, observar, perceber, posicionar, reconhecer, representar	associar, classificar, comparar, conservar, compreender, compor, decompor, diferenciar, estabelecer, estimar, incluir, interpretar, justificar, medir, modificar, ordenar, organizar, quantificar, relacionar, representar, transformar	analisar, antecipar, avaliar, aplicar, abstrair, construir, criticar, concluir, supor, deduzir, explicar, generalizar, inferir, julgar, prognosticar, resolver, solucionar

Fonte: Elaborado a partir de Pestana *et al.* (1999, p. 7-8).

O nível básico refere-se aos esquemas presentativos, “os que estão ligados às propriedades permanentes e simultâneas de objetos comparáveis” (PIAGET, 1987, p. 56) e, assim, esses esquemas assumem a função de tornar presente o objeto do conhecimento para o sujeito. Os esquemas presentativos englobam os esquemas representativos ou conceitos, por exemplo, “gato”, “círculo”, etc., mas também esquemas sensório-motores, por exemplo, “reconhecer que um objeto está “afastado”, mesmo que o sujeito não tente alcançá-lo” (PIAGET, 1987, p. 57). Além disso, os esquemas presentativos podem “ser facilmente generalizados e abstraídos de seu contexto” e se conservam “mesmo se estão incluídos em outros mais amplos (como o conceito de ‘gato’ incluído no de ‘animais’)” (PIAGET, 1987, p. 57).

Já o nível operacional engloba os esquemas procedurais que consistem em “ações sucessivas que servem de meio para alcançar um fim” (PIAGET, 1987, p. 57). Esses esquemas implicam a transferência de procedimentos de um contexto a outro mais complexo, embora “difíceis de se abstrair de seus contextos, pois são, em seus detalhes, relativos a situações particulares e heterogêneas” (PIAGET, 1987, p. 57). Os esquemas procedurais possuem uma conservação limitada: se para se chegar a um objetivo X o sujeito realiza N ações sucessivas, a primeira ação será meio para a segunda, essa para a terceira e, assim, por diante, de modo que os primeiros meios “não são mais empregados

quando intervêm os seguintes (em compensação, a evocação desses esquemas significa conservá-los, mas por reconstrução presentativa)” (PIAGET, 1987, p. 58).

Por fim, o nível global refere-se a ações e operações mais complexas vinculadas a esquemas ou a estruturas operatórias, que “constituem a síntese dos dois precedentes: enquanto ato temporal e momentâneo, uma operação é um procedimento, mas a estrutura intemporal das leis de composição entre operações apresenta os caracteres de um esquema presentativo de ordem superior” (PIAGET, 1985, p. 9).

Embora o Quadro 2 tenha apresentado atividades que podem ser associadas a cada um dos três níveis de caracterização de competências cognitivas (PESTANA, 1999), é importante destacar que na prática não se pode diferenciar exatamente se determinada atividade encaixa-se no nível básico, operacional ou global, pois elas podem não se limitar a um determinado nível, integrando outro(s) de acordo com os contextos de realização, por exemplo.

Tendo caracterizado o que se entende por competência cognitiva e apresentado, mesmo que de modo não exclusivo, atividades que se relacionam a cada um dos níveis (básico, operacional e global), é importante salientar que embora a construção de competências cognitivas possua um aspecto prático evidente, não se pode deixar de considerar fundamental o papel dos conhecimentos (MACHADO, 2010). Três tipos de conhecimentos podem ser caracterizados a partir das ciências cognitivas:

- os conhecimentos *declarativos*, os quais descrevem a realidade sob a forma de fatos, leis, constantes ou regularidades;
- os conhecimentos *procedimentais*, os quais descrevem o procedimento a aplicar para obter-se algum tipo de resultado (por exemplo, os conhecimentos metodológicos);
- os conhecimentos *condicionais*, os quais determinam as condições de validade dos conhecimentos procedimentais (PERRENOUD, 1999, p. 8).

A capacidade de identificar, de selecionar e de articular os recursos disponíveis (em termos de conceitos, procedimentos e habilidades) deve-se exatamente à competência cognitiva de cada sujeito. Um especialista, em uma determinada área ou assunto, “provido com os conhecimentos declarativos, procedimentais e condicionais mais confiáveis e mais aprofundados deve julgar sua *pertinência* em relação à situação e mobilizá-los *com discernimento*” (PERRENOUD, 1999, p. 9, grifos do autor). Em outras palavras, sua competência:

baseia-se, além da inteligência operatória, em esquemas heurísticos ou analógicos próprios de seu campo, em processos intuitivos, procedimentos de identificação e resolução de um certo tipo de problemas, que aceleram a mobilização dos conhecimentos pertinentes e subentendem a procura e a elaboração de estratégias de ação apropriadas (PERRENOUD, 1999, p. 9).

Nesse contexto, as habilidades constituem, também, um tipo de conhecimento, uma vez que uma habilidade pode ser compreendida enquanto capacidade de identificar quais conhecimentos, declarativos (conceitos) ou conhecimentos procedimentais (procedimentos), aplica-se ou não à determinada situação. Deste modo, a habilidade indica um conhecimento condicional.

Contudo, saberes, conhecimentos e habilidades não são mobilizados automaticamente, eles exigem envolvimento, ação, do sujeito sobre o objeto a conhecer. E, embora a mobilização seja elemento essencial para o desenvolvimento de uma competência, para se alcançar, por generalização, “tamanho automatização de funcionamentos cognitivos complexos, é preciso uma fortíssima redundância de situações semelhantes” (PERRENOUD, 1999, p. 25) de modo que essa capacidade de identificar os conhecimentos pertinentes seja construída. E mais, é preciso considerar, também, a interferência dos conteúdos na elaboração de estratégias para o enfrentamento dessas situações e o modo que a apreensão imediata de conteúdos, que ocorre a partir da assimilação dos dados do problema, interfere na lógica de abordagem que o sujeito irá elaborar.

2.2.1 Lógica das formas e atravessamento dos conteúdos

[...] só há construção e dialética formas/conteúdos se houver encontro destes com aquelas. A gênese não é autônoma ou independente das condições de seu aparecimento e não poderia se "realizar" sem o encontro e a interação com o que, do meio, vai se tornar seu "conteúdo".
(DOLLE, Jean-Dolle. 2011, p. 62)

Cada um dos estágios do desenvolvimento cognitivo, do sensório-motor ao operatório formal, é construído a partir da (re)organização da estrutura mental ou lógica do estágio anterior, em função de novas conquistas individuais. Logo, pode-se dizer que “a construção das estruturas da mente parte, portanto, da lógica das ações que se integrará na das operações concretas, as quais se integrarão na lógica das operações formais” (DOLLE, 2015, p. 13). Sendo assim, especificidades como o percurso formativo ou até

mesmo de interesses pessoais interferem nas expressões das capacidades cognitivas individuais, inclusive ao considerar ambientes de educação formal. Portanto, é importante compreendermos aspectos que caracterizam o raciocínio lógico formal, bem como a interferência dos conteúdos na construção de conhecimentos em nível operatório formal.

O raciocínio lógico pauta-se em regras que permitem a elaboração de conclusões e verificação da sua validade a partir do encadeamento de elementos (ideias, conceitos, procedimentos etc.) em função de basear-se sob as formas de pensamento como prolongamento da lógica das ações. Fica evidente que a estruturação de uma argumentação com coerência lógica exige dos sujeitos um pensamento que vai além do que pode ser observado. Entretanto, é importante considerar também a validade do conteúdo das afirmações assim como a estruturação formal ou lógica da argumentação quando se trata de concatenar argumentos relativos a conhecimentos científicos.

Frente a uma situação-problema em matemática, por exemplo, os estudantes precisam desenvolver essa capacidade de estruturar logicamente um percurso de resolução e construir esquemas que sintetizem os possíveis caminhos a serem seguidos para a obtenção de respostas satisfatórias. Ainda, precisam ser capazes de tomar decisões considerando o conjunto de variáveis em questão, de analisar as respostas e de identificar possíveis erros (ECHEVERIA; POZO, 1988) ou, até mesmo, antecipá-los numa perspectiva de pré-correção e autorregulação (PIAGET, 1976a).

Tais habilidades relacionam-se com a mobilização de estruturas cognitivas cujo processo de desenvolvimento ocorre de forma independente dos conteúdos (MACHADO, 2002; PERRENOUD, 1999), embora esses sirvam de meios para o processo de construção dos conhecimentos enquanto estruturas e para a elaboração de estratégias cognitivas com o objetivo de enfrentamento e busca por soluções a um dado problema (INHELDER, 1978). Assim sendo, mais uma vez enfatiza-se que os conteúdos curriculares são necessários, embora não suficientes, no processo de construção dos esquemas de ação e das estruturas mentais que poderão ser mobilizadas pelo indivíduo diante de problemas a resolver ou de situações que vivenciar. Contudo, são as formas ou estruturas de raciocínio que permitem estabelecer as relações entre os próprios conteúdos (conceituais ou procedimentais).

Além disso, independentemente de ser científico ou não, um conhecimento novo “gera novidade, não só pelo conteúdo adquirido, mas principalmente pela formalização

que o sujeito constrói sobre este conteúdo” (FRANCO, 1997, p. 17-18). Esse processo sempre sofre influência das significações atribuídas pelo próprio sujeito e, assim, mesmo que o conhecimento científico seja eminentemente pautado por sistemas lógicos, estes são, ainda, sistemas de significação. Contudo, todo conhecimento informal carrega, também, uma estrutura lógica em termos de funcionamento cognitivo, mesmo que tal lógica não se encontre no nível consciente do sujeito (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1991), já que a tomada de consciência é sempre *a posteriori* (PIAGET, 1975).

Sendo assim, a manifestação da competência cognitiva de um sujeito, frente a um problema a resolver, envolve aspectos inerentes aos seus esquemas e às estruturas constituídas ou em desenvolvimento (INHELDER; PIAGET, 1976), além de elementos retirados de suas experiências de vida. Também, implica a mobilização desses, enquanto conhecimento-estrutura aliado ao conhecimento-conteúdo, para a tomada de decisões acerca dos procedimentos de resolução que serão adotados (MACHADO, 2010; PERRENOUD, 1999; POZO, 1998). Todos esses fatores interferem na elaboração de estratégias cognitivas por parte de cada sujeito frente a uma situação que lhe exige ação (prática ou mental) para a busca de uma solução (INHELDER, 1978).

A ampliação dessa discussão é o foco das seções seguintes.

2.3 Estratégias cognitivas: relações entre fazer e compreender, saber e conhecer

El aspecto mas general de las estrategias consiste en un intercambio continuo de relaciones entre el sujeto que conoce y los objetos a conocer: el resultado de los procedimientos utilizados en cada ensayo modifica la comprensión del problema y, recíprocamente, la nueva interpretación de los observables modifica los procedimientos particulares. Igualmente, la comprensión del fracaso de los procedimientos empleados puede constituir un factor de progreso del conocimiento, y así hemos podido observar en numerosas ocasiones cómo los errores corregidos juegan un papel indispensable y positivo.
(INHELDER, 1978, p. 17)

A Epistemologia Genética (EG) preocupou-se, desde sua concepção, em investigar o sujeito epistêmico, ou seja, em buscar o que há de comum nas estruturas cognitivas dos que se encontram em um mesmo nível de desenvolvimento cognitivo (INHELDER, 1978). Aos poucos, as pesquisas de colaboradores de Piaget da Escola de Genebra, passaram a contemplar, também, aspectos inerentes ao sujeito psicológico para compreender as relações entre as escolhas realizadas na elaboração de estratégias para se

atingir um fim considerando questões inerentes aos diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo dos sujeitos (INHELDER, 1978).

Por sujeito psicológico, Inhelder (1978) compreende o que é próprio de cada indivíduo, como por exemplo, a necessidade de uma organização tendo em vista um objetivo a alcançar. Essa organização refere-se às estratégias cognitivas que os sujeitos elaboram e os procedimentos que realizam, progressivamente, enquanto meios para resolver um dado problema. Assim, por procedimento, considera-se “o desenrolar de ações que se encadeiam e são orientadas por fins. Os procedimentos são “sequências finalizadas de ações” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 20) e podem ser também concebidos “como ‘improvisações’ ou fonte de variações adaptativas da conduta” dos sujeitos (ibidem, p.21). Por conseguinte, como estratégia, Inhelder (1978) denomina

[...] todos os sistemas e todas as sequências de procedimentos, passíveis de serem repetidos e transferidos para outras situações, que constituam os meios para atingir o fim para o qual o sujeito tende. As noções de meio e fim são, naturalmente, relativas - uma vez que um meio pode ocasionalmente se tornar um fim e reciprocamente (INHELDER, 1978, p. 7, tradução nossa).

Pozo (2008, p. 235) compartilha dessa compreensão, pois para ele “as estratégias são procedimentos que se aplicam de modo controlado, dentro de um plano projetado deliberadamente com o fim de conseguir uma meta fixada”. Dessa forma, exige-se a percepção dos dados pertinentes àquele problema e a seleção de conhecimentos ou saberes que poderão ser utilizados. Logo, a análise das estratégias cognitivas deve concentrar-se nas sucessivas descobertas do sujeito, na medida em que ajusta os meios disponíveis para alcançar um fim e em analisar as razões das modificações operadas pelo sujeito para tanto (INHELDER, 1978). Assim,

O aspecto mais geral das estratégias consiste em um intercâmbio contínuo de relações entre o sujeito que conhece e os objetos a serem conhecidos: o resultado dos procedimentos empregados em cada ensaio modifica a compreensão do problema e, por sua vez, a nova interpretação dos observáveis modificam os procedimentos específicos (INHELDER, 1978, p. 19, tradução nossa).

Portanto, não é o fim propriamente que determina os meios, mas a representação do fim construída pelo sujeito levando em consideração a consciência que ele tem acerca das condições que precisam ser atendidas para a obtenção do fim por ele representado e a interpretação do próprio sujeito aos dados perceptivos da situação em curso

(INHELDER, 1978). Para tanto, três aspectos devem ser considerados Inhelder (1978, p. 8). Primeiramente, deve-se distinguir os procedimentos de ordem produtiva, quando “uma ação do sujeito produz um efeito com resultado”, dos procedimentos de ordem precursiva, nos quais a busca envolve antecipações.

De acordo com a autora, o problema central no estudo da organização das estratégias “consiste justamente na tentativa de apreender o processo de coordenação entre estas duas ordens de sucessão” dos procedimentos (INHELDER, 1978, p. 8). Logo, por exemplo, diante de um problema a resolver, é possível averiguar se as escolhas dos sujeitos priorizam procedimentos precursivos ou produtivos e avaliar os ajustes que foram realizados na tentativa de alcançar o objetivo do problema a partir dessas escolhas.

Nesse sentido, outro aspecto apontado por Inhelder (1978) refere-se às relações entre os procedimentos utilizados e a forma com o sujeito interpreta e compreende a realidade, ou seja, seus esquemas gerais, mesmo que os procedimentos não sejam, diretamente, originados desses esquemas. Na elaboração e execução de uma estratégia, pode ser que um primeiro procedimento leve o sujeito à um resultado positivo ou pode implicar em um erro ou representar algum obstáculo¹³ (INHELDER, 1978).

Ao tentar entender os motivos que não lhe possibilitaram alcançar o objetivo traçado, o sujeito recorre aos esquemas e estruturas já constituídos e à compreensão da realidade do problema para tentar ajustar os procedimentos que executará posteriormente. Ainda, mesmo no caso de antecipar que determinado procedimento tende a conduzi-lo ao êxito, o sujeito pode considerar esse caminho muito trabalhoso e, neste caso, buscar por simplificações, por meio da exploração dos elementos presentes no problema, procurando por outros procedimentos de resolução (INHELDER, 1978).

Nesse sentido, Inhelder (1978) chama atenção à existência de “uma espécie de alternância cíclica entre procedimentos precursivos ou proativos (orientados ao fim) e esforços de compreensão retrospectiva” (p. 8, tradução nossa) e diz que isso ocorre em todos os níveis de desenvolvimento, sendo que a eficácia das estratégias tende a aumentar progressivamente na medida em que estruturas mais complexas se organizam. Sendo assim, a análise dos procedimentos de resolução de problemas deve-se inserir na esfera

¹³ O conceito de obstáculo será discutido na seção 3.2.1 a partir das compreensões de Piaget, Inhelder, Bachelard e Brousseau.

construtivista, considerando os aspectos do sujeito epistêmico quanto a construção e ao funcionamento das estruturas cognitivas (INHELDER, 1978).

O terceiro aspecto a ser considerado no processo de análise das estratégias cognitivas elaboradas pelos sujeitos para alcançar certo objetivo “se refere a necessidade de tornar explícito em cada situação o jogo de significados - ou de representações significativas - que a criança [o sujeito] parece atribuir, por um lado aos meios e aos fins, e por outro às suas próprias ações e intervenções” (INHELDER, 1978, p. 8, tradução nossa). É esse aspecto que interliga os procedimentos de resolução à compreensão, sendo as representações significantes responsáveis “pela possível adaptação dos meios disponíveis à representação do fim” (INHELDER, 1978, p. 9, tradução nossa).

Desse modo, investigar as estratégias cognitivas elaboradas pelo sujeito diante de uma situação proposta, consiste em inferir a partir das ações, condutas, representações elaboradas, explicações etc. indícios sobre a organização desses procedimentos e sobre o planejamento do sujeito ao considerá-los. Nessa direção, Inhelder (1978) chama atenção para a indissociabilidade entre estruturas e procedimentos. Vale lembrar que são as estruturas cognitivas do sujeito que determinam sua competência cognitiva, o que ele pode fazer a partir de seu estado de conhecimento (INHELDER; PIAGET, 1976), mesmo que ele não tenha consciência disso, pois as estruturas são em essência inconscientes, mas manifestam-se através das condutas dos sujeitos. Para Inhelder e Caprona (1996, p. 20) “as estruturas formam o conjunto dos possíveis de partida, que permitem o desenvolvimento de procedimentos”. Por sua vez, os procedimentos são “condutas temporalizadas visando fins particulares e variáveis, enquanto as estruturas subjacentes ao pensamento são fruto de uma finalidade que é a própria microgênese” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 21). Portanto, tanto em relação às estruturas, quanto em relação aos procedimentos,

[...] a atividade cognitiva incide sobre transformações e correspondências. Ademais, construir uma estrutura ou inventar um procedimento supõe a assimilação de dados a esquemas e, conseqüentemente, uma atribuição de significações. Enfim, as inovações de procedimentos contribuem para a formação de estruturas operatórias (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 21-22).

Contudo, as condutas podem assumir aspectos mais particulares, de acordo com as experiências vividas por cada sujeito, de modo que, embora os procedimentos não possam ser observados, a sua organização pode ser inferida apoiando-se em “indícios pertinentes [...] dados pela própria conduta do sujeito” (INHELDER; CAPRONA, 1996,

p. 22). Assim, hipóteses e tentativas são indícios a serem considerados, pois compõem as estratégias cognitivas elaboradas por cada sujeito, sendo concebidas a partir da experiência individual e dos conhecimentos teóricos e práticos já construídos, compreendidos em ação ou dominados em pensamento pelo sujeito.

Nesse sentido, a obtenção de êxito a partir de determinada estratégia depende “tanto da maneira como a estrutura se adaptará à tarefa como da presença de [...] técnicas que contribuam para que o sujeito desenvolva de maneira efetiva seus planos” (ECHEVERRÍA, POZO, 1998, p. 26). As construções já elaboradas pelo sujeito, bem como os conteúdos conhecidos, podem influenciar na elaboração de diferentes estratégias cognitivas perante um mesmo problema a resolver e, conseqüentemente, influenciar também na escolha dos procedimentos que serão realizados.

Nota-se que “a análise de procedimentos incide sobre ações finalizadas, posto que há uma tarefa com fim a atingir” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 21) e, assim, a obtenção de êxito em uma tarefa, não implica, necessariamente, na compreensão ou tomada de consciência das razões das ações que levaram o sujeito a obter êxito. Por isso, é importante distinguir, ainda, características acerca da própria finalidade atribuída pelo sujeito frente a algo que lhe exige alguma ação.

Inhelder e Caprona (1996, p. 21) diferenciam uma “finalidade interna, na qual o fim é compreender para compreender (‘o que significa isso que eu fiz?’), de uma finalidade externa, em que o fim é um resultado que procuramos atingir”. Logo, é possível que certas tarefas sejam executadas a contento mesmo sem o sujeito compreender todos os elementos conceituais que estão por trás da obtenção do êxito em sua ação prática. Isso, por conseguinte, leva à distinção entre “fazer” e “compreender”.

No que concerne ao “saber-fazer”, o problema é antes de tudo determinar por que houve fracasso e como ser bem-sucedido (realizar) é “compreender o como fazer”, pois o “como fazer”, em si mesmo, supõe uma forma de compreensão que é distinta da compreensão conceitual e se relaciona aos procedimentos que permitiram tal ou qual solução (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 24).

Piaget (1978, p. 10) procurou estabelecer “as analogias e diferenças entre “conseguir” ou “fazer”, que é resultado do “*savoir faire*”¹⁴, e “compreender”, que é

¹⁴ Pode ser compreendido como conhecimento processual, prático ou saber-fazer.

próprio da conceituação, quer esta suceda à ação ou, ao contrário, a preceda e oriente”.
De acordo com o autor,

[...] fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação (PIAGET, 1978, p. 176).

Em resumo, “compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é, certamente, uma condição preliminar da compreensão, mas que esta ultrapassa, visto que atinge um saber que precede a ação e pode abster-se dela” (PIAGET, 1978, p. 179). A passagem de um saber-fazer à compreensão, ao pensamento, ocorre por meio da “transformação dos esquemas de ação em noções e operações” (PIAGET, 1978, p. 10) e, para tanto, é preciso considerar tanto as coordenações de ações, quanto as coordenações conceituais ou lógico-matemáticas.

Considerando o que já se tratou na seção 2.1, Piaget levanta a hipótese da existência de dois grandes sistemas complementares de esquemas: “o dos esquemas presentativos e o dos esquemas de procedimento, que explicariam o funcionamento cognitivo” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 28). Pode-se dizer, então, que esses sistemas, associam os esquemas (presentativos, procedurais e operatórios) à manifestação das competências cognitivas dos sujeitos que foram caracterizadas nos três níveis: básico, operacional e global, discutidos na seção 2.2.

O primeiro desses sistemas, denominado por “sistema representativo fechado, de esquemas e estruturas estáveis” (PIAGET, 1985, p. 09), que serve essencialmente para a compreensão do real, engloba os esquemas usados pelo sujeito para leitura e interpretação dos dados da realidade, ou seja, envolve atividades como identificar, indicar, localizar, descrever, apontar, nomear, ler, observar, perceber, reconhecer, representar, etc. que se referem ao nível básico das competências cognitivas, mas também contempla os esquemas operatórios enquanto estruturas.

O segundo sistema cognitivo refere-se ao “sistema de procedimento, em mobilidade contínua, que serve para ‘ter êxito’, para satisfazer necessidades” (PIAGET, 1985, p. 09). Enquanto o sistema presentativo pode ser visto como um sistema organizador e estruturante, o sistema de esquemas de procedimento possui uma função *heurística* (INHELDER; CAPRONA, 1996), ou seja, “através de invenções ou

transferências de processos” (PIAGET, 1985, p.09), o sujeito busca por desenvolver estratégias, articulando meios disponíveis para atingir um fim, um objetivo traçado por ele mesmo. Desse modo, associa-se ao sistema de esquemas de procedimento, competências cognitivas de nível operacional, pressupondo o estabelecimento de relações com e entre os objetos de conhecimento. O sistema de procedimento engloba os esquemas procedurais e esquemas operatórios, só que esses enquanto operações (PIAGET, 1987).

Em termos de funcionalidade desses dois sistemas, nota-se que “o primeiro visa compreender o conjunto de realidades físicas e lógico-matemáticas; o segundo serve para ter êxito em todos os domínios, desde as ações mais elementares até a solução de problemas abstratos” (PIAGET, 1987, p. 58). Logo, contempla-se aqui, ainda, o nível global de competências cognitivas o qual, conforme já descrito, envolve aplicação de conhecimentos e a resolução de problemas inéditos.

Esses dois sistemas cognitivos são importantes no âmbito desse estudo para a compreensão das ações dos estudantes ao longo das tarefas de resolução de situações-problemas, análise das estratégias cognitivas elaboradas e dos procedimentos realizados. Diante de um problema complexo a resolver, cada pessoa, a partir da organização atual de seus esquemas e suas estruturas, cria representações e atribui significados que lhe fazem sentido, utilizando-se de esquemas presentativos, procedurais e operatórios. As relações descritas nos últimos parágrafos estão indicadas na Figura 2.

Figura 2: Síntese sistemas cognitivos



Fonte: elaborada pela autora.

Essa mobilização de esquemas, seja por repetição, reconhecimento ou generalização, tem por intuito aproximar a situação a ser resolvida aos sistemas de significação do próprio sujeito com foco na elaboração de estratégias para enfrentamento do problema. Isso porque as estruturas do sujeito assimilam em função dos sistemas de significação constituídos previamente e é a reorganização das estruturas que possibilita assimilar, significar o objeto novo (DOLLE; BELLANO, 2008) e, no caso, é isso que possibilita a execução de procedimentos para a solução do problema.

O sistema de significação coaduna-se ao sistema de registro, que possibilita a leitura de dados da realidade, ou seja, que “informa ao sujeito sobre as propriedades, o estado e as transformações produzidas do mundo exterior, [...] e as transformações de seu próprio corpo, apreendido exterior e interiormente” e ao sistema de tratamento, que compreende as estruturas construídas e disponíveis (DOLLE; BELLANO, 2008, p. 25). Esses três sistemas (de significação, registro e tratamento) são indissociáveis, interagem entre si e “se referem a todos os aspectos do sujeito psicológico em interações entre si e com o meio” (DOLLE; BELLANO, 2008, p. 27).

Na teoria piagetiana, ainda, definem-se duas categorias de procedimentos, os figurativos e os operativos. Os procedimentos *figurativos* “se referem a tudo o que depende dos estados que se apresentam à percepção ou à evocação como configurações” (DOLLE, 2011, p. 32) e, em resumo, lidam com elementos do real percebidos pelos sentidos¹⁵, participando dos sistemas de registro. Já os procedimentos denominados *operativos* remetem a transformações desses elementos e das próprias estruturas de assimilação por meio de ações ou operações e vinculam-se aos sistemas de tratamento.

A identificação dos procedimentos realizados e a categorização desses enquanto figurativos ou operativos podem fornecer informações ricas para análise das estratégias elaboradas pelos sujeitos no contexto de investigações inspiradas no método clínico piagetiano (DOLLE, 2011), como este estudo. De acordo com Dolle (2011), a relação entre esses dois procedimentos é fundamental para o processo de construção dos conhecimentos. A percepção que integra os procedimentos figurativos é a maneira pela qual se pode conhecer o real e as coisas em suas características particulares. Nesse contexto, saberes e conhecimentos devem ser vistos como

¹⁵ Os procedimentos *figurativos* podem ser associados aos esquemas *presentativos* citados na seção 2.3.

[...] representações organizadas do real, que utilizam conceitos ou imagens mentais para descrever e, eventualmente, explicar, às vezes antecipar ou controlar, de maneira mais ou menos formalizada e estruturada, fenômenos, estados, processos, mecanismos observados na realidade ou inferidos a partir da observação (PERRENOUD, 2001, p.18).

Contudo, embora imprescindível para se chegar ao conhecimento, o que é admitido através dos sentidos é o saber. Esse antecede aquele e a passagem de um ao outro implica processos operativos. Assim, “o conhecimento que se opõe ao saber o integra em um segundo movimento, estabelecendo relações dialéticas, tendo em vista que, sendo o conhecimento universal, ele pode ser tomado como a relação das singularidades ou das particularidades” (DOLLE, 2011, p. 34).

Por fim, há de se observar que os procedimentos de resolução que são adotados, e as próprias ações realizadas pelo sujeito no decorrer do processo de construção levam a modificações e, conseqüentemente, à reorganização das estratégias cognitivas elaboradas. Partindo disso, erros ou lacunas podem gerar perturbações, colocar o indivíduo em desequilíbrio cognitivo, um terreno fértil para a elaboração de novas construções, avanços cognitivos e aprendizagens. Esse é o tema que será aprofundado na seção seguinte.

2.3.1 Perturbações e desequilíbrios cognitivos: fontes dos progressos

[...] todo sujeito se encontra confrontado permanentemente com conteúdos que lhe opõem resistências e que o funcionamento das estruturas que ele adquiriu não lhe permite assimilar imediatamente. Entretanto, ele continua se empenhando sem parar. É por isso que, por meio do funcionamento dessas estruturas, ele cria aos poucos, transformando-se para se adaptar ao domínio dos conteúdos que ainda lhe escapam das estruturas mais adequadas. E assim sucessivamente. O funcionamento é, portanto, estruturante. E se pode dizer, sem incorrer em erro, que ele cria as estruturas como a energia cria a matéria.
(DOLLE, Jean-Marie, 2011, p. 44)

Ao considerar a epistemologia genética, “toda construção é o produto de uma compensação com relação às perturbações que lhe deram nascimento” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 20). A tentativa de assimilar um objeto novo pode gerar um desequilíbrio nas estruturas cognitivas do indivíduo. Os “desequilíbrios são sentidos pelos sujeitos como conflitos ou mesmo como contradições” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 250). Diante disso, o sujeito deve “equilibrar-se” e a base do

processo de equilíbrio está nos dois momentos (não ordenados) que constituem a própria adaptação, ou seja, na assimilação e na acomodação.

A partir de algo que lhe gera um desequilíbrio, o sujeito tende a realizar ações, “interações entre esquemas que tomam, muitas vezes, o aspecto de compromisso ou de compensações parciais, antes de alcançar sistemas de compensações operatórias completas” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 250). Assim, os desequilíbrios podem ser fonte de progressos no estado de conhecimento do sujeito. Eles “incitam o sujeito a ultrapassar seu estado atual para procurar soluções novas” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 256), o que implica em mudanças na sua organização.

Três mecanismos estão relacionados com a produção de melhorias e progressos nas diferentes formas de equilíbrio. Inicialmente, destaca-se o caráter generalizador dos esquemas e estruturas (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977), já que o equilíbrio final de uma estrutura cognitiva possibilita que uma mesma forma de pensar seja aplicada a situações diferentes de modo generalizado. No entanto, a

generalização encontra mais cedo ou mais tarde resistências que podem provir, ou da extensão de outros esquemas que conduzem a resultados contraditórios, exigindo do sujeito que procura uma certa coerência um remanejamento de cada um dos esquemas presentes, ou de sua limitação a campos particulares de aplicação, mas já nesse caso com diferenciação e complementaridade (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 256).

Nesse sentido, “as situações que tornam ótimas as oportunidades de progresso são aquelas em que o sujeito pode confrontar, uns com os outros, esquemas previamente bem experimentados de natureza e complexidade diversas” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 256), esse sendo apontado como o segundo dos mecanismos vistos como fonte de progressos. Por fim, “em terceiro lugar, os processos de inferência com seus aspectos de antecipação e de retroação entram em jogo” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 256), influenciando nas transformações das estruturas cognitivas.

Como já abordado ao longo do presente capítulo, nas estruturas acabadas, como as estruturas formais do pensamento lógico-matemático, as transformações não extrapolam as regras de conjunto da própria estrutura. Porém, nas estruturas em construção, nas quais o organismo pode ser compreendido como um centro de funcionamento em contínua atividade, os processos de transformação (regulação e autorregulação) não ficam reduzidos às regras internas (PIAGET, 1973b). As regulações podem ser compreendidas como reações às perturbações (PIAGET, 1976a) e acarretam

correções ou *feedbacks* (positivos ou negativos), na medida em que se relacionam a cada uma das variedades de perturbação: erros ou lacunas.

A primeira compreende as que se opõem as acomodações: resistências do objeto, obstáculo às assimilações recíprocas de esquemas eu de subsistemas etc. São em resumo as causas de fracassos ou de erros, na medida em que o sujeito se torna consciente disso, e as regulações que lhe correspondem comportam, então, *feedbacks* negativos. A segunda classe de perturbações, fontes de desequilíbrios, consiste, ao contrário em lacunas, que deixam as necessidades insatisfeitas e se traduzem pela insuficiente alimentação de um esquema. Mas convém precisar, e isto é essencial, que não é qualquer lacuna que constitui uma perturbação [...]. Em compensação, a lacuna se torna uma perturbação quando se trata da ausência de um objeto ou das condições de uma situação que seriam necessárias para concluir uma ação, ou ainda da carência de um conhecimento que seria indispensável para resolver um problema. A lacuna enquanto perturbação é, pois, sempre relativa a um esquema de assimilação já ativado, e o tipo de regulação que lhe corresponde comporta então um *feedback* positivo, em prolongamento da atividade assimiladora deste esquema (PIAGET, 1976a, p. 25).

A regulação integra o processo de equilibração dessas estruturas, pois “remete a um mecanismo de autocorreção dos erros que tende a reestabelecer o equilíbrio cognitivo ou a regular a evolução do desenvolvimento na direção de um equilíbrio melhor” (MONTANGERO, MAURICE-DEVILLE, 1998, p. 222). As regulações ou autorregulações podem ser retroativas ou proativas. A retroatividade refere-se à realização de modificação na execução de uma ação a partir do resultado obtido. Por outro lado, a proatividade implica na modificação de uma ação no decurso da sua realização com pré-correção de erros visando o alcance de um objetivo ou resultado.

É a regulação que permite a antecipação de erros. Nas estruturas acabadas isso ocorre em função da capacidade de reversibilidade presente nos estágios superiores do desenvolvimento cognitivo (operatório concreto e operatório formal). Contudo, nas estruturas em formação, diferentemente do que foi destacado em relação às estruturas acabadas, não ocorre pré-correção de erros, ou seja, esses são considerados elementos que auxiliarão no processo de transformação das próprias estruturas. Nesse caso, as regulações são realizadas a posteriori, com a finalidade de correção ou reforçamento do resultado obtido a partir de uma ação, na forma de compensações (PIAGET, 1976a).

Em resumo, os “grandes processos funcionais identificados por Piaget, em particular a equilibração, descrevem um sujeito ativo que compensa perturbações resultantes de sua interação com o meio e que as integra em seu sistema cognitivo, ultrapassando-as” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 15). O próximo capítulo deriva da

discussão teórica realizada até então e aborda esses aspectos de modo direcionado ao conhecimento matemático e à resolução de situações-problema relacionadas ao pensamento algébrico¹⁶.



¹⁶ Em função da densidade dos conceitos aqui tratados, finaliza-se esta seção com um mapa conceitual dinâmico que apresenta as relações exploradas, o qual pode ser acessado por meio do QR Code ao lado e está disponível em: <https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vRQJH7UnZouRwWOXPHZXP3c4Ua6snSOM1YKQ2Txm9eJ5W73JdB2mZmi8BflwAvkQw/pub?start=false&loop=false&delayms=15000&slide=id.p1>.

3. MATEMÁTICA PARA GENERALIZAR E RESOLVER PROBLEMAS

Em resumo, a lógica e a matemática são, pois, o produto de uma construção do ser humano. O sujeito não descobre verdades que vêm dadas do exterior, mas ao contrário, constrói esquemas cada vez mais abstratos. Considerando-se que essa construção progressiva é levada a termo por um organismo que é parte do mundo material e que, em consequência disso, está submetido às suas leis, as últimas formas de adaptação, que são as estruturas lógico-matemáticas, permitirão a descrição dessas leis.
(COLL; GILLIÉRON, 1987, p. 41)

Cada vez mais os fenômenos do mundo real exigem dos sujeitos competências cognitivas, ou seja, capacidade de mobilizar conhecimentos advindos de diferentes áreas e articulá-los em prol da resolução de problemas distintos. Assim, independentemente da disciplina em que determinado objeto de estudo for considerado é preciso compreender o modo como este se articula a outros tópicos da mesma disciplina, bem como a disciplinas, contextos ou aplicações distintas (MACHADO, 2005).

Ao considerar a matemática, é possível relacioná-la às mais variadas situações, desde as cotidianas como a utilização dos sistemas de medidas ou aplicações financeiras, até as mais complexas como em genética, criptografia ou modelagem de situações envolvendo o avanço de uma pandemia, por exemplo. A matemática se relaciona com todos os campos de conhecimento e se faz necessária em qualquer atividade humana (LORENZATO, 2015). O conhecimento matemático possibilita a elaboração de explicações acerca de diferentes fenômenos, dado seu caráter universal, por isso atribui-se à matemática uma função instrumental (BRASIL, 2018). Através das construções matemáticas, é possível entrar:

[...] em contato com sistemas de conceitos que permitem resolver problemas e fazer novas deduções; em que a coerência e a precisão do raciocínio conferem legitimidade às ideias e às conclusões obtidas, segundo a necessidade lógica, de premissas definidas (MICOTTI, 1999, p. 163).

Contudo, compreender matemática e utilizá-la como recurso para modelar e resolver problemas são capacidades cognitivas construídas por cada sujeito “partindo do mais simples ao mais complexo, de seus esquemas de ações sensorio-motoras às estruturas formais” (BECKER, 2019, p. 983). Assim, pensar matematicamente vai além do caráter instrumental que se pode atribuir à matemática. O pensamento matemático depende de inferências e de deduções lógicas formuladas pelo próprio sujeito ao deparar-

se com uma nova informação (algo novo a conhecer). É nesse sentido que a BNCC destaca, como uma das competências a ser desenvolvida pelos estudantes no decorrer da educação básica, a utilização de

[...] estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).

Para tanto, os estudantes devem mobilizar recursos cognitivos próprios para raciocinar, representar, comunicar e argumentar (BRASIL, 2018). Logo, a busca por padrões e regularidades, o levantamento de hipóteses explicativas e de justificativas para as soluções obtidas a um dado problema, aliado à capacidade de generalizar são aspectos centrais na construção e no desenvolvimento de habilidades e competências em matemática. Assim, ao elaborar representações, desenvolver procedimentos, utilizar conceitos e modelar situações, o caráter instrumental da matemática aliado à integração de diferentes formas de representação dos objetos matemáticos (aritmético, geométrico, algébrico) possibilita a construção, por parte dos sujeitos, de patamares de formalização e compreensão cada vez mais complexos.

A construção e a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos se dá por níveis sucessivos que dependem exclusivamente das ações do sujeito e dos desdobramentos dessas ações a partir de tomadas de consciência sobre o seu saber e seu saber-fazer (PIAGET, 1975). Nesse sentido, não há a necessidade de aprender cada item isolado do conhecimento matemático e sim de entender como eles são estruturados e que relações podem-se estabelecer entre essas diferentes estruturas (NUNES; BRYANT, 1997). O conhecimento matemático é resultado de processos reflexivos, ou seja, fruto de sucessivas abstrações reflexionantes (PIAGET, 1973c; 1995) e de significações, construções individuais, que partem de elementos já consolidados pelo sujeito e das relações que são estabelecidas a partir desses elementos e que levam o sujeito a realizar implicações significantes e atribuir significado às suas ações (ou operações) (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1991).

A matemática é uma ciência de natureza formal e isso significa dizer que “o que ela ensina não vale apenas para certos conjuntos de coisas, mas para todos os conjuntos possíveis, já que versa sobre certas relações gerais que constituem o aspecto formal das

coisas” (ABBAGNANO, 2007, p. 469). Para conhecer o número 1000000 (um milhão) em termos da quantidade que ele representa deve-se compreender a forma da composição do sistema decimal de numeração, ou seja, a lógica subjacente, sendo esta universal.

Por exemplo, ao considerar a multiplicação como a adição de parcelas iguais se está lidando com a lógica (forma) associada à operação de multiplicar e essa independe dos números que estão sendo multiplicados. Assim, para a adição de cinco parcelas iguais a três ($3 + 3 + 3 + 3 + 3$) pode-se simplesmente escrever $5 \cdot 3$, que é a expressão obtida multiplicando-se a quantidade de parcelas (5) pelo valor de cada uma (3). No entanto, esse mesmo procedimento seria adotado se fosse considerado seis parcelas iguais a dois ($6 \cdot 2$) ou vinte parcelas iguais a quinze ($20 \cdot 15$). Em linguagem matemática é possível obter uma regra para *generalizar* ou *formalizar* a multiplicação como adição de parcelas iguais, conforme a Figura 3.

Figura 3: Representação formal da adição de m parcelas iguais a b

$$\underbrace{b + b + b + \dots + b}_{m \text{ parcelas iguais a } b} = m \cdot b$$

Fonte: elaborada pela autora.

A compreensão de relações generalizadas ocorre em função da construção de conhecimentos universais aos quais se atribui certa necessidade lógica. Por exemplo, ao dizer que $5 + 4 = 9$ também se diz que o resultado da operação $9 - 4$ é, necessariamente igual a 5 (cinco), ou seja, existe a necessidade lógica de ser assim e não diferente. A adição e a subtração são operações universais e inversas, de modo que ao adicionar dois números naturais quaisquer x e y obtém-se um resultado z (tal que $z = x + y$). Portanto, tem-se necessariamente que $z - x = y$, ou ainda, que $z - y = x$. Esse raciocínio lógico reversível (capaz de aplicar a mesma operação no seu sentido inverso) se constrói sob a forma de pensar (como operação) e não sobre o conteúdo pensado (ou seja, independentemente dos valores atribuídos a x e a y).

A compreensão da adição e da subtração (a tomada de consciência de que a subtração anula a adição numa mesma operação) só é possível a partir da construção da noção de número (PIAGET; SZMINSKA, 1971), cuja “gênese ocorre no momento em que o sujeito sintetiza, numa totalidade única, as classes e as relações” (BECKER, 2009,

p. 24). Essa noção, que surge por volta dos 7 – 8 anos, provém de uma diferenciação da lógica que até então era puramente qualitativa (organização de classes, seriação, ordenação etc.) e passa a ser quantitativa (PIAGET, 2011; BECKER, 2019; NUNES, 2016). Antes disso, a criança realiza contagens, mas não vincula o número à quantidade, apenas enumera, ordena. Logo, o número é uma construção da mente humana, um conceito formal ou uma forma não retirada diretamente de uma experiência física, mas construída a partir de experiências lógico-matemáticas e de relações entre objetos e de ações do sujeito sobre os objetos (PIAGET; SZMINSKA, 1971).

Não somente o número, mas todos os objetos de estudo da matemática são “entes ideais, construídos pelos seres humanos” (MICOTTI, 1999, p. 162). A matemática não está no mundo, nos objetos em si, nos observáveis. O círculo, a esfera, a reta, o número, todos são exemplos de entes matemáticos que existem na mente dos sujeitos, não existem no mundo físico, sendo os desenhos, as letras, os símbolos etc. recursos utilizados como forma de representar esses entes ideais e que auxiliam o sujeito a atribuir significado e a compreender e formalizar esses conceitos.

O conceito de esfera como sendo o conjunto de pontos no espaço tridimensional que equidistam de um ponto dado (centro) é um bom exemplo para ilustrar a afirmação anterior. A compreensão desse ente matemático tem origem na (re)construção de conceitos e representações, fruto de reflexões e de transformações de construções anteriores. Esse conceito pode ter relação com a bola que a criança brinca desde pequena, mas não sendo a bola uma esfera, ela apenas serve como uma representação desse ente matemático. A esfera não existe como objeto do mundo físico, na experiência perceptiva. Cada indivíduo, para conhecer ou saber o que é uma esfera, precisa trilhar o seu caminho próprio de aprendizagem, passar por etapas de reflexionamento e reflexão, ou seja, de projeção e reconstrução de conceitos em patamares superiores de conhecimento (em sucessivas abstrações reflexionantes) que são necessários até a formalização do conceito de esfera. Assim, a construção desse conceito, pelo sujeito, da mesma forma como o de qualquer conceito matemático, remete “às ações físicas da primeira infância, [das quais] a criança vai tirando relações com as quais constrói novas relações, relações sobre relações, até chegar às ‘relações lógicas’, aos ‘conceitos matemáticos’” (BECKER, 2019, p. 980). Há especificidades da matemática enquanto objeto de conhecimento que precisam ser apontadas.

Todo conhecimento matemático é produto de generalizações; todo aprendiz tem que fazer para si o que os matemáticos já fizeram. Esse conhecimento extrapola sempre o âmbito para o qual ele foi construído. Ele foi construído para resolver um problema e, ao ser construído, ele passa a resolver uma infinidade de problemas; ele se generalizou. Sua natureza não se define ou se esgota em sua aplicação (BECKER, 2019, p. 970).

O processo de construção de um conhecimento engloba, sempre, “um aspecto construtivo (operativo) e um aspecto reflexivo (figurativo)” (KESSELRING, 2008, p. 72). Desse modo, cada sujeito constrói, ele próprio, seu conhecimento, formal e informal, por sua atividade, a partir das experiências que vivencia e das reflexões que se originam a partir disso, tomando consciência ou não do processo. Em resumo, o conhecimento matemático, assim como todo o conhecimento científico, é construído pelo sujeito tendo origem em experiências individuais que levam à reflexão e à compreensão de conceitos, em seus diferentes níveis de conceituação, representação e formalização.

Logo, no “decorrer dos anos de aprendizagem, seria preciso valorizar, progressivamente, o diálogo entre o pensamento matemático e o desenvolvimento dos conhecimentos científicos e, finalmente, os limites da formalização e da quantificação” (MORIN, 2010, p. 23). A resolução de situações-problema abre-se como possibilidade para esse diálogo, como possibilidade para a manifestação da capacidade de estabelecer relações entre conceitos e procedimentos, considerando um dado contexto de aplicação, favorecendo o desenvolvimento de competências cognitivas para lidar com problemas cada vez mais complexos em qualquer área do conhecimento.

Por situação-problema compreende-se, na perspectiva de Câmara dos Santos (2002), uma situação geradora para um problema, que implique na construção e utilização de um conceito para a sua resolução. Destaca-se que, ao longo do texto, as expressões situações-problema, resoluções de problemas, processo de solução de problemas devem ser compreendidas dentro desta perspectiva, logo, problemas e situações-problema são termos intercambiáveis nesse texto.

3.1 Resolução de situações-problema e estratégias cognitivas

A resolução de problemas é, para nós, uma ocasião para estudar os processos funcionais que intervêm quando o sujeito aplica seus conhecimentos a contextos particulares, isto é, quando aplica suas estruturas à assimilação dos “universos de problemas” que encontra no curso de sua atividade adaptativa.

(INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 7)

Conforme vem sendo discutido, cada pessoa poderá utilizar ou adaptar, esquemas e estruturas cognitivas já constituídos diante da necessidade de solucionar novos problemas em contextos distintos. Assim, a busca de soluções específicas para uma dada situação exige “novas organizações em função dos conteúdos e de suas especificidades” (SILVA; FREZZA, 2011, p. 195), de modo que para resolver uma situação-problema, além dos saberes conceituais (conteúdos ou conceitos) e dos procedimentais (conhecer os procedimentos) é necessário *saber-fazer*, ter desenvolvido habilidades correspondentes para, então, articular os recursos, meios disponíveis, com a finalidade de obtenção de êxito na tarefa. Perrenoud (2013) destaca a existência de pelo menos três categorias de recursos. As duas primeiras são os *saberes* e as *habilidades* e relacionam-se mais especificamente a aspectos cognitivos. A terceira categoria, que o autor chama de *outros recursos*, contempla “atitudes, posturas; valores, princípios, normas; relações com o saber, com a ação, com o outro, com o poder; recursos “emocionais” e relacionais” (PERRENOUD, 2013, p. 49).

Embora existam diferentes concepções ou caminhos possíveis quanto ao uso de situações-problema no contexto educacional, defende-se que há, em comum, um objetivo: o desenvolvimento do estudante enquanto sujeito *cognoscente*¹⁷, ou seja, a oferta de possibilidades de desenvolvimento de suas competências cognitivas, uma vez que a resolução de problemas “é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes” (CHI; GLASER, 1992, p. 250).

Assim, possibilitar espaços para que os estudantes desenvolvam a “aptidão para contextualizar e globalizar os saberes torna-se um imperativo da educação” (MORIN, 2010, p. 24). A escola deve promover o pensar de modo que os conteúdos sirvam de meio para esse fim. Ao propor aos estudantes a resolução de situações-problema se está, na verdade, instigando a mobilização e a (re)construção de seus esquemas (ou estruturas mentais), que poderão, posteriormente, ser transpostos e adaptados a novas situações.

De acordo com Pozo (1998, p. 9), a “solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento”. Nesse

¹⁷ Considera-se sujeito *cognoscente*, na teoria piagetiana, como o sujeito que conhece ou aquele que tem a capacidade de conhecer.

sentido, o trabalho pedagógico através da resolução de problemas tem sido bastante discutido, especialmente na área da educação matemática.

As estratégias de resolução de uma situação-problema podem ser diferentes por vários motivos. Echeverría e Pozo (1998) trazem dois enfoques para a resolução de problemas, tanto em relação às suas concepções teóricas quanto à forma de consideração delas nos currículos escolares: enquanto habilidade geral e como um processo específico. O primeiro enfoque considera que, mesmo existindo problemas bastante heterogêneos a serem resolvidos e que demandarão habilidades e conhecimentos específicos na busca da sua solução, os problemas em geral “exigem o acionamento de uma série de capacidades de raciocínio e habilidades comuns que precisam adaptar-se às características de cada tipo de problema [...]. [Assim,] a aprendizagem contribuiria para que o aluno se adaptasse cada vez melhor à estrutura da tarefa” (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 19). Os autores salientam que, nesse caso, as diferentes formas de resolução que cada pessoa adota, ocorrem mais em função da estrutura de cada problema ou das diferentes aprendizagens das pessoas que precisam resolver a situação, do que, propriamente, em função de diferenças em suas capacidades individuais.

Alguns problemas, por exemplo, são resolvidos por métodos dedutivos, demonstrações de propriedades e teoremas etc., outros, por métodos indutivos, busca de regularidades a partir da observação de padrões etc. (ECHEVERRÍA, POZO, 1998). Existem, ainda, o que esses autores classificam como problemas bem definidos¹⁸, aqueles que apresentam todos os dados e permitem saber de forma fácil quando a solução foi alcançada, e os problemas mal definidos, aqueles nos quais “o ponto de partida ou as normas que estipulam quais são os passos necessários para resolver a tarefa são muito menos claros e específicos” (ECHEVERRÍA, POZO, 1998, p. 20).

Echeverría e Pozo (1998) ainda atentam ao fato de que não existem problemas totalmente bem ou mal estruturados e que tal diferença, muitas vezes, dá-se em função da natureza da ciência envolvida, que demandará também certa diferenciação de procedimentos de resolução. Contudo, destacam ainda, que essa visão considera a existência de “procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas e que todas as pessoas colocam em ação com maior ou menor competência” (p. 22).

¹⁸ Não se refere a exercícios. Note que são problemas bem definidos e, portanto, seguem a definição de situação-problema já discutida.

O outro enfoque dado à problemática por esses autores defende que “a eficiência na solução de um problema não depende da disposição de estratégias gerais e transferíveis válidas para qualquer caso, e sim dos conhecimentos específicos *úteis* para solucionar *esse problema*” (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 30, grifo dos autores). Essa abordagem, segundo os autores, leva em consideração os domínios específicos de conhecimento e a existência de principiantes e especialistas em cada área. Assim, “a maior eficiência na solução de problemas pelos especialistas não seria devido a uma maior capacidade cognitiva geral e sim aos seus conhecimentos específicos” (p. 30-31).

Embora sejam visões distintas, ambas possuem certa aproximação aos principais aspectos teóricos considerados nesse trabalho. De modo geral, para se resolver um problema (em qualquer área de conhecimento), deve-se mobilizar uma série de recursos que permitam desde a identificação e compreensão dos elementos que integram a situação proposta, o estabelecimento de um plano de resolução, sua execução e a análise da solução, mas também selecionar conteúdos específicos pertinentes e estabelecer relações.

Retomando ideias piagetianas, destaca-se que a capacidade de estabelecer relações e resolver problemas cada vez mais complexos decorre do processo de (re)construção de esquemas e estruturas mentais ou formas de pensamento que têm a tendência a generalizar-se. Esse processo construtivo das formas de pensar não se dá de forma isolada, ou seja, depende dos conteúdos, e, tais aspectos, relacionam-se ao próprio desenvolvimento cognitivo do sujeito (INHELDER, 1978; SILVA; FREZZA, 2011).

Esse fato deve ser considerado no processo de avaliação da aprendizagem quando o objetivo é verificar se o estudante desenvolveu competências e habilidades que lhe possibilitem enfrentar uma gama de problemas de mesma estrutura, adaptando os conceitos que conhece e os procedimentos que domina na busca pela solução a uma nova situação, por meio da articulação dos recursos disponíveis para alcançar um determinado objetivo (PERRENOUD, 1999; 2001; INHELDER, 1978; ECHEVERRÍA; POZO, 1998; PESTANA, 1999; POZO, 1998; BRASIL, 2018).

Tal perspectiva de avaliação encontra-se presente na fundamentação teórica-metodológica do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e, por isso, as situações-problema selecionadas para esta pesquisa foram (re)contextualizações de itens já utilizados nesse exame. Logo, a próxima seção destina-se a apresentar elementos que

caracterizam esse tipo de item de avaliação, os quais foram considerados ao longo da pesquisa.

3.1.1 Situações-problema no Enem: avaliando competências e habilidades

[...] na solução de um problema, muitos fatores competem, isto é, disputam entre si; pois estão à disposição do sujeito, já existem para ele. Competência é a “habilidade”, uma qualidade geral, uma estrutura que coordena, articula – de modo interdependente – todos esses fatores.
(MACEDO, 2005, p. 21)

A resolução de situações-problema numa perspectiva de valorização do desenvolvimento de competências e habilidades é o que preconiza o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) (RABELO, 2013). Desde sua concepção, porém de forma mais direcionada a partir de sua reforma em 2009, o Enem “tem como eixos estruturadores a interdisciplinaridade e a contextualização dos conhecimentos expressos na forma de situações-problema” (RABELO, 2013, p. 50) e organiza-se por eixos cognitivos¹⁹ que são comuns a todas as áreas de conhecimento avaliadas²⁰. Cada item proposto nesse exame, exige do sujeito a construção de estratégias cognitivas de resolução, ou seja, *habilidades* para estabelecer relações entre *conceitos* e *procedimentos*.

Os itens de múltipla escolha utilizados no Enem são do “tipo interpretação e formulados a partir de uma situação-estímulo que compõe o enunciado. Essa situação faz parte de um problema e, a partir dela, o estudante organiza as ideias, dados ou informações para resolvê-lo” (RABELO, 2013, p.199). A estrutura básica de um item de múltipla escolha, conforme a engenharia de elaboração utilizada no Enem, “divide-se em três partes: texto-base, enunciado (comando) e opções (alternativas)” (RABELO, 2013, p. 189), que são complementares, de modo que sem o texto-base, por exemplo, o comando e as alternativas não fazem sentido.

Considerando o trabalho realizado na seleção e reformulação dos itens do Enem utilizados na presente pesquisa, cabe destacar outros critérios que uma situação-problema inserida no Enem precisa observar. Um item deve ter coerência e coesão entre suas partes, possibilitando que um estudante de bom desempenho desenvolva uma estratégia de

¹⁹ O Enem possui cinco eixos cognitivos: I. Dominar Linguagens (DL); II. Compreender fenômenos (CF); III. Enfrentar situações-problema (SP); IV. Construir argumentação (CA) e V. Elaborar propostas (EP).

²⁰ As quatro áreas de conhecimento do Enem são: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

resolução a partir da leitura do enunciado, identificando a resposta entre as alternativas, mas não usando as alternativas como recurso de resolução para identificar o que a situação requer (RABELO, 2013). O item deve ser claro, objetivo, original, preciso e impessoal e sugere-se que o enunciado esclareça conceitos e termos técnicos, de modo que a situação admita uma única interpretação, bem como uma única resposta (RABELO, 2013).

As questões e as alternativas são metodologicamente testadas antes de uma situação-problema passar a compor o banco de itens do Enem. Cada opção de resposta incorreta é denominada por distrator²¹ e associa-se a alguma lacuna ou erro possível de ser cometido por um estudante de baixo desempenho na habilidade que está sendo avaliada na situação-problema, possibilitando assim que, a partir da resposta fornecida seja possível obter “indícios sobre o processo cognitivo de cada respondente” (RABELO, 2013, p. 191-192).

O modelo avaliativo do Enem preconiza a verificação acerca das estruturas mentais que são necessárias para que os estudantes construam seus conhecimentos de forma contínua. Exclui-se a capacidade de memorização como elemento central, pois embora ela seja importante para que tais estruturas possam ser construídas, apenas memorizar informações não é suficiente para compreender e explicar os fenômenos cada vez mais complexos do mundo (INEP, 2005).

Nesse sentido, Rabelo (2013, p. 179) enfatiza que a contextualização é um dos aspectos mais relevantes, pois o contexto da situação a ser resolvida deve “propiciar que a competência ou habilidade a ser avaliada se expresse”. A contextualização deve “fornecer informações essenciais para a resolução da situação-problema proposta e não apenas caracterizar-se como informação acessória” (RABELO, 2013, p. 180). Conforme o autor, trata-se de uma estratégia para construção de significação de conteúdos e “enriquecimento da situação-problema a ser explorada, permitindo ao estudante uma melhor compreensão dos conteúdos nela envolvidos e sua inter-relação com as diversas áreas do conhecimento” (RABELO, 2013, p. 180). Sendo assim, os itens são elaborados

²¹ Denomina-se por distrator as alternativas de resposta incorretas a um item de múltipla escolha. Um distrator deve ser construído fazendo parte do contexto do problema e devem representar respostas possíveis a um aluno que não sabe ou que não desenvolveu a habilidade que está sendo avaliada no item. De acordo com Rabelo (2013, p. 191) “é desejável que cada distrator esteja vinculado a um nível de desenvolvimento adequado da aprendizagem e ensinar um possível raciocínio que um respondente de baixo desempenho faria para escolhê-lo como resposta”.

considerando como proposta a avaliação de competências e habilidades devendo “privilegiar contextos vivenciados pelos sujeitos [...], pois são as situações dessa natureza que mais se aproximam do modo como as competências são desenvolvidas”, por isso a grande importância atribuída à contextualização.

As situações-problema inseridas no Enem são definidas a partir de uma matriz de referência que apresenta o conjunto de competências e habilidades associadas a cada área de conhecimento avaliada (MOLON, FRANCO; 2018). As competências de cada área desdobram-se em habilidades específicas que, por sua vez, vinculam-se aos conteúdos, ou seja, aos objetos de conhecimento. No que se refere à *Matemática e suas Tecnologias* são consideradas sete (07) competências que englobam trinta (30) habilidades vinculadas aos objetos de conhecimento descritos na matriz de referência da área (MOLON, FRANCO; 2018). Assim, por exemplo, a habilidade de número 21 (H21) refere-se a “*Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos*”²².

Optou-se por direcionar a investigação aqui proposta ao campo do pensamento algébrico, “essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2018, p. 271). A próxima seção explora características associadas ao pensamento algébrico, bem como algumas dificuldades e obstáculos que emergem em relação as diferentes formas de apresentação da álgebra definidas a partir de Kaput (1999).

3.2 Pensamento algébrico: caracterização e habilidades

Acreditamos que ao se enfatizar o pensamento algébrico ao invés de apenas se restringir a questões técnicas e operacionais, o ensino de Álgebra poderia contribuir não só no aprendizado da Matemática como também auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico-abstrato do estudante, pensamento esse essencial para o desenvolvimento de um cidadão capaz de viver na sociedade atual.

(COELHO; AGUIAR, 2018, p. 171)

Os diferentes campos da matemática (aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade) expressos na BNCC “reúnem um conjunto de ideias fundamentais que

²² Molon e Franco (2018) apresentam uma descrição mais detalhada acerca da organização do Enem e da mensuração de competências e habilidades por meio da metodologia adotada no exame.

produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação” (BRASIL, 2018, p. 268).

Este estudo centra-se no campo da álgebra uma vez que ela pode ser compreendida como ferramenta de representação e modelagem de fenômenos cujo trato matemático conduz a busca por soluções a problemas, extrapolando contextos, permitindo realizar generalizações, aspectos importantes para o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias à compreensão e enfrentamento dos fenômenos atuais. Enquanto área da matemática, o desenvolvimento do conhecimento algébrico ocorreu em meio a muitas discussões teóricas, das quais se originou:

[...] a necessidade da construção de uma linguagem simbólica apropriada às questões tratadas aliada à consequente emersão de conceitos algébricos cada vez mais abstratos. Só assim a Álgebra se consolidou como área de conhecimento, área essa que é, portanto, fruto de um desenvolvimento histórico e não inata ao ser humano. Dito de outra forma, o conhecimento da Álgebra precisa do meio social para ser aprendido e assimilado pelo indivíduo (COELHO, AGUIAR, 2018, p.171-172).

Contudo, o ensino da álgebra ao longo das últimas décadas esteve (e ainda está) pautado em “transformismos algébricos” sendo realizado através de “um conjunto de técnicas operatórias que busca apenas resolver equações sem contextualizá-las” (COELHO, AGUIAR, 2018, p. 172). Ou seja, o significado associado à Álgebra inserida, atualmente, no ambiente escolar, está atrelado à utilização de uma linguagem própria com variáveis e incógnitas para representar quantidades desconhecidas e possibilitar operar com objetos matemáticos formais. Todavia, tal prática desconsidera, ou pelo menos não privilegia, a utilização das estruturas algébricas como ferramentas que apoiam o pensar (DA ROCHA FALCÃO, 1997).

A BNCC (BRASIL, 2018) trouxe algumas indicações de possíveis avanços em relação à forma de abordagem ao conhecimento algébrico, destacando habilidades vinculadas ao seu desenvolvimento enquanto instrumento para o pensar em todos os anos da educação básica (MOLON, 2019). Entre elas, 36 são atribuídas à objetos de conhecimento inseridos ao longo do currículo do ensino fundamental (do 1º ao 5º ano) e 21 ao ensino médio, essas últimas associadas às cinco competências específicas da área “Matemática e suas tecnologias” (Quadro 3). Nota-se que as habilidades associadas ao pensamento algébrico, indicadas na BNCC, possuem alta expressividade em relação ao total das habilidades dos demais campos considerados na área *Matemática e suas*

Tecnologias (BRASIL, 2018). Isso não significa, contudo, que pensar algebricamente é mais ou menos importante que outras formas de pensar, no entanto, expressa que o conhecimento algébrico não se estrutura de forma isolada. Ou seja, a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, de modo generalizado, já são expressões do pensamento algébrico e essas, inclusive, extrapolam os limites da matemática enquanto disciplina²³.

Quadro 3: Competências específicas da área Matemática e suas tecnologias na BNCC Ensino Médio

Descrição	Total	Habilidades algébricas
Competência 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	6	2
Competência 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	3	1
Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	16	7
Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	7	5
Competência 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	11	6
Total	43	21

Fonte: BRASIL (2018)

Não há uma definição para “pensamento algébrico” que seja consenso entre os pesquisadores da área. Sabendo disso, optou-se por trazer aqui algumas compreensões, as quais aproximam-se da concepção que será adotada ao longo desta pesquisa, ou seja,

²³ Um documento contendo a relação de habilidades algébricas destacadas da BNCC, pode ser acessado por meio do QR Code ao lado e está disponível em: <https://drive.google.com/file/d/16B-2q4n8GJ0LBFxwSBcNdr5xEuRDq2-D/view>.



não se buscou esgotar nem em profundidade, nem em extensão, os tipos de abordagem ao conhecimento algébrico. Destacam-se, enquanto pesquisadores desse campo do conhecimento, autores como Lee, Schneider e Schell (2005); Da Rocha Falcão (1997), Lins e Gimenez (1997), Blanton e Kaput (2005); Kaput (1999); Radford (2005), Kieran (1995; 2007); Usiskin (1995).

Trabalhos desses autores deram origem a muitos estudos posteriores. Almeida e Santos (2017) chegaram, a partir de Kaput e de Lins e Radford, a cinco características que podem ser associadas ao pensamento algébrico: a capacidade de generalizar; a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido; a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica, a capacidade de estabelecer relações entre variáveis e a capacidade de modelar. Essas características associam-se às cinco formas da álgebra destacadas por Kaput (1999) como: aritmética generalizada e formalização de padrões; manipulação de símbolos com vistas à formalização; estudo de estruturas abstraídas de cálculos e relações; estudo de funções e relações junto à ideia de variação; e linguagem para modelar fenômenos.

A generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática e ao próprio pensamento. De acordo com Kaput (1999), generalizar significa estender, a outras situações, raciocínios realizados ao lidar com casos particulares, com foco em padrões, procedimentos, estruturas e suas relações. A generalização origina uma forma de pensar sobre um conjunto de objetos que, ainda, englobam as situações particulares iniciais, mas estas passam a ser compreendidas com base na generalização elaborada, que deve ser expressa em uma linguagem formal ou de outro modo que seja compreensível ao sujeito (KAPUT, 1999).

Trata-se, por exemplo, de compreender a igualdade $3 \times 4 = 4 \times 3$ além do respectivo resultado aritmético 12, ou seja, relacionando à forma generalizada da propriedade comutativa da multiplicação $m \times n = n \times m$, para quaisquer valores reais que m ou n possam assumir. E mais, implica em compreender em que contextos essa generalização é válida, pois ela não pode ser diretamente aplicada a todo o conjunto de multiplicações (observe que a relação não vale para a multiplicação de matrizes, por exemplo!).

Outra forma associada ao pensamento algébrico é a manipulação de símbolos com vistas à formalização (KAPUT, 1999). A utilização de símbolos e regras para manipular

expressões algébricas possibilita ao sujeito focar sua atenção aos próprios símbolos, abstraindo o que esses estão representando. Kaput (1999) enfatiza que esse aspecto pode ser positivo uma vez que, assim, o sujeito passa a operar relações muito mais complexas do que poderiam ser gerenciadas se precisasse ao mesmo tempo olhar, simultaneamente, através dos símbolos e transformações para o que esses representam. No entanto, deve-se possibilitar que o estudante construa significado aos símbolos para que, assim, desenvolva o pensamento algébrico, ou seja, que consiga utilizar os símbolos e regras da álgebra como ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio, tirando proveito da escrita simbólica, mas com compreensão do significado atribuído a cada símbolo.

A terceira forma associada ao conhecimento algébrico por Kaput (1999) refere-se a álgebra como estudo de estruturas abstraídas de cálculos e relações, ou seja, abarca as estruturas formais da álgebra propriamente, ou pré-formais no caso de sujeitos em níveis escolares mais elementares. Essas estruturas, que podem ser articuladas pelos sujeitos tanto em linguagem natural quanto em linguagem formalizada ou pré-formalizada, enriquecem a compreensão acerca dos sistemas dos quais são abstraídas, fornecem estruturas intrinsecamente úteis para cálculos relacionados aos elementos aos quais estavam ligadas e fornecem uma base para níveis ainda mais elevados de abstração e formalização (KAPUT, 1999).

Outra forma associada ao pensamento algébrico é o estudo de funções e relações, junto à ideia de variação ou dependência entre variáveis (KAPUT, 1999). A este tópico será dedicado aqui um espaço de discussão maior, tendo em vista que as situações-problema utilizadas na pesquisa referem-se, de modo geral, à temática funções quadráticas. Para Kaput (1999), o conceito de função ampara-se em duas ideias: a de correspondência e a de variação conjunta contínua. A primeira ideia considera a existência de dois conjuntos quaisquer, suponha A e B , e função refere-se, então, à relação $f: A \rightarrow B$ que associa a cada elemento a pertencente ao conjunto A apenas um elemento b que pertence a B . Nessa relação, o conjunto A denomina-se por domínio, o conjunto B por contradomínio e o conjunto formado por todos os elementos pertencentes a B que são correspondentes a algum elemento de A constitui o conjunto imagem da função. Já a ideia de variação conjunta contínua é usada para relacionar uma dada quantidade que muda em conjunto com a mudança de outra.

Assim, o estudo de funções engloba relações entre elementos que podem ser expressas de diferentes modos: relação funcional (lei algébrica da função, expressando a ideia de variação conjunta contínua), tabelas contendo correspondência de valores (que dá origem ao conceito de par ordenado no plano cartesiano) ou gráfico (enquanto conjunto de pontos no plano cartesiano que representam a relação funcional).

Um conceito central no estudo das funções e das relações é o conceito de variável ou incógnita que pode ser compreendido considerando diferentes concepções. Uma variável pode ser usada como um argumento, ou seja, representando valores que fazem parte do domínio de uma função, ou como um parâmetro, nesse caso um número do qual dependem outros (GOMES, 2013). Por exemplo, ao considerar a lei geral da função polinomial de segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ (com a, b, c números reais e $a \neq 0$) estão presentes os dois sentidos atribuídos à variável. Enquanto x é uma variável independente, cujos valores possíveis de serem atribuídos correspondem ao domínio de uma função quadrática, y é uma variável dependente do valor de x e que também depende dos parâmetros a, b e c , coeficientes da função cujos valores fazem a lei corresponder a uma função específica no universo das funções quadráticas.

No caso da função quadrática, esses parâmetros (a, b e c) também fornecem informações bastante ricas acerca do comportamento da parábola, que é a forma da representação gráfica de uma função polinomial de segundo grau. O parâmetro a define se a concavidade da parábola será voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). O parâmetro b indica o crescimento/decrescimento da função no ponto de intersecção com o eixo y e, por fim, o parâmetro c fornece o valor da imagem para $x = 0$, ou seja, $f(0) = c$, valor que pode ser diretamente abstraído tanto da representação gráfica quanto da expressão algébrica da função, o que facilita a passagem de uma forma de representação à outra quando o sujeito percebe tal relação.

Qualquer das variáveis x, y, a, b, c podem assumir papel de incógnitas, dependendo da situação. Por exemplo, conhecendo três pontos que pertencem ao gráfico da função, ao substituir os valores de x e y correspondentes a cada um desses pontos, são obtidas, respectivamente, três equações com três incógnitas a, b, c e, resolvendo o sistema linear assim obtido determina-se a lei geral da função²⁴. Em contrapartida, no caso desses parâmetros (a, b, c) serem conhecidos, as incógnitas passam a ser, então, x e y , as quais

²⁴Essa situação aparece na situação-problema *Vila Lângaro*, utilizada nesta pesquisa.

estarão em correspondência a partir da lei da função, de modo que ao atribuir a x determinado valor do domínio dessa função, sua imagem $f(x) = y$ é obtida pela lei (relação) conhecida. Nota-se, contudo, que na primeira situação, os valores obtidos para a , b ou c são únicos, enquanto para x e, conseqüentemente, para y , uma infinidade de valores pode ser obtida bastando para tanto que a lei da função seja obedecida.

Por fim, conceber a ideia de variável tanto como argumento, quanto como parâmetro é também muito importante ao considerar a álgebra com uma linguagem para modelar situações, ou seja, para matematizar fenômenos e resolver problemas variados, última forma associada à álgebra por Kaput (1999), conforme já explorado na abertura deste capítulo. Embora essas cinco formas da álgebra tenham sido caracterizadas com certa distinção, Kaput (1999) salienta que elas interagem entre si, tanto em termos de conceitos quanto de procedimentos, o que valoriza o pensamento algébrico em relação à concepção dos elementos da álgebra não apenas enquanto objetos matemáticos.

Portanto, compreende-se que “no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão (CANAVARRO, 2007, p. 88). No entanto, considerando as especificidades do conhecimento algébrico, no próprio processo de construção ou aplicação desse tipo de conhecimento, dificuldades ou obstáculos (BACHELARD, 2005; BROUSSEAU, 1983 apud IGLIORI, 2002) podem ser enfrentados por cada sujeito. Diante disso, a próxima seção apresentará alguns estudos realizados com o objetivo de investigar estratégias mobilizadas, bem como dificuldades ou obstáculos que podem surgir na medida em que os sujeitos se envolvem com situações que exijam conhecimentos algébricos.

3.2.1 Pensar algebricamente: apontamentos sobre estratégias, dificuldades e erros

*O caminho para a sabedoria?
Bem, é fácil e simples de expressar:
Errar, errar e errar novamente...
Mas, cada vez menos, menos e menos...*
(PIET HEIN apud D'AMBROSIO; VALENTE, 2016, p. 21)

Diferentes estratégias para solucionar situações-problemas podem ser elaboradas por um estudante frente a uma situação que exija a seleção e aplicação de conceitos e realização de procedimentos adequados, o que demanda, portanto, a manifestação de certa

competência no âmbito do problema em questão (PERRENOUD, 1999, 2000; MACHADO, 2006; 2010; PESTANA, 1997; 1999). Em resumo, para a elaboração de uma estratégia, o sujeito deve mobilizar

[...] diversos esquemas de percepção, pensamento, avaliação e ação, que suportam inferências, antecipações, transposições analógicas, generalizações, apreciação de probabilidades, estabelecimento de um diagnóstico a partir de um conjunto de índices, busca das informações pertinentes, formação de uma decisão etc. (PERRENOUD, 1999, p. 24)

Porém esquemas de diferentes vertentes e tipos podem ser confrontados nesse processo o que pode gerar desequilíbrios e dar origem a conflitos e contradições. Esses, por sua vez, podem mobilizar outros processos e conduzir a novas soluções ou à elaboração de novas estratégias para a busca de uma solução (INHELDER *et al.*, 1987, p. 76). Em situações de aprendizagem, Inhelder e Caprona (1996, p. 24) observaram que um conflito entre esquemas nocionais diferentes produz perturbações que podem incitar a um esforço de compreensão” tanto em situações do “saber-fazer” concreto, quanto nas reorganizações conceituais.

Diante disso, cabe apontar o que se entende, nesse estudo, também por obstáculo, sem, no entanto, ter a pretensão de explorar todas as vertentes teóricas acerca do assunto, que são múltiplas. No cerne da teoria piagetiana e de seus colaboradores, um obstáculo pode ser compreendido como um entrave, uma resistência à assimilação de um objeto de conhecimento. Isso ocorre tanto em função de condições inerentes ao objeto de conhecimento quanto de aspectos associados ao próprio sujeito em termos de necessidade de reorganização de suas estruturas cognitivas e das possibilidades de realizar regulações ou compensações, as quais lhe possibilitarão avançar cognitivamente (PIAGET, 1976a).

Há, também, aspectos que impedem o sujeito de avançar em relação a compreensão de um conceito. Para Bachelard (2005), lentidões e conflitos fazem parte do ato de conhecer, pois conhecer algo novo, associado a algum conceito já conhecido pelo sujeito, implica enfrentar conhecimentos anteriores que, já constituídos cognitivamente, lhe fazem sentido e sob os quais o sujeito acredita pautar a verdade acerca do referido conceito. Esses fatores que impedem o sujeito de alcançar um novo conhecimento, de ampliar a compreensão do conceito em questão foram denominados por Bachelard (2005) como obstáculos epistemológicos, os quais podem ser identificados no processo de construção de qualquer conhecimento científico.

Já, considerando o enfoque ao conhecimento matemático da presente pesquisa, no âmbito da Didática da Matemática a noção de obstáculo epistemológico se faz presente por meio dos estudos de Guy Brousseau. De acordo com Schubring (2002), para a compreensão de obstáculo epistemológico, Brousseau considerou tanto as contribuições da Psicologia Genética de Piaget, especialmente quanto aos estados de desenvolvimento cognitivo (pré-operatório, operatório concreto e operatório formal) quanto as concepções de Bachelard em relação aos estados de formação do espírito científico (concreto, concreto-abstrato e abstrato). Para Brousseau,

[...] há contradições inerentes nos tipos de conhecimento dos estados inferiores: o conhecimento mostra-se eficaz quando aplicado nessas áreas restritas, mas revela-se como um obstáculo logo que aplicado a situações de um estado superior. Assim, por causa dos fatores inerentes, um conhecimento pode funcionar como um obstáculo contra um progresso no próximo estado. (SCHUBRING, 2002, p. 4)

Sendo assim, para Brousseau (1983 apud IGLIORI, 2002, p. 99) seria um obstáculo epistemológico aquele “ligado à resistência de um saber mal-adaptado, no sentido de Bachelard, e o vê como um meio de interpretar alguns dos erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes, quando lhes são ensinados alguns tópicos da Matemática”. Nesse sentido, um erro não deve assumir uma conotação negativa, pois “um erro corrigido pode ser mais fecundo que um êxito imediato, porque a comparação da hipótese falsa e de suas consequências proporciona novos conhecimentos e a comparação entre erros dá lugar a novas ideias” (PIAGET, 1987, p. 61).

Logo, um obstáculo pode ser visto como algo positivo, uma vez que ele indica uma oportunidade de construção de conhecimento, como um elemento que pode impulsionar o processo de (re)equilibração. Assim, um obstáculo pode representar uma tentativa de construção de um novo conhecimento, o qual se configura na medida em que são reconstruídos os aspectos que estavam implicando em conflito ou contradição nas tentativas de (re)elaboração de um conceito, por exemplo, e impedindo o sujeito de avançar cognitivamente.

Para Pommer (2016, p. 108) “os obstáculos epistemológicos se manifestam nos alunos mediante erros, que são reprodutíveis e com alguma coerência interna para os alunos, sendo também persistentes, resistentes e relativamente universais”. Assim, alguns erros, podem também ser indicadores de obstáculos, dúvidas ou impasses enfrentados

pelos estudantes durante o desenvolvimento de estratégias de abordagem às situações-problema que lhes são propostas.

Pimenta (2016), a partir de vários estudos sobre dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem da álgebra, aponta que:

Estas, globalmente, estão relacionadas com a presença de símbolos, com o significado atribuído às letras e às variáveis, com a exigência da compreensão conceptual, com complexidade dos objetos e processos matemáticos e com a combinação de representações. Contudo, poderão também estar associadas ao foco da atividade algébrica, ao trabalho desenvolvido durante a aprendizagem da aritmética, com as características da própria disciplina de Matemática, entre outras causas. (PIMENTA, 2016, p. 26)

De modo particular, em relação aos conhecimentos algébricos, muitos pesquisadores têm se preocupado em compreender quais são as dificuldades emergentes, em que consistem os obstáculos enfrentados, quais são os principais erros cometidos pelos alunos, que estratégias os estudantes utilizam ao lidar com situações-problema de estrutura algébrica etc. (LINS; GIMENEZ, 1997; CARRAHER et al, 2006; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN, 1995, 2007; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2017; PIMENTA, 2016; VALE; BARBOSA, 2019; CURY, 2019; MULLER, 2015).

Um aspecto citado por muitos estudos é a ênfase dada pelo ensino à manipulação de expressões algébricas de modo desvinculado da compreensão acerca dos conceitos e procedimentos utilizados, seus significados, suas distintas representações e possíveis aplicações. De acordo com esses estudos, essa abordagem ao conhecimento algébrico conduz a um ensino pautado em pressupostos mnemônicos, desconsiderando a potencialidade da exploração do pensamento algébrico e podendo originar dificuldades e até obstáculos (COELHO; AGUIAR, 2018; KAPUT, 1999; DA ROCHA FALCÃO, 1997; LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2005; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN, 1992, 1995, 2004, 2007; OLIVEIRA, CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2017; RIBEIRO; CURY, 2020).

Uma das principais dificuldades evidenciadas pelos pesquisadores da área refere-se a passagem da aritmética à álgebra, sendo que essas podem ser reflexos de construções parciais ou lacunas, oriundas de quando o sujeito constrói conhecimentos inerentes à aritmética sem atentar à percepção de padrões e regularidades (LINS; GIMENEZ, 1997), ou seja, sem a exploração da existência de possíveis relações quanto aos procedimentos e aos conceitos elaborados, por exemplo. Nesse sentido, Lins e Gimenez (1997) defendem

que o pensamento algébrico deve ser incentivado desde o início da escolarização, de modo paralelo ao ensino da aritmética, fazendo os estudantes observarem regularidades que auxiliarão, posteriormente, na transição do pensamento aritmético à representação algébrica.

Buscando alternativas ao ensino puramente aritmético (BLANTON; KAPUT, 2005; KIERAN, 1992; 2004; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007) defendem que é possível que os estudantes desenvolvam o pensamento algébrico paralelamente ao pensamento aritmético. Em seus estudos concluem que estudantes nos anos iniciais da educação básica seriam capazes de lidar com o caráter algébrico da aritmética. Os autores destacam que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre ao longo dos anos e não pretendem propor a superação de etapas nesse sentido, mas indicam a possibilidade de incluir situações que levem os estudantes, mesmo dentro do contexto aritmético, a pensar e expressar relações e identificar equivalências, tais como “João tem 10 canetas a mais que Miguel” e “Miguel tem 10 canetas a menos que João”.

Um exemplo ilustrativo, que pode ser explorado nesse sentido, ainda em anos do ensino fundamental, trata-se da compreensão de relações no contexto da tabuada. Sendo a tabuada tratada apenas como cálculo aritmético, muitas vezes apenas considerada enquanto algoritmo de soma de parcelas iguais, não são exploradas propriedades importantes que poderiam ser compreendidas enquanto relações, ou seja, enquanto aritmética generalizada. Alguns exemplos podem ser observados na Figura 4, onde uma série de generalizações podem ser construídas ou abstraídas.

Figura 4: Tabuada como exemplo de aritmética generalizada

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: elaborada pela autora.

Algumas das relações que podem ser estabelecidas, enquanto aritmética generalizada, a partir da tabuada, são exemplificadas abaixo:

- n^2 : o quadrado de lado n , como
 $5^2 = 25 \rightarrow$ quadrado de lado 5 unidades, cujo resultado fica na 5ª casa da diagonal (cor azul)
- $m \cdot n = n \cdot m$: propriedade comutativa da multiplicação, como
 $7 \cdot 9 = 63 = 9 \cdot 7$ (cor rosa)
- $w \cdot (m + n) = w \cdot m + w \cdot n$: propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma, como $3 \cdot (4 + 6) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \rightarrow 12 + 18 = 30 = 3 \cdot 10$ (LARANJA) ou $(3 + 6) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \rightarrow 6 + 12 = 18 = 9 \cdot 2$ (cor verde)
- $(m - n) \cdot w = m \cdot w - n \cdot w$: propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, como $(8 - 6) \cdot 5 = 8 \cdot 5 - 6 \cdot 5 \rightarrow 40 - 30 = 10 = 2 \cdot 5$ (cor lilás).

Destaca-se, contudo, que não se pretende indicar a utilização de linguagem simbólica no momento em que os estudantes estão construindo a tabuada, essa foi usada aqui apenas para representar as generalizações que podem ser concluídas pelos sujeitos (mesmo que no início da educação básica), sempre recorrendo a uma grande quantidade de situações semelhantes, para que os próprios estudantes possam alcançar as generalizações descritas, desenvolvendo competência ao observar padrões para obtê-las.

Dificuldades na compreensão das relações exemplificadas a partir da Figura 4, associadas ao contexto da aritmética generalizada são frequentemente identificadas em atividades realizadas por alunos tanto no ensino básico quanto no ensino superior. A aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, por exemplo, é apontada por diversos pesquisadores, inclusive, como sendo causa de muitos erros em álgebra, percebidos na aprendizagem de cálculo diferencial e integral (MULLER, 2015).

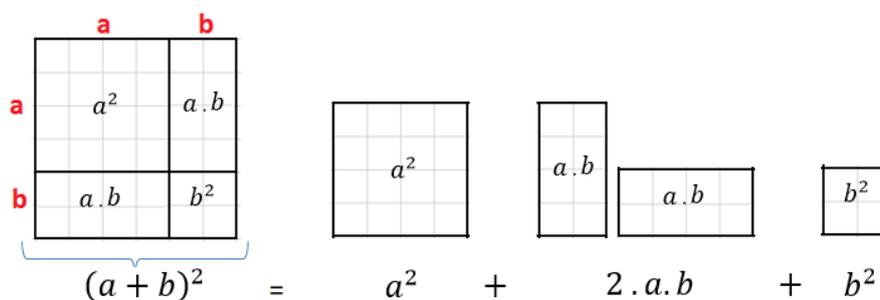
Por certo, os casos mencionados são apenas exemplos que ilustram a existência de dificuldades para observar padrões e realizar generalizações, que de acordo com Oliveira e Câmara dos Santos (2011, p. 2) indicam “a existência de uma ruptura epistemológica nessa passagem do raciocínio aritmético para o algébrico, o que exige uma transição para a introdução de uma nova linguagem e forma de raciocínio lógico matemático”. Assim, “a transição da aritmética para o estudo de uma matemática mais avançada não se afigura fácil para os alunos” (VALE; BARBOSA, 2019, p. 401), pois é

necessário que o aluno construa, para tanto, uma forma de pensamento para além do real e que se torne capaz de aplicar essa forma diante de diferentes problemas a resolver.

Kaput (1999) também afirma que nesse processo, podem emergir dúvidas e dificuldades, ainda, quando os significados dos símbolos manipulados não são retomados, ou seja, quando o processo se centra apenas nos transformismos algébricos em si. O ensino dos produtos notáveis quando pautado essencialmente sob regras sintáticas é um bom exemplo disso. Um erro comum cometido pelos estudantes é considerar que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, o que é falso a menos que a ou b assumam valor nulo. Nesse caso, com uma abordagem não direcionada diretamente à expressão algébrica, os estudantes poderiam perceber o equívoco apenas com um contraexemplo, algo do tipo $(4 + 2)^2 = 6^2 = 36$ e $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$. O correto a ser considerado, nesse exemplo, seria $(4 + 2)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2^2 = 36$, ou seja, $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ na representação algébrica.

Nota-se, nessa situação hipotética, que o erro cometido ao considerar $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ refere-se à falta de compreensão ou de associação do significado à expressão operada. Isso evidencia o quanto é importante que o estudante atribua significados aos símbolos, a fim de que seja capaz de manipulá-los corretamente e compreender as relações que estes implicam. Para tanto, pode-se associar outras representações (Figura 5) para auxiliar na significação da expressão $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ conhecida como “o quadrado da soma de dois termos”.

Figura 5: Representação geométrica de $(a + b)^2$



Fonte: elaborada pela autora.

Assim sendo, se a utilização de símbolos amplia as possibilidades de construir ou referenciar cada vez mais conhecimentos utilizando uma notação bastante sintética, a

mera manipulação algébrica acaba por reificar o verdadeiro sentido da utilização dos símbolos em favor do pensamento algébrico.

Na verdade, a linguagem simbólica-formal cumpre, a partir de um certo momento, um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico abstrato, uma vez que ela fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema, o que possibilita dar conta da totalidade e da estrutura da situação. Além disso, ela é um instrumento facilitador na simplificação de cálculos, devido à capacidade transformacional das expressões simbólicas em outras mais simples que lhe são equivalentes. Finalmente, por permitir operar com quantidades variáveis, possibilita uma melhor compreensão de situações nas quais a variação e o movimento estejam presentes (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 2016, p. 89).

De todo modo, a construção desses significados deve ser realizada pelos sujeitos e isso leva tempo, o que as vezes não é observado em sala de aula, podendo também ser um fator gerador de dificuldades (KAPUT, 1999). A manipulação de símbolos sem compreensão pode resultar em generalizações incorretas, que não aconteceriam caso fosse utilizada uma grande quantidade de situações que possibilitassem a construção do conceito ou do procedimento de modo generalizado, de igual forma como se dá o desenvolvimento de uma competência, conforme defendem Perrenoud (1999), Machado (2002; 2006) e Macedo (2005).

Outro aspecto causador de dificuldades em relação ao pensamento algébrico refere-se à capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido (ALMEIDA; SANTOS, 2017), ou seja, atribuir variáveis e manipulá-las considerando propriedades características do contexto da situação em que estas estão sendo consideradas, além de compreender os significados associados a essas variáveis, bem como sua natureza (argumento ou parâmetro). Assim, outra dificuldade apontada pelos autores, que também remete à compreensão dos tipos de variáveis, refere-se a confusões que ocorrem ao lidar com equações e funções, bem como ao identificar relações de proporcionalidade entre grandezas.

Quanto a álgebra como estudo das funções, Pommer (2016, p. 108) é enfático ao afirmar que “apesar da imensa dimensão presente na atual grade curricular de ensino com relação à Álgebra e, em particular, com as funções no ensino básico, estudantes de todos os níveis ainda apresentam problemas em trabalhar com variáveis”. Nesse mesmo sentido, Nasser, Sousa e Torraca (2016, p. 183) apontam alguns obstáculos à aquisição do conceito

de função, as quais são: “a concepção ingênua de que o gráfico de uma função não precisa ser exato”; “a concepção de que apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções”, “a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função” e “as dificuldades na transposição da representação verbal (descrição da situação problema) para uma representação analítica, isto é, escrever uma sentença matemática que relacione as grandezas envolvidas no problema”.

A compreensão do conceito de função constitui-se em quatro níveis: compreensão intuitiva, matematização inicial, abstração e formalização (BERGERON; HERSCOVIS, 1982 apud NASSER; SOUSA; TORRACA, 2016).

