

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA MODELOS DE BIELAS  
E TIRANTES EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

**JULIAN ALVES BORGES**

PORTO ALEGRE  
2022

**JULIAN ALVES BORGES**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA MODELOS DE BIELAS  
E TIRANTES EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

PORTO ALEGRE  
2022

### CIP - Catalogação na Publicação

Borges, Julian Alves  
Otimização Topológica para modelos de Bielas e  
Tirantes em Estruturas de Concreto Armado / Julian  
Alves Borges. -- 2022.  
135 f.  
Orientador: Herbert Martins Gomes.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2022.

1. otimização topológica. 2. Modelo de Bielas e  
Tirantes. 3. Concreto Armado. 4. BESO. I. Gomes,  
Herbert Martins, orient. II. Título.

**JULIAN ALVES BORGES**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA MODELOS DE BIELAS  
E TIRANTES EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

Porto Alegre, 13 de maio de 2022

Orientador Prof. Herbert Martins Gomes  
Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Lucas Festugato  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Gladimir de Campos Grigoletti (ULBRA)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Inácio Benvenegu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Jairo José de Oliveira Andrade (PUCRS)**  
Dr. Pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## RESUMO

BORGES, J. A. **Otimização Topológica para Modelos de Bielas e Tirantes em Estruturas de Concreto Armado**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O método de bielas e tirantes é uma ferramenta muito útil para dimensionar e analisar regiões descontínuas em estruturas de concreto armado. Com essa ferramenta, é possível descrever, de forma simplificada, o caminho percorrido pelas cargas externas até os suportes da estrutura e, dessa forma, propor apropriadamente um modelo treliçado contendo bielas de concreto comprimido e tirantes de aço tracionado. Por outro lado, a otimização topológica passou a ser utilizada para facilitar a idealização desses modelos treliçados, uma vez que a estrutura final decorrente de sua otimização se assemelha ao modelo treliçado obtido por meio do método de bielas e tirantes. No entanto, algumas publicações utilizam da otimização topológica apenas para determinar o caminho da carga, sem considerar o material concreto armado como um compósito (concreto e aço). Dessa forma, neste trabalho é utilizada a otimização topológica para gerar estruturas otimizadas contendo elementos finitos de concreto e de aço otimizados. Para isso, é necessário otimizar as estruturas em duas fases e com dois critérios de falha distintos, sendo: o critério de Ottosen para representar o material concreto na primeira fase e o critério de von Mises para representar o material o aço na segunda fase. Além disso, são comparadas estruturas projetadas a partir da otimização topológica com estruturas oriundas do método tradicional de bielas e tirantes, segundo normas como a Eurocode 2:2004 e o ACI 318:2002. São analisadas, neste trabalho, vigas altas com e sem aberturas e de dimensões distintas. Por fim, observa-se que as estruturas otimizadas são mais leves do que as estruturas projetadas pelo método tradicional, além de seguras e econômicas, em termos de matéria prima. A metodologia proposta permite a redução do material utilizado e, portanto, auxilia na sustentabilidade e na redução das emissões de poluentes atmosféricos.

**Palavras-chave:** *Otimização Topológica; Modelo de Bielas e Tirantes; Concreto Armado; BESO; Superfície de Falha de Ottosen.*

## ABSTRACT

BORGES, J. A. **Topological Optimization for Strut and Tie Models in Reinforced Concrete Structures**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The strut and tie model is a very useful tool for sizing and analyzing discontinuous regions in reinforced concrete structures. With this tool, it is possible to describe, in a simplified way, the path taken by the external loads to the supports of the structure and, thus, properly propose a truss model containing compressed concrete struts and tensioned steel ties. On the other hand, topological optimization started to be used to facilitate the idealization of these truss models, since the final structure resulting from its optimization is similar to the truss model obtained by the strut-and-tie model. However, some publications use topological optimization only to determine the load path, without considering the reinforced concrete material as a composite (concrete and steel). Thus, in this work topological optimization is used to generate optimized structures containing optimized concrete and steel finite elements. For this, it is necessary to optimize the structures in two phases and with two different failure criteria, being: the Ottosen criterion to represent the concrete material in the first phase and the von Mises criterion to represent the material the steel in the second phase. Furthermore, structures designed from topological optimization are compared with structures derived from the traditional method of connecting struts and ties, according to standards such as Eurocode 2:2004 and ACI 318:2002. In this work, deep beams with and without openings and of different dimensions are analyzed. Finally, it is observed that the optimized structures are lighter than the structures designed by the traditional method, in addition to being safe and economical, in terms of material. The proposed methodology allows the reduction of the material used and, therefore, helps in sustainability and in the reduction of emissions of atmospheric pollutants.

**Key-words:** *Topology Optimization; Strut-and-Tie Model; Reinforced Concrete; BESO; Ottosen's failure surface.*

# SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vi</b>
<b>SUMÁRIO.....</b>	<b>vii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>xi</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>xiv</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS.....</b>	<b>xv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO/JUSTIFICATIVA.....	2
1.2 OBJETIVOS .....	2
1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	3
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	3
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>5</b>
2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....	5
2.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	6
2.3 MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES .....	13
2.3.1 Regiões B e D.....	13
2.3.2 Caminho da carga ( <i>load path</i> ) e modelo treliçado .....	15
2.3.3 Campos de tensão.....	19
2.3.4 Tipos e classificação dos nós .....	21
2.4 BIELAS E TIRANTES SEGUNDO A NBR 6118:2014.....	22
2.5 BIELAS E TIRANTES SEGUNDO O EUROCODE 2:2004.....	26
2.6 BIELAS E TIRANTES SEGUNDO O ACI 318:2002.....	30
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>36</b>

3.1	FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS .....	36
3.1.1	Tensões principais .....	36
3.1.2	Estado plano de tensões.....	37
3.1.3	Formulação da equação de elementos finitos para análise estática .....	39
3.1.4	Elemento finito quadrilátero sólido de 4 nós.....	42
3.2	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA À ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO.....	45
3.3	MÉTODO BESO .....	46
3.3.1	Número de sensibilidade .....	49
3.3.2	Filtro para solução do problema de <i>checkerboard</i> .....	50
3.3.3	Estabilização do processo iterativo .....	52
3.3.4	Penalização.....	53
3.3.5	Múltiplos materiais.....	53
<b>4</b>	<b>CRITÉRIOS DE FALHA.....</b>	<b>55</b>
4.1	CRITÉRIO DE FALHA DE OTTOSEN PARA O CONCRETO .....	55
4.2	CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES PARA O AÇO .....	57
<b>5</b>	<b>PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DAS ESTRUTURAS ANALISADAS .....</b>	<b>58</b>
5.1	FASE 1 .....	58
5.2	FASE 2 .....	59
5.3	FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	59
<b>6</b>	<b>DETALHAMENTO DAS ESTRUTURAS ANALISADAS .....</b>	<b>61</b>
6.1	DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO DAS BARRAS DISCRETAS.....	61
6.2	HOMOGENEIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS .....	62
6.3	VERIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS ANALISADAS .....	64
<b>7</b>	<b>EXEMPLOS E DETALHAMENTOS POR BIELAS E TIRANTES TRADICIONAL .....</b>	<b>66</b>



7.1	VIGA ALTA PELO EUROCODE 2:2004.....	66
7.1.1	Modelo de treliça adotado .....	66
7.1.2	Verificação das tensões nos apoios e do ponto de aplicação de carga .....	69
7.1.3	Dimensionamento dos tirantes .....	69
7.1.4	Comprimento de ancoragem .....	71
7.1.5	Verificação das tensões nas bielas da treliça.....	71
7.1.6	Verificação do modelo de bielas e tirantes proposto.....	73
7.1.7	Verificação ao cisalhamento .....	74
7.1.8	Armadura mínima .....	75
7.1.9	Detalhamento final proposto pelos autores .....	75
7.2	VIGA ALTA COM ABERTURA PELO ACI 318:2002 .....	76
7.2.1	Modelo de treliça adotado .....	76
7.2.2	Verificação das tensões nos apoios e dos pontos de aplicação de carga .....	78
7.2.3	Dimensionamento dos tirantes .....	79
7.2.4	Verificação das bielas de compressão .....	80
7.2.5	Verificação das tensões nos nós da treliça .....	81
7.2.6	Comprimentos de Ancoragem.....	84
7.2.7	Armadura mínima para retração e temperatura .....	84
7.2.8	Armadura mínima de pele .....	85
7.2.9	Detalhamento final proposto pelos autores .....	85
<b>8</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DOS EXEMPLOS .....</b>	<b>87</b>
8.1	EXEMPLO SEGUNDO O EUROCODE 2:2004.....	87
8.1.1	Parâmetros utilizados na otimização .....	87
8.1.2	Resultados da otimização de Goodchild et al. (2014) .....	89
8.1.3	Detalhamento da estrutura otimizada .....	92
8.1.4	Estrutura final proposta para análise e verificação.....	94

8.1.5	Estrutura de Goodchild et al. (2014) simplificada para análise.....	94
8.1.6	Comparativo de tensões e de flechas.....	95
8.1.7	Comparativos entre massas, volumes e custos .....	97
8.2	NOVAK E SPRENGER (2002) SEGUNDO O ACI 318:2002.....	98
8.2.1	Parâmetros utilizados na otimização .....	99
8.2.2	Resultados da otimização de Novak e Sprenger (2002).....	99
8.2.3	Detalhamento da estrutura otimizada .....	102
8.2.4	Análise da estrutura final com as armaduras propostas.....	104
8.2.5	Análise do exemplo do Novak e Sprenger (2002).....	104
8.2.6	Comparativo de tensões e deslocamentos .....	105
8.2.7	Comparativos de volume, massa e custos .....	107
<b>9</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>109</b>
9.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	111
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>112</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de otimização estrutural (Bendsøe e Sigmund, 2003).....	6
Figura 2 – Regiões D (hachura) de estruturas com descontinuidades geométricas (Schlaich et al., 1987).....	14
Figura 3 – Regiões D (hachura) de estruturas com descontinuidades estáticas (Schlaich et al., 1987).....	14
Figura 4 – Caminho da carga de uma viga alta a partir da carga não uniforme $q$ . (Adaptada de Schlaich et al., 1987). ....	15
Figura 5 – Modelo treliçado de bielas e tirantes a partir do caminho das cargas (Adaptada de Schlaich et al., 1987). ....	16
Figura 6 – Modelo bom e ruim de bielas e tirantes segundo Schlaich et al., 1987 (Schlaich et al., 1987).....	17
Figura 7 – Modelos de bielas e tirantes a) bom, b) ruim e c) análise de elementos finitos (Adaptada de Goodchild et al., 2014).....	18
Figura 8 – Campos de tensão a) em forma de leque, b) em forma de garrafa e d) em forma prismática. (Adaptada de Schlaich et al., 1987). ....	20
Figura 9 – Nós singular e contínuo em uma região D. (Adaptada de Schlaich et al., 1987)....	21
Figura 10 – Regiões D (hachura) de estruturas típicas segundo a NBR 6118:2014. (NBR 6118:2014).....	22
Figura 11 – Esquema de distribuição de armaduras para uma viga alta segundo a NBR 6118:2014 (NBR 6118:2014) .....	26
Figura 12 – Regiões CCC (Eurocode 02:2004).....	27
Figura 13 – Regiões CCT (Eurocode 02:2004).....	27
Figura 14 – Representação de descontinuidade parcial e total em um nó ou biela de compressão (Eurocode 02:2004) .....	29
Figura 15 – Exemplificação dos conceitos de zona nodal, bielas prismáticas e em forma de garrafa e tirante usuais em vigas altas (Adaptada de ACI 318:2002) .....	32
Figura 16 – Biela em forma de garrafa para (a) um modelo fissurada e (b) um modelo idealizado pelo método de bielas e tirantes (Adaptada de ACI 318:2002) .....	33
Figura 17 - Elemento finito quadrilátero sólido de 4 nós. (Adaptada de Rao, 2018).....	42

Figura 18 – Malha de elementos finitos com problema de <i>checkerboard</i> (Adaptada de Huang e Xie, 2010). .....	51
Figura 19 – Definição do raio mínimo para realização do filtro (Huang e Xie, 2010). .....	52
Figura 20 – Esquema de otimização a) sem e b) com estabilização do processo iterativo. (Adaptada de Huang e Xie, 2010). .....	53
Figura 21 – Representação de a) seções nos planos desviadores e b) meridianos de superfícies de falha (Chen e Han, 1988). .....	56
Figura 22 – Fluxograma do processo de otimização implementado em duas fases. ....	60
Figura 23 – Esquema da homogeneização de elementos de concreto que contém barras de aço discretas. ....	62
Figura 24 – Viga alta de Goodchild et al. (2014) (Adaptada de Goodchild et al., 2014). ....	67
Figura 25 – Modelo treliçado adotado por Goodchild et al. (2014) (Adaptada de Goodchild et al., 2014). ....	67
Figura 26 – Forças atuantes nos tirantes e nas bielas. ....	68
Figura 27 – Apoio A do tipo CCT (Goodchild et al., 2014). ....	70
Figura 28 – Ilustração da biela 1-2 em forma de garrafa com os tirantes transversais $T$ (Goodchild et al., 2014). ....	73
Figura 29 – Detalhamento proposto por Goodchild et al. (2014) (Adaptada de Goodchild et al., 2014). ....	75
Figura 30 – Viga alta com abertura segundo Novak e Sprenger (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002). ....	76
Figura 31 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Novak e Sprenger (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002). ....	77
Figura 32 – Forças e reações do modelo de bielas e tirantes de Novak e Sprenger (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002) .....	78
Figura 33 – Geometria do Nó A (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002). ....	81
Figura 34 – Geometria do Nó B (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002). ....	82
Figura 35 – Geometria do Nó C (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002). ....	83
Figura 36 – Detalhamento proposto por Novak e Sprenger (Adaptada de NOVAK e SPRENGER, 2002). ....	86
Figura 37 – Curva <i>compliance</i> /fração volumétrica <i>versus</i> iterações. ....	89

Figura 38 – Gráfico das densidades finais do projeto. ....	90
Figura 39 – Curva tensões máximas e resíduos <i>versus</i> iterações. ....	91
Figura 40 – Gráfico das tensões equivalentes de Ottosen e von Mises (suavizadas). ....	91
Figura 41 – Gráfico das direções das tensões principais. ....	92
Figura 42 – Detalhamento proposto da estrutura otimizada. ....	94
Figura 43 – Estrutura otimizada com as armaduras propostas para varificação. ....	94
Figura 44 – Simplificação do detalhamento de Goodchild et al. (2014) para verificação. ....	95
Figura 45 – Tensões equivalentes suavizadas de Ottosen e de von Mises atuantes na estrutura .....	96
Figura 46 – Gráficos das deformadas das estruturas e seus deslocamentos. ....	96
Figura 47 – Curva <i>compliance</i> e fração volumétrica <i>versus</i> iterações. ....	100
Figura 48 – Gráfico das densidades finais de projeto. ....	101
Figura 49 – Curva tensões máximas e resíduos <i>versus</i> iterações. ....	101
Figura 50 – Gráfico das tensões equivalentes suavizadas de Ottosen e von Mises. ....	102
Figura 51 – Gráfico das direções das tensões principais. ....	102
Figura 52 – Detalhamento proposto para a estrutura otimizada. ....	103
Figura 53 – Estrutura otimizada com armaduras proposta para verificação. ....	104
Figura 54 – Simplificação do detalhamento de Novak e Sprenger (2002) para verificação. .	105
Figura 55 – Tensões equivalentes suavizadas de Ottosen e de von Mises atuantes na estrutura .....	106
Figura 56 – Gráficos das deformadas das estruturas. ....	106

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de equações para problemas bidimensionais. ....	37
Tabela 2 – Número de incógnitas para problemas bidimensionais. ....	37
Tabela 3 – Áreas de aço e barras propostas por Novak e Sprenger (2002) para detalhamento	79
Tabela 4 – Verificação das larguras das bielas de compressão .....	80
Tabela 5 – Propriedades do concreto e do aço utilizadas na otimização.....	88
Tabela 6 – Parâmetros para otimização .....	88
Tabela 7 – Detalhamento proposto da viga otimizada com barras discretas.....	93
Tabela 8 – Propriedades do concreto e do aço utilizadas na otimização de Novak e Sprenger (2002). ....	99
Tabela 9 – Parâmetros para otimização .....	99
Tabela 10 – Detalhamento das barras do exemplo otimizado .....	103

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

ABNT	: Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	: American Concrete Institute
BESO	: Bidirectional Evolutionary Structural Optimization
CEB	: Comité International du Béton
ELS	: Estado Limite de Serviço
ELU	: Estado Limite Último
ERR	: Elementar Rejection Rate
ESO	: Evolutionary Structural Optimization
FORM	: First Order Reliability Method
GESO	: Genetic Evolutionary Structural Optimization
IR	: Inclusion Rate
ITD	: Isolines Topology Design
MATLAB	: Matrix Laboratory
MEF	: Método dos Elementos Finitos
MMA	: Method of Moving Asymptotes
NBR	: Norma Brasileira
PCI	: Precast/Prestressed Concrete Institute
RR	: Rejection Rate
SESO	: Smoothing Evolutionary Topology Optimization
SIMP	: Solid Isotropic Material with Penalization
STM	: Strut and Tie Model

### Letras maiúsculas

$[B]$	: Matriz que relaciona os deslocamentos com as deformações	[-]
$[C]$	: Matriz de coeficientes elásticos	[-]

$[C]$	: Matriz de amortecimento	[Ns/m]
$[D]$	: Matriz constitutiva	[-]
$[K]$	: Matriz de rigidez global	[Ns/m]
$[M]$	: Matriz de massa global	[kg]
$[N]$	: Matriz de funções de forma	[-]
$[R]$	: Matriz de rotação	[-]
$\{K^e\}$	: Matriz de rigidez elementar	[N]
$\{P\}$	: Vetor de forças global	[N]
$\{P_b^e\}$	: Vetor de forças de volume dos elementos	[-]
$\{P_c\}$	: Vetor de forças concentrada	[-]
$\{P^e\}$	: Vetor de forças do elemento	[-]
$\{P_s^e\}$	: Vetor de forças de superfície dos elementos	[-]
$\{Q\}$	: Vetor de deslocamento nodal da estrutura	[m]
$\{Q^e\}$	: Vetor de graus de liberdade de deslocamento nodal do elemento	[-]
$\{U\}$	: Vetor de deslocamentos global	[m]
$A_c$	: Área de concreto	[m <sup>2</sup> ]
$A_p$	: Área de tirante de protensão	[m <sup>2</sup> ]
$A_s$	: Área de aço necessária	[m <sup>2</sup> ]
$A_{s,fom}$	: Área de aço fornecida a partir da área de aço necessária	[m <sup>2</sup> ]
$A_t$	: Área transversal do elemento finito	[m <sup>2</sup> ]
$C$	: <i>Compliance</i>	
$C_c$	: Biela de concreto sob compressão	[MPa]
CCC	: Nó sob compressão	[-]
CCT	: Nó com uma força de tração	[-]
CTT	: Nó com duas forças de tração	[-]
$E$	: Módulo de elasticidade	[GPa]
$E_0$	: Módulo de elasticidade inicial	[GPa]
$E_h$	: Módulo de elasticidade homogeneizado	[GPa]
$E_{min}$	: Módulo de mínimo	[GPa]
$F$	: Força concentrada aplicada em um ponto do elemento estrutural	[kN]
$F_n$	: Força nominal em uma biela, tirante ou zona nodal	[kN]
$F_{mn}$	: Força à compressão nominal em uma zona nodal	[kN]



$F_{ns}$	: Força nominal em uma biela	[kN]
$F_{sd}$	: Força solicitante de projeto	[kN]
$F_t$	: Força total dos elementos que representam um tirante na otimização topológica	[kN]
$F_u$	: Força atuante em uma biela, tirante ou zona nodal	[kN]
$I_1$	: Primeiro invariante de tensões	[MPa]
$I_2$	: Segundo invariante de tensões	[MPa <sup>2</sup> ]
$I_3$	: Terceiro invariante de tensões	[MPa <sup>3</sup> ]
$J_2$	: Segundo invariante de tensões desviadoras	[MPa <sup>2</sup> ]
$J_3$	: Terceiro invariante de tensões desviadoras	[MPa <sup>3</sup> ]
$L$	: Lado do elemento finito	[m]
$N$	: Número total de iterações	[-]
$P_i$	: Força atuante no elemento finito	[kN]
$R_A$	: Força de reação no ponto A	[kN]
$R_B$	: Força de reação no ponto B	[kN]
$T$	: Força de tração transversal em uma biela sob compressão	[kN]
$T_s$	: Tirante de com armadura sob tração	[kN]
TTT	: Nó sob tração	[-]
$V_{frac}$	: Fração volumétrica alvo	[%]
$V_i$	: Volume do elemento finito	[m <sup>3</sup> ]
$V_{OT}$	: Volume do modelo proposto a partir da otimização topológica	[m <sup>3</sup> ]
$V_{STM}$	: Volume do modelo de bielas e tirantes do exemplo analisado	[m <sup>3</sup> ]
$W_{int}$	: Trabalho interno das forças	[J]

### Letras minúsculas

$(x,y)$	: Sistema de coordenadas plana	[m]
$(x,y,z)$	: Sistema de coordenadas espacial	[m]
[f]	: Matriz de força elementar	[kN]
[k]	: Matriz de rigidez elementar	[kN/m]
[r]	: Matriz de rotação local	[-]
[u]	: Matriz de deslocamento nodal	[m]
$a$	: Base/largura de uma biela	[m]
$b$	: Base da seção transversal	[m]

$b_{ef}$	: Largura efetiva de uma biela de compressão	[m]
$e$	: Elemento finito	[-]
$f_c'$	: Resistência à compressão específica do concreto	[MPa]
$f_{cd}$	: Resistência de projeto à compressão do concreto	[MPa]
$f_{cd1}$	: Resistência máxima do concreto em bielas ou nós com apenas tensões de compressão	[MPa]
$f_{cd2}$	: Resistência máxima do concreto em bielas ou nós com mais de uma tensão de tração	[MPa]
$f_{cd3}$	: Resistência máxima do concreto para nós com um tirante tracionado	[MPa]
$f_{ck}$	: Resistência característica do concreto à compressão	[MPa]
$f_{ctd}$	: Resistência de projeto à tração do concreto	[MPa]
$f_{ctk}$	: Resistência característica do concreto à tração	[MPa]
$f_{ctm}$	: Resistência média do concreto à tração	[MPa]
$f_{cu}$	: Resistência à compressão efetiva do concreto em uma biela ou nó	[MPa]
$f_y$	: Limite de escoamento do aço à tração	[MPa]
$f_{yd}$	: Limite de escoamento de projeto do aço à tração	[MPa]
$h$	: Comprimento ou altura de descontinuidade a partir de uma região B adjacente	[m]
$i$	: i-ésimo elemento finito	[-]
$l$	: Comprimento longitudinal ou vão livre	[m]
$l_{bd}$	: Comprimento de ancoragem de projeto	[m]
$l_{breq}$	: Comprimento de ancoragem requerido	[m]
$l_i$	: Comprimento de elemento finito	[m]
$m_{OT}$	: Massa do modelo proposto a partir da otimização topológica	[kg]
$m_{STM}$	: Massa do modelo de bielas e tirantes do exemplo analisado	[kg]
$n$	: Número total de elementos finitos	[-]
$p$	: Penalização para <i>compliance</i>	[-]
$q$	: Penalização para tensão	[-]
$r_{min}$	: Raio mínimo para filtro para evitar problema de <i>checkerboard</i>	[m]
$s_{sk}$	: Espaçamento entre barras	[m]
$t$	: Espessura de um elemento	[m]
$tol$	: Tolerância para otimização topológica	[-]

$u$	: Deslocamento horizontal	[m]
$u$	: Deslocamento horizontal	[m]
$v$	: Volume elementar	[m <sup>3</sup> ]
$v$	: Deslocamento vertical	[m]
$w$	: Peso do elemento que compartilha o mesmo nó	[-]
$x_e$	: Variável de projeto	[-]
$x_{lim}$	: Valor limite entre vazio e material	[-]
$x_{min}$	: Valor mínimo da variável discreta	[-]

### Letras gregas maiúsculas

$\Delta$	: Variação	[-]
$\vec{\Phi}$	: Vetor de forças prescritas	[m]

### Letras gregas minúsculas

$\{\varepsilon\}$	: Vetor de deformações	[m]
$\{\sigma\}$	: Vetor do tensor de tensões	[MPa]
$\{\bar{\phi}\}$	: Vetor de forças de corpo por unidade de volume	[kN]
$\alpha$	: Coeficiente de ponderação das ações	[-]
$\alpha_{ct}$	: Parâmetro para redução da resistência em decorrência da ductilidade do concreto	[-]
$\alpha_i^e$	: Número de sensibilidade do elemento	[-]
$\alpha_i^k$	: Número de sensibilidade do elemento na k-ésima iteração	[-]
$\alpha_{v2}$	: Coeficiente de redução da resistência do concreto à compressão	[-]
$\beta$	: Ângulo entre biela e tirante	[°]
$\beta_n$	: Fator redutor da resistência em função das características da zona nodal	[-]
$\beta_s$	: Fator redutor da resistência em função das características da biela	[-]
$\gamma$	: Coeficiente de proporção	[-]
$\gamma_c$	: Coeficiente de minoração da resistência do concreto	[-]
$\gamma_f$	: Coeficiente de ponderação das ações	[-]
$\gamma_n$	: Coeficiente de ajustamento	[-]
$\gamma_{n1}$	: Coeficiente de ajustamento função da ductilidade de uma eventual ruína	[-]

$\gamma_{n2}$	: Coeficiente de ajustamento função da gravidade das consequências de uma eventual ruína	[-]
$\gamma_s$	: Coeficiente de minoração da resistência do aço	[-]
$\gamma_{xy}$	: Distorção do plano $x$ - $y$	[m]
$\delta$	: Deslocamento máximo	[m]
$\varepsilon_{m,i}$	: Deformação média de um elemento finito	[m]
$\varepsilon_{xx}$	: Deformação na direção $x$	[m]
$\varepsilon_{yy}$	: Deformação na direção $y$	[m]
$\eta_1$	: Fator redutor relativo à qualidade da aderência e da posição da barra durante a concretagem	[-]
$\eta_2$	: Fator redutor relativo ao diâmetro da barra	[-]
$\theta$	: Plano principal	[-]
$\nu'$	: Coeficiente de redução da resistência do concreto em função da resistência característica	[-]
$\nu_c$	: Coeficiente de Poisson para o concreto	[-]
$\nu_s$	: Coeficiente de Poisson para o aço	[-]
$\pi_p$	: Energia potencial	[J]
$\pi_p^e$	: Energia potencial elementar	[J]
$\rho$	: Razão entre a área de armadura e a área bruta de concreto	[-]
$\rho_c$	: Densidade do concreto	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_s$	: Densidade do aço	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: Tensões principais	[MPa]
$\sigma_{Ott}$	: Tensão equivalente de Ottosen	[MPa]
$\sigma_{Rd}$	: Tensão resistente de projeto	[MPa]
$\sigma_{Sd}$	: Tensão solicitante de projeto	[MPa]
$\sigma_e^{vm}$	: Tensão equivalente de von Mises elementar	[MPa]
$\sigma_{max}^{vm}$	: Máxima tensão de von Mises	[MPa]
$\sigma_{vM}$	: Tensão equivalente de von Mises	[MPa]
$\sigma_{xx}$	: Tensão cartesiana na direção $x$	[MPa]
$\sigma_{yy}$	: Tensão cartesiana na direção $y$	[MPa]
$\tau_{xy}$	: Tensão de cisalhamento no plano $x$ - $y$	[MPa]
$\phi$	: Diâmetro da barra de aço ou cordoalha de protensão	[-]
$\phi_r$	: Fator de redução da resistencia	[-]

# 1 INTRODUÇÃO

O Método de Bielas e Tirantes ou *Strut and Tie Model* (STM) atualmente é bem difundido na Engenharia de Estruturas, estando presente nas principais normas internacionais, como no Eurocode 2:2004 e no ACI 318:2002, e nacional, como na Norma Brasileira (NBR) 6118:2014 - Projeto de estruturas de concreto – procedimentos, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). O Método tem como base a analogia da treliça de Ritter-Mörsch, foi discutido inicialmente em 1982 no Comité Euro-International du Béton e publicado em 1987 por Schlaich, Schäfer e Jannewein (1987) no PCI Jornal.