A compreensão intuitiva corresponde ao conhecimento informal, caracterizado por pré-conceitos, pensamento baseado na percepção visual e ações não quantificadas primitivas, produzindo apenas aproximações grosseiras. Já a matematização inicial evidencia a aquisição de um procedimento que, pela coordenação do conhecimento intuitivo e alguns pré-requisitos, constitui a primeira construção de um conceito. A abstração corresponde à generalização ou invariância de um objeto matemático refletida pela sua conservação, ou reversibilidade das transformações, enquanto a formalização pressupõe o uso do simbolismo, ou justificação lógica das operações, ou a descoberta de axiomas. Em todos os casos, este nível supõe que tenha ocorrido anteriormente uma abstração (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2016, p. 189).

Ainda, a partir de estudos apontados por Segadas-Vianna (2016, p. 120) pode-se concluir que existe uma

[...] desconexão na imagem dos alunos do conceito de função, entre sua definição formal e o seu sentido nas fórmulas e algoritmos do Cálculo, bem como entre a definição formal e o seu entendimento gráfico. Gráficos são utilizados mais como ilustrações dos conceitos do que como ferramentas na resolução de questões. As ferramentas que os alunos utilizam são predominantemente algorítmicas, algumas refletindo o fato de memorizarem procedimentos que funcionam em casos particulares, mas não aplicadas em geral.

Nessa direção, vários autores, entre eles Lorenzato (2012) e Biembengut (2016), enfatizam a necessidade de trabalhar de modo integrado com aritmética, geometria e álgebra. Para esses autores, as diferentes formas de representação de um mesmo ente matemático favorecem a construção de significados, pelos próprios estudantes, bem como o estabelecimento de relações válidas que podem favorecer o processo de abstração. E não só na matemática! A representação geométrica é considerada importante, como um

intermediário, para o desenvolvimento da abstração, no âmbito do conhecimento científico, pois

[...] sobre qualquer questão, sobre qualquer fenômeno, é preciso passar primeiro da imagem para a forma geométrica e, depois, da forma geométrica para a forma abstrata, ou seja, seguir a via psicológica normal do pensamento científico. Portanto, partiremos quase sempre das imagens, em geral muito pitorescas, da fenomenologia primeira; veremos como, e com que dificuldades, essas imagens são substituídas pelas formas geométricas adequadas. Não é de admirar que essa geometrização tão difícil e tão lenta apareça por muito tempo como conquista definitiva e suficiente para constituir o sólido espírito científico, tal como se vê no século XIX. O homem se apega àquilo que foi conquistado com esforço. Será necessário, porém, provar que essa geometrização é um estágio intermediário (BACHELARD, 2005, p. 10 – 11).

A utilização de diferentes formas de representação é defendida aqui como estratégia para abordar a resolução de problemas vinculados ao pensamento algébrico, como intermediário entre a situação proposta e a mobilização dos conhecimentos necessários à modelagem e à resolução de cada situação-problema. De modo particular, concorda-se com Biembengut (2016, p. 153) quando escreve que “a relação entre a representação geométrica e algébrica está em associar cada [...] ente geométrico a outro ente algébrico, representado por uma letra. Isto significa: utilizar símbolos que identifique um signo, uma palavra, uma acepção particular”. De acordo com essa autora, o uso de uma representação geométrica deve possibilitar que o sujeito, rapidamente, perceba e compreenda o que está representado, realizando a leitura, a codificação e a decodificação desse ente no contexto considerado.

Além disso, a representação deve tornar a situação “ainda mais significativa na medida em que [...] oferece uma oportunidade de melhor compreender os entes que a envolve” possibilitando, inclusive “que outra pessoa possa apreender a mesma representação significante e significado com seus domínios cognitivos próprios, mesmo recriados pelo seu campo de percepção, observação e compreensão” (BIEMBENGUT, 2016, p. 153). Por fim, Biembengut (2016) salienta que na medida em que os estudantes conseguem compreender uma representação gráfica, por exemplo, a apreensão de conceitos subsequentes e outros usos também são facilitados, ou seja, a compreensão da representação geométrica pode auxiliar na construção, desenvolvimento e aplicação de conhecimentos abstratos, como os algébricos.

Entretanto, é possível também que os estudantes enfrentem dificuldades ao transitar de uma forma de representação a outra, como por exemplo, construir a

representação gráfica de uma função a partir de sua lei de formação ou obter a lei de formação extraindo informações por meio da visualização da sua representação gráfica. De acordo com Rivera (2011, apud VALE, BARBOSA, 2019, p. 403) “a necessidade de pensar e raciocinar visualmente é muito forte e pode ser uma ferramenta cognitiva muito importante no desenvolvimento de conceitos e processos matemáticos, incluindo a resolução de problemas”.

Contudo, é preciso que as representações expressem, de fato, as características essenciais das situações a que se destinam. Eisenberg (1991) (apud SEGADAS-VIANNA, 2016, p. 117) identificou que os estudantes também demonstram dificuldades relacionadas ao uso dos gráficos, pois, por vezes, “não compreendem os gráficos que eles próprios desenham, não sabem como justificar os resultados obtidos graficamente e não enxergam os gráficos de funções como realmente parte de sua essência”.

Outro aspecto bastante citado na literatura é o fato de os estudantes associarem a ideia de função com a elaboração de gráficos partindo de pontos escolhidos aleatoriamente e dispostos em uma tabela, ou seja, através da atribuição de determinados valores para a variável x e a obtenção da referida imagem $f(x) = y$. Segadas-Vianna (2016, p. 117) destaca que essa pode ser uma estratégia valiosa para o estudo e “entendimento do comportamento de funções, mas para que se tracem gráficos a partir de tabelas, é essencial que [os estudantes] saibam quais pontos escolher e que tenham alguma percepção da forma do gráfico”.

Em relação à álgebra enquanto linguagem para modelar fenômenos, há também apontamentos de possíveis obstáculos, sendo o principal a conversão entre “a linguagem natural das situações-problema (o enunciado do texto) para a linguagem algébrica” POMMER (2016, p. 108). O pensamento algébrico pode ser expresso em linguagem natural, mas também “através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 2016, p. 89). Entretanto, o mais importante na elaboração de uma estratégia é, ainda, a ação do sujeito (PIAGET, 1978; 1982) frente ao problema, pois por meio de suas ações motivadas pela busca por uma solução é que seus saberes serão mobilizados e suas habilidades e competências poderão ser evidenciadas.

4. TECNOLOGIA DIGITAL COMO APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA

A educação não se reduz à técnica, mas não se faz educação sem ela. Utilizar computadores na educação, em lugar de reduzir, pode expandir a capacidade crítica e criativa de nossos meninos e meninas. Dependendo de quem o usa, a favor de que e de quem e para quê. O homem concreto deve se instrumentar com o recurso da ciência e da tecnologia para melhor lutar pela causa de sua humanização e de sua libertação.
(FREIRE, 2001a, p. 98).

Na introdução desse trabalho mencionou-se sobre as mudanças que as Tecnologias Digitais (TD) têm provocado na sociedade. Cada vez mais elas estão disponíveis ou são desenvolvidas a fim de atender demandas de todas as áreas. Na educação, a influência das TD também se manifesta, estando presente “no desenvolvimento de novas ferramentas, cenários e finalidades educacionais, marcadas pela adaptabilidade, pela acessibilidade permanente, pelo trabalho em rede e pela necessidade de uma crescente alfabetização digital” (COLL; MONEREO, 2010, p. 14).

A integração das TD na educação traz consigo a expectativa de obtenção de maior satisfatoriedade dos resultados nos processos de ensino e de aprendizagem. Contudo, a alta disponibilidade de ferramentas e uso das TD não representa, necessariamente, melhorias em termos de qualidade na realização de tais atividades. Para que isso ocorra é preciso:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

A citação acima apresenta uma das competências descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que deve ser desenvolvida pelos estudantes ao longo da educação básica. É inegável que o ambiente escolar precisa abrir espaço para essa revolução tecnológica, mas é preciso observar que a “educação não se reduz à técnica” (FREIRE, 2001a, p. 98) e os instrumentos tecnológicos utilizados nos processos de ensino e de aprendizagem devem ter um propósito maior que o caráter instrumental propriamente.

Desse modo, em relação a integração tecnológica na educação, são “os contextos de uso [...] que acabam determinando seu maior ou menor impacto nas práticas

educacionais e sua maior ou menor capacidade para transformar o ensino e melhorar a aprendizagem” (COLL; MAURI; ONRUBIA, 2010, p. 66-67). A tecnologia pode trazer contribuições positivas para o homem viver em sociedade realizando as mais diversas atividades, mas deve-se estar atento aos propósitos de uso desses recursos digitais.

Durante o cenário pandêmico, as tecnologias digitais foram (e ainda estão sendo!) fundamentais para oportunizar “a continuidade de diversas atividades, como a interação social, o desenvolvimento de atividades profissionais, as operações de comércio e as atividades educacionais” (CGI.br, 2020, p.73)²⁵. É incontestável o fato de que as TD foram utilizadas, nesse contexto, enquanto instrumento de apoio às ações educativas, porém é a reflexão acerca do uso dessas ferramentas que oportunizará reais avanços. É preciso aprender a partir do vivenciado durante o ensino remoto emergencial e observar entre as práticas realizadas, quais podem ser mantidas no pós-pandemia e quais precisam ser reformuladas para servirem aos propósitos traçados pelos professores.

Assim, se já se falava acerca das diferentes relações com o saber em função da diversidade de modos de obtenção de informações e apontava-se o papel cada vez mais importante do professor enquanto problematizador (MOLON *et al.*, 2020), durante a pandemia isso tornou-se ainda mais evidente. Ensinar e aprender diante da dinâmica do tempo digital, no qual “praticamente todas as informações estão armazenadas na internet e diante de uma cultura em que a necessidade de memorização de conteúdos está em declínio pode ser um dos principais desafios da educação no século XXI” (MOLON *et al.*, 2020, p. 242).

Essa reconfiguração exige dos sujeitos, não só dos professores, mas também dos alunos, habilidades digitais tais “como a identificação de fontes de informação, critérios para o compartilhamento de conteúdo na Internet e a capacidade crítica para interpretar e julgar a confiabilidade das informações” (CGI.br, 2018, p. 100). Pela internet, crianças, adolescentes e adultos recebem e compartilham materiais, interagem com colegas e professores, recorrem a videoaulas ou a outros materiais online para esclarecer dúvidas e buscar informações, deixando de lado consultas a materiais físicos. Além disso, com a necessidade de distanciamento social, a Internet “tem sido indispensável para garantir a comunicação, o acesso à informação, o comércio eletrônico, a prestação de serviços públicos [...], a telemedicina, o trabalho remoto, o ensino a distância e a fruição cultural”

²⁵ Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br).

(CGI.br, 2021, p. 17), de acordo com o Painel TIC (CGI.br, 2021) referente a pesquisa *web* sobre o uso da Internet no Brasil durante a pandemia do (novo!) coronavírus publicada em 2021²⁶.

Por outro lado, a pandemia também evidenciou as desigualdades sociais do nosso país, exigindo ações para o enfrentamento dos desafios impostos pela falta de recursos, dificuldades de acesso e baixa velocidade de conexão para a realização de atividades remotas (CGI.br, 2021). Tanto a ampliação da utilização das TD por professores e alunos, quanto os desafios frente à disponibilidade de acesso à internet nas escolas são destaques nos resultados da pesquisa TIC Educação²⁷ que é realizada, anualmente desde 2010, pelo Centro de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da Comunicação (CETIC), por meio do Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br). Os dados referentes a TIC Educação 2019, coletados antes da necessidade de implementação de ações de ensino remoto emergencial, revelaram também quais eram as principais atividades realizadas pelos professores, envolvendo o uso do computador e da internet com os alunos. A Tabela 1 apresenta essas atividades e os percentuais de realização referente às escolas públicas e escolas particulares.

Tabela 1: Principais atividades envolvendo o uso do computador e da internet com os alunos

Atividade	Escolas Públicas	Escolas Particulares
dar aulas expositivas	49%	82%
solicitar a realização de trabalhos sobre temas específicos	44%	58%
solicitar trabalhos em grupo	40%	54%
solicitar a realização de exercícios	39%	62%
promover debates ou apresentações	33%	53%
realizar interpretação de textos	31%	57%
fazer pesquisas em livros e revistas	31%	56%
solicitar a produção de textos, desenhos ou maquetes	29%	56%
trabalhar com jogos educativos	24%	45%
elaborar planilhas e gráficos	15%	32%

Fonte: Dados extraídos de CGI.br (2020, p. 88).

Com base nesses dados e analisando a série histórica desse indicador desde 2016, o documento observa que:

²⁶ https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/20210426095323/painel_tic_covid19_livro_eletronico.pdf

²⁷ As publicações referentes às pesquisas desde 2010 estão disponíveis em: <https://cetic.br/pesquisa/educacao/publicacoes/>.

Entre os professores de escolas particulares, algumas atividades apresentaram proporções maiores de uso de recursos digitais ao longo dos anos, como a realização de aulas expositivas, o uso de jogos educativos e a elaboração de planilhas, ainda que, em grande parte dos resultados, as proporções não ultrapassem muito mais do que a metade dos docentes. Entre os professores de escolas públicas, observa-se que as proporções para a maioria das atividades estavam abaixo de 40% dos docentes e mantiveram certa estabilidade nos últimos quatro anos, evidenciando que o avanço no uso pedagógico das tecnologias nas escolas públicas urbanas tem ocorrido de forma mais lenta (CGI.br, 2020, p. 87).

A partir da análise dos dados apresentados acima nota-se que as TD podem fornecer apoio à ação pedagógica em diferentes atividades. No entanto, a pesquisa não menciona a utilização das TD para a avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes, o que pode ser evidência de que elas são pouco utilizadas para esse fim. As TD podem servir de apoio à avaliação, mas isso depende, é claro, de planejamento, das escolhas metodológicas, da definição de objetivos e, talvez, da própria concepção epistemológica dos docentes, a qual influenciará as escolhas e a definição do formato e dos instrumentos para a realização dessas avaliações.

Isso vai ao encontro da epígrafe desse capítulo (FREIRE, 2001a), uma vez que o recurso não substitui o planejamento e a ação docente, mas pode servir de instrumento para a efetiva realização dos processos planejados tendo em vista os objetivos traçados, incluindo o acompanhamento da aprendizagem dos alunos. Dando continuidade à temática do uso das TD para apoio à ação pedagógica, de modo mais específico, à avaliação, a próxima seção discutirá a concepção de avaliação que este estudo adota.

4.1 Acompanhar a aprendizagem dos estudantes: a avaliação enquanto processo

A avaliação é a reflexão transformada em ação. Ação, essa, que nos impulsiona a novas reflexões. Reflexão permanente do professor sobre sua realidade, e acompanhamento de todos os passos do educando na sua trajetória de construção do conhecimento.
(HOFFMANN, 2017, p. 24)

Avaliar é uma das atividades docentes mais importantes tendo em vista o acompanhamento das aprendizagens dos estudantes. Apesar de reconhecer esse aspecto, pesquisas, como as descritas em Hoffmann (2014; 2017), apontam que as práticas avaliativas ainda se baseiam na mera verificação de resultados. Na maioria das vezes, quase que como uma sentença acerca das capacidades cognitivas de cada estudante, a avaliação centra-se em provas com atribuição de notas deixando “a inexata impressão de

que a mesma representa, como resultado final, o quanto o aluno aprendeu ou deixou de aprender, sem compromisso com o processo” (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020, p.502).

Imagine uma turma de trinta e cinco estudantes de uma classe de ensino médio em um dia de “avaliação” de matemática (embora a reflexão valha para qualquer disciplina). Agora, pause sua leitura e descreva esse cenário.

Provavelmente, você criou a imagem de uma sala de aula com classes individualmente dispostas em formato retangular, cinco filas com sete classes em cada uma delas, quadro sem anotações e, sobre a mesa dos estudantes, apenas os materiais considerados essenciais: lápis, borracha, caneta e, talvez, uma folha de rascunho. Não se pode recorrer a calculadoras ou a qualquer outro recurso tecnológico ou meios eletrônicos de acesso à informação durante o momento de “provar” o conhecimento “adquirido” ao longo das últimas semanas.

A sala está em silêncio. Ouve-se, por vezes, apenas o barulho característico da fricção de borrachas no papel, indicando um possível “*insight*”, o qual pode ter modificado o caminho de resolução de alguma das dez questões do exame. As questões eram semelhantes às trabalhadas em sala de aula. Tudo ocorre como o previsto. O tempo destinado à avaliação termina e as provas são recolhidas.

E o que ocorre depois? O professor, ansioso pelos resultados, inicia a correção. Questão a questão para ser o mais “imparcial” possível. Identificam-se muitas questões não respondidas. Os erros são apontados, os acertos são pontuados. Uma nota, a soma dos pontos referentes a cada questão respondida corretamente, é atribuída a cada estudante pelo seu desempenho. As provas são devolvidas, as questões corrigidas no quadro. Esse foi o momento da “recuperação paralela” de conteúdo. Em seguida, conteúdo novo e dias depois o ciclo repete-se.

A quem ou a que serve uma avaliação como a realizada na situação hipotética descrita acima? A avaliação deve servir como norteadora acerca dos caminhos que devem ser trilhados por professores e alunos para que os processos de ensino e aprendizagem possam ser qualificados. De acordo com Hoffmann (2014; 2017) é primordial compreender a avaliação como promotora de possibilidades de aprendizagem e como fonte de evidências dos processos cognitivos dos estudantes e de suas dificuldades em

avançar, para que essas informações auxiliem o professor na tomada de decisões pedagógicas. É a isso e a esses (professores e alunos) que a avaliação deve estar a serviço.

A avaliação é considerada um elemento essencial à educação, um elemento “inerente e indissociável enquanto concebida como problematização, questionamento, reflexão sobre a ação” (HOFFMANN, 2017, p. 22). Logo, os processos de avaliação devem revelar se cada aluno está construindo competências que lhe possibilite ser mais autônomo em sua vida, considerando que “avaliar competências fundamentais requer avaliar os sistemas de compreensão e ação e, portanto, avaliar atuações, com consciência da complexidade dos elementos presentes nas ações humanas” (GÓMEZ, 2015, p. 132).

Assim, a avaliação entendida como processo deve considerar as respostas dadas pelo aluno e o processo que o levou as conclusões obtidas, tendo em vista que, muitas vezes, o caminho é muito mais importante que o resultado. Para Hoffmann (2014, p. 110) “serão as respostas dos alunos que darão pistas ao professor para continuar refletindo permanentemente sobre as novas atividades a propor”. Na medida em que se consideram esses aspectos, a avaliação deixa “de ser um momento terminal do processo educativo (como ainda é concebida) para se transformar na busca incessante de compreensão das dificuldades do educando e na dinamização de novas oportunidades de conhecimento” (HOFFMANN, 2017, p. 28).

Uma avaliação que sirva à ação pedagógica, com objetivo de maximizar os percursos individuais de construção de conhecimentos de cada estudante, deve buscar evidências acerca do que cada um já aprendeu, mas especialmente do que ainda precisa construir (HOFFMANN, 2014). É desejável que a avaliação seja capaz de fornecer indícios acerca dos raciocínios e das relações lógicas efetuadas pelos estudantes, bem como das dificuldades que enfrentam. Deve evidenciar os aspectos que estão impossibilitando o estudante de avançar e identificar evidências de percalços nos processos de construção de conhecimento (HOFFMANN, 2018; PERRENOUD, 2007).

Para tanto, “se faz necessário que a avaliação seja um instrumento de coleta de dados acerca do processo de desenvolvimento do aluno” (HOFFMANN, 2014, p. 13), de modo que, a partir da análise desses dados, pelos docentes ou pelos próprios estudantes, caminhos sejam buscados para a superação das dificuldades.

Considerada desse modo, a avaliação transforma-se em oportunidade para a promoção da aprendizagem, “não mais como um fim, mas como processo de construção

e de ação pedagógica” (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020, p. 502). De acordo com Hoffmann (2014, p. 19) “uma avaliação a serviço da ação não tem por objetivo a verificação e o registro de dados do desempenho escolar, mas a observação permanente das manifestações de aprendizagem para proceder a uma ação educativa que otimize os percursos individuais”. Sendo assim, Hoffmann (2017; p. 86) adota “a perspectiva da ação avaliativa como uma das mediações pela qual se encoraja a (re)organização do saber”. Avaliar, na concepção mediadora, significa:

1. Oportunizar aos alunos muitos momentos de expressar suas ideias.
2. Oportunizar discussão entre os alunos a partir de situações problematizadoras.
3. Realizar várias tarefas individuais, menores e sucessivas, buscando entender as repostas apresentadas pelos estudantes.
4. Em vez do certo/errado e da atribuição de pontos, fazer comentários sobre as tarefas dos alunos, auxiliando-os a localizar as dificuldades, oferecendo-lhes oportunidades de descobrirem melhores soluções.
5. Transformar os registros de avaliação em anotações significativas sobre o acompanhamento dos alunos em seu processo de construção de conhecimento (HOFFMANN, 2018, p. 72-73).

Ao assumir essa perspectiva mediadora da avaliação, o professor busca realizar conexões entre as hipóteses que os estudantes elaboram e os conhecimentos específicos que estão servindo de meio para seu desenvolvimento cognitivo. Para tanto, o professor precisa conhecer acerca dos conteúdos disciplinares que leciona – de forma ampla e detalhada, além de conhecer aspectos acerca do processo de construção do conhecimento (HOFFMANN, 2017).

Fazendo referência a teoria piagetiana, Hoffmann (2017) enfatiza ainda que os princípios que fundamentam a avaliação, inserida nessa concepção, estão implícitos aos estudos sobre a gênese do próprio conhecimento. Assim, para a autora, na medida em que se busca compreender quais são as condições necessárias para que cada sujeito possa alcançar o conhecimento possível a ele, consideram-se também os processos de interação entre o organismo e o meio, e a compreensão de como ocorre o desenvolvimento da própria capacidade de conhecer. Nesse sentido,

A ação avaliativa abrange justamente a compreensão sobre o processo de cognição, porque o que interessa fundamentalmente ao professor é dinamizar oportunidades de o aluno refletir sobre o mundo e de conduzi-lo à construção de um maior número de verdades, numa espiral necessária de formulação e reformulação de hipóteses (abstração reflexiva) (HOFFMANN, 2017, p. 30).

Nessa perspectiva, a tarefa docente consiste em propor situações desafiadoras aos estudantes de modo que estas possibilitem a construção de seus conhecimentos e o desenvolvimento de suas competências cognitivas, no sentido de “aprender pensando” (CARRAHER, 2012). Considerando esses aspectos, "o professor precisa criar ambientes que propiciem o aprendizado dos estudantes a partir de múltiplos recursos, mediados pela tecnologia extrapolando a visão linear de currículo para uma visão mais abrangente" (RABELO, 2013, p. 235).

Assim, além de compreender as facetas que envolvem o processo de avaliação, é preciso analisar de que forma é possível lançar mão de instrumentos para auxiliar o professor nessa importante tarefa e desenvolver estratégias que possam auxiliar a exercer este papel investigativo em sala de aula. As TD inseridas nesse cenário trazem possibilidades de recursos para a realização desse acompanhamento. A próxima seção explora o tema e apresenta resultados de um mapeamento sistemático da literatura (MSL) acerca de ferramentas digitais utilizadas no processo de acompanhamento dos estudantes ao encontro da perspectiva avaliativa aqui abordada.

4.2 Ferramentas digitais na avaliação do processo de aprendizagem

Os registros em avaliação são dados de uma história vivida por educadores com educandos. Ao acompanhar vários alunos, em diferentes momentos de aprendizagem, é preciso registrar o que se observa de significativo como um recurso de memória diante da diversidade e um exercício de prestar atenção ao processo educativo individualizado, aluno por aluno.
(HOFFMANN; 2014, p. 133)

As Tecnologias Digitais (TD) podem auxiliar na realização da avaliação do processo de aprendizagem, do ponto de vista do acompanhamento pedagógico. Acompanhar os estudantes, de acordo com essa compreensão, implica “coletar, armazenar e analisar dados e informações qualitativas acerca do processo de aprendizagem de cada aluno” (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020, p. 502).

Tendo em vista a realização dessa atividade docente, ferramentas digitais podem ser úteis tanto para a realização desses registros, quanto para a análise deles, além de possibilitar economia de tempo e trabalho. No entanto, isso só se torna viável na medida em que instrumentos, como o proposto a partir da presente pesquisa, estejam ao alcance dos docentes e estudantes. Partindo desse pressuposto, a presente seção apresenta alguns resultados de um estudo realizado com o intuito de identificar ferramentas digitais

existentes para a avaliação da aprendizagem considerada sob a perspectiva mediadora ou formativa.

Caracterizado como um mapeamento sistemático da literatura (MSL), por seu caráter exploratório (RANDOLPH, 2009), a definição dos artigos seguiu o protocolo descrito por Kitchenham e Charters (2007). Através do MSL buscou-se responder, inicialmente, ao seguinte questionamento: *Que ferramentas ou recursos digitais estavam sendo utilizados para a avaliação da aprendizagem em contextos educacionais?* A partir dos estudos selecionados e tendo em vista o objetivo geral da presente tese buscou-se responder também a questões específicas: *De que forma professores e alunos interagem ou utilizavam essas ferramentas? Sob que plataformas cada ferramenta estava desenvolvida e como se classificava quanto a sua concepção tecnológica (aplicativo, plataforma digital, sistema, software, site etc.)? Como essas ferramentas digitais coletavam e disponibilizavam os dados para a realização da avaliação da aprendizagem?*

Em Molon, Nicolao e Franco (2020) encontra-se o detalhamento da metodologia utilizada para a realização do MSL, assim como respostas a esses questionamentos. Foram analisados, ao final, 26 artigos. Cabe salientar, contudo, que, como ocorre na maioria das revisões ou mapeamentos sistemáticos da literatura, os critérios de seleção adotados podem ter deixado de contemplar algum estudo. O MSL foi realizado através do Portal de Periódicos da Capes²⁸ que contém uma grande quantidade de bases e periódicos indexados. Apesar disso, não se pode garantir que estudos dentro dessa temática publicados em outras fontes não tenham sido deixados de fora do escopo do MSL realizado (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020).

Do MSL realizado serão trazidos, a seguir, alguns resultados obtidos considerando os artigos que, de modo especial, se aproximavam mais do objetivo da presente tese e das concepções de avaliação e de uso das tecnologias digitais defendidos até aqui.

O artigo de Santos, Cook e Hernández-Leo (2015) discutiu o uso dos dispositivos móveis (DM) como apoio à avaliação e abordou a necessidade de fornecer suporte (andaimes) aos alunos, antes, durante e após a realização de atividades semelhantes a atividades reais, possibilitando interações mais significativas e a construção de habilidades de pensamento de ordem superior. Os autores implementaram o *Sistema m-*

²⁸ <https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br/index.php>

AssIST (mobile-Assessment Interaction Scaffolding Temporal Model) capaz de capturar as características das atividades e das interações dos alunos na ferramenta, o que permitiu a criação de cenários e a reflexão acerca dos mecanismos de andaimes que poderiam apoiar interações específicas em contexto avaliativo. As interações através do sistema podiam ser monitoradas e avaliadas automaticamente, embora dependendo da atividade, algumas avaliações ainda ficavam restritas às respostas fornecidas pelos próprios alunos, sendo este um aspecto negativo apontado.

Steif, Fu e Kara (2016) desenvolveram um tutor cognitivo capaz de fornecer suporte e *feedback* aos alunos na resolução de problemas de treliça, comuns na engenharia e considerados complexos por possuírem múltiplos caminhos de resolução. Os autores tinham o objetivo de desenvolver um tutor mais simples que os conhecidos sistemas de tutoria inteligente para ajudar os alunos a aprender a resolver esses problemas, possibilitando a resolução no computador com mouse e teclado praticamente da mesma forma como seria feito com lápis e papel: desenhando diagramas, escrevendo e organizando a resolução de equações e interpretando os resultados obtidos. O tutor, então, identificava erros ao longo desse processo, porém a partir de explicações fornecidas pelos próprios estudantes. Os autores afirmaram que esse procedimento de explicação seria uma maneira de tornar visível o pensamento dos alunos (tanto para eles quanto para o tutor). A partir disso, o tutor poderia fornecer *feedback* intermediário através de algoritmos de execução das etapas de resolução desse tipo de problema, uma vez que a partir de cada ação executada na ferramenta relações com uma lista de habilidades ou componentes de conhecimento pré-estabelecida eram identificadas.

Dessa forma, esse tutor apontava, em cada ponto de análise, os erros cometidos pelos alunos fazendo com que o aluno buscasse corrigi-lo para seguir. Esse sistema de tutoria contava com três elementos integrados: interface gráfica do usuário que permitia interações e registros das etapas, algoritmos que julgavam a correção das ações e conjecturas adequadas para analisar os registros inseridos pelo aluno. Os autores afirmaram que essa abordagem diminuía a chance de repetição do mesmo erro pelo aluno e possibilitava a realização de uma avaliação formativa automatizada e o acompanhamento do progresso de aprendizado, a partir de análise por meio de *software* estatístico dos dados dessas interações.

Greiff *et al.* (2016) exploraram a relação entre os comportamentos dos alunos e o desempenho na solução de problemas complexos (SPC) através de registros de *log*. O estudo afirmou que quanto maior a necessidade de ações exploratórias para medir uma habilidade específica, mais longas seriam as sequências comportamentais expressas por essas ações, resultando em arquivos de *log* mais extensos e com maior quantidade de informações potencialmente expressivas do comportamento dos alunos. A pesquisa considerou como o nível de proficiência dos estudantes ao longo das tarefas de SPC, em ambientes computacionais, era afetado por três indicadores: tempo na tarefa, observação sem interferência e alta frequência de intervenção em duas dimensões: a aquisição do conhecimento e a aplicação desse conhecimento. Os autores destacaram que enquanto alguns alunos realizavam intervenções frequentes como uma estratégia exploratória do problema (fato geralmente interpretado como indicativo de comportamento aleatório, não focado em objetivo específico), outros realizavam menos intervenções, porém de forma mais planejada. Esse estudo constatou que os alunos que observavam os problemas antes de executar ações exploratórias no ambiente obtiveram melhor desempenho na SPC em relação àqueles que realizavam uma grande frequência de intervenções (possivelmente não planejadas).

Os autores destacaram, entretanto, que o baixo desempenho nas tarefas também poderia estar associado ao tempo: ou muito pouco ou muito tempo na mesma tarefa, embora essa relação tempo/desempenho dependesse ainda de outros aspectos como as características da tarefa ou da pessoa, da dificuldade da tarefa e do nível de proficiência do aluno. Por fim, o artigo de Greiff *et al.* (2016), sugeriu que mais estudos fossem realizados considerando interferências no desempenho dos alunos, além das analisadas por eles, para aproximar ainda mais os processos de aprendizagem e avaliação.

Por sua vez, o estudo de Csapó e Molnár (2017) validou um conjunto de testes de solução de problemas dinâmicos (SDP) *on-line* (com base em cenários simulados por computador) e explorou seu potencial para avaliar as habilidades de SDP dos alunos no início de seus estudos de ensino superior na Hungria. O estudo utilizou testes interativos que mediam conhecimentos prévios dos alunos em cinco áreas: língua e literatura húngara, matemática, história, ciência e inglês como língua estrangeira, além de outro teste (baseado na abordagem *MicroDYN*) usado especificamente para avaliar as habilidades de SDP dos alunos.

Os pesquisadores também coletaram informações sobre o histórico dos alunos e de suas estratégias de estudo. Os autores afirmaram que a SDP *on-line* envolvia componentes do raciocínio científico, aquisição e utilização de conhecimento, uma vez que nos testes interativos o comportamento do sujeito, as decisões tomadas e ações executadas impactavam e modificavam o ambiente da tarefa. Entre os resultados, observaram que a aquisição de conhecimento era um componente mais decisivo para a SDP do que a utilização de conhecimento e que havia ligações entre as estratégias de aprendizado dos alunos e a aquisição de conhecimento durante a SDP. Além disso, os autores sugerem outras questões de investigação como, por exemplo, identificar através de análise de arquivos de *log*, a partir das ações realizadas nos testes e modificações nas variáveis dos problemas, as estratégias de aquisição de conhecimento dos alunos.

A avaliação assistida por computador também foi tema de pesquisa para Saputra, Budiyanto e Hatta (2017). O objetivo foi desenvolver um *software* de avaliação de competências baseado na *Web* que pudesse ser usado para avaliação da aprendizagem. Esse processo ocorreu em cinco estágios: 1) comunicação (levantamento das necessidades de uso do sistema), 2) planejamento e 3) modelagem (etapas que contemplaram a realização de um diagrama de uso - identificação das tarefas que seriam possíveis de serem realizadas por cada usuário no *software* - elaboração do design e de um fluxograma para ilustrar a estrutura), 4) construção (da interface e das funções do sistema) e 5) implantação (etapa onde os pesquisadores realizaram os testes no *software* verificando facilidade de uso, utilidade e aceitação da tecnologia). Recursos diferentes para três usuários principais foram criados: administrador (gerencia o sistema), professor (gerenciar o banco de perguntas, os itens dos testes e os resultados) e estudantes (que podem fazer o teste).

Entre os benefícios que a ferramenta apresentou, Saputra, Budiyanto e Hatta (2017) destacaram: a obtenção rápida de pontuação nos testes (correção automática); a possibilidade de adicionar multimídias na ferramenta de avaliação, bem como dados e fórmulas do Microsoft Excel e melhora na produtividade do professor, em função da pontuação automática. Ao final do processo, os autores demonstraram interesse em adaptar o sistema em conteúdo e desempenho para possibilitar acesso também via dispositivos móveis.

Aspectos vinculados a cada uma dessas cinco ferramentas serviram como inspiração para a concepção e o aperfeiçoamento do Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP), desenvolvido no decorrer da presente pesquisa.

O registro de *logs* dos alunos durante a utilização da ferramenta digital foi um ponto enfatizado nos trabalhos de Greiff *et al.* (2016) e Csapó e Molnár (2017), embora infira-se que os demais também tenham recorrido a esse recurso de registro de dados de navegação na ferramenta. Outro aspecto que se tornou relevante foi o resultado apresentado por Greiff *et al.* (2016) que associa a forma de exploração da ferramenta às características da sequência dos arquivos de *log*. Csapó e Molnár (2017) apontaram, ainda, a possibilidade de identificar, através de análise de arquivos de *log*, as estratégias de aquisição de conhecimento dos alunos a partir das ações realizadas nos testes e modificações nas variáveis dos problemas.

Saputra, Budiyanto e Hatta (2017) faziam referência à avaliação de competências considerando a articulação de recursos variados diante de situações a resolver, remetendo à resolução de problemas, assim como o trabalho de Santos, Cook e Hernández-Leo (2015). O princípio da resolução de problemas, central no trabalho de Greiff *et al.* (2016), de Csapó e Molnár (2017) e de Steif, Fu e Kara (2016), também é um dos princípios norteadores do appAAP.

Mais um fato que contribuiu com o appAAP foi a utilização de explicações fornecidas pelos próprios alunos, além das informações captadas ao longo das interações com a ferramenta, para análise dos erros e para o fornecimento de *feedback*, estratégia implementada no sistema de tutoria inteligente desenvolvido por Steif, Fu e Kara (2016). Do artigo de Santos, Cook e Hernández-Leo (2015) a preocupação com o fornecimento de andaimes por meio das interações no sistema também foi considerada ao se pensar nas características necessárias ao appAAP.

De Santos, Cook e Hernández-Leo (2015) a ideia inicial de focar no desenvolvimento de uma ferramenta que pudesse ser utilizada pelos estudantes através de seus dispositivos móveis (*smartphones*) ganhou ainda mais força. Saputra, Budiyanto e Hatta (2017) também agregam essa possibilidade, apesar de terem desenvolvido seu sistema de avaliação baseado na *Web*, inicialmente.

Por fim, destaca-se o trabalho de Saputra, Budiyanto e Hatta (2017) que apresentou as etapas utilizadas no processo de desenvolvimento do sistema de avaliação

de competências baseado na Web, os tipos de usuários e as funções atribuídas a cada um, além de enfatizar aspectos importantes para a validação da ferramenta como aceitação, utilidade e facilidade de uso. Esses elementos vão ao encontro dos considerados nas etapas de desenvolvimento e validação do appAAP.

De alguma forma, todos os 26 trabalhos retornados no MSL trouxeram reflexões importantes acerca das ferramentas ou recursos digitais já utilizados para a realização da avaliação da aprendizagem. Em resumo, o MSL revelou que existem algumas ferramentas que avançam na temática da avaliação na perspectiva formativa ou mediadora. Essas tecnologias compreendem *softwares*, sistemas de gerenciamento de conteúdo de aprendizagem, sistemas de tutoria inteligente ou tutores cognitivos, formulários de sincronização de aprendizado e avaliação, modelos de aluno, sistemas especialistas, sistemas de resposta eletrônica, mapas causais, entre outros (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020).

Contudo, ao analisar em conjunto os 26 artigos retornados na busca, percebeu-se que a maior quantidade de atividades disponíveis nas ferramentas descritas envolvia a solução de questões fechadas, de múltipla-escolha ou respostas curtas. Foram obtidas descrições acerca da adoção de estratégias para avaliação formativa ou contínua dos estudantes, embora, muitas vezes, o método utilizado estava ainda atrelado à realização de testes de conhecimento. Constatou-se, na grande maioria dos artigos, “uma preocupação constante quanto à necessidade de fornecer *feedback* aos estudantes como estratégia para promover melhoria em seus desempenhos ou notas” (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020, p. 509).

Alguns estudos, porém, consideravam essa perspectiva associando técnicas de acompanhamento de desempenho (através de gráficos, estatísticas etc.) ou das ações dos estudantes (utilizando análise de registros de *log*, por exemplo) (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020). Foram apontadas no MSL ferramentas que possibilitam também a avaliação automática de respostas longas, textos, mapas conceituais e resoluções de problemas complexos. Essas, no entanto, exigem a incorporação de técnicas mais específicas de processamento de dados, como o uso de ontologias de domínio específico, redes semânticas, *Big Data*, comparação com produções de especialistas, regras *if-then*, regras *fuzzy*, raciocínios de domínio, mineração de dados etc. Outras, também permitem

o envio de tarefas dessa natureza, mas dependem de correção manual por parte do professor (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020).

Características quanto à estrutura dos recursos também foram apontadas. Alguns eram do tipo aplicativo *Web* que apresentavam como vantagem a necessidade de dispor apenas de um servidor, de um banco de dados para armazenamento de informações e de acesso à internet para utilização, podendo ser acessadas de dispositivos variados como desktop, tablets ou *smartphones*. Vários artigos indicavam, ao final, a intenção de desenvolver adaptações a fim de ampliar e facilitar o acesso através de dispositivos móveis, em função das características de mobilidade, usabilidade e acessibilidade (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020).

A partir do MSL concluiu-se, portanto, que “a busca por recursos para a realização de uma avaliação mais individualizada e focada no desenvolvimento cognitivo dos estudantes ainda é um desafio que exige mais pesquisas na área” (MOLON; NICOLAO; FRANCO, 2020, p. 501). O desenvolvimento do Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP) alinha-se ao desafio de busca por tais recursos, tendo em vista, ainda, a possibilidade de utilização dos *smartphones* dos próprios estudantes dentro ou fora da sala de aula em prol da educação, considerando o acesso facilitado a esses aparelhos e seus múltiplos recursos.

4.3 Mobilidade e conectividade: dispositivos móveis na educação

Uma rede é um conjunto de nós interconectados. A formação de redes é uma prática humana muito antiga, mas as redes ganharam vida nova em nosso tempo transformando-se em redes de informação energizadas pela internet. [...] A internet é um meio de comunicação que permite, pela primeira vez, a comunicação de muitos com muitos, num momento escolhido, em escala global.
(CASTELLS, 2003)

O avanço tecnológico tem gerado transformações na forma como são realizadas praticamente todas as atividades, as vinculadas ao trabalho, à educação ou até mesmo as mais cotidianas. Ferramentas de digitação de textos, edição de vídeos e músicas, transcrição simultânea de fala, leitores de tela, aplicações de realidade virtual e aumentada, comunicação instantânea, geolocalização, gerenciamento de contas bancárias, controle de cartões de crédito, agendas eletrônicas compartilhadas, etc., são apenas alguns exemplos de atividades que podem ser realizadas a partir de aplicações

desenvolvidas para uso em diferentes dispositivos (desktops, notebooks, smartphones, tablets, etc.) o que revela o quanto as tecnologias digitais (TD) estão imbricadas na vida das pessoas.

Os dispositivos móveis contribuíram de forma significativa na configuração desse cenário tecnológico, já que esses aparatos oferecem possibilidade “de realizar facilmente um conjunto de funções de aplicação, sendo também capazes de conectar-se, obter dados e fornecê-los a outros usuários, aplicações e sistemas” (LEE; SCHNEIDER; SCHELL, 2005, p. 1). Da classe de dispositivos móveis, os *smartphones* destacam-se, pois “apresentam novas oportunidades e desafios no campo das tecnologias de informação e na sociedade, como acesso ubíquo, portabilidade, [...] oportunidades de interação e complexidade reduzida” (FEIJÓ; GONÇALVES; GOMEZ, 2013).

Smartphones são celulares que possuem “conectividade e funcionalidades semelhantes às de um computador pessoal, notadamente com um sistema operacional capaz de correr vários aplicativos” (SMARTPHONE, 2008-2021). O uso desse tipo de telefone celular ganha ainda mais destaque ao mencionar questões de mobilidade e de conectividade à rede de internet, principalmente entre aqueles usuários que já nasceram nesse século (SILVEIRA SONEGO; BEHAR, 2019).

A pesquisa *Tic Kids Online Brasil 2019*²⁹ revelou que o uso do telefone celular por crianças e adolescentes que acessavam a internet seguiu predominante em relação aos demais dispositivos sendo que as “proporções de uso do celular foram superiores a 90% em todas as classes socioeconômicas” (CGI.br, 2020, p.64). Dos jovens brasileiros de 9 a 17 anos, 89% eram usuários da internet em 2019 e, enquanto apenas 2% desses conectavam-se à *web* de forma única através de computadores, 37% utilizavam simultaneamente computadores e telefone celular e 58% faziam uso exclusivo do dispositivo móvel para acessar a internet (CGI.br, 2020).

Os “telefones inteligentes” ou *smartphones* têm influenciado também o cenário educacional, sendo esse fato reforçado pelos dados da pesquisa *TIC Educação 2019*.

Desde 2015, este foi o principal dispositivo utilizado pelos alunos para uso da rede, percentual que chegou a 98% em 2019. Além disso, para 18% dos alunos, o telefone celular foi o único dispositivo para acesso à Internet, percentual que foi de 21% entre os alunos de escolas da rede pública e de apenas 3%, entre os

²⁹ Disponível em:

https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/20201123093344/tic_kids_online_2019_livro_eletronico.pdf

alunos da rede particular. Quatro a cada 10 alunos (39%) de escolas públicas não possuíam nenhum tipo de computador (de mesa, portátil ou tablet) no domicílio, ressaltando a relevância do telefone celular como dispositivo de acesso a grande parte dos recursos disponíveis na rede e, durante a pandemia, também como meio de participação nas aulas remotas (CGI.br, 2020, p. 83).

Há tempos discute-se a implementação e o uso dos laboratórios de informática nas escolas brasileiras. Entretanto, apesar de todos os esforços realizados, a pesquisa *Tic Educação 2019* revelou que, na realidade, com o passar dos anos o uso desses espaços veio diminuindo e onde estes estavam presentes, eles vinham sendo subutilizados.

Desde o início das ações de implementação dos laboratórios, o desafio sempre foi tornar o seu uso efetivo. Em 2015, 83% das escolas públicas urbanas possuíam laboratórios de informática e apenas 61% utilizavam os espaços. Em 2019, as proporções foram ainda menores, 67% de instituições públicas urbanas mantinham laboratórios, e em menos da metade das escolas (48%) o laboratório estava em uso (CGI.br, 2020, p. 75).

Isso pode ser reflexo de falta de investimentos para melhorias e atualizações desses espaços, mas também pode indicar que as tecnologias móveis estão cada vez mais presentes nas salas de aula. Características como mobilidade e conectividade à rede de internet a partir de dispositivos portáteis móveis – em geral os *smartphones* – facilitam a dinâmica de uso das TD nas escolas, principalmente por dispensar a necessidade de deslocamento a um laboratório de informática. Além disso, as TD rompem “os limites do espaço e do tempo da escola” (GÓMEZ, 2015, p. 29).

A disponibilidade de acesso à rede via *smartphones* têm oferecido aos usuários cada vez mais recursos, mesmo ao considerar aparelhos com sistemas operacionais mais simples ou de menor custo. Atualmente, há uma enorme quantidade de aplicações pensadas diretamente para uso em dispositivos móveis. Contudo, há diferentes formatos de aplicativos, que possuem características específicas e, portanto, dependendo da finalidade de uso, uns são mais funcionais que outros. Assim, para que se possa tirar proveito das potencialidades desses recursos, seja no ambiente escolar ou não, é importante compreender qual é a ferramenta que pode melhor atender a cada realidade e aos requisitos de uso almejados.

De acordo com Feijó, Gonçalves e Gomez (2013, p. 34), os “aplicativos para dispositivos móveis, entre os quais *smartphones*, podem ser divididos, a partir de seus princípios de desenvolvimento, em dois tipos básicos: os *Native Apps* e os *Web Apps*”.

Uma *Web App* ou aplicação *web* móvel integra a “categoria de *software* voltada às redes” que agrega aplicativos direcionados para navegadores (PRESSMAN; MAXIM, 2016, p.7). Desse modo, uma “*aplicação web* móvel (*Web App*) permite que um dispositivo móvel tenha acesso a conteúdo baseado na web por meio de um navegador especificamente projetado para se adaptar aos pontos fortes e fracos da plataforma móvel” (PRESSMAN; MAXIM, 2016, p. 10). Cabe destacar que embora as aplicações *web* (bem como os demais sistemas baseados na internet) “possuam características e requisitos exclusivos, elas não deixam de ser um tipo de *software*” (PRESSMANN; MAXIM, 2016, p.12).

O acesso e a utilização de uma aplicação *web* ocorrem através de um endereço virtual por meio de um navegador, ou seja, a funcionalidade de uma *Web App* depende de conexão via Internet a um servidor externo. Uma das vantagens desses aplicativos é que eles podem ser utilizados sem a necessidade de *download* de qualquer recurso, ou seja, não utiliza espaço de armazenamento nos dispositivos em que estiver sendo realizado o acesso à aplicação (FEIJÓ; GONÇALVES; GOMEZ, 2013).

Em função da evolução das aplicações *Web* móveis, elas deixaram de ser simples sistemas de divulgação de conteúdo (informações) e passaram a assumir outras funcionalidades. Pressman e Maxim (2016) apontam, inclusive, que com a sofisticação dos navegadores utilizados nos dispositivos móveis para acesso à internet, em breve, não será possível distinguir *Web Apps* móveis das aplicações móveis nativas.

A principal diferença entre as aplicações *web* (*Web Apps*) e as aplicações desenvolvidas diretamente para aparatos móveis reside justamente no modo como essas aplicações utilizam os recursos do próprio dispositivo para funcionar. Um *Native App* é um “*aplicativo móvel* que pode acessar diretamente as características do *hardware* do dispositivo (por exemplo, acelerômetro ou localização por GPS) e, então, fornecer os recursos de processamento e armazenamento local” (PRESSMAN; MAXIM, 2016, p. 10). Tais aplicativos próprios para dispositivos móveis “são desenvolvidos em linguagem de programação específica e para um dispositivo específico, sendo armazenado na memória interna deste dispositivo para funcionar” (FEIJÓ; GONÇALVES; GOMEZ, 2013, p. 34).

Desse modo, uma característica importante dos *Native Apps* é que eles podem funcionar *off-line*, ou seja, de modo desconectado à rede de internet, além de outras vantagens dependendo do uso para o qual a aplicação foi desenvolvida.

Na maioria dos casos, os aplicativos móveis contêm uma interface de usuário que tira proveito de mecanismos de interação exclusivos fornecidos pela plataforma móvel, da interoperabilidade com recursos baseados na Web que dão acesso a uma grande variedade de informações relevantes ao aplicativo e de capacidades de processamento local que coletam, analisam e formatam as informações de forma mais conveniente para a plataforma. Além disso, um aplicativo móvel fornece recursos de armazenamento persistente dentro da plataforma. (PRESSMANN; MAXIM, 2016, p. 9)

Cabe destacar, contudo, que existem outras duas categorias de aplicações móveis que agregam características das *Web Apps* e das *Native Apps*: as *Aplicações Híbridas* e as *Progressive Web Application – PWA*. Uma das vantagens desse tipo de aplicação é que como integram funcionalidades de aplicações *web* e nativas. Uma PWA, por exemplo, pode funcionar independentemente de acesso à internet localmente, transmitindo as informações ao servidor quando o dispositivo utilizado tiver acesso a uma rede de internet. Por isso, é importante ter em mente quais são os requisitos de uso ao se pensar o desenvolvimento de qualquer *software*. Cabe destacar que todas as aplicações, voltadas para uso em dispositivos móveis ou não, independentemente de se tratar de uma *Web App* ou de um *Native App*, devem ser compreendidas enquanto *softwares* (PRESSMAN; MAXIM, 2016) aspecto a ser considerado sempre que se busca desenvolver qualquer aplicação.

São esses elementos que influenciarão na definição de métodos, ferramentas, estrutura dos dados da aplicação a ser desenvolvida, ou seja, são os requisitos que guiarão as escolhas dos desenvolvedores de *software* para a entrega de um produto que atenda às necessidades dos usuários.

4.3.1 Requisitos para desenvolvimento de um aplicativo educacional

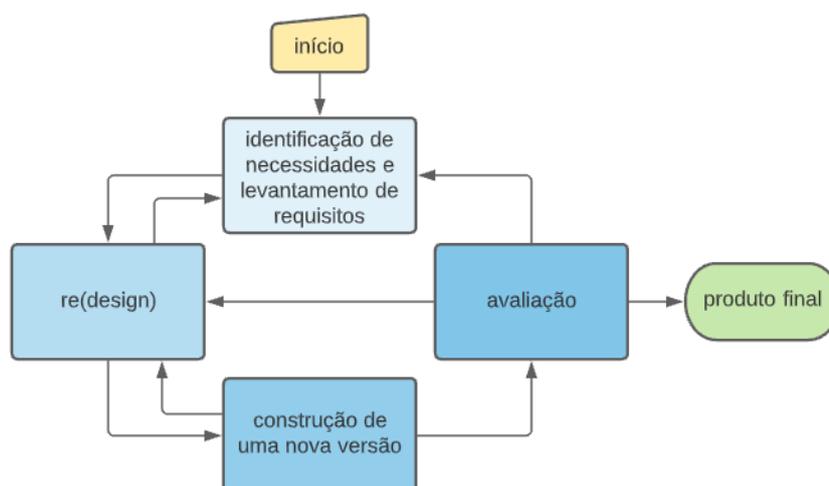
[...] para mim, a questão que se coloca é: a serviço de quem as máquinas e a tecnologia avançada estão? Quero saber a favor de quem, ou contra quem as máquinas estão sendo postas em uso [...]
(FREIRE, 1984, p. 1)

Como visto na seção anterior, um software do tipo Aplicativo *Web*, possui como característica a possibilidade de ser acessado tanto através de desktops em plataformas

como Mozilla Firefox ou Internet Explorer, quanto nos navegadores disponíveis nos dispositivos portáteis. O processo de desenvolvimento de um *software* pode ser compreendido como “um conjunto de atividades, ações e tarefas realizadas na criação de um artefato” (PRESSMAN, MAXIM, 2016, p.16).

Existem modelos de processos de desenvolvimento distintos, de acordo com as demandas do produto. Vários ciclos de desenvolvimento podem ser necessários até a obtenção de um software que atende com qualidade aos requisitos estabelecidos. Por exemplo, ao processo de desenvolvimento em ciclos, Barbosa e Silva (2010) denominam por design iterativo e está ilustrado na Figura 6.

Figura 6: Ciclo de desenvolvimento design iterativo

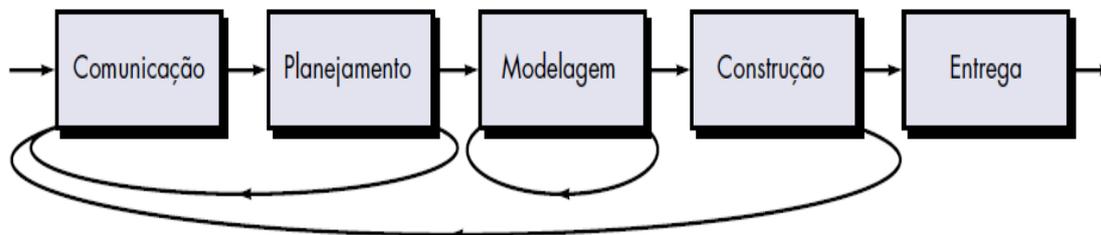


Fonte: adaptado de Sharp, Rogers e Preece (2007) apud Barbosa e Silva (2010).

Pressman e Maxim (2016) sugerem cinco atividades metodológicas para o desenvolvimento de qualquer aplicação (seja *software* de sistema, aplicação web, aplicação móvel etc.): comunicação, planejamento, modelagem, construção e entrega. Contudo, essas atividades não devem ser compreendidas como fases a serem ultrapassadas, uma vez que o processo de desenvolvimento, geralmente, sofre reiterações até atingir os requisitos elencados e, portanto, as atividades tendem a se repetir (PRESSMAN; MAXIM, 2016).

A Figura 7 apresenta o fluxo desse processo de desenvolvimento, representando as possíveis iterações entre as etapas de acordo com os autores.

Figura 7: Fluxo de Processo de Desenvolvimento Iterativo



Fonte: PRESSMAN, 2011, p. 54.

De modo geral, as atividades descritas no processo de design iterativo por Barbosa e Silva (2010) estão contempladas no fluxo apresentado por Pressman e Maxim (2016), as quais são especificadas a seguir.

As características funcionais e pedagógicas da aplicação devem ser definidas a partir das atividades de **comunicação** e **planejamento**, momento em que são levantadas as necessidades e estabelecidos os requisitos da aplicação. Antes de iniciar o desenvolvimento é preciso que os envolvidos no projeto determinem os objetivos da aplicação e reúnam “requisitos que ajudem a definir os recursos e as funções do software” (PRESSMAN; MAXIM, 2016, p. 17). Concomitantemente, é importante estabelecer, ainda, “quais serão os usuários da aplicação”, “que processos a aplicação deve controlar ou executar” e “quais são as tarefas dos usuários da aplicação”, pois serão essas respostas que possibilitarão “identificar as necessidades do usuário e traduzi-las em funcionalidades da aplicação” (MILETTO; BERTAGNOLLI, 2014, p. 24).

Definidos os requisitos por meio da atividade de **comunicação** e o plano de projeto de software, com as tarefas e recursos necessários e os resultados esperados, na atividade de **planejamento** (PRESSMAN; MAXIM, 2016), segue-se à fase de **modelagem**. Nesta etapa, busca-se elaborar modelos “para representar e avaliar o conteúdo e a função de uma aplicação, os modos de interação que os usuários vão encontrar e o ambiente e a infraestrutura que a *Web App* ou aplicativo móvel reside” (PRESSMAN, MAXIM, 2016, p.215). O processo de desenvolvimento do projeto de *software* também ocorre de forma iterativa de acordo com a necessidade de modificações para a solução de erros ou falhas. A atividade de **construção** “combina geração de código (manual ou automatizada) e testes necessários para revelar erros na codificação”. A

entrega representa o “software (como uma entidade completa ou como um incremento parcialmente concluído)” (PRESSMAN, MAXIM, 2016, p.17). Estão englobadas nesse processo, portanto, as atividades de (re)design, avaliação e construção de novas versões (BARBOSA; SILVA, 2010).

Em termos de qualidade de *software*, Pressman e Maxim (2016) destacam cinco atributos a serem considerados: funcionalidade, usabilidade, confiabilidade, desempenho e facilidade de suporte. O Quadro 4 apresenta os elementos a serem considerados no processo de avaliação de cada atributo de um *software*.

Quadro 4: Avaliação de atributos de qualidade de softwares

Atributo de qualidade	Elementos considerados para avaliação
Funcionalidade	Características, capacidades do programa, generalidade das funções implementadas, segurança do sistema;
Usabilidade	Fatores humanos, estética, consistência, documentação;
Confiabilidade	Frequência e gravidade das falhas, precisão dos resultados, tempo de recuperação de uma falha, previsibilidade do programa;
Desempenho	Velocidade de processamento, tempo de resposta, consumo de recursos, eficiência;
Facilidade de Suporte	Extensibilidade, adaptabilidade, reparabilidade (facilidade de manutenção, de realização de testes, de controle de elementos da configuração do software)

Fonte: Adaptado de Pressman e Maxim (2016).

De modo mais específico, para avaliar a qualidade de uma *Web App* há várias dimensões que precisam ser testadas: “conteúdo, função, estrutura, utilização, navegabilidade, desempenho, compatibilidade, interoperabilidade, capacidade e segurança” (PRESSMAN; MAXIM, 2016, p. 563). Ao se considerar aplicações nativas para dispositivos móveis, devem ser testadas as mesmas dimensões usadas nos testes de avaliação de qualidade de uma *Web App*, mas acrescidos de outros. Pressman e Maxim (2016, p. 581) enfatizam que “o teste de aplicativos móveis deve tratar de problemas de desempenho, como utilização de energia, velocidade de processamento, limitações da memória, capacidade de recuperação em caso de falhas e problemas de conectividade”. Além disso, os testes para aplicações *web* e aplicações móveis, devem considerar a análise de cada unidade da aplicação e somente após essa fase traça-se uma estratégia de teste mais ampla, a fim de analisar todas as dimensões mencionadas em conjunto.

A usabilidade é um dos principais atributos de qualidade que devem ser considerados, pois implica diretamente na experiência de uso da aplicação pelos usuários finais. A literatura especializada da área enfatiza que a avaliação da usabilidade de um

software deve ir além dos testes realizados pela equipe de desenvolvimento. Aspectos técnicos, de design, facilidade de uso, acessibilidade, fluidez e navegação etc., podem ser avaliados pela equipe de desenvolvimento, contudo pessoas envolvidas com o projeto podem deixar de perceber uma série de características por estarem acostumados com a ferramenta em questão. Conforme Santana *et al.* (2016), para avaliar a usabilidade de sistemas (*softwares* e aplicações) pode-se utilizar métodos baseados em estratégias distintas, como por exemplo a avaliação por inspeção ou avaliação empírica.

Por inspeção, utiliza-se, por exemplo, a avaliação de heurísticas, a partir da qual “inspetores de usabilidade analisam características de uma interface (especificações, protótipos ou o produto final) e examinam se elas atendem aos princípios gerais de usabilidade, ou seja, as heurísticas” (SANTANA *et al.*, 2016, p. 85).

As 10 heurísticas de Nielsen (1993) são amplamente utilizadas nesse contexto e indicam 10 aspectos a serem avaliados: 1) visibilidade do status do sistema; 2) correspondência entre o sistema e o mundo real; 3) controle e liberdade do usuário; 4) consistência e padrões; 5) prevenção de erros; 6) reconhecimento em vez de recordação; 7) flexibilidade e eficiência de uso; 8) design estético e minimalista; 9) ajuda aos usuários para reconhecer, diagnosticar e recuperar erros; e 10) ajuda e documentação. Essas heurísticas originam-se dos cinco princípios básicos considerados por Nielsen (1993): *facilidade de aprendizado, eficiência, facilidade de memorização, baixa taxa de erros e satisfação do usuário*.

Outro método de avaliação de usabilidade, porém diferente do anterior por utilizar-se de pesquisa empírica com usuários da tecnologia em avaliação, refere-se ao questionário SUS – *System Usability Scale*, desenvolvido por Brooke *et al.* (1986). Trata-se de um método simples e bastante difundido para avaliar a usabilidade em termos de *efetividade, eficiência e satisfação*, porém “um instrumento criado para avaliação superficial, que visa identificar possíveis inconsistências no sistema de forma rápida” (PADRINI-ANDRADE *et al.*, 2019, p. 95).

Martins *et al.* (2015) apresentam uma versão do SUS traduzida para o português europeu e validada, conforme o Quadro 5. O foco da utilização do teste *SUS* é a obtenção de uma pontuação única final após a aplicação ter sido experimentada por cada usuário. Brooke (2013) detalha como deve ser calculada a pontuação final da avaliação:

- a contribuição da pontuação de cada item varia de 0 a 4;

- para os itens 1,3,5,7 e 9 (os itens redigidos positivamente), a contribuição da pontuação é a posição da escala menos 1;
- para os itens 2,4,6,8 e 10 (os itens com palavras negativas), a contribuição é 5 menos a posição da escala;
- em seguida, multiplica-se a soma das pontuações por 2,5 para obter o valor geral do *SUS*.

Quadro 5: Versão do *SUS* adaptada e validada por Martins et al. (2015)

Critério	Avaliação				
	1	2	3	4	5
1. Acho que gostaria de utilizar este produto com frequência.	1	2	3	4	5
2. Considerei o produto mais complexo do que necessário.	1	2	3	4	5
3. Achei o produto fácil de utilizar.	1	2	3	4	5
4. Acho que necessitaria de ajuda de um técnico para conseguir utilizar este produto.	1	2	3	4	5
5. Considerei que as várias funcionalidades deste produto estavam bem integradas.	1	2	3	4	5
6. Achei que este produto tinha muitas inconsistências.	1	2	3	4	5
7. Suponho que a maioria das pessoas aprenderia a utilizar rapidamente este produto.	1	2	3	4	5
8. Considerei o produto muito complicado de utilizar.	1	2	3	4	5
9. Senti-me muito confiante a utilizar este produto.	1	2	3	4	5
10. Tive que aprender muito antes de conseguir lidar com este produto.	1	2	3	4	5

Fonte: Martins et al. (2015).

A interpretação da pontuação obtida a partir do *SUS* é a seguinte:

Sistemas que conseguem, pelo menos, 90 pontos são considerados aqueles com a melhor usabilidade possível. Os que atingem entre 80 e 90 pontos são considerados que possuem uma usabilidade excelente. Os sistemas que atingem entre 70 e 80 pontos são os que apresentam boa usabilidade, mas, que existem pontos a melhorar. Aqueles que atingem entre 60 e 70 pontos são considerados “ok” e que possuem grandes melhorias a serem realizadas e por fim todos aqueles abaixo de 60 pontos que o grau de usabilidade é não aceitável (BANGOR; KORTUM; MILLER, 2009 apud SANTANA *et al*; 2016, p. 88).

Os critérios de análise do *SUS* (BROOKE, 1986; 2013) podem ser associados aos cinco princípios de usabilidade de Nielsen (1993) (Quadro 6).

Quadro 6: Princípios de usabilidade de Nielsen (1993) e critérios de Brooke (1986)

Princípios de usabilidade de Nielsen (1993)	Itens de análise do <i>SUS</i>
facilidade de aprendizado	3; 4; 7 e 10
eficiência	5; 6 e 8
facilidade de memorização	2
baixa taxa de erros	6
satisfação do usuário	1; 4 e 9

Fonte: adaptado de Tenório et al (2011).

A entrevista e a observação de usuários interagindo com a ferramenta também podem ser recursos utilizados na avaliação da usabilidade de um *software*. Para Ferreira (2020, p. 87-88), os “testes de usabilidade têm como objetivo observar um provável usuário do produto para identificar dificuldades e situações de melhorias e, ainda, coletar a percepção geral sobre a utilização do produto”. Partindo disso, para realizar um teste de usabilidade, pode-se selecionar um grupo de pessoas que utilizarão o produto, juntas ou de forma individual, enquanto um observador as acompanha, avalia as situações geradas para posteriormente relatar os problemas identificados à equipe de desenvolvimento (FERREIRA, 2020).

Como estratégia de coleta de dados, para esse tipo de avaliação, pode-se recorrer à gravação da tela do usuário e lançar mão de “recursos de vídeo ou áudio para que se capture e analise a experiência que o usuário tem com o produto” (FERREIRA, 2020, p. 90). Além disso, deve existir, ainda, “uma preocupação com a diversidade de equipamentos disponíveis para utilização” (FERREIRA, 2020, p. 90) em função de variações nas características dos dispositivos (tamanho de tela, por exemplo) a partir dos quais a aplicação será utilizada.

Logo, uma característica importante a ser observada no desenvolvimento e, conseqüentemente, na avaliação da usabilidade de uma aplicação *Web* pensada para uso também em dispositivos móveis refere-se ao *design* responsivo (MARCOTTE, 2011). Das telas dos aparelhos celulares aos desktops há uma grande variação de tamanhos e, portanto, resoluções diferentes acabam sendo necessárias (FRANÇA, 2015). Além disso, a forma como se lida com um conteúdo na *web* em uma tela grande, na maioria das vezes, não permite a navegabilidade e usabilidade, de forma adequada, em telas menores. Assim, a adaptação de conteúdo *web* para os diferentes dispositivos, essa flexibilidade caracteriza os sites responsivos, que hoje, podem ser considerados uma obrigatoriedade (FRANÇA, 2015).

Voltando à avaliação empírica da usabilidade de um sistema, Ferreira (2020) destaca dois aspectos principais a ser considerados. O primeiro refere-se à atitude, ao que é falado pelo usuário sobre a aplicação e o segundo é o comportamento, ou seja, o que o usuário faz enquanto usa a ferramenta. Depois, perguntas subjetivas podem ser realizadas para melhor compreender a experiência de uso: “pode-se perguntar para a pessoa o que

ela achou do produto, se foi fácil de entender seu objetivo, se foi possível realizar as tarefas necessárias e outras perguntas abertas” (FERREIRA, 2020, p. 89).

Baseado em um estudo de Jakob Nielsen em relação ao quantitativo de pessoas que devem ser selecionadas para essa testagem, Ferreira (2020) aponta cinco (05) usuários no caso de não haver grupos distintos. De acordo com o autor, “após observar esse número de pessoas, Nielsen concluiu que as percepções das demais serão quase sempre as mesmas [...] e a tendência é que, após o décimo quinto teste, nem uma nova informação é gerada para ajudar na melhoria do produto” (FERREIRA, 2020, p. 93).

A partir do exposto nessa seção, nota-se que a verificação dos atributos de qualidade de uma aplicação é um processo bastante complexo e que exige grande envolvimento da equipe de desenvolvimento. E, ao considerar *softwares*, sistemas ou aplicações voltadas ao ambiente educacional, além dos atributos de qualidade de ordem técnica, devem ser considerados também parâmetros pedagógicos. Andrade, Araújo e Silveira (2015), partindo de revisão da literatura, ao considerar especificamente a avaliação de qualidade de aplicações educacionais, construíram três categorias, agrupando critérios de análise em cada uma delas. As duas primeiras categorias remetem aos critérios que já haviam sido citados acima. A primeira, *Características da qualidade do aplicativo*, engloba os critérios de funcionalidade, usabilidade (referente à utilização do software), confiabilidade, eficiência, manutenibilidade e portabilidade (ANDRADE; ARAÚJO; SILVEIRA, 2015). Na segunda, *Qualidade intrínseca*, os autores propõem que sejam analisadas características de usabilidade (facilidade de uso e de aprender a usar a aplicação), acessibilidade (adequação ao ambiente), flexibilidade (adaptar-se às necessidades e preferências dos usuários), mobilidade, ubiquidade, colaboração, compartilhamento e reusabilidade (ANDRADE; ARAÚJO; SILVEIRA, 2015).

Quadro 7: Qualidade de aplicações quanto à abordagem pedagógica

Característica	Escopo
Contexto de aprendizagem	Modelo e objetos de aprendizagem que o aplicativo privilegia;
Adequações aos conteúdos curriculares	Pertinência em relação ao contexto educacional a uma disciplina específica ou ao trabalho interdisciplinar;
Aspectos didáticos	Clareza e precisão dos conteúdos, recursos motivacionais, tratamentos de erros, <i>feedback</i> ;
Mediação pedagógica	Atuação docente na mediação entre conteúdo e contexto de aprendizagem;
Facilidade de uso	Nível de facilidade de utilização do aplicativo, incluindo a facilidade dos usuários em aprender a usá-lo;

Fonte: Andrade, Araújo e Silveira (2015, p.192).

Esses elementos, como exposto ao longo dessa seção são importantes, mas a principal contribuição, a presente tese, do trabalho de Andrade, Araújo e Silveira (2015) refere-se à *Abordagem pedagógica* e apresenta as características expostas no Quadro 7.

Apesar da apresentação de uma grande quantidade de critérios e atributos relacionados à avaliação da qualidade de uma aplicação, é importante sublinhar que “um aplicativo não deve, obrigatoriamente, conter todas as características de qualidade, e sim ter a qualidade necessária para o alcance de seus propósitos e satisfação de seus usuários” (ANDRADE; ARAÚJO; SILVEIRA, 2015, p. 183). Assim, avaliar qualidade implica averiguar se aplicação está atendendo as expectativas e as necessidades para as quais fora desenvolvida e pensada. Sendo assim, este estudo pautou-se, de modo mais direcionado, ao alcance desse princípio básico de qualidade!

5. A BUSCA POR EVIDÊNCIAS DE ESTRATÉGIAS COGNITIVAS

A atividade de ensinar é um precioso meio para aprender, ou mesmo, aprender como os estudantes percebem, apreendem, compreendem, explicitam, significam, expressam.
(BIEMBENGUT, 2016, p. 167)

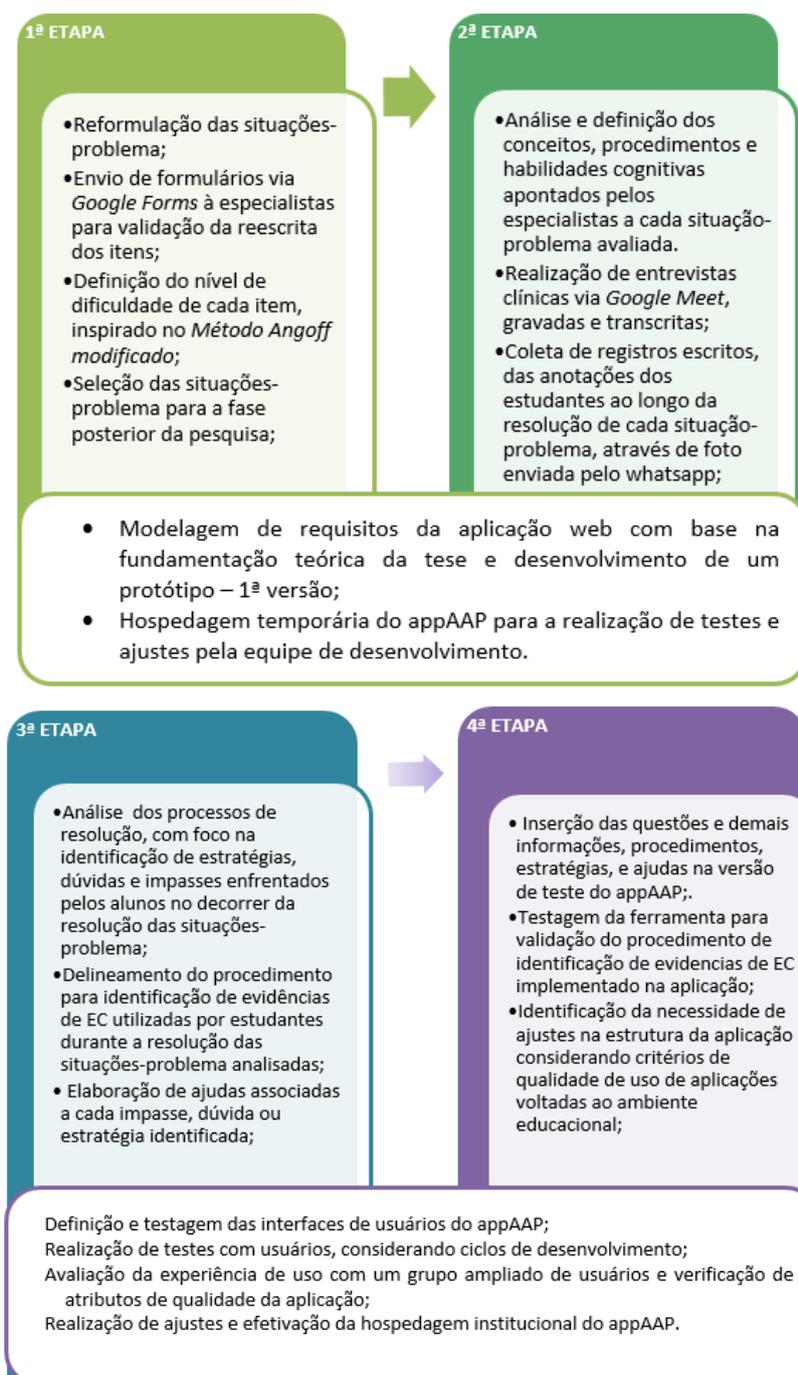
A epígrafe acima projeta o propósito dessa pesquisa que se concentrou no delineamento (concepção, desenvolvimento, testagem e validação) de um método para identificar, por meio de uma ferramenta digital, evidências de estratégias cognitivas elaboradas por estudantes durante a resolução de problemas matemáticos vinculados ao pensamento algébrico. A pesquisa caracteriza-se como qualitativa com objetivo exploratório-descritivo. A modalidade qualitativa mostrou-se adequada tendo em vista que o estudo buscava, de modo geral, “entender as formas como as pessoas agem e explicar suas ações” (GRAY, 2012, p. 137). Essa opção metodológica possibilita, ainda, que as reflexões, ações e observações durante a investigação e as percepções do pesquisador acerca desses aspectos também se tornem dados da pesquisa (GRAY, 2012). O objetivo exploratório-descritivo justifica-se em razão das etapas de trabalho necessárias para alcançar esse propósito.

A pesquisa foi dividida em quatro etapas sendo que os dados gerados em cada uma subsidiaram as seguintes. A Figura 8 apresenta as etapas da pesquisa e as atividades inseridas em cada uma delas. Em função da necessidade dessas diferentes etapas para a concretização do presente estudo, optou-se por não apresentar uma seção metodológica única no texto. Entendeu-se que cada etapa contemplava atividades necessárias à execução das seguintes e, conseqüentemente, isso implicou na escolha de procedimentos metodológicos específicos. Apesar disso, também houve alguns entrelaçamentos temporais entre as atividades de diferentes etapas, uma vez que frentes de trabalho distintas precisaram acontecer de modo concomitante. Sendo assim, optou-se por fracionar a apresentação das escolhas metodológicas em três conjuntos agregando as atividades dependentes entre si. Optou-se, também, por apresentar dentro de cada conjunto, logo na sequência, os dados gerados e discutir os resultados obtidos.

A pesquisa foi registrada na Plataforma Brasil, sob o protocolo nº 30299520.9.0000.8091 e aprovada pelo CEP/UERGS e pelo CEP/IFRS (Apêndice 1). Os procedimentos utilizados obedecem aos critérios da ética na pesquisa com seres humanos, conforme resoluções 466/12 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde. Também foram

seguidas as orientações constantes no OFÍCIO CIRCULAR Nº 2/2021/CONEP/SECNS/MS³⁰ acerca dos procedimentos a serem observados em pesquisas com qualquer etapa em ambiente virtual.

Figura 8: Descrição das etapas metodológicas da pesquisa



Fonte: elaborada pela autora.

³⁰ Disponível em: http://conselho.saude.gov.br/images/Oficio_Circular_2_24fev2021.pdf

A investigação ocorreu em uma instituição federal de educação básica, técnica e tecnológica do Rio Grande do Sul (RS). Inicialmente, a pesquisa estava configurada para acontecer de modo presencial. No entanto, a pandemia global de COVID-19 que chegou ao Brasil no início de 2020 modificou o cenário previsto.

A necessidade de distanciamento físico impactou diretamente nas atividades das instituições de ensino, da Educação Básica à Educação Superior. Toda a “normalidade” foi alterada. Algumas instituições paralisaram seus calendários letivos, enquanto outras optaram pela continuidade por meio do Ensino Remoto Emergencial (ERE) (LUDOVICO et al., 2020, p. 61).

Desse modo, em função da implementação do Ensino Remoto Emergencial (ERE) e da suspensão das atividades presenciais de ensino na instituição de realização do estudo, a investigação precisou ocorrer de modo totalmente remoto, o que modificou os protocolos da pesquisa que estavam previstos antes do período pandêmico.

5.1 Definição e análise das situações-problema usadas na investigação

Esta seção aborda o conjunto de atividades relativas ao processo de definição e análise qualitativa das situações-problema usadas no estudo. Aborda, de modo mais específico, o conjunto de conceitos, procedimentos, habilidades e competências requeridas para a resolução de cada uma delas estabelecendo relações com a fundamentação teórica apresentada.

5.1.1 Geração de dados

Para investigar os elementos necessários à identificação, por meio de uma ferramenta digital, de evidências das estratégias cognitivas elaboradas por estudantes durante a resolução de situações-problema, definiu-se que seriam utilizados itens³¹ adaptados do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). A escolha de situações-problema desse tipo para a investigação se deu pela razão de serem contextualizadas e elaboradas para a avaliação de competências e habilidades cognitivas. Ou seja, trata-se de problemas complexos cuja resolução implica no estabelecimento de relações, na

³¹ Item é a nomenclatura dada a uma situação-problema no Enem, logo podem ser considerados sinônimos ao longo do texto.

articulação e na mobilização de conceitos, procedimentos e habilidades, logo, na manifestação de competências cognitivas (MACEDO, 2005; PESTANA, 1997; 1999) que refletem, por sua vez, evidências dos esquemas e estruturas cognitivas de cada sujeito (PIAGET, 1976a, 1982; INHELDER, 1978), na medida em que processos de repetição, reconhecimento e generalização se efetivam.

Assim, inicialmente, foram selecionadas, a partir da análise documental dos microdados do Enem³², as situações-problema utilizadas entre os anos de 2009 e 2018 para avaliar a habilidade “H21: *Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos*”. Ao todo, foram identificados 21 itens, sendo selecionados dez (10) para a primeira fase do estudo. Foram excluídos aqueles voltados a conteúdos muito específicos, como logaritmos ou matrizes, por exemplo, uma vez que nem sempre tais assuntos são aprofundados na educação básica.

Na metodologia prevista inicialmente, esses 10 itens seriam testados com um grupo de estudantes para analisar o potencial de expressão e representação dos elementos buscados na pesquisa e, com base nisso, seriam selecionados os problemas mais expressivos. No entanto, essa etapa que seria realizada presencialmente precisou ser modificada, gerando a necessidade de incluir a reformulação desses itens e a respectiva validação desse processo.

Por se tratar de itens utilizados no Enem, as respectivas reformulações deveriam preservar as características avaliativas da situação original. Portanto, cada um dos itens foi (re)contextualizado com foco em não modificar os procedimentos de resolução e conceitos que poderiam ser associados à sua resolução. As alternativas de resposta também foram mantidas num primeiro momento a fim de possibilitar a utilização dos distratores originais como fontes de informação³³, num primeiro momento, apesar de terem sido omitidas na investigação, conforme justificado na sequência.

³² Disponíveis em: <http://portal.inep.gov.br/microdados>.

³³ O Apêndice 2 contém as 10 situações-problema originais selecionadas para essa etapa e suas respectivas reformulações elaboradas pela autora desse estudo. As situações-problema foram identificadas pelas siglas SP*i*, com *i* variando de 1 a 10, sendo assim referenciadas ao longo dessa seção.

5.1.2 Procedimentos e critérios para seleção das situações-problema

A validação da reformulação dos itens foi realizada através de consulta a especialistas, professores da área da matemática atuantes na instituição de aplicação da pesquisa. Além de verificar a compatibilidade entre cada item original e sua versão reformulação, os especialistas também realizaram a avaliação textual da situação-problema, considerando critérios elencados por Rabelo (2013) que atendem a fundamentação teórica-metodológica do Enem (apresentados na seção 3.1.1).

Por fim, a contribuição dos especialistas também substituiu a fase inicial de definição dos itens de investigação que seria realizada presencialmente com os estudantes. Assim, junto aos questionamentos anteriores, optou-se por realizar o levantamento do nível de dificuldade das situações-problema que seriam utilizadas na fase seguinte da investigação. Adotou-se, para tanto, etapas do Método Angoff Modificado, um procedimento desenvolvido por Angoff (1971) usado em testes padronizados para o estabelecimento de notas de cortes e equiparação de *scores* através da análise do nível de dificuldade dos itens inseridos em uma avaliação.

Para compor o grupo de especialistas, tanto para a validação da reformulação dos itens quanto para a determinação do nível de dificuldade de cada um deles, foram convidados, através do e-mail institucional, 97 professores da área de matemática e estatística que leciona(va)m na instituição de aplicação da pesquisa. Ao todo, 37 professores, todos mestres ou doutores (Quadro 8), compuseram o painel de especialistas dessa fase. Cada especialista participante, após ler o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e as orientações da pesquisa, analisou cinco situações-problema³⁴ (Apêndice 3). Foram obtidas 18 respostas ao questionário que continha as situações-problema SP1, SP2, SP3, SP4 e SP5 (Grupo A) e 19 respostas relativas aos itens SP6, SP7, SP8, SP9 e SP10 (Grupo B). Para preservar a identidade dos especialistas, ao longo da análise dos dados dessa fase, os que avaliaram as questões do Grupo A serão identificados pela sigla EA1; EA2; EA3; ...; EA18 e, do Grupo B, por EB1; EB2; EB3; ...; EB19.

³⁴ As dez situações-problema reformuladas foram distribuídas em dois grupos (A e B) uma vez que a análise de cada item demandaria um tempo de mais ou menos uma hora de trabalho, o que dificultaria a efetiva participação dos especialistas se lhes fosse solicitado analisar todas as situações.

Quadro 8: Constituição dos grupos de especialistas

	Grupo A	Grupo B	Total
Mestres	7	10	17
Doutores	11	9	20
Total	18	19	37

Fonte: elaborado pela autora.

Para a investigação proposta nessa tese, as situações-problema não deveriam ser fáceis demais, a ponto de não demandar envolvimento dos alunos na sua resolução, ou seja, não os colocar em ação intelectual. Tampouco, serviria um item considerado muito difícil, pois poderia impor obstáculos para a expressão das formas de pensar dos estudantes, tendo em vista que a iminência de possíveis lacunas poderia impedi-los de agir por se tratar de algo muito distante de seu estado de conhecimento atual (PIAGET, 1976a).

Em ambos os casos o surgimento de dúvidas e impasses e a elaboração de estratégias cognitivas buscando formas de resolução estariam comprometidos. Entende-se que as situações-problema deveriam instigar a mobilização de recursos cognitivos (PERRENOUD, 1999; MACHADO, 2002; MACHADO; 2010) dos estudantes, sendo esses os elementos potencialmente indicadores de evidências das estratégias cognitivas elaboradas, bem como da competência cognitiva para resolver a situação.

Partindo disso, os especialistas também receberam instruções (conforme Apêndice 2) acerca do Método Angoff Modificado (ANGOFF, 1971) para, depois de analisar qualitativamente cada item comparando-o com o item original já utilizado no Enem, estimar quantos alunos de um grupo de 100 alunos minimamente competentes responderiam corretamente a cada item analisado. Foi informado aos especialistas que os participantes do estudo seriam estudantes dos 3º e dos 4º anos dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e ingressantes (nos anos de 2020 e 2021) dos cursos superiores da instituição.

Destaca-se que como o conceito de “aluno minimamente competente” é algo subjetivo, os especialistas receberam a orientação de considerar um aluno que possuiria os conhecimentos básicos e dominaria minimamente os procedimentos associados ao item de análise. Para tanto, os professores deveriam considerar as informações fornecidas

por eles próprios no questionário acerca dos conceitos, procedimentos e habilidades que consideravam vincular-se a cada situação-problema avaliada.

Considerando o quantitativo indicado por cada especialista para cada situação-problema, o nível de dificuldade foi obtido por meio do cálculo da média aritmética e da mediana, medidas estatísticas indicadas para a utilização do Método Angoff Modificado (COSTA; SANTO, 2010). Interpretando esse método tem-se que numa escala de 0 a 100, quanto mais próximo de 100 for a pontuação atribuída a uma questão, mais fácil essa é considerada, já que um número maior de respondentes acertaria a questão e, de modo contrário, quanto menor for essa pontuação, mais difícil o item é considerado.

O Quadro 9 apresenta a pontuação atribuída a cada item por cada especialista.

Quadro 9: Cálculo do nível de dificuldade de cada situação-problema

ANÁLISE - GRUPO A						ANÁLISE - GRUPO B					
	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5		SP6	SP7	SP8	SP9	SP10
EA1	50	80	90	30	90	EB1	75	67	85	50	75
EA2	50	60	60	45	55	EB2	50	40	80	10	70
EA3	0	80	80	70	80	EB3	80	80	80	70	80
EA4	75	100	80	75	100	EB4	70	50	95	45	40
EA5	0	85	90	80	90	EB5	70	50	50	60	60
EA6	60	80	80	80	70	EB6	90	85	90	70	85
EA7	65	60	70	80	60	EB7	80	60	80	15	70
EA8	0	70	75	60	65	EB8	80	60	80	70	70
EA9	0	90	80	60	75	EB9	40	30	40	25	50
EA10	0	92	85	70	75	EB10	70	60	55	30	50
EA11	50	70	80	50	60	EB11	90	70	70	70	70
EA12	80	80	80	70	80	EB12	35	55	30	40	30
EA13	30	50	80	60	60	EB13	50	50	70	40	60
EA14	50	70	80	50	60	EB14	85	60	50	40	70
EA15	50	60	70	30	50	EB15	60	45	65	40	60
EA16	30	60	35	25	20	EB16	90	50	80	50	70
EA17	40	20	50	60	40	EB17	60	30	50	30	20
EA18	40	70	60	55	60	EB18	35	40	35	25	40
						EB19	70	30	50	25	40
MÉDIA	37,2	70,9	73,6	58,3	66,1	MÉDIA	67,4	53,3	65,0	42,4	58,4
MEDIANA	45	70	80	60	62,5	MEDIANA	70	50	70	40	60

Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

Logo, como o objetivo dessa fase era selecionar as questões com maior potencial de representação de estratégias cognitivas por parte dos alunos, de modo a possibilitar que eles mobilizassem a maior quantidade possível de recursos cognitivos, foram eliminadas as duas consideradas mais fáceis e as duas mais difíceis. Foram assim definidas seis (06) situações-problema para a investigação: **SP4, SP5, SP6, SP7, SP8 e SP10.**

Contudo, como as situações-problema não puderam ser testadas previamente com os alunos (em função da pandemia), verificou-se que duas (SP5, SP6) destoavam das demais em função do conteúdo específico que abordavam e do baixo quantitativo de conceitos, procedimentos e habilidades apontados pelos especialistas como necessários às respectivas resoluções e, por isso, também foram excluídas.

As quatro situações-problema restantes circundavam a temática “função quadrática” o que possibilitou um refinamento maior em termos da análise dos conceitos, procedimentos e habilidades e, conseqüentemente, favoreceu o levantamento de evidências das estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes durante o processo de resolução dessas situações-problema considerando um universo mais restrito, conforme será apresentado na seção 5.2. Optou-se por renomear essas quatro situações-problema de acordo com o contexto utilizado na sua reformulação, a fim de evitar um ordenamento padronizado no momento de acesso à aplicação, deixando a cargo dos estudantes essa escolha. Dessa forma, as reformulações das situações-problema SP4, SP7, SP8 e SP10 passaram a ser identificadas, respectivamente, por: *Vila Lângaro, Praça dos Arcos, Palco em construção e Estacionamento*.

5.1.3 Resultados: análise e discussão das situações-problema selecionadas

Nesta seção são discutidos os conceitos e os procedimentos relacionados a cada uma das situações-problema utilizadas. Esses dados foram obtidos da análise das respostas dos especialistas à primeira parte do questionário encaminhado via *Google Forms* (Apêndice 3). A cada situação-problema também se apresenta o universo de competências requeridas para a sua resolução fazendo um paralelo com as atividades (ações e operações) indicadas por Pestana (1999) associadas a cada nível: básico, operacional e global.

Na fase de validação da reformulação dos itens, os especialistas receberam as orientações acerca da metodologia de elaboração utilizada no Enem e dos critérios que deveriam avaliar, apoiados na fundamentação de Rabelo (2013). O primeiro questionamento (Q1) referia-se ao apontamento dos conceitos, procedimentos e

habilidades abordados na situação-problema original³⁵. As cinco perguntas seguintes (Q2 a Q6) avaliavam a reformulação, propriamente. Os docentes tinham a opção de assinalar SIM ou NÃO a cada um dos questionamentos:

Q2. Você avalia que o item reescrito pode ser considerado como “uma combinação geradora de sentido”, com coerência e coesão entre suas partes (apresentando uma articulação entre elas)?

Q3. A escolha do texto-base é fundamental para a construção de um item de bom nível. Assim, com base na análise desse item, você avalia que o texto é de fácil compreensão, com linguagem adequada ao nível dos estudantes?

Q4. Outros critérios que devem ser considerados são: clareza, objetividade, originalidade, precisão e impessoalidade. Na sua avaliação, esse item atende a esses critérios?

Q5. O item admite uma única interpretação e uma só resposta?

Q6. O texto utiliza linguagem livre de termos ambíguos, confusos ou vagos?

Depois, os especialistas julgavam a equivalência entre a situação-problema original e sua respectiva reformulação, considerando os conceitos, procedimentos e estratégias de resolução (Q7), bem como os possíveis erros que poderiam ser cometidos pelos estudantes em ambos os casos (Q8).

Q7. Ao ler o item original e sua reformulação, você avalia que as questões são equivalentes quanto às exigências de aplicação de conhecimentos, conceitos, procedimentos, habilidades e estratégias de resolução?

Q8. Você avalia que os erros que os alunos cometeriam em ambas as questões seriam os mesmos (ou equivalentes)?

Em seguida, os avaliadores confirmavam se a questão atendia a todos os critérios apontados anteriormente (Q9) e, em caso de discordância, um novo campo para o envio opcional de sugestões de reformulação era aberto (Q10). Assim, os especialistas podiam indicar modificações a fim de corrigir ou melhorar a reformulação do item para que atendesse a todos os critérios especificados.

A primeira situação trazida é SP4 (Figura 9) extraída do Enem 2017, sendo a forma reformulação denominada por *Vila Lângaro* (Figura 10). Em resumo, a resolução da situação *Vila Lângaro* envolve:

essencialmente o conceito matemático de função quadrática e suas propriedades algébricas e gráficas. Para resolver esta situação, o estudante precisa realizar os procedimentos de identificar o tipo de função caracterizado pelo formato do gráfico e relacionar com a representação algébrica desta função. Obtendo a forma exata da representação algébrica a partir das

³⁵ Q1: De acordo com sua avaliação, que conceitos, procedimentos e habilidades estão relacionados com a resolução dessa situação-problema?

distâncias dadas e, conseqüentemente, a altura solicitada. Para isso ele precisa utilizar habilidades algébricas e gráficas. (SP4, EA3, Q1)³⁶

Figura 9: SP4 - item original Enem 2017

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

A $\frac{16}{3}$

B $\frac{31}{5}$

C $\frac{25}{4}$

D $\frac{25}{3}$

E $\frac{75}{2}$

Fonte: Enem 2017

Figura 10: Situação-problema reformulada Vila Lângaro

O pórtico de entrada à cidade gaúcha de Vila Lângaro, no nordeste do estado, possui sua estrutura em formato parabólico, conforme a foto da figura 1. As medidas aproximadas do pórtico, em sua vista frontal, podem ser visualizadas na figura 2.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:P%C3%B3rtico_Vila_L%C3%A2ngaro.jpg

Considerando a figura 2, determine a medida H que representa a altura do pórtico de entrada da cidade de Vila Lângaro.

A $\frac{16}{3}$

B $\frac{31}{5}$

C $\frac{25}{4}$

D $\frac{25}{3}$

E $\frac{75}{2}$

Fonte: elaborada pela autora.

Os dados coletados através dos questionários respondidos pelos especialistas foram analisados e agrupados em categorias, de acordo com os elementos que foram por

³⁶ Optou-se por apresentar, no decorrer de toda a análise, recortes de dados obtidos dos participantes durante qualquer fase da pesquisa, sempre em itálico, identificando primeiramente a situação (SP4), o sujeito (no caso EA3) e, por fim, localizando no instrumento em análise a informação.

eles apontados. Os Quadros 10 e 11 apresentam os conceitos e procedimentos que emergiram da análise das respostas obtidas, na situação-problema *Vila Lângaro*.

Quadro 10: Conceitos *Vila Lângaro* - especialistas grupo A

CONCEITOS RELACIONADOS	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6	EA7	EA8	EA9	EA10	EA11	EA12	EA13	EA14	EA15	EA16	EA17	EA18
Função Quadrática: propriedades algébricas (vértice; máximo e mínimo; ...)	X	X	X		X		X		X				X		X	X		
Função Quadrática: propriedades gráficas (parábola; vértice; ...)	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Equação Quadrática/ polinomial de segundo grau	X			X	X	X					X		X			X		
Sistema Linear	X																	
Sistema e plano cartesiano, par ordenado						X	X	X	X					X		X		
Frações						X	X											
Potenciação							X									X		

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 11: Procedimentos *Vila Lângaro* - especialistas grupo A

PROCEDIMENTOS	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6	EA7	EA8	EA9	EA10	EA11	EA12	EA13	EA14	EA15	EA16	EA17	EA18
Escolher o posicionamento da parábola nos eixos cartesianos	X						X			X					X		X	
Reconhecer que a altura solicitada corresponde à imagem da função para $x = 5$ (considerando a origem do sistema cartesiano no início –canto inferior esquerdo– da parábola indicada no infográfico)									X									
Identificar o tipo de função pelo formato do gráfico		X	X				X	X							X	X	X	X
Relacionar o formato do gráfico com a representação algébrica desta função			X	X			X								X	X		
Determinar os coeficientes de uma função polinomial do 2º grau conhecidas as raízes e o valor da função para dado x .				X	X	X			X	X					X	X	X	
Identificar as propriedades da parábola, a partir do ponto (4,3)									X	X	X	X	X	X			X	X
Estudar o vértice e a sua classificação (máximo ou mínimo)		X	X														X	X
Resolver sistema linear	X															X		
Usar a expressão da função para obter os valores da função									X	X	X	X			X	X		

Fonte: dados da pesquisa.

Os demais critérios avaliados estão no Quadro 12.

Quadro 12: Validação da contextualização da situação-problema *Vila Lângaro*

Critério	SIM	NÃO	Quem assinalou NÃO?
(Q2) coerência e coesão	18	0	-
(Q3) adequação da linguagem (compreensão)	18	0	-
(Q4) clareza, objetividade, originalidade, precisão, impessoalidade	18	0	-
(Q5) Interpretação única e uma só resposta	16	2	EA4; EA18
(Q6) Ausência de termos ambíguos, confusos e vagos	16	2	EA2; EA18

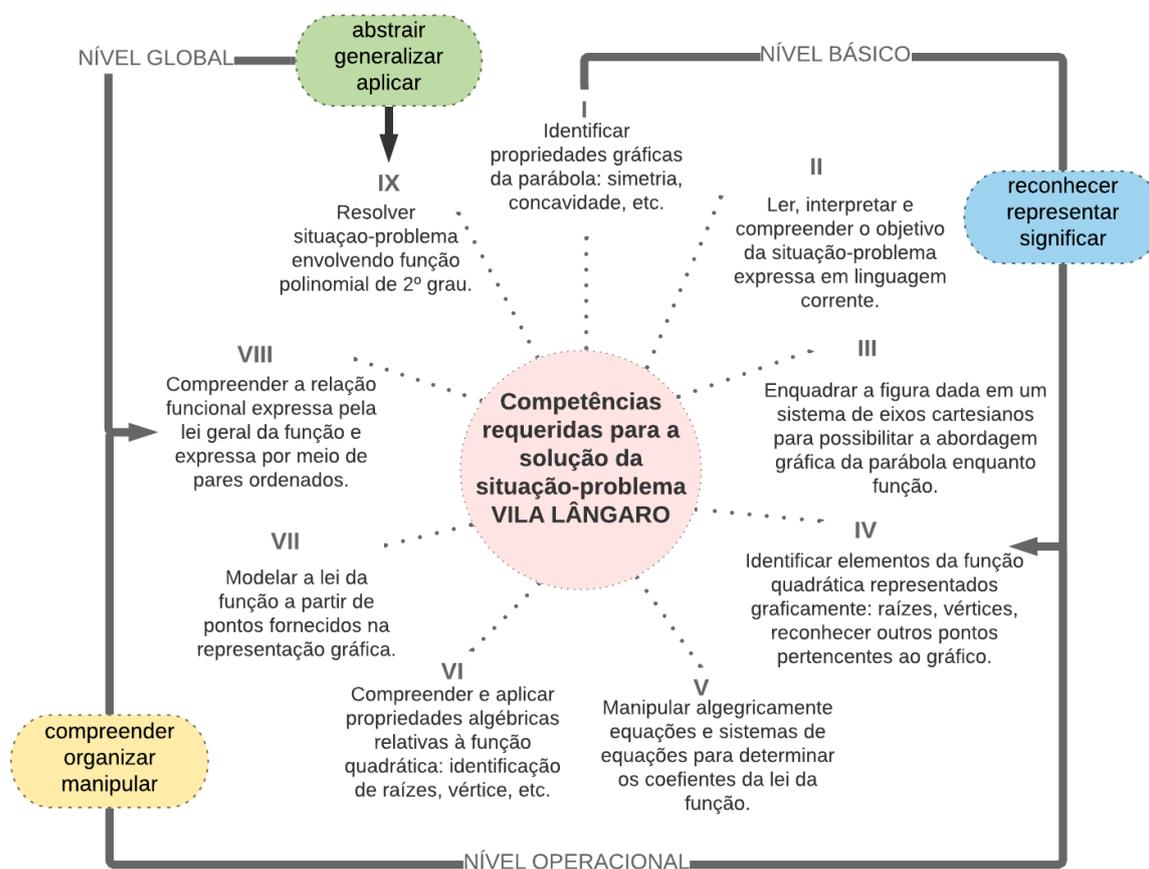
Fonte: dados da pesquisa.

Não houve modificações requeridas e o item foi considerado adequado. Todos os especialistas concordaram que o item original e a sua reformulação eram equivalentes

quanto aos conceitos, procedimentos e estratégias de resolução, assim como julgaram que os erros que os estudantes cometeriam em ambas as situações seriam também compatíveis.

Atendidos os critérios da reformulação da situação-problema e considerando as informações fornecidas pelos especialistas circunscreveu-se o universo da situação-problema (Figura 11) considerando as competências cognitivas, do nível básico ao nível global (PESTANA, 1999), requeridas para a resolução da situação *Vila Lângaro*.

Figura 11: Competências requeridas para a resolução da situação-problema *Vila Lângaro*



Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

A segunda situação trazida para a análise é SP7 (Figura 12) extraída do Enem 2016, sendo sua forma reformulada denominada por *Praça dos Arcos* (Figura 13).

Figura 12: SP7 - item original Enem 2016

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$$y = 9 - x^2, \text{ sendo } x \text{ e } y \text{ medidos em metros.}$$

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A 18
 B 20
 C 36
 D 45
 E 54

Fonte: Enem 2016

Figura 13: Situação-problema *Praça dos Arcos*

A Praça dos Arcos, localizada na cidade de São Paulo, foi inaugurada em 1922 para comemorar o centenário da Avenida Paulista. Para informar aos turistas sobre a história da praça, pretende-se confeccionar um *outdoor* (propaganda feita através de painel disposto ao ar livre) com contorno parabólico, considerando a equação $y = 9 - x^2$, com valores de x e y considerados em metros.

A área de publicidade desse *outdoor* é compreendida entre o chão e o arco da parábola dada acima, considerando que o seu eixo de simetria pode ser tomado como o eixo vertical e o chão enquanto eixo horizontal. Essa área será equivalente a $\frac{2}{3}$ da área de um retângulo de base e altura, respectivamente iguais à base e à altura do *outdoor*.

Qual é a área de publicidade, em metro quadrado, desse *outdoor*?

A) 18
 B) 20
 C) 36
 D) 45
 E) 54

Fonte: elaborada pela autora.

Em resumo, essa situação envolve:

Conceitos relacionados com o gráfico de uma função quadrática e algumas propriedades (raízes e vértice). Também conhecimentos relacionados com geometria plana devem ser sabidos para solucionar esse problema (determinação de área do retângulo). Por último, conhecimentos de proporcionalidade no quesito da relação entre a área requerida e a área do retângulo considerado, juntamente com a necessidade de manipulação algébrica para resolução de equações quadráticas. (SP7, EB12, Q1)

O Quadro 13 apresenta os conceitos e procedimentos que emergiram da análise das respostas obtidas, na situação-problema *Praça dos Arcos*, para Q1.

Quadro 13: Conceitos *Praça dos Arcos* - especialistas grupo B

CONCEITOS RELACIONADOS	EB1	EB2	EB3	EB4	EB5	EB6	EB7	EB8	EB9	EB10	EB11	EB12	EB13	EB14	EB15	EB16	EB17	EB18	EB19
Equação de 2º grau			X						X										X
Função quadrática (gráfico, eixo de simetria, vértice, ponto máximo, raízes...);	X	X	X	X	X	X		X		X	X	X		X	X	X	X	X	X
Representação da função no plano cartesiano											X	X	X	X		X	X		
Noções básicas de geometria plana (cálculo de área de retângulo)	X	X	X			X		X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X
Frações / Proporcionalidade												X		X		X			
Conceitos de cálculo diferencial e integral																			X

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 14 traz os procedimentos elencados pelos especialistas para a SP7.

Quadro 14: Procedimentos *Praça dos Arcos* - especialistas grupo B

PROCEDIMENTOS	EB1	EB2	EB3	EB4	EB5	EB6	EB7	EB8	EB9	EB10	EB11	EB12	EB13	EB14	EB15	EB16	EB17	EB18	EB19
Obter raízes da função quadrática, pois a distância entre elas é a base e o y do vértice é a altura	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Usar a informação do vértice localizado no ponto (0,9) implícito na função, para plotar o gráfico no formato de parábola no plano cartesiano	X	X	X									X	X	X					X
Obter pelo gráfico e função, o comprimento da altura e da base do túnel.			X	X		X						X		X		X	X		
Calcular a área do retângulo com base no gráfico construído.	X	X				X		X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X
Após calcular a área do retângulo aplicar a multiplicação por 2/3				X						X		X		X	X	X			X

Fonte: dados da pesquisa.

Destaca-se que EB7 apontou que a questão original “*não se enquadra muito no conceito de situação-problema, muito em função da forma como a questão é abordada*” (SP7, EB7, Q1). Contudo, EB7 avaliou que o item atendia aos critérios de reformulação, de modo geral, apenas discordando em Q8 quanto aos erros possíveis, embora não tenha enviado comentário a respeito.

A avaliação dos critérios de reformulação da situação *Praça dos Arcos* encontra-se no Quadro 15.

Quadro 15: Validação da contextualização da situação-problema *Praça dos Arcos*

Critério	SIM	NÃO	Quem assinalou NÃO?
(Q2) coerência e coesão	19	0	-
(Q3) adequação da linguagem (compreensão)	17	2	EB11; EB12
(Q4) Clareza, objetividade, originalidade, precisão, impessoalidade	17	2	EB2; EB11
(Q5) Interpretação única e uma só resposta	17	2	EB5; EB11
(Q6) Ausência de termos ambíguos, confusos e vagos	16	3	EB6; EB11; EB19

Fonte: dados da pesquisa.

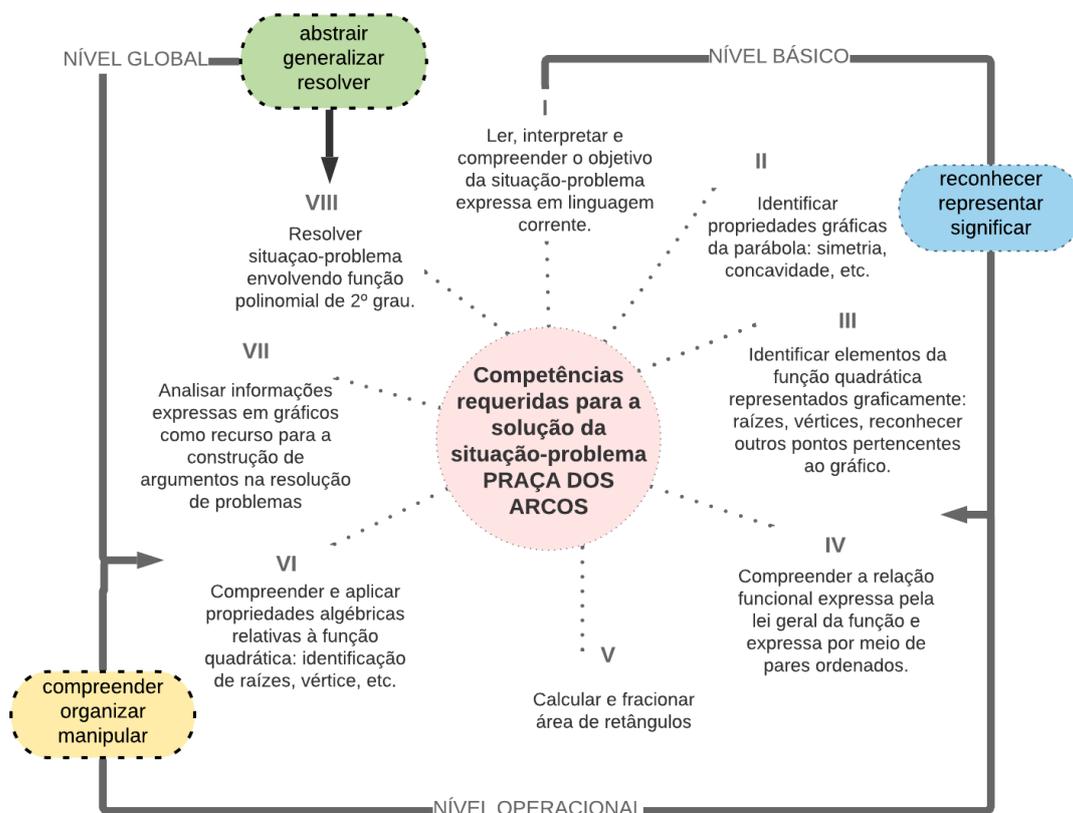
Em relação à equivalência entre o item original e sua reformulação quanto às exigências de aplicação de conhecimentos, conceitos, procedimentos, habilidades e estratégias de resolução, apenas EB10 discordou, embora não tenha justificado o motivo. Sobre os possíveis erros a serem cometidos, quatro especialistas informaram que os estudantes poderiam cometer erros distintos nas duas situações (EB4, EB7, EB10, EB11). Quanto a esse critério, nenhuma sugestão de melhoria foi apontada.

Por fim, em Q9 apenas EB4 e EB19 reafirmaram que a questão não atendia a algum critério e enviaram sugestões. Para EB4 o “*enunciado inicial está claro. Não modificar*”. EB19 foi mais específico, demonstrando preocupação acerca do significado do termo *outdoor*.

Fico preocupada com o uso da palavra outdoor.... Eu sugeriria mudar para cartaz ou painel, ou mesmo colocar uma breve explicação entre parênteses do tipo "outdoor (propaganda feita através de painel disposto ao ar livre)". Mas apenas para garantir o completo entendimento da questão. O resto está ótimo. (Praça dos Arcos, EB19, Q9).

Como a atribuição de significado pelos sujeitos aos objetos de conhecimento são de extrema importância para o correto estabelecimento de relações (DOLLE; BELLANO, 2008; INHELDER; CAPRONA, 1996; MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998; INHELDER, 1978; MICOTTI, 1999; CANAVARRO, 2007), a explicação de EB19 foi incorporada na contextualização do problema. A Figura 14 apresenta as competências requeridas para a resolução da situação *Praça dos Arcos*.

Figura 14: Competências requeridas para a resolução da situação-problema *Praça dos Arcos*



Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

A terceira (SP8) e a quarta (SP10) situações-problema trazidas para a análise foram extraídas do Enem dos anos 2017 e 2016, respectivamente. As Figuras 15 e 16 apresentam as formas original e reformulada da SP8 e as Figuras 17 e 18 da SP10.

Figura 15: SP8 - item original Enem 2017

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

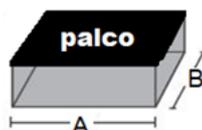
Quais devem ser os valores de X e de Y , em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A 1 e 49
 B 1 e 99
 C 10 e 10
 D 25 e 25
 E 50 e 50

Fonte: Enem 2017

Figura 16: Situação-problema *Palco em construção*

Um palco está sendo construído no centro de um campo de futebol, em formato de prisma reto-retângulo, para a realização de um grande show. As laterais desse palco (prisma) deverão ser revestidas com placas de lâmpadas LED que tem formato retangular com 1 metro de base e mesma altura do prisma (distância da base do prisma até o plano superior do prisma, que equivale ao palco). A equipe de montagem pretende utilizar 100 placas de LED para revestir as laterais do palco.



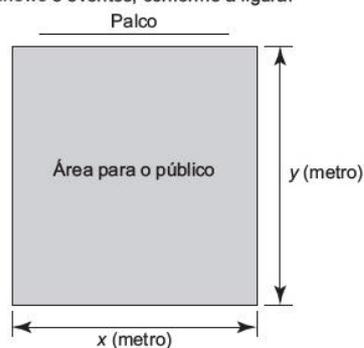
Quais devem ser as medidas de A e B (conforme figura acima), em metros, para que a área do palco seja a maior possível?

- A) 1 e 49
- B) 1 e 99
- C) 10 e 10
- D) 25 e 25
- E) 50 e 50

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 17: SP10 - item original Enem 2016

Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para *shows* e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5,00.

A empresa dispõe de R\$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.

A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

- Ⓐ 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
- Ⓑ 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
- Ⓒ 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
- Ⓓ 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
- Ⓔ 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

Fonte: Enem 2016

Figura 18: Situação-problema *Estacionamento*

Suponha que para obter uma renda extra, Jorge decidiu transformar parte do pátio em frente à sua casa, em um estacionamento em formato retangular, como observa-se na figura.



A área destinada ao estacionamento será cercada de duas formas distintas:

- os lados paralelos à frente da casa, terão muros de tijolos cujo custo de construção será de R\$ 20,00 o metro linear.
- os outros dois lados, terão placas de madeira, material de menor custo, R\$ 5,00 o metro linear.

Sabendo disso, Jorge quer cercar a maior área possível para o estacionamento tendo R\$ 5000,00 para comprar todos os materiais.

Quantos metros lineares de muro de tijolos e de placas de madeira deverão ser construídos?

A) 50,0 m de muro de tijolos e 800,0 m de placas de madeira
 B) 62,5 m de muro de tijolos e 250,0 m de placas de madeira
 C) 100,0 m de muro de tijolos e 600,0 m de placas de madeira
 D) 125,0 m de muro de tijolos e 200,0 m de placas de madeira
 E) 200,0 m de muro de tijolos e 200,0 m de placas de madeira

Fonte: elaborada pela autora.

Como os conceitos e procedimentos inerentes à resolução dessas duas situações são praticamente iguais, serão apresentados, concomitantemente, os dados e a análise da reformulação desses itens. Os Quadros 16 e 17 apresentam os conceitos que emergiram da análise das respostas obtidas em Q1.

Quadro 16: Conceitos *Palco em construção* - especialistas grupo B

CONCEITOS RELACIONADOS	EB1	EB2	EB3	EB4	EB5	EB6	EB7	EB8	EB9	EB10	EB11	EB12	EB13	EB14	EB15	EB16	EB17	EB18	EB19
Geometria plana (perímetro e área)	X	X	X	X		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Relação funcional, função quadrática e elementos (vértice, ponto de máximo, zeros)		X	X		X	X		X	X	X		X	X		X		X	X	X
Equações de segundo grau			X						X	X				X					X

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 17: Conceitos *Estacionamento*- especialistas grupo B

CONCEITOS RELACIONADOS	EB1	EB2	EB3	EB4	EB5	EB6	EB7	EB8	EB9	EB10	EB11	EB12	EB13	EB14	EB15	EB16	EB17	EB18	EB19
Geometria plana (perímetro e área)	X	X	X	X	X	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X
Relação funcional, função quadrática e elementos (vértice, ponto de máximo, zeros)		X		X	X	X		X			X	X	X	X	X		X	X	X
Equações de segundo grau			X						X	X	X	X		X		X			X

Fonte: dados da pesquisa.

A partir dos Quadros 16 e 17 observa-se que EB7 não indicou conceitos ou procedimentos na análise das situações. Entretanto, diferente do apontado na situação anterior, EB7 afirmou que a SP8 configura uma situação-problema, pois “*existe a possibilidade de diversificar procedimentos e habilidades, ajudando na compreensão*”. Igualmente, a SP10, “*conforme a anterior, estabelece todos os passos quando se refere a uma situação-problema, desde a análise da situação até a possibilidade de experimentar diversas habilidades para a resolução*” (SP10, EB7, Q1). Em linhas gerais, a SP8 envolve:

Conceitos relacionados com (inicialmente) funções de múltiplas variáveis (determinação de área de retângulo como função de x e y). Habilidade de relacionar as variáveis independentes em questão, por meio do conceito de perímetro de um retângulo. Exige-se um conhecimento sobre maximização de funções quadráticas com coeficientes do termo de maior grau negativo, ou seja, nesse caso conhecimento sobre vértice do gráfico de uma função quadrática. Obs: existe a alternativa de solucionar esse problema de maximização por meio da relação entre as raízes da função quadrática com a base (ou altura) do retângulo em questão. (SP8, EB12, Q1).

Os procedimentos elencados pelos especialistas para a SP8 estão no Quadro 18.

Quadro 18: Procedimentos *Palco em construção* - especialistas grupo B

PROCEDIMENTOS	EB1	EB2	EB3	EB4	EB5	EB6	EB7	EB8	EB9	EB10	EB11	EB12	EB13	EB14	EB15	EB16	EB17	EB18	EB19
Perceber valor fixo dado ao perímetro														X					
Estabelecer equações para o perímetro e área do retângulo	X	X	X	X		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Determinar área de retângulo como função de x e y		X	X		X	X		X	X	X		X	X	X		X	X	X	X
Maximizar funções quadráticas com coeficientes do termo de maior grau negativo		X				X		X	X	X		X	X	X		X	X	X	X
Usar o fato de que para retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado														X					

Fonte: dados da pesquisa.

A SP10, por sua vez, possui uma restrição à mais para ser observada que é a “*ideia de maximizar algo sujeito a uma restrição*” (SP10, EB2, Q1). A solução dessa situação envolve:

Cálculo de área de retângulos, equação do primeiro grau em duas variáveis, equação quadrática, vértice da parábola e/ou derivada. Elaborar uma equação para o perímetro e outra para a área, fazer a substituição de variáveis e calcular o x do vértice ou a derivada primeira igualada a zero. Habilidades, equacionar área e perímetro de retângulos, manipular equações realizando substituições, usar elementos da parábola para resolver o problema. (SP10, EB14, Q1)

Exige o conhecimento básico de área de retângulo. Com isso, o conhecimento de relação funcional para expressar o custo, que deve ter um valor máximo. Quando se aplica o valor na expressão da área, de novo, encontra-se uma relação quadrática. O problema exige conhecimentos diversos e, cada um deles, uma interpretação global do que se fez e de onde se quer chegar. (SP10, EB17, Q1).

O Quadro 19 apresenta os procedimentos que foram informados para SP10. Os demais critérios avaliados pelos especialistas quanto à reformulação das situações *Palco em construção* e *Estacionamento* são apresentados nos Quadros 20 e 21, respectivamente.

Quadro 19: Procedimentos *Estacionamento* - especialistas grupo B

PROCEDIMENTOS	EB1	EB2	EB3	EB4	EB5	EB6	EB7	EB8	EB9	EB10	EB11	EB12	EB13	EB14	EB15	EB16	EB17	EB18	EB19
Estabelecer equações para o perímetro e área do retângulo	X	X	X	X	X	X		X	X	X		X		X	X	X	X	X	X
Determinar área de retângulo como função de x e y		X			X			X	X	X		X	X		X		X		
Maximizar funções quadráticas com coeficientes do termo de maior grau negativo		X		X	X	X		X			X	X	X	X			X	X	
Maximizar algo sujeito a uma restrição		X										X					X		

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 20: Validação da contextualização da situação-problema *Palco em construção*

Critério	SIM	NÃO	Quem assinalou NÃO?
(Q2) coerência e coesão	18	1	EB14
(Q3) adequação da linguagem (compreensão)	16	3	EB11; EB12; EB14
(Q4) Clareza, objetividade, originalidade, precisão, impessoalidade	16	3	EB11; EB12; EB14
(Q5) Interpretação única e uma só resposta	14	5	EB5; EB11; EB12; EB14; EB15
(Q6) Ausência de termos ambíguos, confusos e vagos	13	6	EB7; EB11; EB12; EB14; EB15; EB19

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 21: Validação da contextualização da situação-problema *Estacionamento*

Critério	SIM	NÃO	Quem assinalou NÃO?
(Q2) coerência e coesão	19	0	-
(Q3) adequação da linguagem (compreensão)	19	0	-
(Q4) Clareza, objetividade, originalidade, precisão, impessoalidade	18	1	EB2
(Q5) Interpretação única e uma só resposta	18	1	EB5
(Q6) Ausência de termos ambíguos, confusos e vagos	16	3	EB6; EB7; EB18

Fonte: dados da pesquisa.

Quanto à equivalência entre SP8 e *Palco em construção*, apenas um especialista (EB14) assinalou NÃO e, em relação aos erros, dois especialistas (EB11 e EB15) discordaram quanto a compatibilidade. Como resultado, na Q9, quatro professores (EB12, EB14, EB15 e EB19) afirmaram que a reformulação não atendia a todos os critérios. As sugestões recebidas para a reformulação desse item foram:

Usamos a grandeza metros para designar um comprimento (linha). Então nesse caso sugiro uma reescrita que explicita isso, pois aparentemente a quantia está relacionada com placas. Por exemplo, poderia relacionar com a BORDA das placas. (SP8, EB12, Q9)

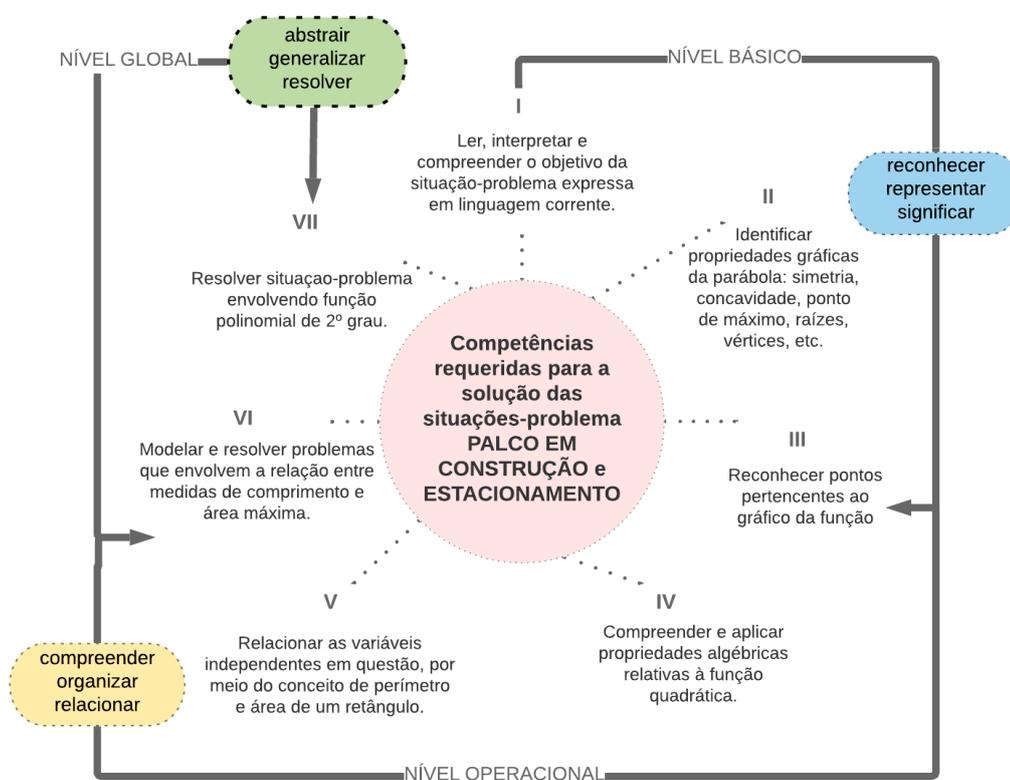
Sugestão de reescrita a partir do texto [...] "As laterais desse palco (prisma) deverão ser revestidas com placas de LED que tem formato retangular com 1 metro de base e mesma altura do prisma (distância da base do prisma até o plano superior do prisma,

que equivale ao palco). A equipe de montagem pretende utilizar 100 placas de LED para revestir as laterais do palco. Quais devem ser as medidas A e B (conforme figura acima), em metros," (SP8, EB14, Q9)

[...] sugiro que a escrita seja "placas de lâmpadas LED", para garantir total entendimento. (SP8, EB19, Q9)

Essas sugestões foram consideradas antes da testagem do item *Palco em construção* com os estudantes. Para finalizar essa análise, a Figura 19 traz as competências cognitivas do nível básico ao nível global (PESTANA, 1999) requeridas para a resolução de ambas as situações: *Palco em construção* e *Estacionamento*.

Figura 19: Competências requeridas para a resolução das situações-problema *Palco em construção* e *Estacionamento*



Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

Quanto à reformulação de SP10, não houve modificações requeridas. Todos os especialistas concordaram que o item original SP10 e a sua reformulação *Estacionamento* eram equivalentes quanto aos conceitos, procedimentos e estratégias de resolução, assim como julgaram que os erros que os estudantes cometeriam em ambas as situações seriam também compatíveis. Apenas EB18 discordou em P8. EB2 assinalou NÃO em Q9 e deixou sua sugestão

de “*apenas algumas questões de escrita: a área destinada AO Estacionamento... eu acho que é R\$ 20,00 o metro linear*” (SP10, EB2, Q9).

5.1.4 Considerações I

Ao trabalhar com situações-problema compreende-se que a análise e a avaliação do processo de resolução são mais relevantes do que puramente a observação das respostas finais dadas pelos estudantes. Conceitos, procedimentos e habilidades, para relacionar os conceitos e procedimentos pertinentes à determinada situação-problema, são elementos que podem evidenciar competências cognitivas, na medida em que eles se fazem presentes nas estratégias elaboradas pelo sujeito para alcançar determinado fim. Por isso, recorreu-se aos especialistas para elencar um conjunto inicial de conceitos, procedimentos e habilidades que podiam ser relacionados a cada situação-problema considerada no estudo.

Retomando os aspectos teóricos da pesquisa, os conceitos foram associados ao nível básico de expressão de competências cognitivas (PESTANA, 1999). Eles englobam esquemas representativos (PIAGET, 1985; 1987), que têm como função tornar o objeto presente para o sujeito. Os conceitos elencados pelos especialistas foram ponto de partida para a análise da totalidade de conceitos utilizados pelos estudantes nas situações-problema. Verificou-se, contudo, que esses poderiam ser organizados em quatro grupos e não precisariam ser tomados de modo individual: *expressões e fórmulas associadas a funções* (G1); *gráfico de uma função* (G2); *relações trigonométricas e conceitos geométricos* (G3) e *regra de três, proporcionalidade, frações e sistemas lineares* (G4). O reconhecimento desses conceitos, entendidos ainda como conhecimentos declarativos (MACHADO, 2010; PERRENOUD, 1999), possibilitou restringir o escopo da situação-problema, ou seja, selecionar dentro do universo do conhecimento matemático, o subconjunto de conhecimentos que a situação poderia envolver, de acordo com a avaliação dos especialistas.

Por sua vez, a identificação dos conceitos direcionou o apontamento de procedimentos a cada situação. Os procedimentos foram considerados como ações sucessivas que poderiam servir de meio para a solução da situação-problema (INHELDER, 1978; ECHEVERIA; POZO, 1988; INHELDER; CAPRONA, 1996). Os procedimentos, caracterizados enquanto conhecimentos procedimentais (PERRENOUD, 1999), foram associados a esquemas procedurais (PIAGET, 1987) pressupondo, a partir da percepção do sujeito acerca dos elementos presentes, o estabelecimento de relações com e entre os conceitos dentro do escopo de cada situação-problema.

Considerando aspectos da análise formal ou lógica (NOGUEIRA, 2013) relativa aos elementos necessários à resolução de cada situação-problema elencada, as estratégias de resolução válidas a serem elaboradas pelos estudantes estariam, possivelmente³⁷, relacionadas às competências expressas nas Figuras 11, 14 e 19. Com base nisso, constatou-se que estratégias cognitivas mais elaboradas (ou complexas) são aquelas que expressam maior grau de relacionamento entre os elementos presentes no problema, recorrendo a ações ou operações que avançam nos níveis de competência cognitiva, do básico ao global.

Cabe retomar que a competência não se refere aos “recursos a serem mobilizados, mas à sua mobilização e articulação para que seja possível tomar decisões e fazer encaminhamentos adequados e úteis ao enfrentamento de situações como a resolução de um problema ou a tomada de uma decisão” (RABELO, 2013, p.188). Nesse sentido, um esquema ou uma estrutura mental constitui-se na medida em que o sujeito consegue resolver certa situação com compreensão para além do caráter prático, demandando a mobilização de esquemas ainda mais elaborados (articulados) na constituição de estratégias para abordar a situação. Na busca por êxito em situações complexas, o sujeito precisa concatenar um conjunto de esquemas/estruturas que foram construídos enquanto totalidades ou generalizações relacionadas a situações singulares e, geralmente, mais simples (BECKER, 2019). Tais estratégias requerem recursos cognitivos na compreensão conceitual do domínio do problema, a seleção e execução de procedimentos e técnicas aplicáveis a esse domínio e habilidades para identificar a aplicabilidade desses recursos, bem como para selecionar quais recursos são mais eficazes diante das especificidades do problema (POZO, 2008).

Para concluir, percebe-se, então, que ao trabalhar com situações-problema, como as que aqui estão sendo propostas, se está oferecendo aos estudantes oportunidades para que possam mobilizar recursos cognitivos dentro do âmbito exigido em cada caso e que, a partir dos processos de repetição, reconhecimento e aplicação de esquemas à uma variedade de situações de mesma estrutura (MACHADO, 2002; PERRENOUD, 1999), ou seja, a partir da generalização (PIAGET, 1982) cada estudante tenha a oportunidade de desenvolver sua própria competência cognitiva. Logo, a compreensão da lógica subjacente aos conceitos e conteúdos e o estabelecimento de relações são aspectos fundamentais que favorecem o desenvolvimento do conhecimento, bem como a manifestação de competências cognitivas consolidadas.

³⁷ É possível que alguma forma de resolução não tenha sido mapeada pelos dados da pesquisa, contudo a ideia é que esse universo não seja estático, possibilitando inclusões, no caso.

Destaca-se, por fim, que o Enem preconiza que os estudantes sejam capazes de desenvolver um raciocínio que os levem à resposta e não que partam das alternativas para resolver as questões (RABELO, 2013). Considerando esses aspectos, traz-se aqui o comentário de EB2 à SP8, o qual foi particularmente importante para direcionar a próxima etapa da pesquisa. O especialista destaca que, para resolver certa situação-problema (no caso *Palco em construção*), o estudante precisaria, se “*for utilizar as alternativas para ir testando-as, apenas [do] conceito de área e perímetro. Se ele não as utilizar, aí precisaria de conhecimento de funções, dependência de variáveis, máximos de funções quadráticas, além dos conceitos de geometria já mencionados*” (SP8, EB2, P1). Desta forma, optou-se por não informar as alternativas de resposta aos estudantes participantes na fase seguinte da pesquisa para analisar, de fato, os aspectos constituintes de seu raciocínio frente a situação, sem direcionamento prévio das alternativas de resposta.

5.2 Desenvolvimento de um método para identificar evidências de estratégias cognitivas

A presente pesquisa buscou por evidências das estratégias cognitivas utilizadas pelos estudantes no decorrer da resolução de situações-problema relacionadas ao pensamento algébrico. Com a definição das situações-problema adaptadas do Enem e a elaboração da listagem dos conceitos, dos procedimentos e das competências requeridas dos estudantes para a resolução de cada uma, conforme conclusões da etapa anterior, seguiu-se para a definição de elementos necessários à identificação dessas evidências por meio do Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP). Para tanto as situações-problema foram disponibilizadas aos estudantes e o processo de resolução acompanhado por meio de entrevista inspirada no método clínico piagetiano.

5.2.1 Geração de dados

As atividades de pesquisa contempladas nessa seção envolveram etapas de identificação e descrição de fenômenos (por exemplo: *representações, esquemas, hipóteses, tentativas, estratégias, dificuldades*), descoberta de relações, categorização dos conceitos e procedimentos adotados pelos estudantes e a busca por generalizações dessas (nessas) relações, que deram origem às estratégias identificadas para cada questão e serão apresentadas nos resultados como as categorias de análise caracterizadas a partir das resoluções dos estudantes.

Os procedimentos de análise dos dados gerados das entrevistas retomaram um dos métodos utilizados no âmbito da Epistemologia Genética denominado por análise lógica ou estrutural dos processos intelectuais. A análise lógica refere-se à verificação da validade ou não dos raciocínios representados pelos estudantes durante a proposta de resolução de situações-problema. Conforme Nogueira (2013, p. 298), a “análise de um conhecimento na perspectiva genética envolve três métodos” e um deles consiste na análise formal que trata de “problemas de estrutura formal dos conhecimentos e validade desses sistemas”. Assim, a análise lógica é, também, um meio para a identificação das “dificuldades de determinado conteúdo, suas relações com outros conceitos (filiações e rupturas), suas aplicações, etc.” (NOGUEIRA, 2013, p. 298).

De acordo com Dolle (2015, p. 13), a lógica representa “a ordem necessária ao funcionamento das estruturas que, por assim dizer, constituem o esqueleto do pensamento”. Dessa forma, no âmbito da presente pesquisa, estabelecer os critérios de compreensão relacionados aos conteúdos, aos significados que são atribuídos pelos estudantes aos conceitos vinculados às situações-problema propostas e ao modo de organização lógica entre os conceitos e os procedimentos inerentes a elas, teve importância central para a concepção do modelo de avaliação de cada situação-problema, bem como para constituir o método de identificação de evidências de estratégias cognitivas implementado no appAAP.

Para essa fase da pesquisa, foram convidados a participar os estudantes matriculados, nos anos de 2020 e 2021, nas turmas de 3º e 4º anos dos cursos de ensino médio técnico integrado³⁸ e os alunos matriculados no primeiro semestre dos cursos superiores da instituição participante da pesquisa. Em função da suspensão das atividades letivas presenciais, os estudantes receberam o convite e as orientações da pesquisa através do e-mail cadastrado na instituição, bem como o *link* para acessar informações detalhadas do estudo.

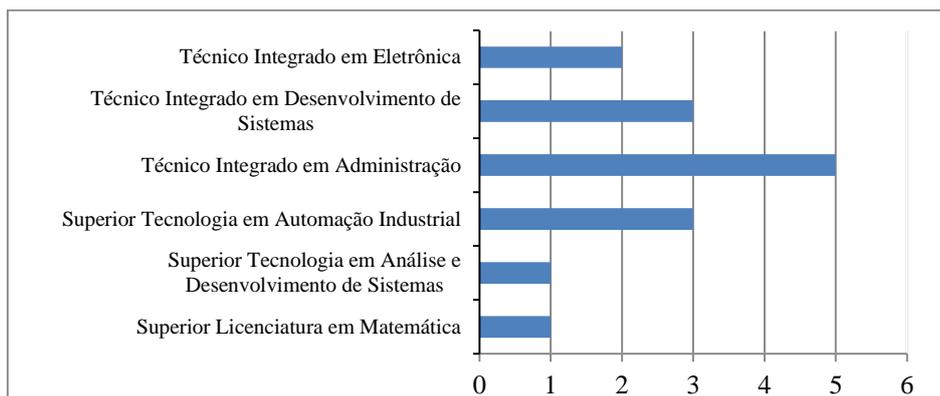
Ao acessar o formulário (Apêndice 4) os alunos declaravam aceite (ou não) em participar do estudo e, em caso de aceite, informavam dados para contato posterior (telefone, *whatsapp*³⁹, e-mail). Foram obtidas 16 (dezesseis) respostas ao convite, todos de estudantes maiores de 18 anos. Contudo, um deles não respondeu a nenhuma das situações-problema, não retornando o contato da pesquisadora.

³⁸ Os cursos integrados ao ensino médio da instituição onde a pesquisa foi realizada possuem sua estrutura curricular organizada em quatro anos letivos.

³⁹ Aplicativo que permite o envio e recebimento de mensagens instantâneas em diversos formatos: áudio, foto, texto, chamada de voz. Para mais informações: https://www.whatsapp.com/about/?lang=pt_br.

A Figura 20 ilustra a distribuição dos 15 participantes efetivos nas suas respectivas turmas, sendo 10 estudantes de anos finais do ensino médio e 5 estudantes ingressantes de cursos superiores. Para que pudessem participar, os estudantes maiores de 18 anos declararam anuência por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE⁴⁰.

Figura 20: Distribuição por turmas dos participantes da fase 2 do estudo



Fonte: elaborada pela autora.

A fim de preservar o anonimato desses participantes optou-se por denominá-los doravante por A1; A2; A3; ...; A16, sigla atribuída pelo ordenamento alfabético dos estudantes que responderam ao formulário de convite. Desses, A7 foi o estudante que não participou até o final da pesquisa. Através de entrevistas, videochamadas realizadas por meio do *Google Meet*, solicitou-se a cada um dos 15 participantes que tentasse resolver as situações-problema selecionadas, uma por vez. Foram obtidas 14 respostas a cada situação-problema, sendo que 13 estudantes responderam a todas e 2 estudantes responderam a apenas duas situações cada um. A relação entre os participantes e as situações-problema resolvidas pode ser observada no Quadro 22.

Quadro 22: Estudantes participantes da fase 2 e situações-problema trabalhadas

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
<i>Vila Lângaro</i>	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
<i>Praça dos Arcos</i>	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
<i>Palco em construção</i>	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
<i>Estacionamento</i>	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Fonte: elaborada pela autora.

⁴⁰ Disponível no Apêndice 3.

A entrevista foi considerada adequada para a realização da presente investigação, pois ao responder a questionamentos “o entrevistado compõe narrações e argumentações; institui relações de sentido entre eventos dispostos em uma sequência temporal, expõe as razões que tornam forte o que afirma ou explicita as fragilidades daquilo a que pretende se opor” (CARDANO, 2017, p. 172 – 173). De modo mais específico, optou-se por entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano (DELVAL, 2002) também denominado por método de investigação crítica (INHELDER, BOVET, SINCLAIR, 1977; INHELDER; CELLÉRIER, 1996).

O método clínico diferencia-se de outros métodos de investigação, por ter como característica “a intervenção sistemática do experimentador diante da conduta do sujeito” (DELVAL, 2002, p. 68) tendo sempre uma hipótese a ser investigada “diante da atuação do sujeito e como resposta às suas ações e explicações” (DELVAL, 2002, p. 68). A passagem abaixo apresenta características importantes acerca do Método Clínico e sua execução.

O experimentador está na presença de um sujeito a quem se estuda individualmente e com quem se estabelece uma interação. Coloca-se esse sujeito em uma situação problemática que ele tem de resolver ou explicar, e observa-se o que acontece. Enquanto se produz a conduta do sujeito (que, insistimos, pode consistir em simples ações, em palavras ou em combinação de ambas as coisas), o experimentador procura analisar o que está acontecendo e esclarecer seu significado. Fixa-se em uma série de aspectos da conduta do sujeito e, à medida que esta vai se produzindo, realiza intervenções motivadas pela atuação do sujeito, que têm como objetivo esclarecer qual é o sentido do que ele está fazendo. Isso supõe que o experimentador tenha de se perguntar a cada momento qual é o significado da conduta do sujeito e a relação com suas capacidades mentais. Como geralmente isso não fica claro, trata de realizar intervenções que ajudem a desvendar seu sentido. Isso exige que a intervenção do experimentador seja extremamente flexível e também muito sensível ao que o sujeito está fazendo. Em cada momento da interação entre experimentador e o sujeito, ele tem que procurar deixar claro o sentido das ações ou explicações do sujeito e para isso formula hipóteses acerca do seu significado, que tenta comprovar imediatamente através de sua intervenção. (DELVAL; 2002, p. 68)

Salienta-se que o método clínico é um procedimento “que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras” (DELVAL, 2002, p. 67). Por isso, considerou-se esse método adequado, uma vez que a análise das estratégias cognitivas, no caso desse estudo, investigou aspectos concretos, como as representações de forma escrita ou expressas verbalmente pelos alunos, mas também elementos mais subjetivos, através da investigação das condutas adotadas enquanto meios para a resolução de cada situação proposta.

Dessa forma, foram considerados no processo de investigação tanto aspectos inerentes ao sujeito epistêmico quanto ao sujeito psicológico, uma vez que “cada pessoa possui características comuns de seu desenvolvimento, que abrangem a dimensão do sujeito

epistêmico; bem como comportamentos exclusivos que remontam ao estudo do sujeito psicológico” (SILVA; FREZZA, 2011 p. 194).

Ao investigar o sujeito psicológico o observador busca

revelar a dinâmica da conduta do sujeito, seus fins, a escolha dos meios e os controles, as heurísticas próprias ao sujeito que podem levar a um mesmo resultado, através de caminhos diferentes, a fim de que possamos penetrar no funcionamento psicológico e separar as características gerais dos procedimentos ou encadeamentos finalizados e organizados da ação (INHELDER; CELLÉRIER, 1996, p. 9).

Sendo assim, as entrevistas focaram na busca por evidências dos esquemas de ação e das operações realizadas pelos estudantes no decorrer de todo o processo de resolução de cada uma das situações-problema propostas. Evidências consideradas, então, enquanto elementos para a compreensão das estratégias cognitivas e dos procedimentos de resolução adotados em cada momento, pois

se uma ação é sempre orientada em direção a seu objetivo (em termos de antecipação atual, [...] e não de efeito causal do futuro sobre o presente) e se o objetivo é por essência positivo (pois um objetivo negativo é somente um meio para atingir um outro que é positivo), não resta dúvida de que no princípio uma ação se afasta de seu ponto de partida e volta a suprimir um estado inicial para substituí-lo por um novo. (PIAGET, 1978, p. 184).

De igual modo ao considerado por Inhelder (1978), o processo de resolução dos problemas selecionados para esta pesquisa exigia dos sujeitos uma organização geral entre o objetivo a alcançar e os meios disponíveis. Sendo assim, considerando o contexto de estudo, parte-se do pressuposto de que as ações e operações dos sujeitos são orientadas por objetivos, parciais (ou seja, uma ação que busca obter algum ponto de apoio, de certeza, que ampare um passo da resolução do problema, por exemplo) ou finais, no caso, a solução buscada (PIAGET, 1978).

Para tornar possível a geração de dados considerando essas características, um protocolo de abordagem metodológica para essa etapa foi criado (Apêndice 5). Isso foi fundamental também em função do momento pandêmico, da necessidade de distanciamento físico entre pesquisador e estudante e das adaptações necessárias para a realização, por meio das tecnologias digitais, de entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano. Renz e Franco (2020) verificaram ser eficaz essa possibilidade, mesmo com algumas variáveis não podendo ser controladas pelos pesquisadores, como questões técnicas de instabilidade no acesso e na conexão à internet.

Por tratar-se, também, de uma entrevista semiestruturada (GRAY, 2012), característica que as entrevistas clínicas compartilham, o protocolo foi adaptado de acordo com as especificidades de cada entrevista, tendo em vista que as decisões acerca dos questionamentos a serem realizados dependiam das respostas, das ações e condutas dos sujeitos entrevistados. Desse modo, alguns itens que constavam no roteiro puderam ser investigados sem a necessidade de intervenção e outros até puderam ser suprimidos, na medida em que era identificada a suficiência de informações relacionadas aos mesmos.

5.2.2 Procedimentos e critérios para seleção e análise dos dados

As entrevistas foram degravadas com auxílio do software *Transkriptor*⁴¹ e, posteriormente, revisadas e complementadas com informações inerentes aos registros escritos dos estudantes e às percepções da pesquisadora oriundas da aplicação do método clínico. Dos textos gerados procedeu-se a um exame detalhado dos registros relativos a cada participante para cada item proposto e passou-se à etapa de codificação de elementos indicadores de estratégias cognitivas utilizadas em cada situação-problema, utilizando o mesmo procedimento adotado nas pesquisas em Epistemologia Genética (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1976). Também foram destacados trechos das entrevistas e imagens que poderiam complementar a fase de discussão dos dados e dos resultados alcançados.

Na pesquisa qualitativa, um código é uma palavra ou frase curta que atribui ou captura a essência ou que serve para evocar uma parte dos dados gerados por meios de entrevistas, transcrições etc. Logo, a codificação permite organizar e agrupar os dados codificados de acordo com semelhanças, organizando categorias que possuem certo padrão, ou seja, os dados de uma mesma categoria que compartilham alguma característica (SALDANÃ, 2012). A codificação, portanto, ampara a leitura dirigida posterior e, conseqüentemente, a organização dos dados em categorias que podem ser conectadas a conceitos que também emergem dos dados. Essas conexões geram hipóteses que, a partir das evidências e amparadas na fundamentação teórica, podem ser confirmadas. De acordo com Gray (2012), a codificação proporciona ainda ao pesquisador a familiarização com as questões que surgem dos dados.

Destaca-se ao considerar a EG que muitos aspectos não podem ser diretamente observados, porém podem ser inferidos a partir das ações, condutas e comportamentos dos sujeitos, durante a investigação, sendo o método clínico-crítico um caminho possível para tal.

⁴¹ <https://transkriptor.com/pt-br/>

Nesse sentido, os dados buscados para a identificação das evidências de estratégias cognitivas utilizadas pelos estudantes durante a resolução das situações-problema resolvidas estavam associadas a emergência de três fenômenos:

- *estratégias*: hipóteses, técnicas, táticas, esquemas, artifícios, métodos, meios, recursos, representações, tipos de raciocínio, tentativas etc.
- *dúvidas*: incertezas, indecisões, inseguranças, confusões, indeterminações, indefinições, imprecisões, ambiguidades etc.
- *impasses*: obstáculos, embaraços, empecilhos, reveses, resistências, objeções, bloqueios, barreiras etc.

Diante do exposto, foram consideradas evidências das estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes em cada situação-problema, de modo associado aos níveis de competência indicados em Pestana (1999), os seguintes elementos:

- *Procedimentos* (P_i) tentados ou realizados;
- *Dicas de resolução* (DR_i) gerados a partir das estratégias identificadas;
- *Perguntas e respostas norteadoras* (PN_i) oriundas das dúvidas;
- *Questionamentos Reflexivos* (QR_i) originados dos impasses.

Essas categorias de dados são apresentadas e analisadas na seção seguinte de modo associado a cada situação-problema e relacionado às estratégias cognitivas resultantes da consideração desses elementos. Ressalta-se que os conceitos também foram considerados, contudo, optou-se por associá-los aos grupos G1 a G4 elencados pelos dados gerados dos questionários respondidos pelos especialistas (fase anterior).

5.2.3 Resultados: elaboração de modelos de avaliação para cada situação-problema

Nesta seção, para o alcance dos objetivos da pesquisa, foi necessário interpretar os dados sob dois enfoques: por situação-problema e por estudante. Ao enfatizar cada estudante, analisou-se a estratégia desenvolvida a partir das evidências coletadas, observando indícios de sua competência cognitiva e de suas dificuldades diante de cada situação-problema. Por sua vez, o enfoque nas situações foi preciso para elencar o conjunto de elementos para a elaboração do seu modelo de avaliação, considerando o conjunto de tentativas de resolução adotadas pelos estudantes que se envolveram com cada situação-problema.

Por tentativa, entende-se a construção de um caminho e de apresentação de uma hipótese de resposta a partir dos procedimentos que caracterizam uma dada estratégia. As tentativas de

resolução de um problema ou de algo que coloque o indivíduo em conflito nunca são realizadas totalmente ao acaso (PIAGET, 1976a). De acordo com Piaget (1982, p. 379), “a tentativa desenvolve-se, necessariamente, por acomodação dos esquemas anteriores e estes assimilam-se ou tendem a assimilar a si os objetos sobre os quais a exploração incide”, retomando os aspectos de reconhecimento e generalização presente na constituição de novos esquemas ou estruturas. Assim, por exemplo, se para um estudante de engenharia, na resolução de uma situação-problema, a representação através de modelagem algébrica é a ideia mais imediata que lhe convém, outro indivíduo, que não tenha aproximação tão direta com tais conhecimentos matemáticos formais, poderá utilizar outros recursos e estratégias, tais como representação geométrica, apenas cálculos aritméticos, teste de valores etc. (VALE; BARBOSA, 2019), como foi possível observar nas tentativas dos sujeitos e será exposto a seguir.

As estratégias cognitivas elaboradas pelos sujeitos foram evidenciadas nas condutas realizadas frente ao problema que estava sendo resolvido (INHELDER, 1978). Contudo, constatou-se que essas condutas eram marcadas por características individuais em termos de recursos disponíveis (conceitos, procedimentos e habilidades). A familiaridade que o sujeito possui com determinados conteúdos em detrimento de outros e as significações constituídas, considerando essa familiaridade, direcionam suas ações, decisões e condutas frente ao problema a ser enfrentado (PIAGET, 1985; 1987). Partindo de conhecimentos já construídos, bem como de sua competência cognitiva (PIAGET, 1995), o sujeito “age, observa, seleciona os aspectos que mais chamam a sua atenção, estabelece relações entre os vários aspectos deste objeto e atribui significados a ele, chegando a uma interpretação própria” (MICOTTI, 1999, p. 158). Desse modo, os sistemas de significação, que comportam elementos como as diferentes formas de representação, os gráficos, as imagens mentais entre outros (PIAGET, 1973a) e estão sempre presentes em todo processo construtivo (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1991), apoiam as assimilações e abrem caminho para acomodações que possibilitarão assimilar novidades (PIAGET, 1982; 2007; 2014; INHELDER; CAPRONA, 1996).

Durante o processo de elaboração de estratégias cognitivas para enfrentamento e busca por solução a uma situação-problema, esquemas em diferentes níveis de elaboração são confrontados e podem produzir desequilíbrios que, através das perturbações emergentes, mobilizam processos cognitivos (regulações, compensações, ...) e possibilitam ao sujeito alcançar um estado de equilíbrio superior, uma equibração majorante (INHELDER, 1978; PIAGET, 1976a).

Em uma sala de aula, por exemplo, ao propor uma situação-problema no contexto da matemática a uma turma, podem surgir diferentes métodos e caminhos de resolução: alguns

alunos acabam recorrendo a características mais concretas, a realização de cálculos ou procedimentos de caráter mais aritmético ou prático. Outros podem recorrer a estratégias de representação algébrica, por exemplo, as quais exigem um grau de abstração maior. Entretanto, da mesma forma como o processo de construção do conhecimento é pessoal e intransferível, as estratégias, as dúvidas e os impasses enfrentados ao longo da caminhada de resolução de problemas também o são, assim como os recursos mobilizados por cada indivíduo. Por isso, a análise desses elementos, em conjunto, precisa ser realizada para levantar evidências das estratégias cognitivas elaboradas por cada estudante.

Desse modo, o que foi percebido nas entrevistas foram algumas evidências, partindo das condutas (ações e operações) dos estudantes, considerando as articulações de recursos realizados na busca pela solução do problema. Obviamente, características do sujeito epistêmico garantem a existência de estruturas comuns e, por isso, permitiram a aproximação entre condutas realizadas por estudantes distintos, indicando uma mesma forma de abordagem à determinadas situações (INHELDER; PIAGET, 1976; PIAGET, 1976b). Erros, tanto em relação à escolha dos procedimentos quanto associados à aplicabilidade desses no contexto do problema, também foram identificados. Sabe-se que diante de um problema que exija do sujeito alguma ação, a execução de determinados procedimentos conduz a novas assimilações, que por sua vez mobilizarão novos esquemas de ações guiados pela estratégia cognitiva elaborada frente ao problema. As assimilações e, conseqüentemente, as acomodações podem, também, levar o sujeito a realizar regulações que implicarão, possivelmente, em mudanças na estratégia em curso e a busca por novos procedimentos para a solução ao dado problema (INHLEDER, 1978; INHELDER; PIAGET, 1976; PIAGET, 1976a; 1982; 2007; MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 117)

A metáfora a seguir ilustra a compreensão acerca do conceito de regulação utilizado nessa pesquisa. Imagine que esteja dirigindo de sua casa até o endereço da residência de seu melhor amigo que acabara de se mudar. No meio do percurso você acessa uma rua equivocadamente e, percebendo o erro, retorna e corrige o trajeto. Isso se refere a uma retroatividade, uma modificação em sua ação buscando chegar ao endereço indicado. Agora, se estivesse dirigindo com auxílio de um GPS, por exemplo, provavelmente diante de dúvida acerca da rua a acessar, olharia a indicação do GPS, procurando corrigir antecipadamente um possível erro de execução do percurso. Nesse caso, ocorre uma regulação proativa com pré-correção do erro. Por outro lado, um erro de percurso pode levar o sujeito a buscar novo caminho para chegar ao destino desejado e, ainda, pode fazer com que o sujeito construa novas possibilidades de trajetos para que diante de alguma necessidade tenha alternativas ao caminho

indicado pelo próprio GPS, tratando-se, nesse caso, de uma compensação ou regulação *a posteriori*.

Considerando o exposto, durante e após as entrevistas com os estudantes buscou-se compreender o caminho de resolução adotado, as justificativas acerca das escolhas realizadas, os registros elaborados por eles enquanto forma de expressão de seus pensamentos, bem como a utilização de processos automatizados. Considerou-se, ainda, a forma como os estudantes utilizaram os dados existentes e organizaram esquemas de resolução, expressos no papel ou oralmente, bem como suas explicações acerca das estratégias de resolução traçadas, as dúvidas emergentes e os impasses que enfrentaram. Ou seja, o *modo como cada aluno agia diante das condições do problema*, articulando as informações disponíveis e os conhecimentos já construídos enquanto meios para atingir um objetivo, que possibilitou a obtenção de evidências de estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes durante a resolução das situações-problema.

Para facilitar a leitura dos dados optou-se por apresentar, de início, o conjunto de estratégias e procedimentos (P_i) identificados na análise das respectivas entrevistas. Depois, as ajudas geradas (DR_i , PN_i e QR_i) a partir das estratégias, dúvidas e impasses que emergiram nas entrevistas, respectivamente. Por fim, traz-se recortes da análise das resoluções dos estudantes, com características que apontavam a elaboração de certas estratégias durante sua(s) tentativa(s) de resolução e os argumentos ou recortes que ampararam essas conclusões. Buscou-se garantir que a linguagem utilizada nos procedimentos, estratégias e ajudas fosse simples, clara, objetiva e, no caso dos procedimentos, em primeira pessoa do singular para facilitar o julgamento posterior dos estudantes na fase de utilização do appAAP.

Ao encontro da fundamentação teórica aqui utilizada, os dados evidenciaram que uma *estratégia* associada a conceitos e procedimentos válidos logicamente, junto a habilidades cognitivas que contemplavam a articulação entre esses elementos, conduziram os estudantes à obtenção de êxito na resolução do problema. Diante disso, uma estratégia adaptada à situação deu origem a *Dicas de Resolução* (DR_i), sendo essas consideradas elementos importantes para a identificação de evidências acerca das estratégias cognitivas que cada estudante elaborava.

Por outro lado, todo processo de resolução de um problema exige que ele seja lido, interpretado e que seja significado pelo sujeito da ação (INHELDER; CAPRONA, 1996; INHELDER, 1978; ECHEVERIA; POZO, 1988; RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1991, DOLLE; BELLANO, 2008). Logo, *dúvidas* ou *impasses* emergentes levaram os estudantes a cometer *erros* ou, ainda, evidenciaram obstáculos enfrentados por eles em virtude de *lacunas* existentes (PIAGET, 1976a; 1982).

Por vezes, os estudantes não conseguiram demonstrar certa habilidade cognitiva necessária para a seleção, organização e manipulação dos dados fornecidos ou necessários à resolução de cada situação proposta. Essas circunstâncias apontavam dificuldades para a identificação de conceitos (*Ci*) e procedimentos (*Pi*) inerentes à situação, ou ainda, para o estabelecimento de relações entre eles, sendo, assim, consideradas evidências de obstáculos (BACHELARD, 2005; BROUSSEAU, 1983) que podem ter impedido esses estudantes de atribuir significado ao exposto em uma ou mais situações-problema ou à sua própria interpretação, em cada caso.

Nesse sentido, as *dúvidas* apontaram que o estudante elaborou algumas hipóteses de resolução, e embora pudesse recorrer ao método “tentativa e erro”, ele encontrava-se em um desequilíbrio cognitivo (PIAGET, 1976a), não tinha certeza do caminho a seguir, necessitando de algum apoio para auxiliá-lo na decisão dos procedimentos que poderiam ser executados para elaborar estratégias cognitivas pertinentes. A identificação das dúvidas enfrentadas por cada estudante resultou na elaboração de *Perguntas e Respostas Norteadoras (PNi)*, outra categoria considerada.

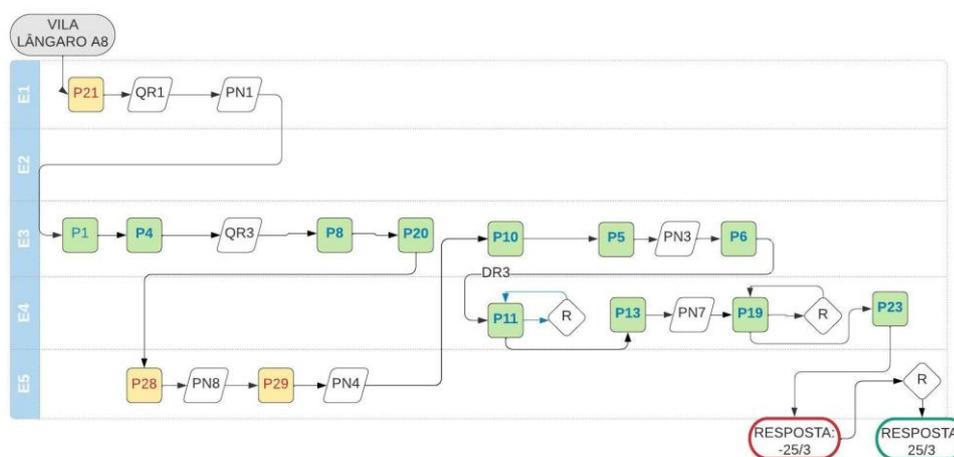
Os *impasses*, por sua vez, foram adotados para indicar que o estudante não conseguiu levantar hipóteses acerca do caminho de resolução, tanto no início quanto em alguma etapa intermediária do processo, evidenciando possíveis *lacunas* de compreensão ou de articulação entre os conceitos e procedimentos associados ao problema que estava sendo resolvido. Nesse caso, ocorreu a necessidade de auxiliar o estudante a superar essa barreira, para que o problema passasse a representar um desafio e, pudesse, de fato, colocar o estudante em desequilíbrio cognitivo, e assim, mobilizá-lo na busca pela (re)equilibração, fazendo-o avançar em seu processo construtivo e de busca por um caminho para o enfrentamento da situação-problema (PIAGET, 1976a). Assim, os impasses identificados nas entrevistas originaram os dados da categoria *Questionamentos Reflexivos (QRi)*.

A ordem de análise das situações-problema foi: *Vila Lângaro; Praça dos Arcos, Palco em construção e Estacionamento*. A numeração adotada aos elementos de cada categoria (por exemplo, *Pi*) se deu na ordem da emergência das informações. As ajudas elaboradas para cada situação-problema foram associadas aos grupos de conceitos. Ademais, observou-se que alguns elementos podiam pertencer ao quadro de avaliação de diferentes situações e, por isso, optou-se por continuar a numeração dos elementos de cada categoria na medida em que se avançava na análise dos dados das situações-problema, facilitando a sua apresentação e compreensão ao longo desta seção de resultados.

Considerando os aspectos expostos, na análise por aluno optou-se por organizar diagramas para representar os elementos identificados (estratégias, procedimentos e ajudas e sintetizar as informações, facilitando a visualização do(s) caminho(s) percorrido(s) por cada estudante, bem como auxiliar na identificação dessas evidências por meio do appAAP. A Figura 21 traz o diagrama de A8 para a situação *Vila Lângaro*, exemplificando o processo realizado. Os diagramas⁴² apontam a diversidade e unicidade dos processos de resolução de cada estudante a cada situação. Não houve (e não poderia haver!) nenhum diagrama que representasse dois estudantes em uma mesma situação ou em situações distintas e tampouco de um mesmo estudante nas diferentes situações que ele resolveu. Isso enfatiza as singularidades no modo de pensamento, ou seja, a impossibilidade de “mapear” o funcionamento cognitivo de cada indivíduo.

Nesses diagramas, cada linha horizontal foi utilizada para indicar uma estratégia e os procedimentos foram posicionados na linha correspondente àquela em elaboração. Por isso, as vezes, em alunos distintos, um mesmo procedimento pode estar localizado em linhas diferentes.

Figura 21: Diagrama A8 - *Vila Lângaro*



Fonte: elaborado pela autora.

Ainda, a cor verde indica que o procedimento foi realizado efetivamente e, o fundo amarelado, que o mesmo foi tentado, sendo aqueles considerados inválidos para a resolução da situação destacados com fonte na cor vermelha. Já as ajudas do tipo PN_i e QR_i expõem os pontos de dúvidas e impasses, respectivamente, e antecedem os procedimentos tentados, posteriormente e as ajudas do tipo DR_i são indicativos de mudanças na estratégia em elaboração. O losango

⁴² Disponíveis nos Apêndices 6 a 9.

com a letra R indica uma regulação, proativa ou retroativa, ou seja, momentos em que foi possível perceber que os estudantes repensaram possíveis caminhos, retomaram algum procedimento, anteciparam e corrigiram possíveis erros, etc., nesse caso, sem recorrer a auxílio ou interferência direta do pesquisador (questionamentos, ajudas, etc.). Esses aspectos ficam evidentes na apresentação e discussão dos dados referentes a cada situação-problema a seguir.

5.2.3.1 Modelo de avaliação Vila Lângaro

Para a situação-problema *Vila Lângaro* cinco estratégias (Quadro 23) foram mapeadas, caracterizadas e codificadas como E1, E2, E3, E4 e E5.

Quadro 23: Estratégias evidenciadas para a situação-problema *Vila Lângaro*⁴³

Ei	Caracterização	Ai
E1	De modo predominante, a estratégia elaborada indica uma abordagem exploratória da situação-problema, por meio de raciocínio baseado em elementos geométricos, utilizando conceitos e fórmulas pré-definidas associados a figuras planas, por exemplo. Tentou obter alguma relação utilizando cálculo de áreas ou de medidas lineares de figuras planas (triângulo, retângulo, círculo, quadrado, trapézio etc.).	A4 (2ª tentativa) A10 (1ª tentativa)
E2	De modo geral, a estratégia elaborada indica que o estudante abordou a situação numa perspectiva gráfica por associação à outra situação-problema, por meio do reconhecimento de características da representação gráfica do pórtico. Estratégia pautada, principalmente, na comparação entre situações semelhantes (memória recente) com transposição de processos de uma situação a outra por repetição, no entanto, não se pode garantir que os procedimentos inerentes tenham sido generalizados. Tampouco, que diante de uma situação desvinculada de um contexto que direcione as ações os mesmos esquemas sejam mobilizados.	A3 (1ª tentativa) A6
E3	Essa estratégia indica que o estudante reconhece e associa diferentes formas de representação dos elementos abordados na situação-problema: gráfica/geométrica e algébrica/simbólica. Os procedimentos associados a essa estratégia tendem a exigir compreensão dos conceitos e a generalização de esquemas, ações que vão além da mera associação a casos semelhantes. Implica o reconhecimento dessas situações semelhantes (reconhecimento), contudo, o estabelecimento de relações e a articulação entre conceitos e procedimentos carecem de maior automatização. Isso pode indicar a existência de dificuldades conceituais ou procedimentais, ou ainda, de lacunas que impossibilitaram o estudante de aplicar conhecimentos algébricos de modo mais direto.	A1 A4 (1ª tentativa) A15
E4	De modo geral, a estratégia elaborada indica que o estudante aborda a situação algebricamente, estabelecendo relações funcionais por meio da representação gráfica e utiliza linguagem simbólica para modelar a lei da função. Os significados associados aos elementos presentes nessa estratégia estão conceitualmente formalizados e generalizados, o que possibilita a transposição de processos a situações variadas a partir da identificação do contexto de aplicação. Esses aspectos podem maximizar o processo de resolução da situação-problema, uma vez que as relações estabelecidas tornam as escolhas mais direcionadas ao objetivo a ser atingido	A4 (3ª tentativa) A5 A8 A9 A11 A12 -1º/2º caminho A13 (3ª tentativa) A14 A16
E5	De modo geral, a estratégia de abordagem ao problema baseia-se numa perspectiva de tentativa e erro. Entre as possibilidades de resolução, hipóteses acerca da composição de uma lei para a função que satisfizesse as condições do problema, com verificação do “encaixe” dos pontos dados no gráfico ou com atribuição de valores às variáveis na intenção de compor as relações algébricas ou gráficas indicadas na situação-problema. Por vezes, tentativas recorrendo a variações entre os valores dos pontos identificados no gráfico, ou seja, utilizando proporcionalidade ou regra de três foram elaboradas. Há a necessidade de verificar em que casos cada uma dessas técnicas de resolução é válida. Remete a conhecimentos em construção, que exigem atenção e análise para identificação de procedimentos aplicáveis a cada contexto.	A3 (2ª tentativa) A10 (2ª tentativa) A13 -1ª/2ª tentativa

Fonte: dados da pesquisa

⁴³ Optou-se por usar nos quadros que trazem as estratégias os textos que foram usados na testagem com os estudantes do appAAP.

O Quadro 23 apresenta as estratégias e traz também a indicação dos estudantes cujos procedimentos de resolução adotados e demais evidências, oriundas da análise das entrevistas, apontavam à respectiva estratégia, considerando as diferentes tentativas de resolução realizadas. Dando seqüência à apresentação dos dados, o Quadro 24 traz a codificação e a descrição dos procedimentos (Pi) identificados na resolução de *Vila Lângaro*.

Quadro 24: Procedimentos *Vila Lângaro*

Pi	Descrição: ações demandadas/realizadas (procedimentos) <i>Vila Lângaro</i>
P1	Representei graficamente (por esquemas, desenhos, gráficos etc.) os dados fornecidos pela situação-problema.
P2	Construí a representação gráfica por meio da atribuição de pontos aleatórios.
P3	Localizei os eixos x e y na representação gráfica (dada ou construída).
P4	Reconheci a altura como o valor de y do vértice da parábola localizando-o graficamente ou representando a altura a partir do gráfico.
P5	Identifiquei o tipo de função (quadrática ou polinomial de 2º grau) caracterizada pelo formato do gráfico.
P6	Relacionei o formato do gráfico com a representação algébrica geral da função quadrática ou de 2º grau $y = ax^2 + bx + c$.
P7	Tentei obter a lei da função a partir de caso semelhante, ou seja, por associação de propriedades do gráfico ou da forma geral da função.
P8	Localizei pares ordenados (pontos) no gráfico da função em sua representação gráfica.
P9	Identifiquei as raízes de uma função de segundo grau em sua representação gráfica.
P10	Identifiquei pontos opostos em relação ao eixo de simetria da parábola.
P11	Identifiquei pontos, dados graficamente, e substituí na lei geral da função polinomial de 2º grau obtendo equações lineares para determinar os coeficientes a, b ou c.
P12	Avaliei a concavidade da parábola e relacionei com o coeficiente a da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.
P13	Identifiquei propriedade do coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, percebi que $f(0) = c$
P14	Percebi que o coeficiente b da função quadrática é nulo ($b = 0$) quando o eixo de simetria da parábola é o próprio eixo y.
P15	Identifiquei o vértice no gráfico da função e, assim, associei a altura h ao maior valor que y poderia assumir uma vez que a parábola era côncava para baixo.
P16	Obtive a coordenada x do vértice da parábola $(x_v = -\frac{b}{2a})$.
P17	Obtive a coordenada y do vértice da parábola $(y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ ou $y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a})$.
P18	Obtive a lei geral da função quadrática na forma fatorada $y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, identificando as raízes (x_1 e x_2) e o coeficiente a.
P19	Montei um sistema linear para identificação dos coeficientes da lei da função representada no gráfico, utilizando pontos também identificados graficamente.
P20	Localizei o eixo y no centro da parábola e, a partir disso, associei o valor de h ao valor de f(x) da lei da função, ou seja, $f(0) = h$.
P21	Identifiquei figuras geométricas na Figura 2: triângulo retângulo, retângulo ou outra e tentei calcular as medidas lineares associadas às figuras (calcular a medida da hipotenusa, por exemplo).
P22	Tentei obter a altura h do pórtico através de cálculo associado à área de alguma figura plana identificada a partir da Figura 2 (triângulo-retângulo ou retângulo, por exemplo).
P23	Depois que obtive a lei da função, substituí o valor de x do ponto (x, h) e obtive $f(x) = h$.
P24	Tentei construir, por tentativa e erro, a lei da função a partir do gráfico.
P25	Atribuí valores de x na lei f(x) da função para verificar se os pontos obtidos pertenciam à representação gráfica da função.
P26	Tentei construir a lei da função partindo das raízes reconstruindo os passos de "trás pra frente" da fórmula de Bháskara.
P27	Obtive o valor de h como sendo o $f(x_v)$ da parábola.
P28	Tentei obter uma relação de proporcionalidade de y em relação a x ou utilizar regra de três para obter a altura, considerando os valores de x e y já conhecidos.
P29	Considere a representação gráfica e tentei estimar um valor aproximado para a altura h.
P30	Utilizei um ponto conhecido e as expressões de soma e produto das raízes de uma função de segundo grau para tentar obter a lei da função.

Fonte: dados da pesquisa.

Por sua vez, o Quadro 25 apresenta a codificação das ajudas - *Dicas de resolução* (DRi), *Perguntas e respostas norteadoras* (PNi) e *Questionamentos Reflexivos* (QRi) - que foram elaboradas, respectivamente, a partir das estratégias, dúvidas e impasses identificados nas entrevistas. Essas também são associadas aos grupos de conceitos (G1 a G4) usados no appAAP, que foram originados das entrevistas com os especialistas.

Quadro 25: Ajudas Vila Lângaro

Ajuda	Título da ajuda	Pi indicados	G1	G2	G3	G4
DR1	Representação gráfica de uma função: eixo x e eixo y	P1, P2, P3, P5, P7		X		
DR2	Gráfico de uma função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)	P1, P2, P5, P6, P7		X		
DR3	Como obter a lei geral da função se conheço pontos quaisquer pertencentes ao seu gráfico?	P6, P8, P11, P19	X	X		
DR4	Vértice da parábola	P4, P15, P16, P17, P27	X	X		
DR5	Raízes de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P9, P30	X			
DR6	Ponto de máximo ou de mínimo de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P4, P15, P16, P17, P27		X		
DR7	A forma fatorada de um polinômio de 2º grau	P9, P18	X		X	X
DR8	Resolução de equação do tipo $x^2 - c = 0$ (sendo c um número real)	P9, P18	X			X
DR11 ⁴⁴	Como posso interpretar graficamente os resultados da fórmula de Bháskara?	P1, P2, P9, P10	X	X		
PN1	Será que identifiquei o objetivo da situação-problema Vila Lângaro?	P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27			X	X
PN2	Que tipo de função possui gráfico em formato parabólico?	P5, P6		X		
PN3	Qual é a forma geral da função que representa essa situação?	P6, P7	X			
PN4	Que informações relativas à situação-problema podem ser obtidas considerando o eixo de simetria de uma parábola?	P3, P10, P14, P20		X		
PN5	Qual é a influência gráfica do coeficiente b na lei geral de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática?	P7, P12, P13, P14		X		
PN6	Como resolver sistema linear com três incógnitas?	P19	X	X		X
PN7	Que relação existe entre as coordenadas x e y de um ponto (x,y) do gráfico de uma função?	P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25		X		
PN8	Em que casos posso usar regra de três para obter pontos pertencentes ao gráfico de uma função?	P8, P28, P29			X	X
PN9	Qual é a influência gráfica do coeficiente a na lei geral de uma função quadrática?	P12, P15		X		
PN10	Qual é a influência gráfica do coeficiente c na lei geral de uma função quadrática?	P13, P20		X		
QR1	Será que consigo resolver usando uma abordagem geométrica?	P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29		X	X	X
QR2	Que conceito(s) preciso usar nessa situação-problema?	P2, P5, P6, P7, P24, P25		X	X	X
QR3	Que informações você pode extrair do gráfico de uma função que possui formato parabólico?	P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20		X		
QR4	Para resolver o problema devo conhecer a lei geral dessa função?	P6, P9	X			
QR5	Como identificar pontos no gráfico?	P2, P10, P20, P25, P30		X		
QR6	Posso obter a lei da função se eu conheço, pelo gráfico, as raízes dessa função?	P9, P18, P26, P30	X	X		
QR7	Posso partir da fórmula de Bháskara para obter a lei da função?	P26	X		X	X

Fonte: dados da pesquisa.

Cada DR_i , PN_i ou QR_i corresponde a uma ajuda fornecida durante o processo de resolução a pelo menos um estudante, ou ainda, a indicação de possíveis dificuldades apontadas por eles que poderiam surgir durante a resolução conforme já descrito⁴⁵. O quadro traz, ainda, os procedimentos que cada ajuda tende a direcionar, ou seja, ações ou operações que as ajudas podem indicar. Esse conjunto de ajudas expõe as dificuldades emergentes na resolução da situação-problema Vila Lângaro.

⁴⁴ DR11 foi originado na situação-problema *Palco em construção* e incorporada, posteriormente, à Vila Lângaro, a partir da revisão da análise dos dados.

⁴⁵ O conteúdo de todas as ajudas produzidas a partir da pesquisa está disponível em: <https://drive.google.com/file/d/10cnQZ2Shk0IEsQycKCEc82EaOrkD1rI-/view?usp=sharing>



Nota-se, ainda, que os procedimentos elencados no quadro 24 ampliaram os procedimentos indicados pelos especialistas, bem como a eminência de procedimentos inválidos para a abordagem da situação, como P21, P22 e P28, por exemplo. De todo modo, esses também foram considerados já que seriam indícios de elaboração de uma estratégia pautada em pressupostos equivocados ou desatenção à aplicabilidade ou não deles na situação.

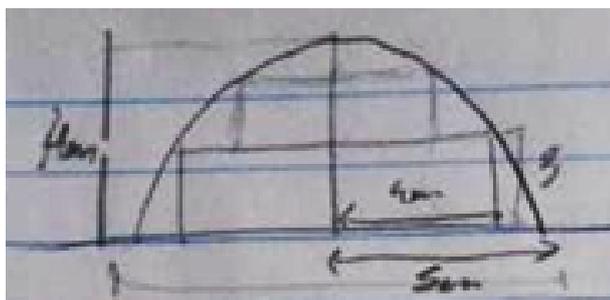
Os dados apontaram que a maior parte dos estudantes, ao final, conseguiu desenvolver procedimentos associados ao pensamento algébrico, destacando aqueles associados a E4. Contudo, cabe ressaltar uma característica percebida do grupo que participou do estudo, pois são estudantes que demonstraram facilidade de compreensão em matemática, de modo geral. O convite para participar dessa fase da pesquisa foi enviado a mais de 150 estudantes, sendo que apenas 15 aceitaram participar das entrevistas. Uma entrevista síncrona, gravada, com um professor de matemática acompanhando o processo de resolução das atividades e questionando pode intimidar a participação dos estudantes. Pode-se supor, portanto, que esses 15 participantes são estudantes que desenvolveram, no decorrer de sua vida escolar, certa confiança acerca de suas competências para resolver problemas em matemática, bem como atitudes de enfrentamento a situações novas. Isso evidencia-se no texto a seguir.

Dois estudantes A4 e A10 realizaram tentativa utilizando a estratégia E1. A estratégia E1, de modo predominante, indica uma abordagem exploratória da situação-problema, por meio de raciocínio baseado em elementos geométricos, utilizando conceitos e fórmulas pré-definidas associados a figuras planas, por exemplo. Esses estudantes tentaram obter alguma relação utilizando cálculo de áreas ou de medidas lineares de figuras planas (triângulo, retângulo, círculo, quadrado, trapézio, etc.). Cabe destacar que outros alunos também “navegaram” por procedimentos que apontavam E1, contudo, não finalizaram essa tentativa e, portanto, não foram enquadrados aqui.

A4 inicia realizando procedimentos inerentes a estratégia E3, que será a seguir explorada. Contudo, apesar de acreditar ser possível seguir por essa estratégia, percebe que dará muito trabalho e afirma: *“Será que... tipo é possível, mas vai dar muito trabalho. Não sei se eu sigo ou peço uma dica”* (Vila Lângaro, A4).

Direcionou, então, sua abordagem à aspectos geométricos (conforme Figura 22) mesmo afirmando não ter certeza da validade dessa abordagem: *“uma relação que eu não sei se é válida... Fiquei com esse retângulo desenhado de três metros e quatro metros. Eu conseguia fazer um terceiro retângulo em cima.[...] E aí minha hipótese seria conseguir a área desses três retângulos, né?”* (Vila Lângaro, A4).

Figura 22: Representação de A4 para Vila Lângaro

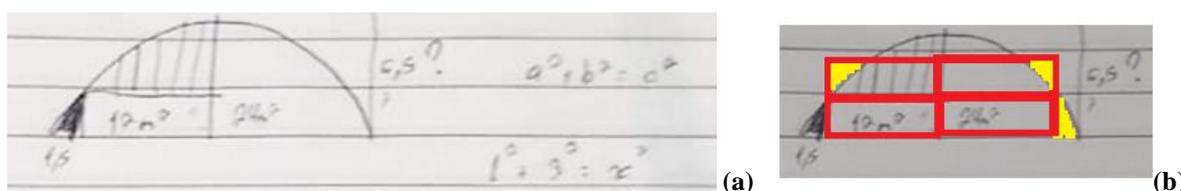


Fonte: dados da pesquisa.

Com essa estratégia A4 chega a conclusão de que a altura procurada deveria ser maior do que seis metros, pois “*mesmo construindo um outro retângulo de mesma altura, ainda restaria espaço entre esse retângulo e o topo do pórtico*”, uma vez que tentou estabelecer relações com a área desses retângulos pensando em incluir, acima, outro igual (ou metade dele) para estimar a altura.

A10 pensou de modo semelhante (Figura 23a): “*ali naquele primeiro pedacinho cinza embaixo, eu vou calcular ele como um triângulo, tá? Apesar da linha ser um pouco curvada ali, né? Acredito que vai dar certo e aí eu vou ter a base dele um e a altura três*”. Nesse momento sua hipótese é calcular a área daquele “triângulo”. Entretanto, seus registros apontam para a utilização do Teorema de Pitágoras, o que não condiz com o discurso.

Figura 23: Representação de A10 para Vila Lângaro



Fonte: dados da pesquisa.

Em seguida, A10 elabora uma nova hipótese recorrendo à visualização gráfica, representada na Figura 23 (b), obtendo uma aproximação para a altura buscada.

[...] eu não sei se chega a ser uma possibilidade, não sei se funciona, mas eu acho que eu tentaria duplicar aquela faixinha ali onde tem uns 4 metros. Me parece que a parte que sobraria pra fora, na lateral assim, é a parte que fica pra fora da parábola. Eu não sei se ela seria, mas me parece uma medida bem semelhante à daquele triangulozinho bem da ponta ali que eu tinha calculado a área dele ali no início. Aí eu já teria então no caso ali os seis metros de altura da parábola. (Vila Lângaro, A10)

Os caminhos trilhados por A4 e A10 evidenciam uma estratégia amparada fortemente na percepção visual por meio dos procedimentos P21 e P22, hipótese que não contempla aspectos algébricos. Desse modo essa tentativa, enquadrada na estratégia E1, levou esses estudantes a obterem medidas aproximadas para a altura buscada. As ajudas geradas, fornecidas durante a entrevista inspirada no método clínico na medida em que o próprio estudante demandava ou aquelas que eles apontavam que seus colegas poderiam ter, indicaram dificuldades comuns. Para esses dois estudantes, observou-se a não associação imediata da imagem fornecida à representação gráfica de uma função. O objetivo da situação-problema também precisou ser retomado para o traçado de um caminho de resolução (PN1) e objeções acerca da possibilidade de utilizar abordagem geométrica para a resolução da situação (QR1) e expõe um impasse enfrentado pelos estudantes.

Outro estudante, A6, também inicia desenvolvendo procedimentos inerentes a E1, porém sua primeira tentativa conclui-se por E2, assim como o processo de resolução adotado por A3. Essa estratégia revela uma abordagem gráfica por associação à outra situação-problema, por meio do reconhecimento de características dessa representação gráfica. Nessa perspectiva, os procedimentos utilizados pelos estudantes A3 e A6 pautaram-se, principalmente, na comparação entre situações semelhantes (P7) com transposição de processos de uma situação a outra (memória recente), por repetição ou reconhecimento, no entanto, não se pode garantir que os procedimentos inerentes tenham sido generalizados. Tampouco, que os mesmos esquemas sejam mobilizados diante de uma situação desvinculada de um contexto que direcione as ações. Ambos os estudantes (A3 e A6) já haviam trabalhado com a situação-problema *Praça dos Arcos* e tentaram usar a lei da função lá fornecida ($y = 9 - x^2$) e a representação gráfica para obter a altura do pórtico dessa situação em análise (P1, P5).