Na prática, o método de bielas e tirantes é utilizado para dimensionamento e detalhamento de estruturas com regiões descontínuas de concreto armado. As discontinuidades são áreas onde a hipótese do estado plano de tensões de Bernoulli não é aplicável, ou seja, a teoria clássica de vigas não se aplica. Essas regiões podem ser classificadas em estática e/ou geométrica. A discontinuidade geométrica é vista em regiões como furos, aberturas, diferença de geometria, encontro entre viga e pilar e encontro de pilar com bloco de fundação. Já a discontinuidade do tipo estática, ocorre em regiões onde há cargas concentradas. Consoles, dentes Gerber e vigas altas são tipos de estruturas que apresentam um ou os dois tipos de discontinuidades.

Em um projeto por bielas e tirantes, basicamente o elemento estrutural é dividido entre região B, onde a hipótese de Bernoulli é aceita, e região D, onde ocorre discontinuidade. Na região descontínua, idealiza-se um modelo de treliça com barras tracionadas (tirantes), bielas comprimidas e nós de ligação entre elementos, a partir de um fluxo de carga predeterminado, que vai da carga aplicada aos apoios. Dessa forma, é possível determinar as forças nessas regiões, verificar a segurança da região de concreto à compressão e dimensionar armaduras e/ou cordoalhas de protensão para as regiões sob tração

Contudo, a experiência do engenheiro projetista é importante, pois determinará com mais ou menos facilidade a configuração do modelo treliçado. Nas últimas décadas, o tópico otimização estrutural - otimização topológica, mais especificamente - começou a ser utilizado para determinar, de forma rápida e precisa, o fluxo da carga e, assim, possibilitou minimizar a dependência da experiência do engenheiro nos projetos de bielas e tirantes.

Entretanto, o tema otimização estrutural é muito mais abrangente do que apenas determinar o caminho das cargas para obtenção de um modelo ideal de bielas e tirantes em uma estrutura. Por meio da otimização topológica, que consiste em otimizar uma estrutura a nível das dimensões, tamanho e conectividades, é possível obter uma estrutura leve, econômica e segura atendendo aos parâmetros do Modelo de Bielas e Tirantes.

## 1.1 MOTIVAÇÃO/JUSTIFICATIVA

Revisando o assunto acerca do método de bielas e tirantes notou-se que é necessário que o engenheiro projetista tenha experiência para obter a configuração ideal do modelo treliçado de bielas e tirantes em um elemento estrutural. E ainda assim, para uma mesma estrutura, analisada por diferentes engenheiros, a configuração das bielas e dos tirantes pode variar. A fim de sanar essa lacuna, busca-se uma alternativa para minimizar essa dependência e verifica-se na literatura que a otimização topológica é aplicada para a obtenção do caminho das cargas de forma sistêmica; porém, sem considerar o material concreto armado como um compósito. Com isso, a aplicação dos métodos fica limitada à determinação do caminho da carga apenas. Sendo em seguida, necessário modelar uma treliça composta por bielas de concreto comprimido e tirantes aço tracionado. Neste sentido, considerando a versatilidade da otimização topológica na redução de material e devido ao crescente avanço da tecnologia de impressão 3D, que possibilita a confecção de peças com geometrias complexas, implementa-se uma rotina em Matlab para otimização de estruturas presentes na literatura por meio de otimização topológica, considerando critérios de falha distintos para o concreto e para o aço. E, a fim de validar os resultados, traçam-se comparativos entre os modelos otimizados com os modelos detalhados segundo o método de bielas e tirantes tradicional.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo abordar o tema otimização topológica aplicada ao método de bielas e tirantes como forma de projeto inicial, com o intuito de obter uma estrutura em concreto armado otimamente projetada em termos de rigidez e segurança. Além disso, pretende-se comparar estruturas oriundas do código implementado com estruturas projetadas pelo método de bielas e tirantes presentes na literatura, como vigas altas com e sem abertura. Para alcançar este objetivo é necessário implementar uma rotina que faça a otimização topológica e de verificação das estruturas finais detalhadas.

### 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Adota-se um código em MATLAB proveniente de Huang e Xie (2010) para otimização topológica de estruturas que leva em conta um único tipo de material. Essa rotina é modificada para que a análise leve em conta os dois materiais presentes no concreto armado. Neste trabalho, se prioriza o uso da formulação BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) em relação à outras metodologias como o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) devido a sua simplicidade de implementação, além da facilidade de inclusão de critérios de tensão para a otimização. Critérios de falha distintos foram implementados para o concreto e para o aço. As rotinas foram programadas levando em conta a quantidade de elementos finitos a serem utilizados (geralmente grande para problemas de otimização topológica) e prever sistemas de resolução de equações compatíveis com a esparsidade do problema. A busca na literatura de outros exemplos semelhantes de otimização topológica para concreto armado também é realizada, com o objetivo de validar o algoritmo desenvolvido.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em 9 capítulos dos quais o Capítulo 1 contempla os motivos que levaram a escrita deste trabalho, bem como os objetivos atingidos, metodologia aplicada e organização do trabalho.

Uma breve revisão da abordagem sobre otimização estrutural é realizada no Capítulo 2, a fim de introduzir acerca da otimização topológica aplicada às estruturas de concreto armado. Posteriormente, é realizada uma revisão acerca do método tradicional de bielas e tirante para dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado, incluindo as prescrições da NBR 6118:2014, Eurocode 2:2004 e ACI 318:2002.

No Capítulo 3, dito Fundamentação Teórica, é abordado sobre a formulação em elementos finitos utilizada nas implementações e sobre os conceitos da otimização topológica. É apresentado o método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) precursor do método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*), que por sua vez é utilizado nas otimizações das estruturas estudadas, bem como as ferramentas essenciais para otimização estrutural.

Os critérios de falha de Ottosen e de von Mises utilizados para representar a falha dos materiais

concreto e o aço, respectivamente, com base em suas tensões e limites resistentes são apresentados no Capítulo 4.

No Capítulo 5 é apresentado o processo de otimização estrutural aplicada às estruturas. É descrita a 1ª fase de otimização, que representa a otimização topológica de concreto; a 2ª fase, que representa a introdução de elementos de aço à estrutura; e apresentado um fluxograma explicativo da abordagem BESO, com as adaptações acrescentadas ao método para lidar com a otimização de concreto e aço em uma mesma análise.

No Capítulo 6 é explicado sobre a abordagem de discretização e homogeneização dos elementos de aço para representar barras de aço inseridas ao concreto, como ocorre em estruturas reais. Tal abordagem necessária devida à densidade de aço retornada pelo programa de otimização. Posteriormente, é explicada sobre a obtenção das tensões e deslocamentos que ocorrem nas estruturas com barras discretas homogeneizadas.

Os exemplos analisados são apresentados no Capítulo 7. É apresentado, inicialmente, uma viga alta dimensionada por Goodchild et al. (2014) segundo o Eurocode 02:2004. E posteriormente, uma viga alta com abertura e descontinuidade geométrica dimensionada por Novak e Sprenger (2002) segundo o ACI 318:2002. Neste capítulo, são apresentadas todas as etapas de cada normativa até o detalhamento final da estrutura seguindo a metodologia tradicional do Método das Bielas e Tirantes.

No Capítulo 8 são apresentados os processos de otimização das estruturas detalhadas segundo o Eurocode 02:2004 e o ACI 318:2002 utilizando os códigos aqui desenvolvidos neste trabalho. Neste capítulo, são apresentados os parâmetros de otimização de cada estrutura, os resultados das otimizações e as estruturas detalhadas segundo a otimização estrutural. Em um segundo momento, são apresentados os comparativos entre tensões e flechas das estruturas projetadas no Capítulo 7 e com as estruturas otimizadas neste capítulo; e também, comparativos simplificados de volumes, massas e custos.

Por fim, no Capítulo 9 são feitas as conclusões acerca dos resultados obtidos e comparativos realizados. São apresentadas também algumas sugestões relevantes para trabalhos futuros, a partir de todo estudo aqui estabelecido, e que poderão acrescentar melhorias à esta pesquisa.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada a revisão bibliográfica sobre otimização estrutural, otimização topológica aplicada a estruturas de concreto armado e sobre o Método de Bielas e Tirantes. Tendo em vista a infinidade de publicações sobre esses assuntos, apresentam-se neste capítulo os pontos mais relevantes sobre os temas ao longo dos anos.

### 2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Huang e Xie (2010) afirmam que o conceito de otimização estrutural vai ao encontro da conscientização ambiental, recursos materiais limitados e à competição tecnológica, colocando o engenheiro em um panorama em que o projeto ideal se torna cada vez mais importante. Para o engenheiro estrutural, projetar estruturas leves, de baixo custo e de alto desempenho (uso mais racional dos materiais) é extremamente desafiador. A otimização estrutural busca alcançar o melhor desempenho para uma estrutura enquanto satisfaz algumas restrições, como uma determinada quantidade de material, mantendo a funcionalidade e segurança estrutural.

A otimização estrutural passou do panorama de interesse do meio acadêmico apenas, para o estágio em que se encontra: onde um número crescente de engenheiros e arquitetos experimentam e se beneficiam das técnicas de otimização, como abordam Huang e Xie (2010). Isso também, devido à disponibilidade de computadores de alta velocidade e devido às melhorias nos algoritmos utilizados para otimização de projetos. Têm havido cada vez mais atividades de pesquisa e desenvolvimento voltadas para tornar os algoritmos de otimização estrutural e pacotes de softwares disponíveis confiáveis e eficientes.

Historicamente, a busca por projetos seguros e econômicos datam desde Maxwell (1904), o qual mostrou em sua publicação “*The Limits of Economy of Material in Frame-structures*” a viabilidade de treliças otimizadas visando a economia de material. Em suma, Maxwell (1904) estudou a quantidade e volume mínimos de materiais que uma treliça precisa ter para suportar um dado sistema de forças (e tensões) aplicadas em seus tirantes e bielas. Dessa forma, se obteria uma treliça com menor volume de material, menor deslocamento e mais econômica, devido à redução do peso próprio. Dando início, dessa forma, ao que se conhece como otimização estrutural.

Conforme Bendsøe e Sigmund (2003), otimização estrutural é classificada em três tipos de categorias, conforme Figura 1: paramétrica (a), de forma (b) e de topologia (c).

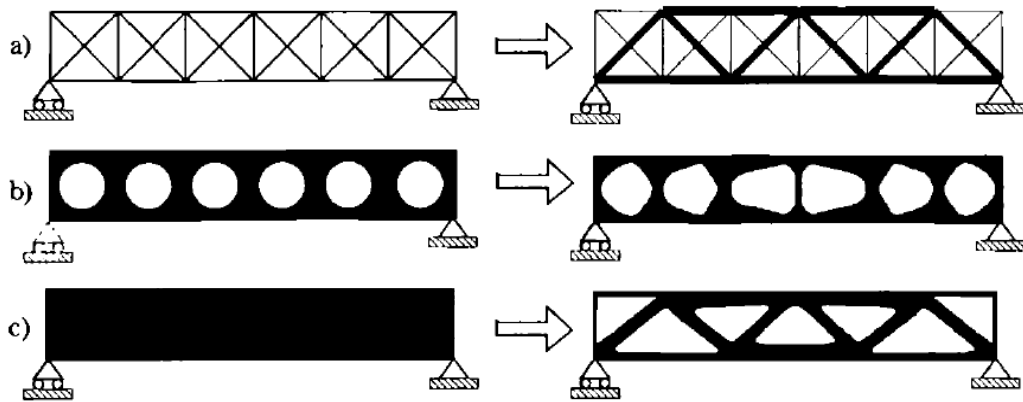


Figura 1 – Tipos de otimização estrutural (Bendsøe e Sigmund, 2003)

- a) A otimização paramétrica consiste em encontrar o projeto ideal alterando as variáveis de tamanho, como as dimensões da seção transversal e comprimentos de treliças e pórticos ou a espessura das placas. Essa é a abordagem mais fácil e inicial para melhorar o desempenho estrutural.
- b) A otimização de forma, é realizada principalmente em estruturas contínuas, modificando os limites físicos predeterminedos para obter as configurações ideais. Neste caso não é previsto a possibilidade de criação de novas regiões de material ou retirada dos mesmos, apenas é permitido variar a forma final.
- c) A otimização da topologia para estruturas discretas, como treliças e pórticos, é buscar a ordem espacial ideal, a conectividade das barras, partindo-se das múltiplas possibilidades disponíveis. A otimização topológica de estruturas contínuas é encontrar os projetos ideais, determinando os melhores locais e geometrias de alocação do material e de cavidades em um domínio do projeto previamente definido.

## 2.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Como abordam Bendsøe e Sigmund (2003), em problemas de otimização topológica o tamanho, a forma e conectividades da estrutura são desconhecidos, sendo o objetivo da abordagem encontrar a topologia ideal de uma estrutura dentro de um domínio de projeto específico. As únicas grandezas conhecidas no problema são as cargas aplicadas, as possíveis condições de

apoio, o volume da estrutura a ser construída e possivelmente algumas restrições adicionais de projeto, como a localização e o tamanho dos furos prescritos ou áreas sólidas.

O início do tema, por assim dizer, ocorre por Kumar (1978), o qual aplicou simplificadaamente uma metodologia de barras de treliças otimizadas para a obtenção do caminho das cargas em peças de vigas altas de concreto armado. A aplicação dos conceitos de otimização topológica voltado para estruturas de concreto armado utilizando elementos finitos em estado plano de tensões ocorreu por Bendsøe e Kikuchi (1988), que tratavam do problema de geração de topologias ótimas no projeto estrutural usando um método de homogeneização para estruturas em estado plano.

Desde então, surgiram centenas de publicações, tendo como resultado vários métodos numéricos de otimização topológica que atingiram o estágio de aplicações práticas, incluindo o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), o método ESO (*Evolutionary Topology Optimization*) e o método BESO (*Bidirectional Evolutionary Topology Optimization*). E vários livros foram publicados, como os livros de Bendsøe (1995), Xie e Steven (1997), Hassani e Hinton (1999), Bendsøe e Sigmund (2003) e Huang e Xie (2010).

A tradução do termo SIMP tem com significado Material Isotrópico Sólido com Penalização e a ideia original do método foi proposta por Bendsøe (1989). O método ESO (Otimização Estrutural Evolutiva), que é um método de projeto baseado no conceito simples de remover gradualmente material ineficiente de uma estrutura, foi iniciado por Xie e Steven (1992). Já o BESO, que significa Otimização Estrutural Evolutiva Bidirecional, no qual o material é removido e adicionado simultaneamente em uma estrutura, foi inicialmente pesquisado por Yang et al. (1999).

Chu et al. (1996) apresentam o método ESO para restrições de rigidez com a finalidade de reproduzir muitas soluções de otimização topológica estruturais, anteriormente obtidas por outros métodos matematicamente muito mais complicados, como a abordagem de Michell (1904), por exemplo. Essas formas ideais resultaram em reduções de volume significativas. A otimização estrutural usando o método ESO pode ser alcançada simplesmente executando a análise de elementos finitos padrão repetidamente, com cálculo adicional dos números de sensibilidade. Foram apresentados os conceitos de números de sensibilidade e taxa de remoção para vários tipos de problemas de otimização, incluindo aqueles com múltiplos casos de carga e múltiplas restrições de deslocamento.

Com uma formulação baseada em ESO e elementos finitos planos, o trabalho de Liang et al. (1999) é um dos pioneiros aplicado a peças de concreto armado com não linearidades geométricas e estática. Nesse trabalho, a metodologia é empregada para a geração de modelos de bielas e tirantes em estruturas de vigas altas e consoles de concreto. Basicamente é feita a retirada de elementos discretos do modelo que não contribuem para a rigidez da estrutura através de índices de sensibilidade e realizado o monitoramento do processo de otimização e medição da eficiência do material por meio de índice de desempenho. Ao final, os autores constatam que o método ESO é capaz de gerar modelos confiáveis de bielas e tirantes que têm suporte em soluções analíticas, evidências experimentais e que pode ser uma ferramenta de grande valia para o projetista estrutural definir o caminho real da carga em estruturas de concreto armado com geometria e condições de carregamento complexos, mesmo sem experiência prévia.

Liang et al. (2000) ampliaram as pesquisas sobre o método ESO, em que a otimização topológica ocorre a partir da retirada dos elementos de menor energia de deformação com objetivo de gerar estruturas com menor massa e com restrições de deslocamentos aceitáveis. Todas as análises são feitas com as hipóteses de materiais elásticos lineares. Cinco exemplos são analisados pelos autores, sendo eles: viga alta com duas cargas concentradas na parte inferior; viga alta com aberturas; viga alta com abertura em posição diferente; vigas sem abertura e com variação da altura; e consoles. Os autores concluíram que o método é mais apropriado para encontrar modelos ótimos de bielas e tirantes em elementos de concreto com relação vão-altura  $l/h \leq 5$ . Em vigas muito esbeltas, o modelo de bielas e tirantes é difícil de ser identificado. Em viga alta carregada na parte inferior, deve haver reforço vertical e inclinado para transferir o carregamento para a região em compressão. Para abertura localizada no caminho natural do carregamento, esse deve ser redirecionado ao redor da abertura. Para vigas com relação  $l/h \geq 3$ , armaduras inclinadas oferecem mais resistência ao cisalhamento para a viga. E por fim, elementos de consoles em pilares devem ser considerados como uma única peça no desenvolvimento do modelo de bielas e tirantes.

Um modelo de barras de treliças foi implementado juntamente com o método ESO para a otimização topológica de estruturas planas por Kwak e Noh (2006), com o objetivo de servir como modelos de bielas e tirantes de estruturas de concreto armado. A ideia passa por gerar barras que formem elementos básicos, chamados de células (compostas por 6 barras formando uma treliça estável), e utilizar estas células como parâmetros a serem retirados das estruturas

completa baseando-se nas menores energias de deformação. Estes autores chegam à conclusão que o procedimento utilizando as barras, ao invés de elementos planos, é mais eficiente (em termos de tempo computacional) e menos sensível a problemas de tamanho de malha que os métodos clássicos com elementos planos, resultando em estruturas com peças que não sofrem flexão e distribuem o fluxo dos esforços sem muitas distorções. Exemplos clássicos de viga alta com abertura, console em pilar, viga simplesmente apoiada e carga concentrada são testados e comparados com resultados da literatura indicando bons resultados alcançados.

O conceito de densidade artificial via método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) é utilizado em Pantoja, Vaz e Martha (2009), com otimização topológica via método MMA (*Method of Moving Asymptotes*) conjuntamente com o Método dos Elementos Finitos (MEF), para determinar um caminho ótimo das cargas em vigas altas. Assim como em Liang et al. (1999, 2000), é realizada a remoção gradual de material em regiões que pouco contribuem para a rigidez da estrutura, com base nas densidades artificiais de cada elemento e suas correspondentes sensibilidades. As análises são feitas com e sem elementos indutores, onde é realizada a modelagem fixando as densidades dos elementos, o que pode proporcionar uma interação maior entre o projetista e o software, resultando em uma possível melhora do número e dos tipos de caminhos de cargas de acordo com a experiência do projetista.

Qiu e Liu (2011) compararam 3 algoritmos de otimização do tipo GESO (*Genetic Evolutionary Structural Optimization*) para construção de modelos de bielas e tirantes em vigas altas em conjunto com o MEF. No primeiro método o concreto e o aço foram modelados separadamente por um elemento plano e um elemento de barra, respectivamente. No segundo, o concreto e o aço foram atribuídos a dois elementos planos distintos. E no terceiro, por um elemento plano sem considerar a diferença entre os materiais. Verificou-se que os três métodos são eficientes para gerar modelos de bielas e tirantes, sendo o terceiro capaz de encontrar resultados ótimos com menos esforço computacional.

No artigo de Victoria, Querin e Martí (2011) é utilizado o método ITD (*Isolines Topology Design*) a partir de três exemplos de aplicação levando em consideração a diferença das propriedades mecânicas do concreto e do aço nas regiões de compressão e tração. Os exemplos utilizados são console curto simples, viga alta com abertura e o encontro de duas vigas com um pilar. Nesse trabalho é visto que a otimização por meio desse método fornece a localização exata do reforço sem a necessidade de interpretar a topologia resultante. A configuração dos tirantes na região de tração é diferente do método tradicional, que utiliza o mesmo material para

estrutura como todo. E por fim, é necessário menos reforço de aço com a utilização do método.

Rozvany e Maute (2011) objetivam verificar a validade, precisão e convergência de métodos de otimização topológica baseados em MEF, por meio de análise de vigas baseada na confiabilidade. O problema foi resolvido analiticamente usando uma extensão da teoria de forma ideal e a solução foi verificada numericamente por uma abordagem de confiabilidade de primeira ordem (FORM), combinada com um método de distribuição de material (SIMP). A solução foi confirmada pela otimização baseada na confiabilidade, assumindo uma topologia de treliça de duas barras. Os resultados analíticos foram estreitamente associados aos resultados de otimização da topologia com base na distribuição de material (SIMP).

Santos, Almeida e Pantoja (2013) abordam uma análise de confiabilidade de modelos de bielas e tirantes via otimização topológica e método tradicional. Para isso, são realizadas três aplicações com metodologias distintas considerando: análise limite, análise de confiabilidade e análise de confiabilidade associada à análise limite. Na primeira aplicação analisou-se o elemento estrutural pelo método tradicional e com elementos indutores. Foram avaliados elementos com módulos de elasticidade diferentes nas regiões de tração e compressão; na segunda, foi utilizado critério de escolha de modelos baseado em análise de confiabilidade com análise limite; por fim, a terceira aplicação apresentou a análise de confiabilidade com análise limite do modelo da primeira aplicação. Verificou-se que, para todas aplicações, o modelo gerado via otimização topológica apresentou desempenho superior ao método tradicional.

Em Almeida, Simonetti e Oliveira Neto (2013) são apresentadas técnicas numéricas para identificar regiões de tensões que representam os elementos de bielas e tirantes quantificando seus respectivos esforços. Os problemas de estado plano de tensões, considerando o modelo elástico-linear, são analisados utilizando o modelo de bielas e tirantes acoplado ao método clássico ESO e uma nova variante SESO (*Smoothing Evolutionary Topology Optimization*) conjuntamente com o MEF. A priori, é definido um domínio inicial estendido e por meio de processo iterativo, elementos sob menores tensões e que menos contribuem para rigidez da peça são removidos suavemente até que não apresentem mais influência na estrutura e reste apenas as bielas e tirantes. A vantagem do método SESO é que ele não apresenta o problema de “tabuleiro”, como o método ESO. O problema de tabuleiro ocorre quando a malha de elementos finitos apresenta elementos vazios e cheios alternados, em uma dada região na qual é mais favorável o padrão do que uma região uniforme.

Uma metodologia baseada em BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) foi utilizada por Hardjasaputra (2015) para testar o projeto de estruturas de bielas e tirantes em vigas de concreto armado com aberturas pequenas, médias e grandes e demonstraram que as soluções obtidas por otimização topológica bidimensional em estado plano de tensões elástico-linear podem sim serem utilizadas como ponto inicial do projeto de modelos de treliças de bielas e tirantes. O autor concluiu que a metodologia BESO pode acelerar o processo da escolha do modelo de bielas e tirantes. Além do mais, a solução obtida por esta metodologia apresentou-se melhor, em termos de rigidez, que aquelas obtidas por apenas conhecimento e suposição do fluxo de esforços na estrutura.

Simonetti et al. (2016) compararam alguns exemplos de estruturas nas quais a configuração ótima já é conhecida por meio dos modelos tradicionais de bielas e tirantes. Além da vantagem em não apresentar o problema de tabuleiro, os autores concluíram que a formulação SESO apresenta robustez, eficiência e precisão para obter configurações ótimas e os esforços, relatados por outros autores. Por fim, os autores propõem a utilização do método em problemas mais complexos como não linearidade e problemas de análise dinâmica, principalmente devido à qualidade alcançada e o baixo custo computacional.

Greco e Guerra (2017) apresentam a aplicação do modelo de bielas e tirantes para elementos estruturais não lineares, juntamente com métodos SESO. Em relação às análises comparativas entre os resultados obtidos para o comportamento linear e não linear do material, os autores afirmam que as soluções apresentaram certas diferenças na topologia ótima para os exemplos abordados com isso, conclui-se que o posicionamento da armadura pode ser diferente para o caso não linear.

Tavares e Canha (2018, 2019) realizaram modelagens numéricas utilizando o Método de Otimização Topológica com a formulação em que o domínio a ser otimizado é discretizado por uma malha de barras interconectadas, o que na literatura internacional é chamado de Método do *Ground Structure*. O programa utilizado foi desenvolvido em linguagem MATLAB por Ramos & Paulino (2016), e adaptado para considerar o custo nodal, que está relacionado com um volume fictício para os nós que permite simplificar a topologia final da estrutura.

Uma metodologia de extração dos modelos de treliças de forma automática e sem intervenção manual a partir dos resultados de otimização topológica é proposta por Xia, Langelaar e Hendriks (2020a, 2020b, 2020c). Em seus trabalhos são feitas avaliações críticas sobre a

adequação dos resultados de uma otimização topológica contínua como ponto de partida para o projeto de estruturas de bielas e tirantes de modelos planos e tridimensionais, considerando a não linearidade física do material. São avaliados os resultados de diversos exemplos da literatura (utilizando métodos ESO, SIMP, Isoline e Full-homogeneous) de modelos de bielas e tirantes com os resultados obtidos com a metodologia de extração dos modelos de treliça. Na maioria dos casos os resultados mostraram bom desempenho, medido a partir de índices propostos que avaliam os graus de exequibilidade e economicidade da treliça resultante da otimização, gerando estruturas economicamente viáveis e inclusive identificando estruturas de treliças não viáveis em algumas das análises. Os autores reportam que não perceberam melhorias de um modelo de otimização topológica simples para outros mais sofisticados nos resultados dos modelos de bielas e tirantes obtidos.

Novotny, Lopes e Santos (2021), com base na publicação de Bruyneel e Duysinx (2005), observaram que a formulação padrão baseada na minimização da conformidade sob restrição de volume torna-se inadequada quando a carga de peso próprio é dominante. Os autores, introduziram um termo de regularização para o problema de minimização baseado em conformidade que permite impor qualquer restrição de volume viável, levando a resultados satisfatórios, evitando soluções triviais e problemas de convergência. A eficácia da abordagem proposta na solução de um problema de otimização de topologia estrutural sob carga própria foi demonstrada por meio da aplicação de vários experimentos numéricos.

Tauzowski, Blachowski e Lógó (2021) propuseram um método para a otimização da topologia com restrição de tensão baseada na confiabilidade, para estruturas com material elasto-plástico perfeito. Os autores frisam que o processo de determinação da topologia ótima de estruturas com material elasto-plástico perfeito está associado à remoção de material da estrutura, mas, ao mesmo tempo, ocorre o aumento da probabilidade de falha estrutural, devida ao enfraquecimento da resistência e rigidez. A metodologia proposta consiste na junção de dois problemas de otimização para otimização de estruturas. O primeiro é baseado em um algoritmo heurístico sob critério de tensão para redução de volume. E o segundo, utiliza o método FORM, que é responsável pelo cálculo do índice de confiabilidade. Para demonstrar a eficácia da metodologia proposta, três exemplos numéricos foram analisados com base em Rozvany e Maute (2011). Os resultados obtidos pela metodologia proposta foram considerados de acordo com a solução analítica e fornecem topologias ótimas comparáveis às obtidas por outros métodos.



Em seu livro, Huang e Xie (2010) afirmam que algumas das diferentes versões dos algoritmos ESO/BESO, propostas por muitos pesquisadores nas últimas duas décadas, não são confiáveis e são ineficientes. Com isso, os autores propõem uma discussão abrangente e sistemática sobre as técnicas mais recentes e procedimentos adequados para os métodos, em particular o método BESO, para a otimização da topologia de estruturas contínuas. E para isso propõem solucionar uma ampla gama de problemas de projeto estrutural, incluindo rigidez e otimização de frequência, material não linear, grande deformação, absorção de energia, materiais múltiplos, restrições múltiplas, estruturas periódicas e assim por diante.

## 2.3 MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES

O Método de Bielas e Tirantes, proposto por Schlaich et al. (1987), faz com que a estrutura seja projetada de acordo com o teorema do limite inferior da teoria da plasticidade (esforços internos e externos em equilíbrio e não excedendo os valores últimos). Em outras palavras, a estrutura é projetada no Estado Limite Último (ELU). Entretanto, como o concreto e o aço têm deformações plásticas limitadas, o modelo tem de ser escolhido de forma que a capacidade de deformação não seja excedida em nenhum ponto da estrutura. Para regiões com tensões elevadas, a utilização da reserva de resistência do material é otimizada se forem colocadas as bielas e os tirantes nas direções das tensões principais (conforme a teoria da elasticidade) e os elementos sejam adequadamente dimensionados para atenderem a esses esforços. Para regiões com tensões médias e baixas, essas direções podem se afastar mais das direções das tensões principais, de acordo com as necessidades práticas.

### 2.3.1 Regiões B e D

Como visto no Capítulo 1, a hipótese de Bernoulli na qual afirma que uma seção plana permanece plana após deformação se aplica a uma gama de problemas em que o comportamento estrutural é bem definido. Como citam Schlaich et al. (1987), “*a distribuição linear de deformações é conhecida e as estruturas são projetadas com uma grande precisão*”. Nessas regiões, denominadas de B, o estado interno de tensões é facilmente obtido a partir dos esforços seccionais (i.e., da seção transversal) como os momentos fletor e torsor e os esforços cortante e normal. Já nas regiões D, com distribuição de deformações não lineares, a aplicação da hipótese de Bernoulli pode ser considerada inadequada. Nessas regiões, ocorrem as descontinuidades do tipo estática e/ou geométrica, como já visto, e para elas pode ser utilizada a generalização da

analogia de treliça, que remete ao método de bielas e tirantes.

Conforme Schlaich et al. (1987), não é necessária muita precisão para dividir a estrutura em regiões B e D. Admite-se que a região D se estende de uma distância  $h$  para cada lado da descontinuidade, onde  $h$  é igual a altura da região B adjacente. As Figuras 2 e 3 apresentam as regiões D (área hachurada) de algumas estruturas típicas, segundo os autores. A Figura 2 apresenta a região D de estruturas com descontinuidade geométrica e a Figura 3, de estruturas com descontinuidade estática.

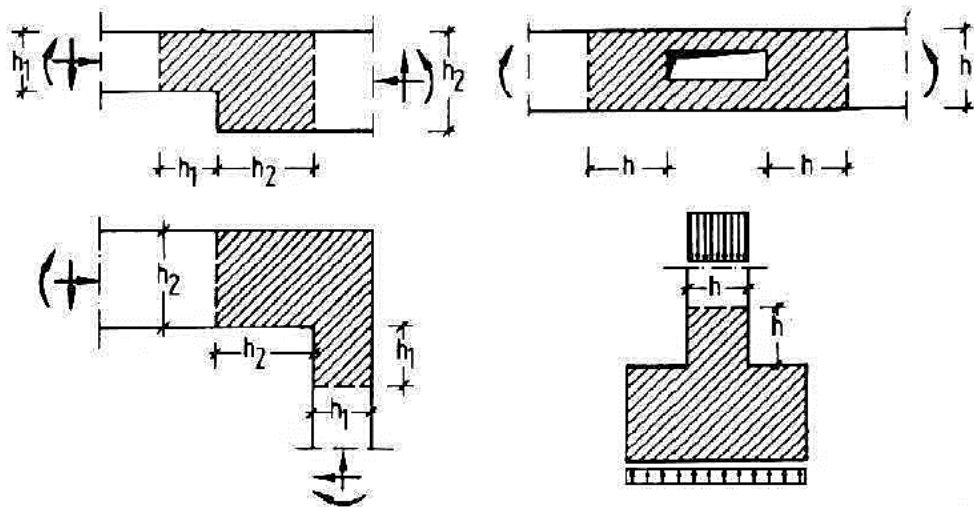


Figura 2 – Regiões D (hachura) de estruturas com descontinuidades geométricas (Schlaich et al., 1987)

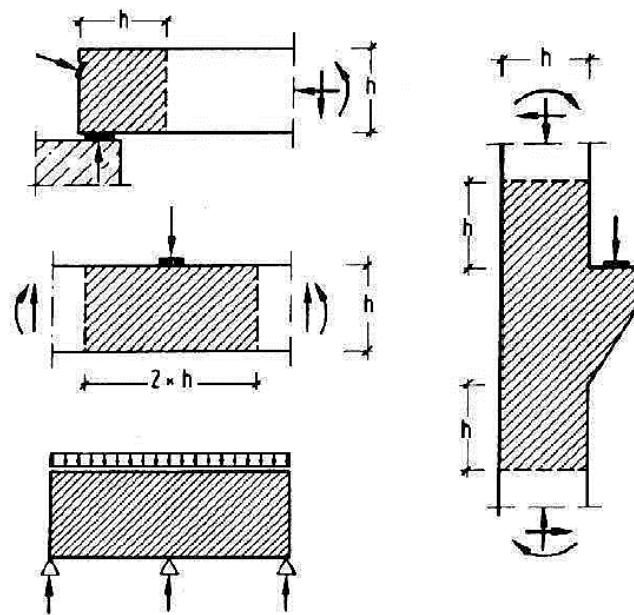


Figura 3 – Regiões D (hachura) de estruturas com descontinuidades estáticas (Schlaich et al., 1987)

### 2.3.2 Caminho da carga (*load path*) e modelo treliçado

A partir da divisão da estrutura em regiões B e D, traça-se o caminho que a carga percorre na estrutura do ponto de aplicação da carga até os seus apoios; na literatura, o termo caminho da carga também é conhecido por fluxo de tensão, uma vez que a partir do caminho da carga pode-se conhecer o fluxo de tensão de tração ou compressão que ocorre na estrutura.

O processo consiste em primeiro lugar garantir que o equilíbrio externo da região D seja satisfeito pela determinação de todas as cargas e reações que ali atuam. Em um limite adjacente, as cargas na região D são retiradas do projeto da região B, assumindo, por exemplo, uma distribuição linear de tensões. Todas as forças aplicadas nos contornos da região D são subdivididas de tal forma que as resultantes individuais de tensões nos lados opostos das regiões D tenham a mesma intensidade e possam ser ligadas por linhas de fluxo que não se cruzam. Os fluxos de tensões começam e terminam no centro de gravidade dos diagramas de tensões correspondentes e têm, nessas regiões, a direção das cargas ou reações aplicadas. Eles tendem a tomar o caminho mais curto possível entre as cargas e reações. (SCHLAICH et al., 1987)

De forma a exemplificar o exposto no parágrafo anterior, é ilustrada na Figura 4, proposta por Schlaich et al. (1987), uma viga alta (*deep beam*), na qual toda estrutura é considerada descontínua, uma vez que sua altura é menor do que seu comprimento. Neste sentido, os fluxos de tensões vão das cargas equivalentes (A e B) até seus respectivos apoios, sem se cruzarem. As cargas concentradas (A e B) são as resultantes das porções da carga distribuída não uniforme.

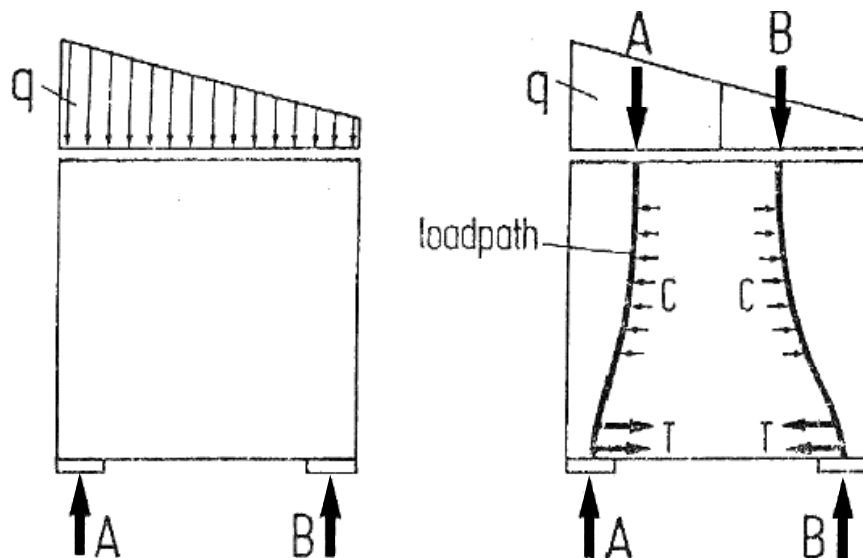


Figura 4 – Caminho da carga de uma viga alta a partir da carga não uniforme  $q$ . (Adaptada de Schlaich et al., 1987).

Vale notar também na Figura 4 os fluxos de tensões, em que C representa o fluxo de tensão de compressão e T representa o fluxo de tensão de tração. Os fluxos de tensões servirão de base para o projeto do modelo treliçado de bielas e tirantes.

O equilíbrio até o momento foi considerado apenas na direção das cargas aplicadas. Após traçar os fluxos de tensões, é necessário substituí-los por polígonos atentando-se para adicionar bielas nas regiões sob força de compressão e tirantes nas regiões sob tração, para o equilíbrio transversal do modelo (Figura 5). Como mostra a Figura 5, as bielas são representadas pelas linhas tracejadas, o tirante pela linha contínua (paralela à borda inferior da estrutura) e os nós interligam esses dois elementos. Uma subseção abordando acerca dos nós é apresentada a seguir, pois sua verificação se faz necessária.

É necessária alguma experiência ou ter a disposição um programa de elementos finitos com análise linear elástica, para auxílio na idealização do modelo, ressalta Schlaich et al. (1987). Os autores afirmam ainda que para modelos de bielas e tirantes deve-se evitar usar ângulos entre os elementos inferiores à  $45^\circ$ , para evitar problemas de incompatibilidade. No entanto, é visto mais a frente que cada normatização possui suas prescrições diferentes.

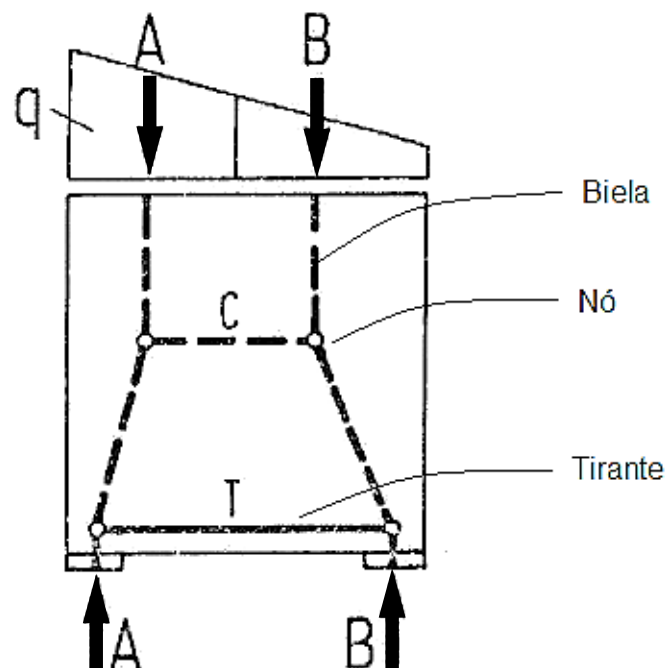


Figura 5 – Modelo treliçado de bielas e tirantes a partir do caminho das cargas (Adaptada de Schlaich et al., 1987).

Vale destacar que qualquer modelo é aceitável desde que atenda as condições de equilíbrio,

esteja de acordo com a teoria da elasticidade e resulte em um projeto prático, sem reforços inclinados. Por consequência, a melhor solução é aquela em que o fluxo de tensões seja o mais curto possível, preferindo bielas a tirantes, devido as bielas serem mais rígidas do que os tirantes. Dessa forma, o modelo que contém menos tirantes, em relação às bielas, e esses tirantes são mais curtos, é o modelo mais adequado. A seguir, na Figura 6, é apresentado um modelo bom (a) e outro ruim (b) de bielas e tirantes para uma viga alta, segundo Schlaich et al. (1987).

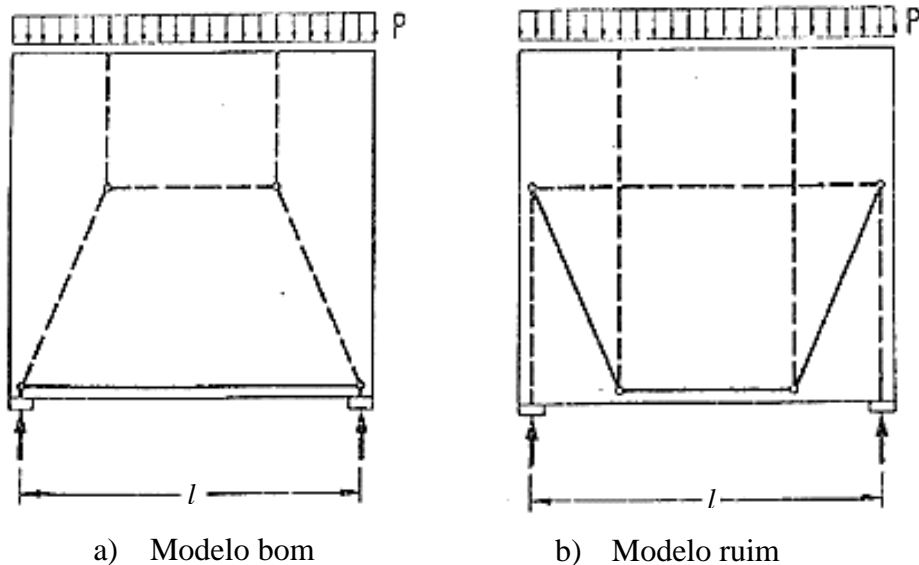


Figura 6 – Modelo bom e ruim de bielas e tirantes segundo Schlaich et al., 1987 (Schlaich et al., 1987)

Um simples critério para escolha do modelo ótimo pode ser expresso pela energia de deformação mínima, para comportamento elástico linear das bielas e tirantes da forma:

$$\text{Minimização de } W_{\text{int}} = \sum P_i l_i \varepsilon_{m,i} \quad (2.1)$$

sendo  $P_i$  a força atuante no elemento  $i$  de biela ou tirante,  $l_i$  o comprimento do elemento e  $\varepsilon_{m,i}$  deformação média do elemento.

Segundo Schlaich et al. (1987) deve ser entendido que não há soluções únicas ou ótimas absolutas. Substituir um conjunto contínuo de curvas suaves por linhas poligonais individuais é uma aproximação em si e deixa amplo espaço para decisões subjetivas. Além disso, a escolha individual, assim como o tamanho da região a ser modelada e/ou a configuração do reforço dos tirantes na treliça, é sempre diferente. Os autores sugerem que o modelo de bielas e tirante inicialmente escolhido seja verificado para constatar sua validade após o detalhamento ou se precisa de correções. Assim, modelar e dimensionar é, em princípio, um processo iterativo,

segundo os autores, mas um engenheiro com alguma experiência em modelagem de bielas e tirantes sempre encontrará uma solução satisfatória.

Uma vez estabelecido o modelo de uma região D, os esforços nas bielas e nos tirantes podem ser calculados através do equilíbrio entre forças aplicadas e esforços internos. As bielas, os tirantes e os seus nós são dimensionados ou verificados para suportar os esforços internos, como é visto posteriormente.

Em complemento ao que foi exposto nos parágrafos anteriores a respeito de um bom modelo de bielas e tirantes, Goodchild et al. (2014) colocam que a orientação do modelo de bielas e tirantes pode ser prevista com uma análise elástica de elementos finitos antes da fissuração do concreto. Como é visto mais adiante, as normativas vigentes nacionais e internacionais permitem a análise simplificada por treliças equivalentes e pela análise de elementos finitos elástica linear.

Goodchild et al. (2014) descrevem que a orientação das bielas muda após a fissuração devido à mudança na rigidez, que ocorre à medida que os tirantes são solicitados. A orientação das bielas e dos tirantes permanece razoavelmente constante após a fissuração até que a armadura ceda, após o que ocorre uma nova reorientação à medida que as cargas aumentam até a falha.

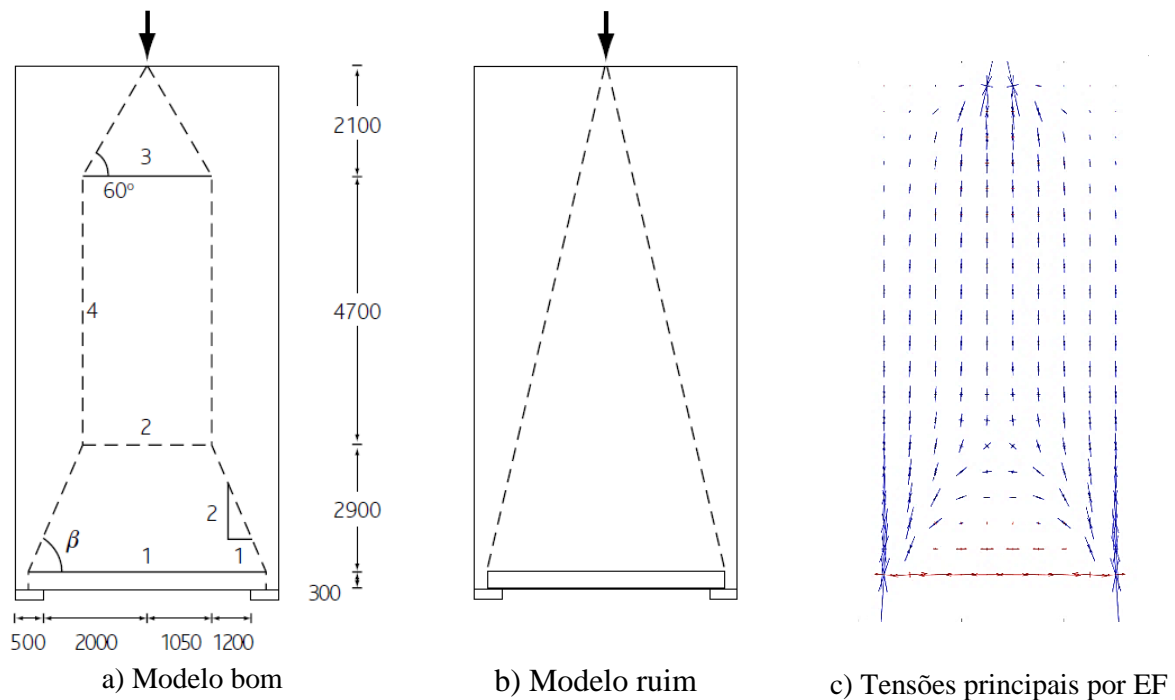


Figura 7 – Modelos de bielas e tirantes a) bom, b) ruim e c) análise de elementos finitos (Adaptada de Goodchild et al., 2014)

Em muitos casos os modelos treliçados aceitáveis podem ser gerados usando uma simples regra de 2:1, ilustrada pela Figura 7a, que fornece resultados semelhantes ao procedimento de elementos finitos elásticos (Figura 7c), ponderam Goodchild et al. (2014). O modelo na Figura 7a é apropriado antes do escoamento do tirante principal. Após o escoamento do tirante, o ângulo  $\beta$  aumenta à medida que a carga aumenta com a geometria do modelo de bielas e tirantes se aproximando daquela demonstrada na Figura 7b na falha.

Teoricamente, os modelos treliçados devem ser projetados no estado limite de serviço (ELS) e no estado limite último (ELU). Na prática, geralmente é suficiente projetar a estrutura no ELU usando um modelo treliçado que seja aceitável no ELS, como o da Figura 7a. O modelo na Figura 7b não é adequado para o ELS, pois só pode se desenvolver quando o tirante principal tiver cedido (e além dos domínios da análise elástica de elementos finitos). Portanto, as aberturas de fissuras seriam excessivas no ELS se o reforço fosse projetado usando bielas e tirantes, como visto na Figura 7b.