[...] eu tô pensando em utilizar aquela equação do primeiro exercício. O que tu acha?" (Vila Lângaro, A3)

[...] eu percebi isso, que a equação que foi dada na questão 2 [Praça dos Arcos] [...] eu posso, de repente, utilizar ela. Essa fórmula que tem na questão dois ela seria uma fórmula específica, então de repente não daria pra fazer ela daí, cada uma das equações, dependeria principalmente daquele número que tá ali na frente do x que é o nove no caso da questão dois, né? Daí esse nove seria diferente, daria um formato de parábola diferente, né? Daí o gráfico também seria diferente" (Vila Lângaro, A6).

Os dois alunos reconhecem que a fórmula não seria exatamente a mesma, contudo, podem associar a forma e utilizá-la no novo contexto (P6), inclusive reconhecendo que o coeficiente b da lei da função quadrática do $f(x) = ax^2 + bx + c$ seria nulo. Contudo, A3 reconheceu isso em função da associação realizada, pois nenhuma evidência direcionou à uma

abordagem algébrica da situação, o que implicaria o estudo dos coeficientes da forma algébrica citada, por exemplo. Os dois alunos falaram que não se tratava da mesma lei funcional, mas utilizaram essa forma atribuindo ao coeficiente b o valor zero já que os gráficos, por eles considerados, não estavam deslocados em relação ao eixo x , de igual modo à situação-problema em comparação. Assim, “*considerando a fórmula aqui, o y também seria igual a nove como na outra questão, porque o x [x do ponto, nesse caso] equivale a zero. E o y igual a nove, eu somo com três metros do retângulo [altura do retângulo branco da imagem]. E daí ficaria a altura igual a doze metros*” (Vila Lângaro, A3).

Assim, também esses estudantes obtiveram, nessa tentativa, uma medida (12 m) aproximada para a altura do pórtico. Durante o processo foram geradas três ajudas comuns a A3 e A6. Duas delas direcionando a análise e constituição da representação gráfica da função quadrática (DR1 e DR2) e a terceira com o intuito de promover a reflexão acerca de quais conceitos eram aplicáveis à situação (QR2). Essa última, aponta uma dificuldade para julgar a pertinência dos conceitos relacionados, o que pode indicar algum obstáculo (BACHELARD, 2005; BROUSSEAU, 1983) que dificultou a escolha competente (MACHADO, 2002; 2006; 2010; PERRENOUD, 1999) dos recursos disponíveis ou o julgamento de sua aplicabilidade à situação, no caso.

Na estratégia E3 três estudantes foram apontados. A1, A14 e A4. O estudante A4, conforme mencionado acima, iniciou desenhando a figura, anotando as informações dadas no problema (P1) e identificou os eixos cartesianos (P3) sobre a figura. Associou à função quadrática o formato do pórtico (P5), lembrando da representação algébrica (P6), identificou as raízes (P9) e tentou localizar outros pontos (P8). A4 reconheceu a altura como o valor de y do vértice da parábola localizando-o graficamente e apontou que $f(0) = h$ (P4, P20) e buscou construir a lei da função pautado na reconstrução da fórmula de Bháskara (P26): “*tá então é uma bháskara ao contrário!*” (Vila Lângaro, A4). Contudo, desiste pois não obteve êxito de forma direta: “*Tá a ideia da bháskara ao contrário eu fui frustrado [...] Porque acho que eu demoraria demais pra fazer ela*” (Vila Lângaro, A4).

Todos os três estudantes de E3 foram capazes de localizar o eixo y no centro da parábola e identificar, a partir disso, que o valor de H correspondia ao valor de $f(x)$ da lei da função, ou seja, que $f(0) = H$ (P20). Além de P4, A1 e A15 também efetuaram, em comum, os procedimentos P3, P5, P6 e P9 e A1 e A4, os procedimentos P1, P4, P10, P14. Esses procedimentos evidenciam que esses estudantes reconhecem e associam diferentes formas de representação dos elementos abordados na situação-problema: gráfica/geométrica e algébrica/simbólica.

Em relação às ajudas, a entrevista com A1 originou PN2, PN3, PN4. Nesse caso, as dificuldades apontam dúvidas relativas à lei da função quadrática, sobre como obtê-la e representá-la graficamente. Impasses também foram evidenciados, gerando as ajudas QR1, QR4 e QR5, as quais objetivam fazer o estudante refletir acerca de como ele pode construir uma estratégia, descartando, por exemplo, procedimentos menos adequados, como àqueles que indicam E1. A4 também contou com PN4 e QR1. Além desses, outras perguntas e respostas norteadoras tiveram origem da dificuldade em compreender o que deveria ser feito para resolver a situação (PN1), sobre a própria relação funcional e sua representação no plano cartesiano (PN7) e sobre a influência dos coeficientes a e b da lei geral da função quadrática (PN9, PN4).

As ações e operações efetuadas por A4 deram origem, assim, a três dicas de resolução DR3, DR4 e DR6 que direcionam para a obtenção da lei da função e a identificação e associação entre elementos da função considerados nas representações algébrica e gráfica. DR6 surge também no processo de resolução de A15, o qual associa ainda PN9 e QR3 e dois novos questionamentos reflexivos QR6 e QR7 os quais provocam o estudante a pensar sobre como pode proceder a partir dos elementos que conhece, a fim de que possa construir ou seguir uma estratégia.

Percebe-se, assim, que os procedimentos associados a E3 exigem compreensão dos conceitos e generalização de esquemas, ações que vão além da mera associação a casos semelhantes. Nesta estratégia, é importante ter conhecimentos declarativos sobre o assunto, mas também conseguir mobilizar de forma articulada esse conhecimento diante dessa situação (PERRENOUD, 1999) mobilizando esquemas operatórios que implicam no nível global das competências cognitivas (PESTANA, 1997; 1999; PIAGET; 1987). Contudo, em E3 o estabelecimento de relações, a articulação entre conceitos e procedimentos ainda carece de maior automatização (MACHADO, 2002; 2006; 2010), o que a diferencia da estratégia E4.

Como mencionado no início dessa seção, E4 foi a estratégia que mais estudantes foram vinculados. Essa estratégia implica o reconhecimento de relações funcionais por meio da representação gráfica e a utilização de linguagem simbólica para obtenção da lei geral da função, algebricamente expressa por $f(x) = ax^2 + bx + c$. E4 aponta que o estudante conseguiu abordar de modo articulado conceitos e procedimentos e obter relações que auxiliaram na simplificação do processo de resolução da situação problema, tendo em vista o objetivo traçado diante de sua compreensão ao que lhe era solicitado.

Todos os estudantes apontados em E4 (A4 – 3ª tentativa, A5, A8, A9, A11, A12 – 1ª e 2ª tentativas, A13 – 3ª tentativa, A14, A16) realizaram procedimentos específicos (P11 e P19) que caracterizaram essa estratégia. Os estudantes conseguiram, portanto, abordar a situação

algebricamente, estabelecendo relações funcionais, identificando coordenadas de pontos no plano cartesiano e substituindo na lei geral da função polinomial de 2º grau, obtendo equações lineares (P11). Também, foram capazes de utilizar linguagem simbólica para modelar a lei da função, organizando e resolvendo um sistema linear com as equações obtidas e determinar os coeficientes a , b ou c para obter a lei da função (P19).

Como era esperado, cada estudante construiu seu próprio caminho de resolução utilizando procedimentos distintos como complementação dos citados P11 e P19. Muitos dos procedimentos identificados na estratégia E4 tem relação também com a estratégia E3: P4, P8, P9, P10, P12, P13, P14, P20, P23, por exemplo.

Além disso, percebeu-se que procedimentos não associados a E4, apenas às demais estratégias, foram importantes ações para a efetivação de E4. Todos os alunos dessa estratégia utilizaram o procedimento P5 e a maioria efetuou, ainda, P1 e P3, todos definidos como indicativo para E3, ou até mesmo E2. Essa percepção ampara, ainda, o fato de considerar E3 como uma estratégia de menor complexidade em relação à E4, mesmo que resolver a situação por outras estratégias também seja considerado válido. Isso revela que os estudantes, inicialmente, abordaram a situação-problema considerando uma perspectiva predominantemente analítica ou geométrica e que posteriormente migraram para uma estratégia mais algébrica (BACHELARD, 2005), a exemplo de A14 (Figura 24).

Figura 24: Resolução A14 para Vila Lângaro

$y = Ax^2 + Bx + C$
 $3 = A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C \Rightarrow 27A + 3B = 1$
 $0 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$
 $44 \rightarrow A \cdot 0 + B \cdot 0$
 $3 = A \cdot 3^2 + B \cdot 3 \Rightarrow A + B = 3 \Rightarrow 3A - 3B = -9$
 $27A + 3B = 1$
 $3A - 3B = -9$
 $24A = -8/3$
 $3A = -1/3$
 $A = -1/9$
 $1/9 + 3 = B$
 $10/9 = B$
 $y = -1/9 x^2 + 10/9 x \Rightarrow -25/9 + 50/9 = y$
 $25/9 = y \Rightarrow 2,777 y$

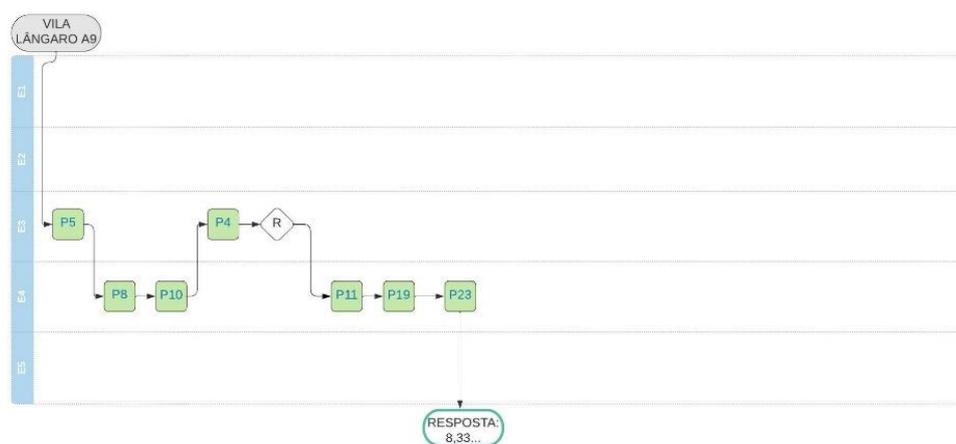
Fonte: dados da pesquisa.

Esse aspecto vai ao encontro do que preconizam estudiosos acerca do pensamento algébrico ao fazer referência a integração entre conhecimentos aritméticos, geométricos e algébricos (KAPUT, 1999; DA ROCHA FALCÃO, 1997; LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2005, CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN, 1992, 1995, 2004, 2007).

Pode-se inferir que os estudantes identificados em E4 construíram ao longo de suas vidas, habilidades e competências em lidar com problemas dessa estrutura ou, ainda, que conseguiram avançar a partir das ajudas que solicitaram, pois as dificuldades que enfrentaram associavam-se a resgate de conceitos e procedimentos específicos, os quais não lhes impediu de construir e desenvolver uma estratégia formalizada para lidar com a situação-problema *Vila Lângaro*. Observa-se, ainda, que esses estudantes conseguiram atribuir significado aos procedimentos realizados e aos resultados (parciais e final) obtidos e à utilização de conceitos formalizados e procedimentos de caráter generalizado, ou seja, transpostos de outras situações para serem aplicados, adaptados, ao contexto em caso.

Esses aspectos otimizaram o processo de resolução da situação-problema, uma vez que as relações estabelecidas tornaram as escolhas mais direcionadas ao objetivo a ser atingido, como é o caso da resolução realizada por A9, A11, A12, A14 e A16 (ver diagramas contidos no Apêndice 6). Os diagramas de A9 e A12 deixam explícito esse direcionamento otimizado da resolução em função do quantitativo de procedimentos e ajudas (Figuras 25 e 26).

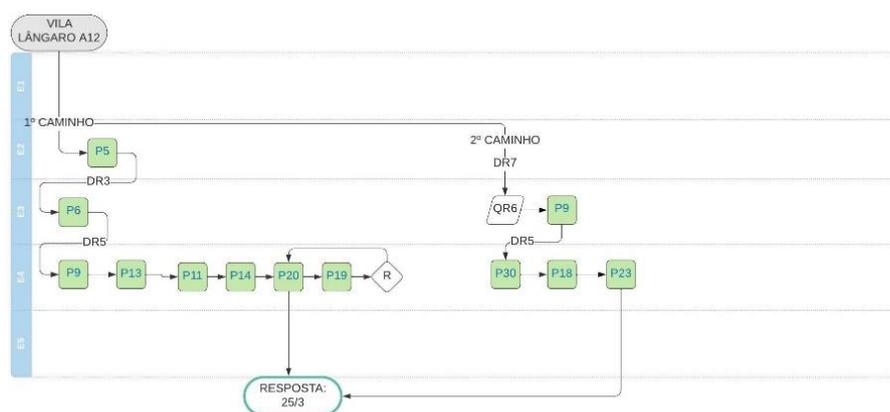
Figura 25: Diagrama A9 - *Vila Lângaro*



Fonte: dados da pesquisa.

Outros recortes a destacar nas resoluções no âmbito de E4 referem-se aos procedimentos específicos realizados por A5, A12 e A16. O único estudante que utilizou P16 e P17, procedimentos que remetem às coordenadas do vértice da parábola (Figura 27) foi A5.

Figura 26: Diagrama A12 - Vila Lângaro



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 27: Resolução A5 para Vila Lângaro

$W = \frac{-b}{2a}$ $0 = \frac{-b}{2a}$ $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$
 $(-5, 0) \text{ e } (5, 0)$ $b = 0$ $a \neq 0$
 Raízes
 $y_v = \frac{-(0^2 - 4 \cdot (-1/3) \cdot 25)}{4 \cdot (-1/3)}$
 $y_v = \frac{-100/9}{-4/3} = \frac{100/9 \cdot 3}{4} = \frac{25}{3}$
 $y_v > 0$ Se $c > 0 \rightarrow y_v = \frac{4ac}{4a} = c$
 Se $c < 0 \rightarrow y_v = \frac{-4ac}{4a} = -c$
 $(4, 3), (-4, 3)$
 $f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow ax^2 + c$
 $3 = a \cdot 4^2 + c \rightarrow 16a + c = 3$
 $-25 + c = 0 \rightarrow c = +25/3$
 $16a + 25/3 = 3 \cdot (-1) \rightarrow -16a - c = -3$
 $25a + c = 0$
 $9a = -3 \rightarrow a = -1/3$

Fonte: dados da pesquisa.

Já A12 e A16 utilizaram a forma fatorada da lei geral da função (P18), sendo que A12, recorreu, também, a expressões da soma e do produto das raízes da função quadrática que identificou graficamente (P30). As ajudas originadas dos procedimentos do grupo de estudantes incluídos em E4 estão representados no Quadro 26. Por meio dele, pode-se avaliar quais foram mais demandadas, bem como caracterizar de modo geral as estratégias, dúvidas e os impasses ligados a cada estudante entrevistado.

Quadro 26: Ajudas geradas das tentativas de E4 para *Vila Lângaro*

	A4	A5	A8	A9	A11	A12	A13	A14	A16
DR1		X			X				
DR2								X	X
DR3	X		X		X	X	X	X	
DR4		X							
DR5						X			
DR7						X			X
PN1			X						
PN3			X				X		
PN4	X	X	X				X		
PN5	X				X				
PN6		X			X		X	X	X
PN7	X	X	X		X		X	X	X
PN8			X						
PN9	X								
QR1			X						
QR2							X		
QR3			X						X
QR4					X		X		
QR5							X	X	
QR6					X	X			

Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se a diversidade de ajudas e procedimentos, o que de certo modo já era estimado, em função dos estudantes participantes serem adolescentes ou adultos, considerados operatórios formais o que amplia suas possibilidades de construção de hipóteses frente ao problema e também em função de suas experiências de vida (SILVA, FREZZA, 2011). Como trazido ao longo da fundamentação teórica do presente estudo, esse aspecto demandaria atenção, tendo em vista que o estudo das estratégias cognitivas depende da análise dos ajustes progressivos de meios para os fins almejados, ou seja, o estudo de características do sujeito psicológico (INHELDER, 1978), além da consideração de aspectos do sujeito epistêmico acerca dos elementos comuns do desenvolvimento cognitivo dos indivíduos de um mesmo nível (PIAGET, 2007).

A última estratégia evidenciada na situação-problema *Vila Lângaro* foi E5 com três estudantes: A3 (2ª tentativa), A10 (2ª tentativa) e A13 (2ª tentativa). E5 indica a construção de um caminho pautado em verificação de resultados a partir de tentativas motivadas por ideias que não necessariamente se encaixam na situação. Por vezes, tentativas associadas à proporcionalidade/regra de três foram elaboradas, evidenciando a necessidade de que diante dessa hipótese de abordagem o estudante retome os procedimentos realizados e verifique em que casos são válidos, ou seja, quando podem ser utilizados.

A3, após tentar utilizar como referência a expressão fornecida na situação-problema *Praça dos Arcos* e construir uma hipótese ($y = 12 - x^2$) para a lei da função que representaria o pórtico supondo a altura máxima igual a 12 metros, tentou verificar a validade dessa lei,

problema. Dessa forma, finaliza-se a apresentação e descrição das informações coletadas nas entrevistas com cada um dos 14 estudantes que resolveram a situação *Vila Lângaro*.

5.2.3.2 Modelo de avaliação Praça dos Arcos

Na situação-problema *Praça dos Arcos* foram vinculadas quatro estratégias, caracterizadas e codificadas como E6, E7, E8 e E9. Elas estão apresentadas no Quadro 27 junto à relação de estudantes que se vinculam às respectivas estratégias. O estudante A2 não resolveu essa situação-problema. Os diagramas dos alunos referentes a essa situação-problema podem ser visualizados no Apêndice 7.

Quadro 27: Estratégias evidenciadas para a situação-problema *Praça dos Arcos*

Ei	Caracterização	Ai
E6	Abordou o problema de modo exploratório. Apresentou dificuldades em interpretar e relacionar as informações do problema. Retomou o enunciado várias vezes na tentativa de conceber uma visualização (mental ou gráfica) do outdoor, contudo, não consegue construir de forma adequada essa representação, o que dificulta o avanço na realização dos procedimentos necessários à resolução da situação. Poderia ter explorado propriedades da função de segundo grau, tais como a intersecção com os eixos coordenados e obtenção das raízes, representando essas informações graficamente para abordar a situação em uma perspectiva geométrica/algébrica.	A10 (1ª tentativa)
E7	Essa estratégia indica que o estudante buscou construir a representação analítica/gráfica da situação elaborando tabela de valores dada a função fornecida no enunciado. Conseguiu localizar os eixos coordenados e obter os pontos de intersecção, mas não interpreta esses elementos algebricamente. Embora possa ter obtido resposta correta, provavelmente envolveu-se em um número maior de processos de resolução, exigindo maior tempo e envolvimento com a situação. Indica-se o estudo das propriedades geométricas e algébricas da função quadrática, como a identificação das raízes reais, da intersecção com o eixo y, dados que se representados graficamente auxiliarão no direcionamento do processo de resolução dessa situação-problema.	A1 A3 (1ª e 2ª tentativas) A10 (2ª tentativa) A16
E8	Essa estratégia aponta que o estudante conseguiu representar graficamente a situação, entendendo as posições relativas entre a parábola e o retângulo descrito. Identificou graficamente o eixo de simetria e conseguiu compreender ou expressar simbolicamente a relação existente entre as áreas descritas no enunciado. Utilizou a lei da função, explorando propriedades geométricas e algébricas da função, como a identificação das raízes reais, da intersecção com o eixo y e indicando esses elementos na representação gráfica. Identifica ponto de máximo da função. Explora as propriedades algébricas da função quadrática, tais como os significados que podem ser associados aos coeficientes a, b e c da lei geral da função. Contudo, pode ainda observar que outros procedimentos também poderiam ser utilizados, tais como a fatoração, já que a expressão fornecida engloba a diferença de dois quadrados, ou seja, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.	A4 A6 A8 A9 (1ª tentativa) A11 (1ª e 2ª tentativas) A13 A14 (2ª caminho)
E9	Ao considerar essa estratégia o estudante abordou a situação em uma perspectiva predominantemente algébrica. Faz uso de símbolos para representar as relações algébricas presentes na situação e para determinar os elementos necessários à sua resolução. Utiliza expressões algébricas como fatoração, as fórmulas que fornecem o valor do x do vértice e do y do vértice ou, ainda, remete ao uso de integração como técnica para obtenção da área delimitada entre a parábola e o eixo x. Consegue argumentar e resolver a situação de modo relativamente resumido, considerando as informações que consegue extrair rapidamente em função da compreensão algébrica do problema.	A5 A9 (2ª tentativa) A12 A14 (1º caminho) A15

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 28 traz a codificação e a descrição dos procedimentos (Pi) identificados na resolução de *Praça dos Arcos*. Por sua vez, o Quadro 29 apresenta a codificação das ajudas - *Dicas de resolução (DRi)*, *Perguntas e respostas norteadoras (PNi)* e *Questionamentos Reflexivos (QRi)* e indica os procedimentos que cada ajuda tende a direcionar.

Quadro 28: Procedimentos *Praça dos Arcos*

Pi	Descrição: ações demandadas/realizadas (procedimentos) <i>Praça dos Arcos</i>
P1	Representei graficamente (por esquemas, desenhos, gráficos etc.) os dados fornecidos pela situação-problema.
P2	Construí a representação gráfica por meio da atribuição de pontos aleatórios.
P3	Localizei os eixos x e y na representação gráfica (dada ou construída).
P4	Reconheci a altura como o valor de y do vértice da parábola localizando-o graficamente ou representando a altura a partir do gráfico.
P8	Localizei pares ordenados (pontos) no gráfico da função em sua representação gráfica.
P9	Identifiquei as raízes de uma função de segundo grau em sua representação gráfica.
P10	Identifiquei pontos opostos em relação ao eixo de simetria da parábola.
P12	Avaliei a concavidade da parábola e relacionei com o coeficiente a da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.
P13	Identifiquei propriedade do coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, percebi que $f(0) = c$
P14	Percebi que o coeficiente b da função quadrática é nulo ($b = 0$) quando o eixo de simetria da parábola é o próprio eixo y.
P15	Identifiquei o vértice no gráfico da função e, assim, associei a altura h ao maior valor que y poderia assumir uma vez que a parábola era côncava para baixo.
P16	Obtive a coordenada x do vértice da parábola $(x_v = -\frac{b}{2a})$.
P17	Obtive a coordenada y do vértice da parábola $(y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ ou $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$.
P18	Obtive a lei geral da função quadrática na forma fatorada $y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, identificando as raízes (x_1 e x_2) e o coeficiente a .
P20	Localizei o eixo y no centro da parábola e, a partir disso, associei o valor de h ao valor de $f(x)$ da lei da função, ou seja, $f(0) = h$.
P25	Atribuí valores de x na lei $f(x)$ da função para verificar se os pontos obtidos pertenciam à representação gráfica da função.
P27	Obtive o valor de h como sendo o $f(x_v)$ da parábola.
P31	Identifiquei que o contorno do outdoor era dado pela função $y=9-x^2$.
P32	Percebi que a expressão algébrica dada (ou obtida) correspondia, graficamente, à uma função quadrática ou de 2º grau ($y = ax^2 + bx + c$).
P33	Tive dificuldade em construir a representação gráfica associada à situação-problema a partir das informações fornecidas (ou obtidas).
P34	Obtive as medidas da base e altura e calculei a área do retângulo.
P35	Calculei a proporção indicada no enunciado para obter a área de publicidade do outdoor.
P36	Pensei em calcular área da região abaixo do arco parabólico utilizando conhecimentos de cálculo integral.
P37	Identifiquei o eixo de simetria da parábola que é gráfico da função dada.

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 29: Ajudas *Praça dos Arcos*

Código ajuda	Título da ajuda	Pi Indicados	G1	G2	G3	G4
DR1	Representação gráfica de uma função: eixo x e eixo y	P1, P2, P3, P32, P33		X		
DR2	Gráfico de uma função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)	P1, P2, P31, P32		X		
DR4	Vértice da parábola	P4, P15, P16, P17, P27, P37	X	X		
DR5	Raízes de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P9, P34, P36	X			
DR6	Ponto de máximo ou de mínimo de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P4, P15, P16, P17, P27, P34, P36		X		
DR7	A forma fatorada de um polinômio de 2º grau	P9, P18	X		X	X
DR8	Resolução de equação do tipo $x^2 - c = 0$ (sendo c um número real)	P9, P18, P34, P36	X			X
DR11	Como posso interpretar graficamente os resultados da fórmula de Bháskara?	P1, P2, P9, P10	X	X		
PN2	Que tipo de função possui gráfico em formato parabólico?	P31, P32		X		
PN3	Qual é a forma geral da função que representa essa situação?	P31, P32	X			
PN4	Que informações relativas à situação-problema podem ser obtidas considerando o eixo de simetria de uma parábola?	P3, P10, P14, P20, P37		X		
PN5	Qual é a influência gráfica do coeficiente b na lei geral de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática?	P12, P13, P14		X		
PN7	Que relação existe entre as coordenadas x e y de um ponto (x,y) do gráfico de uma função?	P2, P8, P13, P20, P25, P33		X		
PN9	Qual é a influência gráfica do coeficiente a na lei geral de uma função quadrática?	P12, P15		X		
PN10	Qual é a influência gráfica do coeficiente c na lei geral de uma função quadrática?	P13, P20		X		
PN11	Como calcular a área e o perímetro de um retângulo?	P34			X	
PN12	Será que consegui visualizar o formato desse outdoor?	P1, P34, P35, P36	X	X	X	X
PN13	Como calcular a fração de uma quantidade?	P35, P36			X	X
QR2	Que conceito(s) preciso usar nessa situação-problema?	P2, P25, P31, P32, P33, P36		X	X	X
QR3	Que informações você pode extrair do gráfico de uma função que possui formato parabólico?	P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20, P33, P34		X		
QR5	Como identificar pontos no gráfico?	P2, P10, P20, P25, P33		X		
QR8	Qual o valor de y para x igual a 3 e para x igual a -3, considerando a equação $y = -x^2 + 9$?	P8, P9, P10, P25	X			

Fonte: dados da pesquisa.

Analisando as condutas dos estudantes que elaboraram cada uma das estratégias identificadas na situação-problema *Praça dos Arcos*, nota-se que somente a primeira tentativa de A10 foi enquadrada em E6. Essa estratégia indica uma abordagem exploratória do problema. A10 iniciou a resolução tentando construir a representação gráfica da lei fornecida no enunciado por meio da atribuição de pontos aleatórios (P2), pois teve dificuldade em partir das informações fornecidas pelo próprio problema (P33). Sua tentativa o levou a obter 20m² como resposta: “*então se o meu x é dois, a base dessa minha parábola vai ser quatro e a altura é cinco [considerando a expressão $y = 9 - x^2$]. Então o retângulo, que teria a mesma área que o outdoor, teria vinte metros quadrados*” (*Praça dos Arcos*, A10).

A10 apresentou dificuldades em interpretar e relacionar as informações do problema (QR2), mesmo retomando o enunciado várias vezes na tentativa de conceber uma visualização (mental ou gráfica) do outdoor, contudo, não conseguiu construir de forma adequada essa representação, o que dificultou seu avanço na realização dos procedimentos necessários à resolução da situação. Em nenhum momento, nessa tentativa, explorou as propriedades da função de segundo grau (PN7), o que mostra que não conseguiu concatenar conceitos e procedimentos que lhe possibilitasse abordar a situação em uma perspectiva geométrica ou algébrica.

A segunda tentativa de A10, seguida da terceira, culminaram na estratégia E7 com a obtenção da resposta correta à situação (36m²). Após afirmar que a área seria 20m², ao ser questionado acerca da representação gráfica da função (DR1), para que pudesse tentar abstrair a construção geométrica adequada ao problema, A10 conseguiu construí-la (P1), tentou obter as raízes da equação, para tanto, confundindo-se com termo quadrático precedido de sinal negativo. Após obter $x = 3$ como única raiz para a equação $9 = x^2$ (um erro conceitual que gerou QR8), e ser questionado acerca do formato parabólico e da existência do eixo de simetria da parábola (PN4) conseguiu efetuar P3 e P34. Contudo, ignorou parte do enunciado e a resposta fornecida na segunda tentativa foi 54m², ou seja, apenas a multiplicação da base de medida seis pela altura nove. Ao retomar o enunciado deu-se conta da necessidade de considerar a porção $\frac{2}{3}$ da área do retângulo. Suas dificuldades em calcular $\frac{2}{3}$ de 54 originaram PN13.

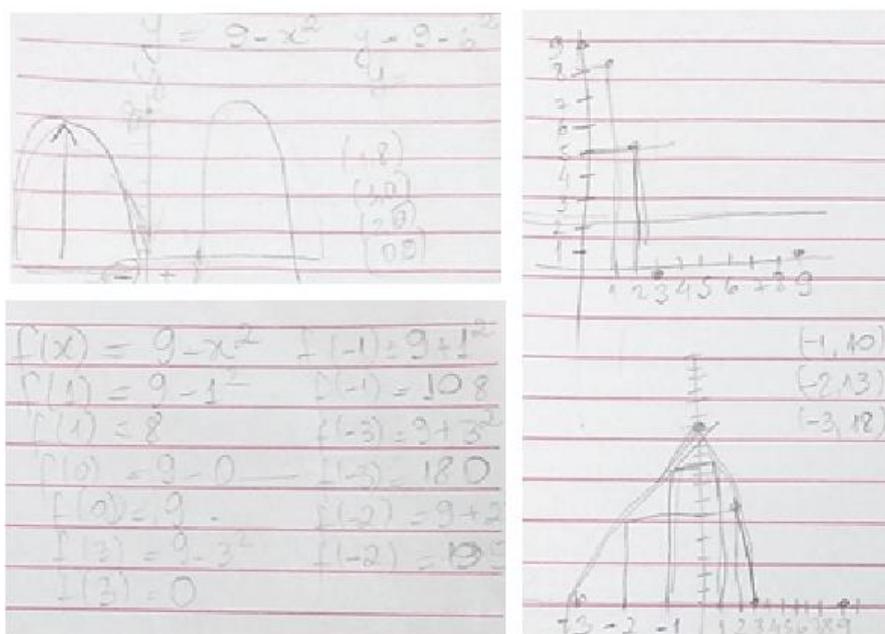
A1, A16 e as duas tentativas de A3 também indicaram a estratégia E7. Essa estratégia indica que esses estudantes, perceberam que a lei dada no enunciado correspondia a de uma função polinomial de 2º grau (P32), foram capazes de construir uma representação gráfica localizando os eixos coordenados (P3), mesmo que com alguma dificuldade (P33). Por fim, todos conseguiram obter as dimensões do retângulo referenciado no enunciado e calcular a

proporção indicada, obtendo a resposta correta ao problema. No entanto, especificidades diferenciaram os caminhos desses estudantes a exemplo de A1 que executou procedimentos um pouco mais direcionados à utilização dos elementos da representação gráfica da função, ou seja, procedimentos que poderiam indicar E8 se não fossem considerados em conjunto com as demais evidências.

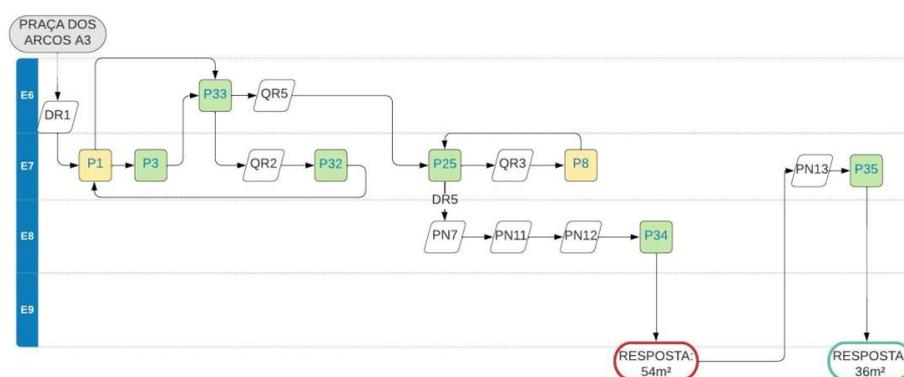
De modo geral, todos esses estudantes, incluindo a tentativa de E10, buscaram construir a representação analítica/gráfica da situação elaborando tabela de valores dada a função fornecida no enunciado, embora nem todos tenham conseguido localizar os eixos coordenados e obter os pontos de intersecção da função com eles. Apesar de terem obtido resposta correta, esses estudantes acabaram se envolvendo em um quantitativo maior de processos de resolução, a exemplo de A3, que inclusive executou procedimentos inerentes a E6, no entanto, não concluiu por meio desses, essa tentativa, além de ter demonstrado muitas dificuldades expressas em erros e lacunas ao longo da resolução. A Figura 30 e o diagrama elaborado para A3 nessa situação-problema (Figura 31) evidenciam as dificuldades desse estudante.

Percebe-se que o processo de resolução de A3 demandou bastante tempo e esforço, o que explicita a existência de lacunas, erros e o enfrentamento de obstáculos, ou ainda, carência de trabalho com mais situações-problema desse tipo para o desenvolvimento de competências cognitivas para abordar situações com essa mesma estrutura.

Figura 30: Anotações de A3 para *Praça dos Arcos*



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 31: Diagrama de A3 para *Praça dos Arcos*

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 30 traz a relação das ajudas necessárias ou geradas a partir das tentativas dos estudantes em E7, no qual também se evidencia A3 e as dificuldades que puderam ser apontadas ao longo de sua entrevista clínica. Através desse quadro percebe-se, ainda, que todos os estudantes recorreram a PN13, que indica uma dúvida acerca de como calcular uma fração de uma quantidade, mesmo sendo um tópico de matemática elementar (geralmente trabalhado desde as séries finais do ensino fundamental). Esse seria um ponto de retomada para o docente, no caso de uma sala de aula, pois trata-se de apenas ajustar um caminho, relembrar um processo e isso auxiliará os estudantes na resolução dessa e de outras situações que demandarão do mesmo esquema.

Quadro 30: Ajudas geradas das tentativas de E7 para *Praça dos Arcos*

	A1	A3	A10	A16
DR1	X	X	X	
DR2	X			
DR5		X		
PN2	X			
PN4			X	
PN7		X		
PN11		X		
PN12	X	X		X
PN13	X	X	X	X
QR2		X		
QR3	X	X		X
QR5		X		X
QR8			X	X

Fonte: dados da pesquisa.

Isso isoladamente não indica ausência de competência cognitiva desses estudantes, mas sim a não assimilação ou reconhecimento de um recurso, no caso, um conhecimento procedural

acerca de como calcular $\frac{2}{3}$ de uma quantidade. Assim como PN13, outras ajudas evidenciaram dificuldades inerentes a execução de procedimentos específicos (QR5 e QR8, por exemplo) e outras referiam-se ao entendimento da aplicabilidade de determinados conceitos à situação (PN2, PN4, PN7 e QR2 para exemplificar).

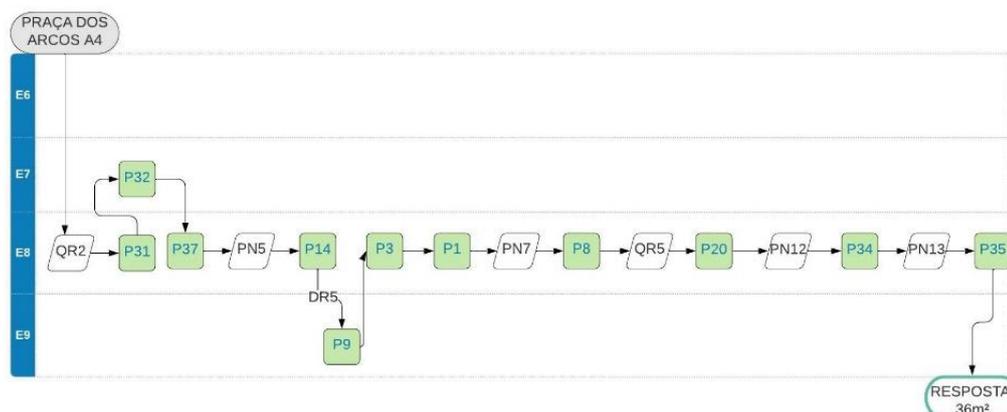
A próxima estratégia analisada é a E8, que contempla o maior quantitativo de tentativas por parte do grupo de estudantes participantes da pesquisa: A4, A6, A8, A9 (1ª tentativa), A11 (1ª e 2ª tentativas), A13 e o segundo caminho de resolução de A14 (Quadro 31). De modo geral, os estudantes que elaboraram essa estratégia conseguiram representar graficamente a situação (P1), entendendo as posições relativas entre a parábola e o retângulo descrito, sendo capazes de identificar graficamente o eixo de simetria (P37), expressando simbolicamente a relação existente entre as áreas descritas no enunciado (P31). A estratégia aponta a exploração da lei da função, as propriedades geométricas e algébricas (P8, P9, P10, P12, P15). Contudo, os estudantes ainda poderiam ter recorrido a expressões como fatoração para agilizar o processo de resolução, por exemplo, ou ainda realizar procedimentos de matemática avançada como o cálculo de integrais para determinar a área, no caso dos estudantes que já tiveram contato com essa matemática de nível superior. De todo modo, os seis estudantes conseguiram obter o resultado correto utilizando P34 e P35 e a maioria deles demonstrou compreender os conceitos e procedimentos utilizados, representados no Quadro 31.

Quadro 31: Procedimentos de E8 em *Praça dos Arcos*

	A4	A6	A9 (1ª tentativa)	A11 (1ª e 2ª tentativa)	A13	A14 (2º caminho)
P1	X	X	X	X	X	
P3	X		X		X	
P8	X					
P9	X	X	X	X	X	
P10		X			X	X
P12			X	X		
P14	X					
P15		X	X			
P20	X	X			X	
P31	X	X	X	X		
P32	X		X	X	X	
P33			X	X		
P34	X	X	X	X	X	X
P35	X	X	X	X	X	X
P37	X	X		X	X	

Fonte: dados da pesquisa

O quantitativo de procedimentos realizados, contudo, ainda foi grande, o que aponta que os estudantes foram construindo o caminho de resolução, solicitando auxílios para sanar dúvidas e enfrentar os impasses emergentes. O caminho de A4 (Figura 32) exemplifica essa afirmação.

Figura 32: Diagrama de A4 para *Praça dos Arcos*

Fonte: dados da pesquisa.

Em relação às principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes, nesse caso, tem-se também um ponto em comum (Quadro 32): todos os estudantes questionaram acerca do formato do outdoor (PN12), talvez por ser algo não comum, já que os outdoors normalmente são painéis retangulares. Nesse caso, a contextualização realizada pode tê-los confundido. No mais, PN4, PN13 e QR2 foram também ajudas frequentes entre esses estudantes, as quais repetem-se em relação às dificuldades identificadas em E7.

Quadro 32: Ajudas geradas das tentativas de E8 para *Praça dos Arcos*

	A4	A6	A9 (1ª tentativa)	A11 (1ª e 2ª tentativa)	A13	A14 (2º caminho)
DR2			X	X		
DR5	X					
DR6			X			
DR8		X		X		
PN2			X			
PN4		X		X	X	X
PN5	X					
PN7	X					
PN9			X	X		
PN11		X				
PN12	X	X	X	X	X	X
PN13	X			X	X	
QR2	X	X		X		
QR3		X	X			
QR5	X					
QR8		X			X	

Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 33 e o diagrama de A11 (Figura 34) representam alguns processos que puderam ser identificados na estratégia E8 da situação-problema *Praça dos Arcos*.

Figura 33: Anotações de A11 para Praça dos Arcos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot (-1) \cdot 9}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{\sqrt{36}}{-2} \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow x_1 = +6 = -3$$

$$x_2 = -6 = 3$$

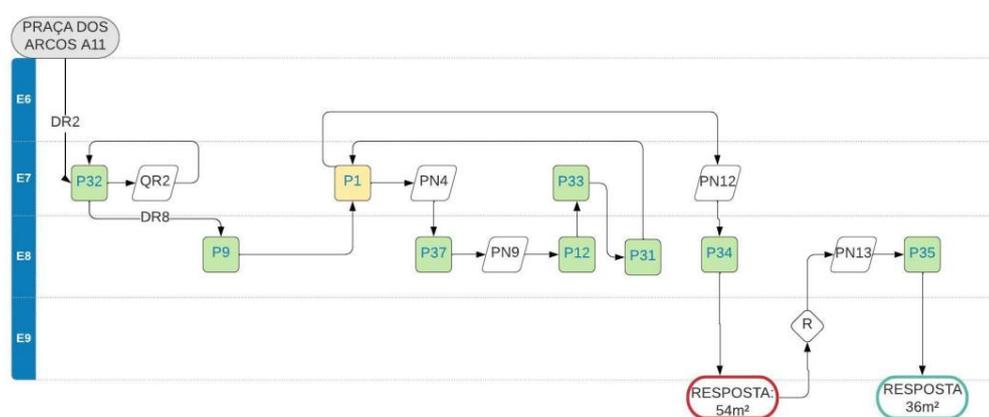
$$\frac{y}{x} = \frac{9}{9} = 1$$

$$54 \text{ m}^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{108}{3} = 36 \text{ m}^2$$

Fonte: dados da pesquisa.

Figura 34: Diagrama de A11 para Praça dos Arcos



Fonte: dados da pesquisa.

Por fim a estratégia E9 comporta cinco tentativas: A5, A9 (2ª tentativa), A12, A14 (2º caminho) e A15. Essa implica a realização de procedimentos predominantemente algébricos, os quais demandaram a mobilização de esquemas operatórios e conhecimentos formais, construídos, possivelmente, ao longo da vida por cada estudante por meio de sucessivos níveis de abstrações reflexionantes (PIAGET, 1995). Pode-se, por exemplo, obter a área de propaganda do outdoor recorrendo ao cálculo de uma integral definida (P36), utilizando expressões em sua forma fatorada (P18) ou as que fornecem os valores para de x_v e y_v diretamente (P16 e P17).

As tentativas enquadradas em E9 englobam uma quantidade relativamente pequena de procedimentos de resolução, em função de os estudantes conseguirem mobilizar recursos necessários à resolução de modo praticamente automatizado, considerando a compreensão das relações geométricas/algébricas do problema. A12, por exemplo, não fez nenhuma anotação para resolver essa situação-problema e seu modo de pensar gerou DR7. Oralmente, A12 argumentou que precisava “calcular a altura e a base, a altura é nove e a base é seis pela

equação, que quando o x é 3 ou -3 ele (y) dá zero, porque $9 - x^2$ é $x - 3$ vezes $x + 3$. Então essa área será dois terços de base seis e altura nove. Então dois terços de seis vezes nove que é trinta e seis, trinta e seis metros quadrados, é isso” (Praça dos Arcos, A12).

Por sua vez, as anotações de A15 na Figura 35, expõem o seu modo enxuto de resolução.

Figura 35: Resolução Praça dos Arcos por A15

$$y = 9 - x^2 = -x^2 + 9$$

$$A_p = \frac{2}{3} A_r$$

$$A_p = \frac{2}{3} 54 = 36 \text{ m}^2$$

$$A_r = b \cdot h = 6 \cdot 9 = 54$$

Fonte: dados da pesquisa.

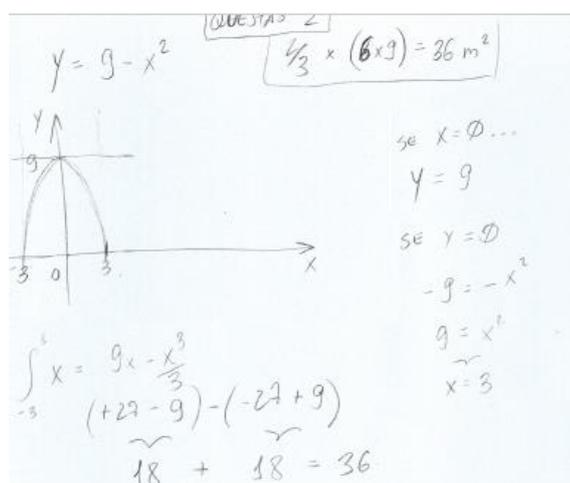
A argumentação de A15 também é trazida abaixo porque indica a competência cognitiva desse estudante na resolução de situações-problema desse tipo.

É uma função que descreve uma parábola, informação primordial para a resolução. Então $y = 9 - x^2$ que seria igual $-x^2 + 9$ pra colocar em ordem, na ordem convencional. [...] ele pergunta qual é a área do outdoor, mas ele já dá uma equivalência com a área de um retângulo, já vai simplificar bastante, já que a área de uma parábola seria bem complicada, teria que usar uma equação e usar integrais, né? Conhecimentos de integrais. Mas aqui ele já relaciona com a área de um retângulo com base e altura iguais a do outdoor da parábola ali, então já facilita bastante, já dá a própria função. [...] Vou ter que descobrir menos informações, né? Vou ter que abrir menos caminhos, já vai ter caminhos mais óbvios na minha frente. [...] Eu já ouvi, já vi, algumas coisas relacionadas com parábolas que tinham apenas os coeficientes a e c [...] vídeos de resolução de exercício, de curiosidades e tal. [...] ele [vídeo] disse também que a parábola é simétrica, então eu já posso pensar também no eixo y ali dividindo a parábola ao meio, ou seja, ela tá com deslocamento zero no eixo x . [...] Hoje eu posso descrever isso de uma forma matemática que a área da parábola é igual a dois terços da área de um retângulo. [...] esse retângulo, tendo a base e a altura iguais a base e a altura do outdoor então poderia desenhar isso pra ficar mais simples de ver [...] Pela função eu já consigo ver de cara os limites dessa parábola né? As raízes são 3 e -3 já que são esses pontos que vão tornar o $y=0$. Então eu já tenho a base da parábola. Agora faltaria achar a altura que seria simplesmente igualar o x a zero, já que eu já compreendi que ela não tem um deslocamento no eixo x . Então, a altura vai ser nove. O h no caso da parábola. Então eu já tenho uma base de tamanho seis, que vai de -3 a 3, então eu já poderia calcular aqui a área do retângulo pra posteriormente calcular a área da parábola. Então a área do retângulo é base vezes altura, a base é seis e altura é nove que dá cinquenta e quatro, essa é a área do retângulo. E eu sei que a área da parábola que é o que eu quero descobrir é dois terços disso, área da parábola é dois terços de cinquenta e quatro. Quando eu vou fazer uma fração de um número eu sempre divido e depois multiplico. Aí eu consigo fazer de cabeça: cinquenta e quatro [dividido] por três vezes dois [...] Então a área da parábola é trinta e seis metros quadrados (Praça dos Arcos, A15).

Nota-se que além de extrair as informações do problema, A15 traz referências a situações semelhantes e conhecimentos que desenvolveu por meio de sua própria necessidade de busca e estudo que lhe possibilitaram concluir mais facilmente essa situação-problema. A15 não necessitou de nenhuma ajuda e utilizou linguagem simbólica para representar as relações algébricas presentes na situação e para determinar os elementos necessários à sua resolução.

A14 também reconheceu que poderia usar integrais para resolver essa situação-problema e foi o 1º caminho que realizou (Figura 36).

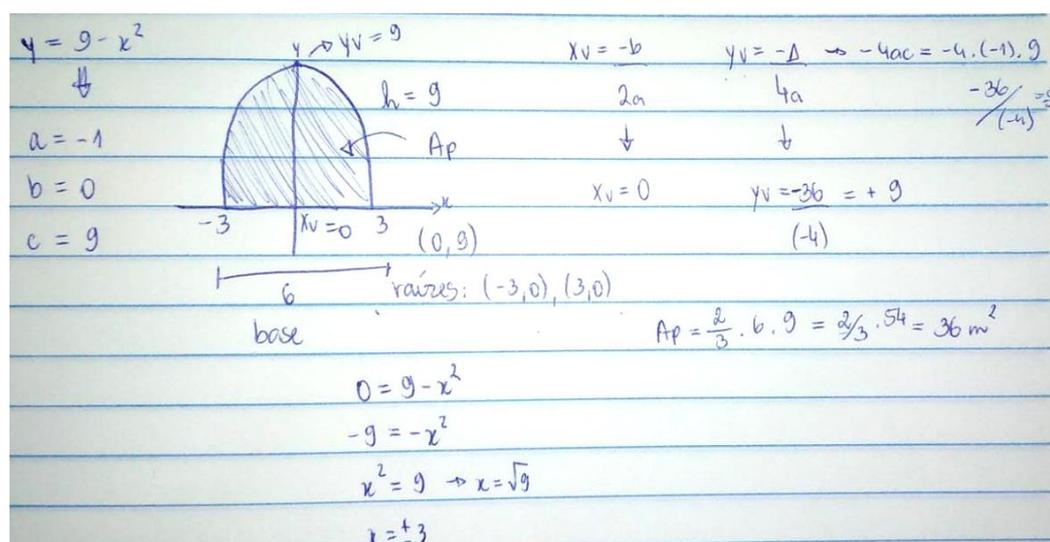
Figura 36: Resolução A14 por *Praça dos Arcos*



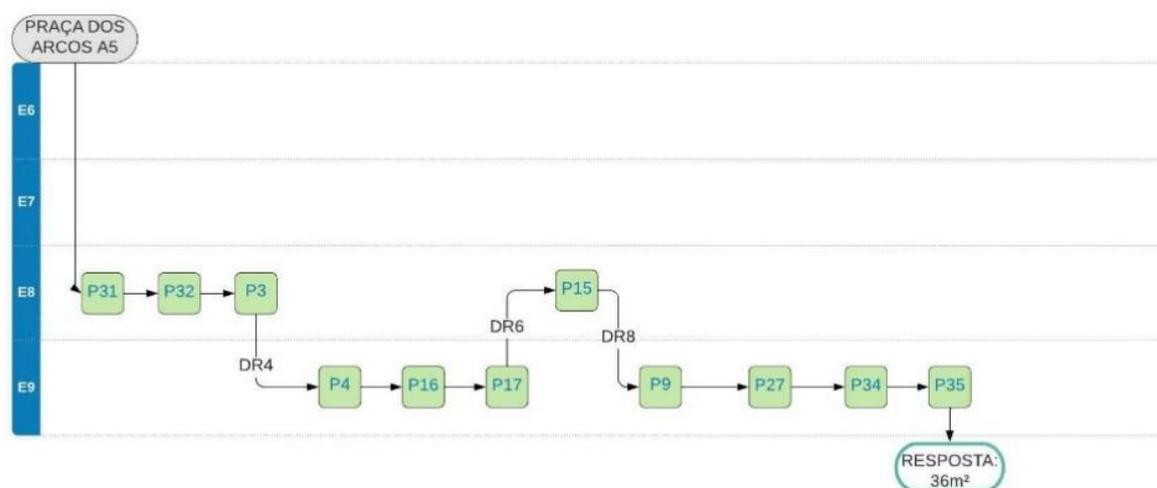
Fonte: dados da pesquisa.

O estudante A9 ao final de sua primeira tentativa deu-se conta que poderia ter usado integrais para resolver a situação e resolveu tentar para fazer uma prova real do resultado obtido. Destaca-se que A9 e A14 são estudantes do curso superior de automação industrial, onde os conhecimentos de cálculo diferencial e integral são bastante requeridos desde o princípio e, possivelmente por isso, suas tentativas de resolução tenham considerado uso de integrais, por se tratar de conteúdo mais próximo de suas vivências atuais, ou seja, competências exigidas nesse âmbito, conforme Machado (2002).

A5, por sua vez, adotou um caminho diferente, recorrendo aos procedimentos P15, P16, P17 e P27 que tratam da utilização de expressões algébricas que fornecem as coordenadas do x_v e y_v (Figuras 37 e 38). Ele resolveu essa situação após ter resolvido a anterior (*Vila Lângaro*) cujo caminho de resolução construído também havia considerado esse conteúdo, sendo que isso possivelmente o direcionou nas escolhas dos procedimentos para abordar imediatamente essa situação seguindo o mesmo raciocínio.

Figura 37: Resolução de A5 para *Praça dos Arcos*

Fonte: dados da pesquisa.

Figura 38: Diagrama A5 - *Praça dos Arcos*

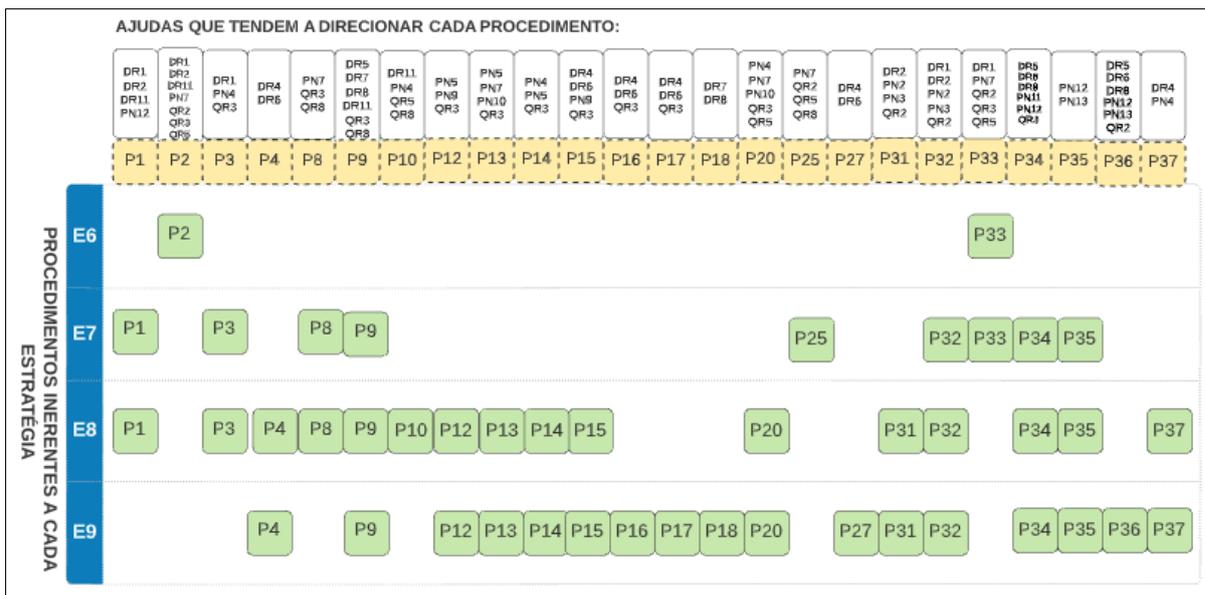
Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, observa-se que em E9 houve um baixo quantitativo de ajudas do tipo PN_i (apenas PN₄ e PN₁₂ por parte de A14), nenhuma ajuda do tipo QR_i e, que em função das diferentes formas de resolução, houve quatro dicas de resolução relacionadas à E9: DR₄, DR₆, DR₇ e DR₈, essas também associadas a situação *Vila Lângaro*. Com base na análise e codificação dos dados elaborou-se o modelo de avaliação para a situação-problema *Praça dos Arcos*, que relaciona as estratégias, procedimentos e ajudas e está apresentado na Figura 39.

Destaca-se que os procedimentos P5, P6, P7, P11, P19, P21, P22, P23, P24, P26, P28, P29 e P30 pertenciam ao modelo de avaliação da situação-problema *Vila Lângaro*, mas não

fazem parte do conjunto inerente à *Praça dos Arcos*, pois tratava-se de procedimentos específicos voltados ao contexto do problema, por exemplo. Destarte, o mesmo ocorre com a listagem de ajudas correspondentes a cada situação. Nesse sentido, destaca-se DR11 que foi identificada na situação *Palco em construção* (próxima seção), mas que por ser adequada às precedentes, foi a elas incorporada.

Figura 39: Modelo para avaliação da situação-problema *Praça dos Arcos*



Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

5.2.3.3 Modelo de avaliação *Palco em construção*

Para a situação-problema *Palco em construção* foram diferenciadas, também, quatro estratégias, caracterizadas e codificadas como E10, E11, E12 e E13. Elas estão apresentadas no Quadro 33 junto à relação de estudantes a elas vinculados. O estudante A3 não resolveu essa situação-problema.

O Quadro 34 traz a codificação e a descrição dos procedimentos (P_i) identificados na resolução de *Palco em construção*.

Por sua vez, o Quadro 35 apresenta a codificação das ajudas - *Dicas de resolução* (DR_i), *Perguntas e respostas norteadoras* (PN_i) e *Questionamentos Reflexivos* (QR_i) e indicados os procedimentos que cada ajuda tende a direcionar.

Quadro 33: Estratégias mapeadas para a situação-problema *Palco em construção*

Ei	Caracterização	Ai
E10	O estudante pautou sua estratégia em uma abordagem exploratória ou analítica com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, cálculo da área do palco. Os procedimentos não remetem à busca por relações algébricas entre a área do palco e as medidas das laterais em função da quantidade de placas de led disponíveis.	A4 A14
E11	A estratégia elaborada possibilita a associação entre as variáveis presentes na situação-problema. Os procedimentos utilizados buscam associar os conceitos de perímetro e área. Algumas representações simbólicas dessas relações são estabelecidas. Contudo, a maximização da área não é alcançada a partir de argumentação algébrica, recorrendo à cálculos analíticos como tentativa de resolução das expressões que representam as relações percebidas. Assim, a área do palco não é tratada enquanto função da medida dos lados que devem ser constituídos pelas placas de led, embora equações possam ter sido obtidas.	A1 A5 A6 A8 A9 A10 A13 A15 (1º caminho)
E12	Estratégia baseada em argumentação geométrica com representação algébrica. Indica a obtenção da relação, interpretada enquanto função, que fornece a área do palco a partir da medida dos lados que devem ser constituídos pelas placas de led. Contudo, a argumentação predominante baseia-se em conhecimentos geométricos (procedimentais e conceituais), ou seja, não são explorados em geral, os aspectos funcionais dessa relação, como ponto de máximo, obtenção do vértice da função quadrática correspondente etc.	A2 A11
E13	Estratégia pautada, principalmente, na representação e argumentação algébrica. Indica a obtenção e compreensão da relação funcional que fornece a área do palco a partir da medida dos lados que devem ser constituídos pelas placas de led. A argumentação tende a utilizar conhecimentos (procedimentais e conceituais) algébricos que possibilitam utilizar conceitos e procedimentos generalizados, transpostos de outras situações, ou seja, remete à forma geral da função quadrática correspondente. Assim, a argumentação associa elementos da representação gráfica e algébrica, explorando as propriedades características da relação funcional encontrada.	A12 A15 (2º caminho) A16

Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 34: Procedimentos *Palco em construção*

Pi	Descrição: ações demandadas/realizadas (procedimentos) <i>Palco em construção</i>
P1	Representei graficamente (por esquemas, desenhos, gráficos etc.) os dados fornecidos pela situação-problema.
P2	Construí a representação gráfica por meio da atribuição de pontos aleatórios.
P3	Localizei os eixos x e y na representação gráfica (dada ou construída).
P8	Localizei pares ordenados (pontos) no gráfico da função em sua representação gráfica.
P9	Identifiquei as raízes de uma função de segundo grau em sua representação gráfica.
P10	Identifiquei pontos opostos em relação ao eixo de simetria da parábola.
P12	Avaliei a concavidade da parábola e relacionei com o coeficiente a da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.
P13	Identifiquei propriedade do coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, percebi que $f(0) = c$
P16	Obtive a coordenada x do vértice da parábola $(x_v = -\frac{b}{2a})$.
P17	Obtive a coordenada y do vértice da parábola $(y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ ou $y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a})$.
P25	Atribuí valores de x na lei $f(x)$ da função para verificar se os pontos obtidos pertenciam à representação gráfica da função.
P32	Percebi que a expressão algébrica dada (obtida) correspondia, graficamente, à uma função quadrática ou de 2º grau ($y = ax^2 + bx + c$).
P33	Tive dificuldade em construir a representação gráfica associada à situação-problema a partir das informações fornecidas (ou obtidas).
P34	Obtive as medidas da base e altura e calculei a área do retângulo.
P37	Identifiquei o eixo de simetria da parábola que é gráfico da função dada.
P38	Associei o prisma reto retângulo a um paralelepípedo com área da base dada por $A \times B$ e altura h .
P39	Escrevi a expressão que fornecia o perímetro do palco ($2A + 2B = 100$)
P40	Identifiquei que deveria calcular a área utilizando: $\text{área} = A \times B$.
P41	Obtive a função y que fornece a área do palco em função do lado: $y = A(50 - A)$ ou seja: $y = 50A - A^2$ ou $f(A) = 50A - A^2$.
P42	Obtive a função y que fornece a área do palco em função do lado A : $y = (50 - B)B$, ou seja, $y = 50B - B^2$ ou $f(B) = 50B - B^2$.
P43	Calculei a área lateral do palco em função da quantidade de placas de led disponíveis e considerando as medidas A e B , obtendo $2Ah + 2Bh = 100h$.
P44	Percebi que $A+B=50$
P45	Identifiquei que A e B podiam assumir valores entre 0 e 50.
P46	Atribuí valores aleatórios para A (e, conseqüentemente, para B) para obter a área $A \times B$ máxima.
P47	Considereei como hipótese inicial que a maior área seria obtida quando os lados fossem iguais, antes de considerar a relação expressa pelas variáveis do problema.
P48	Avaliei o vértice da parábola para identificar a medida de um dos lados (representado no eixo x) que fornecia a maior área (no eixo y).
P49	Identifiquei que $A+B=50$ e que na medida em que os valores de A ou B se distanciam de 25 a área $A \times B$ diminui.
P50	Usei a propriedade que diz que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o de maior área é o quadrado.
P51	Identifiquei que a diferença, em módulo, entre as medidas dos lados obedece a uma relação linear e que o maior valor da área ocorre quando essa diferença é nula, ou seja, quando $A=B=25$.

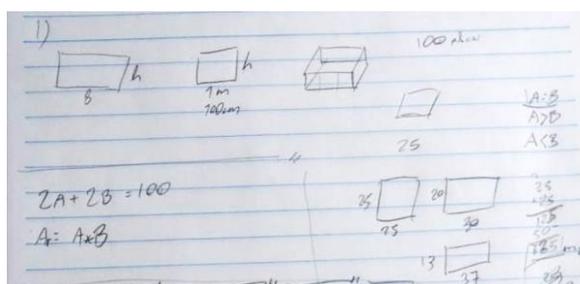
Fonte: dados da pesquisa.

Quadro 35: Ajudas *Palco em construção*

Código ajuda	Título da ajuda	Pi Indicados	G1	G2	G3	G4
DR1	Representação gráfica de uma função: eixo x e eixo y	P1, P2, P3, P32, P33		X		
DR2	Gráfico de uma função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)	P1, P2, P32		X		
DR4	Vértice da parábola	P16, P17, P37, P48	X	X		
DR5	Raízes de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P9, P34, P45	X			
DR6	Ponto de máximo ou de mínimo de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P16, P17, P34, P48		X		
DR7	A forma fatorada de um polinômio de 2º grau	P9, P41, P42	X		X	X
DR9	Resolução de equação do tipo $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 - bx = 0$	P9, P34, P41, P42	X			X
DR10	Como resolver problema de máximos e mínimos em situações-problema?	P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51	X			
DR11	Como posso interpretar graficamente os resultados da fórmula de Bháskara?	P1, P2, P9, P10	X	X		
PN2	Que tipo de função possui gráfico em formato parabólico?	P32		X		
PN3	Qual é a forma geral da função que representa essa situação?	P32	X			
PN4	Que informações relativas à situação-problema podem ser obtidas considerando o eixo de simetria de uma parábola?	P3, P10, P37, P48		X		
PN5	Qual é a influência gráfica do coeficiente b na lei geral de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática?	P12, P13, P48		X		
PN7	Que relação existe entre as coordenadas x e y de um ponto (x, y) do gráfico de uma função?	P2, P8, P13, P25, P33		X		
PN9	Qual é a influência gráfica do coeficiente a na lei geral de uma função quadrática?	P12, P48		X		
PN10	Qual é a influência gráfica do coeficiente c na lei geral de uma função quadrática?	P13		X		
PN11	Como calcular a área e o perímetro de um retângulo?	P34, P40, P46, P50			X	
PN14	O que é um prisma reto retângulo?	P38, P43, P46, P47, P49			X	X
PN15	O que diferencia um retângulo de um quadrado?	P34, P38, P39, P40, P46, P47, P49, P50			X	X
PN16	Como obter uma expressão que forneça a maior área do palco?	P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51	X	X	X	X
QR3	Que informações você pode extrair do gráfico de uma função que possui formato parabólico?	P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34		X		
QR5	Como identificar pontos no gráfico?	P2, P10, P25, P33		X		
QR9	O que devo considerar em problemas de maximização?	P1, P8, P41, P42, P48	X	X	X	X

Fonte: dados da pesquisa.

A primeira estratégia identificada para a situação *Palco em construção* (E10) indica que os estudantes A4 e A14, no caso, pautaram suas estratégias em uma abordagem exploratória ou analítica com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, cálculo da área do palco (P46). Os dois estudantes consideraram como hipótese inicial que a maior área seria obtida quando os lados fossem iguais, e depois testaram valores próximos a 25 para confirmar sua hipótese (P47). A Figura 40, com a resolução de A4, exemplifica a estratégia E10.

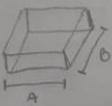
Figura 40: Resolução de A4 - *Palco em construção*

Fonte: dados da pesquisa.

Dessa forma, os procedimentos realizados por A4 e A14 não remeteram à busca por relações algébricas entre a área do palco e as medidas das laterais em função da quantidade de placas de led disponíveis. Em relação às dúvidas, o conceito de prisma reto retângulo foi apontado (PN14) tanto por A4 quanto A14. A4 questionou também as expressões que fornecem a área e o perímetro de um retângulo (PN11) para diferenciá-las, enquanto A14 inicialmente não percebeu que todo quadrado é também um retângulo (PN15).

Por sua vez, nessa situação-problema, a estratégia E11 foi a que mais estudantes foram localizados: A1, A5, A6, A8, A9, A10, A13 e o primeiro caminho de resolução de A15. Essa estratégia indica a associação entre as variáveis presentes na situação-problema, sendo que os procedimentos utilizados por esses estudantes associavam os conceitos de perímetro e área. Algumas representações simbólicas dessas relações foram estabelecidas. Contudo, a maximização da área não foi alcançada a partir de argumentação algébrica, mas sim por meio de cálculos analíticos como tentativa de resolução das expressões que representavam as relações percebidas. Assim, a área do palco não foi considerada enquanto função da medida dos lados constituídos pelas placas de led, mesmo que algumas equações tenham sido obtidas pelos estudantes. A resolução de A6 exemplifica essa estratégia.

Figura 41: Resolução de A6 para *Palco em construção*

5) 

* 100 Placas de LED de 1 metro de base e da mesma altura do prisma

$A > B$
 Derrado
 $A = B$
 Certo

$2A + 2B = 100$ Área = $A \cdot B$
 $A + B = 50$
 $A = 50 - B$
 Área = $(50 - B) \cdot B$
 Área = $B^2 + 50B$

1. 49 = 49
 2. 48 = 98
 3. 45 = 225
 10. 40 = 400
 15. 35 = 525
 20. 30 = 600
 25. 25 = 625
 26. 24 = 624

Fonte: dados da pesquisa.

Dos procedimentos identificados nas tentativas dos estudantes em E11, nota-se que com exceção de A1, todos identificaram, de início, que $A + B = 50$ e que a medida que os valores de A ou B se distanciavam de 25 a área $A \cdot B$ diminuía (P49), sendo esse procedimento característico de E11. Apesar disso, A1 também se enquadra aqui, pois pode-se observar em sua resolução (Figura 42) que conseguiu estabelecer relações que demonstraram a apreensão das informações do problema.

Figura 42: Resolução de A1 para *Palco em construção*

$$2(AA) + 2(BA) = 100A$$

$$2AA + 2BA = 100A$$

$$2A + 2B = 100$$

$$2 \cdot (A+B) = 100 \rightarrow A+B = 50$$

$$25.25$$

Fonte: dados da pesquisa.

A1 reconheceu a expressão que fornecia o perímetro, identificou que $A + B = 50$, mas para tratar da área, ao final, apenas considerou $A = B$ e obteve 625 m^2 como resposta, embora não argumentasse porque seria essa a maior área possível.

O Quadro 36 relaciona a totalidade de procedimentos efetuados por cada estudante em E11.

Quadro 36: Procedimentos realizados nas tentativas de E4 para *Vila Lângaro*

	A1	A5	A6	A8	A9	A10	A13	A15
P1		X	X	X	X			
P34	X	X	X	X	X	X	X	X
P38	X			X		X	X	X
P39	X		X		X		X	X
P40	X	X			X	X	X	X
P43	X							
P44	X	X	X		X	X	X	X
P45	X		X	X				X
P46	X		X			X	X	X
P47						X	X	
P49		X	X	X	X	X	X	X
P50						X		

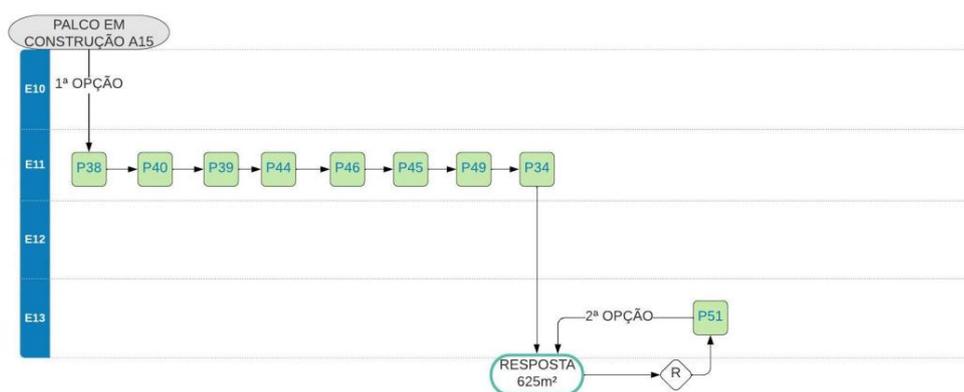
Fonte: dados da pesquisa.

Em relação às ajudas geradas/utilizadas, observa-se PN11, PN14 e PN15 que em E10 estavam presentes e repetiram em E11. As ajudas mais frequentes, aqui, foram PN16 que se referia a como obter uma expressão que fornecesse a maior área possível para o palco, bem como DR10, dica de resolução para abordar situações-problema de máximos e mínimos. Nota-se que a emergência dessas ajudas, já indica um avanço em relação à estratégia E10, em que a hipótese de obter expressões para encontrar a área máxima nem fora considerada.

Outra observação interessante dentro dessa estratégia é o primeiro caminho de resolução de A15, que obteve a resposta sem auxílio algum, por meio de E11, mas que ao final identificou

que a diferença, em módulo, entre as medidas dos lados obedecia a uma relação linear e que o maior valor da área ocorreria quando essa diferença fosse nula, ou seja, quando $A = B = 25$, procedimento P51, que foi associado à E13, em função da argumentação desenvolvida pelo estudante. O diagrama de A15 para *Palco em construção* está na Figura 43 e sua estratégia de resolução na Figura 44.

Figura 43: Diagrama de A15 para *Palco em construção*



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 44: Resolução de A15 para *Palco em construção*

$$\begin{aligned}
 P &= 100\text{m} \Rightarrow 2b + 2A = 100 & 4A &= 100 & A &= B = 25 \\
 & & b + a &= 50 & 4B &= 100 \\
 & & a &= 50 - b & & \\
 A_n &= b \cdot A = 625\text{m}^2 \\
 A_n^I &= 20 \cdot 30 = 600\text{m}^2 \\
 A_n^{II} &= 15 \cdot 35 = 525\text{m}^2
 \end{aligned}$$

Fonte: dados da pesquisa.

E12 avança para uma argumentação geométrica com representação algébrica, indicando a obtenção da relação, interpretada enquanto função, que fornece a área do palco a partir da medida dos lados que devem ser constituídos pelas placas de led, porém amparada fortemente em argumentos geométricos. A2 e A11 apesar de iniciarem suas tentativas de resolução dentro da perspectiva de E11, conseguiram, ao final, realizar procedimentos que evidenciaram E12. Ambos realizaram P40, P39, P44, P9, P12 e P34, sendo a identificação de raízes da função quadrática que expressa a área do palco em razão de um dos seus lados (P9) e a identificação da concavidade da parábola por meio da análise do coeficiente a da lei geral desse função (P12),

os indicadores de avanço em relação à E11, já que esses procedimentos poderiam indicar E12 e E13, e como nenhum procedimento realizado apontava exclusivamente para E13, então E12 foi a estratégia evidenciada para esses alunos. A Figura 45 ilustra a execução dessa estratégia.

Figura 45: Resolução de A11 para *Palco em construção*

Computador LED → 1m base / altura do prisma
100 placas LED

$A \times B$ $B = 50 - A \rightarrow B = 25$

100 m $A = 25$

$2A + 2B = 100$
 $2(A + B) = 100$
 $A + B = 50$
 $B = 50 - A$

Área = $A \times B$
 $A \cdot (50 - A)$
 $= -A^2 + 50A$

$A = \frac{-50 \pm \sqrt{(50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot (-1)}$
 $A = \frac{-50 \pm \sqrt{2500}}{-2} \rightarrow A = \frac{-50 \pm 50}{-2} \rightarrow A_1 = 0$
 $A_2 = \frac{-100}{-2} = 50$

$-A^2 + 50A$
 $-(50^2) + 50 \cdot 50$
 $-2500 + 2500 = 0$

$-25^2 + 50 \cdot 25$
 $-625 + 1250$
 $A = 625$

Fonte: dados da pesquisa.

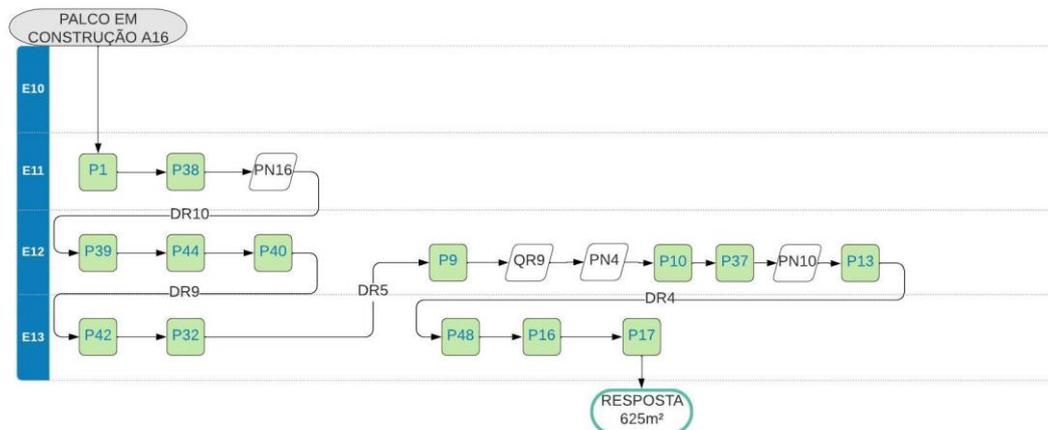
Em relação as ajudas, ambos precisaram de auxílio utilizando dicas já contempladas acima, como PN11, PN14, DR10 no caso de A2 e PN16, DR10, DR6, no caso de A11. A11 ainda originou DR9 quanto à forma de resolver equações de segundo grau incompletas do tipo $ax^2 \pm bx = 0$. Outras ajudas, já incluídas em situações-problema anteriores também foram necessárias: DR2, DR6, PN2, PN3, PN7 usadas por A11 e DR1, DR5, PN9, QR3 e QR5 por A2. Para essa estratégia, DR5, DR9, QR3 foram fundamentais para a execução de P9 e P12.

Por fim, três tentativas foram identificadas como E13: A12, o segundo caminho de A15 e A16. Essa estratégia, pauta-se na representação e argumentação algébrica e indica a obtenção e compreensão da relação funcional, sendo que a argumentação dos estudantes utilizava conhecimentos (procedimentais e conceituais) algébricos que possibilitaram utilizar conceitos e procedimentos generalizados, transpostos de outras situações. Entre os procedimentos evidenciados na resolução da situação *Palco em construção* por esses três estudantes, P16, P17

efetuados por A16, P48 efetuado por A12 e A16 e P51 por A15 foram os que caracterizaram essa estratégia.

O segundo caminho de A15 já foi abordado acima. Por sua vez, a resolução de A16 foi a única que utilizou as expressões que fornecem o x_v (P16) e y_v (P17) para obter a medida do lado B do palco que fornece a sua maior área, já que a expressão obtida por ele foi: $\text{Área} = -B^2 + 50B$ (P42). Isso associou DR4 à situação *Palco em construção*, sendo as outras ajudas também vinculadas ao processo de resolução de A16: DR5, DR9, DR10, PN4, PN10, PN16 e QR9. Essas ajudas indicaram dúvidas acerca de conceitos específicos inerentes à função quadrática e sua representação algébrica ou gráfica e um impasse frente a um problema de maximização de área que, num primeiro momento, A16 não lembrava como abordar problemas desse tipo, ou seja, não conseguiu mobilizar de forma imediata recursos que pudessem ser aplicados à situação: “*essa questão da área máxima, eu não sei ... não associei ainda como fazer*” (A16, *Palco em construção*). Por isso, a resolução de A16, demandou maior envolvimento e esforço, como pode ser observado em seu diagrama (Figura 46).

Figura 46: Diagrama de A16 para *Palco em construção*



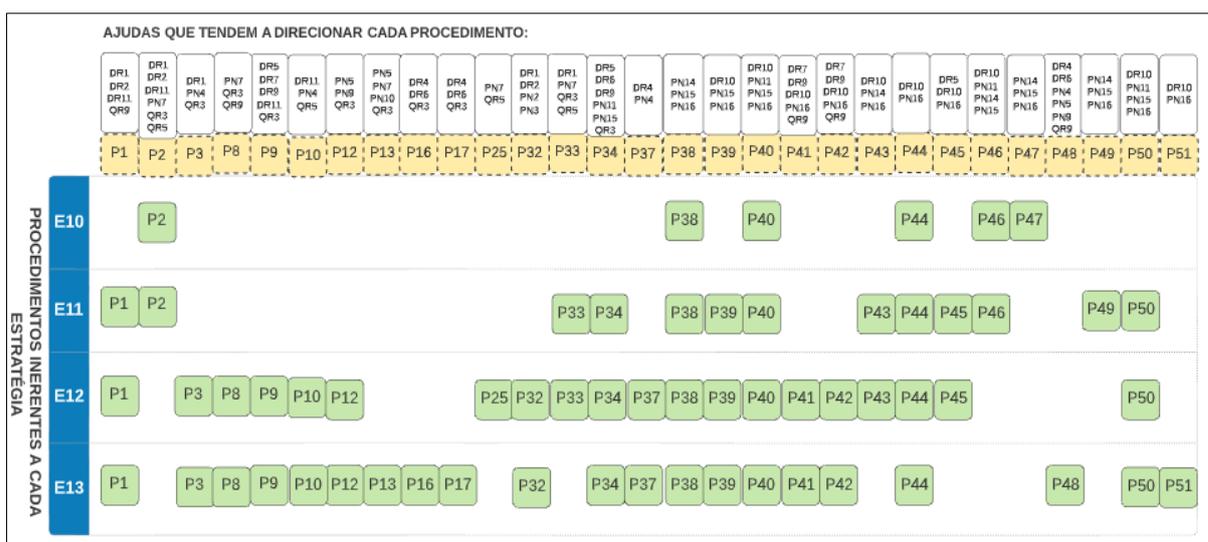
Fonte: dados da pesquisa.

O processo de resolução de A12, por sua vez, deu origem a DR7, uma dica de resolução voltada à forma fatorada de um polinômio de 2º grau. O processo de resolução de A12 foi bastante direto, utilizando poucos procedimentos. Além disso, sua argumentação demonstrou que possuía familiaridade com a resolução de problemas desse tipo e que possuía habilidades para associar conceitos e procedimentos pertinentes à resolução, o que demonstrava sua competência nesse âmbito (PERRENOUD, 1999; MACHADO; 2002, 2006, 2010).

[...] a altura dele [palco] acaba sendo irrelevante no final. São 100 placas de um metro cada, então o perímetro todo vai ter 100 [metros]. Então se ele fosse um quadrado o lado dele teria que ser 25. A graça do problema é ele perguntar se ele [o palco] deve ser um quadrado ou se ele deve ser mais retangular. [...] o perímetro é igual de um quadrado de lado 25, mas dentre todos os retângulos que têm perímetro 100, o quadrado de lado 25 é o que tem a maior área, porque... bom eu tenho como demonstrar, tu prefere que eu demonstre o porquê desse fato? [...] Se o lado do quadrado for 25, a área dele vai ser 25^2 então digamos que um dos lados 25 mais algum valor tipo, $25 + x$, o outro lado vai ter que ser $25 - x$. E a área dele vai ser em $(25 + x) \cdot (25 - x)$ e eu posso fatorar como $25^2 - x^2$. E o que isso me diz é que quanto menor for x ou seja, se x for zero ele vai ter a área maior sendo $625m^2$, então se ele [x] for zero ele [o palco] é um quadrado, então ele tem a maior área possível, é um quadrado. (A12, Palco em construção)

O modelo de avaliação elaborado para a situação-problema *Palco em construção*, que relaciona as estratégias, procedimentos e ajudas está apresentado na Figura 47.

Figura 47: Modelo para avaliação da situação-problema *Palco em construção*



Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

Nota-se, ao observar o conjunto de diagramas contido no Apêndice 8, que embora alguns procedimentos não tenham sido diretamente realizados pelos estudantes em algumas estratégias, por exemplo P38 em E10, esses foram associado ao modelo de avaliação *Palco em construção* em função dos questionamentos e percepções de possíveis caminhos que colegas poderiam realizar, já que esse era um questionamento previsto no roteiro da entrevista clínica.

5.2.3.4 Modelo de avaliação Estacionamento

Para a situação-problema *Estacionamento*, de modo semelhante a situação-problema anterior, foram elencadas quatro estratégias: E14, E15, E16, E17. O estudante A3 também não resolveu essa situação-problema, conforme diagramas do Apêndice 9.

Quadro 37: Estratégias mapeadas para a situação-problema *Estacionamento*

<i>E_i</i>	Caracterização	<i>A_i</i>
E14	O estudante pautou sua estratégia em uma abordagem exploratória ou analítica, com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, cálculo da área do <i>Estacionamento</i> . Os procedimentos não remetem à busca por relações algébricas entre a área do <i>Estacionamento</i> e os tipos de materiais disponíveis para cercamento considerando seus respectivos custos.	A8 A10 (1ª tentativa)
E15	A estratégia elaborada possibilita a associação entre variáveis presentes na situação-problema. Os procedimentos utilizados buscam associar os conceitos de perímetro e área, utilizando conceitos de proporcionalidade, por exemplo. Por vezes uma das variáveis é desconsiderada, por exemplo, o custo dos lados, ou o valor total, o ainda a obtenção da área máxima. Algumas representações simbólicas dessas relações são estabelecidas. Contudo, a maximização da área não é alcançada a partir de argumentação algébrica, recorrendo à cálculos analíticos como tentativa de resolução das expressões que representam as relações percebidas. Assim, a área do <i>Estacionamento</i> não é tratada enquanto função da medida de um dos lados do terreno, considerando os tipos de materiais disponíveis com seus respectivos custos para o cercamento.	A1 A2 A10 (2ª e 3ª tentativas) A16
E16	Estratégia baseada em argumentação geométrica com representação algébrica. Indica a obtenção de relações que podem ser utilizadas na obtenção da área do <i>Estacionamento</i> a partir da medida dos lados. É possível que alguma relação tenha sido ignorada, ou não utilizada, deixando de atender a todas as condições expressas no problema: área máxima, custo total, tipos de material para cercamento de cada um dos lados e custo de cada tipo de cercamento. Contudo, a argumentação predominante baseia-se em conhecimentos geométricos (procedimentais e conceituais). De modo geral, mesmo obtendo uma função que represente a área do <i>Estacionamento</i> , não são exploradas propriedades gráficas ou algébricas da relação funcional que poderiam fornecer elementos importantes para a resolução do problema, tais como explorar ponto de máximo, valor máximo da função, análise do vértice e concavidade etc.	A4 A6 A13 (1ª e 2ª tentativas) A14 A15
E17	Estratégia pautada na representação e argumentação algébrica. Indica a obtenção e compreensão da relação funcional que fornece a área do <i>Estacionamento</i> considerando as variáveis do problema: área máxima, custo total, tipos de material para cercamento de cada um dos lados e custo de cada tipo de cercamento. A argumentação tende a utilizar conhecimentos (procedimentais e conceituais) algébricos que possibilitam utilizar conceitos e procedimentos generalizados, transpostos de outras situações, ou seja, remete à forma geral da função quadrática correspondente. Assim, a argumentação associa elementos da representação gráfica e algébrica, explorando as propriedades características da relação funcional encontrada.	A5 A9 A11 (1ª e 2ª tentativas) A12

Fonte: dados da pesquisa.

Do mesmo modo como a situação *Palco em construção* e *Vila Lângaro* possuíam certa semelhança em termos de conceitos, procedimentos, habilidades e competências requeridas, pode-se afirmar que a *Palco em construção* e *Estacionamento* também possuem, considerando as características abordadas na seção 5.1 a partir da análise dos professores especialistas. Os dados das entrevistas com os estudantes na situação *Estacionamento* também apontaram procedimentos bastante semelhantes, por exemplo, quanto à ideia de maximizar uma área, contudo a situação-problema agora em análise possui mais variáveis, tornando-a mais complexa.

O Quadro 38 traz a codificação e a descrição dos procedimentos (*P_i*) identificados na resolução de *Estacionamento* e o Quadro 39 apresenta as ajudas *DR_i*, *PN_i* e *QR_i*. Cabe destacar que a situação-problema original considerava os lados com medidas x e y . Porém, a fim de

aproveitar ajudas já utilizadas na situação *Palco em construção*, para o aplicativo, adotou-se, A e B como as medidas para os lados, respectivamente.

Quadro 38: Procedimentos *Estacionamento*

Pi	Descrição: ações demandadas/realizadas (procedimentos) <i>Estacionamento</i>
P1	Representei graficamente (por esquemas, desenhos, gráficos etc.) os dados fornecidos pela situação-problema.
P2	Construí a representação gráfica por meio da atribuição de pontos aleatórios.
P3	Localizei os eixos x e y na representação gráfica (dada ou construída).
P7	Tentei obter a lei da função a partir de caso semelhante, ou seja, por associação de propriedades do gráfico ou da forma geral da função.
P8	Localizei pares ordenados (pontos) no gráfico da função em sua representação gráfica.
P9	Identifiquei as raízes de uma função de segundo grau em sua representação gráfica.
P10	Identifiquei pontos opostos em relação ao eixo de simetria da parábola.
P12	Avaliei a concavidade da parábola e relacionei com o coeficiente a da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.
P13	Identifiquei propriedade do coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, percebi que $f(0) = c$
P16	Obtive a coordenada x do vértice da parábola $(x_v = -\frac{b}{2a})$.
P17	Obtive a coordenada y do vértice da parábola $(y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ ou $y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a})$.
P25	Atribuí valores de x na lei $f(x)$ da função para verificar se os pontos obtidos pertenciam à representação gráfica da função.
P32	Percebi que a expressão algébrica dada (ou obtida) correspondia, graficamente, à uma função quadrática ou de 2º grau ($y = ax^2 + bx + c$).
P33	Tive dificuldade em construir a representação gráfica associada à situação-problema a partir das informações fornecidas (ou obtidas).
P34	Obtive as medidas da base e altura e calculei a área do retângulo.
P37	Identifiquei o eixo de simetria da parábola que é gráfico da função dada.
P40	Identifiquei que deveria calcular a área utilizando: área = A x B.
P46	Atribuí valores aleatórios para A (e, conseqüentemente, para B) para obter a área A*B máxima.
P47	Considereei como hipótese inicial que a maior área seria obtida quando os lados fossem iguais, antes de considerar a relação expressa pelas variáveis do problema.
P48	Avaliei o vértice da parábola para identificar a medida de um dos lados (representado no eixo x) que fornecia a maior área (eixo y).
P50	Usei a propriedade que diz que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o de maior área é o quadrado.
P52	Obtive ao menos uma das expressões: expressão $40A + 10B = 5000$, $4A + B = 500$ ou $A + \frac{B}{4} = 125$.
P53	Percebi que x deveria ser ¼ do valor de y, pois o custo de 1 metro de muro de tijolos é igual a 4 vezes o custo do metro de placas de madeira.
P54	Tive dificuldades para obter uma expressão que fornecesse a área do <i>Estacionamento</i> em função do custo total de cercamento, considerando os diferentes materiais.
P55	Obtive a área em função de um dos lados do terreno: $f(A) = A(500 - 4A)$ ou $f(B) = B(500 - B)/4$
P56	Percebi que a medida do lado A está entre 0 e 125.
P57	Calculei a quantidade de metros de muro de tijolos considerando os dois lados de medida A.
P58	Identifiquei que o terreno não será quadrado pois há diferença de custo entre os valores para cercamento de acordo com o tipo de material.
P59	Defini que a cada cinco reais, quatro deveriam ser gastos para cercar com placas de madeira e com o muro de tijolos e, assim, para a maior área ser obtida deveriam ser gastos 1000 reais com o muro de tijolos e 4000 reais com as placas de madeira.
P60	Considerando a proporção 1 para 4 do custo do muro de tijolos em relação ao custo das placas de madeira e obtive que a A deveria ser ¼ de B.

Fonte: dados da pesquisa.

A estratégia E14, assim com E10 da situação anterior, indica que a resolução de A8 e a primeira tentativa de A10 foram realizadas por meio de uma abordagem exploratória ou analítica, com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, cálculo da área do *Estacionamento*. Esses dois estudantes inferiram como hipótese inicial que a maior área seria obtida quando os lados fossem iguais, antes de considerar a relação expressa pelas variáveis do problema (P47). Ambos perceberam que o valor de A deveria ser ¼ do valor de B, pois o custo de 1 metro de muro de tijolos é igual a 4 vezes o custo do metro construído por placas de madeira (P53).

Quadro 39: Ajudas *Estacionamento*

Código ajuda	Título da ajuda	Pi indicados	G1	G2	G3	G4
DR1	Representação gráfica de uma função: eixo x e eixo y	P1, P2, P3, P7, P32, P33		X		
DR2	Gráfico de uma função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)	P1, P2, P7, P32		X		
DR4	Vértice da parábola	P16, P17, P37, P48	X	X		
DR5	Raízes de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P9, P34	X			
DR6	Ponto de máximo ou de mínimo de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática	P16, P17, P34, P48		X		
DR7	A forma fatorada de um polinômio de 2º grau	P9	X		X	X
DR9	Resolução de equação do tipo $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 - bx = 0$	P9, P34	X			
DR10	Como resolver problema de máximos e mínimos em situações-problema?	P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60	X			
DR11	Como posso interpretar graficamente os resultados da fórmula de Bháskara?	P1, P2, P9, P10, P52, P57	X	X		
PN2	Que tipo de função possui gráfico em formato parabólico?	P32		X		
PN3	Qual é a forma geral da função que representa essa situação?	P7, P32	X			
PN4	Que informações relativas à situação-problema podem ser obtidas considerando o eixo de simetria de uma parábola?	P3, P10, P37, P48		X		
PN5	Qual é a influência gráfica do coeficiente b na lei geral de uma função polinomial de 2º grau ou quadrática?	P7, P12, P13, P48		X		
PN7	Que relação existe entre as coordenadas x e y de um ponto (x,y) do gráfico de uma função?	P2, P8, P13, P25, P33		X		
PN9	Qual é a influência gráfica do coeficiente a na lei geral de uma função quadrática?	P12, P48		X		
PN10	Qual é a influência gráfica do coeficiente c na lei geral de uma função quadrática?	P13		X		
PN11	Como calcular a área e o perímetro de um retângulo?	P34, P40, P46, P47, P50, P52			X	
PN15	O que diferencia um retângulo de um quadrado?	P34, P40, P46, P47, P50			X	X
PN17	Como obter uma expressão que forneça a maior área do <i>Estacionamento</i> ?	P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60	X	X	X	X
QR3	Que informações você pode extrair do gráfico de uma função que possui formato parabólico?	P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34		X		
QR5	Como identificar pontos no gráfico?	P2, P10, P25, P33		X		
QR9	O que devo considerar em problemas de maximização?	P1, P8, P48, P54	X	X	X	X

Fonte: dados da pesquisa.

A8 teve dificuldades para obter uma expressão que fornecesse a área do *Estacionamento* em função do custo total de cercamento, considerando os diferentes materiais (P54). A10 não expressou dificuldade, mas sua primeira conduta foi atribuir valores aleatórios para A (e, conseqüentemente, para B) para obter a área $A \cdot B$ máxima (P46). Os dois estudantes levantaram a hipótese, incorreta, de que quatro a cada cinco reais deveriam ser gastos para cercar com placas de madeira e um com o muro de tijolos e, assim, para a maior área ser obtida deveriam ser gastos 1000 reais com o muro de tijolos e 4000 reais com as placas de madeira (P59), um procedimento incorreto e obtiveram, por conseqüência, respostas incorretas à situação-problema.

Nesse sentido, os procedimentos realizados por A8 e A10 não remeteram à busca por relações algébricas entre a área do *Estacionamento* e os tipos de materiais disponíveis para cercamento considerando seus respectivos custos. Em relação às ajudas, A10 tentou resolver sem auxílio em sua primeira tentativa. A8 precisou de dica de resolução acerca de como poderia

abordar problemas de maximização (DR10) e obter uma expressão que fornecesse a maior área (PN17).

À estratégia E15, foram associadas as tentativas de A1, A2, A10 (2ª e 3ª tentativas) e A16. E15 indica que a estratégia elaborada nessas tentativas possibilitou a associação entre variáveis presentes na situação-problema, de modo que os procedimentos utilizados associavam os conceitos de perímetro e área, utilizando conceitos de proporcionalidade, por exemplo. Embora E15 tenha apontada para a associação entre algumas variáveis presentes na situação-problema, aquelas desconsideradas acabaram conduzindo os estudantes a tentativas novamente baseadas em cálculos analíticos, numa perspectiva de busca por uma solução por tentativa e erro.

O estudante A1, apesar de ter conseguido equacionar a relação entre as medidas dos lados do terreno considerando o custo dos materiais, teve dificuldade em obter uma função que fornecesse a área do *Estacionamento* em função da medida de um dos lados (Figura 48). Por isso, ao final A1 acabou por obter sua resposta por meio do seguinte raciocínio: “*se for um quadrado, teria que ser igual, daí x e y/4 teria que ser igual, aí se $x + \frac{y}{4} = 125$ então x tem que ser 62,5 e $\frac{y}{4}$ também, daí y seria 250*” (A1, *Estacionamento*). Ou seja, A1 concluiu por meio da atribuição de valores (P46), por mais que seja uma hipótese bem direcionada. Assim, a resolução de A1 foi classificada como E15.

Figura 48: Resolução de A1 para *Estacionamento*

$20 \text{ metros de lado } x \text{ (2 vezes)}$
 $5 \text{ metros de lado } y \text{ (2 vezes)}$ (2/5)
 $2 \cdot 20x + 2 \cdot 5y = 5000$
 $40x + 10y = 5000$
 $4x + y = 500$
 $x + y = 125$
 250 15625 4
 125

Fonte: dados da pesquisa.

A2 percebeu que deveria calcular a área $A \times B$ (P40), mas teve dificuldade de obter uma expressão que pudesse relacionar o custo dos materiais e o valor disponível (P54). Também teve dificuldades em operar com as expressões que construiu e com a própria notação simbólica atribuída (Figura 49).

Figura 49: Resolução de A2 para *Estacionamento*

$$\begin{aligned}
 5000 &= 2.20x + 2.5(500 - 4x) \\
 498x &= 10x \cdot 5000 + 2.2500 - 4x \\
 4x &= 40x - 5000 + 5000 \\
 4x &= 40x \\
 x &= \frac{40}{4} = 10 \\
 \\
 5000 &= 2.20(10) + 2.5(500 - 4 \cdot 10) \\
 &= 400 + 4600 \\
 &= 5000
 \end{aligned}$$

Fonte: dados da pesquisa.

A10 em sua segunda tentativa, embora tenha tido dificuldade para obter uma expressão adequada à situação, sua estratégia foi atribuir valores e testá-los. Contudo, em suas tentativas elaborou, em função do custo dos materiais, a hipótese de que deveria considerar a proporção 1 para 4 do custo do muro de tijolos em relação ao custo das placas de madeira, e assim, concluiu que a medida x deveria ser $\frac{1}{4}$ de y (P60) obtendo inicialmente 62,5 m como resposta (2ª tentativa) e corrigindo para 125m ao considerar os dois lados do *Estacionamento* de medida x (P57).

A16 confundiu a quantidade de lados com a respectiva metragem e o custo, sua tentativa de resolução também se efetuiu por E15. Tentou obter uma relação que pudesse representar a situação, por isso considerou que os 5000 reais deveriam ser gastos com os dois lados de medida a e os dois lados de medida b , ou seja, $2a + 2b = 5000$ e como cada metro de a custava 4 vezes o valor de b , realizou essa substituição ($a = 4b$) e obteve $8b + 2b = 5000$, ou seja, $b = 500$. Fez o mesmo ao substituir b por $\frac{1}{4}a$ e obteve $5000 = 2a + 0,5a$ e, assim, $a = 2000$, que para A16 correspondia ao valor que gastaria com os lados de medida a , considerando a proporção 1 para 4. Então, como o custo de cada metro de a era de 20 reais, calculou que poderia construir 100 m de muro de tijolos.

Em relação às dificuldades desses estudantes, percebeu-se que elas surgiram muito por não percepção de alguma das relações necessárias à resolução, o que demandou a ajuda DR10, por exemplo. Além disso, percebeu-se que, mais do que conceitos, o que estava carente era a habilidade de relacioná-los e de lidar com os conhecimentos necessários à resolução da situação, ou seja, esses estudantes não conseguiram demonstrar ter construído competências para articular os recursos demandados na resolução dessa situação-problema, por vezes, por

falta de prática com situações semelhantes ou que lhes possibilitasse desenvolver esquemas as estruturas cognitivas que pudessem se adaptar a situações como a demandada, já que a construção de esquemas e estruturas se dá por processos de repetição, reconhecimento e generalização (PIAGET, 1976a; 1982).

Os estudantes que elaboraram a estratégia E16 foram A4, A6, A13 (1ª e 2ª tentativas), A14 e A15. Esses estudantes, em geral, basearam-se em uma argumentação geométrica com representação algébrica. Isso significa que eles conseguiram construir relações para obtenção da área do *Estacionamento* a partir da medida dos seus lados, porém mesmo obtendo uma função que represente a área do *Estacionamento*, essa estratégia indica que não foram exploradas propriedades gráficas ou algébricas da relação funcional que poderiam fornecer elementos importantes para a resolução da situação-problema, tais como: ponto de máximo, valor máximo da função, vértice, concavidade etc. Observa-se no Quadro 40, que apresenta os procedimentos desenvolvidos por cada estudante, o fato deles não considerarem informações associadas aos conhecimentos algébricos possíveis de serem utilizados nessa situação, o que fez com que eles desenvolvessem um quantitativo grande de procedimentos.

Quadro 40: Procedimentos realizados nas tentativas de E16 para *Estacionamento*

	A4	A6	A13 1ª e 2ª tentativas	A14	A15
P1	X			X	
P7		X			
P9	X	X		X	
P12	X	X			
P32	X	X		X	
P33				X	
P34				X	
P37	X			X	X
P40	X	X	X		
P46			X		
P47			X		
P50			X		X
P52	X	X	X	X	X
P54	X		X	X	
P55	X	X		X	X
P56	X	X	X		
P57	X		X		X
P58			X	X	X

Fonte: dados da pesquisa.

A15 foi o estudante que menos utilizou procedimentos, nessa estratégia. Isso ocorreu pelo fato de utilizar a propriedade que diz que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o de maior área é o quadrado e associar ao fato de que o custo iria interferir utilizando, assim, a expressão $y = 4x$. Embora implicitamente a relação funcional estivesse presente, sua conclusão amparou-se explicitamente em argumentos de caráter geométrico (Figura 50).

Figura 50: Resolução de A15 para *Estacionamento*

$$\begin{aligned}
 &2.20.x + 2.5.y = 5000 \\
 &40x + 10y = 5000 \\
 &y = 42
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &40x + 10 \cdot 42 = 5000 \\
 &40x + 420 = 5000 \\
 &40x = 4580 \\
 &x = 114,5 \text{ m} \\
 &y = 42 \text{ m} \\
 &R: 115 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Fonte: dados da pesquisa.

Todos os estudantes chegaram na medida do lado x como sendo 62,5 metros e, com exceção de A6, consideraram que os dois lados de mesma medida resultariam, portanto, em 125m de muro de tijolos. Durante o processo de resolução, muitas ajudas foram originadas, tendo em vista que os estudantes precisaram desenvolver mais ações durante o desenvolvimento da estratégia de abordagem ao problema (Quadro 41). As ajudas mais frequentes foram PN17, DR10, QR9 e DR11 que são relativas à compreensão dos procedimentos associados à ideia de maximização da área do *Estacionamento*, nesse caso.

Quadro 41: Ajudas geradas das tentativas de E16 para *Estacionamento*

	A4	A6	A13 1ª e 2ª tentativas	A14	A15
PN17	X	X	X	X	X
DR10	X	X	X		X
PN2	X				
QR9	X		X	X	
DR7	X				
PN7	X				
DR2	X				
PN9	X				
DR11	X	X		X	
DR1		X			
DR5		X			
PN4		X			
QR3				X	

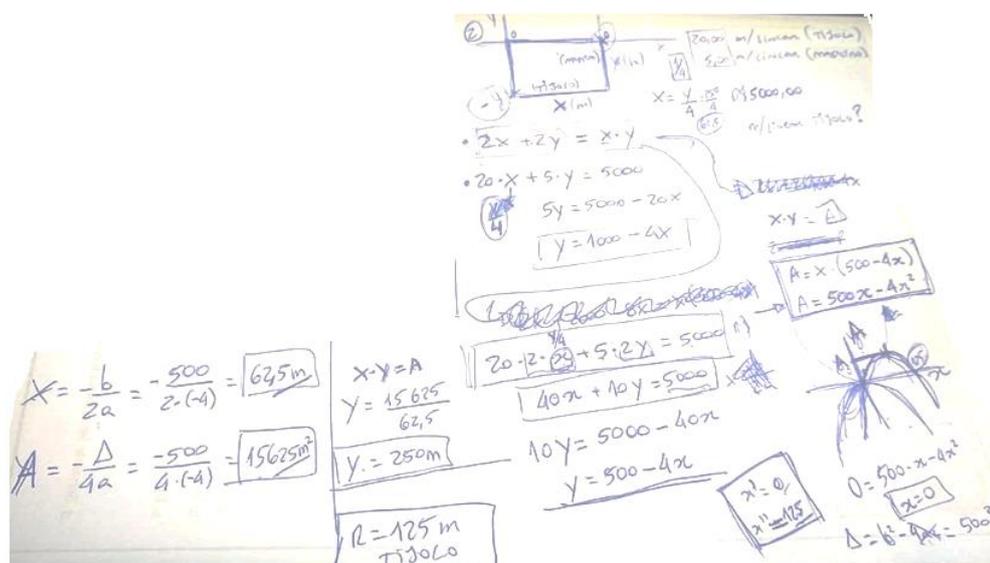
Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, a estratégia E17 conta com quatro estudantes: A5, A9, A11 (1ª e 2ª tentativas) e A12, os quais conseguiram, ao final, representar e argumentar algebricamente o processo de resolução da situação-problema *Estacionamento*. De modo geral E17 indica que os estudantes obtiveram uma relação funcional para representar a área do *Estacionamento* considerando as variáveis do problema: área máxima, custo total e tipos e custos de material para cercamento de cada um dos lados e que também devem ter sido capazes de associar elementos da

representação gráfica e algébrica da função área, explorando as propriedades características dessa relação funcional.

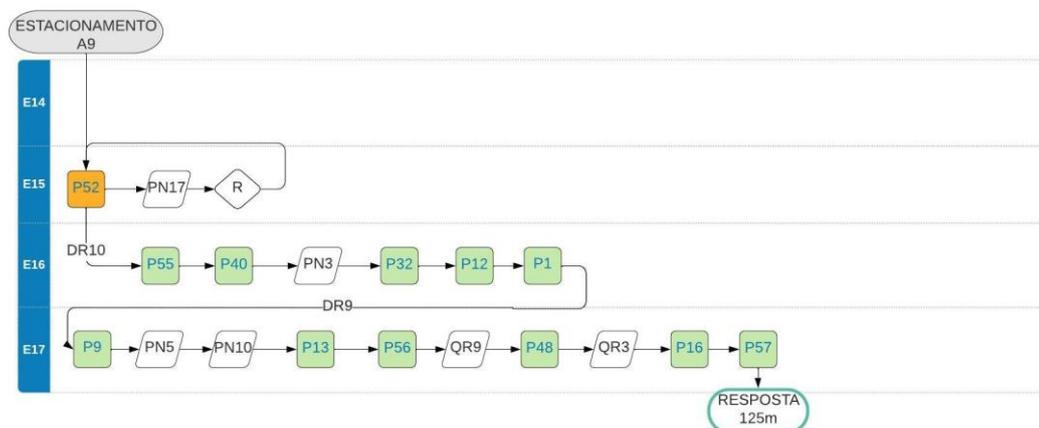
Destaca-se, contudo, que os estudantes A5, A9 e A11 foram construindo essa estratégia no decorrer do processo, com base nas próprias ações que foram realizando e relações construídas com base nas apreensões dos dados do problema e relacionando com outras situações que já haviam resolvido. Isso fica evidente em seus diagramas, pois seus procedimentos e ajudas foram avançando no decorrer do processo. Esses iniciaram com procedimentos inerentes a E15, passando por E16 e desenvolvendo E17. A resolução de A9 e seu diagrama são trazidos para exemplificar essa afirmação (Figura 51 e 52).

Figura 51: Resolução de A9 para Estacionamento



Fonte: dados da pesquisa

Figura 52: Diagrama de A9 para Estacionamento



Fonte: dados da pesquisa.

Cabe observar que A9 foi o estudante que mais ajudas gerou/utilizou dentro de E17 e isso não lhe impediu de construir essa estratégia. Observa-se, assim, que em uma situação de prova convencional, por exemplo, esse estudante poderia ter desistido de resolver a questão, ou ter simplesmente parado no momento inicial (E15). Esse fato poderia fazer com que o professor avaliasse que o estudante não teria domínio acerca dos conhecimentos exigidos para a resolução da situação-problema, por isso a importância de desenvolver uma avaliação formativa (PERRENOUD, 1999) ou mediadora (HOFFMANN, 2014; 2017; 2018) que sirva como fonte de evidências dos processos cognitivos realizados pelos estudantes.

Através da entrevista, pode-se perceber que, na verdade, o que faltava ao estudante A9 eram auxílios específicos que lhe auxiliassem a mobilizar conhecimentos já construídos, aplicando-os à resolução da situação. Ou seja, não lhe faltavam habilidades cognitivas para lidar com situações-problema desse tipo, apenas não houve demonstração da automatização do processo, pois isso talvez lhe exija, ainda, certo grau de envolvimento com mais situações para que esses conhecimentos se tornem generalizados a ponto de sua mobilização se tornar automática frente à problemas dessa mesma estrutura.

De modo particular, A12 da mesma forma como o fez na situação *Palco em construção*, demonstrou dominar o processo de resolução desse tipo de situação (Figura 53).

Figura 53: Resolução de A12 para *Estacionamento*

Handwritten solution for the parking problem (Estacionamento):

$$40x + 10y = 5000$$

$$4x + y = 500$$

$$y = 500 - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = -4$$

Maximizar $A = x \cdot y$

$$L = x \cdot (500 - 4x)$$

$$L' = 500 - 8x$$

$$0 = 500 - 8x$$

$$8x = 500$$

$$x = 62,5$$

$$y = 500 - 4(62,5) = 12,5$$

Da mesma forma que $(a+b)/(a-b)$
Maximiza com $b=0 \Rightarrow x=62,5$

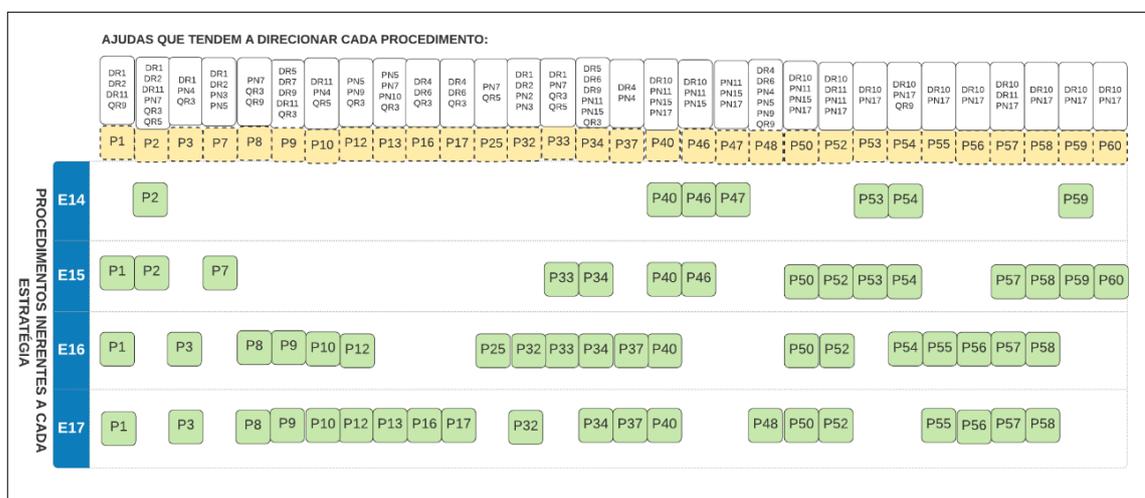
Fonte: dados da pesquisa.

Mais uma vez, sua competência lhe fez agir de forma praticamente automática diante do problema, construindo um caminho de resolução com poucos passos e uma argumentação pautada em conhecimentos algébricos e geométricos consolidados. Seu diagrama (Figura 54) demonstra isso.

Figura 54: Diagrama de A12 para *Estacionamento*

Fonte: dados da pesquisa.

O modelo de avaliação elaborado para a situação-problema *Estacionamento*, que relaciona as estratégias, procedimentos e ajudas apontados na pesquisa está apresentado na Figura 55.

Figura 55: Modelo para avaliação da situação-problema *Estacionamento*

Fonte: elaborada pela autora a partir dos dados da pesquisa.

Assim, finaliza-se essa seção de apresentação e discussão dos dados coletados nas entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano. Destaca-se que a adoção desse método de análise e coleta de dados foi fundamental para que fosse possível apontar aproximações e distanciamentos entre as diferentes estratégias identificadas em cada uma das quatro situações-problema. Além disso, essa fase foi indispensável para a elaboração de um método para

sistematizar a identificação de evidências de estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes durante o processo de resolução, o qual é apresentado na seção seguinte.

5.2.4 Resultados: um método para identificar evidências de estratégias cognitivas

Considerando o conjunto de 14 respostas obtidas para cada situação-problema, foram indicadas estratégias utilizadas na resolução e listados procedimentos pertinentes e vinculados a cada uma das estratégias. Foram, também, elaboradas as ajudas, sendo aquelas do tipo *Perguntas e Respostas Norteadoras* (PNi) originadas das dúvidas, as do tipo *Questionamentos Reflexivos* (QRi) originadas dos impasses e as *Dicas de Resolução* (DRi) oriundas das estratégias. Ainda, às ajudas foram associadas aos procedimentos que elas tendem a direcionar, sendo alocadas nos grupos de conceitos pertinentes.

Assim, de posse do conjunto de elementos que indicaram que estratégias os estudantes desenvolveram, bem como dos modelos de avaliação que associavam os elementos necessários à identificação de evidências de estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes durante o processo de resolução de cada situação-problema, passou-se a avaliar de que forma seria possível sistematizar os elementos de modo a elaborar um método que pudesse ser “automatizado” e implementado em uma ferramenta digital, o Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP) cujo processo de concepção e desenvolvimento está descrito em 5.3.

Para tanto, a partir dos dados verificou-se que as estratégias cognitivas utilizadas pelos estudantes poderiam ser indicadas pelo conjunto de procedimentos realizados (ou tentados) e, esses, direcionados pelas ajudas necessitadas pelos estudantes. Observou-se que enquanto o estudante elabora uma estratégia, seus procedimentos são direcionados a ela, ou seja, suas ações e operações seguem certa lógica que norteia o caminho de resolução em construção. Assim, ao buscar ajudas os estudantes também buscam direcionar procedimentos à um objetivo parcial pré-definido (chegar em um ponto intermediário) ou final. Logo, as ajudas que os estudantes recorrem diante desse objetivo, como meios para alcançá-lo apontam para procedimentos comuns, ou seja, alguns procedimentos se repetiam indicando o caminho de resolução trilhado, e isso evidenciava a estratégia em desenvolvimento.

Dessa forma, a premissa adotada na conjectura do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes é que elas são indicadas pelo conjunto de procedimentos que eles realizaram (ou tentaram realizar) e que as ajudas (recebidas ou consultadas enquanto recursos para a sequência do processo de resolução) tendem a direcionar

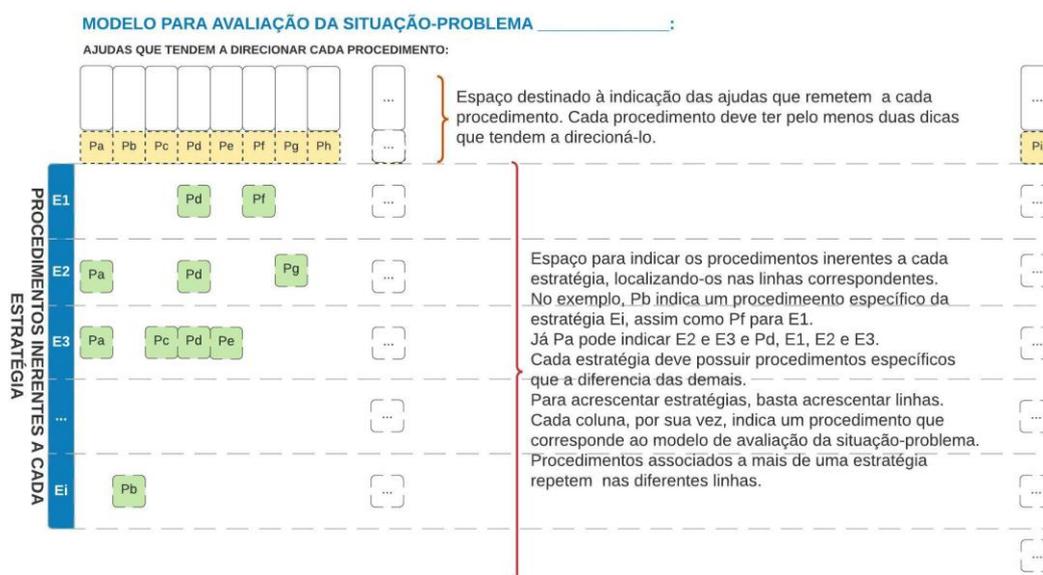
determinados procedimentos, considerando as relações expressas no modelo de avaliação de cada situação-problema. Sendo assim, o apontamento das estratégias cognitivas elaboradas seguirá da análise da pertinência dos procedimentos realizados efetivamente por cada estudante considerando o conjunto daqueles repetidos a partir das ajudas consultadas por eles.

Para tanto, a elaboração do modelo de avaliação dentro dos pressupostos teóricos e dos dados empíricos trazidos deve considerar que para cada situação-problema:

- sejam elencadas estratégias pertinentes e estas organizadas em ordem de complexidade em relação aos conceitos e procedimentos que cada uma contempla;
- sejam relacionados procedimentos indicadores de esquemas (presentativos, procedurais ou operatórios) que devem ser vinculados a uma ou mais estratégias entre as apontadas para a resolução de cada situação-problema;
- sejam, também, relacionados procedimentos que apontam para cada uma das estratégias, especificamente, e que servirão para diferenciar uma das outras;
- sejam elaboradas ajudas que possam indicar cada um dos procedimentos, de modo que todo procedimento possua pelo menos duas ajudas que o direcionem, para que seja possível identificar a eminência de repetições deles na medida em que o estudante buscar por ajudas específicas durante a elaboração de uma estratégia.

A Figura 56 apresenta a estrutura de referência para associar e representar esses elementos no modelo de avaliação utilizado nesta pesquisa.

Figura 56: Estrutura do modelo de avaliação utilizado



Fonte: elaborada pela autora.

Considerando essa percepção, para cada situação foi definido um ordenamento entre as estratégias mapeadas, observando o grau de complexidade dos procedimentos pertinentes, dado o contexto de avaliação. No caso desta pesquisa, tratava-se de situações-problema que exigiam conhecimentos algébricos para sua modelagem e resolução. Com isso, identificaram-se procedimentos para estratégias específicas e outros que poderiam pertencer a distintas estratégias.

Por isso, uma pré-condição atentada para a identificação de evidências de estratégias cognitivas refere-se as relações entre procedimentos de diferentes estratégias, bem como aqueles específicos de alguma estratégia que precisam ser bem delimitados para cada situação. Com base nesses argumentos elaborou-se o seguinte método para identificar estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes considerando os elementos identificados nas entrevistas:

- 1º) registrar as ajudas necessitadas por cada estudante durante uma tentativa de resolução;
- 2º) apontar para cada uma dessas ajudas quais os procedimentos que tende a direcionar;
- 3º) verificar no conjunto de procedimentos gerados, aqueles que repetem pelo menos uma vez e listá-los.
- 4º) avaliar cada um dos procedimentos incluídos na lista indicando aqueles efetivamente realizados pelos estudantes.
- 5º) avaliar a que estratégia(s) cada procedimento efetivo relaciona-se.
- 6º) analisar o conjunto de estratégias assim elencadas e identificar aquela evidenciada pelos procedimentos efetivos, considerando o ordenamento em relação ao grau de complexidade das estratégias consideradas na situação-problema em avaliação.

Assim, por exemplo, na situação-problema *Vila Lângaro* foram obtidos procedimentos específicos que apontavam para E1 ou E5, bem como alguns que indicavam diretamente E2, E3 e E4. Mas, essas últimas, admitiam também procedimentos que avançavam em relação à própria estratégia, o que indicava certa interdependência entre as ações e operações que precisavam ser realizadas para a resolução da situação-problema. Assim, considerando o modelo de avaliação dessa situação, se um dado estudante tivesse executado os procedimentos P4 e P5, entre os repetidos de acordo com as ajudas que buscou, a conclusão acerca de sua estratégia desenvolvida seria E3, já que P4 aponta para E3 e E4 e P5 para E2 e E3, de modo que como P5 não avança para E4, o que se pode garantir é a elaboração de E3, tendo em vista o estabelecimento da relação de complexidade $E2 < E3 < E4$ e a ideia de reconstrução presentativa (PIAGET, 1987) dos esquemas envolvidos na referida situação-problema.

Além disso, duas particularidades precisaram ser consideradas nesse método:

a) caso o estudante não buscasse alguma ajuda como obter evidências de que estratégias estaria elaborando?

b) caso o conjunto de procedimentos gerados das ajudas consultadas não contenha procedimentos repetidos, como verificar qual o caminho que o estudante estaria seguindo? Por que os procedimentos não repetem se ao elaborar uma estratégia as ajudas tendem a possuir procedimentos comuns? Nesse caso, possivelmente, considerando os dados obtidos nas entrevistas, evidenciou-se que o estudante estaria adotando uma estratégia de exploração aleatória ao problema, por isso, todas as estratégias mapeadas podem ser possíveis de serem construídas (ou até mesmo outra não mapeada, no caso!).

Para essas situações particulares, pensou-se em adotar uma lista de procedimentos “padrão” para cada situação-problema composta por todos os procedimentos que apontavam unicamente para uma estratégia. O julgamento dos procedimentos efetivos para esses casos particulares ocorreria com base nessa lista e, assim, também seriam obtidas evidências necessárias à identificação das estratégias elaboradas. Além disso, no caso de nenhum desses procedimentos ser efetivo, optou-se por dar a possibilidade de o estudante informar o que fez ou pensou diante da situação, podendo essas informações serem acrescidas ao modelo de avaliação da situação, posteriormente, se for pertinente. Considerando o exposto os dados de cada situação-problema foram retomados para testagem do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas desenvolvido.

5.2.4.1 Vila Lângaro: testagem do método de identificação

Na situação-problema *Vila Lângaro*, E1 e E5 foram analisadas de modo independente. E1 é uma estratégia determinada por procedimentos específicos (P21, P22), que indicam uma tentativa de aproximar um resultado por meio de uma abordagem exploratória. E5 é baseada em uma perspectiva de tentativa e erro. Já ordem definida para as estratégias que admitiam relações de dependência foi a seguinte: $E2 < E3 < E4$. Todas consideradas válidas, sendo E2 mais intuitiva envolvendo repetição e reconhecimento de ações e operações válidas a outras situações, E3 pautada pela identificação, associação ou reconhecimento de elementos da representação gráfica e E4 mais formalizada, a qual implica na generalização de esquemas e compreensão dos procedimentos inerentes às estratégias anteriores, porém de modo mais articulado.

Para a situação *Vila Lângaro*, a lista padrão foi composta pelos seguintes procedimentos P2, P3, P7, P11, P15, P16, P17, P18, P19, P21, P22, P24, P25, P28, P30, cada qual associado a

uma só estratégia. O fato de procedimentos distintos serem considerados na lista padrão para uma mesma estratégia se dá em função de diferentes caminhos de resolução possíveis. O Quadro 42 indica as estratégias que cada um desses procedimentos aponta.

Quadro 42: Procedimentos específicos de cada estratégia para *Vila Lângaro*

-	P2	P3	P7	P11	P15	P16	P17	P18	P19	P21	P22	P24	P25	P28	P30
E1										X	X				
E2			X												
E3		X			X										
E4				X		X	X	X	X						X
E5	X											X	X	X	

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 43 apresenta os elementos considerados para a avaliação das tentativas de resolução para a situação *Vila Lângaro*, que confirmam o enquadramento dos estudantes nas respectivas estratégias. A segunda coluna identifica as ajudas que foram associadas à tentativa de resolução de cada aluno na situação e os respectivos procedimentos que cada uma direciona. A terceira coluna indica os procedimentos que repetiram, pelo menos uma vez, no conjunto de P_i da segunda coluna. Os P_i efetivos indicam quais entre os repetidos foram identificados na entrevista de A_i na tentativa em análise. Posteriormente, com base nos P_i efetivos e indicação de que estratégia(s) esses pertencem, conclui-se e evidencia-se a E_i correspondente à tentativa.

Quadro 43: Identificação de E_i elaboradas pelos estudantes para *Vila Lângaro*

A _i	evidências (DR _i , PN _i e QR _i e P _i associados)	P _i repetidos	P _i efetivos	E _i associado(s)					E _i evidenciada
				E1	E2	E3	E4	E5	
A1	PN2 → P5, P6 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29 PN3 → P6, P7 QR4 → P6, P9 QR5 → P2, P10, P20, P25, P30 PN4 → P3, P10, P14, P20	P5 P6 P10 P14 P20	P5 P6 P10 P14 P20		X	X X X X	X X		E3
A3	1ª TENTATIVA DR1 → P1, P2, P3, P5, P7 DR2 → P1, P2, P5, P6, P7 PN1 → P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27 QR2 → P2, P5, P6, P7, P24, P25 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20	P1 P2 P3 P5 P6 P7 P20	P1 P5 P6 P7 P20		X	X X X	X		E2
	2ª TENTATIVA (continuação da 1ª) DR1 → P1, P2, P3, P5, P7 DR2 → P1, P2, P5, P6, P7 PN1 → P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27 QR2 → P2, P5, P6, P7, P24, P25 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20 PN7 → P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25	P1 P2 P3 P5 P6 P7 P8 P13 P20 P23 P25	P2 P25					X	E5

A4	1ª TENTATIVA: DR4 → P4, P15, P16, P17, P27 DR6 → P4, P15, P16, P17, P27	P4 P15 P16 P17 P27	P4			X	X		E3
	2ª TENTATIVA PN1 → P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29	P21 P22	P21 P22	X X					E1
	3ª TENTATIVA: PN5 → P7, P12, P13, P14 PN4 → P3, P10, P14, P20 PN9 → P12, P15 DR3 → P6, P8, P11, P19 PN7 → P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25	P8 P11 P12 P13 P14 P19 P20	P11 P12 P14 P19			X X	X X X X		E4
A5	DR1 → P1, P2, P3, P5, P7 DR4 → P4, P15, P16, P17, P27 PN4 → P3, P10, P14, P20 PN6 → P19 PN7 → P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25	P2 P3 P19 P20	P19 P20			X	X X		E4
A6	DR1 → P1, P2, P3, P5, P7 DR2 → P1, P2, P5, P6, P7 PN2 → P5, P6 PN3 → P6, P7 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29 QR2 → P2, P5, P6, P7, P24, P25	P1 P2 P5 P6 P7 P24	P1 P5 P6 P7		X X X	X X X	X		E2
A8	DR3 → P6, P8, P11, P19 PN1 → P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27 PN3 → P6, P7 PN4 → P3, P10, P14, P20 PN7 → P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25 PN8 → P8, P28, P29 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20	P2 P3 P6 P8 P11 P12 P13 P14 P19 P20 P21 P22 P23 P28 P29	P6 P8 P11 P13 P19		X	X X X	X X X X		E4
A9	Nenhuma ajuda necessária.	Lista padrão	P11 P19				X X		E4
A10	1ª TENTATIVA PN1 → P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29	P21 P22	P21 P22	X X					E1
	2ª TENTATIVA DR2 → P1, P2, P5, P6, P7 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29 PN8 → P8, P28, P29	P5 P28 P29	P28 P29			X		X X	E5
A11	DR1 → P1, P2, P3, P5, P7 DR3 → P6, P8, P11, P19 PN5 → P7, P12, P13, P14 PN6 → P19 PN7 → P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25 QR4 → P6, P9 QR6 → P9, P18, P26, P30	P2 P6 P7 P8 P9 P11 P13 P19	P6 P8 P9 P11 P19		X	X X X	X X X X		E4
A12	1º CAMINHO DR3 → P6, P8, P11, P19 DR5 → P9, P30 *não há procedimentos que repetem, baixo quantitativo de ajudas, resolução mais direta	Lista padrão	P11 P19				X X		E4
	2º CAMINHO DR5 → P9, P30 DR7 → P9, P18 QR6 → P9, P18, P26, P30	P9 P18 P30	P9 P18 P30			X	X X X		E4
A13	1ª e 2ª TENTATIVA QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29 PN8 → P8, P28, P29	P28 P29					X X	E5	

	3ª TENTATIVA DR3→P6, P8, P11, P19 PN3→P6, P7 PN4→P3, P10, P14, P20 PN6→P19 PN7→P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25 QR2→P2, P5, P6, P7, P24, P25 QR4→P6, P9 QR5→P2, P10, P20, P25, P30	P2 P6 P7 P8 P10 P11 P19 P20 P25	P10 P11 P19 P20				X X X X		E4
A14	DR2 → P1, P2, P5, P6, P7 DR3 → P6, P8, P11, P19 PN6→P19 PN7→P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25 QR5→P2, P10, P20, P25, P30	P2 P6 P8 P11 P19 P20 P25	P6 P8 P11 P19 P20				X X X X		E4
A15	DR6→P4, P15, P16, P17, P27 PN3→P6, P7 PN9→P12, P15 QR3→P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20 QR6→P9, P18, P26, P30 QR7→P26	P9 P12 P15 P16 P17 P26	P9 P12				X X X X		E3
A16	DR2 → P1, P2, P5, P6, P7 DR7 →P9, P18 PN6→P19 PN7→P2, P8, P11, P13, P19, P20, P23, P25 QR3→P2, P3, P8, P9, P12, P13, P14, P15, P16, P17, P20	P2 P8 P9 P13 P19 P20	P9 P19 P20				X X X X		E4

Fonte: dados da pesquisa.

5.2.4.2 Praça dos Arcos: testagem do método de identificação

Na situação-problema *Praça dos Arcos* emergiram quatro estratégias: E6, E7, E8 e E9. Resumidamente, E6 indica um modo exploratório de abordagem da situação-problema, E7 envolve a construção de representação analítica/gráfica da situação, E8 avança em relação à representação gráfica, envolvendo o reconhecimento de elementos da função e, finalmente, E9 aponta uma perspectiva predominantemente algébrica, com uso de linguagem simbólica para representar as relações presentes na situação. Assim, embora E6 ainda possa ser considerada individualmente, assim como E1 da situação-problema anterior, pode-se considerar a seguinte ordem de relacionamento $E6 < E7 < E8 < E9$.

Nesse caso, para a situação *Praça dos Arcos*, a lista padrão foi composta pelos seguintes procedimentos: P2, P10, P16, P17, P18, P25, P36 cada qual associado a uma só estratégia. O fato de procedimentos distintos serem considerados na lista padrão para uma mesma estratégia, especialmente em E9 (Quadro 44) se dá em função de diferentes caminhos de resolução possíveis, assim como explicado na situação *Vila Lângaro* e será observado, também, na lista de procedimentos das situações-problema trazidas posteriormente.

A8	DR2→P1, P2, P31, P32 DR4→P4, P15, P16, P17, P27 DR6→P4, P15, P16, P17, P27, P34 PN3 →P31, P32	P4 P15 P16 P17 P27 P31 P32	P4 P15			X X	X X	E8* *nenhum Pi indica E9 somente
A9	1º MÉTODO DR2→ P1, P2, P31, P32, PN12→ P1, P34, P35, P36, PN2→ P31, P32, PN9→P12, P15 DR6→P4, P15, P16, P17, P27, P34, QR3→P2, P8, P13, P14, P15, P20, P33, P34	P1 P2 P15 P31 P32 P34	P1 P15 P31 P32 P34		X X X X	X X X X	X X X X	E8
	2º MÉTODO DR8→ P9, P18, P34, P36	Lista padrão	P36				X	E9
A10	1ª TENTATIVA QR2→P2, P25, P31, P32, P33, P36, P37 PN7→P2, P8, P13, P20, P25, P33	P2 P25 P33	P2 P33	X				E6
	2ª TENTATIVA DR1→ P1, P2, P3, P32, P33 QR8→ P8, P9, P10, P25 PN4 → P3, P10, P37, P48	P3 P10	P3		X	X		E7
	3ª TENTATIVA (continuação da 2ª) + PN13→ P35, P36	Lista padrão	-		-	-	-	-
A11	1ª TENTATIVA DR2→P1, P2, P31, P32 QR2→P2, P25, P31, P32, P33, P37 DR8→P9, P18, P34 PN4→P3, P10, P14, P20, P37 PN9→P12, P15, PN12→P1, P34, P35, P36	P1 P2 P3 P31 P32 P34 P37	P1 P31 P32 P34 P37		X X X	X X X X	X X X X	E8
	2ª TENTATIVA (continuação da 1ª) + PN13 → P35, P36	+ P35	P35		X	X	X	E8
A12	DR7→ P9, P18	Lista padrão	P18				X	E9
A13	PN12→P1, P34, P35, P36 QR8→P8, P9, P10, P25, PN4→P3, P10, P14, P20, P37 PN13→P35, P36	P10 P35 P36	P10 P35		X	X X	X	E8
A14	1º CAMINHO DR8 → P9, P18, P34, P36	Lista padrão	P36				X	E9
	2º CAMINHO PN12→P1, P34, P35, P36 PN4→ P3, P10, P14, P20, P37	Lista padrão	P10			X		E8
A15	Não necessitou de ajuda	Lista padrão	P18				X	E9
A16	QR5→P2, P10, P20, P25, P37 QR8→P8, P9, P10, P25, QR3→P2, P3, P8, P12, P13, P14, P15, P20, P33, P34 PN12→P1, P34, P35, P36 PN13→P35, P36	P2 P8 P10 P20 P25 P34 P35 P36	P8 P25 P34 P35		X X X	X X X	X X X	E7

Fonte: dados da pesquisa.

5.2.4.3 Palco em construção: testagem do método de identificação

Na situação-problema *Palco em construção* também foram identificadas quatro estratégias: E10, E11, E12 e E13. A primeira (E10) indica que a resolução se pautou numa abordagem exploratória ou analítica com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, cálculo da área do palco. As demais estratégias avançam em termos de complexidade dos procedimentos e relações que são realizadas/buscadas na resolução da

situação-problema. Dessa forma, pode-se associar a seguinte ordem de complexidade às estratégias da situação-problema *Palco em construção*: $E10 < E11 < E12 < E13$. Nesse caso, a lista padrão foi composta pelos seguintes procedimentos: P13, P16, P17, P25, P47, P48, P49, P51. O Quadro 46 associa os procedimentos específicos de cada estratégia.

Quadro 46: Lista padrão procedimentos *Palco em construção*

Ei	P13	P16	P17	P25	P47	P48	P49	P51
E10					X			
E11							X	
E12				X				
E13	X	X	X			X		X

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 47 traz a verificação do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas para a situação *Palco em construção*.

Quadro 47: Identificação de Ei elaboradas pelos estudantes para *Palco em construção*

Ai	evidências (DRi, PNi e QRi e Pi associados)	Pi repetidos	Pi efetivos	Ei associado(s)				Ei evidenciada
				E10	E11	E12	E13	
A1	DR10 → P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN11 → P34, P40, P46, P50 PN14 → P38, P43, P46, P47, P49 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51	P38 P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P46 P47 P49 P50 P51	P38 P39 P40 P43 P44 P45 P46	X X X X X X X X	X X X X X X X	X X X X X	X X X X	E11
A2	DR1 → P1, P2, P3, P32, P33 DR5 → P9, P34, P35 DR10 → P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN11 → P34, P40, P50 PN14 → P38, P43, P46, P47, P49 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34 QR5 → P2, P10, P25, P33 PN9 → P12, P48	P2 P3 P9 P12 P33 P34 P40 P43 P46 P50	P9 P12 P33 P34 P40	X X X X X	X X X X X	X X X X	X X X X	E12
A4	PN11 → P34, P40, P46, P50 PN14 → P38, P43, P46, P47, P49 *nenhum Pi indica 11 apenas, logo pode-se garantir E10	P46	P46	X X	X X			E10*
A5	DR10 → P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN11 → P34, P40, P46, P50 PN14 → P38, P43, P46, P47, P49 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51 DR11 → P1, P2, P9, P10	P38 P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P46 P47 P49 P50 P51	P40 P44 P49	X X X X X X X X X X	X X X X X X X	X X X X	X X X X	E11

A6	DR10→ P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN15 →P34, P38, P39, P40, P46, P47, P49, P50 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51	P38 P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P46 P47 P49 P50 P51	P39 P44 P45 P46 P49	 X X X X X	X X X X	X X X X	X X X X	E11
A8	PN14 → P38, P43, P46, P47, P49 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51 QR3→P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34	P38 P43 P47 P49	P38 P49	X X	X X X X	X X X X	X X X X	E11
A9	PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51	Lista padrão	P49		X			E11
A10	DR10→ P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51 DR6→ P16, P17, P34, P48	P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P50 P51	P40 P44 P50	X X X	X X X X	X X X X	X X X X	E11
A11	DR2→P1, P2, P32 DR9 → P9, P34, P41, P42 DR10 → P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51 PN2→ P32 PN3→ P32 PN7 → P2, P8, P13, P25, P33 DR6→ P16, P17, P34, P48	P2 P32 P34 P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P50 P51	P39 P40 P41	X X	X X X X	X X X X	X X X X	E12
A12	PN5→ P12, P13, P48 DR7 → P9, P41, P42	Lista padrão	P48				X	E13
A13	DR10→ P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51	P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P50 P51	P39 P40 P44	X X	X X X X	X X X X	X X X X	E11
A14	PN14→ P38, P43, P46, P47, P49 PN15→ P34, P38, P39, P40, P46, P47, P49, P50	P38 P46 P47 P49	P46 P47	X X	X X			E10
A15	1ª OPÇÃO Não buscou ajuda.	Lista padrão	P49		X			E11
	2ª OPÇÃO Não buscou ajuda.	Lista padrão	P51				X	E13
A16	DR4→P16, P17, P37, P48 DR5 → P9, P34, P45 DR9 → P9, P34, P41, P42 DR10 → P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P46, P50, P51 PN4 → P3, P10, P37, P48 PN16 → P38, P39, P40, P41, P42, P43, P44, P45, P47, P49, P50, P51 QR9 → P1, P8, P41, P42, P48 PN10→ P13	P9 P34 P37 P39 P40 P41 P42 P43 P44 P45 P48 P50 P51	P9 P39 P40 P42 P48	X X	X X X X	X X X X	X X X X	E13

Fonte: dados da pesquisa.

5.2.4.4 Estacionamento: testagem do método de identificação

Na situação-problema *Estacionamento* foram obtidas quatro estratégias: $E14 < E15 < E16 < E17$. Da mesma forma que a situação anterior, E14 indica uma abordagem exploratória ou analítica, com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, cálculo da área do *Estacionamento*, enquanto E17 aponta a compreensão da relação funcional que fornece a área do *Estacionamento* considerando as variáveis do problema: área máxima, custo total, tipos de material para cercamento de cada um dos lados e custo de cada tipo de cercamento. A lista padrão para avaliação dessa situação-problema ficou composta pelos seguintes procedimentos: P7, P13, P16, P17, P25, P47, P48, P60 (Quadro 48).

Quadro 48: Lista padrão procedimentos *Estacionamento*

Ei	P7	P13	P16	P17	P25	P47	P48	P60
E14						X		
E15	X							X
E16					X			
E17		X	X	X			X	

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 49 traz a verificação do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas para a situação *Palco em construção*.

Quadro 49: Identificação de Ei elaboradas pelos estudantes para *Estacionamento*

Ai	evidências (DRi, PNi e QRi e Pi associados)	Pi repetidos	Pi efetivos	Ei associado(s)				Ei evidenciada
				E14	E15	E16	E17	
A1	1ª TENTATIVA DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN11 → P34, P40, P46, P47, P50, P52 PN15 → P34, P40, P46, P47, P50 QR9 → P1, P8, P48, P54 PN11 → P34, P40, P46, P47, P50, P52	P34	P34		X	X	X	E15
		P40	P40	X	X	X	X	
		P46	P46	X	X			
		P47						
		P50	P50		X	X	X	
		P52	P52		X	X	X	
		P54	P54	X	X	X		
A2	DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN15 → P34, P40, P46, P47, P50 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR9 → P1, P8, P48, P54	P40	P40	X	X	X	X	E15
		P46	P46	X	X			
		P47						
		P50						
		P52	P52		X	X	X	
		P53						
		P54	P54	X	X	X		
		P55						
		P56						
		P57						
		P58						
		P59						
		P60						

A4	1ª TENTATIVA DR7 → P9 DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN7 → P2, P8, P13, P25, P33 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR9 → P1, P8, P48, P54 PN2 → P32	P8 P40 P50 P52 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P40 P52 P54 P55 P56 P57* 	X X 	X X 	X X 	X X 	E16
A5	DR4 → P16, P17, P37, P48, DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34	P16 P17 P40 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P16 P40 P52 P55 P56 P57 	X 	X 	X 	X 	E17
A6	DR5 → P9, P34 DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 DR11 → P1, P2, P9, P10, P52, P57 PN4 → P3, P10, P37, P48, PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 DR1 → P1, P2, P3, P7, P32, P33	P1 P2 P3 P9 P10 P40 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P9 P40 P52 P55 P56 	X 	X 	X 	X 	E16
A8	DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60	P40 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P40 P53 P54 P59 	X X 	X X 	X 	X 	E14
A9	DR9 → P9, P34 DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN3 → P7, P32 PN5 → P7, P12, P13, P48 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34 QR9 → P1, P8, P48, P54 PN10 → P13	P7 P8 P9 P12 P13 P34 P40 P48 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P9 P12 P13 P40 P48 P52 P55 P56 P57 	X 	X 	X 	X 	E17

A10	1ª TENTATIVA Não consultou ajuda.	Lista padrão	P47	X				E14	
	2ª TENTATIVA DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60	P40 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P53 P54	X X	X X	X			E15
	3ª TENTATIVA (continuação da 2ª tentativa)	+P57	P57		X	X	X	E15	
A11	1ª TENTATIVA DR5 → P9, P34 DR6 → P16, P17, P34, P48, PN11 → P34, P40, P46, P47, P50, P52, PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34	P9 P16 P17 P34 P40 P47 P50 P52	P9 P17 P34 P40 P52	X	X X X	X X X	X X X	E17	
	2ª TENTATIVA (continuação da 1ª tentativa)	+P57	P57		X	X	X	E17	
	A12	Não consultou ajuda.	Lista padrão	P13				X	E17
A13	1ª TENTATIVA DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR9 → P1, P8, P48, P54	P40 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P40 P50 P52 P54 P56 P58	X X X	X X X	X X X	X X X	E16	
	2ª TENTATIVA (continuação da 1ª tentativa)	+P57	P57		X	X	X	E16	
A14	DR11 → P1, P2, P9, P10, P52 P57 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 QR9 → P1, P8, P48, P54 QR3 → P2, P3, P8, P9, P12, P13, P16, P17, P33, P34	P1 P2 P8 P9 P52 P54 P57	P1 P9 P52 P54	X X	X X X	X X X	X X X	E16	
A15	DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60	P40 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P50 P52 P55 P57 P58	X X	X X X X	X X X X	X X X X	E16	
A16	1ª TENTATIVA DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN15 → P34, P40, P46, P47, P50 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60	P40 P46 P47 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	P40 P46 P50 P52 P53 P54	X X X X	X X X X	X X X X	X X X X	E15	

Fonte: dados da pesquisa.

5.2.5 Considerações II

Com a análise dos dados das seções anteriores verificou-se que o método de identificação de evidências de estratégias cognitivas demonstrou ser adequado e apontou às estratégias que, efetivamente, foram identificadas nas entrevistas com os estudantes. Algumas considerações adicionais são apresentadas nessa seção com base nos dados e resultados obtidos.

Observou-se que as competências requeridas dos sujeitos para a resolução de cada situação-problema englobavam os conceitos e procedimentos que foram apontados pelos especialistas, mas exigiram, também, conhecimentos condicionais na busca pela solução (PERRENOUD, 1999), ou seja, habilidades para julgar a pertinência e a aplicabilidade dos conceitos e procedimentos que poderiam ou não pertencer ao universo do problema (POZO, 2008; POLYA, 1978; ECHEVERIA; POZO, 1988). Tais habilidades relacionam-se com a mobilização de estruturas cognitivas do sujeito, pois são essas estruturas que fornecem a ele sua competência cognitiva e direcionam suas ações frente ao problema, ou seja, o que ele pode fazer a partir de seu estado de conhecimento (INHELDER; PIAGET, 1976; PIAGET, 1972a; PIAGET, 1979a; PIAGET, 1973b).

A construção de uma estratégia que direcione a busca por uma solução a um problema novo, baseia-se inicialmente na identificação do objetivo a ser atingido, ou seja, o que precisa ser obtido, calculado etc. Posteriormente, há a necessidade de identificar e selecionar entre os meios e recursos disponíveis, aqueles mais apropriados ao enfrentamento da situação (INHELDER, 1978; POZO, 2008; POLYA, 1978). Além disso, verificou-se que mesmo que um estudante não tenha demonstrado clareza ou explicitado, em suas ações, os conhecimentos específicos exigidos por uma situação, por vezes, eles eram reconhecidos ou até mesmo construídos ao longo do trajeto, considerando o curso das próprias ações, as assimilações e acomodações alcançadas, as equilibrações atingidas e as abstrações reflexionantes realizadas (PIAGET, 1976a; 1982; 1995).

Considerando as categorias de análise, semelhanças associadas às condutas e argumentações resultaram no agrupamento dos estudantes nas estratégias cognitivas que foram identificadas em cada situação-problema. Os dados evidenciaram que as estratégias elaboradas por cada sujeito foram guiadas pelas habilidades desenvolvidas, pela mobilização de ações e operações características de seus esquemas e estruturas mentais (presentativos, procedurais e operatórios), em diferentes níveis (básico, operacional e global), assim como defendido por Piaget (1985; 1987) e os níveis de competências cognitivas elencados por Pestana (1997; 1999). Nesse sentido, este estudo alicerça-se e, por consequência, corrobora com a tese de que as

estratégias elaboradas pelos sujeitos são expressões de sua competência cognitiva considerada no âmbito em que estão sendo exigidas ações e tomadas de decisões por parte do sujeito, tendo em vista o objetivo de solucionar o problema em questão e os diferentes esquemas demandados.

Ao encontro desses aspectos teóricos, verificou-se também que os estudantes que em cada situação-problema conseguiram elaborar estratégias mais complexas, demonstraram capacidade de mobilizar diferentes esquemas coordenados para atingir um fim específico, o que caracteriza a manifestação de uma “competência estabilizada” (PERRENOUD, 1999; 2001). Também, os dados corroboraram com a afirmação de que uma competência cognitiva se constrói em um patamar superior, ou seja, na compreensão tanto dos conhecimentos declarativos (conceituais) e procedimentais, quanto da maneira de articulá-los, ou seja, das habilidades (conhecimentos condicionais) para analisar as condições de uso de conceitos e a execução de procedimentos pertinentes (PERRENOUD, 1999; 2001).

Observou-se, ao encontro dos aspectos teóricos discutidos nesse estudo, que conhecimentos declarativos relacionados aos *conceitos* se referem de forma mais específica, ao nível básico das competências cognitivas, ou seja, a esquemas (ou estruturas) *presentativos*. Já os conhecimentos procedimentais, os *procedimentos*, se encontram no nível *operacional* e englobam esquemas (ou estruturas) *procedurais* que pressupõem o estabelecimento de relações com e entre os objetos. Por sua vez, conhecimentos condicionais, àqueles relacionados a *habilidades* envolvem a capacidade de identificar, frente a cada situação, a pertinência de utilização e de articulação de conceitos e procedimentos, com objetivo de estabelecer relações mais complexas, ou seja, aplicar esquemas (ou estruturas) *operatórios* para resolver problemas novos.

Destaca-se, ainda, que independentemente da existência de uma categorização, todos os conhecimentos são recursos que podem ser mobilizados diante de situações que exigem que o sujeito busque meios para atingir um fim específico. Logo, os conhecimentos declarativos, assim como os procedimentais e os condicionais são elementos que integram uma estratégia cognitiva, esta vista como manifestação da competência cognitiva dos sujeitos diante de uma situação ou contexto de atuação.

Nesse sentido, algumas ações ou operações elencadas enquanto atividades no quadro de Pestana *et al.* (1997; 1999), acerca dos níveis de competências cognitivas, figuravam ao longo da resolução de todas as situações-problema possibilitando o estabelecimento de relações, tais como “observar, representar, imaginar, reconstruir, comparar, classificar, ordenar, memorizar, interpretar, inferir, criticar, supor, levantar hipóteses, escolher, decidir, etc.” (PESTANA *et al.*, 1999, p. 7-8). Ações dessa natureza manifestam habilidades e competências que “não são, em

si, conhecimentos; elas utilizam hipóteses, ou mobilizam tais conhecimentos” (PERRENOUD, 1999, p. 7).

Ademais, ações ou operações automatizadas são indícios da construção de certa competência (PERRENOUD, 1999; MACHADO, 2002). Entretanto, é preciso também observar que nem todos os esquemas construídos pelo sujeito chegam a automatizar-se ou generalizar-se, e isso não implica em “não competência”. Muitas vezes, a automatização, é interpretada como aprendizagem mecânica, aquela que pode ser manifestada por procedimentos que o sujeito realiza, mesmo sem ter compreensão do(s) conceito(s) envolvido(s) no processo, e isso pode levar a obtenção de êxito, por reconhecimento, reconhecimento da situação, por associação. Esse tipo de procedimento automatizado (sem compreensão) difere-se, portanto, da realização de procedimentos automatizados por generalização (com compreensão).

Retomando algumas das ideias discutidas ao longo da seção 3.2, a análise dos dados desse estudo puderam ainda fortalecer a ideia de que os mecanismos intrínsecos do pensamento matemático alicerçam-se na ressignificação de conhecimentos anteriores, a partir da atribuição de novos significados a conceitos e procedimentos já construídos ou a extensões desses, que passam a ser não simplesmente a sua sobreposição, mas novos conceitos ou procedimentos que podem, ou não, ter como base os que lhe deram origem (BECKER, 2019).

Uma vez que os objetos de conhecimento matemático (inclusive e, principalmente, os algébricos) são essencialmente formais, eles precisam ser construídos mentalmente por cada estudante (BECKER, 2009; 2019). Esse processo construtivo segue uma lógica de elaboração que “engendra a formação de conceitos de tal forma que esses conceitos chegam a níveis de abstrações altíssimos que acarretam uma relação não imediata com os problemas do cotidiano” (JARDINETTI, 1997, p. 4). Contudo, “a não imediatez das relações entre os conceitos matemáticos e o cotidiano não significa que as abstrações matemáticas sejam arbitrárias” (JARDINETTI, 1997, p. 4) e, com isso, é preciso que estas sejam significadas pelos estudantes. Ademais, os significados que podem ser atribuídos ao conteúdo das afirmações também podem influenciar na correção da forma de pensamento, uma vez que podem conduzir a conclusões que não se sustentam logicamente.

A atribuição de significado – vinculação a algo já conhecido – pressupõe a capacidade de estabelecer relações, ou seja, a realização de inferências (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1991). Vale lembrar que a capacidade de raciocinar por hipóteses e deduzir as consequências que estas implicam é a característica mais significativa do pensamento operatório formal, dos adolescentes e adultos. Em razão do pensamento formal, o adolescente torna-se mais capaz de observar fenômenos, analisar as variáveis envolvidas, variá-las controlando as demais a fim de

buscar por regularidades ou padrões, formular hipóteses explicativas e buscar meios para confirmar ou refutar tais hipóteses, bem como recorrer a um conjunto de possíveis para resolver determinado problema, os quais não estão, possivelmente, postos na própria situação (SILVA; FREZZA, 2011; INHELDER, 1978; PIAGET, 2007).

Isso significa que um adolescente ou adulto terá maior destreza em lidar, de modo operatório formal, com conceitos e procedimentos que lhes são mais próximos, rotineiros ou de interesse particular e terá certa dificuldade de fazê-lo diante de um problema que extrapole esse contexto (MACHADO, 2005; MICOTTI, 1999; PIAGET, 1975).

Além disso, essas ações de caráter geral devem ser executadas em um âmbito restrito, ou seja, no contexto do problema de modo que se relacionem com a seleção e a aplicação de conhecimentos específicos a ele (MACHADO, 2002; 2006, 2010). Os conhecimentos específicos, tanto em termos de conteúdos quanto habilidades, são recursos que podem ser articulados diante de uma situação-problema a resolver. Isso, no entanto, ocorre para cada indivíduo de forma diferente e associa-se às áreas mais específicas de seu contexto real (profissional, acadêmico, social, tecnológico etc.). Problemas que possuem maior proximidade (inclusive em termos de conteúdo específico) com os conhecimentos já construídos pelo sujeito fazem com que ele, mais facilmente, envolva-se cognitivamente na busca de uma solução, dispendendo mais energia nessa tarefa.

Dentro do escopo do conhecimento matemático, estabelecer relações, modelar, generalizar, operar considerando hipóteses e construir significados para conceitos e procedimentos são capacidades que se vinculam a diferentes tipos de pensamento (o geométrico, o aritmético, o computacional etc.) (LORENZATO, 2015; BECKER, 2019; NUNES; BRYANT, 1997; NUNES, 2016; JARDINETTI, 1997, BIEMBENGUT, 2016). Pode-se associar, portanto, essas atividades às competências e habilidades da área da Matemática e suas tecnologias elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), bem como às características do pensamento algébrico (BRASIL, 2018).

Algumas dessas características precisam ser retomadas nessa fase de conclusão do estudo. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (2016, p. 89) o pensamento algébrico “se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele”. Sendo assim, diante de uma situação-problema que implique no reconhecimento e mobilização de conhecimentos algébricos adequados, as estratégias cognitivas elaboradas por um estudante poderão ser evidenciadas ainda, considerando, a linguagem utilizada e as representações que o estudante construiu para abordar o problema,

como foi observado nas argumentações trazidas ao longo da análise de toda seção de apresentação de resultados.

Identificou-se, ainda, a partir dos dados das entrevistas, dos argumentos falados e representações realizadas no papel pelos estudantes para cada situação-problema que a construção de uma estratégia predominantemente algébrica poderia contemplar também procedimentos geométricos ou aritméticos em etapas anteriores, enquanto ações sucessivas realizadas em busca do objetivo. Tratavam-se, nesse caso, de esquemas procedurais, os quais indicavam a transferência de procedimentos de um contexto a outro por meio de reconstrução presentativa (PIAGET, 1975; 1987), ou seja, sua aplicação ao novo contexto, do geométrico ao algébrico, por exemplo. Ou seja, esses procedimentos apontavam ações e operações realizadas pelos estudantes e que remetiam ao nível operacional das competências cognitivas (PESTANA, 1999). Assim, procedimentos específicos e, por vezes, equivocados como P21 e P22, na situação *Vila Lângaro*, foram considerados indícios diretos de uma estratégia inadequada ao problema.

Logo, evidências das estratégias também puderam ser coletadas por meio de obstáculos ou dificuldades, na emergência de impasses e dúvidas nas diferentes etapas do processo de resolução: na apresentação do problema, na percepção e apreensão dos dados, na representação do problema, na elaboração de hipóteses ou na realização de tentativas (INHELDER, 1978; SMOLE; DINIZ, 2016; ECHEVERRÍA; POZO, 1998; POZO, 1998; BRASIL, 2018). Diante disso, defende-se que tanto aspectos de ordem geral (habilidade geral) quanto conhecimentos ou processos específicos são determinantes para que um sujeito consiga, diante de uma situação-problema, elaborar estratégias cognitivas que lhe possibilitem atingir o objetivo delineado.

Além disso, as ajudas DR_i , PN_i e QR_i também foram confirmadas como importante fontes para a identificação de evidências das estratégias cognitivas em elaboração por parte de cada estudante e poderão, ao ser consideradas no appAAP, servir para que o professor possa ter uma ideia mais direcionada às dificuldades dos estudantes, para além do olhar à estratégia realizada. Assim, a estratégia fornecerá informações mais gerais e as ajudas indicarão especificidades que junto aos procedimentos evidenciarão aspectos do raciocínio do estudante frente à situação-problema.

No decorrer das entrevistas junto à eminência de dúvidas e impasses, também emergiram lentidões e conflitos que fazem parte do ato de conhecer (BACHELARD, 2005; BROUSSEAU, 1983; SCHUBRING, 2002; IGLIORI, 2002; POMMER, 2016), seja pela existência de lacunas ou de algum conhecimento mal-adaptado que levou os estudantes a

cometerem erros, por exemplo. Em relação ao pensamento algébrico, de modo mais direcionado, foram identificadas dificuldades relativas à utilização da linguagem simbólica para representar relações (PIMENTA, 2016). Salienta-se também a recorrente utilização de fórmulas prontas, nem sempre significadas pelos estudantes, como é o caso da Fórmula de Bháskara, em geral associada à resolução de equações de segundo grau, mas nem sempre com compreensão acerca das informações quanto aos valores obtidos como resultado da sua aplicação. Essa dificuldade é apontada por autores como Coelho e Aguiar (2018); Kaput (1999); Da Rocha Falcão (1997), Lins e Gimenez (1997), Blanton e Kaput (2005); Radford (2005), Oliveira e Câmara (2011) e Almeida (2017) como sendo causada por falta de consideração acerca do pensar algebricamente, ao invés do enfoque à algebrização, ou seja, à recorrência de fórmulas e simbologias sem significação prévia.

A identificação das estratégias, bem como a observação das características que faziam determinados procedimentos serem relacionados a uma ou a outra considerou, também, de certo modo a compreensão das diferentes formas da álgebra indicadas por Kaput (1999), ou seja, da aritmética generalizada à álgebra como linguagem para modelar fenômenos, utilizando variáveis e incógnitas. Nesse sentido, dificuldades em relação à passagem da aritmética à álgebra, incluindo a geometria, também foram evidenciadas nas tentativas dos estudantes, conforme bem traziam Vale e Barbosa (2019), Muller (2015), Oliveira e Câmara (2011), Fiorentini, Miorim e Miguel (2016) entre outros.

Por fim, uma das dificuldades mais presentes referia-se justamente à compreensão dos significados associados à relação funcional e as suas diferentes formas de representação, bem como a diferenciação entre equações e funções, dificuldades essas que haviam sido apontadas na fundamentação teórica por Pommer (2016), Nasser, Sousa e Torraca (2016), Pimenta (2016), Segadas-Vianna (2016) e se fizeram presentes nas entrevistas inspiradas no método clínico, servindo de base para a elaboração de um grande volume de ajudas e procedimentos associados às quatro situações-problema estudadas.

A guisa de conclusão, cabe trazer ainda que no conjunto de todas as entrevistas, observou-se que esses estudantes foram capazes de construir hipóteses e delimitar caminhos de resolução, em sua maioria, bem fundamentados, mobilizando recursos de modo articulado, considerando as possibilidades e consequências dos passos de resolução efetivados e, por vezes, até justificando suas ações e escolhas, associando conhecimentos aritméticos, geométricos e algébricos, ao encontro das ideias de Da Rocha Falcão (1997), Lins e Gimenez (1997), Blanton e Kaput (2005); Kaput (1999); Radford (2005), Kieran (1992; 1995; 2007); Usiskin (1995) entre outros.

Essas ações indicam a realização de negações e inversões de modo integrado, ou seja, a capacidade de realizar operações do grupo INRC (PIAGET, 1976b), sendo também evidências da presença de estruturas cognitivas que caracterizam o pensamento operatório formal desses estudantes. São características que remetem a competências de nível global (PESTANA, 1999) possivelmente construídas com a resolução de variados problemas de mesma estrutura ao longo da vida (MACHADO, 2010), que conduziram a construção dessa capacidade de identificar conhecimentos pertinentes à cada situação (PERRENOUD, 1999).

Isso, aliado ao nível de conhecimento matemático que os próprios estudantes admitiam ter desenvolvido ao avaliar o grau de complexidade e dificuldade das situações, fez com que durante as resoluções, a maioria dos participantes, priorizassem procedimentos geométricos e algébricos recorrendo poucas vezes às tentativas puramente aritméticas.

Contudo, como contido na seção 5.3, bem como retomando as observações acerca das dificuldades apontadas na seção 3.2.1, esse resultado não representa a diversidade de estudantes de uma sala de aula. Assim, possivelmente, procedimentos menos articulados podem não ter sido identificados tendo em vista não emergirem das tentativas de resolução do grupo de participantes. Pensando nessa possibilidade, como mecanismo para minimizar essa lacuna, além das estratégias, impasses e dúvidas surgidos durante as entrevistas, cada participante foi questionado também sobre possíveis dificuldades que colegas poderiam ter ao tentar resolver as mesmas situações e esses elementos foram considerados.

Esse aspecto também foi atentado com o grupo maior de estudantes (ver seção 5.3.1), na testagem do appAAP para validação do método de identificação de estratégias cognitivas. Assim, no appAAP foi incluído um campo para o envio de comentários quando os estudantes julgam e finalizam cada situação-problema e esse foi mantido na versão de uso da aplicação.

5.3 O Aplicativo de Apoio a Ação Pedagógica - appAAP

O Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP) é uma aplicação *web* concebida durante a presente pesquisa enquanto recurso para auxiliar professores a identificar evidências de estratégias cognitivas elaboradas por estudantes durante a resolução de situações-problema aqui voltadas ao conhecimento algébrico. Para tanto, o appAAP também adquiriu uma segunda funcionalidade: servir de espaço para que estudantes busquem auxílios direcionados às suas dúvidas durante as tentativas de resolução de situações-problema, oferecendo também apoio à aprendizagem durante o processo.

A primeira versão da aplicação foi implementada no ano de 2020 pelo estudante Paulo Roberto Gomes Scheuer do curso de Ciência da Computação da UFRGS através de projeto fomentado pelo edital 27/2019 da Secretaria de Educação a Distância (SEAD) da UFRGS em parceria com projeto de pesquisa cadastrado no IFRS *Campus* Canoas com coordenação do professor Mariano Nicolao, doutor em Ciência da Computação. A descrição da concepção e dos elementos implementados na primeira versão estão publicados em Molon et al. (2020)⁴⁶.

A metodologia de desenvolvimento da aplicação *web* englobou métodos da Engenharia de Software e análise de requisitos de Pressman e Maxim (2016) e Pressman (2011) abordados na seção 4.3.1, bem como procedimentos inerentes ao design interativo considerando Sharp, Rogers e Preece (2007) apud Barbosa e Silva (2010).

Em função de novos requisitos e da definição do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas resultado da presente pesquisa, houve a necessidade de desenvolver uma segunda versão, remodelada, a qual também foi implementada através de projeto de pesquisa cadastrado no IFRS Canoas, coordenado, ainda, pelo professor Mariano Nicolao, e que contou com bolsista de iniciação científica, estudante do 4º ano do curso técnico em Desenvolvimento de Sistemas integrado ao ensino médio, Luís Felipe Auth. O estudante também desenvolveu seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) voltado ao appAAP, sendo orientado pela professora Juliana Damásio e coorientado pela autora dessa tese. O TCC teve por objetivo remodelar as interfaces do appAAP para garantir melhor usabilidade por parte dos estudantes e também descreveu os aspectos técnicos utilizados na reestruturação da aplicação em termos de tecnologias utilizadas e recursos implementados, além da apresentação dos resultados dos testes para avaliação de qualidade da aplicação que foram realizados dentro dos ciclos de Design Interativo (Barbosa e Silva, 2010)⁴⁷.

Em resumo, o appAAP é uma API (*Application Programming Interface*) REST⁴⁸, desenvolvida utilizando o *framework Spring* do Java. O appAAP usa uma arquitetura onde o servidor fica completamente separado da interface que o usuário acessa, separando as responsabilidades. Dessa forma, o cliente (a parte que o usuário acessa) faz requisições ao servidor (que possui ligação com o banco de dados etc.), sendo essas requisições feitas através da API.

⁴⁶ Disponível em: https://www.ufrgs.br/cinted/wp-content/uploads/2020/CINTED_2020_-_Anais.pdf (p. 224)

⁴⁷ O TCC intitulado “appAAP v2 - remodelagem do appAAP: novos requisitos e atenção aos critérios de qualidade de uso” será publicado pela biblioteca do IFRS Campus Canoas e estará disponível para consulta através do endereço: https://biblioteca.ifrs.edu.br/pergamum_ifrs/biblioteca/index.php.

⁴⁸ Baseada em protocolos *http* – *GET*, *POST*, *DELETE* etc.

Para o banco de dados, foi escolhido um do tipo relacional, no caso o *PostgreSQL*, devido ao alto compartilhamento de informações entre as entidades. Optou-se, como modelo de desenvolvimento, por uma arquitetura onde cliente e servidor estão completamente separados. O cliente manda requisições em formato JSON (*JavaScript Object Notation*) ao servidor, que processa essas informações e devolve uma resposta, também em JSON. É com esses dados recebidos que o cliente monta a página.

Para o desenvolvimento da aplicação foi escolhida a linguagem *JavaScript*, por permitir o desenvolvimento de diversas partes do sistema com a mesma sintaxe. Para a aplicação web, foi utilizado o *framework ReactJS* por dois motivos: facilita o reaproveitamento de código entre as páginas, devido ao conceito de componentização, além deste código ser facilmente adaptado ao *React Native*, *framework* que poderá ser utilizado futuramente para o desenvolvimento *mobile*, o qual também é baseado em *JavaScript*. Em relação às linguagens, utilizou-se HTML, uma linguagem de marcação interpretada pelo *browser*, largamente utilizada na construção de sites *http*; CSS (*cascade style-sheet*), linguagem de marcação utilizada para estilizar componentes *html*, ou seja, para o desenvolvimento do *frontend*; e *Java*, linguagem utilizada para a construção do *backend* da aplicação.

Outras ferramentas também utilizadas para o desenvolvimento e disponibilização do appAAP aos usuários foram:

- Vercel (<https://vercel.com/>) para hospedagem do *frontend*;
- Heroku (<https://heroku.com/>) para hospedagem do *backend*;
- Lucid (<https://lucid.app/>) para a etapa de modelagem;
- Gitlab (<https://gitlab.com/>) para versionamento de código;

Quanto à hospedagem definitiva, ela está em fase de adequação através de servidor próprio do IFRS Campus Canoas e pode(rá) ser acessada por meio dos links temporários: <https://appaap-frontend.dockerdev.canoas.ifrs.edu.br/> (módulo estudante) e <https://appaap-frontend.dockerdev.canoas.ifrs.edu.br/professor> (módulo docente)⁴⁹. Para tanto, está sendo utilizada integração contínua (*Continuous integration*) através das ferramentas *Git* e *Gitlab*. O *Gitlab* é um gerenciador de repositório que usa o *Git*, uma tecnologia que serve para o controle de versionamento de código. Apesar de existirem outras opções ao *Gitlab*, este é o único que permite a *CI*. No servidor do IFRS, o sistema fica dentro de um “contêiner” criado pelo *Docker*,

⁴⁹ A versão de teste disponibilizada como produto dessa tese está disponível em <https://aapaap-teste.vercel.app> (módulo estudante) e <https://aapaap-teste.vercel.app/professor> (módulo docente).

que usa virtualização a nível de sistema operacional para criação de ambientes. Estes contêm cada um uma esfera da aplicação (*frontend*, *backend* e banco de dados). A utilização do *Docker* é útil pois ao isolar, por exemplo, o *backend* do *frontend*, cria-se uma prevenção de possíveis conflitos, visto que ambos podem compartilhar uma mesma biblioteca como dependência, mas em versões diferentes.

Ainda, de modo vinculado ao TCC acima descrito foi utilizada a ferramenta Figma (<https://www.figma.com/>) para prototipagem das interfaces, na etapa de *design* das telas durante a metodologia de Design Interativo (BARBOSA; SILVA, 2010).

Os principais requisitos técnicos e pedagógicos estabelecidos para o desenvolvimento do appAAP foram:

- facilidade de manuseio e acesso para estudantes e professores;
- dispensa de recursos de software específicos que podem impor restrições de uso (dificuldades de download ou falta de memória disponível no aparelho etc.) possibilitando o acesso à ferramenta através endereço *Web* sem a necessidade de *download* de um aplicativo;
- possibilidade de utilização do módulo estudante preferencialmente através de *smartphones*, dispensando a necessidade de deslocamento a um laboratório de informática, otimizando, assim, o tempo de estudo em sala de aula e o trabalho do professor em termos de preparação de um ambiente específico para utilização da tecnologia em suas aulas;
- design responsivo de modo que o appAAP possa adaptar-se à tela do dispositivo em que estiver sendo usado, seja ele móvel ou não (*tablet*, *smartphone*, *desktop* etc.);
- acesso multiplataforma para uso a partir de diferentes plataformas ou sistemas operacionais (*Android*, *IOS*, *Windows* etc.);
- construção de dois módulos de usuários: módulo estudante e módulo docente;
- definição de logins e recurso de recuperação de senha de usuários;
- registro dos logs de navegação dos estudantes;
- cadastro de estudantes por turma;
- cadastro de situações-problema e elementos necessários à identificação de evidências de estratégias cognitivas no módulo docente para turmas específicas;
- extração de relatórios de uso do appAAP no módulo docente.

Sendo assim, o professor de posse das estratégias, procedimentos e ajudas, vincula esses elementos ao cadastrar uma questão no appAAP módulo docente (ver seção 5.3.4). O appAAP

é constituído, basicamente, por um ambiente que contém situações-problema junto a opções de ajuda (DRi, PNi e QRi), procedimentos (Pi) e estratégias de resolução. O appAAP armazena esses elementos, que constituem o modelo de avaliação da questão para a identificação das estratégias e dificuldades dos alunos, sendo que a lógica de julgamento armazenada na aplicação corresponde ao método de identificação de evidências de estratégias cognitivas explicitado e verificado em 5.2.3 e 5.2.4.

Esse baseia-se no registro e análise dos logs de acesso dos estudantes durante a utilização do aplicativo e armazenamento de informações associadas às ajudas. A análise dos logs das ajudas consultadas conduz a uma lista de procedimentos para análise de cada estudante e após cada um selecionar os procedimentos efetivos, a lógica implementada no appAAP aponta a estratégia e a indica ao estudante. Em resumo, o método de identificação de evidências de estratégias cognitivas via appAAP ocorre da seguinte forma:

- docente cadastra e libera as situações-problema para cada turma;
- cada estudante após registrar-se no appAAP, acessa a ferramenta e sua turma, seleciona uma situação-problema e tenta resolvê-la podendo buscar ajudas na ferramenta;
- o sistema armazena a lista de ajudas consultadas na questão pelo aluno;
- o sistema armazena a lista de procedimentos associados a cada ajuda (inclusive os repetidos);
- o sistema monta uma lista dos procedimentos repetidos nas ajudas e a exibe ao aluno;
 - quando aluno não pede ajuda, o sistema mostra a lista padrão de procedimentos de cada situação-problema que se constitui automaticamente com aqueles que se vinculam a apenas uma estratégia;
 - se o aluno solicitar ajudas e nessas não se identificarem procedimentos repetidos é sinal de que o aluno buscou poucas ajudas ou buscou ajudas de modo aleatório, ou seja, uma busca exploratória da situação-problema, mas sem ter ideia do que realmente estaria sendo exigido. Nesse caso, o sistema também utilizará a lista padrão.
- o estudante seleciona entre os procedimentos da lista gerada pela ferramenta aqueles que acredita ter realizado efetivamente;
- o sistema analisa o conjunto de procedimentos selecionados pelo aluno e verifica, para cada procedimento efetivo, quais as estratégias que eles estão associados;

- o sistema julga a estratégia desenvolvida pelo aluno considerando o grau de complexidade informado para a estratégia no momento do cadastramento no appAAP e da vinculação dos procedimentos pertinentes;
- o sistema exibe ao aluno a resposta esperada para a situação-problema e a estratégia que identificou e solicita que ele avalie o Grau de Similaridade (GS) entre a estratégia mostrada e a realizada por meio de uma escala do tipo Likert de 5 pontos;
- o estudante pode enviar comentários sobre a resolução, dúvidas adicionais etc. por meio de caixa de texto disponibilizada na aplicação;
- o estudante pode voltar à uma questão respondida, visualizá-la e ter acesso à sua resposta e à estratégia apontada pelo appAAP.
- o sistema elabora relatório ao professor contendo mais informações;
- a lista de ajudas consultadas fornece ao professor indicação de possíveis dificuldades de cada estudante acerca dos conceitos e procedimentos tentados e da habilidade de vincular o procedimento aos conceitos pertinentes e executá-los com competência reconhecendo sua aplicação (ou não) diante da situação-problema avaliada.

A próxima seção destina-se a apresentar o módulo estudante do appAAP e o processo de testagem e validação do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas explicitado acima⁵⁰.

⁵⁰ Optou-se por não trazer imagens do appAAP ao longo do texto e, sim, organizar uma apresentação que agrupasse e apresentasse de modo mais fluído as funcionalidades. A apresentação acerca do módulo estudante encontra-se disponível no link abaixo e também pode ser acessada através do QR Code.



Módulo estudante:
<https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vS5cx410-kL1PZBkvAEPezKrQY7jDHYy9A3wsthIb3m1zzYV-w68XsOa3Ak4R42Rw/pub?start=false&loop=false&delayms=3000&slide=id.p1>

5.3.1 Resultados: testes e avaliações do módulo estudante do appAAP

O módulo do estudante levado a teste foi a versão remodelada em 2021. Ao acessar o *link* da aplicação⁵¹, o estudante tem a opção de realizar *login* ou cadastrar-se e a partir do cadastro, informa uma turma e tem acesso às situações-problema contidas nela⁵². Antes disso, o usuário recebe orientações acerca de como pode utilizar o appAAP e para começar escolhe a situação-problema que quer resolver. Após ler o enunciado tem-se duas ações possíveis na ferramenta: clicar na barra “Digite sua resposta aqui” para informar uma resposta ou clicar em “Dica de resolução”. Destaca-se que são as ações dos estudantes durante o uso da aplicação que fornecerão as evidências necessárias para a identificação de evidências de estratégias cognitivas. O estudante não irá realizar os passos de resolução necessários dentro do app, mas as ajudas que consultar e, posteriormente, os procedimentos que selecionará são as informações que o sistema concatenará para informar a estratégia possivelmente elaborada por ele.

A etapa de testagem do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP ocorreu com grupos de estudantes com as mesmas características dos 15 participantes da primeira etapa da investigação. Por meio dos professores de matemática da instituição, o *link* do appAPP contendo as quatro situações-problema foi indicado para uso dos estudantes, de modo assíncrono. O aplicativo ficou disponível para teste por um período de quatro semanas entre novembro e dezembro de 2021. Ao todo, 81 alunos realizaram cadastro na aplicação, tendo sido disponibilizado o link a aproximadamente 250 estudantes, pelos respectivos professores de matemática das turmas que se enquadravam no público alvo do estudo.

Ao se cadastrarem na aplicação o sistema atribuía um *id_usuario* ao estudante e será através desse código que os dados serão apresentados na seção seguinte, preservando o anonimato dos participantes dessa fase. Além disso, como a Política de Privacidade do appAAP (Apêndice 10) não estava disponível no momento do teste, ela foi enviada ao e-mail informado pelos estudantes ao se cadastrarem no appAAP, junto a um termo de autorização de uso de dados de navegação da aplicação. Do total de alunos cadastrados, 48 autorizaram a utilização dos dados na apresentação dos resultados neste estudo.

A relação desses estudantes associando informações acerca das turmas e questões com

⁵¹ A versão testada foi disponibilizada por meio da plataforma Vercel através desse link temporário de uso da aplicação: <https://aapaap-teste.vercel.app/> e também no link temporário da hospedagem institucional: <https://aapaap-frontend.dockerdev.canoas.ifrs.edu.br/>.

⁵² Para acessar e vivenciar a experiência de uso do appAAP pode acessar a aplicação e cadastrar-se na turma “TESTE TESE” na qual estão disponibilizadas as situações-problema usadas na pesquisa.

tentativas realizadas por cada um, respostas, ajudas consultadas e procedimentos assinalados está disponível no Apêndice 11. O primeiro id de usuário do teste foi id_40 pois os anteriores foram usados para teste por parte da equipe de desenvolvimento, antes de liberação aos usuários efetivos.

5.3.1.1 Vila Lângaro: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP

Na situação-problema *Vila Lângaro* foram efetuadas 34 tentativas de usuários distintos. Deles, 9 não enviaram resposta ao problema, sendo que seis desses não consultaram nenhuma ajuda (NCA), o que indica que apenas visualizaram o enunciado do problema.

Por meio do relatório dos logs de acesso dos alunos no appAAP, percebeu-se que o estudante id_60 consultou apenas uma ajuda (DR3) e somente para essa situação-problema, sendo esse seu único acesso ao appAAP, o que pode indicar que, na verdade, não se envolveu com o problema em si, apenas explorou a aplicação. O id_105 também buscou apenas uma ajuda (QR1) nessa situação, porém como havia encerrado tentativa para outra situação-problema antes dessa, pode-se dizer que desistiu de seguir ou buscar novos auxílios à situação *Vila Lângaro*.

Por sua vez, o estudante id_95, embora também não tenha enviado resposta (NER), consultou várias ajudas: PN1, PN8, QR1, QR2, QR7, DR4, DR3, DR11, mas não assinalou procedimentos (NAP), já que o appAAP mostraria a ele a lista após enviar uma resposta – que poderia ser em branco - uma vez que a lista de procedimentos só é exibida após o estudante clicar em “enviar resposta”. Entretanto, seguindo a lógica de análise apresentada em 5.2.4. é possível utilizar esses dados também como evidências das estratégias cognitivas que o estudante estaria elaborando, embora não conhecendo os Pi efetivos dentro do conjunto de Pi repetidos, nem sempre será possível convergir a uma única estratégia como exemplificado no Quadro 50.

Quadro 50: *Vila Lângaro* - usuário appAAP id_95

Id_ usuário	evidências (DRi, PNi e QRi e Pi associados)	Pi repetidos	Pi efetivos	Ei associado(s)				
				E1	E2	E3	E4	E5
id_95	PN1 → P1, P3, P4, P20, P21, P22, P23, P27 PN8 → P8, P28, P29 QR1 → P5, P12, P13, P14, P21, P22, P24, P28, P29 QR2 → P2, P5, P6, P7, P24, P25, QR7 → P26 DR4 → P4, P15, P16, P17, P27 DR3 → P6, P8, P11, P19 DR11 → P1, P2, P9, P10	P1 P2 P4 P6 P8 P21 P22 P24 P27 P28 P29	NA	X X X X	X X X	X X	X X	X X X

Fonte: dados da pesquisa.