### 2.3.3 Campos de tensão

Segundo Schlaich et al. (1987) existem basicamente 3 tipos de bielas e tirantes a serem dimensionados, que são: as bielas de concreto sob compressão,  $C_c$ ; os tirantes de concreto sob tração sem armadura,  $T_c$ ; e os tirantes sob tração com armadura,  $T_s$ . Os elementos  $T_s$  são essencialmente elementos lineares entre dois nós, enquanto  $C_c$  e  $T_c$  são campos de tensão bi ou tridimensionais entre dois nós adjacentes e tendem a formar tensões de tração ou compressão transversal.

Três configurações típicas são suficientes para cobrir todos os casos de campos de compressão,  $C_c$ , (incluindo os que ocorrem nas regiões B), conforme Schlaich et al. (1987). Os campos são os de compressão em forma de leque, de garrafa e de prisma, apresentados respectivamente, na Figura 8.

O campo de tensão em forma de leque (Figura 8a) é uma idealização de um campo de tensões com uma curvatura desprezível. O campo de tensões em forma de garrafa (Figura 8b) apresenta tensões transversais consideráveis: compressão no pescoço da garrafa e tração na base (as tensões transversais podem causar o aparecimento de fissuras longitudinais, indicando a necessidade de armadura). O campo de tensões prismático (Figura 8c) ou paralelo é um caso particular dos dois anteriores e é típico de regiões B.

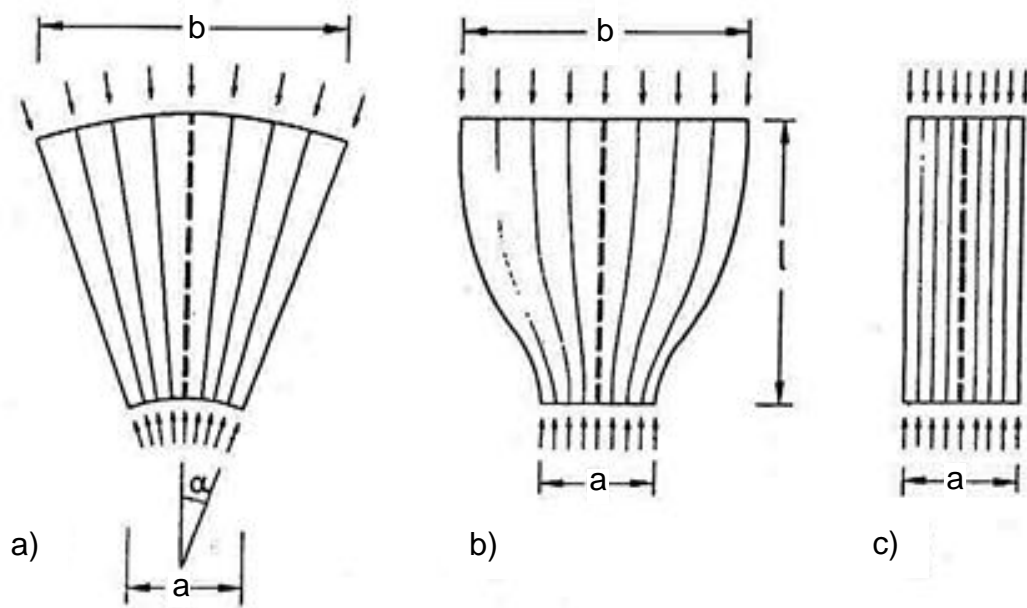


Figura 8 – Campos de tensão a) em forma de leque, b) em forma de garrafa e d) em forma prismática. (Adaptada de Schlaich et al., 1987).

Os campos de tensão em forma de leque e prismático não desenvolvem tensões transversais e em sua verificação utiliza-se a resistência uniaxial de cálculo do concreto. Já para campos de tensão em forma de garrafa, deve ser empregado um critério de ruptura multiaxial. É apresentado, posteriormente, que cada norma atualmente utiliza um critério específico para os campos de tensão, mas baseiam-se no que foi exposto nos parágrafos anteriores.

No caso de campos de tensão de tração de regiões da estrutura não fissuradas,  $T_c$ , a resistência à tração do concreto deve ser utilizada. Usando o fluxo de forças para construção dos modelos de bielas e tirantes, ocorrem situações em que o equilíbrio só pode ser satisfeito, se a resistência do concreto à tração é considerada. De forma geral, nenhuma biela sem armadura ou elemento comprimido pode trabalhar sem usar a resistência à tração do concreto.

Para os tirantes sob tração com armadura,  $T_s$ , o aço de reforço deve ser fornecido para resistir às forças de tração. O eixo da armadura de aço deve coincidir com o eixo do tirante no modelo. O dimensionamento desses tirantes é bastante simples, segue diretamente da seção transversal  $A_s$  (aço de armadura), ou  $A_p$  (cordoalha de protensão) e o limite de escoamento  $f_s$  e  $f_p$ , dos respectivos materiais:

$$T_s = A_s f_s + A_p \Delta f_p \quad (2.2)$$



### 2.3.4 Tipos e classificação dos nós

Schlaich et al. (1987) salientam que o processo de dimensionamento não significa apenas dimensionar e reforçar as bielas e tirantes individuais para as forças que suportam, mas também garantir a transferência de carga entre eles verificando as regiões dos nós. Os autores colocam ainda que existe uma estreita relação entre o detalhamento dos nós com a resistência das bielas e dos tirantes neles ancorados, para a estabilidade final da treliça. Os nós são uma simplificação da realidade, eles aparecem nas interseções de elementos de bielas e tirantes e sua inserção em um modelo se faz necessária para representar uma mudança abrupta na direção das forças.

Para Schlaich et al. (1987) existem essencialmente quatro tipos de nós, dependendo da combinação da biela C e tirantes T, como: nó onde só conflui compressão (nó CCC); onde conflui uma força de tração meio à compressão (nó CCT); onde, em meio à tração, conflui uma força de compressão (nó CTT); e nó onde conflui apenas força de tração (nó TTT). O princípio permanece o mesmo se mais de três bielas e tirantes se encontrarem.

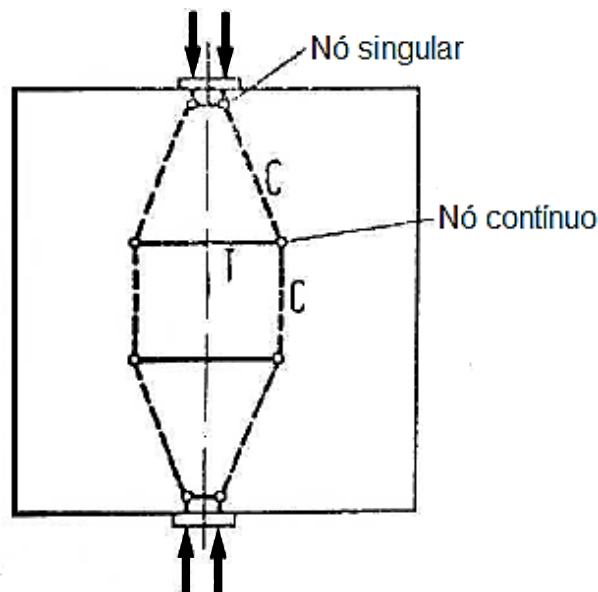


Figura 9 – Nós singular e contínuo em uma região D. (Adaptada de Schlaich et al., 1987).

Além dos tipos de nós, em uma região D conterá nós classificados entre singular (ou concentrados) e contínuo (ou distribuídos), como demonstra a Figura 9. Para nós singulares o desvio das forças ocorre em um comprimento curto ou há uma pequena área em torno do ponto nodal, de modo a formar um campo de tensões concentrado. Os nós singulares são considerados críticos e de indispensável verificação para a segurança da estrutura. Por outro lado, um nó é distribuído quando há uma região maior de concreto em torno do nó ocorrendo melhor

distribuição das tensões.

## 2.4 BIELAS E TIRANTES SEGUNDO A NBR 6118:2014

A NBR 6118:2014, trata o projeto de estruturas pelo método de Bielas e Tirantes como especial, tendo suas prescrições na seção 22. O processo e definições são semelhantes aos dos modelos de bielas e tirantes descrito anteriormente, diferindo-se apenas os critérios de verificação dos campos de tensão e nós. A seção 22.2 da norma apresenta casos típicos de regiões D de algumas estruturas correntes na engenharia estrutural. A Figura 10, retirada da NBR 6118:2014, contém, à esquerda, estruturas com descontinuidade do tipo geométrica (a); ao centro, estruturas com descontinuidade estática (b); e, à da direita, estruturas com os dois tipos de descontinuidades (c).

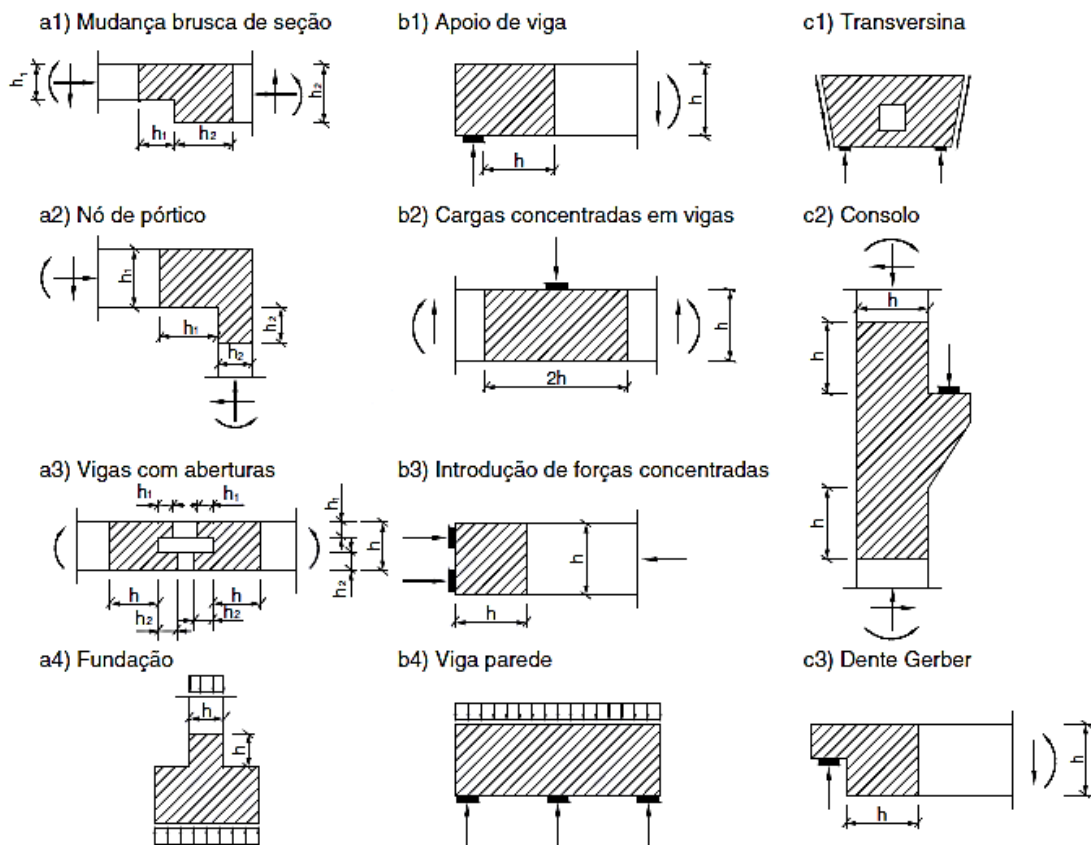


Figura 10 – Regiões D (hachura) de estruturas típicas segundo a NBR 6118:2014. (NBR 6118:2014)

Vele notar que a Figura 10 apresenta 2 tipos a mais de estruturas com descontinuidade estática e geométrica, se comparada às Figuras 2 e 3 do método tradicional, quais sejam: transversina (c1) e dente Gerber (c3), no entanto o critério de dimensionamento é o mesmo já apresentado.

A Norma admite uma região B entre as regiões D de vigas com aberturas (a3), enquanto que o método tradicional admite toda região em torno do furo com sendo descontínua (Figura 2). A ilustração b3 (Introdução de forças concentradas), que diz respeito à protensão, se assemelha à primeira ilustração da Figura 3 de Schlaich et al. (1987).

A NBR 6118:2014 prescreve a majoração das solicitações de cálculo das regiões D, conforme NBR 8681:2004 - Ações e segurança nas estruturas - procedimento. No item 5.3.3 da NBR 8681:2004, diz que os valores usuais dos coeficientes de ponderação das resistências ou os coeficientes de ponderação das ações de valor  $\gamma_f > 1,0$  devem ser multiplicados pelo coeficiente de ajustamento  $\gamma_n$ , dado pela seguinte expressão:

$$\gamma_n = \gamma_{n1} \cdot \gamma_{n2} \quad (2.3)$$

sendo:

$\gamma_{n1} \leq 1,2$  em função da ductilidade de uma eventual ruína; e

$\gamma_{n2} \leq 1,2$  em função da gravidade das consequências de uma eventual ruína.

Segundo a NBR 6118:2014 é permitida a análise da segurança no estado limite último de um elemento estrutural ou de uma região D, contida nesse elemento. A Norma frisa que os tirantes representam uma armadura ou um conjunto de armaduras concentradas em um único eixo e os nós recebem as forças concentradas aplicadas ao modelo. Em torno dos nós existirá um volume de concreto, designado como zona nodal, onde é verificada a resistência necessária para a transmissão das forças entre as bielas e os tirantes.

A norma cita também que as verificações das bielas, tirantes e nós são efetuadas a partir das forças obtidas na análise da treliça isostática sob a ação do sistema auto equilibrado de forças ativas e reativas na treliça. Os eixos das bielas devem ser escolhidos de maneira a se aproximar o máximo possível das tensões principais de compressão e dos tirantes, dos eixos das armaduras a serem efetivamente detalhadas. As bielas inclinadas devem ter ângulo de inclinação cuja tangente esteja entre 0,57 e 2, ou seja, entre  $29,7^\circ$  e  $63,4^\circ$ , em relação ao eixo da armadura longitudinal do elemento estrutural.

Os parâmetros de resistência de cálculo das bielas e regiões nodais são apresentados no item 22.3.2 da NBR 6118:2014. De forma que, para a verificação de tensões de compressão máximas nas bielas e regiões nodais, deve-se seguir as seguintes prescrições:

$$f_{cd1} = 0,85 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (2.4)$$

$$f_{cd2} = 0,60 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (2.5)$$

$$f_{cd3} = 0,72 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (2.6)$$

sendo:

$f_{cd1}$  a tensão resistente máxima do concreto para regiões com tensões de compressão transversal ou sem tensões de tração transversal e para nós onde confluem somente bielas de compressão (nós CCC);

$f_{cd2}$  para regiões com tensões de tração transversal e para nós onde confluem dois ou mais tirantes tracionados (nós CTT ou TTT); e

$f_{cd3}$  para nós onde conflui um tirante tracionado (nós CCT).

O parâmetro  $\alpha_{v2}$  representa uma redução da resistência do concreto à compressão expresso por:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (2.7)$$

e a resistência de projeto do concreto à compressão,  $f_{cd}$ , é dada por:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.8)$$

em que o  $f_{ck}$  é a resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias de idade, dada em MPa, e  $\gamma_c$  o coeficiente de ponderação da resistência do concreto à compressão para o estado limite último (usualmente 1,4 para combinação normal das ações).

Já os parâmetros de resistência de projeto dos tirantes estão contidos no Item 22.3.3, nos quais se resumem ao cálculo da área de aço, dada por:

$$A_s = F_{Sd} / f_{yd} \quad (2.9)$$

sendo  $F_{Sd}$  o valor de projeto da força de tração determinada no tirante e  $f_{yd}$  a resistência de projeto do aço à tração dada por:

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_s} \quad (2.10)$$

sendo o coeficiente de ponderação da resistência do aço,  $\gamma_s = 1,15$ , para combinação normal das ações.

No item 22.4 da NBR 6118:2014 é discutido acerca de vigas alta, em especial, que são os elementos estruturais estudados neste trabalho. Nos demais itens como nos 22.5, 22.6 e 22.7 são tratados assuntos acerca de consoles/dentes Gerber, sapatas e blocos sobre estacas, respectivamente. Aqui são apresentados os conceitos e critérios de projeto apenas de vigas altas com e sem abertura e com descontinuidade geométrica.

Conceitualmente, a norma considera vigas-parede as vigas altas em que a relação entre o vão e a altura  $l/h$  é inferior a 2 em vigas biapoiadas e inferior a 3 em vigas contínuas. As vigas altas possuem comportamento estrutural de características específicas, se comparadas às vigas usuais, destacando-se a ineficiência à flexão e ao cisalhamento. A NBR 6118:2014 coloca ainda que vigas altas apresentam problemas de estabilidade de corpo rígido e que pode ocorrer problemas de estabilidade elástica. Com isso, muitas vezes são necessários enrijecedores de apoio ou travamentos

Os modelos de cálculo concebidos pelo método de bielas e tirantes para dimensionamento de vigas altas no estado limite último (ELU), devem assegurar um comportamento adequado em serviço, e a geometria das treliças, deve ser tal que os valores das forças nos tirantes resultem o mais próximo possível dos obtidos em um modelo plano elástico linear. Métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, são permitidos para análise elástico lineares e não lineares, conforme a NBR 6118:2014.

Na seção de detalhamento (item 22.4.4) da NBR 6118:2014 é posto que as armaduras de flexão e/ou tirantes devem cobrir toda a zona efetivamente tracionada, conforme o modelo de cálculo adotado, não podendo serem concentrados em uma ou poucas camadas. Em vigas altas biapoiadas os elementos tracionados devem ser distribuídos em altura de  $0,15h$ . A armadura horizontal e vertical mínima deve ser de  $0,00075b$  por metro e por face.

Em relação à ancoragem da armadura de flexão nos apoios a norma especifica em 22.4.4.2 que a armadura deve ser prolongada integralmente até os apoios. Não podem ser usados ganchos no plano vertical, dando preferência a laços ou grampos no plano horizontal, ou dispositivos

especiais.

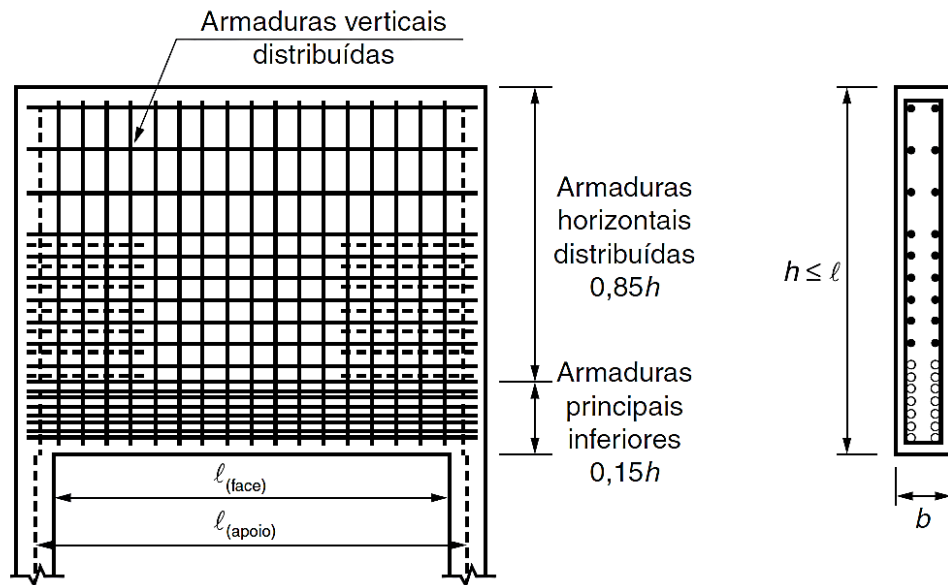


Figura 11 – Esquema de distribuição de armaduras para uma viga alta segundo a NBR 6118:2014 (NBR 6118:2014)

## 2.5 BIELAS E TIRANTES SEGUNDO O EUROCODE 2:2004

O Eurocode 2:2004 faz algumas considerações em sua seção 5.6.4 sobre a análise com modelos de bielas e tirantes. Segundo a norma, os modelos de bielas e tirantes podem ser utilizados para dimensionamento em ELU de regiões de continuidade e para dimensionamento em ELU e detalhamento de regiões de descontinuidade. Assim como em Schlaich et al. (1987) e como visto na NBR 6118:2014, considera-se uma distância  $h$  de descontinuidade nos elementos estruturais e segue a mesma lógica para determinação das regiões B e D e da configuração do modelo treliçado. O Eurocode 2:2004 permite a utilização do método em elementos onde é assumida uma distribuição linear dentro da seção transversal (tensão plana), embora não seja comum de se fazer, como citam Goodchild et al. (2014).

O Eurocode 2:2004 permite também que as verificações em ELU podem ser aplicadas usando modelos de bielas e tirantes, por exemplo, verificação de tensões de aço e controle de abertura de fissura, se for assegurada a compatibilidade aproximada para o modelo de biela e tirante (em particular, a posição e direção de bielas importantes devem ser orientadas de acordo com a teoria da elasticidade linear).

Conforme o Eurocode 2:2004, o ângulo mínimo entre bielas e tirantes é de  $35^\circ$ . As forças nos

elementos de um modelo de biela e tirante devem ser determinadas mantendo o equilíbrio. Os tirantes de um modelo de bielas e tirantes devem coincidir em posição e direção com a armadura correspondente. Os meios possíveis para o desenvolvimento de modelos de bielas e tirantes adequados incluem a adoção de trajetórias e distribuições de tensões da teoria elástica linear ou do método do caminho de carga, como visto em Schlaich et al. (1987). Segundo o Eurocode 2:2004, todos os modelos de bielas e tirantes podem ser otimizados por critérios de energia.

O Item 6.5 o Eurocode 2:2004 prescreve as condições para projeto de estruturas de concreto armado pelo método de bielas e tirantes e considera, de forma geral, sua aplicação em regiões de apoio, cargas concentradas próximas ou região sob tração, por exemplo, considerando o estado de distribuição de tensões não linear.

Nas regiões de concreto sob tensões de compressão transversal (CCC) ou sem tensão transversal, a resistência de projeto da biela sob compressão pode ser calculada pela Equação (2.11) a seguir.

$$\sigma_{Rd} = f_{cd} \quad (2.11)$$

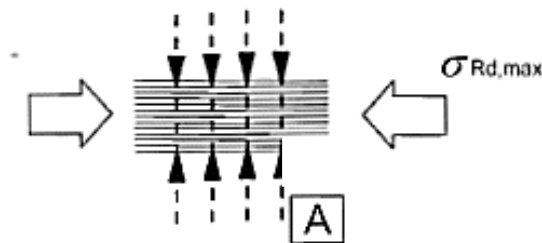


Figura 12 – Regiões CCC (Eurocode 02:2004)

A resistência de projeto para bielas de concreto com tensão de tração transversal (regiões CCT) deve ser reduzida, podendo ser calculada a partir da Equação (2.12).

$$\sigma_{Rd} = 0,6 v' f_{cd} \quad (2.12)$$

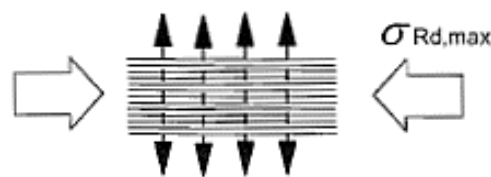


Figura 13 – Regiões CCT (Eurocode 02:2004)

A norma coloca que o valor de  $v'$  pode ser utilizado conforma a norma do País em questão,

sendo recomendada a expressão seguinte:

$$v' = 1 - f_{ck}/250 \quad (2.13)$$

Nota-se na Equação (2.11) que a tensão resistente máxima de cálculo das regiões CCC é igual a resistência de cálculo do concreto à compressão, segundo o Eurocode 02:2004. A norma coloca ainda que pode ser apropriado assumir uma resistência de projeto mais alta em regiões onde existe compressão multiaxial.

As prescrições acerca de tirantes podem ser vistas no item 6.5.3 da norma, a partir do qual se faz o dimensionamento das barras de aço para resistir à força que no tirante atua. Todas características do aço utilizado para as armaduras podem ser vistas nos itens 3.2 e 3.3 do Eurocode 2:2004. Assim como na NBR 6118:2014, a área de aço é dada pela Equação (2.9), sendo a resistência do aço de projeto à tração a mesma determinada na Equação (2.10), com o coeficiente de minoração da resistência do aço,  $\gamma_s$ , também igual à 1,15.