Apesar disso, a lista de ajudas consultadas já fornece evidências importantes, inclusive ao considerar a ordem dessas consultas. Pode-se inferir, a partir dos dados do appAAP, que o estudante id_95 possivelmente iniciou com dúvidas acerca do objetivo da situação-problema (PN1) e também acerca da possibilidade de usar regra de três para tanto (PN8). Em seguida, buscando um caminho alternativo, ou seja, em frente a um impasse, buscou ajuda associada à abordagem geométrica (QR1) e aos conceitos que poderia usar para resolver o problema (QR2 e QR7). Em seguida, buscou dicas de resolução DR3, DR4 e DR11 que poderia lhe direcionar à resolução por meio de uma abordagem geométrica ou algébrica. Possivelmente, nesse caso, lacunas lhe impossibilitaram de seguir, de efetuar os procedimentos apontados nas DR*i* consultadas, indicando possível ausência de recursos (conhecimentos declarativos, procedurais ou condicionais) ou de competências para articular os recursos disponíveis na busca pela solução ao problema. De todo modo, seu envolvimento na busca por ajudas, indica sua tentativa e esforço, o que apontaria ao professor a necessidade de fornecer apoio pedagógico direcionado às dificuldades desse estudante.

Seguindo a análise dos dados obtidos por meio dos relatórios do appAAP, dois estudantes id_61 e id_97, apesar de também não consultarem ajudas (NCA), informaram respostas (7 metros e 5 metros, respectivamente) e ambos escolheram P22, informando que tentaram obter a altura h do pórtico através de cálculo associado à área de alguma figura plana identificada a partir da figura 2 dada na situação-problema. Com base nisso, o appAAP mostrou a eles o texto referente à estratégia E1⁵³:

Você explorou a situação-problema por meio de raciocínios baseados em elementos geométricos, utilizando conceitos e fórmulas pré-definidas associados a figuras planas como o cálculo de área, por exemplo. Contudo, é preciso desenvolver a capacidade de identificar em que contextos esses procedimentos podem ser executados. Note que nessa situação-problema o cálculo da altura do pórtico envolve a compreensão e a utilização de conceitos associados à função quadrática e seus elementos.

O estudante id_61, entretanto, informou grau de similaridade 1 (GS=1) entre a estratégia indicada no appAAP e a efetivamente realizada, mas não indicou o que teria levado a esse julgamento. Retomando as entrevistas clínicas que geraram os dados do appAAP é provável que ele tenha, realmente, caminhado por processos inerentes a estratégia E1, já que há a possibilidade de o estudante também não ter compreendido algo durante a leitura do próprio

⁵³Optou-se por apresentar aos estudantes no appAAP um texto com linguagem adaptada, com menos quantidade de termos específicos que poderiam comprometer a atribuição de significação à estratégia pelo estudante, tendo em vista ao uso do appAAP de forma totalmente remota. Portanto, a descrição das estratégias nessa seção contém os textos informados aos alunos sendo esses distintos, porém equivalentes, daqueles apresentados nos quadros que trouxeram as estratégias identificadas na pesquisa ao longo da análise na seção 5.2.3.

texto referente à estratégia. Já id_97, com grau de GS=3 enviou comentário que auxilia na compreensão do seu raciocínio: “Na hora eu não consegui tirar da cabeça a questão da primeira imagem ser bem arredondada, então instantaneamente pensei em usar a fórmula de diâmetro e raio ($D=2R$)” (id_97, Vila Lângaro).

Quatro estudantes (id_56; id_104, id_113 e id_130) receberam E2 como retorno de sua tentativa:

Você explorou a situação-problema por meio de uma abordagem gráfica por associação à outra situação-problema, através do reconhecimento de alguma(s) característica(s) do gráfico: raízes, vértice, pontos de intersecção etc. Contudo, poderia ter utilizado conceitos e procedimentos inerentes à função quadrática, elaborando raciocínios que possibilitassem ir além da associação gráfica/geométrica, por exemplo, compondo a lei da função e reconhecendo pares ordenados nessa representação gráfica, tais como a intersecção com os eixos coordenados, coordenadas do vértice etc.

Observou-se, ao longo da análise dos dados gerados na testagem do appAAP que se o estudante não buscar ajuda e avaliar os procedimentos da lista padrão sem um direcionamento à estratégia efetivamente informada, ou seja, sem clareza acerca do que realmente usou (ou não) na resolução da situação-problema, o appAAP irá indicar, possivelmente uma estratégia distante da que de fato foi realizada. Isso foi possível perceber por meio da análise dos logs de id_113 que assinalou P7 específico de E2, além de P17, P16, P3 e P15 que apontavam para E3 ou E4. O estudante não buscou nenhuma ajuda, logo, julgou a lista padrão de procedimentos, além de ter obtido resposta correta ao problema, sendo o único estudante que respondeu $\frac{75}{9} m$, ou seja, a forma não simplificada de $\frac{25}{3} m$.

1. Criar um gráfico com o coeficiente C nulo (0), para simplificar as operações. 2. Criar um sistema de equações com pontos já conhecidos para descobrir os valores dos coeficientes A e B. 3. Identificar o valor y do vértice da parábola a partir da fórmula $-(b^2 - 4ac) / 4a$. 4. Simplificar o resultado (coloquei 75/9, não vi que dava pra dividir por 3) (Id_113, Vila Lângaro).

Nota-se que, em função do grau de complexidade das estratégias indicado em 5.2.4 ($E2 < E3 < E4$) o appAAP mostrou E2 ao estudante, que não concordou com a avaliação e julgou GS=1. Seu comentário explicita que, de fato, P7 não foi realizado e a obtenção de resposta correta $75/9 m$ ao problema teria ocorrido por E4.

Os estudantes id_104 e id_130 informaram 12 e 4 metros, respectivamente, como resposta e ambos indicaram GS=3 à estratégia E2 mostrada pelo appAAP. A única ajuda consultada por id_130 foi DR2 que direcionava ao formato do gráfico de uma função quadrática, confirmado por P1. Já id_104, consultou DR1, DR7 e por último DR2, dicas de

resolução que indicam associação à função quadrática ou a resolução de equações de 2º grau, confirmado pelo procedimento P7 assinalado.

Já em relação ao estudante id_56, que acertou a resposta, não consultou ajudas e acabou assinalando vários procedimentos aleatórios da lista padrão e indicou por fim GS=3 para a estratégia mostrada no appAAP, não se tem maiores informações para julgar o modo de resolução adotado, pois aparentemente, não há coerência entre alguns dos procedimentos assinalados, já que uns excluíam outros durante a elaboração de uma estratégia para resolver o problema. Note que P28 indica uma abordagem que envolve proporcionalidade enquanto P19 indica a resolução de um sistema linear. Tem-se aqui, possíveis evidências de que o estudante deve ter obtido o resultado com algum “colega” e apenas “cumpriu a tarefa” de acessar o appAAP conforme indicado pelo seu professor de matemática. Isso foi identificado inclusive em relação à outras situações-problema, pois como inseriu-se no appAAP uma lógica de embaralhamento das situações-problema, a ordem das mesmas mudava de um usuário a outro, e alguns alunos informaram 25/3 como resposta da situação *Palco em construção*, por exemplo. Nas considerações III (seção 5.3.3) aborda-se essa situação, uma vez que isso pode ser reflexo de uma mentalidade avaliativa que valoriza o acerto em detrimento do processo.

A estratégia E3 foi a que mais estudantes (10) foram linkados no appAAP (Quadro 51).

Quadro 51: Vila Lângaro - id_usuários appAAP indicados para E3

Id_	Resposta fornecida	Ajudas consultadas	Pi assinalados	Ei	GS
64	8,33m	DR4, PN1, DR4, PN3	4	E3	3
82	25/3	NCA	3,18,25	E3	1
67	25/3	NCA	3,11,15,18	E3	3
92	$p(0,0) > c=0$	NCA	15	E3	3
93	25/3m	NCA	3	E3	3
94	8m	NCA	3,15,17,18	E3	3
103	25/3m	NCA	3,18	E3	3
102	25/3 metros	NCA	3,11,15,17,18	E3	4
75	25/3	NCA	3,11,15,19,27	E3	5
80	25/3 metros	NCA	3	E3	5

Fonte: dados da pesquisa.

O texto correspondente a estratégia E3 mostrada aos estudantes foi o seguinte:

A estratégia elaborada por você implica no reconhecimento e na associação de diferentes formas de representação (gráfica/geométrica e algébrica/simbólica) dos elementos abordados na situação-problema. Contudo, indica que há a necessidade de abordar de modo articulado conceitos e procedimentos para obter relações que possam auxiliar e simplificar o processo de resolução da situação problema.

Pode-se verificar que, de modo geral, os estudantes enquadrados em E3 acertaram a resposta à situação-problema, com exceção de id_92 e id_94. Além disso, apenas id_64 buscou ajudas na ferramenta, de modo que a lista de procedimentos mostrada foi gerada a partir das ajudas consultadas. Pelas ajudas, o estudante buscou usar informações acerca do vértice da parábola (DR4) e, possivelmente, com dúvidas acerca do reconhecimento adequado à sua associação ao problema, consultou PN1 e PN3, para seguir. Com a escolha de P4, pode-se concluir que o estudante de fato utilizou a dica consultada e que a estratégia E3 mostrou-se adequada ao que executou na resolução do problema.

Os demais estudantes, não consultaram ajudas, logo, ao enviar suas respostas, avaliaram os procedimentos indicados na lista padrão. Aqui cabe a mesma observação de id_113 na estratégia E2, especialmente se considerar o julgamento do grau de similaridade de id_82, que enviou um comentário a respeito de sua resolução, o que apontaria para E4:

Eu marquei nas estratégias a identificação dos eixos, utilização da forma geral de funções quadráticas e utilização de pontos conhecidos para testar os resultados, é literalmente o oposto do descrito pelo app, com por exemplo. [...] Minha solução: Determinei o eixo y passando pelo vértice da parábola e o eixo x na altura do ponto 5. Utilizei $a(x-x_1)(x-x_2)$ e determinei a com o ponto (4,3), depois achei o coeficiente c em ax^2+bx+c . (Vila Lângaro, id_82)

Como o estudante julgou que havia realizado os procedimentos 3, 18 e 25, o appAAP apontou a estratégia E3 de menor complexidade, mas fez com que o procedimento P3 passasse a integrar a estratégia E4, uma atualização realizada posteriormente no appAAP, que antes não havia sido identificada. O mesmo ocorreu com id_93, pois em seu comentário afirmou que usou a forma fatorada no polinômio de segundo grau, mas não assinalou P18, por isso o appAAP retornou E3 e não E4. De todo modo, as informações coletadas conseguem mostrar ao professor que esses alunos realizaram efetivamente E4, ou seja, as evidências e campos de coleta de dados no appAAP colaboram para o objetivo ao qual o appAAP foi criado.

Destaca-se que isso pode ter ocorrido com os demais estudantes que não consultaram ajudas e julgaram apenas os procedimentos da lista padrão e não enviaram comentários, porém como o grau de similaridade informado por esses alunos ficou em 3, 4 ou 5, acredita-se que os estudantes concordaram com a avaliação do appAAP e não sentiram necessidade de enviar comentários adicionais, no caso.

Os estudantes id_51 e id_125 foram enquadrados em E4:

A estratégia elaborada indica que reconhece as relações funcionais expressas por meio da representação gráfica dada na situação e que compreende e utiliza conhecimentos algébricos para resolver o problema, buscando obter a lei geral da função, cujo gráfico expressa o pórtico dado. Isso significa que você conseguiu

abordar de modo articulado conceitos e procedimentos algébricos e obter relações que auxiliaram na simplificação do processo de resolução da situação-problema, tendo em vista os objetivos traçados por você durante cada etapa da resolução.

Nenhum dos dois consultou ajudas, sendo que id_51 informou resposta 5 m e indicou P19 que remete a montagem de um sistema linear para identificação dos coeficientes da lei da função representada no gráfico, utilizando pontos também identificados graficamente. Sendo efetivamente esse procedimento o executado, o fato da resposta estar incorreta pode se associar à erro durante o processo de cálculo ou seleção de informações, já que reconheceu procedimento válido à resolução da situação. Por sua vez, id_125 acertou a resposta, indicou P18 e enviou um comentário que confirma a estratégia indicada, assim como o GS=4 informado:

Traçando uma linha do pico perpendicular a sua base, teremos o eixo y. As coordenadas (0,-5) e (0,5) são as raízes da parábola. Aplicando a fórmula substituindo as raízes teremos $y=a(x-5)(x+5)$. Para obter o 'a', usar um dos pontos da parábola, no caso temos a coordenada (4,3), ficando $3=a(4-5)(4+5)$. teremos então $a=-1/3$. voltando na fórmula $y=a(x-5)(x+5)$ e sabendo que o y que procuramos é o y do vértice, teremos uma coordenada no ponto mais alto (x_v, y_v) >> (0, y_v). Substituindo na fórmula $y=-1/3(0-5)(0+5)$. Resultando em $25/3$ o y do vértice que corresponde ao comprimento H do pórtico. (Vila Lângaro, id_125)

Por fim, E5 foi indicada aos estudantes do Quadro 52.

A estratégia elaborada indica a construção de um caminho pautado em verificação de resultados a partir de tentativas tais como o uso de relações de proporcionalidade ou regra de três, buscando valores aproximados para a altura do pórtico, por exemplo. Note que há a necessidade de verificar em que casos cada uma dessas técnicas de resolução são válidas, quando podem ser utilizadas e se satisfazem as condições do problema. Perceba que nessa situação-problema o cálculo da altura do pórtico envolve a compreensão e a utilização de conceitos associados à função quadrática e seus elementos.

Quadro 52: Vila Lângaro - id_usuários appAAP indicados para E5

Id_	Resposta fornecida	Ajudas consultadas	Pi assinalados	Ei	GS
59	$f(5) = -5/3 \cdot (5-10)$ $f(5) = -5/3 \cdot (-5)$ $f(5) = 25/3 = 8,3...$	NCA	25	E5	4
83	19 (essa é a altura máxima)	NCA	7, 25, 3, 27, 16, 11	E5	3
85	A concavidade é para baixo então é -1. X_v é =5	DR4, QR2, PN10, DR7	6,7,9,13,18,20,24,25	E5	3
96	8	NCA	2	E5	3
101	7	NCA	2	E5	4

Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se que apenas id_85 consultou ajudas e, mesmo assim, teve dificuldades em seguir uma estratégia. DR4 indica o direcionamento à análise do vértice da parábola, que id_85 inclusive citou em sua resposta. O estudante também enfrentou impasses e dúvidas, suas ajudas foram de certo modo aleatórias, o mesmo com os procedimentos assinalados posteriormente.

Essa abordagem exploratória do problema indica a necessidade de auxílio mais direcionado. Os demais estudantes que não consultaram ajuda, também remetem a essa abordagem exploratória ao problema e de certo modo com procedimentos aleatórios. O estudante id_59 informa o cálculo do valor da função no ponto ($f(5)$) por meio de P25, contudo a função não é dada e não se tem evidências de como ela foi obtida.

Por fim, cabe trazer observações acerca de dois estudantes: id_54 que indicou 7 metros como resposta, não buscou ajuda e não assinalou procedimentos, não finalizando a questão; e id_78 que consultou a ajuda DR1 mas escreveu na barra de resposta “não sei fazer essa atividade” e de igual modo não assinalou procedimentos. Nesse caso, esses estudantes também entram no grupo que precisariam de apoio pedagógico mais direcionado. Desse modo, mesmo assim, o appAAP contribuiria para a realização de uma avaliação mediadora, na perspectiva de Hoffmann (2014, 2017, 2018), pois a ausência de ações também são evidências a serem consideradas.

5.3.1.2 Praça dos Arcos: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP

Na situação-problema *Praça dos Arcos* também foram realizadas 34 tentativas de usuários distintos. Deles, 9 não enviaram resposta ao problema, sendo que 7 entre eles não consultaram nenhuma ajuda (NCA), o que indica que apenas visualizaram o enunciado do problema. O estudante id_62 consultou as ajudas DR4 e PN2 e o id_65, além de DR4, consultou DR5 e PN12, para ambos isso pode indicar que estavam raciocinando em direção à consideração do gráfico de uma função quadrática. Já id_104 consultou apenas DR7, e também não seguiu em sua tentativa. Por sua vez, três estudantes (id_54, id_130, id_84) apesar de inserirem respostas à situação não julgaram os procedimentos da lista padrão mostrada, não encerrando a questão. Todos com respostas incorretas, contudo id_84 informou $h=25/3$ m como resposta, que seria a resposta à situação-problema anterior. Possivelmente este estudante conseguiu essa resposta com algum colega e a inseriu na situação errada, já que o sistema embaralhava as situações para cada aluno.

A estratégia E6 foi apontada para três estudantes: id_56, id_61 e id_80:

De forma geral, você abordou o problema de modo exploratório. Provavelmente teve dificuldades em interpretar e relacionar as informações do problema e em conceber uma visualização (mental ou gráfica) do outdoor. Você poderia ter explorado propriedades da função de segundo grau, tais como a intersecção com os eixos coordenados e as raízes, representando essas informações graficamente para abordar a situação em uma perspectiva geométrica/algébrica.

O primeiro informou resposta correta, não consultou ajudas e assinalou vários procedimentos da lista padrão, o que não auxilia, nesse caso, a identificar a estratégia efetiva, uma vez que os procedimentos assinalados por ele poderiam indicar qualquer uma das estratégias. Além disso, como P18 e P36 apontam para a estratégia E9, sendo P36 direcionado ao uso de cálculo integral e considerando id_56, aluno do curso superior de licenciatura em matemática, é mais provável que essa tenha sido a estratégia elaborada. Os outros estudantes id_60 e id_80 informaram 60 e 2 m² como resposta, sendo os GS=1 e GS=5 respectivamente. Nesse caso id_60 não consultou ajudas e assinalou apenas P2, logo o appAAP indicou E6. Já id_80 buscou ajuda acerca de como representar graficamente uma função (DR1) e assinalou P1, P2 e P3, que indica a abordagem exploratória da situação-problema.

Na estratégia E7, três estudantes id_51, id_97 e id_83 foram vinculados, todos eles com GS=3. O texto mostrado a esses estudantes foi o seguinte:

É possível que você tenha construído a representação analítica/gráfica da situação elaborando uma tabela de valores dada a função fornecida no enunciado. Você localizou os eixos coordenados e deve ter obtido os pontos de intersecção com o eixo x e eixo y . Contudo, teve alguma dificuldade em interpretar esses elementos algebricamente. Embora possa ter obtido a resposta correta, provavelmente, você realizou um número maior de processos para a resolução, o que exigiu maior envolvimento com a situação. Indica-se o estudo das propriedades geométricas e algébricas da função quadrática, como os significados dos coeficientes a , b e c da lei geral da função quadrática, por exemplo.

O estudante id_83 informou a resposta correta, não consultou ajuda, mas os procedimentos assinalados (P27, P25 e P10) e o comentário encaminhado confirmam a estratégia E7. O estudante id_51 atribuiu valores de x na lei $f(x)$ da função para verificar se os pontos obtidos pertenciam à representação gráfica da função (P25) e ao final obteve 20 m² como resposta, incorreta, ao problema. Provavelmente se tivesse buscado por ajudas poderia ter mais bem desenvolvido seu raciocínio diante desse problema. Por fim, id_97 que respondeu 18m², mas corrigiu para 36m² no comentário enviado, consultou as ajudas DR1, PN12, DR8, QR8, DR2, DR2, DR5, QR8, assinalando da lista mostrada a ele (P1, P2, P32, P34, P36) os procedimentos P1 que aponta E7 e E8 e P34 que aponta E7, E8 e E9, de modo que pelo grau de complexidade $E7 < E8 < E9$ o que se pode garantir é E7.

Para 8 estudantes a estratégia evidenciada foi E8:

Provavelmente você deve ter traçado o gráfico da função e associadas corretamente as posições relativas entre a parábola e o retângulo descrito no enunciado. Você

identificou graficamente o eixo de simetria e explorou propriedades geométricas e algébricas da função, como a identificação das raízes reais, a intersecção com o eixo y e o ponto de máximo da função. A estratégia elaborada indica que você explorou os significados que podem ser associados aos coeficientes a, b e c da lei geral da função quadrática. Ainda assim, é possível utilizar outros procedimentos para resolver essa situação-problema, tal como a fatoração, já que a expressão fornecida engloba a diferença de dois quadrados, ou seja, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

O Quadro 53 traz o resumo das informações desses estudantes. Nota-se que nenhum deles consultou ajuda, mas que houve um direcionamento em relação aos procedimentos efetivos que eles assinalaram. Os graus de similaridade informados confirmam a estratégia identificada, que também é amparada pelos comentários que foram enviados. Apenas id_101 não concordou com a estratégia, no entanto, nesse caso, se não tivesse assinalado P10 o que o sistema mostraria a ele seria o seguinte texto: “Ah, que pena! Não foi possível identificar a estratégia usada por você, pois nenhum procedimento foi selecionado! Não se preocupe, as ajudas que você consultou estão salvas e poderão ser acessadas pelo docente para que ele possa auxiliar em suas dificuldades”. Além disso, por meio dos comentários, seria ainda possível avaliar a tentativa de id_113 como sendo E9. Os procedimentos P16 e P17 informados também direcionam a E9, contudo P10 prevaleceu, considerando a complexidade $E8 < E9$. Por fim, percebe-se que além de id_101, apenas id_94 e id_82 não informaram resposta correta e as evidências coletadas no appAAP não são suficientes para maiores conclusões acerca do processo de resolução desses estudantes.

Quadro 53: Praça dos arcos - id_usuários appAAP indicados para E8

id_usuario	resposta	Ajudas consultadas	Pi_ efetivos	GS	Comentário
75	36	NCA	10,27	5	fiz a análise toda em cima da simetria, descobri as raízes da função: $f(x) = -x^2 + 9$. E depois sabendo que a simetria se dava em $x=0$, analisei a função em: $f(0) = -0^2 + 9$. Então cheguei nos valores pretendidos.
82	36	NCA	10,18	3	
94	+3	NCA	10,17	3	
113	18	NCA	10, 16, 17	5	1. Esboçar a parábola 2. Definir as raízes 3. Identificar o Y do vértice 4. Calcular $2/3 * (x''-x' * Yv)$
64	36m ²	NCA	10	4	
93	36m ²	NCA	10	3	Com $x=0$, obtemos a altura do arco, que, se tratando do eixo y, é 9 metros. Agora com $y=0$ obtemos as raízes de x, sendo $x=3$ e $x=-3$, respectivamente. Do ponto -3 até o ponto 3 temos 6 metros, portando podemos reconhecer que o retângulo possui medidas 6x9m, 54m ² no total, mas o enunciado nos informa que o valor da parábola se trata de 2/3 do valor do retângulo, o que totaliza 36m ² .
102	36m ²	NCA	10,17	4	
101	64m ²	NCA	10	2	Na verdade a estratégia não foi essa.

Fonte: dados da pesquisa.

A estratégia E9 foi realizada por 7 estudantes (Quadro 54).

Quadro 54: *Praça dos arcos* - id_usuários appAAP indicados para E9

id_usuário	resposta	Ajudas consultadas	Pi_repetidos	Pi_efetivos	GS	Comentário
63	36m ²	PN12	Lista padrão	27	3	Ao tomar o chão como eixo horizontal, para $y=0$, x equivale quanto mede a parte mais próxima do chão do outdoor. A altura do outdoor é quando temos o menor valor de x , pois o eixo de simetria é o eixo vertical. Ao encontrarmos a altura e um valor, compreendesse uma figura quadrangular regular, onde a área é dada pelo produto da base e altura. O enunciado informa que a área do outdoor é $2/3$ da dessa figura imaginada.
125	36	DR8	Lista padrão	17	4	y do vértice é 9. Corresponde à altura da parábola. Que corresponde a altura do retângulo do outdoor. As raízes (-3 e 3) são os extremos da base do retângulo. Ou seja, o comprimento da base é 6. O retângulo terá base 6 e altura 9. Calculando a área do retângulo = 54. O outdoor tem $2/3$ de 54, resultando em 36.
85	36m ³	DR8, DR6, PN5, PN13	P36	36	3	
96	36	NCA		36	3	
103	36m ²	NCA		17	3	
59	36m ³	NCA		16, 17	4	$x = -0/2(-1) = 0$ $y = -(0\text{elevado}2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9) = -36/4 = 9$ $a = 2/3 \cdot 6 \cdot 9 = 36m^3$
92	*	NCA		18	3	* $y = ax^2 + bx = c$

Fonte: dados da pesquisa.

A estratégia E9 diz:

De modo geral você abordou a situação em uma perspectiva predominantemente algébrica, fazendo uso de símbolos para representar as relações presentes na situação e para determinar os elementos necessários à sua resolução. Utilizou expressões algébricas como fatoração, ou as fórmulas que fornecem o valor do x e do y do vértice da parábola, ou, ainda, talvez tenha mencionado a possibilidade de utilizar técnicas de cálculo integral para obtenção da área delimitada entre a parábola e o eixo x . Você deve ter conseguido argumentar e resolver a situação de modo relativamente resumido, considerando as informações que conseguiu extrair rapidamente a partir da compreensão algébrica do problema.

Pode-se verificar que somente para id_92 não se pode concluir acerca de sua estratégia nessa situação em função da ausência de ações no appAAP, inclusive pela resposta fornecida. Apesar de id_96, id_103 e id_59 não consultarem ajuda, os procedimentos selecionados indicaram a estratégia elaborada, que está de acordo com o GS informado. Para os que consultaram ajuda, nota-se que id_85 foi o único que consultou mais de uma, e o único procedimento repetido nessas ajudas foi P36, o qual foi assinalado pelo estudante. Isso indica que quanto mais ações os estudantes fizerem no appAAP mais direcionada a identificação da estratégia cognitiva elaborada estará. Notam-se ajustes pontuais quanto à notação m² no informado por id_59; id_85, além da ausência de indicação de unidade em algumas respostas que, nessa análise não foram consideradas enquanto dados para a pesquisa, tanto nessa quanto nas demais situações-problema.

5.3.1.3 Palco em construção: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP

Para essa situação-problema foram obtidas 38 tentativas durante o teste do appAPP. Dessas, 13 foram de estudantes que não enviaram resposta (NER) e, desses, 10 não consultaram ajuda (NCA). Id_65, id_95 e id_76 consultaram uma ajuda cada, respectivamente PN14, DR5 e DR9, as quais podem evidenciar o início de um raciocínio para a solução do problema, mas não seguiram suas tentativas. Outros 3 estudantes (id_114, id_130 e id_96) enviaram respostas incorretas e não navegaram na ferramenta, de modo que não há dados para considerar o que pensaram para a resolução do problema. Os estudantes id_99, id_102, id_67 e id_54, enviaram respostas e buscaram ajudas, mas não assinalaram procedimentos. Apesar disso, pode-se inferir algumas de suas hipóteses ao analisar as ajudas consultadas, como é o caso, por exemplo, e id_99 (PN14 e PN16) e id_102 (PN16, DR110, PN14, QR9) e id_67 (PN16) os quais, provavelmente, utilizaram a estratégia E10, que diz o seguinte:

De modo geral, você abordou a situação-problema numa perspectiva exploratória com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, para o cálculo da área do palco. Os procedimentos realizados não remetem à busca por relações algébricas entre a área do palco e as medidas das laterais, considerando a quantidade de placas de led disponíveis. Tente obter uma função que expresse a área do palco em função de um de seus lados e analise as propriedades algébricas e gráficas da função assim obtida.

No caso dos 9 estudantes identificados pelo appAAP como E10, Quadro 55, apenas um deles (id_59) consultou ajudas PN16, PN3 e PN14 (retornando PN14 e PN16 várias vezes) e assinalando P38 como procedimento realizado efetivamente que indica a associação do prisma reto retângulo a um paralelepípedo com área da base dada por $A \times B$ e altura h , o que está de acordo com PN14. Apesar disso, P38 é um procedimento que pode indicar qualquer estratégia dessa situação (E10, E11, E12 ou E13) e, ao observar as informações fornecidas no campo de resposta percebe-se uma tentativa de composição de expressões para obtenção de relações que pudessem fornecer essa área máxima. Nesse caso, percebe-se a necessidade de apoio pedagógico para que a estudante continuar a estratégia iniciada, ajustando o que for necessário para a obtenção de êxito e compreensão do problema.

Os demais estudantes do Quadro 55 não consultaram ajudas, mas os procedimentos assinalados (especialmente P47), junto ao grau de similaridade informado evidenciam que abordaram de forma exploratória o problema, partindo de cálculos analíticos considerando medidas atribuídas de modo mais ou menos aleatório às medidas dos lados do palco, o que

levou os estudantes id_64, id_75, id_83 e id_93 concluírem que a maior área possível seria 625 m² considerando um palco quadrado de lados iguais a 25m. Os comentários inseridos por esses estudantes amparam essas conclusões.

Quadro 55: *Palco em construção*- id_usuários appAAP indicados para E10

id_usuario	resposta	Ajudas consultadas	Pi efetivos	GS	Comentário
59	$2a+2b=100$ $2.100+2b=100$ $200+2b=100$ $200-100=2b$ $b=100\div 2=50$ $y=100\times 50=5000$	PN16, PN3, PN16, PN14, PN16, PN16, PN16, PN14, PN14, PN14	38	4	A forma de escrita não deixa pular pra parte de baixo
61	Medida A (30 metros)	NCA	47	3	Medida A (30 metros) Medida B (20 metros)
64	625 m ²	NCA	47,51	2	
75	625	NCA	47,49	5	
80	10 metros quadrados	NCA	47	5	
83	625m ²	NCA	49, 51, 47	3	$A=B$ $2A + 2B = 100$ $2A + 2A = 100$ $A = 100/4$ $A=25$ $25.25 = 625M^2$
93	625m ²	NCA	47, 49, 51	3	Minha consideração inicial foi um palco com todas as medidas iguais, portanto, se tratando de 100 metros de placas de led divididas por 4 lados de palco, 25x25m, totalizando 625m ³ . Um palco de 24x26 daria um total de 624m ² , um de 23x27 teria 621m ² , e notei que esse padrão de diminuição se mantinha, portanto reconheci que o maior tamanho possível de palco, utilizando os 100 metros de placas de led, seria um palco de 25x25m, portanto 625m ² .
97	a = b = 25 metros.	NCA	47	3	Distribui os leds em lados iguais do palco $A = B = 25 \rightarrow 625m^2$
113	625	NCA	47	5	

Fonte: dados da pesquisa.

A estratégia E11 foi obtida por 7 estudantes:

A estratégia elaborada possibilitou que você associasse as variáveis presentes na situação-problema, bem como os conceitos de perímetro e área. Contudo, você não conclui a questão por meio de uma argumentação algébrica. Provavelmente você tenha testado valores para as medidas dos lados e calculado o valor área em cada caso. Essa é uma maneira de obter a resposta dessa situação-problema, porém, dessa forma a área do palco não é tratada como função da medida dos lados que devem ser constituídos pelas placas de led. Tente obter uma função que expresse a área do palco em função de um de seus lados e analise as propriedades algébricas e gráficas da função assim obtida.

Percebe-se que as estratégias E10 e E11 possuem uma diferença bastante sutil que, por meio do appAAP, por vezes, não ficou evidente. O Quadro 56 apresenta as tentativas desses estudantes.

O que direcionou esses estudantes à E11, com exceção de id_101 foi a seleção do procedimento P49, que afirma a identificação de que $A + B = 50$ e que na medida em que os valores de A ou B se distanciam de 25 a área $A \cdot B$ diminui. De certo modo, essa percepção indica a presença da ideia de variação da área em função da medida dos lados, diferente da

anterior que remetia exclusivamente à atribuição de valores, de certa forma aleatória, para A e B. Assim, se esses estudantes, de fato realizaram P49, é correto eles estarem associados a E11. Por sua vez, há incoerências identificadas aqui. Por exemplo: id_51 informou 20 como resposta e assinalou P49; o mesmo fez id_104, que obteve resposta 100 m², mesmo tendo recorrido às ajudas PN14 e PN16. Por sua vez, id_101, que obteve 200, consultou QR9 e DR11, sendo P1 o único procedimento repetido e este sendo assinalado poderia indicar E11, E12 ou E13, e não se tem mais informações além do GS=3 para considerar.

Quadro 56: *Palco em construção* - id_usuários appAAP indicados para E11

id_ usuário	resposta	Ajudas consultadas	Pi efetivos	GS
51	20	NCA	49	3
110	A= 25 e B=25, para que haja a maior área possível	NCA	17, 49	3
56	625m ²	NCA	13,25,48,49,51	3
82	625	NCA	48,49	4
103	625m ²	NCA	17,49	4
101	200	QR9, DR11	1	3
104	100 m ²	PN16, PN14	49	3

Fonte: dados da pesquisa.

Nenhum estudante foi associado pelo appAAP à estratégia E12:

De modo geral, você utilizou argumentos geométricos e algumas representações algébricas em sua resolução. Isso significa que você deve ter conseguido obter a relação que fornece a área do palco a partir da medida dos lados que devem ser constituídos pelas placas de led. Contudo, de forma predominante, sua resolução baseou-se em conhecimentos geométricos, ou seja, você não explorou os aspectos dessa relação enquanto função, tais como ponto de máximo ou vértice da função quadrática correspondente etc. Ao usar esses elementos você poderia diminuir a quantidade de passos necessários para a resolução dessa situação-problema.

Por fim, na estratégia E13 foram associados os estudantes id_85 e id_92. Esse último, não consultou ajuda, apenas indicou pontos como resposta, assinalou P51, afirmando ter identificado que a diferença, em módulo, entre as medidas dos lados obedece a uma relação linear e que o maior valor da área ocorre quando essa diferença é nula, ou seja, quando A=B=25 e GS=5. Apesar disso, a resposta informada (“pontos A (2, 1), B (- 3, - 4)”) não faz muito sentido no contexto do problema, o que exigiria, igualmente, ações do professor para avaliação desse estudante. O estudante id_85 indicou a seguinte resolução no campo de resposta: “ $A=B / 2A + 2B = 100 / 2A + 2A = 100 / A = 100/4 / A = 25 / 25.25 = 625M^2$ ”. Porém o appAAP mostrou a ele o seguinte texto referente a E13:

Você provavelmente resolveu essa situação-problema usando conceitos algébricos. Isso significa que você deve ter obtido a relação funcional que fornece a área do

palco a partir da medida dos lados revestidos pelas placas de led. A estratégia que você desenvolveu englobou aspectos inerentes às propriedades algébricas de uma função polinomial de 2º grau, associando elementos da representação gráfica e da algébrica, explorando as propriedades características da relação funcional encontrada.

Quadro 57: *Estacionamento* - usuário appAAP id_85

Id_ usuário	evidências (DRi, PNi e QRi e Pi associados)	Pi repetidos	Pi efetivos	Ei associado(s)			
				E10	E11	E12	E12
id_85	DR1 → P1, P2, P3, P32, P33	P1					
	DR6 → P16, P17, P34, P48	P48	P48				X
	PN5 → P12, P13, P48						
	QR9 → P1, P8, P41, P42, P48						

Fonte: dados da pesquisa.

As ajudas de id_85 (Quadro 57) apontam que ele buscou pela representação gráfica da função, pensou acerca do ponto de máximo do gráfico, identificou $b=0$ tendo dúvidas acerca da influência gráfica desse coeficiente no gráfico e enfrentou impasses diante da ideia de maximizar uma área em função de alguma restrição. No entanto, há uma incongruência quanto a essas ideias e a resposta fornecida por ele. Além disso, sua resposta não se aproxima de P48 que foi um procedimento associado pelo estudante ao problema. Provavelmente, P48 não se refere a um procedimento efetivado por id_85. Sua resposta revela que a estratégia desenvolvida seria E11. Aqui caberia um questionamento do professor para melhor compreender o que ocorreu. De todo modo, as informações coletadas pelo appAAP possibilitaram a realização dessa análise, sendo, portanto, favorável ao processo de identificação de evidências das estratégias cognitivas elaboradas por id_85, mesmo sendo a apontada pelo appAAP supostamente diferente da que foi realizada.

5.3.1.4 *Estacionamento: evidências de estratégias cognitivas por meio do appAAP*

Na situação-problema *Estacionamento* foram efetuadas 41 tentativas de usuários distintos. Deles, 11 não enviaram resposta ao problema, sendo que 7 desses não consultaram nenhuma ajuda (NCA), o que indica que apenas visualizaram o enunciado do problema. Os outros quatro estudantes (id_76, id_125, id_131, id_47) apesar de consultarem algumas ajudas não conseguiram resolver o problema.

As ajudas podem auxiliar o professor a entender as dúvidas dos estudantes. Contudo, como os procedimentos efetivos não foram informados apenas pode-se levantar hipóteses acerca das estratégias que poderiam estar em elaboração. De acordo com o Quadro 58, id_76

estaria efetuando E16, por exemplo. Já para id_125 e id_131 o fato de não se repetirem procedimentos dá abertura para a execução de qualquer das estratégias. Por sua vez, o processo de id_47 aponta que enfrentou dificuldades perante o problema, consultou um número grande de ajudas cujos procedimentos repetidos podem indicar qualquer das estratégias. Contudo, esse é um exemplo que vai ao encontro dos resultados apontados por Greiff et al. (2016) que associa a forma de exploração da ferramenta às características da sequência dos arquivos de *log* e verificou que quanto maior a necessidade de ações exploratórias, mais longas seriam as sequências expressas por essas ações, resultando em arquivos de *log* mais extensos e com maior quantidade de informações potencialmente expressivas do comportamento dos alunos.

Quadro 58: *Estacionamento* - ajudas consultadas pelos usuários que NER

Id usuário	evidências (DRi, PNi e QRi e Pi associados)	Pi repetidos	Pi efetivos	Ei associado(s)			
				E14	E15	E16	E17
id_76	DR9 → P9, P34 DR5 → P9, P34 DR7 → P9 PN11 → P34, P40, P46, P47, P50, P52 PN4 → P3, P10, P37, P48	P9 P34	NA		X	X	X
id_125	PN15 → P34, P40, P46, P47, P50	Lista padrão	NA	X	X	X	X
id_131	PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 DR7 → P9 DR4 → P16, P17, P37, P48	Lista padrão	NA	X	X	X	X
id_47	DR10 → P40, P46, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN3 → P7, P32 DR9 → P9, P34 PN11 → P34, P40, P46, P47, P50, P52 PN17 → P40, P47, P50, P52, P53, P54, P55, P56, P57, P58, P59, P60 PN15 → P34, P40, P46, P47, P50	P34 P40 P46 P47 P50 P52 P53 P54 P55 P56 P57 P58 P59 P60	NA	X X X X X X X X X X X X X	X X X X X X X X X X X X X X	X X X X X X X X X X X X X X X	X X X X X X X X X X X X X X X

Fonte: dados da pesquisa.

Dando sequência a análise dos dados obtidos por meio do appAAP para a situação *Estacionamento*, tem-se três alunos que enviaram respostas, mas não consultaram ajudas e nem avaliaram procedimentos: id_54 que respondeu 180m; id_96 que respondeu 625 (sendo 625m² a resposta da situação *Palco em construção*, fato que pode remeter ao comentário realizado acerca da busca por resposta correta e o embaralhamento da ordem das situações para usuários distintos!); e id_127 que respondeu 50 metros lineares.

Os estudantes id_64, id_65 e id_85 apesar de enviarem respostas (200m; 220m; e 200 m, respectivamente) consultaram todos a ajuda DR7, porém nada se pode concluir acerca disso.

Já id_74 que consultou as ajudas PN11, PN15, QR9, PN17 e DR7, inclusive repetindo algumas delas, informou como resposta 125. Nesse caso, embora não tenha assinalado procedimentos, percebe-se a elaboração de uma estratégia guiada pelas ajudas consultadas, as quais evidenciam os procedimentos repetidos P34, P40, P46, P47, P50, P52 e P54. Nesse caso, se o estudante não tiver realizado apenas P47, é provável que tenha resolvido a situação-problema por meio de E15, de acordo com a análise presente no Quadro 59.

Quadro 59: *Estacionamento* - usuário appAAP id_76

Id_ usuário	evidências (DRi, PNi e QRi e Pi associados)	Pi repetidos	Pi efetivos	Ei associado(s)			
				E14	E15	E16	E17
id_74	PN11	P34	NA		X	X	X
	PN15	P40		X	X	X	X
	QR9	P46		X	X		
	PN17	P47		X			
	DR7	P50			X	X	X
		P52			X	X	X
		P54			X	X	X

Fonte: dados da pesquisa.

Em relação às tentativas associadas às estratégias diretamente pelo appAAP na situação-problema *Estacionamento* tem-se 12 estudantes associados a estratégia E14:

De modo geral, você abordou a situação-problema numa perspectiva exploratória com atribuição de valores para as medidas dos lados e, conseqüente, para o cálculo da área do estacionamento. Os procedimentos realizados não remetem à busca por relações algébricas entre a área do estacionamento e os tipos de materiais disponíveis para o cercamento, considerando seus respectivos custos. Tente obter uma função que expresse a área do estacionamento em função das variáveis do problema e analise as propriedades algébricas e gráficas da função assim obtida.

O Quadro 60 apresenta as tentativas desses estudantes junto aos comentários que foram enviados por alguns deles. Nota-se que P47 direcionou essa estratégia, ou seja, os estudantes em sua maioria, consideraram como hipótese inicial que a maior área seria obtida quando os lados fossem iguais, antes de considerar a relação expressa pelas variáveis do problema. De fato, essa relação acaba por fornecer uma resposta correta, embora a argumentação ignore uma parte importante da situação-problema. Nota-se que os estudantes informaram grau de similaridade igual ou superior a 3, o que aponta que o appAAP aproximou-se às estratégias efetivamente apontadas por esses estudantes.

A resolução comentada por id_83 indica que tentou avançar considerando a escrita de expressões que associassem o perímetro, a área e o custo dos materiais e, portanto, poderia ser associado a E15, porém como somente P47 da lista padrão foi selecionado, o appAAP indicou E14. A estratégia E15 mostraria ao estudante o seguinte texto:

De modo geral, a estratégia elaborada por você indica a associação entre variáveis presentes na situação-problema. Os procedimentos utilizados buscam associar os conceitos de perímetro e área, utilizando a proporcionalidade, por exemplo. Contudo, é possível que alguma variável não tenha sido considerada, por exemplo, o custo dos lados, ou o valor total, ou ainda, a necessidade de obtenção da área máxima procurada. Note que é possível obter a área do estacionamento enquanto função da medida de um dos lados do terreno, considerando os tipos de materiais disponíveis e seus respectivos custos para o cercamento. Tente obter essa função e analise suas propriedades algébricas e gráficas.

Quadro 60: Estacionamento - id_usuários appAAP indicados para E14

id_usuario	resposta	Ajudas consultadas	Pi efetivos	GS	Comentário
51	125m	NCA	47, 60	5	Dividi o orçamento entre os 2 materiais.
75	125 M	NCA	47, 60	4	
80	Total: 200 metros, 100 em cada lado do terreno	NCA	47	3	Uma boa questão.
83	$B.20+A.5=5.000$	NCA	47	3	$2A.20+ 2B.5 = 5.000$ $40A+10B= 5000$ $A=B$ $40A+10A=5000$ $A=5000/50$ $A=100$ R: área total de metros lineares de tijolos é 2A, ou seja 200m $B.20+ A.5 = 5.000$ $20B+5A= 5000$ A primeira equação representa os metros lineares de cada construção multiplicadas pelo seu custo. $A=B$ A maior área obtida é aquela que possui os dois lados iguais. $20A+5A=5000$ $A=5000/25 \mid A=200$
94	$15625=62,5 \times 250$	NCA	47,60	3	
103	125m	NCA	47	5	Primeiramente considerei o saldo de R\$5000 e o dividi pela quantia de tipos de materiais, tijolos e madeira $R\$5000/2= R\2500 , portanto, temos R\$ 2.500 dividido por R\$5,00 valor do metro da cerca de madeira= 500m e também dividi R\$ 2.500 por R\$20,00 valor do metro do tijolo= 125m considerando estes valores: tijolo= $125m / 2 \text{ lados} = 62,5m$, madeira= $500m \text{ 2 lados} = 250m$ $A=b.h= 62,5m \times 250m = 15.625 \text{ m}^2$ observando os fatos de ser um retângulo e que seus lados não são iguais e a proporção conforme a figura mostra que o muro de tijolos em metros lineares será menor que a cerca de madeira em metros lineares É evidente que qualquer alteração nas variáveis base e altura que não ultrapasse o valor com gastos de R\$5000 tornaria a área $< 15.625 \text{ m}^2$, portanto 125m refere-se a quantia de metros lineares de tijolos.
113	252	NCA	47	5	
86	200	PN11, PN11, PN17, QR9, PN17, PN17	54	4	
130	200	PN15	47	5	
104	não consegui resolver	PN17, DR9, QR9	54	3	
97	187,5mL	PN17, PN15, PN3, PN11, PN17, QR9	46	4	
59	$5,00 \times 20,00 = 100,00$	PN17, PN17, PN17, PN17, PN15, PN3, QR9, PN15	40	3	$A \times B = 5,00 \times 20,00 = 100,00$ $M = 5000 \div 100 = 50$

Fonte: dados da pesquisa.

O Quadro 61 apresenta a relação dos 10 estudantes cujas ações no appAAP apontaram para E15. Da mesma forma como argumentado acima, percebe-se que o appAAP aproximou a estratégia informada da efetivamente realizada pelos estudantes desse grupo. Os comentários dos alunos amparam essa conclusão. Nesse caso, o procedimento que direcionou para E15 foi P60, ou seja, os alunos consideraram a proporção 1 para 4 do custo do muro de tijolos em relação ao custo das placas de madeira e obtive que A deveria ser $\frac{1}{4}$ de B.

Quadro 61: *Estacionamento* - id_usuários appAAP indicados para E15

id_usuario	Resposta	Ajudas consultadas	Pi efetivos	GS	Comentário
61	40	NCA	60	1	
77	area = a.b	NCA	60	3	
82	62,5	NCA	7,48	4	
92	$20(5x + y) = 5000$	NCA	60	3	
93	125m ²	NCA	7,60,	3	<p>Criei duas fórmulas a partir das informações dadas. $20x+5(1000-4x) = 5000$ Se trata da fórmula do valor. 20 o valor do metro do tijolo, x se referindo a quantos metros de tijolo, 5 sendo o valor do metro da madeira, 1000 se tratando da quantidade máxima de metros de madeira possível dentro desse valor ($5 \times 1000 = 5000$) e $-4x$ pois, a cada metro de tijolo (x), temos 4 metros a menos de madeira. $x(1000-4x) = \text{área}$ Desenvolvendo a fórmula de valor, considerando 2500 para cada parte de muro, temos: $20x=2500$ $x=125m$, lembrando que x se refere a contagem de metros de muros de tijolo. (Sendo essa a resposta, seguir a diante foi uma opção própria. Agora aplicando isso, na segunda fórmula: $125(1000-4.125) = \text{área}$ $125000-62500 = \text{área}$ $\text{Área} = 62500$ Então, com essas informações, prossegui da seguinte forma $125.y = 62500$ - com y sendo a área de madeira $y=500$</p>
101	200	NCA	60	3	
102	125m	NCA	13,16,60,	4	
115	200	NCA	60	5	Seria a mesma quantidade de metro para os 2 materiais. Portanto $x*20 + x*5 = 5000$
56	125m	DR1	1,3,7,32	3	
84	$a=40x+10y$	DR10	40,52,58	4	
105	500,0 metros lineares de muro de tijolos	PN17	40,52,57	4	<p>Calculado a área de um retângulo por $y=a.b$, o enunciado informa que o lado "a" utilizará de um tipo de material que custa 20 reais o metro, e o lado "b", utilizará de outro tipo de material que custa 5 reais o metro; Somado duas vezes o lado "a" e duas vezes o lado "b"; E o custo deve ser no máximo de R\$5000 reais; Substitui "b" pela formula da área; calculei o a e o b do vértice; o resultado do $a=62,5$ e do $b=250$; multipliquei ambos por 2 R= 125,0 e 500,0.</p>

Fonte: dados da pesquisa.

Destaca-se no Quadro 61 o estudante id_105 que em seu comentário demonstra que sua estratégia foi além de E15, porém pelos procedimentos efetivos que selecionou, pode-se perceber que como P40 pertence a todas as estratégias e P52 e P37, pertencem a E15, E16 e

E17, sendo que nenhum outro Pi foi selecionado de modo a indicar avanço em relação a E15, essa foi a estratégia indicada (de certo modo garantida!) pelo appAAP. Nesse caso, mais evidências foram obtidas em função do comentário encaminhado pelo estudante.

A estratégia E16 foi associada a apenas um estudante: id_67, o qual consultou apenas a ajuda DR7 e selecionou apenas P9, pois na testagem do procedimento, na época, quando o estudante consultava apenas uma ajuda, os procedimentos mostrados correspondiam aos daquela ajuda. Isso foi modificado para a lista padrão, pois entende-se que a busca de uma única ajuda não exclui a possibilidade de efetuar outros procedimentos não associados a ela. No caso de id_67, P9 apontaria para E16 ou E17, e como não houve maiores ações no appAAP o que se pode garantir é E16, considerando o nível de complexidade $E16 < E17$, que pode ser observado nos textos exibidos aos alunos em cada caso:

(E16) A estratégia elaborada por você baseia-se em uma argumentação geométrica com representação algébrica. Isso significa que você conseguiu construir relações para obtenção da área do estacionamento a partir da medida dos seus lados. Mesmo assim, é possível que alguma relação tenha sido ignorada, ou não utilizada, deixando de atender a todas as condições expressas no problema: área máxima, custo total e tipos e custo de material para cercamento de cada um dos lados. De modo geral, mesmo obtendo uma função que represente a área do estacionamento, essa estratégia indica que não foram exploradas propriedades gráficas ou algébricas da relação funcional que poderiam fornecer elementos importantes para a resolução da situação-problema, tais como: ponto de máximo, valor máximo da função, vértice, concavidade etc.

(E17) Sua estratégia pautou-se na representação e argumentação algébrica, o que pode indicar que você obteve uma relação funcional que fornece a área do estacionamento considerando as variáveis do problema: área máxima, custo total e tipos e custos de material para cercamento de cada um dos lados. Assim, você deve ter sido capaz de associar elementos da representação gráfica e algébrica da função área, explorando as propriedades características dessa relação funcional.

Nenhum estudante foi associado a E17 pelo appAAP. Percebe-se não somente nessa situação-problema, mas também nas anteriores, que os estudantes tiveram dificuldades em elaborar estratégias de caráter algébrico. Isso corrobora e reflete as dificuldades e obstáculos apontados pelos autores trazidos na seção 3.2.1 e também levantadas durante as entrevistas inspiradas no método clínico que originaram os elementos inseridos no appAAP, bem como o método de identificação de evidências de estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes durante a resolução dessas situações-problema que envolvem conhecimentos algébricos. Sendo assim, as conclusões acerca das dúvidas, impasses e estratégias que foram trazidas em 5.2.5, também podem ser tomadas como conclusões dessa etapa da pesquisa.

5.3.2 Resultados: avaliação de critérios de qualidade de uso do appAAP

Aliado à etapa de testagem do método de identificação de evidências de estratégias cognitivas no appAAP foi disponibilizado aos estudantes um formulário (Apêndice 12) para avaliação dos critérios de qualidade de uso, considerando os aspectos citados ao longo da seção 4.3. Esse instrumento retornou 35 respostas, sendo que 32 estudantes consentiram que os dados informados no questionário de avaliação fossem utilizados na pesquisa por meio do TCLE. Esta seção apresenta os resultados desse instrumento.

O Apêndice 13 apresenta os gráficos gerados com os dados coletados por meio do formulário para cada um dos itens analisados na escala de usabilidade SUS (Brooke, 1986; 2013). A tabela 2 traz a pontuação média obtida para cada um dos 10 itens da escala SUS. A média apresentada nos itens pares foi transformada, considerando o seu complemento, já que esses itens possuem termos negativos. Assim, também para esses itens, ao observar a média na tabela abaixo, pode-se entender em termos de aceitação, ou seja, quanto mais próximo de 5 melhor a avaliação dos usuários ao conteúdo (afirmativo) do item.

Tabela 2: Pontuação médio obtida por cada item do SUS

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Média	3,22	2,47	3,84	3,25	3,59	2,72	3,59	2,91	3,38	2,97

Fonte: dados da pesquisa.

A seguir, são trazidos os dados acerca dos itens 1, 3, 5, 7 e 9, ou seja, aqueles com escrita positiva. Os itens 1 e 3 demonstraram que os estudantes gostaram de utilizar o appAAP e que consideraram seu uso fácil, pois 26 das 32 respostas indicaram 3 ou mais na escala *Likert* para essas duas questões. O item 5 indicou que o appAAP – módulo estudante possui boa integração entre suas funcionalidades (27 respostas iguais ou superiores a 3). No item 9, por fim, 24 estudantes afirmaram sentir-se muito confiantes ao utilizar o appAAP, sendo 8 respostas para cada ponto (3, 4 e 5) da escala. Quanto à facilidade de aprender a usar o appAAP (item 7), 23 respostas indicaram 3 ou mais pontos na escala de avaliação. Nesse item, observou-se que alguns estudantes com dificuldades na resolução das situações-problema assinalaram uma pontuação menor e desse modo não avaliaram exclusivamente a aprendizagem de uso da ferramenta. Isso foi evidenciado a partir das questões abertas ao final do instrumento de avaliação.

Os itens 2, 4, 6, 8 e 10 são os que possuem palavras negativas. Portanto, optou-se por avaliar o quantitativo de respostas que obtiveram 4 ou 5 pontos, considerando que quanto mais alunos assinalassem esses valores, menos positiva seria a avaliação, ou seja, menor a usabilidade. Assim, para o item 2 que tratava da complexidade do uso da aplicação, 8 respostas foram obtidas para esses pontos, sendo apenas uma indicando 5, ou seja, indicando que o appAAP era muito mais complexo que necessário. Apenas um aluno indicou que poderia precisar de auxílio de um técnico para utilizar o appAAP (item 4). Já no item 8 apenas 5 alunos indicaram 4 pontos na escala *Likert* e 1 indicou 5 pontos e no item 10, apenas 3 alunos informaram que deveriam aprender muito para poder usar o appAAP. Essas avaliações complementam o resultado obtido quanto à facilidade de uso do appAAP do item 7. O item 6 é o último a ser trazido e indica a existência de algumas inconsistências durante o uso do appAAP apontadas por 4 estudantes que assinalaram 4 na escala *Likert* da avaliação de usabilidade. Gráficos elaborados com as avaliações de cada item estão disponíveis no Apêndice 7.

Conforme Brooke (2013), considerando a pontuação atribuída pelos 32 estudantes que avaliaram os 10 itens da escala de usabilidade SUS, conforme a metodologia de cálculo apresentada em 4.3.1, a pontuação obtida pelo appAAP foi 67,34. De acordo com Bangor, Kortum e Miller (2009 apud SANTANA *et al.*; 2016) pode-se concluir que a aplicação atende aos requisitos mínimos de usabilidade, mas indica a existência de pontos a serem melhorados.

Para melhor compreender esse resultado, optou-se por avaliar os princípios de usabilidade de Nielsen (1993) a partir dos itens do SUS, conforme indicado no Quadro 6 (seção 4.3.1). Nota-se, por meio da tabela 3, que os itens com média abaixo de 3 foram *facilidade de memorização*, que se relaciona diretamente ao item 2 da escala SUS que trata da complexidade da aplicação em detrimento da sua necessidade e a *baixa taxa de erros* que traz diretamente a média referente ao item 6 que se refere a existência de inconsistência no produto.

Tabela 3: Avaliação dos princípios de usabilidade de Nielsen (1993) a partir do SUS

Princípios de usabilidade de Nielsen (1993)	Pontuação média considerando os itens da escala SUS
facilidade de aprendizado	3,41
eficiência	3,07
facilidade de memorização	2,47
baixa taxa de erros	2,72
satisfação do usuário	3,28

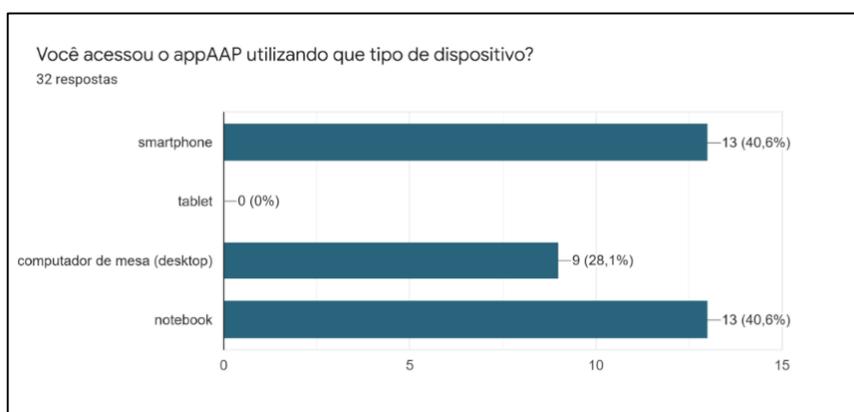
Fonte: dados da pesquisa.

A análise das tentativas de resolução dos estudantes apresentada na seção anterior auxilia no entendimento desses resultados, pois como muitos estudantes não buscaram ajuda e

avaliaram apenas a lista padrão de procedimentos, ao assinalar qualquer procedimento que não correspondesse de fato ao que realizaram, a estratégia apontada pelo appAAP seria equivocada, gerando, portanto, os erros que possivelmente foram considerados durante a avaliação por meio da escala SUS. Entretanto, acredita-se que esse fato possa ser contornado quando do uso da aplicação de modo mais direcionado, por exemplo, por um professor em sala de aula, onde a dinâmica de julgamento do appAAP estiver mais clara aos alunos, de modo que eles tomem consciência da importância de suas ações dentro da ferramenta, tanto ao buscar ajudas, quanto ao avaliar os procedimentos efetivos e a estratégia indicada a cada situação-problema.

Além disso, entre essas inconsistências, a mais evidente referiu-se a dificuldades de navegação por meio de aparelhos *smartphones*. Cabe dizer que não houve orientação prévia acerca do tipo de dispositivo a ser usado durante a utilização da ferramenta, uma vez que se preconizou, durante o desenvolvimento da aplicação, um design responsivo e multiplataforma e, portanto, o uso em diferentes navegadores e em telas de tamanhos distintos seria positivo para a verificação de atributos de qualidade de uso da aplicação. Verificou-se que esse objetivo de diversificar os dispositivos na testagem foi alcançado, conforme Figura 57.

Figura 57: Dispositivos usados pelos estudantes na fase de teste do appAAP



Fonte: dados da pesquisa.

Entretanto, na sequência, como resposta ao questionamento “*Acredita que o tamanho da tela do dispositivo usado por você influenciou na navegação pelo appAAP?*”, alguns comentários salientaram as referidas inconsistências associados ao uso por meio de telas menores:

Acredito que tenha sido mais fácil por ter feito pelo computador, já que a mais espaço de tela para visualizar as questões e textos de apoio disponibilizados. (id_110)

Sim, acredito que quando utilizado em telas maiores facilita a visualização e interpretação de algumas questões. (id_127)

Sim. Acho mais visível pelo computador do que no celular. (id_69)

Acredito que sim, pois em alguns momentos tive que dar zoom para entender certas coisas escritas e logo tive que tirar pois atrapalhava a leitura do resto, mas nada que causava grande problema. (id_93)

Sim.. meu celular é pequeno. (id_89)

Maior que seja, melhor a utilização. (id_77)

Sim. Tentei utilizar o celular, mas a formatação e ajustes automáticos do texto ficaram muito ruins. Necessário ajustes. Não é possível dar zoom na tela, e o texto fica grande as letras e comprido (não muitas palavras, mas sim formatação. o texto se ajusta na tela e o texto em vez de diminuir as para enxergar todo o texto, ele se ajusta em comprimento), complicado pra absorver a informação com um texto tão comprido. Por isso utilizei o notebook. Neste a tela ficou boa (id_125).

Sim.... Muito complicado de utilizar telefone, acredito que no computador ficaria mais adequado. (id_99)

Sim... Muitas informações ficaram pequenas demais dificultando sua visualização, principalmente para quem tem problemas ocular e só tem tempo à noite. (id-86)

Sim, influencia muito, necessito ficar virando o celular toda hora para ver melhor. (id_80)

Não chegou a ser um problema, porém as imagens que aparecem nas dicas, no caso do celular possuem uma fonte muito pequena. (id_65)

Quanto ao método utilizado no appAAP para apresentação e concatenação de dados e informações, outras cinco afirmativas foram apresentadas para julgamento aos estudantes:

1. As ajudas disponibilizadas na ferramenta são importantes para resolver as situações-problema.
2. Os textos das ajudas são claros e objetivos.
3. Os textos dos procedimentos são claros e objetivos.
4. Os textos das estratégias são claros e objetivos.
5. A interface (aparência / layout) do aplicativo é agradável e intuitiva.

Além dessas afirmações, foram disponibilizados dois espaços para o envio de comentários acerca de aspectos positivos ou a serem melhorados, a partir da experiência de uso do appAAP. O Quadro 62 apresenta os dados obtidos dos 32 estudantes para esses itens.

Quadro 62: Avaliação critérios de qualidade de uso do appAAP

id_ usuário	Destaque aspectos positivos do AppAAP a partir da sua experiência de uso.	Destaque aspectos que poderiam ser melhorados no AppAAP a partir da sua experiência de uso.	1.	2.	3.	4.	5.
51	Imagens		4	4	4	5	4
54	Achei as dicas muito amplas, esperava algo como: "Para resolver tal questão use tal fórmula" e não algo: " Se você quer ir de Canoas para Porto Alegre temos aqui o mapa do Rio Grande do Sul, Latitude x graus Oeste".	Objetividade. Exemplo: Para resolver a questão X siga o passo A, B e C. Passo A - Formula A Passo B - formula B Passo C - formula C	5	3	3	4	5
56	Aplicativo com interface amigável.	Não enxergo melhorias.	3	3	4	3	5
59	Tive dificuldade em escrever, poderia ser um caixa de comentários	Achei confusas as dicas, poderiam ser mais direcionadas	3	3	3	4	4
61	Eu acredito que poderia dar as possíveis opções de solucionar o problema para ajudar no processo de resposta.	Uma opção (de enviar as respostas) ao invés do envio pelo teclado do telefone, pois eu pensei que seria o mesmo que "espaço" para uma nova linha, como se estivesse escrevendo no word.	3	3	3	2	1
62			4	3	2	2	3
63	Não apresentei dificuldade, foi razoavelmente fácil.	Acredito que junto dos textos, poderiam ser adicionados links para resolução e explicação da matéria.	4	5	5	3	5
64			2	2	2	2	5
65	Fiz somente uma das, atividades, li as outras e naveguei para testar o funcionamento, muito interessante as dicas. Acredito que o app será de grande ajuda.	Acredito que pode melhor a parte do funcionamento em relação as dicas, quando você escolhe uma, poderia existir uma maneira de voltar para o menu e ver outra.	3	3	3	3	5

67	Questões nem um pouco objetivas	Mais objetividade	3	3	2	3	2
69	Acho o app prático e fácil de usar.		4	4	4	4	4
77	Apertei ENTER sem querer, eu não tinha como voltar ou apagar aquela resposta	resposta em cima	4	4	4	4	4
80	Fácil usar, intuitivo e sem problemas aparentes.	Não encontrei nenhum.	2	4	3	3	2
82	Design limpo.	Opção de avançar e retornar mais claras e definidas.	3	3	4	2	4
83	achei muito prático e intuitivo.	Poderia ter a descrição de como chegou na resposta final, ajudaria muito para entender, quando erramos a questão.	5	5	5	5	5
85	Excelente APP!	A caixa de resposta das questões pode ser maior e as letras/números digitados menores.	5	2	2	4	3
86		Boa iniciativa, toda ajuda na fixação de conteúdos é válida, porém, as dicas são muito rasas o que dificulta a possibilidade de uso em um curto período de tempo.	4	5	5	5	5
89	Bem didático	Parabéns aos desenvolvedores					
93	Achei o layout e navegação da ferramenta sempre foram bem fluídos e intuitivos. Acabei não utilizando a ferramenta de dicas, mas achei uma ideia incrível, pois assim facilita o desenvolvimento da questão para alunos com dificuldades em certos conceitos. Parabéns!	Quando tinham as opções de marcar, me confundi um pouco, mas só isso.	4	3	3	3	4
96			5	5	5	5	4
97	fácil e intuitivo.		4	3	3	3	4
99	Para esclarecer várias formas de resolver uma mesma questão, muito bom e positivo.	Colocar de uma forma mais clara os acessos.	4	4	4	4	4
101	A navegação no site é fácil.	Achei os enunciados das questões bastante confusos e as questões não são parecidas com as questões de vestibular.	4	3	2	3	3
103			4	4	4	4	4
104	Achei ótimo este app porque ele te direciona para resolver a questão.	Talvez ter a pergunta na mesma tela, com a sugestão do caminho apresentado para resolução do problema.	4	2	2	3	4
110	O app apresenta um visual agradável e objetivo, então tornou a navegação no sistema mais fácil. A disponibilidade de textos de apoio foi de grande ajuda, já que de começo não tinha ideia de como resolver a questão que tinha escolhido.	Um aspecto que percebi quando entrei pelo telefone no app foi que algumas páginas apresentam textos com largura maiores que a tela, então ele fica com o layout bagunçado trazendo uma estranheza ao ser usado. Não é algo que traga uma dificuldade no uso, porém fica incomodativos aos olhos, me fazendo querer usar mais no pelo computador do que pelo telefone.	3	4	4	3	4
113	Interface simples, minimalista e intuitiva.	Não criar uma lista aleatória para os exercícios a cada vez que a página principal é carregada. Se for necessário para evitar cola entre colegas, é possível armazenar a ordem em um Cookie, SessionStorage ou LocalStorage (dentre outros) do navegador, assim facilita na navegação entre os exercícios, ainda mais que eles não possuem numeração de identificação. Em um conjunto grande de exercícios a navegação ia se tornar desagradável. Houve algum erro no retorno da primeira resposta, indicando que não foi possível identificar minha estratégia. Depois, quando retornei ao feedback, um retorno correto estava no lugar. O botão de "concordo" antes de enviar um feedback está na esquerda, quando normalmente o botão de confirmação em interfaces gráficas fica na direita. Cliquei diversas vezes no "Voltar" por causa disso. Esta estratégia de utilizar botões em posições não usuais, ou com colorações chamativas é melhor quando o envio traz consequências profundas, como deleção permanente de dados, não vejo porque utilizar neste cenário.	3	3	5	4	4
114	Gostei que o aplicativo é "limpo", tem um layout bem intuitivo e é fruto de uma ideia muito interessante.	Eu errei a questão por falta de interpretação do enunciado, então não consegui sinalizar o caminho que usei para resolver a questão pois o caminho estava errado. Não sei se atrapalharia na função do aplicativo, mas colocar alternativas me ajudaria a não desviar tanto da resposta.	5	5	5	5	5
120	A opção de ter várias perguntas diferentes e a ajuda para resoluções causo não saiba como fazer	No local onde escolhe a questão deixar como um título ou algo do tipo dizendo o que a questão vai abordar tipo: geometria, analítica, juros ...	3	4	4	4	4
125	No geral parabéns pelo app. Gostei bastante. Claro que não vejo uma aplicação corriqueira no meu dia a dia. Mas já participei de muitas provas de competição e está não foi diferente, está dentro do esperado por mim. Porém as provas que participei não havia consultas (por obviedade). Como o objetivo deste app é de aprendizado, está muito bom. Gostei da sessão de ajuda, apesar de não ter usado, apenas entrei pra ver depois que comecei este questionário. Termos claramente matemáticos o que forçam o aluno a saber as nomenclaturas corretas. Isso ajuda a usar menos palavras. Pois "aresta é aresta", não necessita de explicação. A não ser que você não saiba o que é uma aresta.	Tive dificuldade em compreender a solicitação da atividade do <i>Estacionamento</i> . Não fui capaz de compreender o objetivo da resposta, pois não entendi a matemática do negócio. Talvez eu tivesse de usar uma resposta em forma de fórmula já que não enxerguei valores possíveis para A e B. Mas enfim, caso a parte. E a questão da tela que já comentei. Com texto mal formatado para celulares. Não pediu senha no login que fiz outro dia. Minha senha fica em automático? Pois fiquei com dúvida.	5	5	4	4	5
127	Achei que o app não ficou pesado para navegar, isso é bom, nem muito carregado com muitas informações que poluem visualmente.	Na parte da ajuda, talvez fornecer um campo com formulários específicos do problema e talvez até um vídeo explicativo bem breve com a explicação de conceitos relevantes.	4	3	4	3	2
131	Não tive nenhuma dificuldade ao utilizar o aplicativo, achei ele muito intuitivo. Eu também gostei muito da seção de dicas de resolução, achei todas elas bem didáticas e objetivas, auxiliando bastante para tirar dúvidas que surgem ao longo das resoluções das questões.		5	5	5	5	4

Fonte: dados da pesquisa.

Percebe-se que a avaliação dos itens 1 a 5 considerados no Quadro 62 foi bastante positiva, sendo que os estudantes julgaram, em sua maioria, que as ajudas foram importantes na resolução das situações-problema (média: 3,7); os textos das ajudas, procedimentos e estratégias estavam claros e objetivos (todos com média: 3,5) e que a interface da aplicação era agradável e intuitiva (média: 3,8).

Em geral, os aspectos positivos revelam aceitação da proposta do aplicativo, tanto em relação à funcionalidade quanto ao seu design e fluidez de navegação. Em relação às demandas por melhorias, percebeu-se a necessidade de atentar para o desenvolvimento (futuro) de aplicativo *mobile* que melhor atenda as necessidades dos estudantes que acessam por meio de *smartphones*. Apesar de o appAAP ter sido desenvolvido considerando design responsivo, percebeu-se, que mais ações do usuário para ajuste de tela, a fim de melhorar a visualização foram necessários e que isso pode ter tirado o foco deles da própria resolução da atividade.

Além disso, foi possível notar também um descontentamento em relação ao direcionamento das dicas de resolução. Percebe-se que muitos estudantes esperavam por respostas “mais” direcionadas às suas dúvidas, mas isso que extrapolaria os objetivos do appAAP, pois a ideia é que cada dica seja suficiente para atender a um aspecto específico, deixando abertos caminhos possíveis, por isso, por vezes, as dicas tinham o foco de promover a reflexão do estudante e não, de fato, fornecer-lhe uma resposta direta. Os comentários de id_54 exemplificam essa percepção. Os apontamentos dos estudantes foram considerados para realização de aperfeiçoamentos futuros.

5.3.3 Considerações III

O Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica (appAAP) é fruto de todo um trabalho que buscou estabelecer um elo de discussão entre a teoria do desenvolvimento cognitivo, da abstração reflexionante e da equilíbrio de Piaget, a compreensão de Inhelder acerca de aspectos inerentes aos procedimentos e estratégias de resolução de problemas e a concepção de Perrenoud quanto às competências cognitivas. A premissa adotada desde a concepção do appAAP é a de que as estratégias utilizadas pelos alunos são indicadas pelo conjunto de procedimentos que realizaram (ou tentaram realizar) e as ajudas tendem a direcionar determinados procedimentos, portanto direcionam a identificação das evidências de estratégias cognitivas por meio da ferramenta.

De acordo com os autores supracitados, cada sujeito elabora suas próprias estratégias cognitivas a partir da articulação dos recursos e meios disponíveis. Esse processo é dinâmico, ou seja, implica em trocas entre o que o sujeito sabe (conhece) e o novo, de modo que as próprias ações no decorrer do processo de construção levam a modificações no curso da estratégia em elaboração (INHELDER, 1978). Foi nesse sentido, que as ajudas fornecidas e disponibilizadas no appAAP foram pensadas de modo a auxiliar cada estudante nesse processo de regulação, buscando contribuir com a elaboração de suas estratégias para resolver cada situação-problema. É possível afirmar que há uma estreita relação entre os esquemas de ação, o funcionamento das estruturas cognitivas e a manifestação das competências cognitivas dos sujeitos. Os dados coletados em todas as etapas em que estudantes foram submetidos à resolução das situações-problema puderam verificar esse fato.

Avaliar é uma das atividades docentes mais importantes tendo em vista o acompanhamento das aprendizagens dos estudantes. É primordial que se possa considerá-la como promotora de possibilidades de aprendizagem e como fonte de evidências dos processos cognitivos dos estudantes e de suas dificuldades em avançar, para que essas informações auxiliem o professor na tomada de decisões pedagógicas (MOLON et al.; 2022). Desse modo, os processos de acompanhamento precisam ser diferentes daqueles que se baseiam, apenas, em uma prova que, por vezes, fica limitada a verificar a aquisição de conhecimento-conteúdo e não a capacidade de organização de conceitos e procedimentos de forma articulada, ou seja, o estabelecimento de relações, expressões das competências cognitivas dos estudantes, que caracterizam formas de pensamento.

Entretanto, especialmente ao considerar a avaliação da aprendizagem por meio do appAAP, é importante que o estudante realize ações na ferramenta, durante o processo, pois como não lhe é exigido a inserção dos passos de resolução adotados, serão as suas buscas e a seleção dos procedimentos pertinentes, as fontes de informação usadas pelo aplicativo para indicar que estratégia(s) elaborou durante suas tentativas de resolução a cada situação-problema. Assim, novamente, enfatiza-se a máxima de que o mais importante na elaboração de uma estratégia é, ainda, a ação do sujeito (PIAGET, 1976a, 1982, 1995, 2007) frente ao problema, pois sem sua ação, sem que se sinta motivado a buscar uma solução, não haverá mobilização de saberes e tampouco expressão de suas habilidades e competências cognitivas.

Nota-se por exemplo os estudantes que indicaram baixos graus de similaridade entre a estratégia informada pelo appAAP e a efetivamente utilizada e que enviaram comentários acerca do processo de resolução adotado. Em muitos casos, como o estudante não buscou por ajudas, a lista de procedimentos trazia aqueles bem específicos (lista padrão) que só poderiam

indicar a estratégia adequada diante de extrema clareza do aluno quanto ao que efetivamente realizou. Nessa lista, cada procedimento inserido apontava a apenas uma estratégia e ao assinalar mais de um procedimento o appAAP iria mostrar a de menor complexidade.

Isso, inclusive fez repensar a possibilidade de um ajuste na ferramenta. No caso de se mostrar a lista padrão ao aluno, ao invés de possibilitar a seleção de vários procedimentos, limitar a escolha de apenas um, ou seja, aquele que mais se aproxima do que o estudante realmente realizou. De todo modo, isso continuará dependendo da autoavaliação do estudante acerca de suas ações, o que nem sempre é fácil, pois exige do estudante, reflexão e tomadas de consciência (PIAGET, 1975; 1995). Por sua vez, pode-se perceber que aqueles estudantes que buscaram por ajudas mais direcionadas, ao avaliar a lista de procedimentos conseguiram indicar aqueles que apontavam para uma estratégia alinhada a que de fato elaboraram, o que se pode afirmar em função do grau de similaridade informado no momento da finalização de cada situação-problema, bem como através dos respectivos comentários.

O teste com o appAAP e a avaliação dos critérios de qualidade de uso também indicaram outros ajustes e aperfeiçoamentos importantes, especialmente em relação ao *design* para uso através de *smartphones*, um dos requisitos traçados inicialmente e que precisa ser retomado. Embora o uso do appAAP seja possível por meio de telas menores, o fato de exigir ajustes na tela por parte do próprio usuário não atende ao solicitado, já que os comentários enviados pelos próprios estudantes apontaram esse problema.

Outra consideração necessária aqui refere-se ao fato de ter apresentado, ao longo da seção 5.3.1 os textos das estratégias que poderia soar repetido ao leitor. Essa opção se deu em função da linguagem utilizada para apresentar no appAAP a estratégia ao estudante para facilitar seu julgamento. Note que o texto se diferencia em relação àqueles apresentados ao longo da seção 5.2.3. Optou-se por trazer aqui os textos das estratégias reescritos (traduzidos) para os alunos também para orientar os professores a elaborarem estratégias que possam ser diretamente inseridas na aplicação e exibidas aos estudantes durante o uso, chamando atenção para a diferenciação necessária quanto à linguagem escolhida em cada caso: uma estratégia para a interpretação do docente e outra, equivalente, para a interpretação do estudante.

Para finalizar, traz-se uma crítica ao processo de avaliação tradicional arraigado em nossa sociedade. Durante a análise das respostas informadas e ações dos estudantes no appAAP foi possível perceber, por parte de alguns, a necessidade da “resposta correta” e, em outros, ainda, evidência de que a resposta informada foi “colada”, pois houve troca de respostas em problemas distintos. Por exemplo, 25/3 apareceu como resposta à situação *Praça dos arcos*, sem a realização de ações que justificassem a obtenção desses resultados. As questões

embaralhavam a cada acesso e não eram numeradas, diferenciando-se pelo seu título, e, possivelmente, a resposta dada por A à 1ª situação-problema, foi informada por B também à sua 1ª situação, no entanto essas não eram a mesma. Nota-se que, para esses alunos, o importante é a apresentação da resposta final ao problema, como se isso implicasse em atribuição de nota, ou seja, como se fossem, de certo modo, colocados à prova e precisassem acertar um resultado.

Cabe ressaltar a existência de grande resistência dos estudantes a buscarem ajudas dentro da ferramenta, mesmo sem terem certeza acerca do caminho a realizar, como ficou evidente nos resultados trazidos nas diferentes situações-problema em 5.3.1. Isso, provavelmente ocorre na sala de aula, também. Talvez como reflexo de práticas de ensino onde o que o professor falou está ensinado e o problema seria do aluno caso não soubesse ou conseguisse replicar, ou ainda, enxergando o appAAP como um momento de prova, como eu poderia buscar uma ajuda, que nesse caso assumiria quase que uma conotação de “cola”? Esses são aspectos que precisam ser superados e, acredita-se que com um trabalho mais direcionado em sala de aula, expondo os objetivos do appAAP, essa resistência possa aos poucos ser superada.

Esses são aspectos que o appAAP irá de encontro: mudar a perspectiva da avaliação, fazendo com que os estudantes (e professores) reflitam que avaliar trata-se de um momento importante para o processo, para o direcionamento das ações de ensino subsequentes, a fim de promover mais oportunidades de aprendizagem aos estudantes. A avaliação não é fim, é meio!

Para concluir, é importante salientar que a ação docente é imprescindível para a interpretação conjunta dos dados fornecidos pelo appAAP, como percebido também ao longo da seção 5.3.1. Nenhuma ferramenta digital será capaz de substituir a sensibilidade docente, essencial para a consideração das evidências das estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes. O appAAP pode ser um recurso inicial para um direcionamento mais rápido das dificuldades, dúvidas e impasses enfrentados pelos estudantes, mas a avaliação cuidadosa do docente será indispensável para o acompanhamento do processo de aprendizagem de cada um a fim de que se constitua, efetivamente, uma avaliação formativa ou mediadora, na perspectiva defendida nessa pesquisa.

5.3.4 Apresentação do módulo docente do appAAP

O módulo docente foi desenvolvido para que um professor, sem a necessidade de conhecimentos acerca de códigos de programação pudesse cadastrar situações-problema,

vincular os elementos necessários à identificação de evidências de estratégias cognitivas elaboradas por seus alunos usando o método desenvolvido nesta tese. Através do módulo docente, é possível: criar usuários docentes; criar turmas e deletar turmas; criar, deletar ou atualizar situações-problema vinculadas as suas turmas; criar, deletar ou atualizar ajudas, procedimentos e estratégias e vincular às situações-problema; e visualizar relatórios de suas turmas (por turma ou por estudante que se cadastrar, respectivamente na turma)⁵⁴.

Para acessar o módulo docente (versão de teste usada nesta tese) é preciso acessar o endereço <https://aapaap-teste.vercel.app/professor> e criar uma conta. É possível, posteriormente, acessar com esse mesmo usuário o módulo estudante para ter a visão de estudante do material inserido no appAAP, ou ainda, criar uma conta como estudante para cada uma das turmas criadas no módulo docente, a qual deseja ter a visão de estudante. Por enquanto, o e-mail usado no momento do cadastro não é validado, podendo ser usados e-mails fictícios. Contudo, a recuperação de senha, no caso de esquecimento só é possível através de e-mail válido.

Destaca-se que esse módulo foi testado apenas com as situações-problema aqui propostas e por meio do cadastramento de informações realizado pela pesquisadora e autora desse trabalho. Destaca-se que, para esse momento a exigência era que as seguintes ações elencadas acima fossem viáveis. Assim, qualquer usuário que, porventura, queira usar essa ferramenta com uma turma, pode desenvolver o modelo de avaliação para uma situação-

⁵⁴A apresentação das funcionalidades do módulo docente encontra-se disponível no link abaixo e também pode ser acessada através do QR Code.



Módulo docente:

<https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vQ27z1oVIBalwr6QXTOUov1gE0MaEbAqZfOuSJV5Pq7ZUJ1ITSm7IuCkgvAnh3KvS460ozaUY9cHO/pub?start=false&loop=false&delayms=3000&slide=id.p1>

problema que desejar, organizando as informações necessárias conforme o modelo de avaliação sugerido nesse estudo, criar seu login docente e inserir as informações.

A lógica de julgamento será aplicada automaticamente a partir da inserção correta das informações e dos relacionamentos pertinentes entre elas. O professor pode criar turmas genéricas ou específicas. Por exemplo: se quiser usar uma única questão em uma aula com determinados estudantes, basta ele criar uma turma, por exemplo denominada (Aula X do professor Y) e solicitar que os alunos se cadastrem nela para acessar o problema no momento da aula. Posteriormente, o professor acessa novamente o módulo docente, baixa os relatórios e se assim desejar pode inclusive deletar a turma que criou apenas para aquele momento específico. Obviamente, essa metodologia de uso precisa ser aperfeiçoada, bem como outras situações de uso consideradas, por exemplo, a separação de alunos por turmas, sem a necessidade de cadastros distintos para cada turma.

Contudo, destaca-se que o módulo docente excede os objetivos da presente tese e o processo de desenvolvimento dessa versão demanda um estudo maior em termos de desenvolvimento de *software* para o atendimento aos requisitos funcionais e pedagógicos necessários e o atendimento à critérios de qualidade de uso, da mesma forma como foi realizado no desenvolvimento do módulo estudante. Logo, trata-se de um produto mínimo viável, que garante as funcionalidades básicas para as quais foi criado, inicialmente, mas que exigirá trabalhos futuros para promover melhorias e garantir o atendimento a todos os requisitos de *software* esperados e, especialmente, para que o appAAP possa se consolidar como uma ferramenta digital, um instrumento, de suporte ao trabalho docente.

6. CONCLUSÕES

Ao pensar sobre o dever que tenho, como professor, de respeitar a dignidade do educando, sua autonomia, sua identidade em processo, devo pensar também, como já salientei, em como ter uma prática educativa em que aquele respeito, que sei dever ter ao educando, se realize em lugar de ser negado. Isso exige de mim uma reflexão crítica permanente sobre minha prática através da qual vou fazendo a avaliação do meu próprio fazer com os educandos. O ideal é que, cedo ou tarde, se invente uma forma pela qual os educandos possam participar da avaliação. É que o trabalho do professor é o trabalho do professor com os alunos e não do professor consigo mesmo.

*Pedagogia da Autonomia
(FREIRE, 2017, p.63)*

Esta pesquisa teve por objetivo geral delinear um método para identificar evidências de estratégias cognitivas utilizadas por estudantes durante a resolução de problemas matemáticos, vinculados ao pensamento algébrico, para ser implementado em um aplicativo *web* de Apoio à Ação Pedagógica, o appAAP.

Para tanto, quatro etapas foram necessárias. Inicialmente, buscou-se investigar e compreender como ocorrem processos cognitivos vinculados à resolução de situações-problema cuja modelagem envolvia conhecimentos algébricos. Um vasto estudo bibliográfico antecedeu a pesquisa empírica na busca pelos elementos que poderiam ser considerados enquanto evidências das estratégias cognitivas em elaboração por cada sujeito perante uma situação-problema. Por meio de entrevistas baseadas no método clínico, esse objetivo foi alcançado considerando três categorias de elementos: estratégias, dúvidas e impasses que, associados à análise dos procedimentos e conceitos utilizados pelos estudantes resultaram na elaboração de modelos de avaliação para cada situação-problema.

De posse desses modelos, constituiu-se o modelo padrão baseado nos fundamentos teóricos dessa pesquisa, que contou com os seguintes elementos: *Procedimentos* (Pi) tentados ou realizados pelos estudantes, *Dicas de resolução* (DRi) geradas a partir das estratégias identificadas; *Perguntas e respostas norteadoras* (PNi) oriundas das dúvidas e *Questionamentos Reflexivos* (QRi) originados dos impasses enfrentados pelos estudantes durante o processo de resolução de cada situação-problema. A partir de então e da análise da codificação dos elementos gerados nas entrevistas elaborou-se uma metodologia para a identificação de evidências das estratégias cognitivas elaboradas pelos estudantes. As seções 5.1 e 5.2 apresentaram o processo e os resultados obtidos para atingir esse primeiro objetivo específico da tese.

Em paralelo, ocorreu a definição dos requisitos técnicos e pedagógicos para o desenvolvimento do appAAP que deveria ser capaz de captar os elementos apontados como evidências das estratégias cognitivas dos estudantes, na medida em que esses usassem a ferramenta. O alcance desse objetivo, bem como dos outros dois, que tratavam da verificação da metodologia de identificação de evidências de estratégias cognitivas implementada no appAAP e da avaliação dos seus critérios de qualidade de uso foi abordado ao longo da seção 5.3. Desse modo, todos os objetivos específicos traçados foram atingidos, o que contribuiu para o alcance do objetivo geral.

Contudo, cabe salientar que o desenvolvimento da pesquisa em meio a uma pandemia foi um grande desafio e, de certa forma, um limitador. Caso não houvesse a situação pandêmica, é possível que a participação dos estudantes nas diferentes etapas do estudo seria maior (em termos de quantidade de estudantes participantes) e, assim, mais dados poderiam ter sido considerados. Apesar disso, com a pandemia, o trabalho também ganhou mais força, tendo em vista a necessidade de instrumentos que pudessem auxiliar os professores no acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, de forma remota.

A utilização da tecnologia como apoio à ação pedagógica, especialmente na avaliação do processo de aprendizagem foi a intenção norteadora do presente estudo, defendendo a avaliação enquanto oportunidade de aprendizagem, não com um fim em si mesma, mas como um processo de construção e de ação pedagógica. Nesse sentido, assume-se que a ação pedagógica deve propor situações para que cada estudante possa ir construindo seu próprio conhecimento, desenvolvendo suas próprias competências cognitivas, que possibilitarão ao sujeito agir de modo cada vez mais eficiente diante de problemas de estrutura semelhante, o que implica o alcance da generalização, na medida em que esquemas de ação e estruturas cognitivas cada vez mais complexas são constituídas (PIAGET, 1982).

Assim, o professor pode propor, aos estudantes, atividades mobilizadoras de recursos cognitivos e de habilidades de busca e articulação de conceitos e procedimentos pertinentes durante a elaboração de suas estratégias cognitivas. E isso implica reconhecimento acerca do estado de conhecimento do estudante para que as situações apresentadas possam ser, de fato, desafios que coloquem o indivíduo em desequilíbrio cognitivo demandando ações, operações, abstrações, assimilações e acomodações que poderão resultar em avanço em seu estado de conhecimento. Logo, identificar as dificuldades que cada aluno apresenta é um passo importante a ser dado na tentativa de propor desafios mais adequados ou fornecer apoio pedagógico mais direcionado, na medida do possível.

Contudo, sem se dispor de um recurso específico para esse fim, o mapeamento das dificuldades que os estudantes possuem em determinada disciplina, por vezes, tem se limitado à realização de uma avaliação (prova) de diagnóstico. Essa, por sua vez, restrita à análise de erros relacionados a conteúdos específicos tomados como pré-requisitos e não propriamente à análise dos motivos que ocasionaram determinado erro ou impossibilitaram o estudante de responder corretamente a alguma situação proposta. Em muitos casos, uma resposta incorreta fornecida durante um teste, não significa, necessariamente, que o aluno não possui competência cognitiva para resolver a situação proposta, mas pode ocorrer em função dele não conhecer ou não lembrar determinado nome, expressão ou fórmula específica, por exemplo. Isso leva muitos estudantes a serem julgados “por não saberem nada”, mas, de fato: o que é que eles não sabem?

É nesse sentido que o uso do appAAP, estruturado sob o método de avaliação de evidências de Estratégias Cognitivas elaboradas pelos estudantes durante a resolução de situações-problema, poderá apoiar ações pedagógicas mais direcionadas às necessidades de cada aluno. O appAAP foi desenvolvido com o objetivo de servir como um instrumento de apoio à ação pedagógica, auxiliando o docente a identificar evidências do processo de aprendizagem de cada aluno mediante informações coletadas por meio das ações efetuadas por eles durante o uso da aplicação, nas atividades de resolução de situações-problema disponibilizadas pelo próprio docente no recurso.

Os resultados obtidos apontam que o procedimento delineado e implementado na aplicação tecnológica representa uma fonte de coleta de evidências das estratégias cognitivas utilizadas pelos estudantes durante a resolução dos problemas propostos. Assim, o appAAP é um instrumento de apoio à ação docente útil para embasar o direcionamento das atividades pedagógicas às necessidades dos estudantes.

Além disso, a utilização de ferramentas digitais no processo de avaliação da aprendizagem dos estudantes ganhou ainda mais força durante a pandemia de Covid-19. Com a necessidade de distanciamento físico e o ensino remoto emergencial ficou ainda mais evidente que o professor precisa ter a disposição instrumentos para acompanhar a aprendizagem dos estudantes e poder auxiliar em suas dificuldades, uma vez que o contato aluno-professor ficou bastante prejudicado durante o período pandêmico. Desse modo, uma ferramenta com a proposta do appAAP será de grande auxílio nos processos de ensino e de aprendizagem.

Outras contribuições do presente estudo referem-se ao próprio processo de doutoramento da autora, que fez nascer uma pesquisadora-professora ou uma professora-pesquisadora. Uma pesquisadora que enxerga o fruto da sua pesquisa aplicado à sua sala de aula, à sua prática e como contribuição importante para a educação, de modo geral. A intenção

primária desse estudo era buscar instrumentos que pudessem auxiliar no trabalho docente, mas que também pudessem ter significado e valia para os estudantes. Acredita-se que essa intenção tenha se concretizado com o appAAP!

Enquanto trabalhos futuros destaca-se a necessidade da realização de ajustes na aplicação que possibilitem o seu uso em maior escala, para tanto, projetos de pesquisa voltados ao desenvolvimento tecnológico da aplicação continuarão sendo propostos, a fim de constituir uma equipe de manutenção e atualização do appAAP. Além disso, espera-se dar continuidade ao processo de alimentação da ferramenta com outras situações-problema por meio de projetos de pesquisa que integrem os estudantes do curso de licenciatura (no momento, da área da matemática, existente na instituição de trabalho da autora) e estudantes da educação básica. Assim, espera-se que mais professores abracem a ideia de usar o appAAP, na medida em que um banco de itens se constituir, para que o appAAP possa se fortalecer enquanto instrumento de apoio à ação pedagógica. A ideia de elaborar um banco de itens surgiu por entender que a organização do modelo de avaliação de cada situação-problema demanda um certo trabalho, embora possa ser realizado considerando materiais que os professores já possuem (problemas propostos em avaliações cujo mapeamento de informações já tenha sido efetuado, por exemplo).

Outra janela que se abre é ampliação da abrangência do appAAP, podendo levá-lo às escolas da região, oferecendo formação continuada a professores, discutindo acerca dos processos de ensino, aprendizagem e avaliação.

Por fim, tendo apoio na tese piagetiana de que a interdisciplinaridade é possível porque os “mecanismos das ciências” são comuns (PIAGET, 1973b), ou seja, reconhecendo que a lógica que se encontra por trás da compreensão da Física, da Química, da Matemática, da Linguística, da Música, bem como das demais áreas de conhecimento é a mesma, vislumbra-se a possibilidade de utilizar o appAAP em outros tópicos, da matemática e de outras áreas. A interdisciplinaridade alicerça-se sob a afirmação de que todas as ciências utilizam os mesmos mecanismos lógicos e são eles que possibilitam o diálogo interdisciplinar.

Entende-se que a capacidade de mobilizar diferentes recursos na busca da solução dos problemas, de forma articulada e com fluidez, relaciona-se com o desenvolvimento de competências no âmbito do saber-fazer aproximando-se das relações interdisciplinares. Nesse sentido, diante dos problemas atuais, cada vez mais complexos e interdisciplinares, no âmbito da educação escolar, “mais importantes são as transposições de esquemas cognitivos de uma disciplina para outra” (MORIN, 2010, p.108), sendo o conhecimento lógico-matemático o pano de fundo para o estabelecimento da colaboração interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ALMEIDA, J.R.; SANTOS, M. C. S. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, Campo Mourão, PR, v.6, n.10, p. 34-60, jan.-jun. 2017.
- ANGOFF, W. H. **Scales, norms, and equivalent scores**. In: R. L. Thorndike (Ed.), Educational Measurement. Washington, DC: American Council on Education, 1971.
- ANDRADE, M. V. M.; ARAÚJO JR., C. F. SILVEIRA, I. F. Estabelecimento de critérios de qualidade para aplicativos educacionais no contexto dos dispositivos móveis (M-Learning). **EaD em foco**, v. 7, n. 2, set. 2017.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento / Gaston Bachelard; tradução Esteia dos Santos Abreu. 5ª reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.
- BARBOSA, S. D. J.; SILVA, B. S. **Interação humano-computador**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- BECKER, F. Epistemologia genética e conhecimento matemático. In: BECKER, F.; FRANCO, S. R. K. **Revisitando Piaget**. Porto Alegre: Mediação, 2009.
- BECKER, F. **Educação e Construção do Conhecimento**. 2.ed. Porto Alegre: Penso, 2012.
- BECKER, F. Sujeito do Conhecimento e Ensino de Matemática. **Revista Schème**. V.5. 2013. P. 65 – 86.
- BECKER, F. Construção do Conhecimento Matemático: natureza, transmissão e gênese. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 33, n. 65, dez. 2019, p. 963-987.
- BIEMBENGUT, M. S. Obstáculos referentes às relações de representação geométrica e algébrica de grandezas. In: FONSECA, L. (Org.) **Didática do Cálculo**: Epistemologia, Ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. v.36, n.5, p.412-446, 2005.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: ago. 2019.
- BROOKE, J. et al. SUS: A quick and dirty usability scale. **Usability evaluation in industry**, London, v. 189, n. 194, p. 4–7, 1996.

BROOKE, J. SUS: a retrospective. **Journal of Usability Studies**. London, v. 8. 29-40, 2013.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématiques. **RDM**, Vol.4, nº 2, pp. 165-198. Grenoble, 1983.

CAMARA DOS SANTOS, M.. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 50, p. 38-45, 2002.

CANAVARRO; A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Universidade de Évora e CIEFCUL - Vol. XVI, Nº 2, 2007.

CARDANO, M. **Manual de pesquisa qualitativa**: a contribuição da teoria da argumentação. Tradução de Elisabeth da Rosa Conill. Petrópolis, RJ: Vozes, 2017.

CARRAHER; D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and Algebraic Reasoning. In: F. Lester (ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing, p. 669 -705, 2007.

CARRAHER, D. W. Educação tradicional e Educação moderna. In: NUNES, Terezinha (org.). **Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

CASTELLS, M. **A galáxia da internet**: reflexões sobre internet, os negócios e a sociedade. Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

CGLBR - COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa Sobre o Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Escolas Brasileiras: TIC educação 2017**. Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR, São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2018a.

CGLBR - COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa sobre o uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil: TIC kids online Brasil 2017**. Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR, São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2018b.

CGLBR - COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa sobre o uso da Internet por crianças e adolescentes no Brasil: TIC Kids Online Brasil 2019**. Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2020.

CGLBR - COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa web sobre o uso da Internet no Brasil durante a pandemia do novo coronavírus: Painel TIC COVID-19**. Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2021.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. In: STERNBERG, Robert. **As capacidades intelectuais humanas**: uma abordagem em processamento de informações. Porto Alegre: Artmed, 1992. p. 250-275.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Revista Estudos Avançados**, São Paulo, v.32, n.94, 2018.

COLL, C.; MONEREO, C. Educação e aprendizagem no século XXI: novas ferramentas, novos cenários, novas finalidades. In: COLL, C.; MONEREO, C. **Psicologia da educação virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

COLL, C.; MAURI, T.; ONRUBIA, J. A incorporação das tecnologias da informação e da comunicação na educação. In: COLL, C.; MONEREO, C. **Psicologia da educação virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

COLL, C. As contribuições da psicologia para a educação: teoria genética e aprendizagem escolar. In: LEITE, L. B. (org.); MEDEIROS, A. A. **Piaget e a Escola de Genebra**. São Paulo: Cortez, 1987, p. 164 – 197.

COLL, C.; GILLIÈRON, C. Jean Piaget: O desenvolvimento da inteligência e a construção do pensamento racional. In: LEITE, L.B. (org.); MEDEIROS, A. A. **Piaget e a Escola de Genebra**. São Paulo: Cortez, 1987, p. 13 - 50.

COSTA, L. C.; SANTO, J. S.. Comparação de Métodos para Definição de Linhas de Corte para Testes baseados em Critérios. **19º SINAPE: Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**. 2010. (Simpósio).

CSAPÓ, Benő; MOLNÁR, Gyöngyvér. Potential for Assessing Dynamic Problem-Solving at the Beginning of Higher Education Studies. **Frontiers in Psychology**, UK, v. 8, p. 1-12, 2017.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2019.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

D'AMBROSIO, U.; VALENTE, C. Os primórdios da epistemologia do cálculo: dos babilônios a Arquimedes. In: FONSECA, L. (Org). **Didática do cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Tradução Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DELVAL, J. **O desenvolvimento psicológico humano**. Tradução de Ricardo A. Rosenbusch. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

DOLLE J.M.; BELLANO, D. Tradução Claudio João Paulo Santini. **Essas crianças que não aprendem: diagnósticos e terapias cognitivas**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

DOLLE, J.M. **Princípios para uma pedagogia científica**. Porto Alegre: Penso, 2011.

DOLLE, J.M. Multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade à luz da Epistemologia Genética. **Revista Schème** – Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas, v.7, p. 4 – 31, 2015.

DONEL, M. L. H. **Dificuldades de aprendizagem em cálculo e a relação com o raciocínio lógico-formal**: uma análise no ensino superior. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Marília, SP, 2015.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FEIJÓ, V. C.; GONÇALVES, B. S.; GOMEZ, L. S. R. Heurística para avaliação de usabilidade em interfaces de aplicativos smartphones: utilidade, produtividade e imersão. **Design e Tecnologia**, v. 3, n. 06, p. 33-42, 31 dez. 2013.

FERREIRA, M. B. **Prototipagem e testes de usabilidade**. Curitiba: Contentus, 2020.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 78–91, 2016.

FRANÇA, Fabiano dos Santos. Web Design Responsivo: caminhos para um site adaptável. **Interfaces Científicas - Exatas e Tecnológicas**, Aracaju, v.1, n.2, p. 75 – 84, Jun. 2015.

FRANCO, S. R. K. **O construtivismo e a educação**. 9ª ed. Porto Alegre: Mediação, 1995.

FRANCO, S. K. Piaget e a dialética. In: BECKER, F.; FRANCO, S. R. K. (Orgs.). **Revisitando Piaget**. Porto Alegre: Mediação, 1997.

FREIRE, P. **Educação na Cidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001a.

FREIRE, P. A máquina está a serviço de que? **Revista BITS**, p. 6, maio de 1984.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários a prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2017.

GÓMEZ, À. I. P. **Educação na era digital**: a escola educativa. Porto Alegre: Penso, 2015.

GOMES, M.L.M. **Álgebra e funções na educação básica**. Belo Horizonte: CAED-UFGM, 2013.

GRAY, D. E. **Pesquisa no mundo real**. 2. ed. Porto Alegre, RS: Penso, 2012.

GREIFF, S.; NIEPEL, C.; SCHERER, R.; MARTIN, R. Understanding students' performance in a computer-based assessment of complex problem solving: An analysis of behavioral data from computer-generated log files. **Computers in Human Behavior**, UK, v.61, p. 36-46, 2019.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre: Mediação, 2014.

HOFFMANN, J. **Avaliação Mito & Desafio**: uma perspectiva construtivista. Porto Alegre: Mediação, 2017.

HOFFMANN, J. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2018.

IGLIORI, S. B. C. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. In: MACHADO, S. de A. et al. **Educação matemática**: uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 89-113.

INHELDER, B.; BOVET M.; SINCLAIR, H. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento**. São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

INHELDER, B. Las estrategias cognitivas: aproximacion al estudio de los procedimientos de resolucion de problemas. Tradiccion de César Coll. Facultad de Psicologia y Ciencias de la Educación – Universidad de Ginebra: **Anuário de Psicologia**, 1978, p. 3 – 20.

INHELDER, B. et al. Das estruturas cognitivas aos procedimentos de descoberta: esboço de pesquisas atuais. In: LEITE, L. B. (org.); MEDEIROS, A. A. **Piaget e a Escola de Genebra**. São Paulo: Cortez, 1987, p. 75 – 91.

INHELDER, B.; CAPRONA, D. de. Rumo ao construtivismo psicológico: Estruturas? Procedimentos? Os dois “indissociáveis”. In: INHELDER, B.; CELLÉRIER, G. **O desenrolar das descobertas da criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Tradução de Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

INHELDER, B.; CELLÉRIER, G. **O desenrolar das descobertas da criança: um estudo sobre as microgêneses cognitivas**. Tradução de Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência Enem**. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: set. 2018.

JARDINETTI, J. R. B. Abstrato e o Concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 11, n. 12, 1997.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding Mahwah**, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.

KESSELRING, T. **Jean Piaget**. Caxias do Sul: Educs, 2008.

KIERAN, C. Learning and teaching of school algebra. In: D. A Grows (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, p.390-419, 1992.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v.8, p.139-151, 2004.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. (Hygino H. Domingues, trad.). São Paulo: Atual, 1995. 16 p. 104 – 110.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning**. Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007, p. 707 – 762.

KITCHENHAM, B.; CHARTERS, S. Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering. **Technical Report EBSE 2007-001**, Departament of Computer Science Keele University, Keele, 2007.

LEE, V.; SCHNEIDER, H.; SCHELL, R. **Aplicações Móveis**. 1. ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

SERGIO LORENZATO; DARIO FIORENTINI. **Investigación en educación matemática: recorridos históricos y metodológicos**. Editora Autores Associados BVU, 2015

LUDOVICO, F. M.; MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. BARCELLOS, P. Covid-19: desafios dos docentes na linha de frente da educação. **Revista Interfaces Científicas**, Aracaju, v. 9 n. 3, p. 58-74, 2020.

LUDOVICO, F. M.; MOLON, J.; RENZ, C. L. S.; BARCELLOS, P. S. C. C.; FRANCO, S. R. K. Teoria Da Complexidade E Epistemologia Genética; Aproximações Através Da Análise De Cenias De Aprendizagem. **SCHÈME: Revista Eletrônica De Psicologia E Epistemologia Genéticas**, 2021.

MACEDO, L. Competências e habilidades: elementos para uma reflexão pedagógica. In: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): fundamentação teórico-metodológica**. Brasília, 2005. p. 13-28.

MACHADO, N. J. Sobre a idéia de competência. In: PERRENOUD, P. et al. **As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação**. Porto Alegre: Artmed, 2002, p. 137 – 175.

MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e Contextuação. In: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame**

Nacional do Ensino Médio (Enem): fundamentação teórico-metodológica. Brasília, 2005. p. 41-53.

MACHADO, N. J. Sobre a idéia de competência. In: FEUSP –Programa de Pós-Graduação, **Seminários de Estudos em Epistemologia e Didática (SEED)**, 2006. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/20060804.pdf>. Acesso em jan. 2020.

MACHADO, N. J. **Educação: competência e qualidade**. São Paulo: Escrituras, 2010.

MARCOTTE, E. **Responsive Web Design**. New York: A book Apart, 2011.

MARQUES, T. B. I. **Do egocentrismo a descentração: A docência no ensino superior**. Porto Alegre: 2005. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação/Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS, 2005.

MARTINS, A. I.; ROSA, A. F.; QUEIRÓS, A.; SILVA, A.; ROCHA, N. P. European Portuguese validation of the System Usability Scale (SUS). In: **6th International Conference on Software Development and Technologies for Enhancing Accessibility and Fighting Infoexclusion (DSAI)**, 2015, Sankt Augustin, Germany: FRAUNHOFER FIT, 2015. p. 293-300. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915031191> \h. Acesso em: jul/2019.

MICOTTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

MILETTO, E. M.; BERTAGNOLLI, S. C. (Org.). **Desenvolvimento de software II: introdução ao desenvolvimento web com HTML, CSS, Javascript e PHP**. Porto Alegre: Bookman, 2014.

MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. A mensuração de habilidades em matemática a partir da teoria de resposta ao item. In: VI Congresso Internacional de Educação, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais completos do VI Congresso Internacional de Educação Desafios e Soluções para Modelo Híbrido de Educação**. Foz do Iguaçu: UniAmérica, 2018. p. 94-114.

MOLON, J. Por que aprender álgebra? O Pensamento Algébrico na Base Nacional Comum Curricular In: Colóquio Luso-Brasileiro de Educação - COLBEDUCA, 2019, Joinville. **Caderno de resumos do V Colóquio luso-brasileiro de educação**. Joinville SC: Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, 2019. v.1. p.140 – 140.

MOLON, J.; TOEBE, I. C. D.; FRANCO, S. R. K. A formação inicial do professor: desafios de aprender para si e para ensinar. In: X Congresso Ibero-Americano de Docência Universitária (X CIDU), 2019, Porto Alegre. **Anais do X Congresso Ibero-Americano de Docência Universitária (CIDU)**, 2018. Porto Alegre: Editora PUCRS, 2018.

MOLON, J.; SIQUEIRA, C. F. R.; TOEBE, I. C. D.; FRANCO, S. R. K. Docência em tempos de alta transição tecnológica: um ensaio teórico a partir da obra modernidade líquida de Zygmunt Bauman. **Cadernos Zygmunt Bauman**, v. 10, p. 222-245, 2020.

MOLON, J.; NICOLAO, M.; FRANCO, S. R. K. Ferramentas digitais para a avaliação do processo de aprendizagem: um mapeamento sistemático da literatura. **RENOTE. REVISTA NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO**, v. 18, p. 501-510, 2020.

MOLON, J.; LUDOVICO, F. M.; BARCELLOS, P.; FRANCO, S. Avaliação em tempos de ensino remoto emergencial. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 33, p. e08055, 2022.

MONTANGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a Inteligência em Evolução: sinopse cronológica e vocabulário**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MORIN, E. **A cabeça bem-feita: repensar a reforma, reformar o pensamento**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2010.

MULLER, T. J. **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo: uma proposta baseada em análise de erros**. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2015.

NASSER, L.; SOUSA, G. A.; TORRACA, M.A.A. Mobilizações didáticas para a aprendizagem do conceito de função. In: FONSECA, L. (Org.) **Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

NIELSEN, J. **Usability engineering**. San Diego: Academic Press, 1993.

NOGUEIRA, C. M. I. **A Formação de Professores que Ensinam Matemática e os Conteúdos Escolares: Uma Reflexão Sustentada na Epistemologia Genética**. Schème, Unesp, v.5, Set/2013.

NUNES, T.; BRYANT, Peter. **Crianças Fazendo Matemática**. Tradução de: COSTA, S. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. Números, quantidades e relações: entendendo o raciocínio matemático nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: FILHO, J. A. d. C.; BARRETO M. C.; BARGUIL P. M.; MAIA D. L.; PINHEIRO J. L. (Eds.). **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Curitiba, Brasil: Editora CRV, 2016. p. 127-164.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. **CIAEM**, Recife, 2011.

PADRINI-ANDRADE, L. et al. Avaliação da usabilidade de um sistema de informação em saúde neonatal segundo a percepção do usuário. **Revista paulista de pediatria**, São Paulo, v. 37, n. 1, p. 90-96, jan. 2019.

PERRENOUD, P. **Construir as competências desde a escola**. Trad. Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

PERRENOUD, P. Construindo Competências. In: **Nova Escola (Brasil)**: set. 2000, p. 19-31. Entrevista concedida a Paola Gentile e Roberta Bencini. Disponível em: http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2000/2000_31.html. Acesso em: out. 2018.

PERRENOUD, P. **Porquê construir competências a partir da escola?** Desenvolvimento da autonomia e luta contra as desigualdades. Porto: ASA, 2001.

PERRENOUD, P. **Avaliação:** da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 2007.

PERRENOUD, P. **Desenvolver Competências ou Ensinar Saberes?** A escola que prepara para a vida. Porto Alegre: Penso, 2013.

PESTANA, M. I. G. S. et al. **Matrizes curriculares de referência para o SAEB.** Brasília: INEP, 1997. 95p.

PESTANA, Maria Inês Gomes de Sá et al. **Matrizes curriculares de referência para o SAEB.** Revisão e ampliação. Brasília: Inep, 1999. 134 p.

PIAGET, J. **Les stades du développement intellectuel de l'adolescent, in Le problem des stades en psychologie de l'enfant: symposium de l'Association de Psychologie Scientifique de Langue Française.** Genève, Paris: P. U.F., 1956.

PIAGET, J. SZMINSKA, A. **A Gênese do número na criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

PIAGET, J. Development and learning. In: LAVATELLY; STENDLER, F. **Reading in child behavior and development.** New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972^a.

PIAGET, J. **L'Epistémologie des relations interdisciplinaires in Transdisciplinarité – Problèmes d'enseignement et de recherche dans les Universités.** O.C.D.E., Paris, 1972b.

PIAGET, J. **Problemas de Psicologia genética.** Rio de Janeiro: Forense, 1973a.

PIAGET, J. **Problemas gerais da investigação interdisciplinar e mecanismos comuns.** Lisboa: Livraria Bertrand, 1973b.

PIAGET. **Biologia e conhecimento.** Petrópolis: Vozes, 1973c.

PIAGET, J.; GRÉCO, P. **Aprendizagem e conhecimento.** Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, J. **A tomada de consciência.** São Paulo: EDUSP, 1975.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976a.

PIAGET, J. **Ensaio de Lógica Operatória.** 2 ed. Porto Alegre, Globo, 1976b.

PIAGET, J. **Fazer e compreender.** São Paulo: Melhoramentos, 1978.

PIAGET, J. **O estruturalismo.** 3 ed. Rio de Janeiro: DIFEL, 1979a.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança.** 4 ed. Rio de Janeiro, Zahar, [1936]1982.

PIAGET, J. **O possível e o Necessário**: evolução dos possíveis na criança. Porto Alegre, Artes Médicas, vol. 1, 1985.

PIAGET, J. O possível, o impossível e o necessário: as pesquisas em andamento ou projetadas no Centro Internacional de Epistemologia Genética. In: LEITE, L. B. (org.); MEDEIROS, A. A. **Piaget e a Escola de Genebra**. São Paulo: Cortez, 1987, p. 51 – 74.

PIAGET, J. **A Evolução Intelectual da Adolescência à Vida Adulta**. Trad. Fernando Becker e Tania B.I. Marques. Porto Alegre: Faculdade de Educação, 1993.

PIAGET, J. et al. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. [1977]. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J. **Epistemologia genética**. Tradução de Álvaro Cabral. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 3. Ed.

PIAGET, J. **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro: José Olympio, 2011.

PIAGET, J. **As relações entre a inteligência e a afetividade no desenvolvimento da criança**. Tradução e organização: Cláudio J. P. Saltini e Doralice B. Cavenaghi. Rio de Janeiro: Wak, 2014.

PIMENTA, C. M. S. **A construção do conhecimento no desenvolvimento do Pensamento Algébrico**. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Universidade da Beira Interior (Ciências). Covilhã, 2016.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

POMMER, W. M. Mobilizações Didáticas para aprendizagem do conceito de variável. In: FONSECA, L. (Org.) **Didática do Cálculo**: Epistemologia, Ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres a nova cultura da aprendizagem**. Porto Alegre Artes Médicas, 2008.

PRESSMAN, R. S. **Engenharia de software**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2011.

PRESSMAN, R.S.; MAXIM, B. R. **Engenharia de software**: uma abordagem profissional. Tradução de João Eduardo Nóbrega Tortello. Porto Alegre: AMGH, 2016.

RABELO, M. **Avaliação Educacional**: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: North America Conference Of The International Group Of Psychology Of Mathematics Education. **PME**: Bergen University College. 2006. v. 1, p. 2 – 21.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. **Psicologia e Epistemologia Genética de Jean Piaget**. São Paulo: EPU, 1988.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. **Sistemas lógicos e sistemas de significação na obra de Jean Piaget**. Psicologia – USP, São Paulo, p. 21-23, 1991.

RANDOLPH, J. J. A guide to writing the dissertation literature review. **Practical Assessment, Research & Evaluation**, v. 14, n. 13, p. 1-13, 2009.

RIBEIRO, A.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

SALDAÑA, J. **The coding manual for qualitative researchers**. Los Angeles: Sage, 2012.

SANTANA, C. A.; ALCANTRA, R. A.; SIEBRA, S. A.; ÁVILA, B. T., Comparando métodos de avaliações de usabilidade, encontrabilidade e experiência do usuário. **Informação & Tecnologia (ITEC)**, Marília/João Pessoa, v.3, n.1, p.83-101, jan./jun. 2016.

SANTOS, P.; COOK, J.; HERNÁNDEZ-LEO, D. M-AssIST: Interaction and Scaffolding Matters in Authentic Assessment. **Educational Technology & Society**, Taiwan, v.18 (2), p. 33–45, 2015.

SAPUTRA, Ibrahim; BUDIYANTO, Cucuk; HATTA, Puspanda. The Development of a Competency Testing Systems: Adopting TAM to Explore User’s Acceptance. **Indonesian Journal of Informatics Education, Indonesian**, v.1, p. 1- 8, 2017.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic**: From Children’s Ideas to Classroom Practice. Studies in Mathematical Thinking and Learning Series. Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

SCHUBRING, G. A moção de multiplicação: um “obstáculo” desconhecido na história da matemática. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002.

SEGADAS-VIANNA, C. C.; Obstáculos referentes ao desenvolvimento do conceito de função. FONSECA, L. (Org.) **Didática do Cálculo**: Epistemologia, Ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

SILVA, J. A.; FREZZA, J. S.. Aspectos metodológicos e constitutivos do pensamento do adulto. **Educar em Revista** (Impresso), v. 39, p. 191-205, 2011.

SILVEIRA SONEGO, A. H.; BEHAR, P. A. M-learning: o uso de dispositivos móveis por uma geração conectada. **Educação**, v. 42, n. 3, p. 525-534, 31 dez. 2019.

SHARP, Helen; ROGERS, Yvonne; PREECE, Jenny. **Interaction design: beyond human computer interaction**. 2ª Ed. England: John Wiley & Sons, 2007.

SMARTPHONE. In **Dicionário Priberam da Língua Portuguesa** [em linha], 2008-2021, <https://dicionario.priberam.org/smartphone> [consultado em 8-02-2021].

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. (Org.). **Resolução de Problemas nas Aulas de Matemática: Coleção Mathemoteca - Vol.6**. Porto Alegre: Penso, 2016.

SPERAFICO, Y. L. S.; DORNELES, B. V.; GOLBERT, C. S. Competência Cognitiva e Resolução de Problemas com Equações Algébricas do 1º Grau. **Bolema** [online]. 2015, vol.29, n.51, pp. 333-348.

STEIF, P. S.; FU, L.; KARA, L. B. Providing formative assessment to students solving multipath engineering problems with complex arrangements of interacting parts: an intelligent tutor approach. **Interactive Learning Environments**, UK, v.24, p. 1864-1880, 2016.

TENÓRIO, J. M., COHRS, F. M., SDEPANIAN, V. L., PISA, I, T. & MARIN, H. F. Desenvolvimento e Avaliação de um Protocolo Eletrônico para Atendimento e Monitoramento do Paciente com Doença Celíaca. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, 17(2), 210-220, 2011.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (orgs.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALE, I.; BARBOSA A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n.3, pp.398-418, 2019.

APÊNDICE 1 – Aprovação CEP – UERGS e CEP – IFRS

Você está em: Público > Buscar Pesquisas Aprovadas > Detalhar Projeto de Pesquisa

DETALHAR PROJETO DE PESQUISA

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título Público: MODELO DE AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM PARA DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA DIGITAL DE APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA
Pesquisador Responsável: SERGIO ROBERTO KIELING FRANCO
Contato Público: SERGIO ROBERTO KIELING FRANCO
Condições de saúde ou problemas estudados:
Descritores CID - Gerais:
Descritores CID - Específicos:
Descritores CID - da Intervenção:
Data de Aprovação Ética do CEP/CONEP: 15/04/2020



DADOS DA INSTITUIÇÃO PROPONENTE

Nome da Instituição: Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação
Cidade: PORTO ALEGRE

DADOS DO COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Comitê de Ética Responsável: 8091 - UERGS - Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
Endereço: Avenida Bento Gonçalves, 8855, Campus Central da UERGS, Prédio 11
Telefone: (51)3318-5148
E-mail: cep@gmail.com

CENTRO(S) PARTICIPANTE(S) DO PROJETO DE PESQUISA

CENTRO(S) COPARTICIPANTE(S) DO PROJETO DE PESQUISA

Nome: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
Cidade: CANOAS

[Voltar](#)

APÊNDICE 2 – Itens do Enem selecionados: escrita original e reformulação

As questões abaixo foram usadas nas provas do Enem de 2009 a 2018 para avaliar a habilidade 21 (Matriz de Referência do Enem): “Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos”. Foram considerados os itens incluídos nos cadernos de cor AZUL (identificados a partir do acesso aos Microdados do Enem⁵⁵).

SPi	Item original	Item reformulado
SP1	<p>Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.</p> <p>Quantos alunos compraram somente um bilhete?</p> <p>A 34 B 42 C 47 D 48 E 79</p>	<p>Em uma campanha publicitária, houve a entrega de brindes a pessoas que estavam passeando em um determinado parque. Do total de pessoas que estavam no parque no momento da campanha, oitenta preferiram não pegar o brinde promocional, 45 pegaram 2 brindes, e muitos pegaram apenas um. Suponha que a quantidade de pessoas que pegou apenas um brinde corresponde a 20% da quantidade de itens distribuídos, e que o total de brindes ultrapassou em 33 o número de pessoas no parque no momento da realização da campanha.</p> <p>Quantas pessoas pegaram somente um brinde?</p>
SP2	<p>Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R\$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R\$ 6,00 a mais do que a quantidade necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantidade exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.</p> <p>A quantidade que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era</p> <p>A R\$ 166,00. B R\$ 156,00. C R\$ 84,00. D R\$ 46,00. E R\$ 24,00.</p>	<p>Uma vez ao mês, meu chefe compra o mesmo número de sanduíches, na mesma padaria, ao custo de R\$ 10,00 por sanduíche, para um café coletivo na empresa. Meu chefe sabe o valor que irá gastar toda vez que vai comprar esses sanduíches, mas carrega sempre consigo R\$ 6,00 além da quantidade necessária para a compra habitual. Na última compra, porém, ele foi surpreendido com um acréscimo de 20% no preço do sanduíche. Por causa disso, o valor que tinha consigo, dava exatamente para levar dois sanduíches a menos do que costumava comprar.</p> <p>Qual era o valor que meu chefe carregava consigo para ir à padaria?</p>
SP3	<p>Uma escola organizou uma corrida de revezamento 4 × 400 metros, que consiste em uma prova esportiva na qual os atletas correm 400 metros cada um deles, segurando um bastão, repassando-o de um atleta para outro da mesma equipe, realizando três trocas ao longo do percurso, até o quarto atleta, que cruzará a linha de chegada com o bastão. A equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos.</p> <p>O segundo corredor da equipe ganhadora correu seus 400 metros 15 segundos mais rápido do que o primeiro; já o terceiro realizou seus 400 metros 5 segundos mais rápido que o segundo corredor, e o último realizou seu percurso em $\frac{3}{4}$ do tempo realizado pelo primeiro.</p> <p>Qual foi o tempo, em segundo, em que o último atleta da equipe ganhadora realizou seu percurso de 400 metros?</p> <p>A 58 B 61 C 69 D 72 E 96</p>	<p>O ciclo de uma máquina lava e seca é realizado em 4 etapas sucessivas (agitação, enxague, centrifugação e secagem) e é realizado em um tempo total de 325 minutos.</p> <p>A segunda etapa do ciclo é 15 minutos mais rápida do que a primeira; já a terceira é 5 minutos mais rápida que a segunda etapa, e a última demora $\frac{3}{4}$ do tempo que leva a primeira etapa do ciclo.</p> <p>Quanto tempo, em minutos, leva a última etapa do ciclo completo da máquina lava e seca?</p>

⁵⁵ Disponíveis em: <http://portal.inep.gov.br/microdados>.

Item original

A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

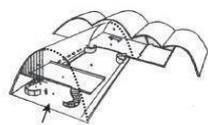


Figura 1

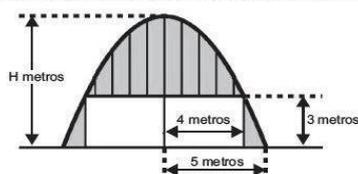


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

- A $\frac{16}{3}$
- B $\frac{31}{5}$
- C $\frac{25}{4}$
- D $\frac{25}{3}$
- E $\frac{75}{2}$

SP4

Item reformulado

O pórtico de entrada à cidade gaúcha de *Vila Lângaro*, no nordeste do estado, possui sua estrutura em formato parabólico, conforme a foto da figura 1. As medidas aproximadas do pórtico, em sua vista frontal, podem ser visualizadas na figura 2.

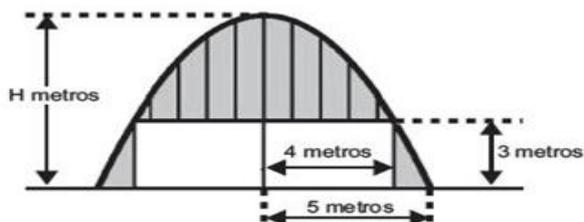
Figura 1



Fonte:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:P%C3%B3rtico_Vila_L%C3%A2ngaro.jpg

Figura 2



Considerando a figura 2, determine a medida H que representa a altura do pórtico de entrada da cidade de *Vila Lângaro*.

SP5

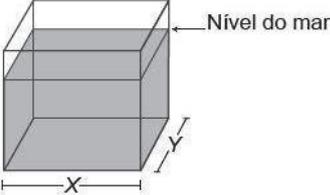
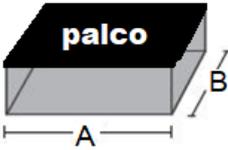
Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R\$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R\$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

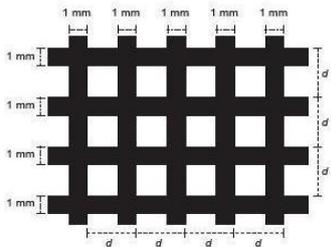
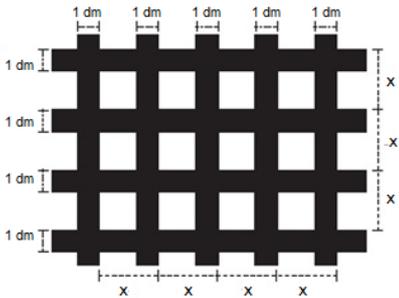
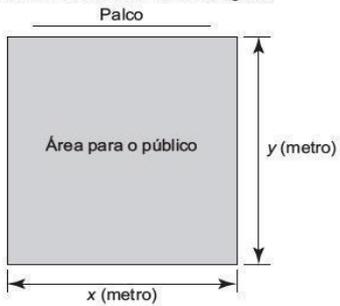
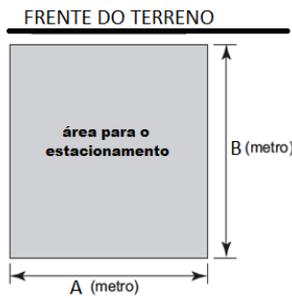
Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

- A 20
- B 24
- C 29
- D 40
- E 58

Uma empresa organizadora de casamentos divide o valor total a ser pago pelo contratante em N parcelas de igual valor e sem acréscimo de juros. Após o orçamento, o contratante pode optar por outras duas formas de pagamento. Se preferir, pode-se aumentar o prazo acrescentando mais 5 parcelas, sendo que o valor de cada parcela diminui R\$ 200,00. No entanto, é possível pagar também em um prazo menor, com 4 parcelas a menos, sendo que, assim, o valor de cada parcela é acrescido de R\$232,00. Nas três opções de pagamento o valor total a ser pago é o mesmo, sem descontos e sem juros.

Assim, qual seria a quantidade N de parcelas propostas inicialmente pela empresa?

<p>SP6</p>	<p>Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.</p> <p>Disponível em: www.techlider.com.br. Acesso em: 31 jul. 2012.</p> <p>O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é</p> <p>A 200. B 209. C 270. D 340. E 475.</p>	<p>Por causa de uma promoção, o plano de internet móvel que contratei só descontará dados quando eu compartilhar áudios e arquivos de imagem. No primeiro mês de uso, consumi todo o meu plano de dados ao enviar 10 minutos de áudio e 190 arquivos de imagem. No segundo mês, esgotei meus dados móveis enviando 15 minutos de áudio e 150 arquivos de imagens. Todos os áudios possuem a mesma qualidade de gravação entre si, assim como todos os arquivos de imagem possuem a mesma resolução. Sabendo disso, no terceiro mês decidi que apenas enviaria imagens, com a mesma qualidade e igual resolução dos arquivos de imagem enviados nos meses anteriores.</p> <p>A quantidade máxima de arquivos de imagens que consegui enviar com o meu plano de dados móveis no terceiro mês foi:</p>
<p>SP7</p>	<p>Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:</p> $y = 9 - x^2, \text{ sendo } x \text{ e } y \text{ medidos em metros.}$ <p>Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.</p> <p>Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?</p> <p>A 18 B 20 C 36 D 45 E 54</p>	<p>A <i>Praça dos Arcos</i>, localizada na cidade de São Paulo, foi inaugurada em 1922 para comemorar o centenário da Avenida Paulista. Para informar aos turistas sobre a história da praça, pretende-se confeccionar um <i>outdoor</i> com contorno parabólico, considerando a equação $y = 9 - x^2$, com valores de x e y considerados em metros.</p> <p>A área de publicidade desse <i>outdoor</i> é compreendida entre o chão e o arco da parábola dada acima, considerando que o seu eixo de simetria pode ser tomado como o eixo vertical e o chão enquanto eixo horizontal. Essa área será equivalente a $\frac{2}{3}$ da área de um retângulo de base e altura, respectivamente iguais à base e à altura do <i>outdoor</i>. Qual é a área de publicidade, em metro quadrado, desse <i>outdoor</i>?</p>
<p>SP8</p>	<p>Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.</p>  <p>Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?</p> <p>A 1 e 49 B 1 e 99 C 10 e 10 D 25 e 25 E 50 e 50</p>	<p>Um palco, em formato de prisma reto-retângulo, está sendo construído no centro de um campo de futebol para a realização de um grande show. As laterais do palco deverão ser revestidas com placas de led que possuem todas a mesma altura do palco. Para revestir todas as laterais, a equipe de montagem deve utilizar integralmente 100 metros lineares de placas de led que estão disponíveis.</p>  <p>Determine as medidas de A e B, em metros, para que a área do palco seja a maior possível e, responda: quantos metros quadrados o palco terá?</p>

<p>SP9</p>	<p>Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de $(d - 1)$ milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.</p> <p>A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.</p>  <p>Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.</p> <p>A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é</p> <p>A 2 B 1 C $\frac{11}{3}$ D $\frac{4}{3}$ E $\frac{2}{3}$</p>	<p>Estaciono meu carro no pátio de minha casa, em uma área retangular de 5 metros de largura e 9 metros de comprimento. Quero cobrir essa área com placas transparentes de policarbonato e a estrutura que sustentará essas placas será construída com barras de alumínio escuras entrelaçadas de forma perpendicular.</p> <p>Essa cobertura fará com que os carros ali estacionados fiquem protegidos tanto da chuva quando da exposição excessiva à luz solar, pois o raio de luz atravessa apenas nos espaços que ficam transparentes entre as barras de alumínio. A largura de cada barra de alumínio é de 1 decímetro e a distância entre duas barras, tanto na horizontal quanto na vertical, é de $(x - 1)$ decímetros, conforme a figura.</p>  <p>Desse modo, a taxa de sombreamento da cobertura, assim construída, corresponde ao percentual da área da região que fica coberta pelas barras de alumínio.</p> <p>Qual é a medida x, em decímetros, para que a taxa de sombreamento da cobertura seja de 75%?</p>
<p>SP10</p>	<p>Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.</p>  <p>A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$ 20,00; • nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5,00. <p>A empresa dispõe de R\$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.</p> <p>A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é</p> <p>A 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B. B 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B. C 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B. D 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B. E 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.</p>	<p>Suponha que, para obter uma renda extra, Jorge decidiu construir um <i>Estacionamento</i> em um grande terreno, em formato retangular, como observa-se na figura.</p>  <p>A área destinada ao <i>Estacionamento</i> será cercada de duas formas distintas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • os lados paralelos à frente do terreno, terão muros de tijolos cujo custo de construção será de R\$ 20,00 ao metro linear. • os outros dois lados, terão placas de madeira, material de menor custo, R\$ 5,00 ao metro linear. <p>Sabendo disso, Jorge quer cercar a maior área possível para o <i>Estacionamento</i> tendo R\$ 5000,00 para comprar todos os materiais.</p> <p>Quantos metros lineares de muro de tijolos deverão ser construídos?</p>

APÊNDICE 3 – TCLE e questionário especialistas – 1ª etapa

REESCRITA DE SITUAÇÕES-PROBLEMA DO Enem: VALIDAÇÃO POR ESPECIALISTAS

1. E-mail: _____
2. Qual a sua maior titulação? Em que área? (Ex: Doutora em Informática na Educação)

APRESENTAÇÃO

Este questionário faz parte da pesquisa de doutorado intitulada **MODELO DE AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM PARA DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA DIGITAL DE APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA** de autoria da professora Jaqueline Molon sob orientação do professor Sérgio Roberto Kieling Franco no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação - UFRGS. A pesquisa foi registrada na Plataforma Brasil, sob o protocolo nº 30299520.9.0000.8091 e aprovada pelo CEP/UERGS e pelo CEP/IFRS.

O objetivo geral da pesquisa é delinear um procedimento capaz de identificar, por meio de uma ferramenta digital, que estratégias cognitivas são utilizadas pelos estudantes durante a resolução de problemas matemáticos vinculados ao pensamento algébrico.

Em função do momento pandêmico para o desenvolvimento da pesquisa de forma remota, houve a necessidade de incluir mais uma etapa na pesquisa: reescrita e validação dos de investigação que serão objeto da pesquisa e utilizados com os estudantes. Em função da necessidade de reescrita da contextualização de cada questão, por serem oriundas do Enem, é preciso garantir que as características avaliativas de cada item sejam preservadas.

Dessa forma, sua contribuição é de grande relevância para a efetivação do estudo, pois a versão reescrita de cada uma das questões precisa passar por validação de especialistas da área (no caso, professores de matemática que atuam no IFRS, por assumir a premissa de que além do conhecimento matemático, associado ao pensamento algébrico, a validação deve considerar ainda o conhecimento das características do público da pesquisa: estudantes dos 3º e 4º anos dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e ingressantes no Ensino Superior do IFRS).

Ao aceitar colaborar, você receberá informações sobre a engenharia de construção de itens utilizada pelo Enem, bem como sobre os critérios a serem analisados. Terão acesso, também, ao item original para que possam analisá-lo e compará-lo com a versão reescrita e poderão sugerir modificações.

Tempo estimado para responder ao questionário: 40 minutos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da primeira fase da pesquisa de doutorado intitulada **“MODELO DE AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM PARA DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA DIGITAL DE APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA”**.

A pesquisa refere-se ao processo de doutoramento da professora Jaqueline Molon, que pode ser contatada, a qualquer tempo, através do e-mail jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br ou telefone 51 98181-1108. O pesquisador responsável pelo estudo, na Plataforma Brasil, é o orientador Sérgio Roberto Kieling Franco, que pode ser contatado pelo telefone (51) 3308-4147, no endereço Avenida Paulo Gama, nº 110, Porto Alegre - RS, Prédio 12201 – UFRGS, sala 728 e pelo e-mail sergio.franco@ufrgs.br. A equipe do estudo responderá a todas as dúvidas e informações que solicitar a qualquer momento (antes, durante e após o estudo), acerca dos procedimentos ou outros assuntos relacionados ao estudo.

O objetivo geral da pesquisa é delinear um procedimento capaz de identificar, por meio de uma ferramenta digital, que Estratégias Cognitivas (EC) são utilizadas pelo estudante durante a resolução de problemas matemáticos vinculados ao pensamento algébrico. Os procedimentos utilizados nessa pesquisa obedecem aos critérios da ética na Pesquisa com Seres Humanos, conforme resoluções 466/12 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde. Os riscos aos participantes da pesquisa são mínimos, já que a primeira fase da pesquisa refere-se à validação, por especialistas, da reescrita da contextualização dos itens (situações-problema) que serão utilizados na fase seguinte da pesquisa. Trata-se de questões utilizadas no Enem e, portanto, houve a necessidade de reescrevê-las, porém deve-se garantir que as características avaliativas de cada questão sejam preservadas. Destaca-se que os pesquisadores estarão à disposição para conversar e esclarecer dúvidas, em qualquer momento, como estratégia para minimizar eventuais incômodos ou constrangimentos oriundos da sua participação nesse estudo.

Sua contribuição é voluntária e pode ser interrompida em qualquer tempo sem nenhum prejuízo. Todos os cuidados serão tomados para garantir o sigilo e a confidencialidade das informações, preservando a identidade dos participantes bem como das instituições envolvidas. Todas as despesas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caso haja, serão ressarcidas. Danos decorrentes da pesquisa serão indenizados. A sua colaboração nesse estudo será de muita importância para nós, no entanto, você poderá se retirar do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de despesa e constrangimento.

Os participantes da pesquisa não terão nenhum benefício direto, entretanto, esperamos que futuramente os resultados deste estudo sejam usados em benefício de outras pessoas (professores e alunos) que poderão utilizar do modelo de avaliação do processo de aprendizagem que será desenvolvido. Ainda, a participação no estudo representa uma importante contribuição para o desenvolvimento da pesquisa científica, uma vez que os resultados desse trabalho poderão ser apresentados em encontros ou publicados em revistas científicas.

Solicitamos a sua autorização para usar suas informações na produção de artigos técnicos e científicos, aos quais você poderá ter acesso. A sua privacidade será mantida através da não-identificação do seu nome. Todos os registros da pesquisa estarão sob a guarda da pesquisadora Jaqueline Molon, em lugar seguro de violação, pelo período mínimo de 05 (cinco) anos e, após esse prazo, serão destruídos.

Este termo de consentimento livre e esclarecido pode ser baixado através do link <https://drive.google.com/open?id=1aBFHWRhi2-IyhRUDWdm2AzvMUUI2EQ>.

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs (CEP-Uergs). Av. Bento Gonçalves, 8855, Bairro Agronomia, Porto Alegre/RS – CEP: 91540-000; Fone/Fax: (51) 33185148; e-mail: cep@uergs.edu.br. Você também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa do IFRS – Rua General Osório, 348 - Centro - Bento Gonçalves - RS - CEP: 95700-000- Tel: (54) 3449-3340 – E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br.

-
3. Tendo em vista os itens acima apresentados, eu, de forma livre e esclarecida, aceito participar desta pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, sobre os riscos e benefícios envolvidos. Recebi uma cópia deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Marque apenas uma oval:

- () Estou de acordo e concordo em participar da pesquisa.
 () Não estou de acordo e não concordo em participar da pesquisa.

ORIENTAÇÕES GERAIS SOBRE A METODOLOGIA DE ELABORAÇÃO DE ITENS DO Enem

- Cada situação-problema usada no Enem é considerada como um ITEM de análise e vincula-se, a uma habilidade específica. Os itens incluídos nesse estudo vinculam-se à Habilidade 21 da Matriz de Referência do Enem: “Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos”.
- Os itens de múltipla escolha utilizados no Enem são do “tipo interpretação e formulados a partir de uma situação-estímulo que compõe o enunciado. Essa situação faz parte de um problema e, a partir dela, o estudante organiza as ideias, dados ou informações para resolvê-lo” (RABELO, 2013, p.199).
- A estrutura básica de um ITEM de múltipla escolha, conforme a engenharia de elaboração de itens utilizada no Enem, “divide-se em três partes: texto-base, enunciado (comando) e opções (alternativas)” (RABELO, 2013, p. 189). Essas partes devem ser complementares, de modo que sem o texto-base, por exemplo, o comando e as alternativas deixam de fazer sentido, ou seja, a contextualização deve “fornecer informações essenciais para a resolução da situação-problema proposta e não apenas caracterizar-se como informação acessória” (RABELO, 2013, p. 180).
- Os itens e as possibilidades de alternativas de resposta são metodologicamente testados antes de passarem a integrar o banco de itens do Enem. Cada opção de resposta incorreta é chamada de distrator. Cada distrator vincula-se a um nível de desenvolvimento adequado da aprendizagem e ensaja um possível raciocínio que um respondente de baixo desempenho faria para escolhê-lo como resposta.
- Essa metodologia permite, dessa forma, que a partir da escolha da alternativa de resposta do aluno, seja identificado, na fase de análise de desempenho, os erros mais comuns nos diversos níveis de proficiência dos estudantes e, assim, possibilita obter indícios sobre os processos cognitivos de cada respondente (RABELO, 2013).

Referência: RABELO, Mauro. **Avaliação Educacional:** fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS:

Em função da complexidade que envolve a elaboração e testagem dos itens e distratores para uma avaliação com os objetivos apontados, optou-se, nesse estudo, por preservar o gabarito e os distratores dos itens originais.

Desse modo, apenas a CONTEXTUALIZAÇÃO de cada um dos itens que serão utilizados no estudo foi reescrita.

Portanto, sua contribuição refere-se a análise de critérios vinculados, de forma específica, à reescrita da CONTEXTUALIZAÇÃO de cada situação-problema (item).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1⁵⁶**ITEM ORIGINAL (SP1O)**

Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

- A) 34
- B) 42
- C) 47
- D) 48
- E) 79

1. De acordo com sua avaliação, que conceitos, procedimentos e habilidades estão relacionados com a resolução dessa situação-problema?

ITEM REESCRITO (SP1R)

Em um evento beneficente, um sorteio foi realizado com a finalidade de arrecadar fundos para auxiliar um lar de idosos. Do total de convidados para o jantar, oitenta não compareceram e, assim, não participaram do sorteio. Entre os presentes, 45 adquiriram 2 cupons, e muitos adquiriram somente um. Suponha que a quantidade de convidados que adquiriu um só cupom era 20% da quantidade de cupons vendidos, e que o total de cupons ultrapassou em 33 o número de pessoas convidadas para o jantar.

Quantos convidados adquiriram um cupom apenas?

- A) 34
- B) 42
- C) 47
- D) 48
- E) 79

2. Você avalia que o item reescrito pode ser considerado como “uma combinação geradora de sentido”, com coerência e coesão entre suas partes (apresentando uma articulação entre elas)?
() Sim () Não
3. A escolha do texto-base é fundamental para a construção de um item de bom nível. Assim, com base na análise desse item, você avalia que o texto é de fácil compreensão, com linguagem adequada ao nível dos estudantes?

⁵⁶ A situação-problema 1 será usada como exemplo, o mesmo foi realizado, na ordem apresentada, com as demais questões.

*Público-alvo: estudantes do 3º e 4º anos dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e ingressantes (1º semestre) dos cursos superiores do IFRS Campus Canoas.

- () Sim () Não
4. Outros critérios que devem ser considerados são: clareza, objetividade, originalidade, precisão e impessoalidade. Na sua avaliação, esse item atende a esses critérios?
() Sim () Não
5. O item admite uma única interpretação e uma só resposta?
() Sim () Não
6. O texto utiliza linguagem livre de termos ambíguos, confusos ou vagos?
() Sim () Não
7. Ao ler o item original e sua reescrita, você avalia que as questões são equivalentes quanto às exigências de aplicação de conhecimentos, conceitos, procedimentos, habilidades e estratégias de resolução?
() Sim () Não
8. Você avalia que os erros que os alunos cometeriam em ambas as questões seriam os mesmos (ou equivalentes)?
() Sim () Não
9. Você considera que a reescrita atende a todos os critérios especificados acima?
() Sim () Não
- OBS: No caso de assinalar “Não” na pergunta 9, abre-se a pergunta 10.

SUGESTÕES DE AJUSTE

Essa seção destina-se ao envio de suas sugestões de reescrita para o item que acabou de analisar, uma vez que, com base em suas respostas a reescrita proposta para o item não atende a um ou mais dos critérios elencados.

ESSE É O TEXTO DA QUESTÃO REESCRITA QUE ESTÁ SENDO AVALIADA NESSE MOMENTO:

Em um evento beneficente, um sorteio foi realizado com a finalidade de arrecadar fundos para auxiliar um lar de idosos. Do total de convidados para o jantar, oitenta não compareceram e, assim, não participaram do sorteio. Entre os presentes, 45 adquiriram 2 cupons, e muitos adquiriram somente um. Suponha que a quantidade de convidados que adquiriu um só cupom era 20% da quantidade de cupons vendidos, e que o total de cupons ultrapassou em 33 o número de pessoas convidadas para o jantar.

Quantos convidados adquiriram um cupom apenas?

- A) 34
- B) 42
- C) 47
- D) 48
- E) 79

10. Sugira modificações que possam corrigir ou melhorar a reescrita do item de modo que ele passe a atender a todos os critérios especificados. Justifique.

QUAL O NÍVEL DE DIFICULDADE DESSE ITEM?

Para estimar "a priori" o nível de dificuldade do item, será utilizado o MÉTODO ANGOFF.

É IMPORTANTE SABER UM POUCO SOBRE O MÉTODO ANGOFF MODIFICADO:

O **método de Angoff modificado** é um procedimento muito usado para estimar o nível de dificuldade de cada item de um teste e o nível de dificuldade de uma prova, por exemplo. O método é centrado no item de análise e baseado em critérios, e deve ser realizado com um grupo de especialistas no assunto que está sendo analisado.

Ao longo desse questionário, você participará da **primeira etapa de aplicação do método Angoff modificado** que consiste em **estimar quantos alunos, de um grupo de 100 alunos minimamente competentes responderiam corretamente** a cada item que você analisar.

O conceito de “aluno minimamente competente” é subjetivo, mas deve ser considerado por você como um aluno que, **de acordo com sua a sua concepção, possui os conhecimentos básicos e domina minimamente** os procedimentos associados ao item de análise, considerando que os respondentes serão estudantes dos 3º e 4º anos dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e ingressantes (1º semestre) dos cursos superiores do IFRS Canoas.

Após obter as estimativas de todos os professores para todos os itens, e havendo muita discrepância entre as análises de algum item, ocorrerá **a segunda etapa do método**, no qual serão discutidos os critérios utilizados por cada especialista e, as estimativas fornecidas por cada um em cada item reanalisado poderão ser modificadas. Se houver necessidade, essa etapa será realizada em outro momento!

Para estimar "a priori" o nível de dificuldade do item, será utilizado o MÉTODO ANGOFF. O conceito de “aluno minimamente competente” é subjetivo, mas deve ser considerado por você como um aluno que, de acordo com sua a sua concepção, possui os conhecimentos básicos e domina minimamente os procedimentos associados ao item de análise, considerando que os respondentes serão estudantes dos 3º e 4º anos dos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e ingressantes (1º semestre) dos cursos superiores do IFRS Canoas.

A partir do exposto sobre o Método Angoff Modificado, responda:

(SPIR) De 100 estudantes, minimamente competentes, quantos você acredita que resolveriam corretamente a questão abaixo?

(resposta numérica entre 0 e 100)

Em um evento beneficente, um sorteio foi realizado com a finalidade de arrecadar fundos para auxiliar um lar de idosos. Do total de convidados para o jantar, oitenta não compareceram e, assim, não participaram do sorteio. Entre os presentes, 45 adquiriram 2 cupons, e muitos adquiriram somente um. Suponha que a quantidade de convidados que adquiriu um só cupom era 20% da quantidade de cupons vendidos, e que o total de cupons ultrapassou em 33 o número de pessoas convidadas para o jantar.

Quantos convidados adquiriram um cupom apenas?

- A) 34
- B) 42
- C) 47
- D) 48
- E) 79

APÊNDICE 4 – TCLE e convite aos alunos – 2ª etapa

Desenvolvimento de App de apoio à resolução de situações-problema em matemática

Você, estudante do 3º ou 4º ano dos cursos integrados ou aluno ingressante em 2020 em um dos cursos superiores do IFRS Canoas, está sendo convidado a participar da pesquisa de doutorado da professora de matemática, Jaqueline Molon. A pesquisa foi autorizada pelo Comitê de Ética em Pesquisa do IFRS e da UERGS. Além disso, a direção de ensino do Campus Canoas também está ciente e de acordo com a realização do estudo!

Sua participação é MUITO valiosa para a pesquisa, pois um dos produtos desse trabalho será um aplicativo (web e móvel) de apoio para a resolução de situações-problema em matemática, que poderá ser usado por ti posteriormente.

O que você precisará fazer?

Nesse momento, você irá responder algumas perguntas básicas (nome, idade, e-mail, turma etc.) e, aceitando participar do estudo, você irá informar um contato de telefone (WhatsApp). Através dele agendaremos um horário para uma reunião on-line via Google Meet e, nessa reunião, você irá receber duas situações-problema para tentar resolver e iremos conversar sobre esse processo de resolução.

E então, aceita participar?

Desde já agradeço e me coloco a disposição para mais informações.

Jaqueline Molon

jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br

*Obrigatório

1. E-mail * _____
2. Nome completo * Seu nome será preservado, mas é preciso aqui, para organização apenas.

3. Você é estudante de que curso? * Marcar apenas uma oval.
 - () Técnico Integrado em Administração (ADM) - Pular para a pergunta 4
 - () Técnico Integrado em Desenvolvimento de Sistemas (DS) - Pular para a pergunta 4
 - () Técnico Integrado em Eletrônica (ELE) - Pular para a pergunta 4
 - () Superior Licenciatura em Matemática - Pular para a pergunta 5
 - () Superior Tecnologia em Logística- Pular para a pergunta 5
 - () Superior Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Pular para a pergunta 5
 - () Superior Tecnologia em Automação Industrial- Pular para a pergunta 5
4. Qual a sua turma? * Marcar apenas uma oval. () 3º ano () 4º ano
5. Em que ano você ingressou no curso que está fazendo no IFRS Canoas? _____

Para a pesquisa é importante saber a sua idade. E, caso tenha menos de 18 anos, seu responsável legal deverá autorizar a sua participação no estudo.

6. Você tem mais de 18 anos? Marcar apenas uma oval.
 - () SIM – Acesso ao TCLE para participantes maiores de 18 anos
 - () NÃO – Acesso ao TALE para participantes menores de 18 anos⁵⁷

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa de doutorado intitulada “MODELO DE AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM PARA DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA DIGITAL DE APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA”. O pesquisador responsável por essa pesquisa é Sérgio Roberto Kieling Franco, que pode ser contatado pelo telefone (51) 3308-4147, no endereço Avenida Paulo Gama, nº 110, Porto Alegre - RS, Prédio 12201 – UFRGS, sala 728 e pelo e-mail sergio.franco@ufrgs.br. Você também pode contatar a pesquisadora Jaqueline Molon através do e-mail jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br ou telefone 51 98181-1108. A equipe do estudo responderá a todas as dúvidas

⁵⁷ Todos os respondentes tinham mais de 18 anos, logo o TALE não foi acessado por nenhum aluno, tampouco foi necessário solicitar ciência dos responsáveis, logo esses documentos não foram incluídos neste apêndice também.

e informações, que solicitar a qualquer momento (antes, durante e após o estudo), acerca dos procedimentos ou outros assuntos relacionados ao estudo.

O objetivo da pesquisa é identificar elementos que devem ser considerados em um modelo de detecção de dificuldades cognitivas de estudantes em tarefas de resolução de problemas matemáticos para auxílio à ação pedagógica através de ferramenta digital.

Ao participar da presente etapa da pesquisa você participará de uma reunião a ser agendada através do Google Meet na qual resolverá (02) situações-problema de matemática. Os registros acerca das estratégias de resolução adotadas, de suas dúvidas ou dificuldades enfrentadas, serão coletados de forma escrita (foto de suas anotações) a ser enviada via WhatsApp e em vídeo, através do recurso de gravação disponível no próprio Google Meet ou outro.

Os procedimentos utilizados nessa pesquisa obedecem aos critérios da ética na Pesquisa com Seres Humanos, conforme resoluções 466/12 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde. Os riscos aos participantes são mínimos, pois será solicitado que resolvam questões específicas e informem estratégias, dúvidas e procedimentos utilizados ao longo da resolução ou na(s) tentativa(s) de resolução.

Esclarecemos que o procedimento não se trata de uma prova de avaliação e que não será atribuído nota ou conceito. Além disso, não será estabelecida relação alguma entre seu desempenho na disciplina de matemática e o seu desempenho nas atividades da pesquisa. Destaca-se que os pesquisadores estarão à disposição para conversar e esclarecer dúvidas, em qualquer momento, como estratégia para minimizar eventuais incômodos ou constrangimentos oriundos da sua participação nesse estudo.

Sua contribuição é voluntária e pode ser interrompida em qualquer tempo sem nenhum prejuízo. Todos os cuidados serão tomados para garantir o sigilo e a confidencialidade das informações, preservando a identidade dos participantes bem como das instituições envolvidas.

Todas as despesas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caso haja, serão ressarcidas. Danos decorrentes da pesquisa serão indenizados. A sua colaboração nesse estudo será de muita importância para nós, no entanto, você poderá se retirar do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de despesa e constrangimento.

Os participantes da pesquisa não terão nenhum benefício direto, entretanto, esperamos que futuramente os resultados deste estudo sejam usados em benefício de outras pessoas (professores e alunos) que poderão utilizar do modelo de avaliação do processo de aprendizagem que será desenvolvido. Ainda, a participação no estudo representa uma importante contribuição para o desenvolvimento da pesquisa científica, uma vez que os resultados desse trabalho poderão ser apresentados em encontros ou publicados em revistas científicas.

Solicitamos a sua autorização para usar suas informações na produção de artigos técnicos e científicos, aos quais você poderá ter acesso. A sua privacidade será mantida através da não identificação do seu nome. Todos os registros da pesquisa estarão sob a guarda da pesquisadora Jaqueline Molon, em lugar seguro de violação, pelo período mínimo de 05 (cinco) anos, após esse prazo serão destruídos.

Você pode fazer download deste Termo de Consentimento clicando no seguinte link: <https://cutt.ly/ShiBnSu> e uma cópia dele será encaminhado ao e-mail informado ao concluir o formulário.

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs (CEP-Uergs). Formado por um grupo de especialistas, tem por objetivo defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade, contribuindo para que sejam seguidos os padrões éticos na realização de pesquisas: Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs – CEP-Uergs - Av. Bento Gonçalves, 8855, Bairro Agronomia, Porto Alegre/RS – CEP: 91540-000; Fone/Fax: (51) 33185148 - E-mail: cep@uergs.edu.br.

Você também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa do IFRS – Rua General Osório, 348 - Centro - Bento Gonçalves - RS - CEP: 95700-000- Tel: (54) 3449-3340 – E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br .

Após ler o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido:

7. Você aceita participar deste estudo? *Marcar apenas uma oval.
- () SIM - Pular para a pergunta 8
- () NÃO – Envia o formulário!

CONFIRMAÇÃO

8. Confirme sua ciência em relação aos itens abaixo: *

Marque todas que se aplicam.

- () Estou ciente de que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário.
- () Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo.
- () Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

9. Informe seu número de WhatsApp para que a pesquisadora possa entrar em contato contigo e agendar a coleta de dados. *

MUITO OBRIGADA!

Muito obrigada por aceitar participar da pesquisa!

Se puderes, já salve o meu contato de WhatsApp (51) 98181-1108.

Assim que iniciar a fase de coleta de dados, as sessões de resolução de problemas, entrarei em contato contigo para combinarmos o melhor dia e horário para realizar a atividade.

Forte abraço.

Profª. Jaqueline Molon (Pesquisadora)

APÊNDICE 5 – Roteiro para realização das entrevistas clínicas⁵⁸

1º momento:

1. Acolhimento ao estudante;
2. Explicar o objetivo da pesquisa;
3. Verificar se o estudante possui mais de 18 anos e encaminhar TCLE ao e-mail;
4. Solicitar autorização para gravar a seção;
5. Solicitar separação de material: folha para anotações, caneta, lápis, borracha; etc.
6. Verificar se o estudante está com acesso ao *WhatsApp*;

2º momento:

7. Explicar o procedimento da entrevista;
8. Solicitar ao estudante que na medida em que for se envolvendo com a resolução da situação-problema descreva o que está fazendo, o que está pensando;
9. Esclarecer que o método de pesquisa utilizado implicará na realização de perguntas para que o investigador possa obter o maior número de informações, realizando contra argumentações etc.
10. Solicitar que o estudante relate dúvidas ou dificuldades enfrentadas;
11. Informar que caso o estudante não consiga prosseguir, a pesquisadora irá fornecer ajudas, as quais serão registradas e, ao final da atividade, avaliadas pelo próprio estudante;
12. Esclarecer que o foco da pesquisa não é julgar a correção da resolução, mas entender como o estudante está raciocinando diante de cada situação-proposta.
13. Solicitar que o estudante posicione a câmera do dispositivo que estiver usando de modo que seja possível à pesquisadora acompanhar os registros escritos que são realizados;

3º momento:

14. Enviar a situação-problema por *WhatsApp* e confirmar o recebimento;
15. Solicitar que o aluno leia a questão (em voz alta ou para si);
16. Verificar se após a leitura o estudante ficou com alguma dúvida acerca de alguma palavra ou termo utilizado no enunciado;
17. Perguntar ao estudante qual é o objetivo ou finalidade da questão, ou seja, o que a situação-problema está solicitando, procurando identificar suas hipóteses iniciais;
18. Buscar identificar qual o grau de novidade que aquela situação representa para o estudante, familiaridade com o contexto da questão ou com os conhecimentos exigidos;
19. Buscar sempre explorar o pensamento do sujeito para obter evidências dos esquemas mobilizados, a partir das ações e condutas realizadas frente a cada situação;
20. Procurar compreender os porquês das escolhas, dos procedimentos e conceitos utilizados, ao final do processo de resolução ou nos intervalos ou pausas dadas pelo próprio sujeito;
21. Verificar a eminência de dúvidas e a necessidade de fornecer auxílio e procurar entender a forma como o estudante significou a ajuda fornecida;
22. Identificar, dentro do possível, que novos esquemas foram ativados, como foram se organizando em função do problema;
23. Questionar o sujeito quanto ao grau de certeza da resposta obtida;
24. Questionar o sujeito quanto o grau de complexidade/dificuldade da situação trabalhada;

4º momento:

25. Solicitar ao estudante que retome o que fez, explicando o caminho percorrido e os resultados obtidos;
26. Verificar, ao final, se o estudante acredita que existam outros caminhos de resolução possíveis.
27. Propor situações de conflito e contra sugestões, por exemplo: outro sujeito resolver de modo diferente, ele fez assim (...). O que acha dessa forma de resolver? Verificar se novas hipóteses são levantadas pelo sujeito a partir disso.
28. Questionar o que o estudante acredita ser fundamental para resolver a situação em questão;
29. Perguntar onde estudantes, ao tentarem resolver essa mesma situação-problema, poderiam na opinião do entrevistado encontrar dificuldades, ou seja, em que momento(s) os estudantes poderiam precisar de ajuda para prosseguir.
30. Questionar acerca da importância e validade das ajudas fornecidas pela pesquisadora;

5º momento

31. Solicitar que o estudante tire uma foto das anotações realizadas e que encaminhe para o *whatsapp* da pesquisadora, como resposta à questão enviada.
32. Encaminhar a segunda questão, caso a anterior tenha sido a primeira;
33. Questionar acerca da possibilidade de ampliar a participação no estudo, respondendo às demais questões da pesquisa.
34. Verificar disponibilidade de data e horário para a nova seção caso não seja continuado na mesma;
35. Agradecer e ressaltar a importância da participação no estudo.

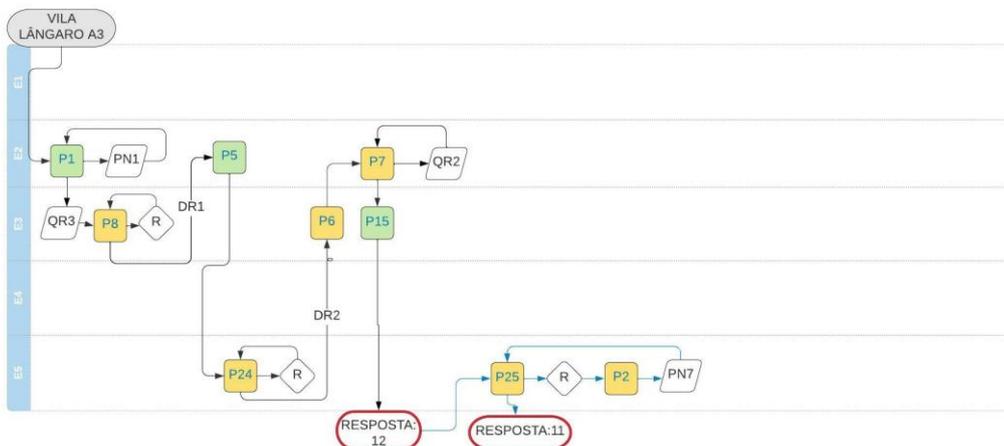
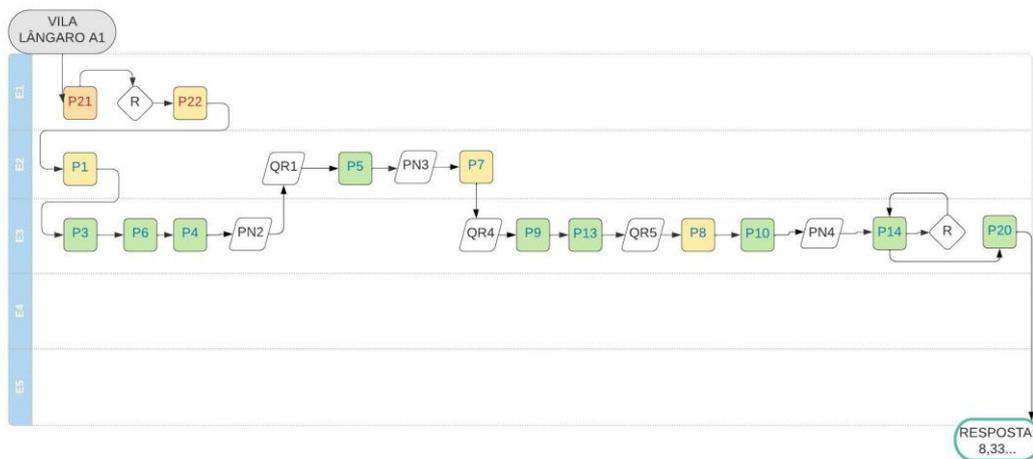
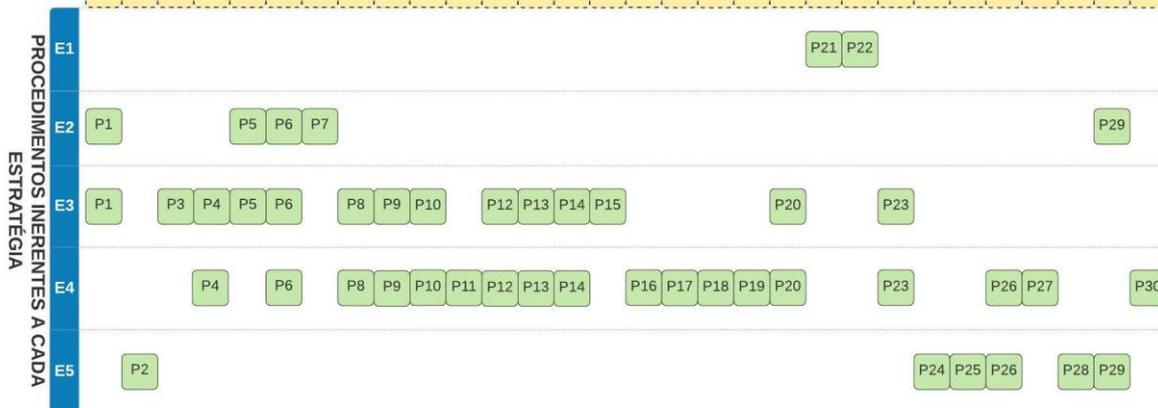
⁵⁸ Destaca-se que o roteiro deve ser flexível, pois em uma entrevista semiestruturada as decisões acerca dos questionamentos a serem realizados dependem das respostas dos entrevistados e no caso do presente estudo, depende ainda das ações e condutas dos sujeitos, de modo que alguns itens podem ser abordados pelos sujeitos sem a necessidade de intervenção e outros até poderão ser suprimidos em função de já se ter evidências suficientes acerca dele.

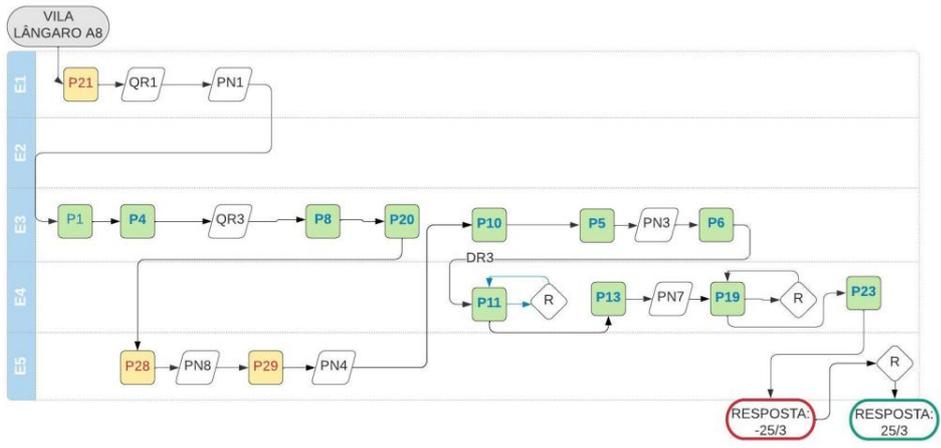
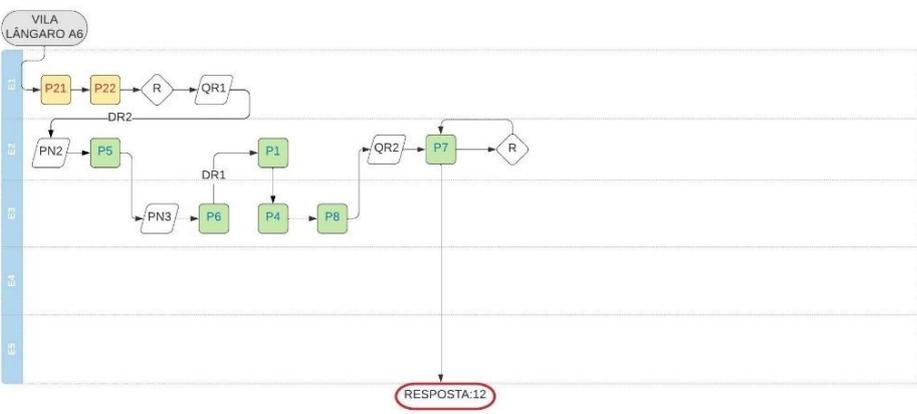
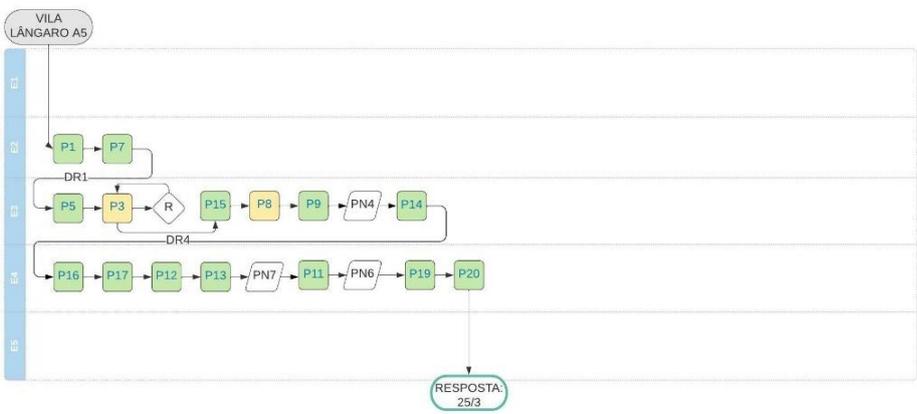
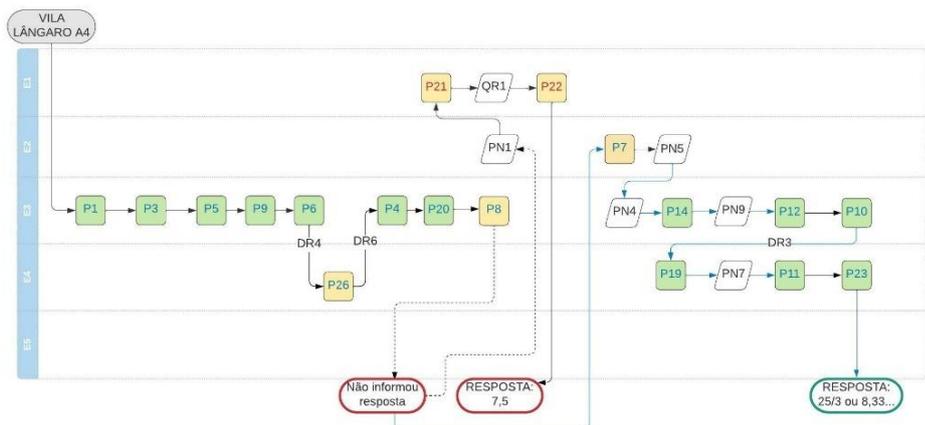
APÊNDICE 6 – Modelo de avaliação e diagramas *Vila Lângaro*

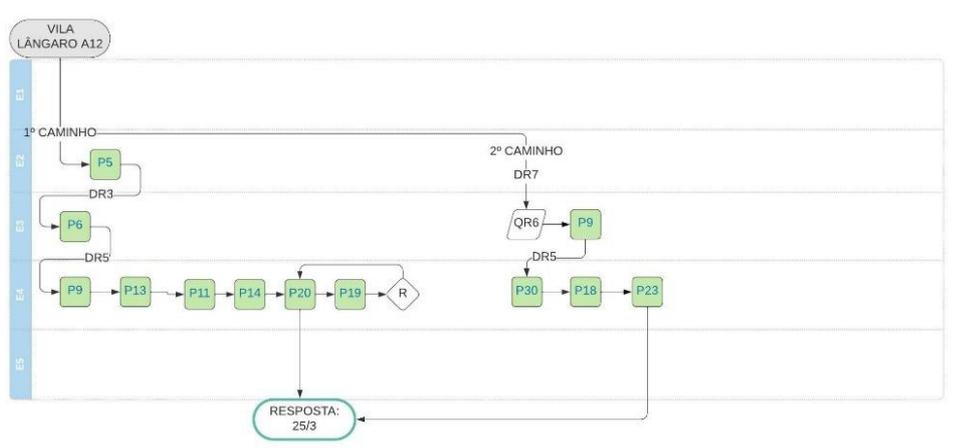
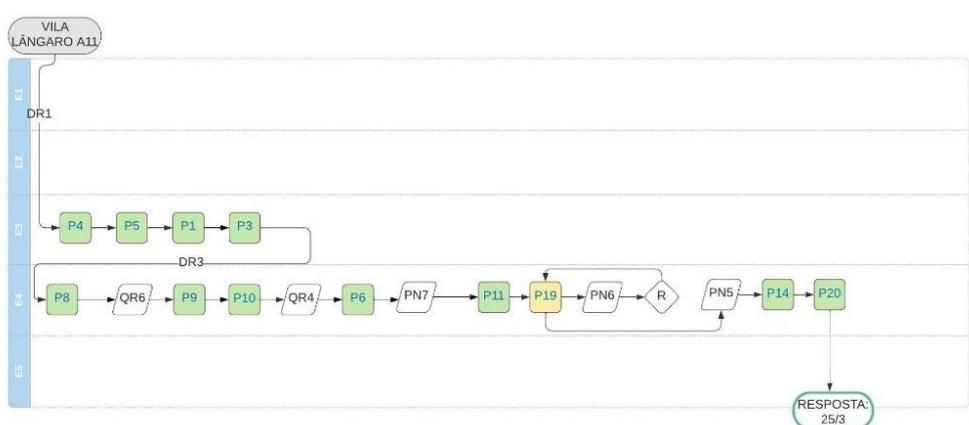
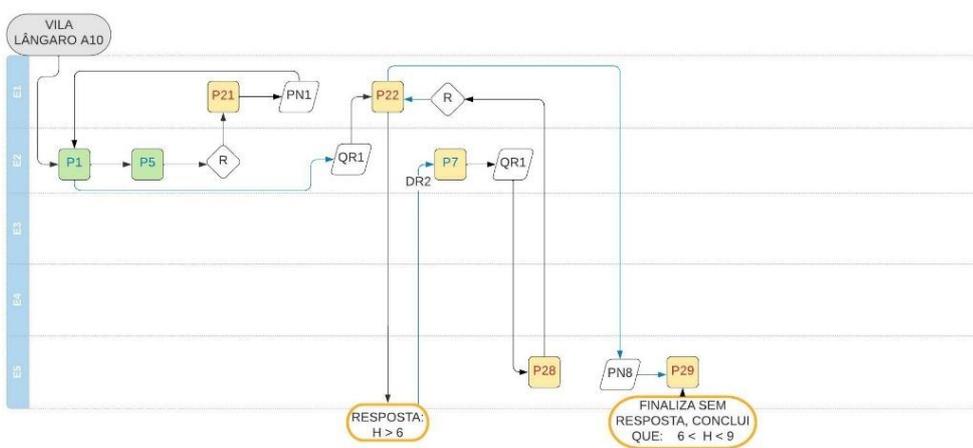
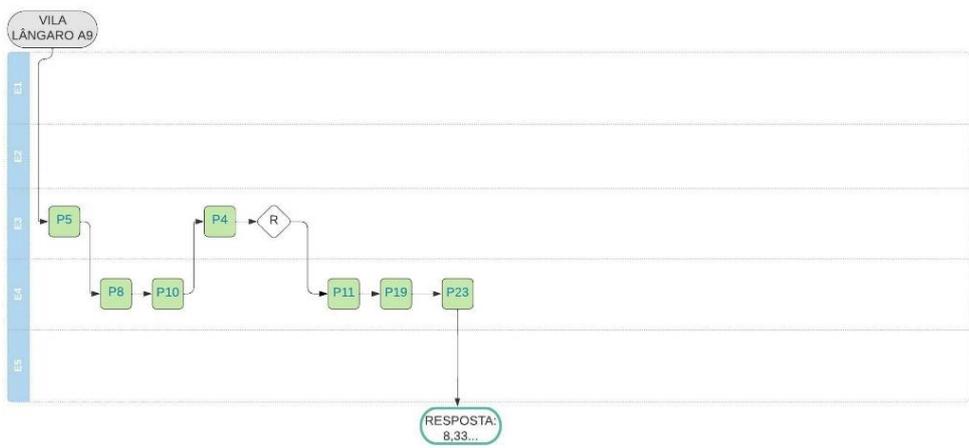
MODELO PARA AVALIAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA VILA LÂNGARO:

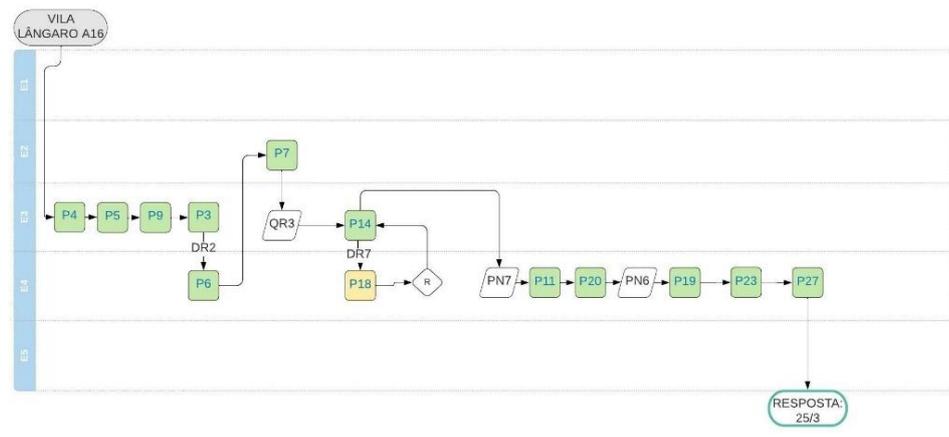
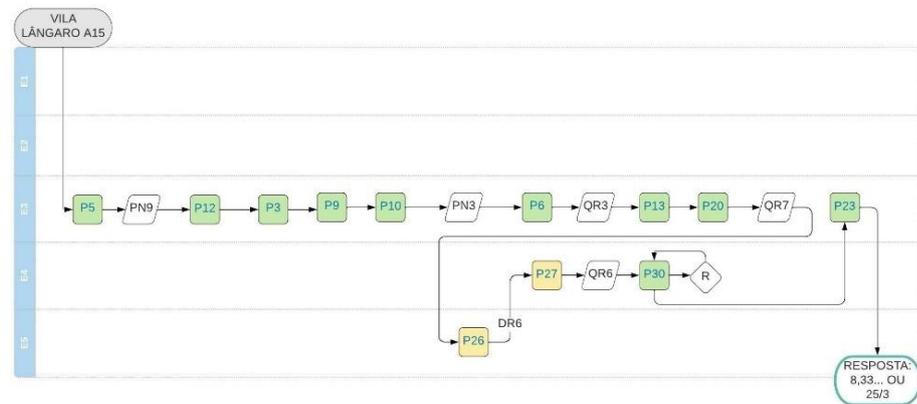
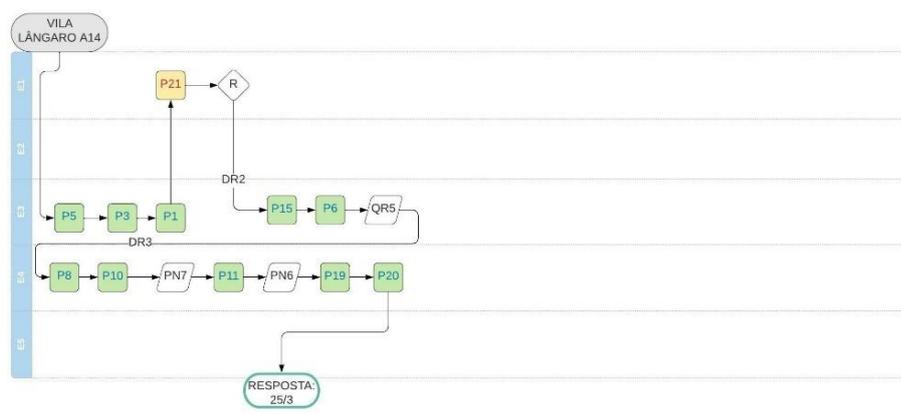
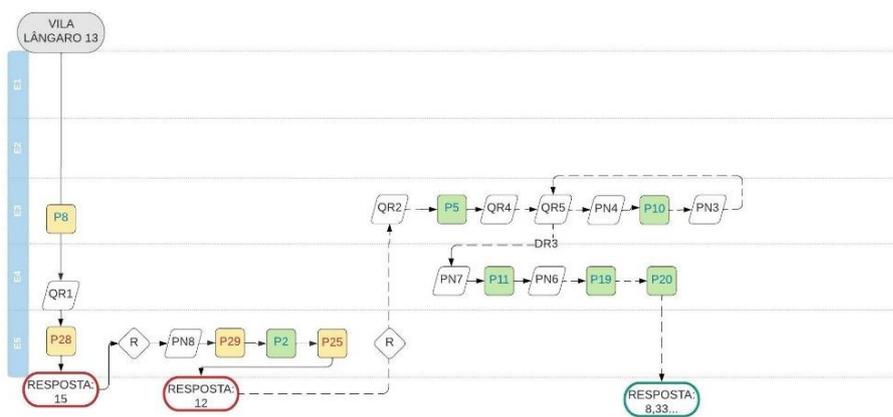
AJUDAS QUE TENDEM A DIRECIONAR CADA PROCEDIMENTO:

DR1 DR2 PN1	DR1 DR2 PN7 QR3 QR5	DR1 PN1 PN4 QR3	DR4 DR6 PN1	DR1 DR2 PN2 QR1 QR2	DR2 DR3 PN2 PN3 QR2 QR4	DR1 DR2 PN3 PN5 QR2	DR3 PN7 PN8 QR3	DR5 DR7 DR8 DR11 QR3 QR4 QR5	DR11 PN4 QR5	DR3 PN7	PN5 PN9 QR1 QR3	PN5 PN7 PN10 QR1 QR3	PN4 PN5 QR1 QR3	DR4 DR6 PN9 QR3	DR4 DR6 QR3	DR4 DR5 QR3	DR7 DR8 QR6	DR3 PN6 PN7	PN1 PN4 PN7 PN10 QR3 QR5	PN1 QR1	PN1 QR1	PN1 PN7	QR1 QR2	PN7 QR2 QR5	QR6 QR7	DR4 DR6 PN1	PN8 QR1	PN8 QR1	DR5 QR5 QR6
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	P28	P29	P30