As armaduras principais segundo a norma devem ser adequadamente ancoradas nos nós. A abordagem acerca de ancoragem pode ser vista no item 8.4 Eurocode 2:2004. Segundo a norma, as barras de aço, arames ou telas soldadas devem ser ancorados de modo a que as forças de aderência sejam transmitidas com segurança ao concreto. Dessa forma, o comprimento de ancoragem de projeto,  $l_{bd}$ , em condições ideais de ligação é feito da seguinte forma:

$$l_{bd} = a l_{breq} = a (\phi / 4) (\sigma_{sd} / f_{bd}) \quad (2.14)$$

$$f_{bd} = 2,25 \eta_1 \eta_2 f_{ctd} \quad (2.15)$$

em que  $\eta_1$  é relativo à qualidade da aderência e da posição da barra durante a concretagem, sendo 1,0 para boas condições e 0,7 para condições ruins;  $\eta_2$  relativo ao diâmetro da barra ( $\eta_2 = 1,0$  para  $\phi \leq 32$  mm e  $\eta_2 = (132 - \phi)/100$  para  $\phi > 32$  mm); e  $f_{ctd}$  é a resistência do concreto de projeto à tração, dada por:

$$f_{ctd} = \frac{\alpha_{ct} f_{ctk}}{\gamma_c} \quad (2.16)$$

sendo  $\alpha_{ct}$  um parâmetro para redução da resistência em decorrência da ductilidade do concreto, visto que se trata de concreto armado, não há redução ( $\alpha_{ct} = 1,0$ ) e  $\gamma_c$  o coeficiente de



minoração da resistência concreto, igual a 1,5. E por fim, a resistência característica do concreto à tração pode ser obtida por:

$$f_{ctk} = 0,7 f_{ctm} = 0,21 f_{ck}^{2/3} \quad (2.17)$$

Segundo o Eurocode 2:2004 o reforço necessário para resistir às forças nos nós concentrados e bielas com tensão de tração transversal pode ser espalhado ao longo de um comprimento. Dessa forma, a força de tração transversal,  $T$ , para regiões de descontinuidade parcial ( $b \leq H/2$ , Figura 14a) pode ser obtida por:

$$T = \frac{1}{4} \frac{b-a}{b_{ef}} F \quad (2.18)$$

E para regiões com descontinuidade total ( $b \geq H/2$ ), conforme ilustra a Figura 14b, pode ser determinado por:

$$T = \frac{1}{4} \left( 1 - 0,7 \frac{a}{h} \right) F \quad (2.19)$$

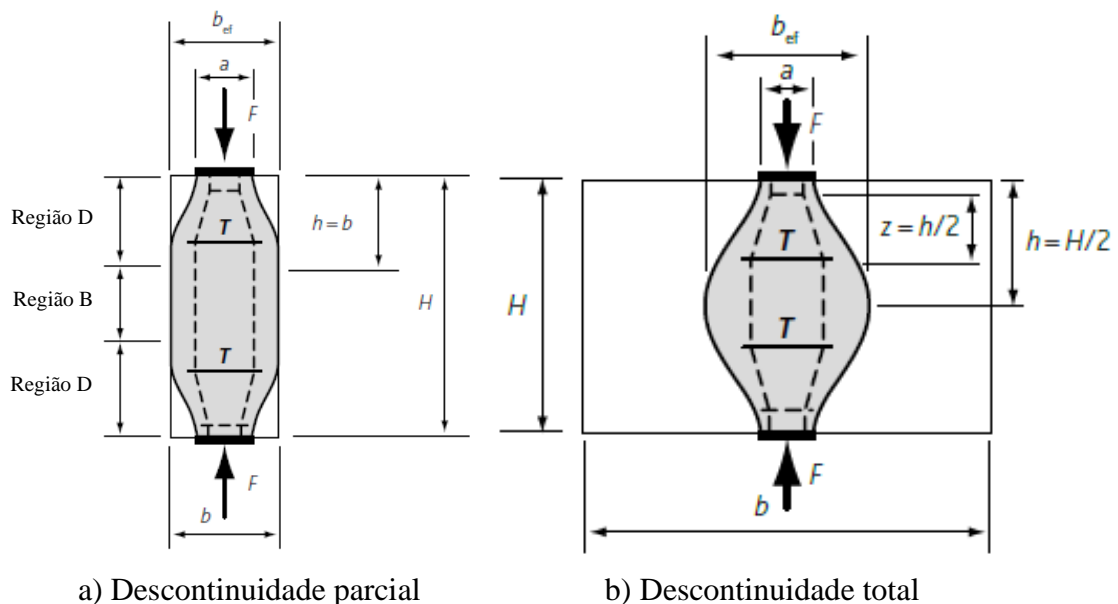


Figura 14 – Representação de descontinuidade parcial e total em um nó ou biela de compressão (Eurocode 02:2004)

Vale lembrar que, em geral, as bielas poderão estar inclinadas, e a área de aço necessária para vencer os esforços  $T$  poderá estar contabilizada nos estribos verticais. Se a biela de compressão for vertical, esta armadura poderá ser contabilizada nas armaduras de pele horizontais.

Como já visto, o Eurocode 02:2004 coloca que as forças que atuam nos nós devem estar em equilíbrio e devem ser consideradas as forças de tração transversais perpendiculares ao nó no plano. O dimensionamento e detalhamento dos nós concentrados são críticos na determinação de sua resistência à carga. Os nós críticos ocorrem onde são aplicadas cargas pontuais, em apoios, em zonas de ancoragem com concentração de armaduras ou armaduras de protensão, em curvas em barras de armadura e em ligações e cantos de barras.

Conforme Eurocode 02:2004 para nós do tipo CCC tem-se que a tensão resistente de projeto vale:

$$\sigma_{Rd} = 1,0 v' f_{cd} \quad (2.20)$$

Para nós do tipo CCT:

$$\sigma_{Rd} = 0,85 v' f_{cd} \quad (2.21)$$

E para nós do tipo CTT:

$$\sigma_{Rd} = 0,75 v' f_{cd} \quad (2.22)$$

O reforço mínimo horizontal e vertical a ser fornecido para vigas altas é de  $0,2\% A_c$  em cada face do elemento estrutural.

## 2.6 BIELAS E TIRANTES SEGUNDO O ACI 318:2002

Como os elementos estruturais aqui analisados são essencialmente vigas altas, segundo as definições do ACI 318:2002 (item 10.7.1), as vigas altas são elementos carregados em uma face e apoiados na face oposta, de modo que as bielas de compressão possam se desenvolver entre as cargas e os apoios, e possuem:

- vãos livres,  $l$ , iguais ou inferiores a quatro vezes a altura total da estrutura; ou
- regiões com cargas concentradas dentro do dobro da altura a partir da face do apoio, para que se desenvolvam bielas de compressão entre as cargas e os apoios.

Conforme o ACI 318:2002 as vigas altas devem ser projetadas usando modelos de bielas e tirantes, apresentado no Anexo A da norma, independentemente de como são carregadas e

apoiadas. Pode ser projetada também por meio de análise não lineares. É permitido que as deformações sejam estimadas usando uma análise elástica do modelo de bielas e tirantes. Para as análises, os efeitos da fissuração na distribuição de tensões devem ser considerados.

Os conceitos de regiões B e D, distância e tipos de descontinuidade e determinação da região D segundo o ACI 318:2002 são os mesmos já vistos nas demais normas. Apenas para frisar, o ACI 318:2002 descreve que a descontinuidade é uma região onde ocorre mudança abrupta na geometria ou no carregamento. E ainda, se duas regiões D se sobrepuserem ou se encontrarem, elas podem ser consideradas como uma única região D, para fins de projeto.

O ACI 318:2002 coloca que o modelo de treliça deve estar em equilíbrio e ser capaz de transferir todas as cargas para os apoios ou regiões B adjacentes. Os eixos das bielas e tirantes devem coincidir aproximadamente com os eixos dos campos de compressão e tração, respectivamente, e o ângulo entre elementos (bielas e tirantes) em uma região D deve ser maior ou igual a 25°.

As armaduras longitudinais em vigas altas devem ser estendidas aos apoios e devidamente ancoradas. O espaçamento das barras para vigas altas deve ser de no máximo 31 cm (12 pol.), ao invés de 46 cm (18 pol.), como visto no ACI 318:2002 para vigas usuais, porque este aço é fornecido para restringir a abertura das fissuras.

Para o equilíbrio do nó, pelo menos três forças devem atuar em um nó em um modelo de bielas e tirantes. Como já visto, os nós são classificados de acordo com os sinais dessas forças (CCC, CCT e CTT ou TTT). Para fins de projeto, o ACI 318:2002 define zona nodal como sendo o volume de concreto ao redor de um nó que se supõe transferir forças de bielas e tirantes (Figura 15). Essas zonas nodais são também denominadas de zonas nodais hidrostáticas, porque as tensões no plano são as mesmas em todas as direções.

Em projeto, as bielas são geralmente idealizadas como membros de compressão prismática, como demonstrado pelos contornos de linha reta das escoras na Figura 15. Se a resistência à compressão efetiva  $f_{cu}$  for diferente nas duas extremidades de uma biela, devido a diferentes resistências da zona nodal nas duas extremidades ou a diferentes comprimentos de apoio, a biela é idealizada como uma biela compressão uniformemente cônica nestas regiões (situação mais desfavorável). Aqui se entende como biela em forma de leque ou cônica o formato simplificado tomado para o projeto de forma que as tensões transversais de tração sejam suportadas pelo próprio concreto ou por armadura especialmente projetada para tal.

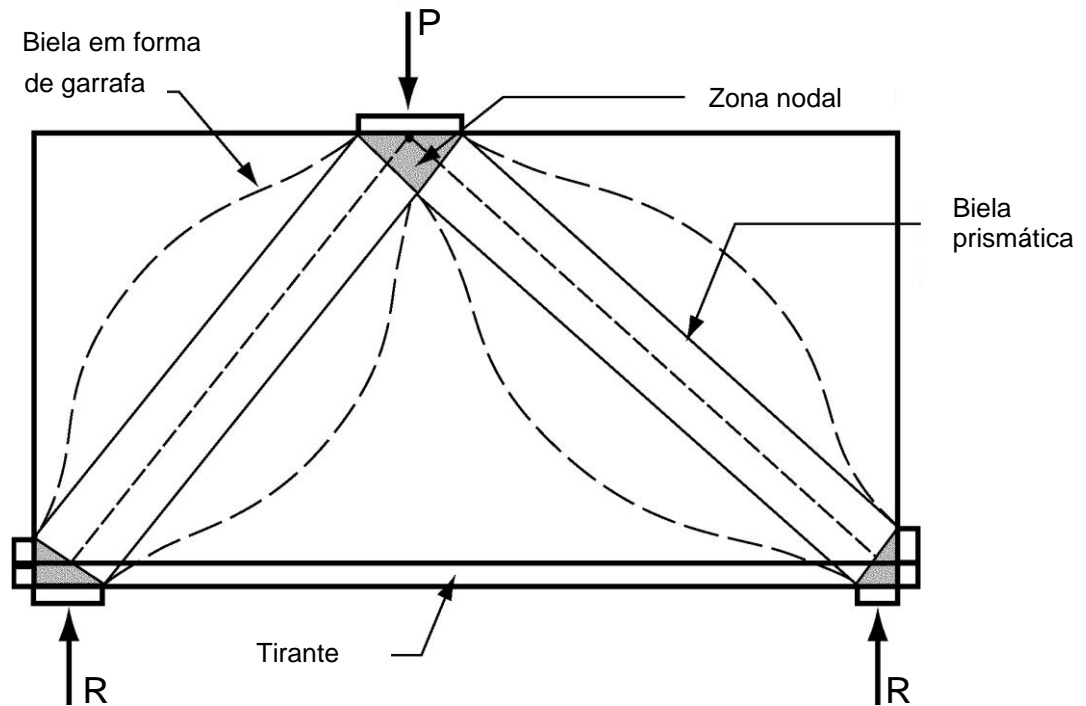


Figura 15 – Exemplificação dos conceitos de zona nodal, bielas prismáticas e em forma de garrafa e tirante usuais em vigas altas (Adaptada de ACI 318:2002)

Os contornos pontilhados curvos das bielas na Figura 15 e os contornos sólidos curvos na Figura 16 aproximam os limites das bielas em forma de garrafa. O ACI 318:2002 coloca que a partir de um ensaio de corpo de prova o formato cilíndrico é possível observar que a propagação lateral interna da força de compressão aplicada ao corpo de prova leva a uma tensão transversal, que divide o corpo de prova, levando a abertura de fissuras (Figura 16). Dessa forma, se justifica a inserção de barras para reforço transversal em uma biela em forma de garrafa.

Para simplificar o projeto, o ACI 318:2002 prescreve que as bielas em forma de garrafa podem ser idealizadas como prismáticas ou cônicas (*tapered*). O reforço de controle de fissuras (item A.3.3 da norma) é fornecido para resistir à tensão transversal conforme Equação (2.25) e o respectivo fator redutor da resistência. A quantidade de armadura transversal confinante pode ser calculada usando o modelo de bielas e tirantes visto na Figura 16(b) com as bielas que representam a propagação da força de compressão atuando em uma inclinação de 1:2 em relação ao eixo da força de compressão aplicada. A área da seção transversal  $A_c$  de uma biela em forma de garrafa é considerada a menor das áreas de seção transversal nas duas extremidades do suporte.

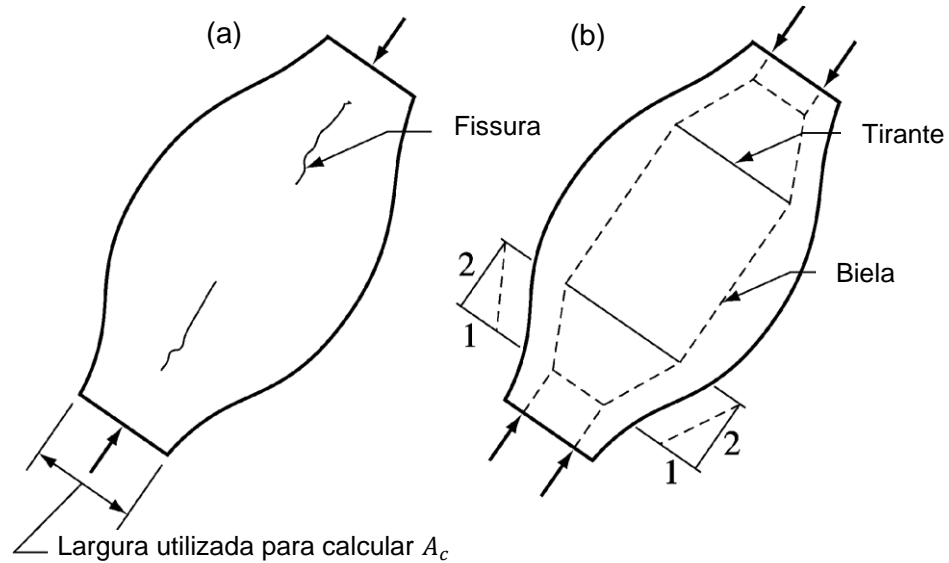


Figura 16 – Biela em forma de garrafa para (a) um modelo fissurada e (b) um modelo idealizado pelo método de bielas e tirantes (Adaptada de ACI 318:2002)

Conforme a seção A.2.6 do ACI 318:2002, o projeto de bielas, tirantes e zonas nodais deve estar de acordo com a seguinte relação:

$$\phi_r F_n \geq F_u \quad (2.23)$$

onde  $F_u$  é a força atuante em uma biela, tirante, ou em uma face de uma zona nodal;  $F_n$  é a força nominal (resistente) da biela, tirante ou zona nodal; e  $\phi$  é o fator de redução de resistência especificado, que, conforme seção 9.3.2.6,  $\phi_r = 0,75$ .

A resistência à compressão nominal de uma biela sem armadura longitudinal deve ser tomada como o menor valor que aconteça em alguma das duas extremidades da biela, de acordo com A.3.1,

$$F_{ns} = f_{cu} A_c \quad (2.24)$$

onde  $A_c$  é a área da seção transversal em uma extremidade da biela, e  $f_{cu}$  é o menor entre as Equações (2.25) e (2.27).

Sendo o cálculo da resistência à compressão efetiva (resistência de projeto) do concreto em uma biela dado por

$$f_{cu} = 0,85 \beta_s f_c' \quad (2.25)$$

sendo  $f_c'$  a resistência à compressão específica (valor característico) do concreto e  $\beta_s$  um dos valores seguintes:

$\beta_s = 1,0$  para uma biela de seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento;

$\beta_s = 0,75$  para bielas em forma de garrafa com reforço transversal satisfatório e  $\beta_s = 0,60\lambda$  para bielas sem reforço transversal satisfatório, onde  $\lambda = 1,0$  para concreto convencional,  $0,85$  para concreto leve com areia e  $0,75$  para concreto leve sem areia. A interpolação linear deve ser permitida quando for utilizada a substituição parcial de areia.

$\beta_s = 0,40$  para bielas em membros de tração; e

$\beta_s = 0,60$  para todos os outros casos.

Já a resistência à compressão nominal de uma zona nodal deve ser:

$$F_{nn} = f_{cu} A_n \quad (2.26)$$

sendo desta vez a resistência à compressão efetiva do concreto na zona nodal  $f_{cu}$  calculada conforme indicado na Equação (2.27) e  $A_n$  é uma das duas condições seguintes:

- Área da face da zona nodal sobre a qual  $F_u$  atua, tomada perpendicularmente à linha de ação de  $F_u$ , ou
- Área de uma seção através da zona nodal, tomada perpendicularmente à linha de ação da força resultante na seção.

A tensão de compressão efetiva calculada em uma face de uma zona nodal devida às forças de bielas e tirantes não deve exceder o valor dado por:

$$f_{cu} = 0,85 \beta_n f_c' \quad (2.27)$$

onde:

$\beta_n = 1,0$  em zonas nodais delimitadas por bielas ou áreas de apoio, ou ambas;

$\beta_n = 0,80$  em zonas nodais de ancoragem de um tirante; ou

$\beta_n = 0,60$  nas zonas nodais que ancoram dois ou mais tirantes.

Por fim, as áreas de aço dos tirantes são dimensionadas da mesma forma que nas demais normas devendo garantir que o eixo longitudinal das barras coincida com o eixo do modelo de bielas e tirantes adotado (barras da treliça assumida). Caso haja força devida à elemento de protensão, esta deverá ser considerada na área de aço.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é abordada toda fundamentação teórica por trás do código implementado no *software* de análise matricial MATLAB (2012). Temas como a formulação em elementos finitos, otimização topológica, método de Otimização Estrutural Evolutiva Bidirecional (BESO), dentre outros assuntos, são discutidos aqui.

#### 3.1 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

Para a solução de problemas complexos da mecânica estrutural, o método dos elementos finitos é o preferido entre as ferramentas para a descrição do comportamento das variáveis envolvidas. Em termos estruturais, basicamente assume-se um campo de deslocamentos em sub-regiões do problema (elementos finitos), os quais passam a interpolar esses campos a partir das informações da fronteira (nós). Partindo-se do princípio da mínima energia de deformação, chega-se às equações finais que permitem resolver, para as variáveis incógnitas do campo, nos pontos discretizados.

Neste trabalho é dado enfoque a problemas de estado plano, nos quais os esforços e ações atuam apenas em um plano (x-y). A seguir são revisados assuntos relacionados à formulação de elementos finitos, em alguns pontos, particularizada para esse estado de tensões.

##### 3.1.1 Tensões principais

Muitas análises estruturais de elementos finitos envolvem o cálculo das tensões principais. Em um corpo sólido tridimensional, as três tensões principais ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) podem ser determinadas pela solução da seguinte expressão:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} = \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (3.1)$$

Sendo os invariantes de tensões ( $I_1, I_2, I_3$ ) da Equação 3.1, expressos por:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (3.2)$$



$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad (3.3)$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Estado plano de tensões

Rao (2018) observa que o objetivo principal de qualquer análise de tensão ou problema de mecânica dos sólidos é encontrar o campo de deslocamentos e tensões sob um estado de carregamento e condições de contorno. Para encontrar uma solução analítica para um problema plano, deve-se satisfazer as equações básicas ou fundamentais da mecânica dos sólidos, considerando que o número total equações (Tabela 1) deva ser igual ao número total de incógnitas (Tabela 2).

Tabela 1 – Número de equações para problemas bidimensionais.

Equações	Problemas bidimensionais
Equações de equilíbrio	2
Relação tensão-deformação	3
Relação deformação-deslocamento	3
Número total de equações	8

Fonte: Adaptada de Rao, 2018.

Tabela 2 – Número de incógnitas para problemas bidimensionais.

Incógnitas	Problemas bidimensionais
Deslocamentos	u, v
Tensões	$\sigma_{xx}$ , $\sigma_{yy}$ , $\tau_{xy}$
Deformações/distorções	$\epsilon_{xx}$ , $\epsilon_{yy}$ , $\gamma_{xy}$
Número total de incógnitas	8

Fonte: Adaptada de Rao, 2018.

Observa o autor que na prática também é necessário satisfazer algumas equações adicionais, como equações de equilíbrio externo (que dizem respeito ao equilíbrio geral do corpo sob cargas externas), equações de compatibilidade (que dizem respeito à continuidade de deformações e deslocamentos) e condições de contorno (que dizem respeito às condições prescritas sobre

deslocamentos e/ou forças nos limites do corpo).

Rao (2018) afirma ainda que embora qualquer solução exata (analítica) deva satisfazer todas as equações apresentadas anteriormente, as soluções aproximadas (numéricas), como as obtidas pelo método dos elementos finitos, geralmente não satisfazem todas as equações. No entanto, uma boa compreensão de todas as equações básicas da mecânica dos sólidos é essencial para entendimento de elementos finitos e também para estimar a ordem de erro envolvido na solução de problemas desse tipo, sabendo até que ponto a solução aproximada viola as equações básicas, incluindo a compatibilidade e as condições contorno.

A suposição de tensão plana é aplicável para corpos cuja dimensão é muito pequena em uma das direções coordenada ( $x, y, z$ ). Assim, a análise de placas carregadas pode ser feita utilizando o pressuposto de tensões no estado plano. Embora essas suposições violem algumas das condições de compatibilidade, elas são suficientemente precisas para todos os fins práticos, desde que não ocorram tensões fora do plano e a estrutura tenha dimensão longitudinal maior que a sua espessura. Assim, a relação tensão-deformação para o caso de tensão plana é dada pela lei de Hooke, a partir da Equação (3.5), expressa em termos de deformação.

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (3.5)$$

Sendo  $\{\varepsilon\}$  o vetor de deformações e  $\{\sigma\}$  o vetor de tensões dados por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

A relação entre os vetores é expressa por meio da matriz de coeficientes elásticos,  $[C]$ , dada por:

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material. A Equação (3.5) pode ser descrita em termos de tensão, a partir da relação inversa expressa a seguir:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.8)$$

onde a matriz  $[D]$ , chamada de constitutiva, é dada por:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para um corpo bidimensional, em estado plano de tensão, as duas tensões principais no plano  $(\sigma_1, \sigma_2)$  podem ser expressas por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.10)$$

e os planos principais  $(\theta_{1,2})$ , defasados de  $90^\circ$  entre si, são expressos por:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\right) \quad \text{e} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2 \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Formulação da equação de elementos finitos para análise estática

Nesta seção utiliza-se o princípio da energia potencial mínima para derivar as equações de equilíbrio para um problema genérico tridimensional que posteriormente é reduzido para o caso bidimensional. Uma vez que os graus de liberdade nodais são tratados como desconhecidos na formulação atual (deslocamento), a energia potencial  $\pi_p$  deve primeiro ser expressa em termos de graus de liberdade nodais. Então, as equações de equilíbrio necessárias podem ser obtidas definindo as primeiras derivadas parciais de  $\pi_p$  em relação a cada um dos graus de liberdade nodais iguais a zero. De início, o corpo sólido é dividido em  $n$  elementos finitos e o modelo de deslocamento dentro de um elemento,  $e$ , é assumido como:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [N]\{Q^e\} \quad (3.12)$$

onde  $\{Q^e\}$  é o vetor de graus de liberdade de deslocamento nodal do elemento, e  $[N]$  é a matriz das funções de forma.

As matrizes características dos elementos (rigidez) e vetores característicos dos elementos (carregamento) devem ser derivados do princípio da energia potencial mínima. Para isso, a energia potencial funcional do corpo  $\pi_p$ , considerando apenas as forças do corpo e da superfície, é escrita como:

$$\pi_p = \sum_{e=1}^n \pi_p^e \quad (3.13)$$

onde  $\pi_p^e$  é a energia potencial do elemento,  $e$ , dada por:

$$\pi_p^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_{V^e} \{U\}^T \{\bar{\phi}\} dV - \int_{S_1^e} \{U\}^T \{\bar{\Phi}\} dS_1 \quad (3.14)$$

em que  $V^e$  é o volume do elemento,  $S_1^e$  é a porção da superfície do elemento onde as forças atuam,  $\{\bar{\phi}\}$  é o vetor que contém as forças de corpo por unidade de volume e  $\{\bar{\Phi}\}$  é o vetor que contém as forças prescritas. O vetor de deformações,  $\{\varepsilon\}$ , pode ser expresso em termos do vetor de deslocamento nodal  $\{Q^e\}$  da forma:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{Q^e\} \quad (3.15)$$

O vetor de tensões,  $\{\sigma\}$ , pode ser obtido a partir do vetor de deformações,  $\{\varepsilon\}$ , como:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{Q^e\} \quad (3.16)$$

Substituindo as Equações (3.12) e (3.15) na Equação (3.14) a equação da energia potencial do elemento pode ser rescrita como:

$$\pi_p^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{Q^e\}^T [B]^T [D] [B] \{Q^e\} dV - \int_{V^e} \{Q^e\}^T [N]^T \{\bar{\phi}\} dV - \int_{S_1^e} \{Q^e\}^T [N]^T \{\bar{\Phi}\} dS_1 \quad (3.17)$$

Considera-se na expressão anterior apenas as forças de volume e superfície. No entanto, geralmente algumas forças externas concentradas também estarão atuando em vários nós. Se  $\{P_c\}$  denota o vetor de forças nodais, agindo nas direções do vetor deslocamento nodal  $\{Q\}$  da estrutura, a energia potencial total da estrutura ser expressa como

$$\pi_p = \sum_{e=1}^n \pi_p^e - \{Q\}^T \{P_c\} \quad (3.18)$$

onde  $\{Q\} = \{Q_1 Q_2 \dots Q_m\}^T$  é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura, e  $m$  é o número total de deslocamentos nodais ou graus de liberdade. A partir da das Equações (3.17) e (3.18)

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{Q\}^T \left[ \sum_{e=1}^n \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right] \{Q\} - \{Q\}^T \sum_{e=1}^n \left( \int_{V^e} [N]^T \{\bar{\phi}\} dV + \int_{S_1^e} [N]^T \{\bar{\Phi}\} dS_1 \right) - \{Q\}^T \{P_c\} \quad (3.19)$$

A Equação (3.19) expressa a energia potencial total da estrutura ou corpo em termos dos graus de liberdade nodais,  $\{Q\}$ . A configuração de equilíbrio estático das estruturas pode ser encontrada resolvendo as seguintes condições necessárias (para a minimização da energia potencial):

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{Q\}} = \{0\} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \pi_p}{\partial Q_1} = \frac{\partial \pi_p}{\partial Q_2} = \dots = \frac{\partial \pi_p}{\partial Q_m} = 0 \quad (3.20)$$

Dessa forma, a partir das Equações (3.19) e (3.20) a energia potencial total da estrutura pode ser rescrita como:

$$\left[ \sum_{e=1}^n \int_{V^e} [B]^T [D] dV \right] \{Q\} = \{P_c\} + \sum_{e=1}^n \left( \int_{V^e} [N]^T \{\bar{\phi}\} dV + \int_{S_1^e} [N]^T \{\bar{\Phi}\} dS_1 \right) \quad (3.21)$$

ou ainda da forma:

$$\left( \sum_{e=1}^n [K^e] \right) \{Q\} = \{P_c\} + \sum_{e=1}^n (\{P_s^e\} + \{P_b^e\}) = \{P\} \quad (3.22)$$

onde  $[K^e]$  é a matriz de rigidez do elemento, e seu somatório é a matriz de rigidez global da estrutura  $[K]$ ;  $\{Q\}$  representa o vetor de deslocamentos nodal global;  $\{P_c\}$  é o vetor de cargas concentradas;  $\{P_s^e\}$  e  $\{P_b^e\}$  expressam, respectivamente, os vetores de forças de superfície (*surface*) e de volume (*body*) nodais dos elementos, e seu somatório representa o vetor de forças nodais dos elementos  $\{P^e\}$ ; e  $\{P\}$  é a contribuição de todos os carregamentos ( $\{P^e\}$  e  $\{P_c\}$ ) ou vetor de forças global da estrutura.