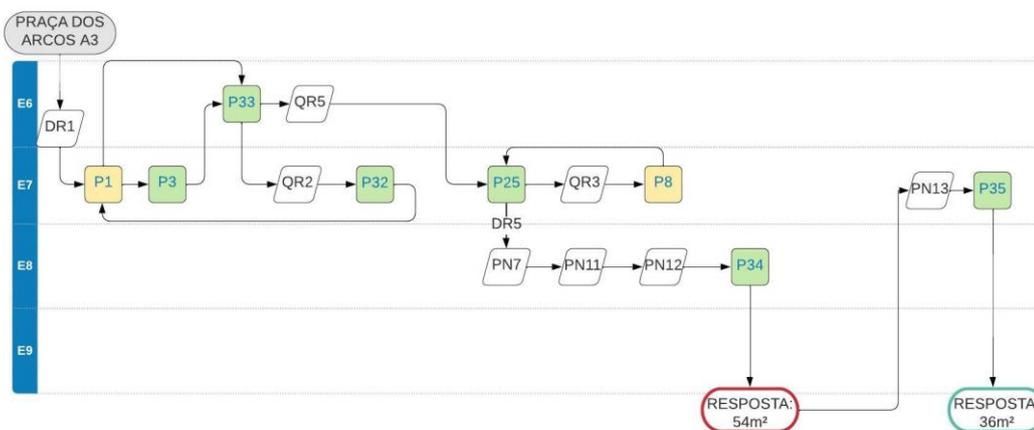
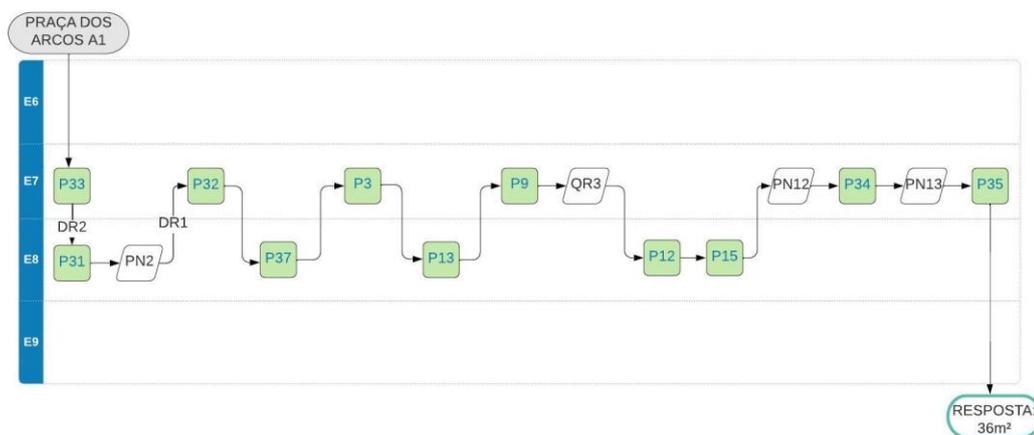
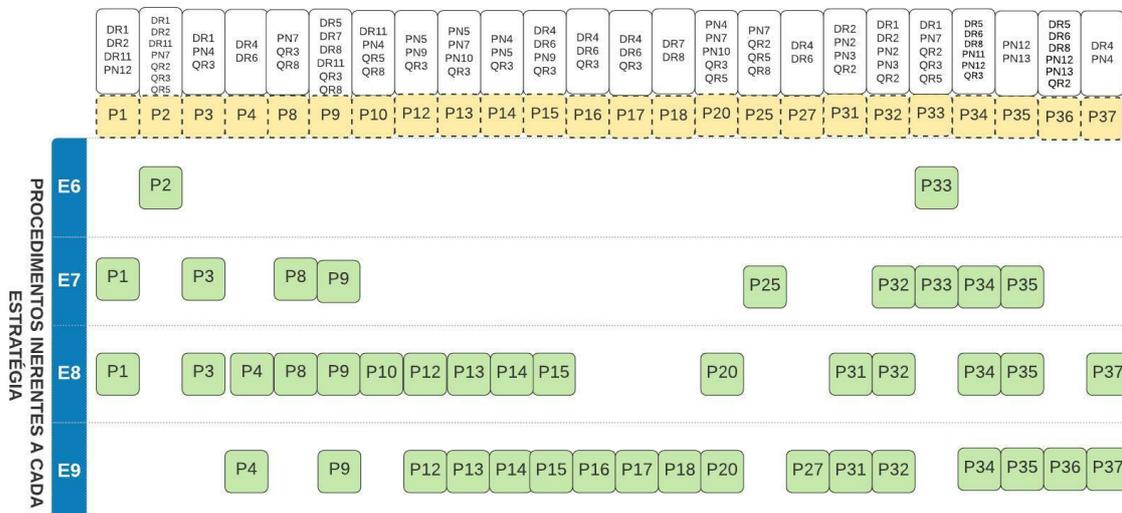


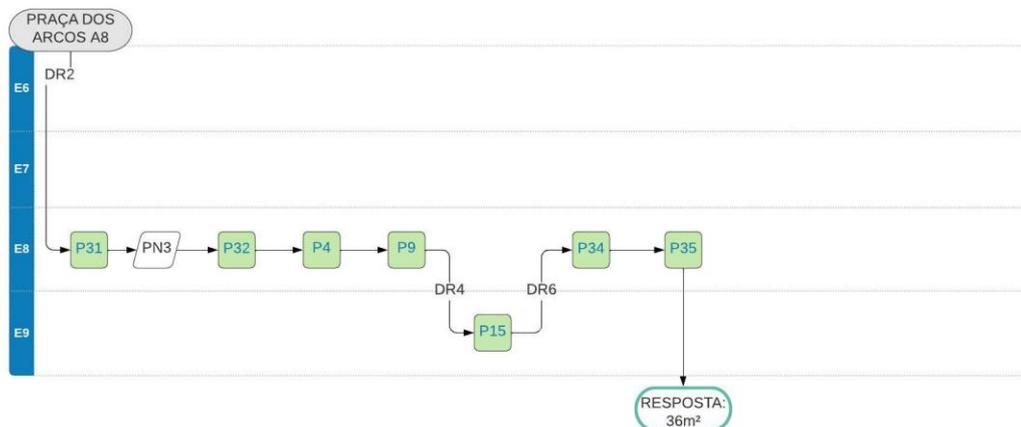
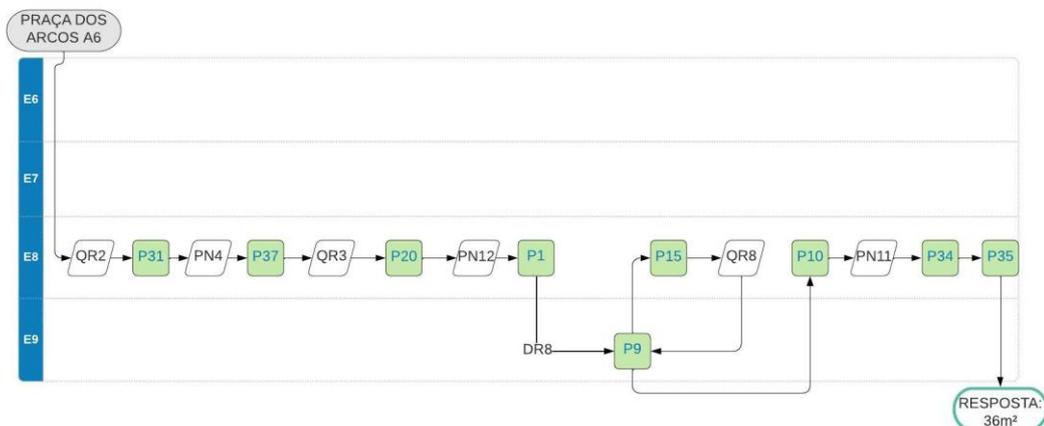
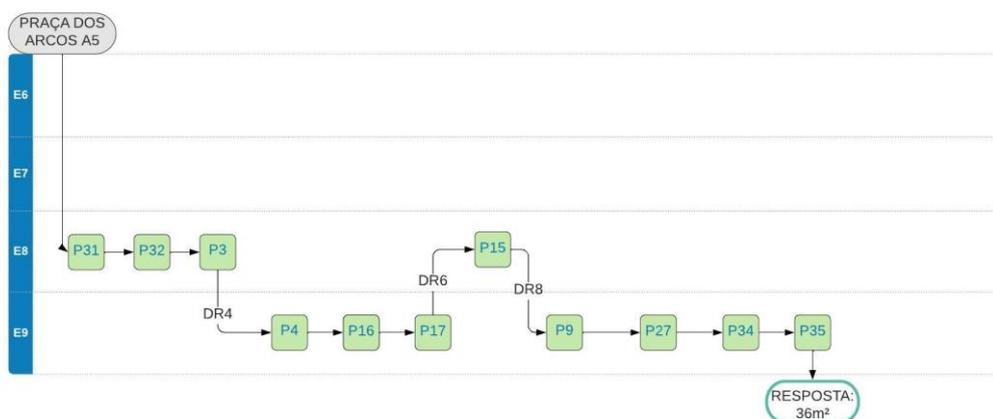
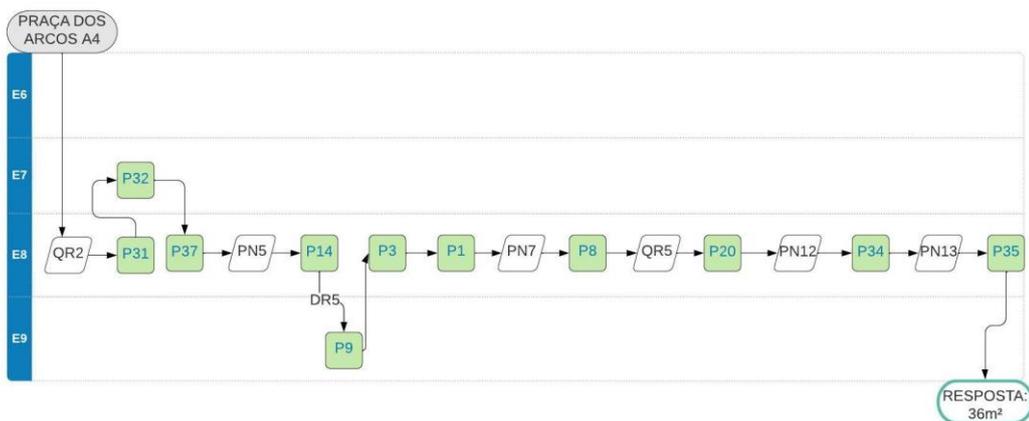


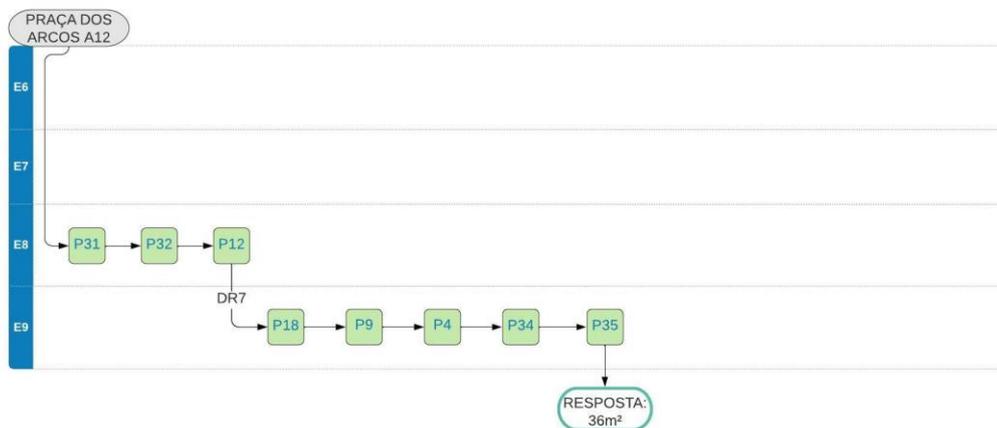
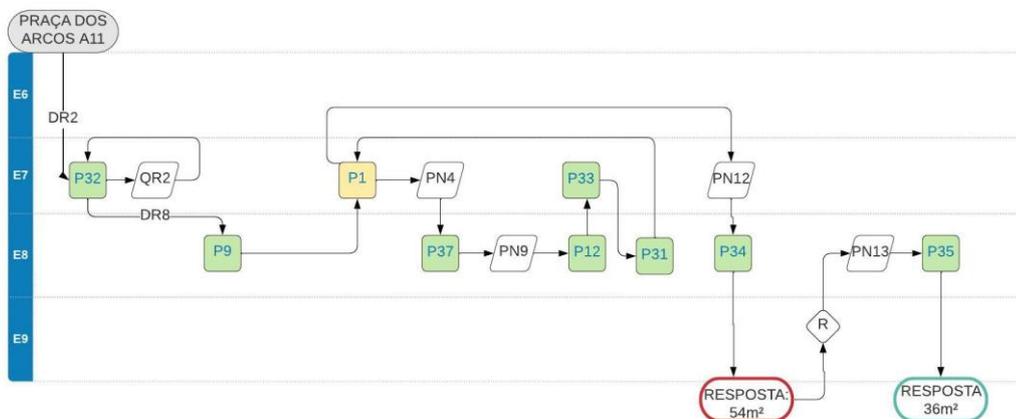
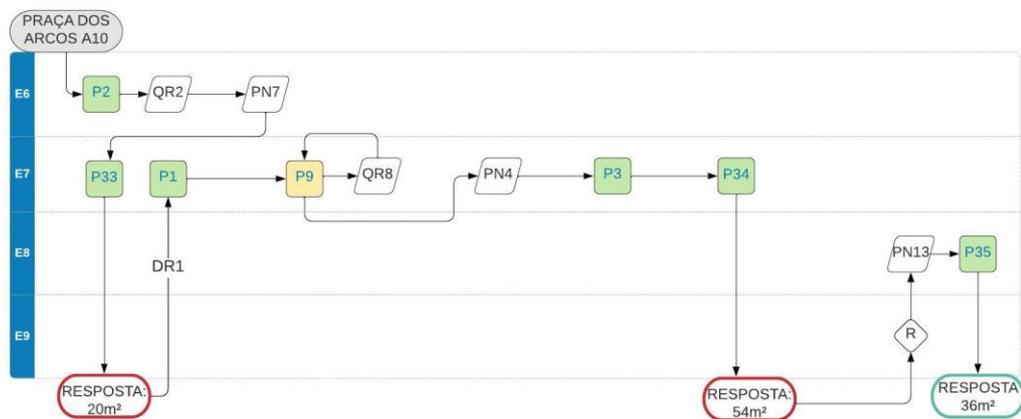
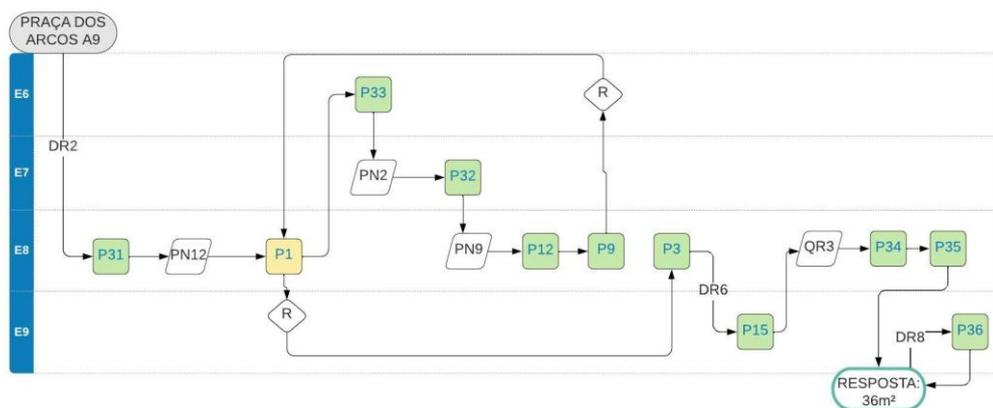
APÊNDICE 7 – Modelo de avaliação e diagramas *Praça dos arcos*

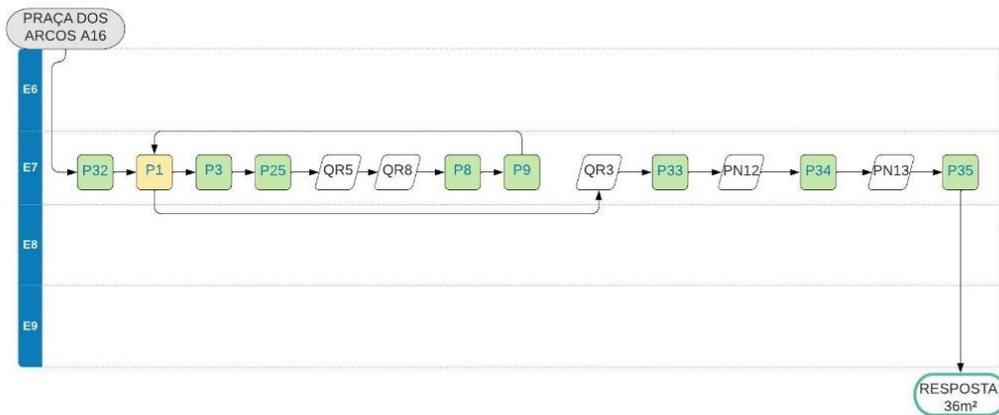
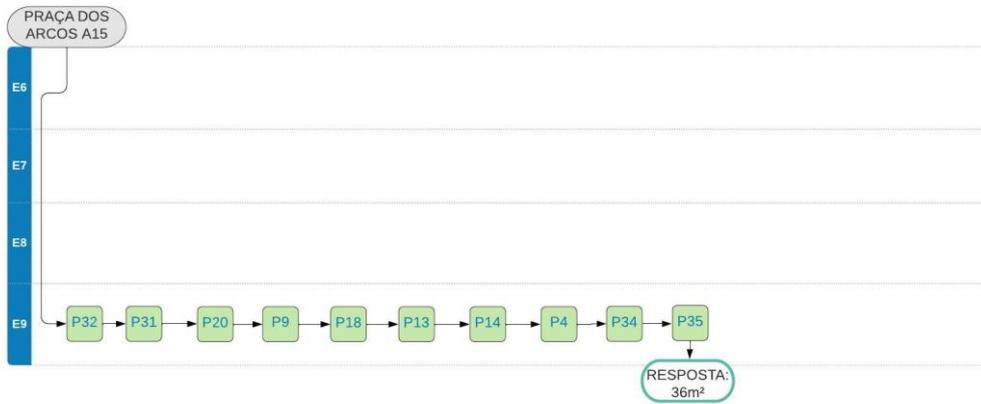
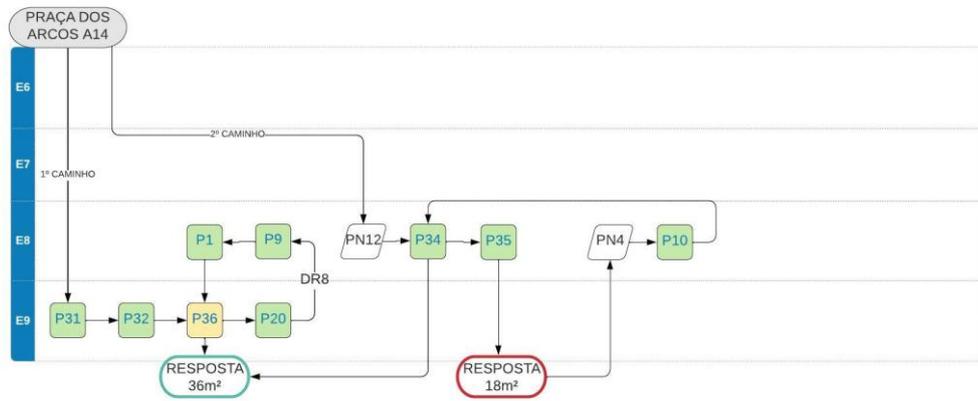
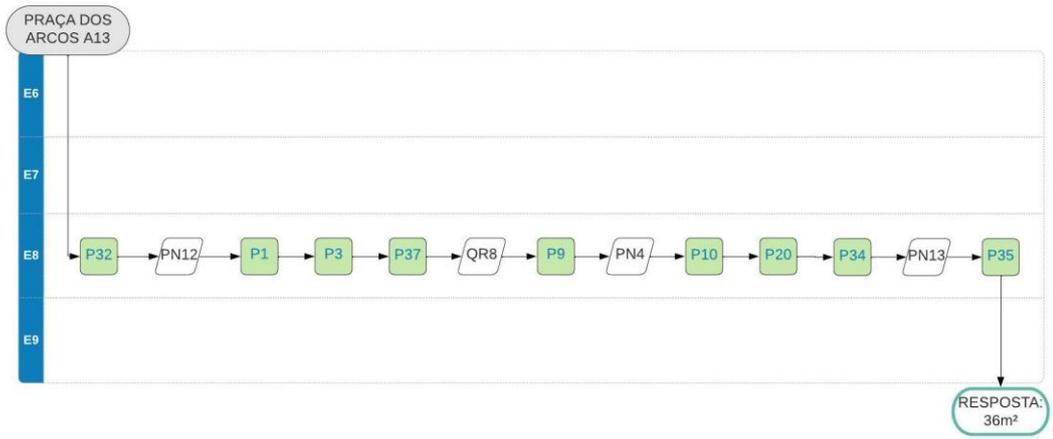
MODELO PARA AVALIAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA PRAÇA DOS ARCOS:

AJUDAS QUE TENDEM A DIRECIONAR CADA PROCEDIMENTO:





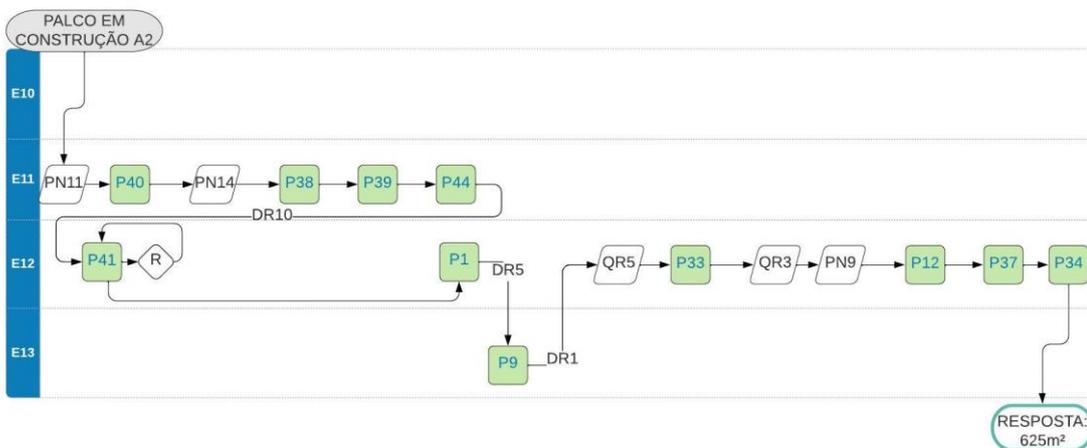
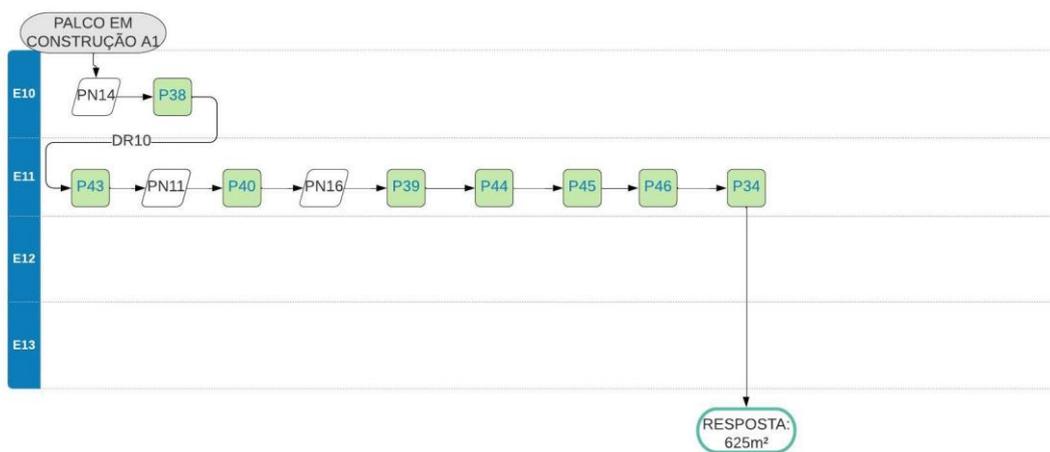
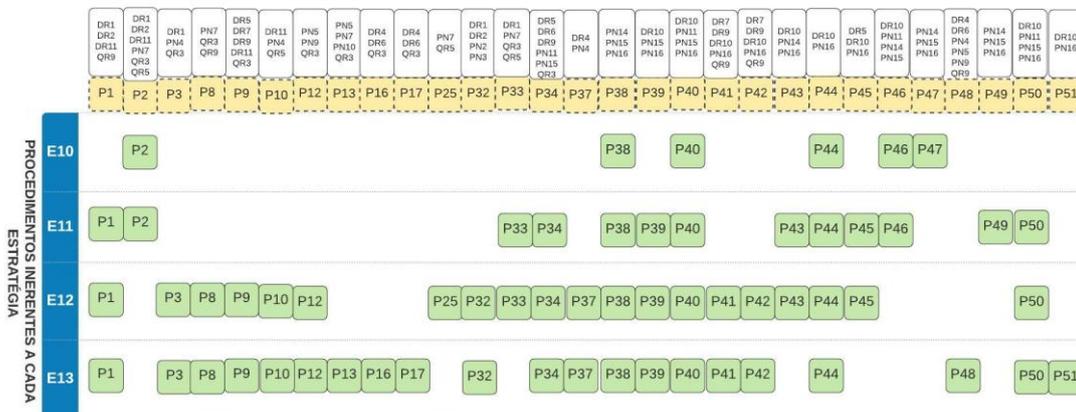


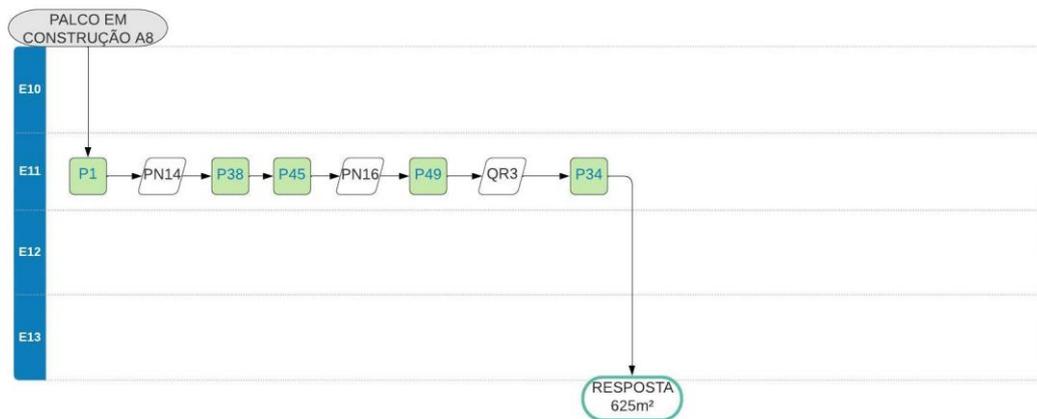
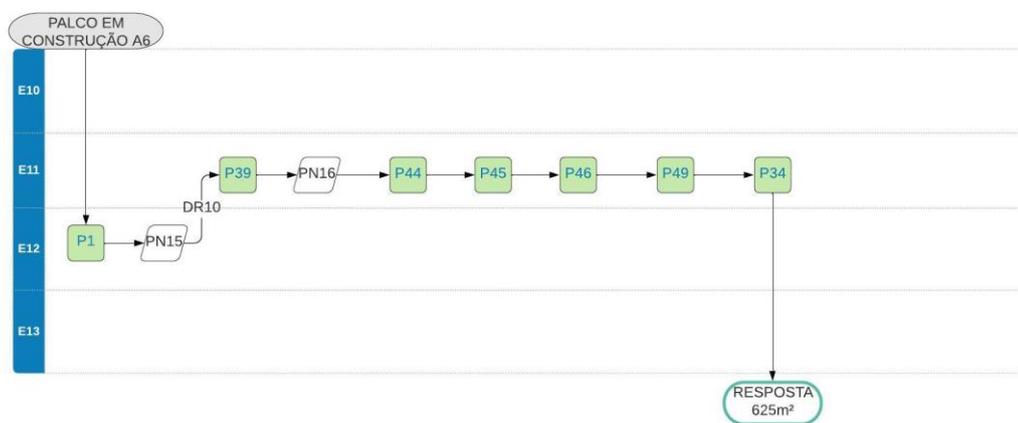
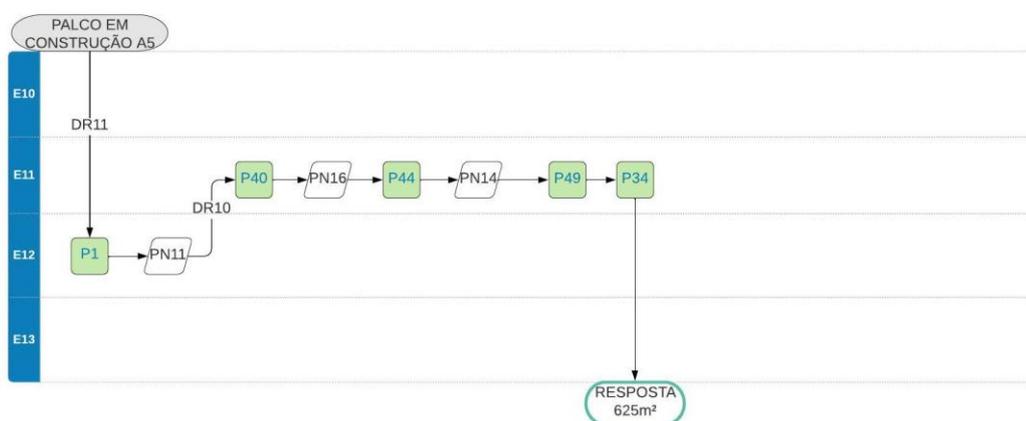
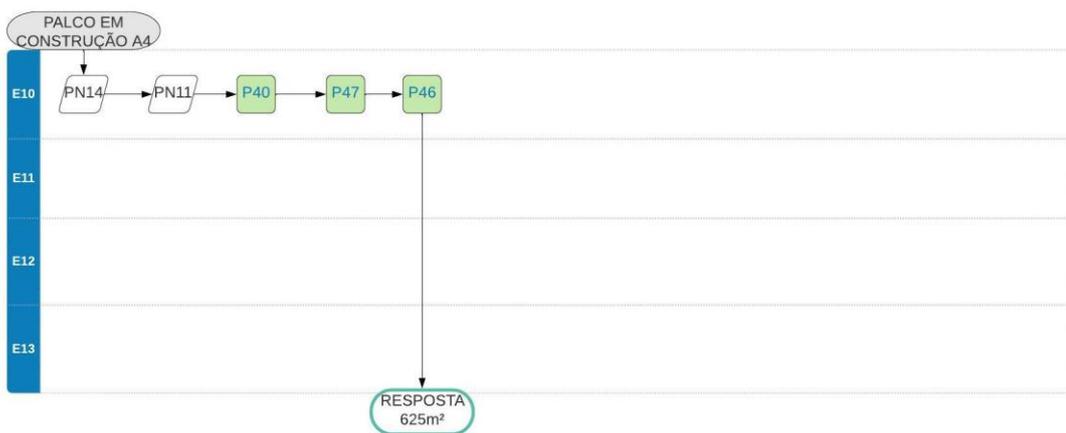


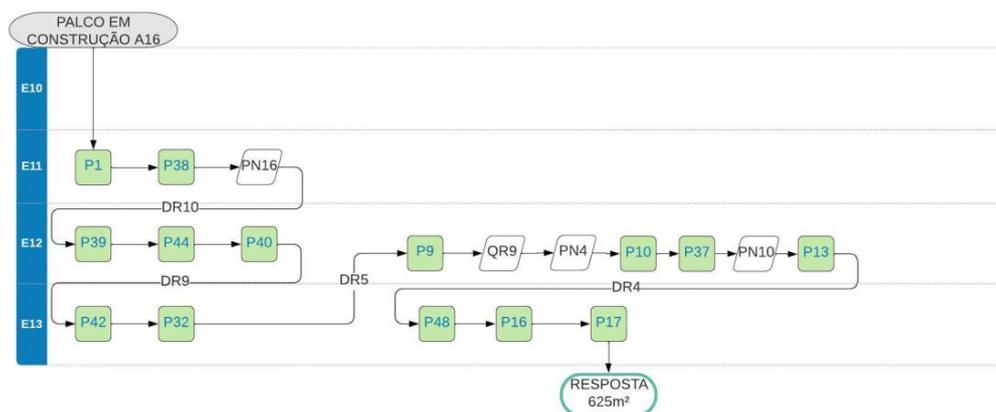
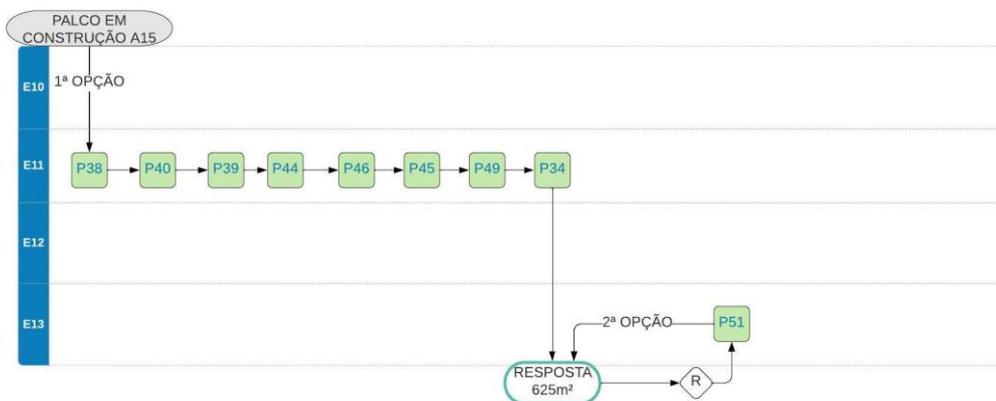
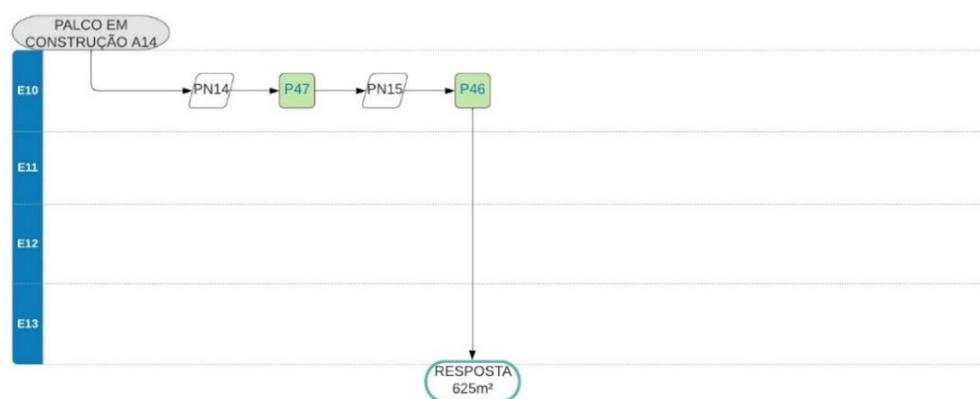
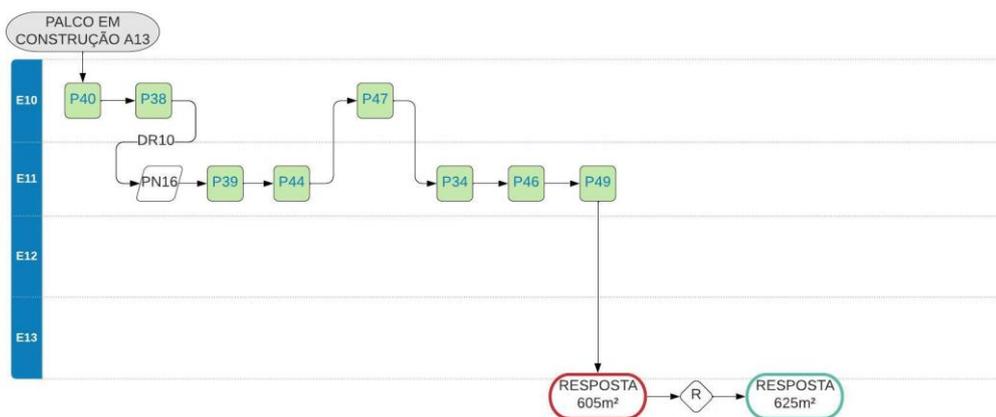
APÊNDICE 8 – Modelo de avaliação e diagramas *Palco em construção*

MODELO PARA AVALIAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA PALCO EM CONSTRUÇÃO:

AJUDAS QUE TENDEM A DIRECIONAR CADA PROCEDIMENTO:



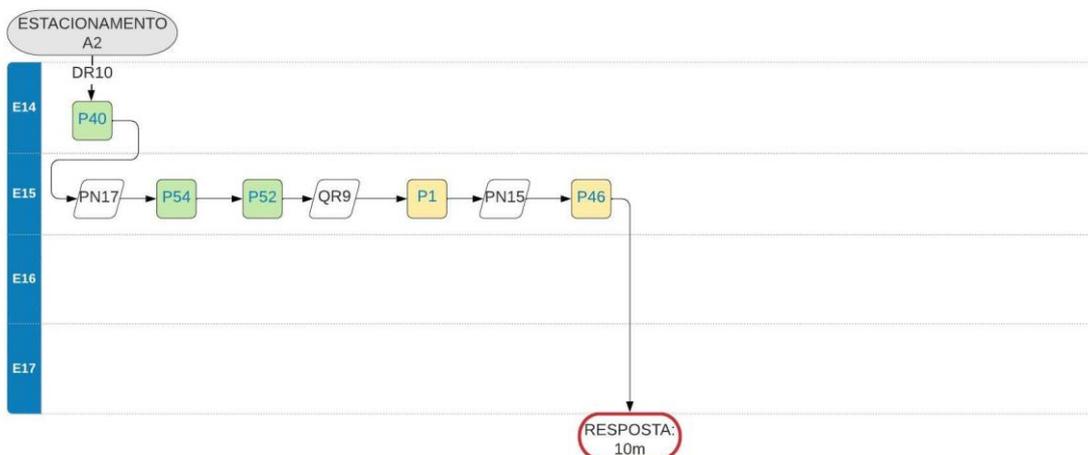
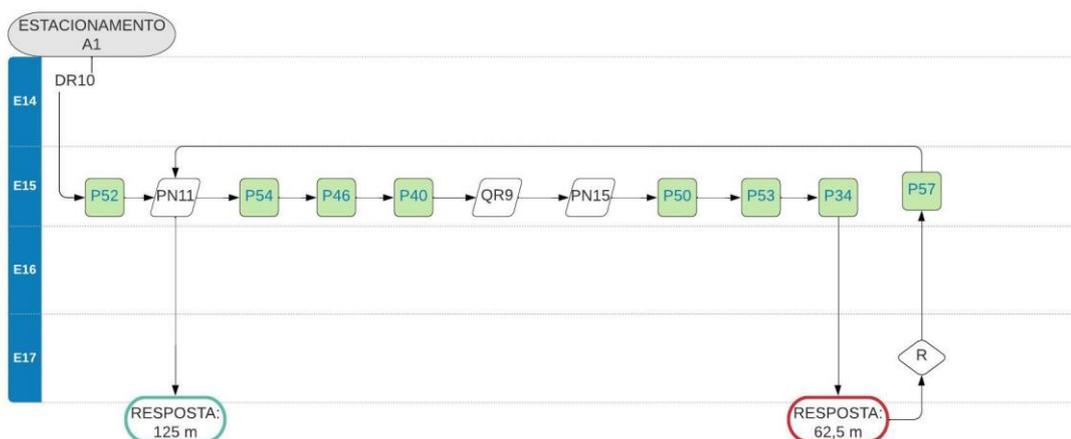
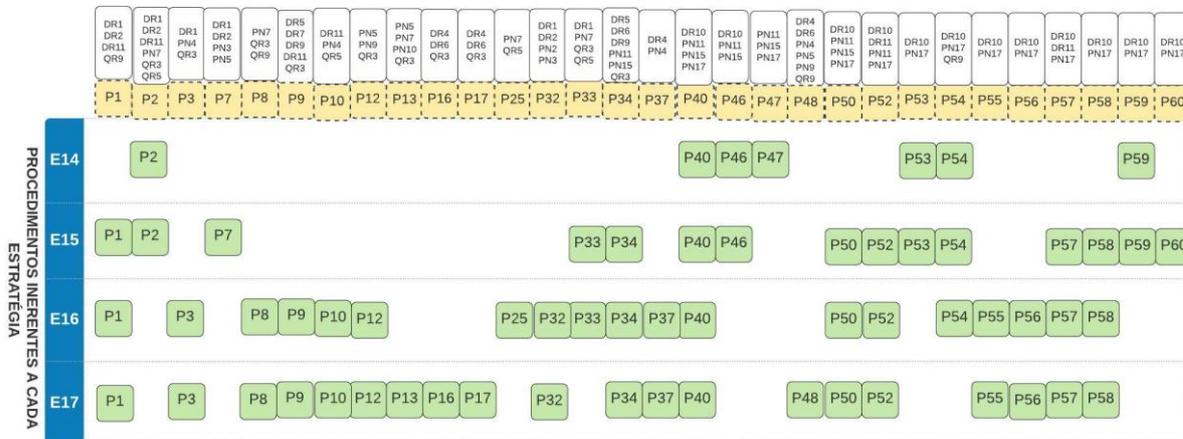


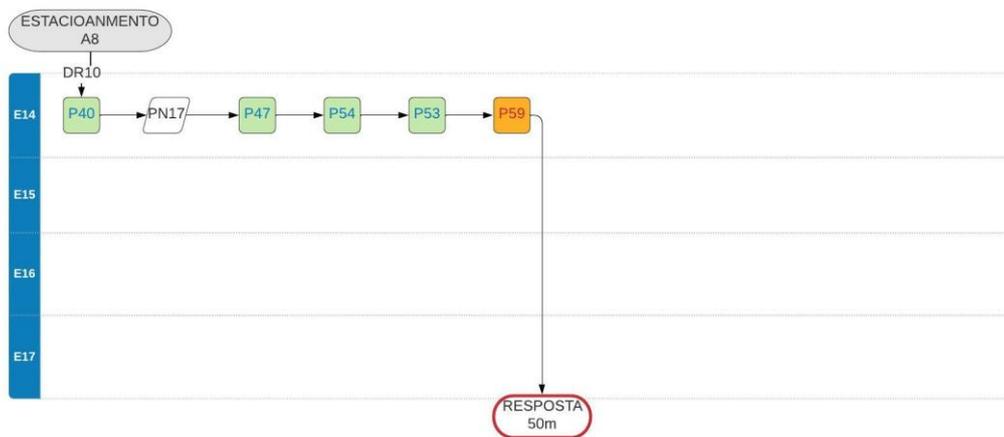
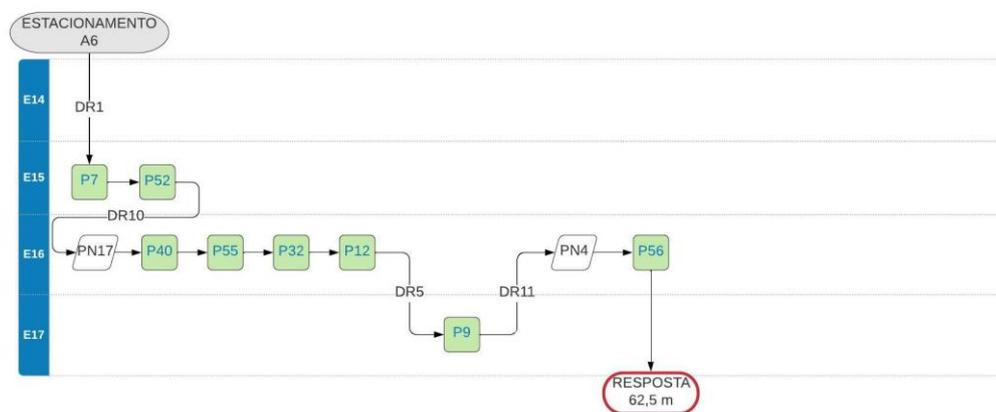
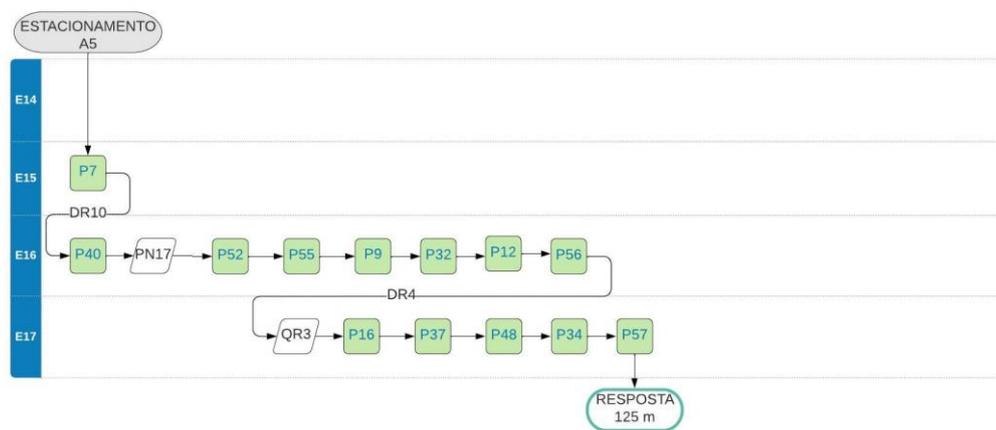
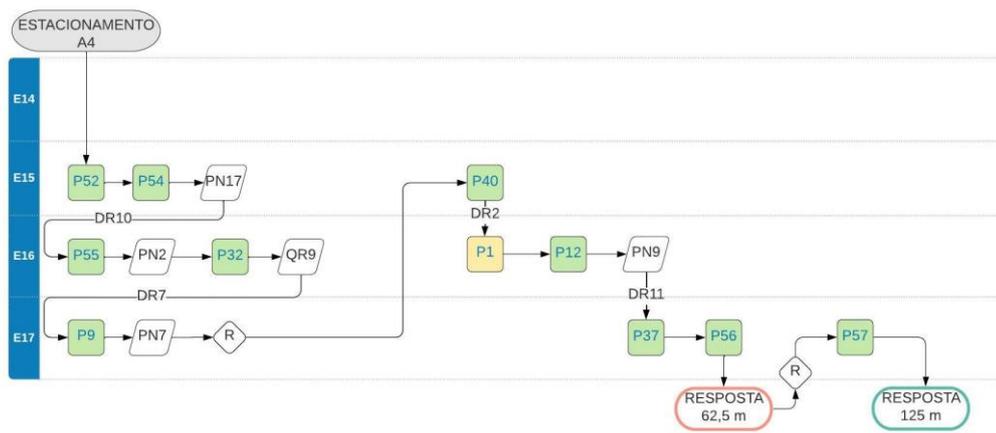


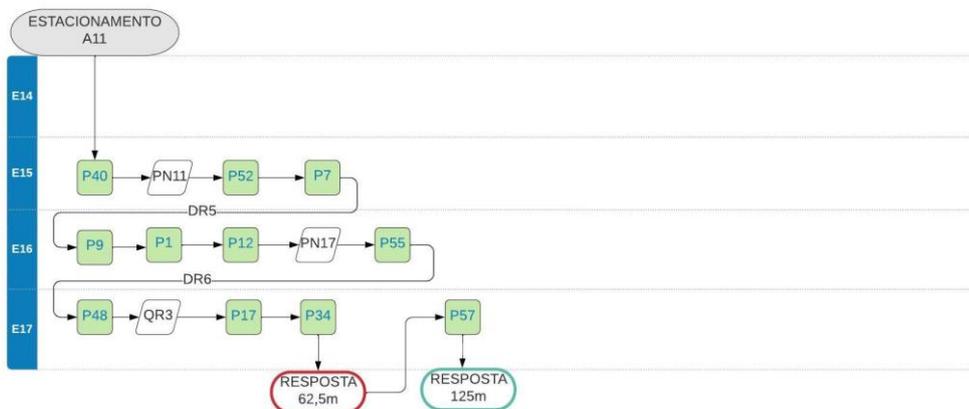
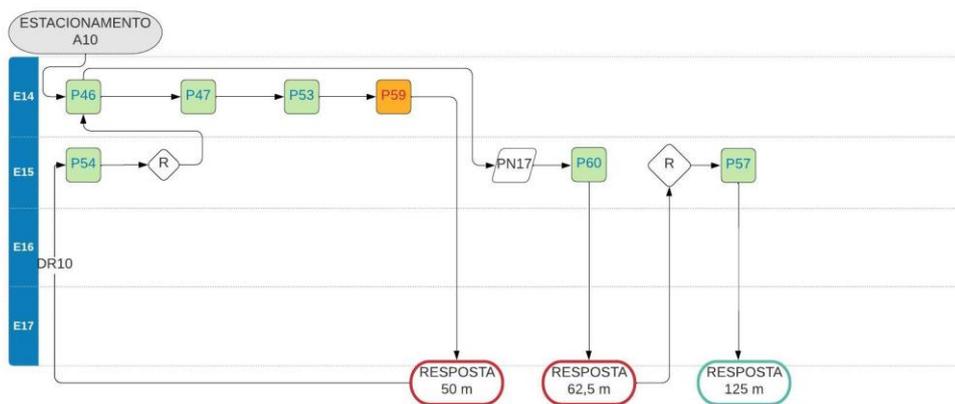
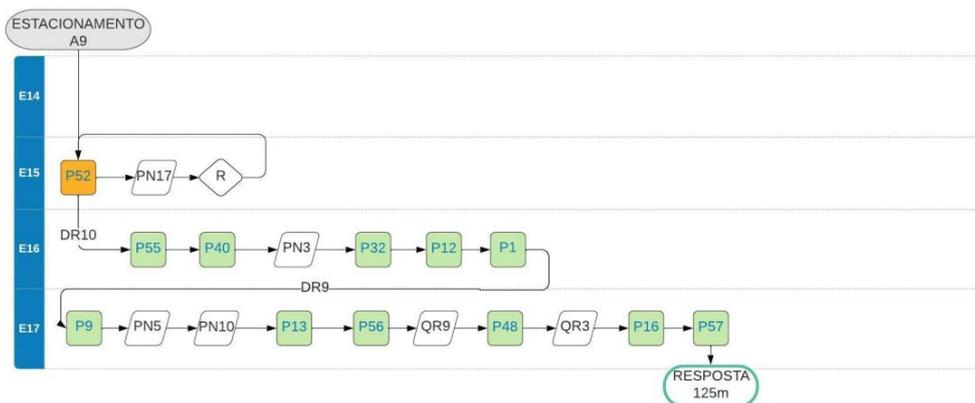
APÊNDICE 9 – Modelo de avaliação e diagramas *Estacionamento*

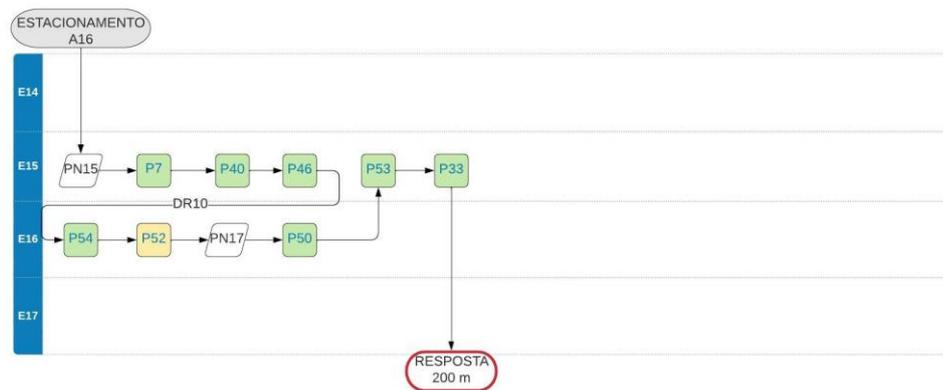
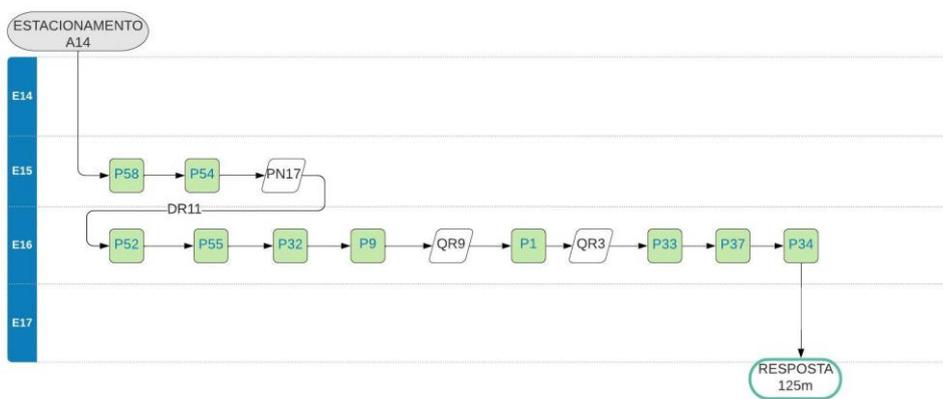
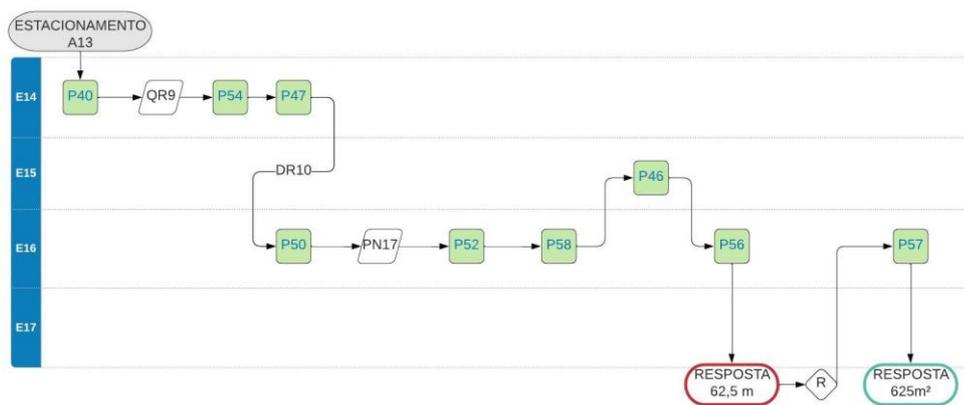
MODELO PARA AVALIAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA ESTACIONAMENTO:

AJUDAS QUE TENDEM A DIRECIONAR CADA PROCEDIMENTO:









APÊNDICE 10 – Política de privacidade e autorização para uso de dados – 4ª etapa

appAAP - Política de Privacidade⁵⁹

Este formulário é para você conhecer a Política de Privacidade do appAAP e para que você informe se autoriza o uso dos dados coletados durante a sua navegação pelo appAAP.

Acesse a Política de Privacidade do appAAP:

<https://drive.google.com/file/d/1fILBn19DQRad5MQZV2Iwyd-zxI4SQYaf/view?usp=sharing>

Seus dados de identificação serão preservados e seu anonimato será garantido, conforme informações disponíveis no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) que você já teve acesso ao participar do estudo, mas que também encontra-se em:

<https://drive.google.com/file/d/1ukaKC6yCSdxm8IBv9cBDZE29H55hcG5g/view?usp=sharing>

E-mail *

E-mail válido

.....

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Nome completo: *

Texto de resposta curta

.....

Consentimento

Ao utilizar os serviços e fornecer as informações pessoais no appAAP, o usuário está consentindo com a presente Política de Privacidade.

O usuário, ao cadastrar-se, manifesta conhecer e pode exercer seus direitos de cancelar seu cadastro, acessar e atualizar seus dados pessoais e garante a veracidade das informações por ele disponibilizadas.

O usuário tem direito de retirar o seu consentimento a qualquer tempo, para tanto deve entrar em contato com jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br.

Sobre a Política de Privacidade do appAAP *

Li e aceito a política de privacidade.

Sobre a autorização para uso de dados de navegação na pesquisa *

Estou ciente e autorizo, para fins da pesquisa de doutorado supracitada, a utilização dos dados de navega...

MUITO OBRIGADA!

⁵⁹ Disponível em:

https://drive.google.com/file/d/1FzFtL_nP6L0GnQfuMTEoy-SA5ICOlx9w/view?usp=sharing

APÊNDICE 11 – Dados acerca da testagem do appAAP – 4ª etapa

A fim de compreender o quadro abaixo é importante destacar que:

- DRi, PN_i, QR_i, Ei, Pi são as mesmas siglas usadas nas seções de apresentação e discussão de resultados ao longo do texto.
- NCA significa que nessa tentativa não foram consultadas ajudas.
- NER indica que o estudante não clicou em enviar resposta e, portanto, não chegou a visualizar a lista de procedimentos no appAAP vinculada às ajudas consultadas ou à lista padrão, dependendo da situação.
- NAP indica que o estudante não avaliou procedimentos e, nesse caso, não visualizou estratégia e indica que não encerrou sua tentativa.
- id_ questão: *Vila Lângaro (1), Praça dos Arcos (4), Palco em construção (2) e Estacionamento (3)*

Id_usuario	Turma	id_tentativa	id_ questão	resposta	id_ ajuda_ selecionada	id_ procedimento_ selecionado	id_ estratégia	grau_ similaridade
47	3º ano - Técnico em Desenvolvimento de Sistemas	99	3	NER	DR10, PN3, DR9, PN11, PN17, PN17, PN15	NAP		
51	Cálculo II - Engenharia Eletrônica	106	1	5	NCA	19	E4	3
		107	2	20	NCA	49	E11	3
		104	3	125m	NCA	47, 60	E14	5
		105	4	20	NCA	25	E7	3
54	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	140	1	7 metros de altura	NCA	NAP		
		112	2	105m ²	DR4	NAP		
		139	3	180m	NCA	NAP		
		111	4	28m ²	NCA	NAP		
56	Matemática II - Licenciatura em Matemática	117	1	25/3 m	NCA	3,7, 11,15,19,25,28	E2	3
		187	2	625m ²	NCA	13,25,48,49,51	E11	3
		185	3	125m	DR1	1,3,7,32	E15	3
		186	4	36m ²	NCA	2,10,18,25,36	E6	3
59	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	162	1	$f(5)=-5/3.(5-10)$ $f(5)=-5/3.(-5)$ $f(5)=25/3= 8,3$	NCA	25	E5	4
		124	2	$2a+2b=100 \rightarrow 2.100+2b=100 \rightarrow$ $200+2b=100 \rightarrow 200-100=2b \rightarrow$ $b=100\div 2=50 \rightarrow =100\times 50=5000$	PN16, PN3, PN16, PN14, PN16, PN16, PN16, PN14, PN14, PN14	38	E10	4
		123	3	$5,00\times 20,00= 100,00$	PN17, PN17, PN17, PN17, PN15, PN3, QR9, PN15	40	E14	3
		122	4	$X= -0/2(-1)=0 \rightarrow y= -(0\text{elevado}2 -4.(-1).9)=- 36/4=9$ $a=2/3.6.9 = 36m^3$	NCA	16,17	E9	4
60	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	125	1	NER	DR3, DR3	NAP		
61	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	128	1	7 metros	NCA	22	E1	1
		127	2	Medida A (30 metros)	NCA	47	E10	3

		129	3	40	NCA	60	E15	1
		126	4	60	NCA	2	E6	1
62	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	131	1	NER	NCA	NAP		
		132	2	NER	NCA	NAP		
		133	3	NER	NCA	NAP		
		130	4	NER	DR4, PN2,	NAP		
63	3º ano - Técnico em Eletrônica	279	1	NER	NCA	NAP		
		280	2	NER	NCA	NAP		
		134	4	36m ²	PN12	27	E9	3
64	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	135	1	8,33m	DR4, PN1, DR4, PN3	4	E3	3
		137	2	625 m ²	NCA	47,51	E10	2
		138	3	200 m	DR7	NAP		
		136	4	36m ²	NCA	10	E8	4
65	Cálculo II - Engenharia Eletrônica	309	2	NER	PN14			
		308	3	220 m	DR7			
		307	4	NER	DR4, DR5, PN12	NAP		
67	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	158	1	25/3	NCA	3,11,15,18	E3	3
		167	2	A=20m B=5m Palco=100m	PN16	NAP		
		261	3	125.000,00 m lineares	DR7	9	E16	3
		262	4	NER	NCA	NAP		
69	Matemática II - Licenciatura em Matemática	155	2	NER	NCA	NAP		
		157	3	NER	NCA	NAP		
		156	4	NER	NCA	NAP		
74	Matemática II - Licenciatura em Matemática	160	1	NER	NCA	NAP		
		159	3	125	PN11, PN15, PN11, QR9, PN17, DR7, DR7, PN15	NAP		
75	Matemática II - Licenciatura em Matemática	161	1	25/3	NCA	3,11,15,19,27	E3	5
		213	2	625	NCA	47,49	E10	5
		184	3	125 M	NCA	47, 60	E14	4
		212	4	36	NCA	10,27	E8	5
76	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	165	1	NER	NCA	NAP		
		175	2	NER	DR9	NAP		
		163	3	NER	DR9, DR5, DR9, DR7, PN11, PN4,	NAP		
		164	4	NER	NCA	NAP		
77	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	166	3	area = a.b	NCA	60	E15	3
		202	4	NER	NCA	NAP		

78	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	169	1	Não sei fazer essa atividade.	DR1	NAP		
80	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	179	1	25/3 metros	NCA	3	E3	5
		178	2	10 metros quadrados	NCA	47	E10	5
		176	3	Total: 200 metros, 100 em cada lado do terreno	NCA	47	E14	3
		177	4	2 metros quadrados	DR1,	1,2,3	E6	5
82	Matemática II - Licenciatura em Matemática	188	1	25/3	NCA	3,18,25	E3	1
		191	2	625	NCA	48,49	E11	4
		190	3	62,5	NCA	7,48	E15	4
		189	4	36	NCA	10,18	E8	3
83	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	194	1	19 (essa é a altura máxima)	NCA	7, 25, 3, 27, 16, 11	E5	3
		193	2	625m ²	NCA	49, 51, 47,	E10	3
		192	3	B.20+A.5=5.000	NCA	47	E14	3
		195	4	36m ²	NCA	27, 25, 10	E7	3
84	Matemática II - Licenciatura em Matemática	198	1	NER	NCA	NAP		
		208	2	NER	NCA	NAP		
		196	3	a=40x+10y	DR10	40,52,58	E15	4
		207	4	h=25/3 m	NCA	NAP		
85	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	199	1	A concavidade é para baixo então é -1. Xv é =5	DR4, QR2, PN10, DR7,	6,7,9,13,18,20,24,25	E5	3
		200	2	A=B 2A + 2B = 100 2A +2A = 100 A=100/4 A = 25 25X25= 625M ²	DR1, DR6, PN5, QR9,	48	E13	3
		197	3	200m	DR7	NAP		
		201	4	36m ³	DR8, DR6, PN5, PN13	36	E9	3
86	Matemática para Logística 2 - Tecnologia em Logística	205	1	NER	NCA	NAP		
		204	2	NER	NCA	NAP		
		203	3	200	PN11, PN11, PN17, QR9, PN17, PN17,	54	E14	4
89	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	210	2	NER	NCA	NAP		
		211	3	NER	NCA	NAP		
92	Matemática II - Licenciatura em Matemática	221	1	p (0,0)> c=0	NCA	15	E3	3
		224	2	pontos A (2, 1), B(- 3, - 4)	NCA	51	E13	5
		225	3	20(5x + y) = 5000	NCA	60	E15	3
		222	4	y=ax ² +bx=c	NCA	18	E9	3
93	Matemática II - Licenciatura em Matemática	227	1	25/3m	NCA	3	E3	3
		226	2	625m ²	NCA	47,49,51	E10	3
		229	3	125m ²	NCA	7,60,	E15	3
		228	4	36m ²	NCA	10	E8	3
94		245	1	8m	NCA	3,15,17,18	E3	3

	Matemática II - Licenciatura em Matemática	231	2	NER	NCA	NAP		
		244	3	$15625=62,5 \times 250$	NCA	47,60,	E14	3
		230	4	+3	NCA	10,17	E8	3
95	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	233	1	NER	PN1, PN8, QR1, QR2, QR7, DR4, DR3, DR11	NAP		
		232	2	NER	DR5	NAP		
96	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	267	1	8	NCA	2	E5	3
		268	2	20	NCA	NAP		
		265	3	625	NCA	NAP		
		266	4	36	NCA	36	E9	3
97	Matemática I - Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas	234	1	5 metros	NCA	22	E1	3
		237	2	$a = b = 25$ metros.	NCA	47	E10	3
		236	3	187,5mL	PN17, PN15, PN3, PN11, PN17, QR9	46	E14	4
		238	4	18m ²	DR1, PN12, DR8, QR8, DR2, DR2, DR5, QR8,	1,34	E7	3
98	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	235	2	NER	NCA	NAP		
99	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	239	2	$A=35 / B=15 / \text{Área total: } 525\text{m}^2$	PN14, PN16	NAP		
101	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	246	1	7	NCA	2	E5	4
		248	2	200	QR9, DR11	1	E11	3
		247	3	200	NCA	60	E15	3
		249	4	64m ²	NCA	10	E8	2
102	Matemática II - Licenciatura em Matemática	250	1	$25/3$ metros	NCA	3,11,15,17,18	E3	4
		254	2	$a=26\text{m}$ e $b=24\text{m}$ terá 624m ²	PN16, DR10, PN14, QR9	NAP		
		252	3	125m	NCA	13,16,60,	E15	4
		253	4	36m ²	NCA	10,17	E8	4
103	Matemática II - Licenciatura em Matemática	256	1	$25/3\text{m}$	NCA	3,18	E3	3
		257	2	625m ²	NCA	17,49	E11	4
		251	3	125m	NCA	47	E14	5
		255	4	36m ²	NCA	17	E9	3
104	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	258	1	12 metros	DR1, DR7, DR2,	7	E2	3
		263	2	100 m ²	PN16, PN14	49	E11	3
		264	3	não consegui resolver	PN17, DR9, QR9	54	E14	3
		260	4	não sei resolver	DR7	NAP		
105	Matemática para Logística 1 - Tecnologia em Logística	270	1	NER	QR1	NAP		
		259	3	500,0 metros lineares de muro de tijolos	PN17	40,52,57	E15	4
110	4 ano - Técnico em Desenvolvimento de Sistemas	305	2	$A= 25$ e $B=25$, para que haja a maior área possível	NCA	17, 49	E11	3

		306	3	NER	NCA	NAP		
111	4 ano - Técnico em Desenvolvimento de Sistemas	274	3	NER	NCA	NAP		
113	Matemática I - Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas	275	1	75/9	NCA	17, 16, 7, 3, 15	E2	1
		319	2	625	NCA	47	E10	5
		318	3	252	NCA	47	E14	5
		317	4	18	NCA	10, 16, 17	E8	5
114	4º ano - Técnico em Administração	277	2	800m²	NCA	NAP		
		278	4	NER	NCA	NAP		
115	4 ano - Técnico em Desenvolvimento de Sistemas	276	3	200	NCA	60	E15	5
120	4º ano - Técnico em Desenvolvimento de Sistemas	285	2	NER	NCA	NAP		
		284	3	NER	NCA	NAP		
125	Matemática Aplicada - Tecnologia em Automação Industrial	298	1	25/3	NCA	18	E4	4
		299	2	NER	NCA	NAP		
		296	3	NER	PN15	NAP		
		297	4	36	DR8	17	E9	4
127	Cálculo II - Engenharia Eletrônica	300	3	50 metros lineares	NCA	NAP		
		302	4	NER	NCA	NAP		
130	Matemática Aplicada - Tecnologia em Automação Industrial	313	1	4	DR2	1	E2	3
		314	2	600	NCA	NAP		
		311	3	200	PN15	47	E14	5
		312	4	3	DR11	NAP		
131	4 ano - Técnico Administração	315	3	NER	PN17, DR7, DR4, PN17	NAP		
		316	4	NER	NCA	NAP		

APÊNDICE 12 – TCLE e avaliação do appAAP – 4ª etapa

appAAP _ Avaliação de Usabilidade

Você está sendo convidado a avaliar a experiência de uso da aplicação AppAAP através do presente formulário.

Agradecemos e nos colocamos a disposição para mais informações.

Luís Felipe Auth - luisfelipe.auth@gmail.com

Jaqueline Molon - jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br

Juliana Damasio Oliveira - juliana.oliveira@canoas.ifrs.edu.br

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Nome completo *

Seu nome será preservado, mas é preciso informar aqui, para organização apenas.

Texto de resposta curta

Qual sua turma/curso? *

- Cálculo II - Engenharia Eletrônica - Prof. Caio
- Laboratório de Educação Matemática - Licenciatura em Matemática - Profa. Larissa
- Matemática II - Licenciatura em Matemática - Profa. Cláudia
- Matemática Aplicada - Tecnologia em Automação Industrial - Prof. Caio
- Matemática I - Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Prof. Bruno
- Matemática para Logística I - Prof. Cláudia
- Matemática para Logística II - Prof. Carina
- 4º ano - Técnico em Eletrônica - Profa. Larissa
- 3º ano - Técnico em Eletrônica - Profa. Larissa
- 3º ano - Técnico em Desenvolvimento de Sistemas - Profa. Larissa

CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa de doutorado intitulada “MODELO DE AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM PARA DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA DIGITAL DE APOIO À AÇÃO PEDAGÓGICA”. O pesquisador responsável por essa pesquisa é Sérgio Roberto Kieling Franco, que pode ser contatado pelo telefone (51) 3308-4147, no endereço Avenida Paulo Gama, nº 110, Porto Alegre - RS, Prédio 12201 – UFRGS, sala 728 e pelo e-mail sergio.franco@ufrgs.br. Você também pode contatar a pesquisadora Jaqueline Molon através do e-mail jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br ou telefone 51 98181-1108. A equipe do estudo responderá a todas as dúvidas e informações, que solicitar a qualquer momento (antes, durante e após o estudo), acerca dos procedimentos ou outros assuntos relacionados ao estudo.

O objetivo da pesquisa é identificar elementos que devem ser considerados em um modelo de detecção de dificuldades cognitivas de estudantes em tarefas de resolução de problemas matemáticos para auxílio à ação pedagógica através de ferramenta digital.

Ao participar da presente etapa da pesquisa você acessará o aplicativo appAAP no link aapaap-teste.vercel.app e resolverá as situações-problema lá disponibilizadas. Os registros acerca das ajudas consultadas, procedimentos de resolução indicados e estratégias de resolução serão coletados pelo aplicativo durante sua navegação. Após o teste do appAAP você responderá a um questionário para avaliar sua experiência de uso.

Os procedimentos utilizados nessa pesquisa obedecem aos critérios da ética na Pesquisa com Seres Humanos, conforme resoluções 466/12 e 510/16 do Conselho Nacional de Saúde. Os riscos aos participantes são mínimos, pois será solicitado que resolvam questões específicas e informem estratégias, dúvidas e procedimentos utilizados ao longo da resolução ou na(s) tentativa(s) de resolução.

Esclarecemos que as atividades da pesquisa não se tratam de uma prova de avaliação e que não será atribuído nota ou conceito. Além disso, não será estabelecida relação alguma entre seu desempenho na disciplina de matemática e o seu desempenho nas atividades da pesquisa. Destaca-se que os pesquisadores estarão à disposição para conversar e esclarecer dúvidas, em qualquer momento, como estratégia para minimizar eventuais incômodos ou constrangimentos oriundos da sua participação nesse estudo.

Sua contribuição é voluntária e pode ser interrompida em qualquer tempo sem nenhum prejuízo. Todos os cuidados serão tomados para garantir o sigilo e a confidencialidade das informações, preservando a identidade dos participantes bem como das instituições envolvidas.

Todas as despesas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caso haja, serão ressarcidas. Danos decorrentes da pesquisa serão indenizados. A sua colaboração nesse estudo será de muita importância para nós, no entanto, você poderá se retirar do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo despesa e constrangimento.

Os participantes da pesquisa não terão nenhum benefício direto, entretanto, esperamos que futuramente os resultados deste estudo sejam usados em benefício de outras pessoas (professores e alunos) que poderão utilizar do modelo de avaliação do processo de aprendizagem que será desenvolvido. Ainda, a participação no estudo representa uma importante contribuição para o desenvolvimento da pesquisa científica, uma vez que os resultados desse trabalho poderão ser apresentados em encontros ou publicados em revistas científicas.

Solicitamos a sua autorização para usar suas informações na produção de artigos técnicos e científicos, aos quais você poderá ter acesso. A sua privacidade será mantida através da não identificação do seu nome. Todos os registros da pesquisa estarão sob a guarda da pesquisadora Jaqueline Molon, em lugar seguro de violação, pelo período mínimo de 05 (cinco) anos, após esse prazo serão destruídos.

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs (CEP-Uergs). Formado por um grupo de especialistas, tem por objetivo defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade, contribuindo para que sejam seguidos os padrões éticos na realização de pesquisas: Comitê de Ética em Pesquisa da Uergs – CEP-Uergs - Av. Bento Gonçalves, 8855, Bairro Agronomia, Porto Alegre/RS – CEP: 91540-000; Fone/Fax: (51) 33185148 - E-mail: cep@uergs.edu.br.

Você também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa do IFRS – Rua General Osório, 348 - Centro - Bento Gonçalves - RS - CEP: 95700-000- Tel: (54) 3449-3340 – E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br .

CONSENTIMENTO

Você declara ter entendido os objetivos e benefícios de sua participação na pesquisa ?

Marcar apenas uma oval.

- Sim, estou ciente e concordo em participar do estudo. Além disso, declaro que sou maior de 18 anos.
 Sim, estou ciente e concordo em participar do estudo. Declaro que como não possuo 18 anos, meus responsáveis legais estão cientes de minha participação no estudo.
 Não quero participar do estudo.
-

6. Não tive dificuldades para navegar pela ferramenta. *

1 2 3 4 5

Discordo fortemente ○ ○ ○ ○ ○ Concordo fortemente

Quanto à navegação pelo appAAP:

Você acessou o appAAP utilizando que tipo de dispositivo? *

Você pode assinalar mais do que uma das opções!

- smartphone
- tablet
- computador de mesa (desktop)
- notebook
- Outros...

Acredita que o tamanho da tela do dispositivo usado por você influenciou na navegação pelo appAAP? Explique, por favor.

Texto de resposta longa

Destaque aspectos positivos do AppAAP a partir da sua experiência de uso.

Você pode deixar comentários (sugestões, críticas, elogios, etc.). Descreva se teve alguma dificuldade em usar o app e qual foi essa dificuldade, também, se for o caso.

Texto de resposta longa

Destaque aspectos que poderiam ser melhorados no AppAAP a partir da sua experiência de uso.

Você pode deixar comentários (sugestões, críticas, elogios, etc.). Descreva se teve alguma dificuldade em usar o app e qual foi essa dificuldade, também, se for o caso.

Texto de resposta longa

MUITO OBRIGADA!

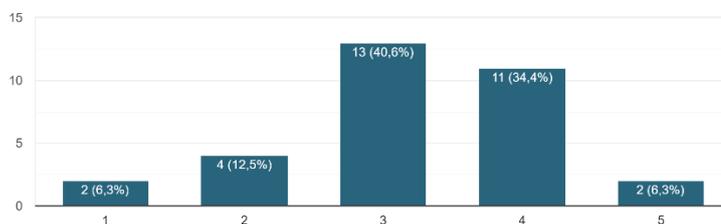


Muito obrigada por aceitar participar da pesquisa!

APÊNDICE 13 – Gráficos da avaliação de usabilidade (SUS) do appAAP

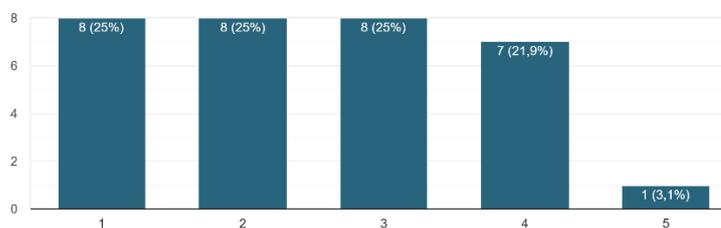
1. Acho que gostaria de utilizar este produto com frequência.

32 respostas



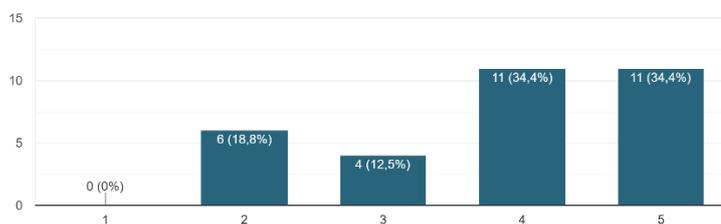
2. Considerei o produto mais complexo do que necessário.

32 respostas



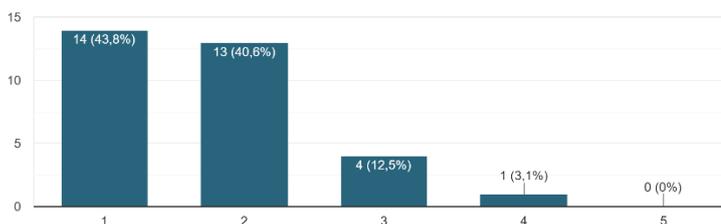
3. Achei o produto fácil de utilizar.

32 respostas



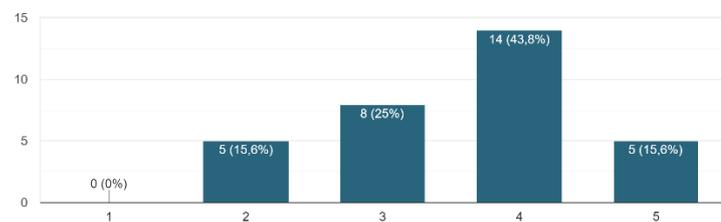
4. Acho que necessitaria de ajuda de um técnico para conseguir utilizar este produto.

32 respostas



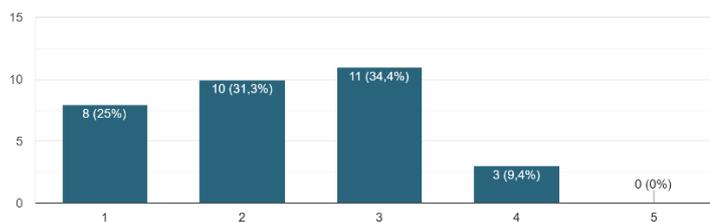
5. Considerei que as várias funcionalidades deste produto estavam bem integradas.

32 respostas



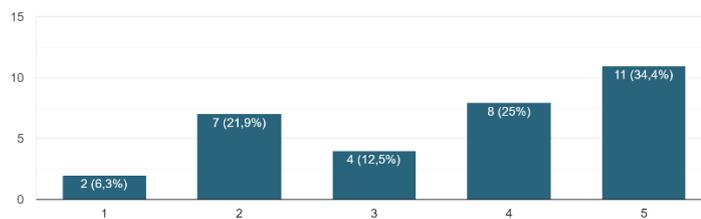
6. Achei que este produto tinha muitas inconsistências.

32 respostas



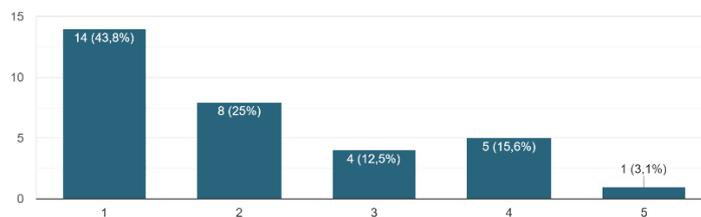
7. Suponho que a maioria das pessoas aprenderia a utilizar rapidamente este produto.

32 respostas



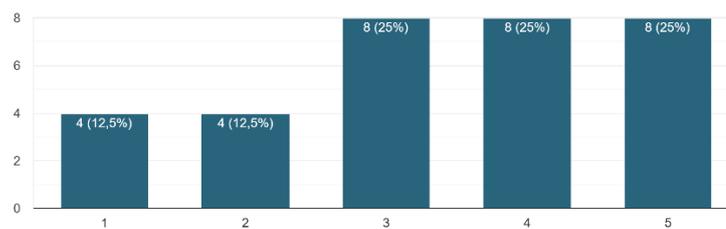
8. Considerei o produto muito complicado de utilizar.

32 respostas



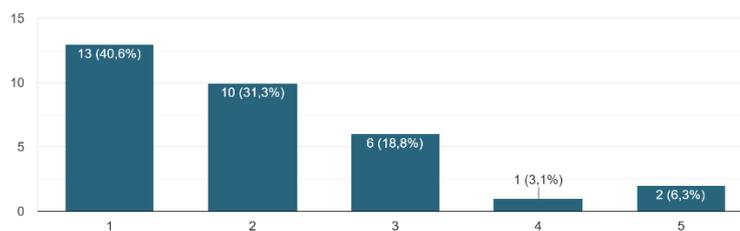
9. Senti-me muito confiante a utilizar este produto.

32 respostas



10. Tive que aprender muito antes de conseguir lidar com este produto.

32 respostas



APÊNDICE 14 – Produção científica durante o período de doutoramento

• Artigos publicados em periódicos

MOLON, J.; LUDOVICO, F. M.; BARCELLOS, P.; FRANCO, S. Avaliação em tempos de ensino remoto emergencial. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 33, p. e08055, 2022.

RENZ, C. L. S.; MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. Formação de professores: a contribuição dos Institutos Federais. **Interfaces da Educação**, 2022, no prelo.

MOLON, JAQUELINE; SIQUEIRA, CLAUDIOMIR FEUSTLER RODRIGUES DE; FRANCO, SÉRGIO ROBERTO KIELING; BASSO, MARCUS VINICIUS DE AZEVEDO. Matemática Dinâmica e Raciocínio Hipotético-dedutivo: estudo envolvendo quadriláteros com o Geogebra. **Educação Matemática em Revista**. v.26, p.116 - 133, 2021.

LUDOVICO, F. M.; MOLON, J.; RENZ, C. L. S.; BARCELLOS, P. S. C. C.; FRANCO, S. R. K. Teoria Da Complexidade E Epistemologia Genética; Aproximações Através Da Análise De Cenários De Aprendizagem. **SCHÈME: Revista Eletrônica De Psicologia E Epistemologia Genéticas**, 2021.

SIQUEIRA, C. F. R.; MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. Professores de TDIC nos cursos de formação docente: desafios dos profissionais frente às tecnologias educacionais. **Ensino Da Matemática Em Debate**, v.8, p.42 - 60, 2021.

LUDOVICO, F. M.; MOLON, J.; MACHADO, A. D.; BARCELLOS, P. S. C. C.; FRANCO, S. R. K. A tecnologia de comunicação digital na formação inicial de professores: concepções, práticas e controvérsias. **ORGANON**, v.35, p.1 - 9, 2020.

LUDOVICO, F. M.; MOLON, J.; FRANCO, S. R. K.; BARCELLOS, P. S. C. C. COVID-19: desafios dos docentes na linha de frente da educação. **Interfaces Científicas - Educação**, v.10, p.58 - 74, 2020.

MOLON, J.; SIQUEIRA, C. F. R.; TOEBE, I. C. D.; FRANCO, S. R. K. Docência em tempos de alta transição tecnológica: um ensaio teórico a partir da obra *Modernidade Líquida* de Zygmunt Bauman. **Cadernos Zygmunt Bauman**, v.10, p.222 - 245, 2020.

MOLON, J.; NICOLAO, M.; FRANCO, S. R. K. Ferramentas digitais para a avaliação do processo de aprendizagem: um mapeamento sistemático da literatura. **RENOTE**. Revista Novas Tecnologias Na Educação, v.18, p.501 - 510, 2020.

SIQUEIRA, C. F. R.; MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. Integração das tecnologias digitais para exploração e desenvolvimento do raciocínio visuoespacial na aprendizagem de geometria. **RENOTE**. Revista Novas Tecnologias Na Educação, v.16, p.1 - 10, 2018.

• Trabalhos completos apresentados e publicados em anais de eventos

MOLON, J.; NICOLAO, M.; FRANCO, S. R. K.; GOMES, P. R. S. Concepção de um Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica para a Identificação de Estratégias Cognitivas utilizadas na Resolução de Problemas Matemáticos In: XXVIII Ciclo De Palestras Sobre Novas Tecnologias Na Educação, 2020, Porto Alegre. Anais [recurso eletrônico] / **CINTED2020, XXVIII Ciclo de Palestras sobre Novas Tecnologias na Educação**. Porto Alegre: CINTED UFRGS, 2020. p.224 - 229

MOLON, J.; TOEBE, I. C. D.; FRANCO, S. R. K. A formação inicial do professor: desafios de aprender para si e para ensinar In: X Congresso Ibero-Americano de Docência Universitária (X CIDU), 2018, Porto Alegre. **Anais do X Congresso Ibero-Americano de Docência Universitária (CIDU)**, 2018. Porto Alegre: Editora PUCRS, 2019.

MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. GeoGebra: Ferramenta Cognitiva para o Desenvolvimento do Pensamento Operatório Formal In: VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE 2019), 2019, Brasília. **Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação (WCBIE 2019)**, 2019. p.650 – 656.

MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. A Mensuração De Habilidades Em Matemática A Partir Da Teoria De Resposta Ao Item In: VI Congresso Internacional de Educação, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais completos do VI Congresso Internacional de Educação Desafios e Soluções para Modelo Híbrido de Educação**. Foz do Iguaçu: UniAmérica, 2018. p.94 – 114.

FRANCO, S. R. K.; RENZ, C. L. S.; MOLON, J. A permanência dos estudantes como fator de qualidade dos cursos superiores e o sistema brasileiro de avaliação da educação superior: os limites dos instrumentos In: 8ª Conferência Forges, 2018, Lisboa, Portugal. **8ª CONFERÊNCIA FORGES: O papel da Garantia da Qualidade na Gestão do Ensino Superior: desafios, desenvolvimentos e tendências**. Lisboa, Portugal: Instituto Politécnico de Lisboa, 2018.

- **Resumos apresentados e publicados em anais de eventos**

GOMES, P. R. S.; NICOLAO, M.; MOLON, J.; FRANCO, S. R. K. Concepção de um Aplicativo de Apoio à Ação Pedagógica para a Identificação de Estratégias Cognitivas utilizadas na Resolução de Problemas Matemáticos. In: **I Mostra Metropolitana do IFRS**, 2021. (aguardando publicação dos anais)

FRANCO, S. R. K.; NICOLAO, M.; MOLON, J.; GOMES, P. R. S. Ferramenta digital de apoio ao trabalho docente na identificação de dificuldades dos alunos na resolução de situações-problema In: 10ª MOEXP Mostra de Ensino, Extensão e Pesquisa IFRS Campus Osório, 2021, Osório. **Anais MoExp - Mostra De Ensino, Extensão e Pesquisa do Instituto Federal De Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande Do Sul - Campus Osório**, 2021.

GOMES, P. R. S.; MOLON, J.; NICOLAO, M.; FRANCO, S. R. K. Aplicativo de apoio à ação pedagógica: detecção de dificuldades na resolução de problemas matemáticos In: Salão de Pesquisa, Extensão e Ensino do IFRS, 5º salão de pesquisa, extensão e ensino do IFRS, 9º Seminário de Iniciação Científica (SICT), 2020, Bento Gonçalves. **Anais do 9º Seminário de Iniciação Científica (SICT). IFRS, 2020**. v.9.

GOMES, P. R. S.; MOLON, J.; NICOLAO, M.; FRANCO, S. R. K. **APP** de apoio à ação pedagógica: detecção de dificuldades na resolução de problemas matemáticos In: Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão da UNIPAMPA: Salão de Pesquisa e Inovação, 2020. **Anais do 12º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão da UNIPAMPA: Salão de Pesquisa e Inovação**. UNIPAMPA, 2020. v.2.

MOLON, J.; LUDOVICO, F. M. O letramento digital na base nacional comum curricular In: Colóquio Luso-Brasileiro de Educação - COLBEDUCA, 2019, Joinville SC. **Caderno de resumos do V Colóquio luso-brasileiro de educação**. Joinville SC: Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, 2019. v.1. p.168 - 168

MOLON, J. Por que aprender álgebra? O Pensamento Algébrico na Base Nacional Comum Curricular In: Colóquio Luso-Brasileiro de Educação - COLBEDUCA, 2019, Joinville. **Caderno de resumos do V Colóquio luso-brasileiro de educação**. Joinville SC: Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, 2019. v.1. p.140 – 140.