Em resumo, a equação de equilíbrio global nodal da estrutura pode ser expressa, a partir da Equação (3.22) e das relações apresentadas, da forma:

$$[K]\{Q\} = \{P\} \quad (3.23)$$

### 3.1.4 Elemento finito quadrilátero sólido de 4 nós

Neste trabalho é utilizado o elemento finito quadrilátero sólido de 4 nós com dois graus de liberdade por nó ( $u$ ,  $v$ ). Um esquema das variáveis envolvidas está representado na Figura 17

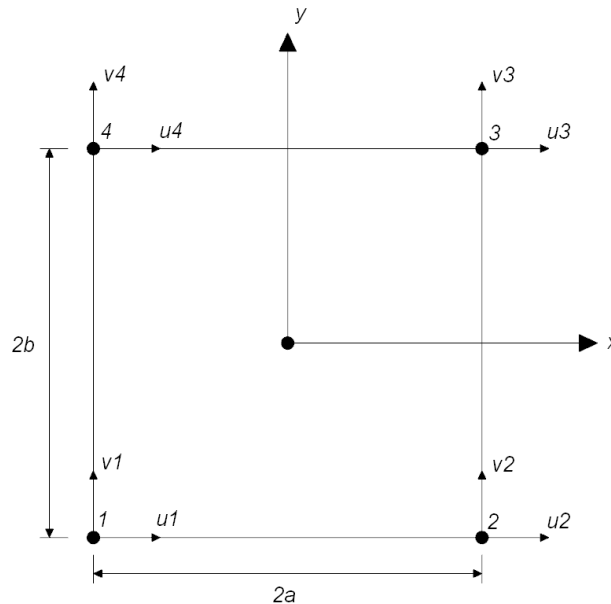


Figura 17 - Elemento finito quadrilátero sólido de 4 nós. (Adaptada de Rao, 2018)

No interior do elemento é assumido um campo de deslocamentos do tipo:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (3.24)$$

Neste caso, os deslocamentos variam de forma linear em  $x$  e em  $y$ . Para deslocamentos que ocorram nos nós do tipo  $\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$  a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\{U(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [N(x, y)]\{q\} \quad (3.25)$$

onde  $[N(x, y)]$  é a matriz das funções de forma dadas por:

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 & N_4(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 & N_4(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} & N_2(x, y) &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \\ N_3(x, y) &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} & N_4(x, y) &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para este trabalho, visando a praticidade e ganho de processamento computacional, são utilizados elementos quadriláteros com o lado  $2b$  igual ao lado  $2a$ . Então, a matriz de rigidez do elemento finito  $[k]$  pode ser gerada como:

$$[k] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy \quad (3.28)$$

Sendo  $t$  a espessura do elemento finito,  $[D]$  a matriz constitutiva elástica do material e  $[B]$  a matriz que relaciona deslocamentos com deformações ( $\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$ ).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

A relação entre a deformação e os deslocamentos  $[B]$  pode ser obtida a partir da Equação (3.29) aplicada na Equação (3.25) resultando em:

$$[B] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Então a matriz de rigidez no sistema de coordenadas global do elemento  $[K^{(e)}]$  rotacionada para os eixos globais  $x$  e  $y$  pode ser gerada por:

$$[K^{(e)}] = [R]^T [k] [R] \quad (3.31)$$

onde  $[R]$  é matriz de rotação para a matriz de rigidez do elemento finito utilizado (dimensão

8×12) como indicado na Equação (3.32):

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [r] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [r] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [r] \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

onde  $[0]$  é uma matriz 2×3 de zeros e  $[r]$  é a matriz que contém os cossenos diretores ( $l_{pq}, m_{pq}, n_{pq}$  paralelos ao eixo  $x$  local e  $l_{ps}, m_{ps}, n_{ps}$  paralelos ao eixo  $y$  local do elemento), dados por:

$$[r] = \begin{bmatrix} l_{pq} & m_{pq} & n_{pq} \\ l_{ps} & m_{ps} & n_{ps} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Na presente formulação que é utilizada neste trabalho, a operação de rotação da matriz de rigidez dos elementos para os eixos globais não é necessária, visto que todos os elementos finitos são orientados paralelos aos eixos globais. Isso visa acelerar a montagem das matrizes globais, bem como o processo geral de solução da análise de elementos finitos. Também, para facilitar a montagem das matrizes globais de rigidez e massa, assume-se que todos os elementos finitos tenham as mesmas dimensões, de forma que a montagem das matrizes a nível de elementos (rigidez ou massa) são feitas para apenas 1 elemento e replicada aos demais levando em conta suas propriedades individuais.

Para um elemento finito de lado unitário e espessura  $t$ , a matriz de rigidez elementar é a indicada na Equação (3.34):

$$[k] = \frac{E \cdot t}{(1-\nu^2) \cdot 24} \begin{bmatrix} 12 & 3 & -6 & -3 & -6 & -3 & 0 & 3 \\ & 12 & 3 & 0 & -3 & -6 & -3 & -6 \\ & & 12 & -3 & 0 & -3 & -6 & 3 \\ & & & 12 & 3 & -6 & 3 & -6 \\ & & & & 12 & 3 & -6 & -3 \\ & & & & & 12 & 3 & 0 \\ & & & & & & 12 & -3 \\ \text{sim.} & & & & & & & 12 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 & 9 & 2 & -3 & 4 & -9 \\ & -4 & -9 & 4 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ & & -4 & -3 & 4 & 9 & 2 & 3 \\ & & & -4 & -9 & -2 & 3 & 2 \\ & & & & -4 & 3 & 2 & 9 \\ & & & & & -4 & -9 & 4 \\ & & & & & & -4 & -3 \\ \text{sim.} & & & & & & & -4 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Para a matriz de massa, a sua formulação é semelhante à matriz de rigidez, de forma que se tem a equação da mesma para o elemento finito  $[M]$  gerada como:

$$[M] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [N]^T [N] \rho t dx dy \quad (3.35)$$



As otimizações topológicas das estruturas são realizadas considerando o peso próprio dos materiais e, como neste trabalho é considerada a gravidade na direção  $y$  e não se trabalhou com problemas dinâmicos, optou-se pela matriz de massa condensada (*lumped*) na forma mais simples:

$$[M] = 4\rho t a b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1/4 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & & & & 1/4 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA À ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

A partir da discretização da estrutura em elementos infinitesimais, a otimização topológica tem o objetivo de melhor alocar ou retirar material de uma estrutura dentro de um domínio de projeto, sob condições de contorno e carregamentos específicos, com intuito de otimizar (maximizar ou minimizar) funções objetivo pré-definidas como massa, tensão, frequências naturais, carga de flambagem, etc. Neste sentido, diferencia-se da otimização paramétrica e de forma, uma vez que a estrutura final pode assumir qualquer forma dentro do espaço (volume) de trabalho original (*Ground Structure*).

Como visto, os princípios básicos de otimização topológicas para estruturas contínuas foram propostos por Bendsoe e Kikuchi em 1988. Desde então, o assunto tem sido extensivamente estudado com diferentes abordagens que, em geral, convergem para a obtenção de estruturas de alta performance, porém vai de encontro ao aumento na complexidade da geometria do componente ou elemento estrutural. Recentemente, os avanços das impressoras 3D (inclusive para concreto) tornaram economicamente viável a fabricação de componentes com geometrias de alta complexidade. Dessa forma, a otimização topológica pode reduzir o consumo de material e de energia, peso próprio final da estrutura, minimizando o impacto ambiental, dimensionamento de fundações e podendo também gerar ganhos econômicos.

Diversas são as abordagens para tratar o problema de otimização topológica como SIMP, ESO,

BESO, etc. No método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*, Bendsøe, 1988) o domínio é discretizado em elementos finitos e uma abordagem baseada em densidade é utilizada para representar a presença parcial de material na região do espaço. Cada elemento tem uma densidade associada,  $x_e$ , (variáveis de projeto) que define a rigidez do elemento pelo seu módulo de elasticidade (material isotrópico)  $E_e = E_{min} + x_e^p (E_0 - E_{min})$  com  $x_e \in [0,1]$ , e  $p$  é um fator de penalização (que varia entre 1 e 3).  $E_0$  e  $E_{min}$  são o módulo de elasticidade do material e um valor mínimo para evitar a retirada total do elemento, perda da conectividade de malha e singularidade da matriz de rigidez. A massa total da estrutura  $M = \sum x_i v_i$  ( $v_i$ , volume de cada elemento) é a função objetivo a ser minimizada.

No método BESO, as densidades associadas,  $x_e$ , são variáveis discretas e que podem assumir apenas os valores 0 ou 1, ou de forma prática:  $x_{min}$  ou 1; sendo  $x_{min}$  um valor pequeno. Em problemas de otimização de tensão, para evitar problemas de singularidade do cálculo das tensões em elementos que foram retirados, no contexto do BESO e SIMP, é empregado o conceito de relaxação,  $\varepsilon$ , o qual, durante o processo de cálculo, relaxa a condição de 0 e 1 para uma condição de densidades intermediárias (Le *et al.*, 2010 *apud* Huang e Xie, 2010) retornando à condição de densidades binárias posteriormente.

### 3.3 MÉTODO BESO

Antes de abordar sobre o método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) propriamente dito, cabe destacar seu antecessor, o método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) proposto por Xie e Steven nos anos 90. O método é baseado no conceito simples de remoção gradual de material ineficiente da estrutura, de forma a evoluí-la para uma forma e topologia ótima. A otimização pelo ESO pode ocorrer a nível de tensão ou a nível de rigidez/deslocamento, a partir da discretização da estrutura em elementos infinitesimais.

O método ESO baseado em tensão relaciona a tensão de von Mises de cada elemento,  $e$ , com a máxima tensão de von Mises da estrutura, fazendo com que cada elemento que tenha valor abaixo da taxa de rejeição RR (*Rejection Ratio*) predeterminada seja removido, evoluindo, assim, a estrutura para uma configuração ótima.

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR \quad (3.37)$$

O método ESO baseado em rigidez ou deslocamento está relacionado com a energia de deformação da estrutura, aqui denominada de *compliance*,  $C$ , e seu número de sensibilidade,  $\alpha_i^e$ , deduzido com base na equação de equilíbrio estático ( $[K]\{u\} = \{f\}$ , sendo  $[K]$  a matriz de rigidez global da estrutura). Assim tem-se que:

$$C = \frac{1}{2} \{f\}^T \{u\} \quad (3.38)$$

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2} \{u_i\}^T [K_i] \{u_i\} \quad (3.39)$$

onde  $\{f\}$  é o vetor de forças e  $\{u\}$  o vetor de deslocamentos do elemento finito  $i$ .

O aumento da *compliance*, como resultado da remoção de elemento  $i$ , é igual à sua energia de deformação. Para minimizar a *compliance* (que equivale a maximizar a rigidez) por meio da retirada de elementos, a forma mais eficaz é eliminar os elementos que apresentam menor valores de sensibilidade,  $\alpha_i$ . A remoção do elemento pode ser feita simplesmente atribuindo o número da propriedade do material dos elementos rejeitados iguais a zero e ignorando esses elementos quando a matriz de rigidez global é montada na análise do elemento finito subsequente. O número de elementos a serem removidos é determinado pela taxa de remoção do elemento (ERR, *Element Removal Ratio*) que é definido como a razão entre o número de elementos removidos em cada iteração e o número total de elementos no modelo de elemento finito inicial ou atual.

Yang et al. (1999) conduziram estudos iniciais sobre o método BESO para otimização de rigidez. Nesse estudo, após a análise de elementos finitos, os números de sensibilidade dos elementos vazios foram estimados por meio de uma extrapolação linear do campo de deslocamento. Os elementos sólidos com os números de sensibilidade mais baixos, foram removidos da estrutura e os elementos vazios, com os números de sensibilidade mais altos, foram transformados em elementos sólidos. Os números de elementos removidos e adicionados em cada iteração são determinados por dois parâmetros não relacionados: a taxa de rejeição (RR, *Rejection Ratio*) e a taxa de inclusão (IR, *Inclusion Ratio*), respectivamente.

Querin et al. 2000 utilizaram os conceitos do método BESO com critério de tensão aplicado a estruturas bi e tridimensionais. Em seu algoritmo, os elementos com as tensões de von Mises mais baixas foram removidos e os elementos vazios, próximos às regiões de tensão de von

Mises mais altas, foram transformados em elementos sólidos. Da mesma forma, o número de elementos a serem removidos e adicionados são tratados separadamente com uma taxa de rejeição e uma taxa de inclusão, respectivamente.

Observam Huang e Xie (2010) que a classificação para remoção e adição é bastante complicada, uma vez que usuário deve selecionar cuidadosamente os valores de RR e IR para obter um bom projeto, caso contrário, o algoritmo pode não produzir uma solução ótima. Outro problema das primeiras versões do BESO era que a eficiência computacional era bastante baixa devido ao grande número de iterações envolvidas. Em muitos casos, o projeto final precisa ser selecionado a partir de uma infinidade de topologias geradas.

O ciclo de elementos finitos com a adição e remoção de elementos até atingir a fração volumétrica desejada é continuado até que um critério de parada seja atendido. Mesmo chegando-se à fração volumétrica desejada, ainda assim o método busca realocar elementos de uma certa região para outra (mantendo a fração volumétrica no valor desejado), sendo necessário um critério para a parada. O seguinte critério é usualmente empregado no contexto de BESO (Huang e Xie, 2010) de forma a levar em conta a não variação do valor da *compliance* da estrutura por um certo número de ciclos de otimização.

$$Error = \frac{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N C_{k-N-i+1}}{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1}} \leq tol \quad (3.40)$$

onde  $N$  é um número de iterações consecutivas às quais se pretende verificar a convergência,  $k$  é a iteração atual e  $i$  é um contador para fazer a soma das *compliance* nas  $N$  iterações consecutivas.

A otimização da topologia em geral visa a busca pela estrutura mais rígida com um determinado volume de material. No método BESO uma estrutura é otimizada removendo e adicionando elementos simultaneamente. Dessa forma, o próprio elemento é tratado como a variável de projeto, independente de seus parâmetros físicos ou materiais associados. Assim, o problema de otimização para maximização da rigidez (ou minimização da *compliance*) e com a restrição de volume é definido como:

$$\text{Minimizar: } C = \frac{1}{2} \{f\}^T \{u\} \quad (3.41a)$$

$$\text{Sujeito à: } V^* - \sum_{i=1}^n V_i x_i = 0 \quad (3.41b)$$

$$x_i = x_{\min} \quad \text{ou} \quad 1 \quad (3.41c)$$

Em que  $V_i$  é o volume de um elemento finito  $i$ ,  $V^*$  é a fração pretendida do volume total da estrutura,  $n$  é o número total de elementos no sistema e  $x_i$  é a variável de projeto, para a qual  $x_{\min}$  é um valor pequeno que indica elemento finito vazio e 1, elemento finito cheio.

Conforme Bendsoe e Sigmund (2003) a declaração do problema apresentado nas Equações (3.41a-c) tem sido amplamente utilizada para a otimização da topologia da estrutura contínua, mas difere da utilizada nos métodos ESO/BESO originais. Os métodos ESO/BESO originais têm dificuldades em lidar com o problema declarado, como por exemplo: a função objetivo pode não convergir se o volume for mantido constante para satisfazer a restrição de volume na Equação (3.41b). Um dos objetivos do novo método BESO, proposto por Huang e Xie (2007 apud Huang e Xie, 2010) e utilizado neste trabalho, é fazer com que o algoritmo convirja de forma estável para uma solução que aborda exatamente a declaração do problema de otimização. Na formulação original do BESO, não está definido como restrição os limites resistência do material, de forma que o problema posto da maneira das Equações (3.41a-c) pode gerar estruturas com a fração volumétrica desejada, mas com tensões nos materiais que excedam seus limites. Com a formulação original, pretende-se obter para uma dada fração volumétrica especificada, a estrutura mais rígida possível, sem nenhuma menção aos limites de resistência do material.

### 3.3.1 Número de sensibilidade

A partir da remoção de um elemento sólido de uma estrutura, a mudança da *compliance* (energia de deformação) é igual à energia de deformação do elemento. Essa mudança é definida como o número de sensibilidade do elemento, conforme Equação (3.39). Quando uma malha não uniforme é atribuída, o número de sensibilidade deve considerar o efeito do volume do elemento. Neste caso, o número de sensibilidade pode ser substituído pela densidade de energia de deformação elementar como:

$$\alpha_i^e = e_i = \frac{1}{2} \frac{\{u_i\}^T [K_i] \{u_i\}}{V_i} \quad (3.42)$$

onde  $\alpha_i^e$  é a sensibilidade do elemento  $i$  e  $V_i$  é o volume do elemento finito. O procedimento ESO original para otimização de rigidez é dirigido diretamente pela remoção gradual de elementos com os números de sensibilidade mais baixos definidos na Equação (3.39) ou na Equação (3.42)

Neste trabalho, numa primeira etapa, quando se distribui o concreto para uma fração desejada, o número de sensibilidade é aquele apresentado na Equação (3.43), baseado na energia de deformação do elemento finito. Numa segunda etapa, quando se trabalha com a troca de materiais (concreto e aço), o número de sensibilidade é trocado para um valor proporcional à tensão equivalente no elemento finito.

$$\alpha_i^k = \frac{(\sigma_i^{eq})^q}{\sum_{i=1}^{nelem} (\sigma_i^{eq})^q V_i}, \quad (3.43)$$

sendo  $\sigma_i^{eq}$  é a tensão equivalente (por exemplo, para concreto tensões de Ottosen e para o aço, tensões de von Mises),  $v_i$  é o volume do elemento finito  $i$ , e por fim,  $q$  é um expoente de suavização para as tensões (usualmente 4). O propósito desta definição, elevando a tensão equivalente do elemento ao expoente  $q$ , é a de suavizar os máximos de tensões frente ao local em que ocorrerão, visto que ao mudar a topologia da estrutura (ao longo do processo de otimização), o local das máximas tensões poderá alterar.

Para adicionar material ao domínio do projeto, um esquema de filtro deve ser utilizado para obter o número de sensibilidade para os elementos vazios. Também utilizando um esquema de filtro se pode suavizar o número de sensibilidade em todo o domínio do projeto, com objetivo de solucionar o problema de *checkerboard* (tabuleiro), que é detalhado na Subseção 3.3.2.

### 3.3.2 Filtro para solução do problema de *checkerboard*

Quando uma estrutura contínua é discretizada usando elementos finitos bilineares (2D) ou trilineares (3D) de baixa ordem, os números de sensibilidade podem se tornar descontínuos através dos limites do elemento. Isso significa que a *compliance* pode resultar diferente entre elementos finitos adjacentes (pode não haver suavidade da *compliance* entre os elementos vizinhos). Isso leva a possibilidade da formação de padrões de tabuleiro nas topologias resultantes (Jog e Harber 1996 *apud* Huang e Xie, 2010). A Figura 18 demonstra um padrão típico de tabuleiro em uma estrutura contínua do método ESO original. A presença do padrão

quadriculado causa dificuldade na interpretação e fabricação da estrutura "ótima".

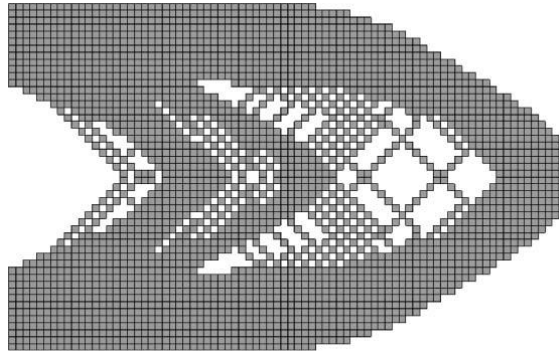


Figura 18 – Malha de elementos finitos com problema de *checherboard* (Adaptada de Huang e Xie, 2010).

Li et al. (2001) apresentam um esquema de suavização simples de calcular a média dos números de sensibilidade de elementos vizinhos, para suprimir a formação de padrões de tabuleiro no método ESO. No entanto, esse algoritmo de suavização não pode superar o problema de dependência da malha.

A chamada dependência de malha refere-se ao problema de obtenção de diferentes topologias com o uso de diferentes malhas de elementos finitos. Quando uma malha mais fina é usada, o processo numérico de otimização estrutural produzirá uma topologia com mais elementos de tamanhos menores no projeto final. Idealmente, o refinamento da malha deve resultar em uma melhor modelagem da mesma estrutura ótima e uma melhor descrição dos limites (formação do serrilhado entre região com material e região de vazios) (BENDSØE E SIGMUND, 2003).

Antes de aplicar o esquema de filtro, os números de sensibilidade nodal, que não carregam qualquer significado físico por conta própria, são definidos pela média dos números de sensibilidade do elemento, como segue:

$$\alpha_j^n = \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^e, \quad (3.44)$$

onde  $m$  denota o número total de elementos que compartilham (conectados) o nó  $j$  do elemento finito  $n$ . A variável  $w_i$  é o peso do elemento  $i$  que compartilha o nó  $j$  do elemento  $n$  e pode ser definido por

$$w_i = \frac{1}{m-1} \left[ 1 - \left( r_{ij} / \sum_{i=1}^m r_{ij} \right) \right] \quad (3.45)$$

onde  $r_{ij}$  é a distância entre o centro do elemento  $i$  e do nó  $j$ . O peso apresentado na Equação 3.45 indica que o número de sensibilidade elementar tem maior efeito sobre o número de sensibilidade nodal quando está mais perto do nó. Os números de sensibilidade nodal são então convertidos em números de sensibilidade elementar suavizados. Essa conversão, ocorre por meio da projeção de números de sensibilidade nodal para o domínio do projeto. O filtro tem uma escala de comprimento  $r_{min}$ , a qual não muda com o refinamento da malha. A função principal da escala de comprimento é de identificar quais nós irão influenciar a sensibilidade do elemento  $i$ .

O efeito da mudança da escala de comprimento no resultado final de otimização é que para valores baixos de  $r_{min}$  a estrutura final resulta em mais elementos internos discretos topologicamente e para valores maiores, a estrutura final otimizada resulta em estruturas com menos elementos internos. Lembrando que, valores muito baixos de  $r_{min}$  poderá acarretar novamente o problema do *checkerboard*.

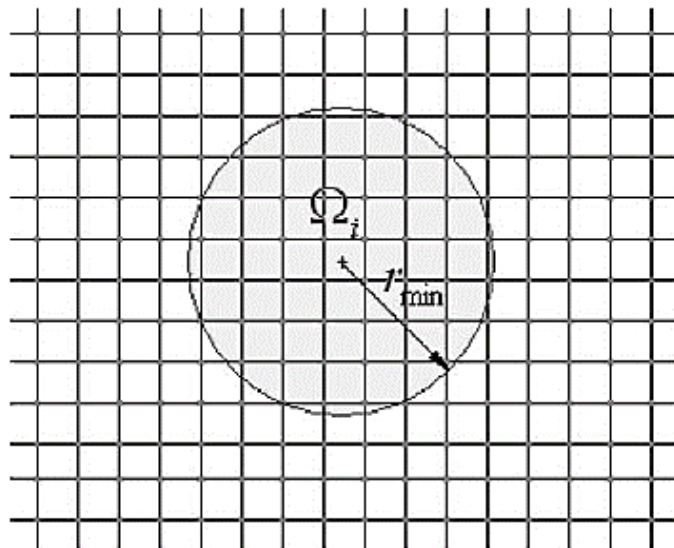


Figura 19 – Definição do raio mínimo para realização do filtro (Huang e Xie, 2010).

### 3.3.3 Estabilização do processo iterativo

A estabilização do processo iterativo melhora o método de otimização de forma a evitar mudanças bruscas dos valores de sensibilidade por elemento ( $\alpha_i^e$ , por exemplo, quando a estrutura otimizada tem uma parte importante removida durante o processo iterativo) e melhorar a convergência do método. Isso pode ser facilmente implementado no código a partir da seguinte relação:



$$\alpha_i^{e,k} = \gamma \alpha_i^{e,k} + (1 - \gamma) \alpha_i^{e,k-1} \quad (3.46)$$

onde  $\gamma$  é um fator de estabilização do valor de sensibilidade entre iterações ( $k$ ) do método (geralmente 0,5) e o superíndice  $e$ , se refere à sensibilidade por elemento e o subíndice  $i$ , se refere a um dado elemento. O efeito de não considerar essa estabilização pode acarretar em um processo de minimização da *compliance* que gere picos quando da alocação/remoção dos elementos estruturais importantes da estrutura, como pode ser visto na Figura 20. Valores muito elevados de  $\gamma$ , podem atrasar a convergência da otimização.

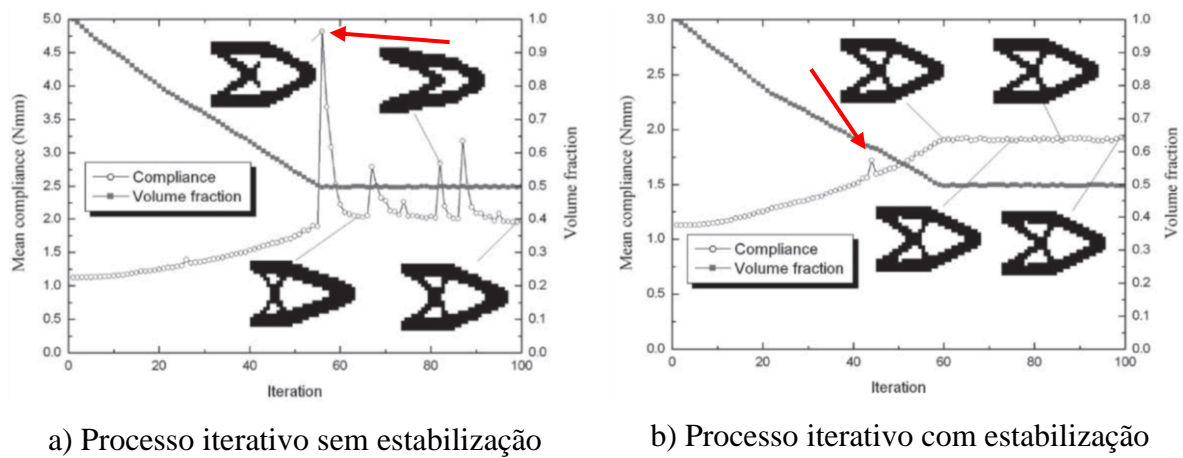


Figura 20 – Esquema de otimização a) sem e b) com estabilização do processo iterativo. (Adaptada de Huang e Xie, 2010).

### 3.3.4 Penalização

O expoente de penalização  $p$  é utilizado em problemas de otimização estrutural para fazer com que valores intermediários entre 0 e 1 sejam aproximados a 0 (vazio) e a 1 (cheio). No caso do método BESO, valores entre  $x_{min}$  e 1. Logo o expoente de penalização leva um elemento finito próximo de zero a ser eliminado da estrutura e elementos próximos de um, a se tornarem serem elementos que compõem a fração sólida da estrutura, formando assim a topologia final.

### 3.3.5 Múltiplos materiais

A consideração de diferentes materiais na otimização de estruturas ocorre pela inserção de seus respectivos módulos de elasticidades ( $E_1, E_2, \dots, E_n$ , de forma que  $E_1 > E_2 > \dots > E_n$ ), em outras palavras, das diferentes fases da estrutura. Assim, para estruturas com diferentes fases, a propriedade é dada por:

$$E(x_{ij}) = E_j(1 - x_{ij}^p) + E_{j+1}x_{ij}^p, \quad (3.47)$$

em que  $p$  é o número de penalização,  $x_{ij}$  é a variável de projeto do elemento  $i$  e do material  $j$  definida como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } E \geq E_j \\ x_{\min} & \text{para } E \leq E_{j+1} \end{cases} \quad (3.48)$$

De forma análoga, tem-se que a densidade do elemento finito é tida como:

$$\rho(x_{ij}) = \rho_j(1 - x_{ij}^p) + \rho_{j+1}x_{ij}^p \quad (3.49)$$

Esta consideração é importante para a inclusão do peso próprio dos materiais que fazem parte da estrutura otimizada topologicamente.

## 4 CRITÉRIOS DE FALHA

Nesta seção são apresentados os critérios de falha de Ottosen e von Mises implementados no algoritmo proposto. De forma que o modelo de Ottosen é utilizado para representar o material concreto e o modelo de von Mises, para representar o material aço nas estruturas analisadas.

### 4.1 CRITÉRIO DE FALHA DE OTTOSEN PARA O CONCRETO

Conforme Ottosen (1977) ao considerar o carregamento proporcional, existe uma relação linear entre a tensão e deformação. Com isso, o autor propôs em sua publicação um critério de falha para materiais isotrópicos em estado homogêneo de tensão que pode ser expresso em termos das três invariantes de tensão  $I_1$ ,  $J_2$  e  $\theta$ .

$$f(I_1, J_2, \theta) = \alpha \frac{J_2}{f_{cm}} + \lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 - f_{cm} = 0 \quad (4.1)$$

Assume-se a normalização do critério de falha pela resistência à compressão média do concreto,  $f_{cm}$ . Dessa forma, a Equação (4.1) pode ser reescrita da forma:

$$f(I_1, J_2, \theta) = \alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.2)$$

em que  $\lambda$  é função do  $\cos 3\theta$  para dois casos (positivo ou negativo):

$$\lambda = \begin{cases} c_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1}(c_2 \cos 3\theta) \right] & \text{para } \cos 3\theta \geq 0 \\ c_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(-c_2 \cos 3\theta) \right] & \text{para } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo o  $\cos 3\theta$  dado por:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.4)$$

O segundo e terceiro invariantes de tensões desviadoras  $J_2$  e  $J_3$  podem ser expressos, respectivamente, por:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 \quad (4.5)$$

$$J_3 = \frac{1}{27} (2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3) \quad (4.6)$$

De acordo com Gomes (2001), nas Equações (4.2) e (4.3)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes expressas, respectivamente, por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}, \beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}, c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}} \text{ e } c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2 \quad (4.7)$$

com a variável  $k$  função da razão entre a resistência média à tração pela resistência média à compressão do concreto.

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}} \quad (4.8)$$

Segundo Chen e Han (1988) as Equações (4.2) e (4.3) definem uma superfície de falha com meridianos curvos e seções transversais não circulares nos planos desviadores. Os meridianos descritos e apresentados na Equação (4.2) são parábolas quadráticas cuja convexidade depende de  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . As seções transversais têm propriedades geométricas de simetria e convexidade, e mudam de formato de quase triangular à quase circular com o aumento da pressão hidrostática (Figura 21, superfície no espaço das tensões principais, visto a partir do meridiano hidrostático).

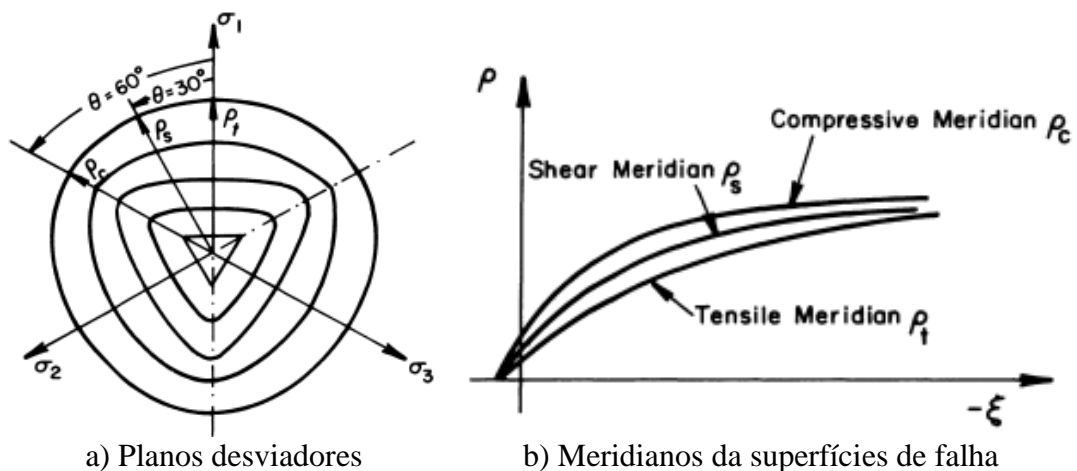


Figura 21 – Representação de a) seções nos planos desviadores e b) meridianos de superfícies de falha (Chen e Han, 1988).

## 4.2 CRITÉRIO DE FALHA DE VON MISES PARA O AÇO

Como aborda Chen e Han (1988), o critério de escoamento de von Mises, datado de 1913, é baseado na premissa que o escoamento começa quando a tensão de cisalhamento octaédrica atinge um valor crítico; em outras palavras, quando o segundo invariante de tensões desviadoras ( $J_2$ ) ultrapassa  $k^2$ . De forma simplificada, essa relação pode ser escrita da forma:

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (4.9)$$

Há várias expressões para  $J_2$ , assim o critério pode assumir diferentes formas. Por exemplo,  $J_2$  pode ser escrito em termos de tensões principais na forma:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (4.10)$$

A variável  $k$  é a tensão de escoamento em cisalhamento puro em um ensaio uniaxial de tração. A condição inicial de escoamento, considerando a tensão de escoamento inicial do material,  $\sigma_e^0$ , ocorrerá quando:  $\sigma_1 = \sigma_e^0$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Substituindo essa condição na Equação (4.10) e considerando a relação da Equação (4.9) tem-se que:

$$k^2 = \frac{1}{3} (\sigma_e^0)^2 \quad \therefore \quad k = \frac{\sigma_e^0}{\sqrt{3}} \quad (4.11)$$

Chagando à tensão de von Mises,  $\sigma_{vM}$ ,

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \quad (4.12)$$

que pode ser rescrita para estado plano de tensões da forma:

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (4.13)$$

## 5 PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DAS ESTRUTURAS ANALISADAS

No algoritmo implementado, para que os materiais concreto e aço possam ser analisados ao mesmo tempo, foi necessário programá-lo em 2 etapas, chamadas aqui de fases. A fase 1, diz respeito à otimização do concreto propriamente dita, em que os elementos com menor energia de deformação são removidos e são formados vazios na estrutura; logo, nesta fase haverá apenas elementos vazios ou de concreto. A partir da estrutura otimizada na fase 1 (uma vez atingida a fração volumétrica desejada), na fase 2 ocorre a adição de aço nas regiões de concreto que estão falhando, bem como a verificação do concreto e do aço com base nos critérios de Ottosen e de von Mises, respectivamente. Nessa 2ª fase, contém vazio, elementos de concreto e de aço. A estrutura é considerada segura quando os dois critérios de falha são atendidos e assume-se que nesta fase os materiais ainda estejam no regime elástico-linear.

### 5.1 FASE 1

De forma geral, no processo de otimização topológica de estruturas contínuas ou descontínuas analisadas por meio do algoritmo BESO, utilizando o critério de *compliance*, chega-se à estrutura ideal por meio da fração volumétrica desejada e ao atingir a mínima energia de deformação. Em outras palavras, o usuário informa ao algoritmo o volume final da estrutura pretendido e em cada processo iterativo o algoritmo remove e aloca simultaneamente material das regiões com menos energia de deformação para as regiões com mais energia de deformação, de acordo com o número de sensibilidade elementar (Equação (3.42)).

A Fase 1, do algoritmo proposto, distribui o concreto dentro do domínio de projeto. Essa distribuição ocorre com base na *compliance* (equivalente à flexibilidade) e do número de sensibilidade de cada elemento, como dito nos parágrafos anteriores. O processo iterativo finaliza quando a fração volumétrica e a *compliance* da estrutura como um todo se estabiliza. No entanto, apesar de haver tensão nos elementos, neste estágio, a falha do concreto ainda não é levada em consideração, pois o objetivo é a distribuição do concreto apenas e obter a estrutura mais rígida possível dentro daquela fração volumétrica estipulada, ficando assim, a análise das tensões para a 2ª fase. E, ao atingir a topologia final na fase 1, a estrutura resultante é o espaço de trabalho para a fase seguinte.

## 5.2 FASE 2

Na fase 2, do processo de otimização da estrutura, as regiões de concreto sob falha (geralmente nas regiões sob tração ou compressão elevada) são substituídas por aço. Nessas regiões, o número de sensibilidade pela tensão de Ottosen indica os elementos a serem trocados de concreto por aço. Se optou por este tipo de abordagem para que, dessa forma, a estrutura se aproxime ao máximo de uma estrutura real contendo concreto e aço, e não apenas utilizar a topologia final como parâmetro para o modelo treliçado de bielas e tirantes. Isso é usual na maior parte dos trabalhos que utilizam otimização topológica para determinar a treliça ideal, com menor energia de deformação, e então projetar estruturas de concreto armado com descontinuidades (regiões D).

Neste estágio de otimização, a fração volumétrica já não é uma restrição da otimização topológica e sim uma consequência da otimização, pois os elementos de concreto sob falha são substituídos por elementos de aço reduzindo, assim, o volume de concreto da estrutura. As restrições nesta fase são as tensões de Ottosen e von Mises.

A estabilização do processo iterativo ocorre semelhante ao da fase 1, exceto pelo fato do número de sensibilidade utilizar o critério de Ottosen e de von Mises como parâmetros de avaliação das tensões, conforme Equação (3.43). Dessa forma, a estrutura estará segura quando nenhum elemento de concreto violar o critério de Ottosen e os elementos de aço estiverem com a tensão de von Mises abaixo do limite.

## 5.3 FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

Para exemplificar o exposto nas subseções anteriores, foi elaborado um fluxograma contendo cada etapa do processo de otimização da estrutura na fase correspondente, do início (inserção de dados de projeto, parâmetros de otimização, etc.) até a convergência, como ilustra a Figura 22.

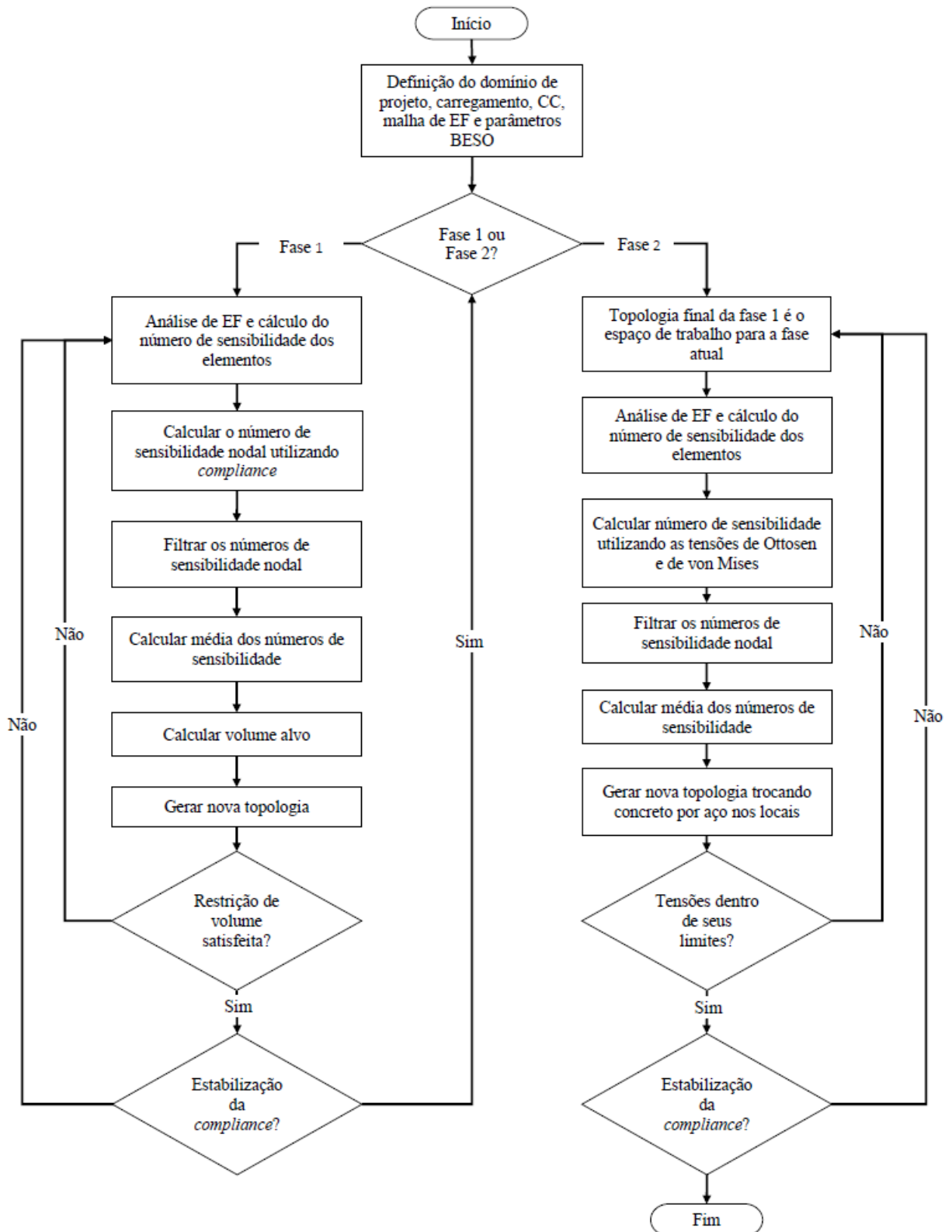


Figura 22 – Fluxograma do processo de otimização implementado em duas fases.



## 6 DETALHAMENTO DAS ESTRUTURAS ANALISADAS

Quando a fração volumétrica é atingida e a variação da *compliance* entre iterações é menor do que a tolerância com todos os elementos finitos de concreto ou de aço em seu estado de tensão abaixo dos limites de falha correspondentes (Ottosen e von Mises), dá-se por concluída a otimização. E uma vez que se tenha a estrutura de concreto armado otimizada, passa-se para a fase de detalhamento das armaduras. Se faz necessário o detalhamento pois percebe-se que a estrutura otimizada possui elementos finitos de aço que não se assemelham a barras de aço discretas inseridas ao concreto, como em estruturas reais. Dessa forma, ao realizar o detalhamento, ou seja, obter barras de aço discretizadas que irão compor a topologia, deve-se respeitar a área de aço equivalente aos elementos finitos apresentados na otimização e a região em que eles ocorrem.

### 6.1 DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO DAS BARRAS DISCRETAS

Nesta etapa de dimensionamento das barras de aço a serem distribuídas nas regiões onde a otimização retorna elementos finitos que representam aço, é considerada a direção principal de cada elemento finito de aço. Se considera a seção transversal mais solicitada dessas regiões e realiza-se um somatório das forças desses elementos finitos de aço, conforme Equação (6.1), sempre respeitando a direção principal das forças dos elementos finitos para este somatório.

$$F_t = \sum_{e=1}^N F^e \quad (6.1)$$

em que a força considera para cálculo,  $F_t$ , como dito, é o somatório das forças em cada elemento de aço,  $e$ , até o número total de elementos,  $N$ , que compõe o tirante em questão. Após determinada a força resultante no tirante, procede-se com a determinação da área de aço necessária para resistir ao esforço.

A partir da força total atuante na seção transversal, dimensiona-se a área de aço para resisti-la e distribui-se elementos finitos para representar as barras de aço discretizadas. Essas barras dimensionadas e detalhadas fazem o papel dos elementos finitos que eram de aço oriundos da otimização.

Como parâmetro para determinar a quantidade de barras equivalente à área de aço calculada, utiliza-se da Tabela B.1 da ABNT NBR 7480:2007 - Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - especificações, na qual são apresentadas as bitolas das barras de aço e suas respectivas áreas. O detalhamento da estrutura em si é apresentado na Seção 8 deste trabalho.

## 6.2 HOMOGENEIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Na fase de análise da estrutura final otimizada e com o detalhamento das armaduras definido, faz-se necessário realizar a homogeneização das propriedades dos elementos finitos correspondentes. Isso se deve por que, uma vez definidas as armaduras que fazem parte de um determinado elemento finito (número discreto de barras de um certo diâmetro), essas não ocuparão toda a área do elemento. A homogeneização é feita tanto para a rigidez do elemento finito como para a densidade do elemento finito, que contém os materiais concreto e aço.

A Figura 23 exemplifica o que ocorre uma vez detalhadas as armaduras de aço que compõe a estrutura final de concreto armado. Nesta figura,  $b$  representa a profundidade do elemento finito (i.e., a largura da viga),  $L$  é a dimensão do comprimento e altura do elemento finito,  $A_s$  é a área de aço e  $A_t$  é a área total do elemento.

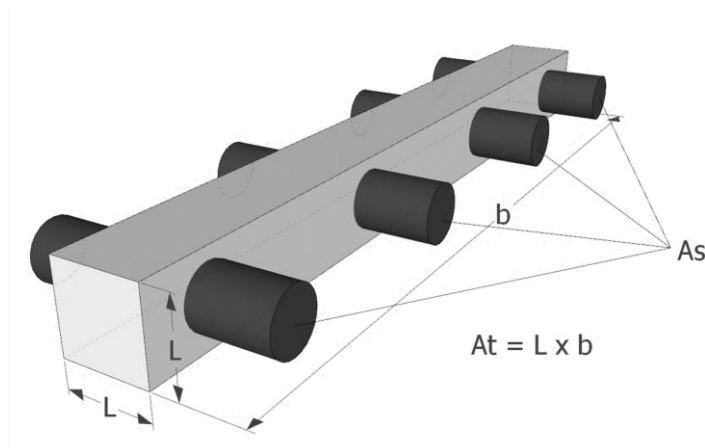


Figura 23 – Esquema da homogeneização de elementos de concreto que contém barras de aço discretas.

Pode-se iniciar a dedução do processo de homogeneização partindo-se de uma proporção de aço,  $\gamma$ , que existe entre a área de aço,  $A_s$ , que está contida em um elemento finito de concreto,

e a área total,  $A_t$ , em que a barra discreta de aço transpassa.

$$\gamma = A_s / A_t \quad (6.2)$$

Para a área de concreto, tem-se que:

$$A_c = A_t - A_s \quad (6.3)$$

Dividindo  $A_c/A_t = 1 - \gamma$  tem-se a diferença da Equação (6.2), que nada mais é do que a proporção de concreto no elemento finito. Para a homogeneização das densidades dos materiais nos elementos que possuem aço e concreto, a nova densidade homogeneizada fica definida como:

$$\rho_h = \gamma \rho_s + (1 - \gamma) \rho_c \quad (6.4)$$

Para a homogeneização dos módulos de elasticidade dos materiais, quando aço estiver dentro de elementos com concreto, o novo módulo de elasticidade homogeneizado fica definido como:

$$E_h = \gamma E_s + (1 - \gamma) E_c \quad (6.5)$$

Caso queira-se obter as tensões individuais dos materiais que compõem o material homogeneizado, pode-se proceder como segue na Equação (6.6). A partir das tensões finais de von Mises, chega-se à equação de equilíbrio estático, dada por:

$$F = \sigma_{vM} A_t = F_c + F_s = \sigma_s A_s + \sigma_c A_c \quad (6.6)$$

Prescrevendo agora a equação de compatibilidade (assume-se que aço e concreto estão perfeitamente aderentes, portanto, sofrendo a mesma deformação), tem-se as seguintes relações entre tensões e deformações para o aço e para o concreto, respectivamente, assumidos elástico-linear:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon \quad \text{e} \quad \sigma_c = E_c \varepsilon \quad (6.7)$$

Logo, essas duas equações podem ser relacionadas da forma:

$$\sigma_c = E_c \sigma_s / E_s \quad (6.8)$$

Substituindo a equação anterior na Equação (6.6), tem-se a expressão em função apenas de  $\sigma_s$ :

$$\sigma_{vM} A_t = \sigma_s A_s + E_c (\sigma_s / E_s) A_c \quad (6.9)$$

Dividindo a Equação (6.9) por  $A_t$ , chega-se à relação de proporcionalidade em função da tensão nos elementos de aço e dos módulos de elasticidade do concreto e do aço:

$$\sigma_{vM} = \gamma \sigma_s + (1 - \gamma) E_c (\sigma_s / E_s) \quad (6.10)$$

Resolvendo para a tensão no aço,  $\sigma_s$ , obtém-se que:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{vM}}{\gamma + (1 - \gamma)(E_c / E_s)} = cte_s \cdot \sigma_{vM} \quad (6.11)$$

Para o concreto, segue-se o mesmo raciocínio, de forma que:

$$\sigma_{vM} = \gamma E_s (\sigma_c / E_c) + (1 - \gamma) \sigma_c \quad (6.12)$$

Para a tensão no concreto,  $\sigma_c$ , chega-se também à:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{vM}}{\gamma(E_s / E_c) + (1 - \gamma)} = cte_c \cdot \sigma_{vM} \quad (6.13)$$

Lembrando que para as tensões de von Mises no material aço, os valores estão contidos na Equação (4.12).

### 6.3 VERIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS ANALISADAS

Após detalhada a estrutura com barras discretas de aço e realizada a homogeneização das propriedades dos elementos que contêm concreto e aço, parte-se para a verificação da estrutura afim de avaliar se algum elemento de concreto ou de aço viola as tensões de Ottosen ou de von Mises. Para isso, um segundo algoritmo apenas para análise de elementos finitos foi implementado a partir do algoritmo de otimização estrutural. Nesse algoritmo, apenas é inserida a topologia resultante detalhada com barras discretas definidas pelo usuário baseadas na Subseção 6.1 e então feita a análise para flechas, tensões e deformações.

Vale destacar que, como é feita uma modificação da topologia de aço (colocando-se barras discretas) para que a estrutura final possa ser construída, há a possibilidade de que a estrutura detalhada com as barras apresente alguma região que possa violar algum dos critérios de falha

(fato não presente na solução dada pela otimização topológica). Por exemplo, a estrutura otimizada topologicamente indica colocação de aço em toda o contorno inferior da peça sob tração (p.e. viga biapoiada em flexão). Então, ao se discretizar com barras, faz-se necessário a inclusão do cobrimento e espaçamento, no caso de múltiplas camadas de barras. Desta forma, as regiões de concreto que surgirão na estrutura detalhada, poderão estar sujeitas a esforços maiores que os permitidos, cabendo ao projetista a correta análise e julgamento se essas regiões e esforços são relevantes.

## 7 EXEMPLOS E DETALHAMENTOS POR BIELAS E TIRANTES TRADICIONAL

Nesta seção são apresentados os exemplos comparativos traçando algumas considerações sobre as normas utilizadas por Goodchild et al. (2014) e por Novak e Sprenger (2002), para projetar as estruturas pelo método de bielas e tirantes de forma tradicional e como esses autores chegaram aos detalhamentos das estruturas finais. O objetivo deste capítulo, é demonstrar cada um dos passos necessários para realizar o projeto por bielas e tirantes, e que serve de base para os comparativos das estruturas otimizadas propostas neste trabalho.

É avaliado um exemplo de uma viga alta simétrica sem abertura proposta por Goodchild et al. (2014), onde foi utilizado o Eurocode 2:2004 para seu dimensionamento. E um segundo exemplo de uma viga assimétrica com abertura proposta por Novak e Sprenger (2002), no qual foi utilizado o ACI 318:2002. Ambos exemplos são apresentados juntamente com o detalhamento final obtido por Goodchild et al. (2014) e Novak e Sprenger (2002).

### 7.1 VIGA ALTA PELO EUROCODE 2:2004

A Figura 24 demonstra o exemplo de uma viga alta retirado de Goodchild et al. (2014). A viga possui dimensões de 5000×1500×450 mm, está apoiada em pilares de 600×450 mm e com distância entre eixos de 4400 mm. Sobre a viga há uma placa de 450×450 mm a uma distância,  $a_v$ , da face do pilar esquerdo à face da placa de 725 mm. A placa recebe uma carga permanente  $G_k = 1256$  kN e uma carga variável  $Q_k = 480$  kN, concentradas à 950 mm do pilar esquerdo. Neste exemplo, os autores determinam as armaduras assumindo um concreto com classe de C35 ( $f_{ck} = 35$  MPa), resistência característica do aço à tração,  $f_y = 500$  MPa e um cobrimento nominal,  $c_{nom} = 25$  mm.

#### 7.1.1 Modelo de treliça adotado

Tendo em vista que se trata de uma viga alta, todo o elemento é considerado descontínuo (região D). Goodchild et al. (2014) consideraram a verificação das tensões resistentes, verificação de tensões nas bielas inclinadas, projeto das armaduras principais, de ancoragem e armadura de pele. A Figura 25 mostra o modelo de bielas e tirantes adotado pelos autores para a viga alta e

as dimensões.

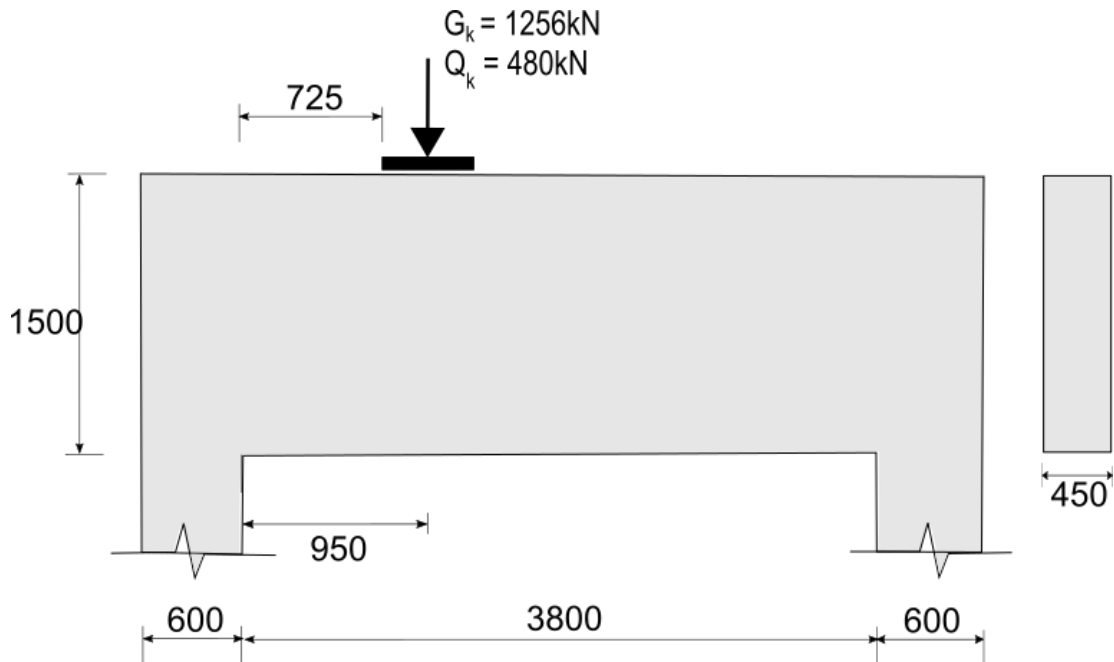


Figura 24 – Viga alta de Goolchild et al. (2014) (Adaptada de Goodchild et al., 2014).

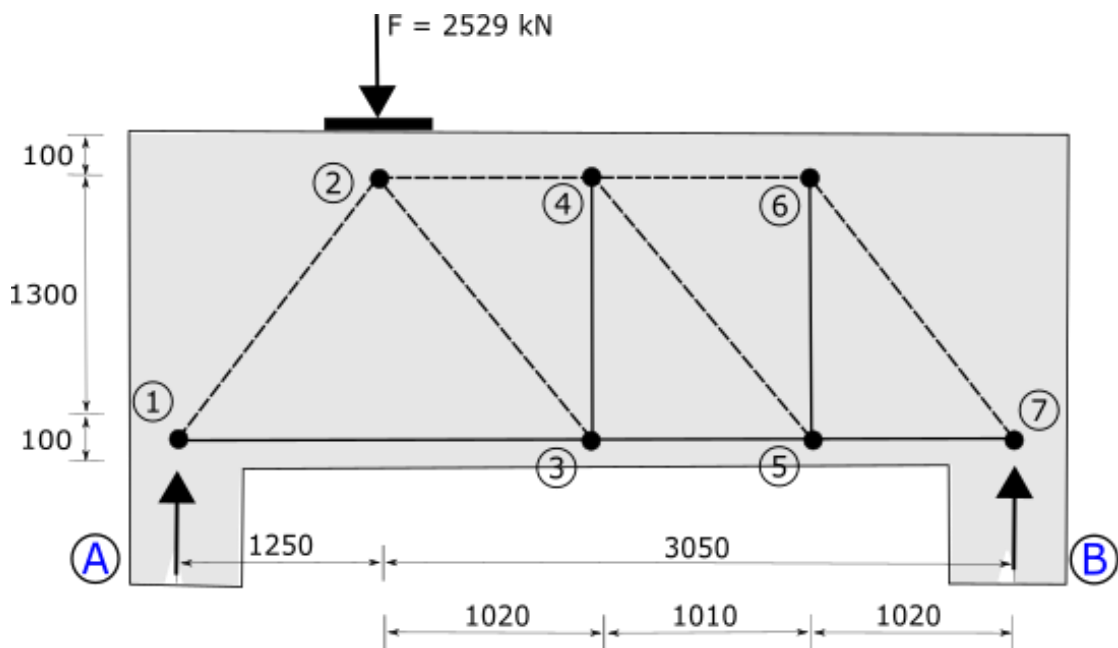


Figura 25 – Modelo treliçado adotado por Goodchild et al. (2014) (Adaptada de Goodchild et al., 2014).

Como a abordagem de Goodchild et al. (2014) é baseada no Eurocode 2:2004, a viga é projetada no Estado Limite Último (ELU) e são considerados os fatores de segurança de 1,35 e 1,50 para a carga permanente e variável, respectivamente. É considerada a densidade do concreto armado

de  $25 \text{ kN/m}^3$ . Sendo assim, a força resultante aplicada na placa superior vale:

$$F = \underbrace{1236 \cdot 1,35}_{\text{parcela permanente}} + \underbrace{480 \cdot 1,50}_{\text{parcela variável}} + \underbrace{5,0 \cdot 1,5 \cdot 0,45 \cdot 25 \cdot 1,35}_{\text{parcela de peso próprio}} \quad (7.1)$$

$$F = 2529 \text{ kN}$$

Considerando o momento em torno do ponto B, tem-se as seguintes reações em cada apoio:

$$R_A = 2529 \cdot 3,05 / 4,30 = 1794 \text{ kN} \quad (7.2)$$

$$R_B = 2529 - 1794 = 735 \text{ kN} \quad (7.3)$$

E por análise trigonométrica, é possível obter as forças resultantes na biela mais solicitada (1-2), no tirante principal (1-3) e nas barras verticais (3-4 e 5-6). Assim:

$$F_{12} = 1794 \cdot 1,80 / 1,30 = 2484 \text{ kN} \quad (7.4)$$

$$F_{13} = 2484 \cdot 1,25 / 1,80 = 1725 \text{ kN} \quad (7.5)$$

$$F_{34} = F_{56} = 735 \text{ kN} \quad (7.6)$$

Para verificar os esforços indicados em Goodchild et al. (2014), inclusive de algumas barras que foram indicadas, na Figura 26 está indicada a treliça modelada no software Ftool para obtenção de todos os esforços nas barras.

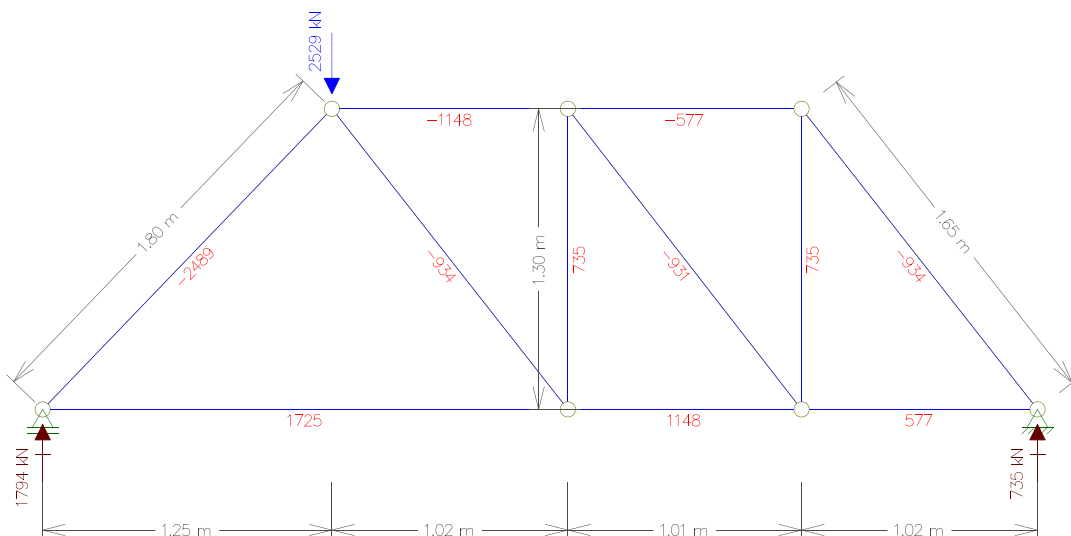


Figura 26 – Forças atuantes nos tirantes e nas bielas.



### 7.1.2 Verificação das tensões nos apoios e do ponto de aplicação de carga

Seguindo a lógica do método de bielas e tirantes, Goodchild et al. (2014) realizaram as verificações dos nós críticos (singulares), como descrito na Subseção 2.3.4 deste trabalho. Na estrutura em questão, conforme ilustra a Figura 25, os nós singulares a serem verificados são: o nó 1, do tipo CCT, relativo ao apoio A; e nó 2, do tipo CCC, relativo ao ponto de aplicação da carga aplicada. Iniciando por este último, deve-se calcular as tensões solicitante e resistente do ponto em questão:

$$\sigma_{Sd} = 2529 \times 10^3 / (450 \cdot 450) = 12,5 \text{ MPa} \quad (7.7)$$

$$\sigma_{Rd} = 1,0 \cdot [1 - (35 / 250)] \cdot 0,85 \cdot 35 / 1,5 = 17,1 \text{ MPa} \quad (7.8)$$

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \rightarrow \text{Ok} \quad (7.9)$$

Já no nó 1, do apoio A (Figura 27), primeiro se determina a largura da base,  $a_1$ , da biela de compressão:

$$a_1 = 600 - c_{nom} - 2s_o \quad (7.10)$$

$$a_1 = 600 - 25 - 2 \cdot 50 = 475 \text{ mm} \quad (7.11)$$

para então determinar as tensões solicitante e resistente do apoio A, respectivamente:

$$\sigma_{Sd} = 1794 \times 10^3 - (475 \cdot 450) = 8,39 \text{ MPa} \quad (7.12)$$

$$\sigma_{Rd} = 0,85 \cdot (1 - 35 / 250) \cdot 0,85 \cdot 35 / 1,5 = 14,5 \text{ MPa} \quad (7.13)$$

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \rightarrow \text{Ok} \quad (7.14)$$

Por inspeção, é verificado que o apoio B (nó 7) é seguro, visto que a configuração deste apoio é igual à do apoio A e com solicitação menor.

### 7.1.3 Dimensionamento dos tirantes

Iniciando o dimensionamento pela armadura principal, o dimensionamento dos tirantes segue

o mesmo princípio do dimensionamento da armadura de flexão de estruturas convencionais, em que a área de aço é o resultado da força atuante no tirante pela resistência à tração de projeto do aço. Logo, a área de aço dessa região pode ser determinada por:

$$A_s = \frac{F}{f_y / 1,15} \quad (7.15)$$

assim:

$$A_{s,13} = \frac{F_{13}}{f_y / 1,15} = \frac{1725 \times 10^3}{500 / 1,15} = 3968 \text{mm}^2 \quad (7.16)$$

Goodchild et al. (2014) utilizam  $8\phi 25$  para o tirante principal, que é o equivalente a uma área de  $3928 \text{mm}^2$ , e os autores dividem a armadura em duas camadas espaçadas 50mm uma da outra, ou seja:  $2 \times 4\phi 25 \text{ e } 50 \text{mm}$ . Já os tirantes verticais ( $T_{34}$  e  $T_{56}$ ), que equivalem à estribos na estrutura, são determinados a partir da força de 735 kN atuante em ambos tirantes.

$$A_{s,34} = A_{s,56} = \frac{F}{f_y / 1,15} = \frac{735 \times 10^3}{500 / 1,15} = 1690 \text{mm}^2 \quad (7.17)$$

A distribuição proposta pelos autores foi igual a  $\phi 16 \text{ c}/225 \text{mm}$ , equivalente a uma área de  $1768 \text{mm}^2/\text{m}$ .

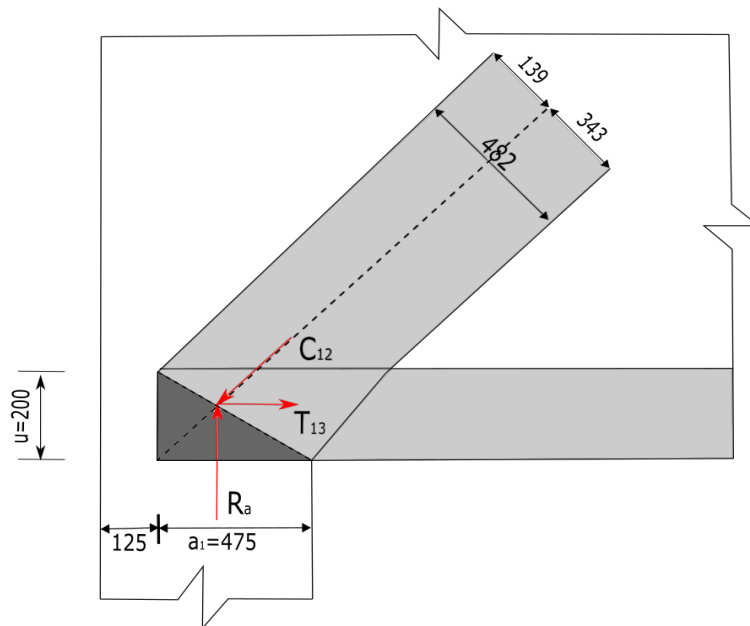


Figura 27 – Apoio A do tipo CCT (Goodchild et al., 2014).

### 7.1.4 Comprimento de ancoragem

Para os tirantes principais com armadura de 25 mm, a ancoragem necessária assumindo barra reta para concreto classe C35 deve ser de 790 mm. No entanto, a ancoragem disponível além da face do pilar (pilar + altura do tirante – cobrimento – diâmetro da barra em U) é igual a:

$$l_{b,disp} = 600 + 200 / 2 - 25 - 16 = 655 \text{ mm} \quad (7.18)$$

É possível notar que o comprimento de ancoragem não é suficiente, sendo necessário empregar dobras no final das barras. Assim:

$$f_{bd} = 2,25\eta_1\eta_2f_{ctd} = 2,25 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot (0,7 \cdot 0,3 \cdot 35^{2/3}) / 1,5 = 3,37 \text{ MPa} \quad (7.19)$$

$$l_{bd} = 0,7(25/4)(435/3,37) = 570 \text{ mm} \quad (7.20)$$

ficando cada barra com ancoragem de projeto,  $l_{bd} = 570 \text{ mm}$ .

### 7.1.5 Verificação das tensões nas bielas da treliça

Goodchild et al. (2014) avaliaram a tensão na biela 1-2 verificando inicialmente a necessidade de reforço transversal. Isso ocorre devido às eventuais tensões de tração transversal que surgem por conta da compressão na biela. Na ocorrência de tensões transversais, a tensão de projeto na biela inclinada excederá a resistência de projeto da biela, ou seja  $\sigma_{Sd} > \sigma_{Rd}$ , e neste caso é necessário reforço transversal. Partindo pelo cálculo da largura máxima do suporte,

$$a_{12} = L_b \sin \theta + u \cos \theta \quad (7.21)$$

$$a_{12} = 475 \cdot 1,25 / 1,80 + 200 \cdot 1,30 / 1,80 = 474 \text{ mm}$$

as tensões solicitante e resistente de projeto transversais na biela comprimida valem:

$$\sigma_{Sd} = 2484 \times 10^3 / (474 \times 450) = 11,6 \text{ MPa} \quad (7.22)$$

$$\sigma_{Rd} = 0,6 \cdot (1 - 35 / 250) \cdot 0,85 \cdot 35 / 1,5 = 10,23 \text{ MPa} \quad (7.23)$$

$$\sigma_{Sd} > \sigma_{Rd} \quad (7.24)$$

Neste caso, a biela 1-2 necessita de reforço transversal, pois a sollicitação da região excede a resistência do concreto à tração. A resistência transversal pode ser aumentada considerando um nó do tipo C-C-T ( $\sigma_{Rd} = 0,85(1 - f_{ck}/250)f_{ck}$ ) pelo fornecimento de armadura transversal de acordo com a Equação (7.13) ou calculando o esforço transversal,  $T$ :

$$T = \frac{(1 - 0,7a/H)}{4} F \quad (7.25)$$

em que  $a$  é a largura do suporte na extremidade podendo ser considerado o valor de  $a_{21}$  ou  $a_{12}$ . Para maximizar  $T$ , que equivale a minimizar a relação  $a/H$ , considera-se o valor mínimo de  $a$ , ou seja,  $a_{21}$  do nó 2, assim:

$$a_{21} = F/t \cdot \sigma_{Rd\max} \quad (7.26)$$

em que  $F = 2484$  kN e  $t = 450$  mm. A tensão resistente de projeto máxima é determinada pela expressão seguinte:

$$\sigma_{Rd\max} = k_1 v' f_{cd} \quad (7.27)$$

sendo  $k_1 = 1,0$  e  $v' = 1 - f_{ck}/250$ , a resistência de projeto do concreto à compressão,  $f_{cd}$ , pode ser determinada por:

$$f_{cd} = 0,85 f_{ck} / \gamma_c \quad (7.28)$$

Dessa forma,

$$\sigma_{Rd\max} = 1 \cdot (1 - 35/250) \cdot 0,85 \cdot 35 / 1,5 = 17,1 \text{ MPa} \quad (7.29)$$

Logo, a largura da biela vale:

$$a_{21} = \frac{2484 \cdot 103}{450 \cdot 17,1} = 323,6 \text{ mm} \quad (7.30)$$

Sendo o comprimento da biela  $H = 1800$ , a relação  $a/H$  vale:

$$a/H = 323,6/1800 = 0,18 \quad (7.31)$$

portanto, a força nos tirantes transversais é igual a:

$$T = \frac{(1 - 0,7 \cdot 0,18)}{4} 2484 = 542,8 \text{ kN} \quad (7.32)$$

E a área de aço requerida de projeto vale:

$$A_{sd} = \frac{542,8 \cdot 103}{500 / 1,15} = 1248 \text{ mm}^2 \quad (7.33)$$

Goodchild et al. (2014) consideram a colocação dessa área à 0,3 do comprimento da biela ( $0,3 \cdot 1800 = 540 \text{ mm}$ ), devido ao formato de garrafa da biela (Figura 28). Tendo em vista a inclinação da biela, se faz uma correção da posição dos tirantes para o ângulo de  $43,88^\circ$ , que resulta em uma área de aproximadamente  $2311 \text{ mm}^2/\text{m}$ , a ser distribuída tanto na horizontal, quanto na vertical do lado em questão. Sendo, dessa forma, a armadura de aço proposta de  $\phi 16 \text{ c}/175\text{mm}$ , igual a  $1148 \text{ mm}^2/\text{m}$ , nos dois sentidos e em ambos os lados da estrutura, equivalendo a uma área de  $2296 \text{ mm}^2/\text{m}$  dita ‘Ok’ pelos autores. Por inspeção, o lado direito da estrutura está verificado.

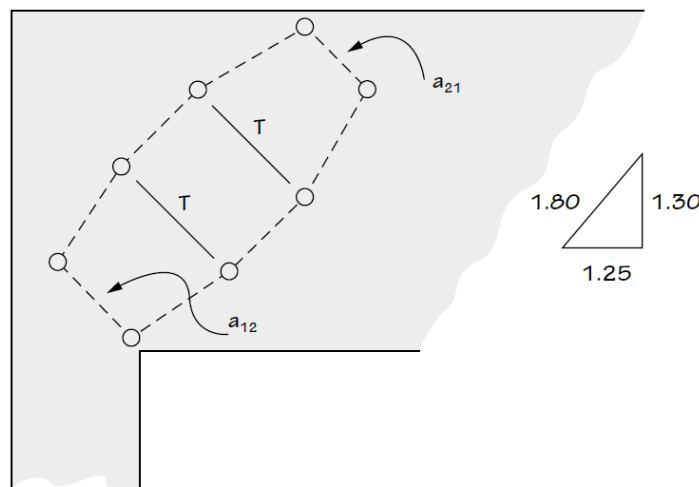


Figura 28 – Ilustração da biela 1-2 em forma de garrafa com os tirantes transversais  $T$  (Goodchild et al., 2014).

### 7.1.6 Verificação do modelo de bielas e tirantes proposto

Com referência à Figura 25, a linha central do tirante principal (1-3) sob tração para o qual foi determinado  $8\phi 25$ , coincide com a linha central assumida do tirante. Dessa forma, essa região é dita segura, segundo Goodchild et al. (2014).

Para a biela (2-4) sob compressão, presumindo nenhum reforço transversal ( $\sigma_{Rd} = 10,23 \text{ MPa}$ ),

como visto na Equação (7.23), a altura da biela vale  $1148 \times 10^3 / (450 \times 10,23) = 249$  mm, ou seja, 125 mm da linha central da biela até o topo da viga. Maior em relação aos 100 mm assumidos no modelo proposto pelos autores (Figura 25). Com isso, segundo Goodchild et al. (2014), a biela é segura.

### 7.1.7 Verificação ao cisalhamento

De acordo com o Eurocode 2:2004, considerando uma altura efetiva  $d = 1400$  mm, o cisalhamento deve ser verificado quando a distância entre a carga e o apoio,  $a_v$ , for maior do que  $1,5d$  (2100 mm), sendo assim, o cálculo da distância da carga até o apoio esquerdo vale:

$$a_{ve} = 950 - 450 / 2 = 725 \text{ mm} \quad (7.34)$$

E da carga até o apoio direito, a distância é igual a:

$$a_{vd} = 3800 - 950 - 450 / 2 = 2625 \text{ mm} \quad (7.35)$$

É notório que não é necessário reforço ao cisalhamento no lado esquerdo de aplicação da carga, visto que a distância do local de aplicação da carga até o apoio é menor do que o limite (725 mm < 2100 mm). Já no lado oposto, à direita do local de aplicação do carregamento, é necessário reforço ao cisalhamento uma vez que 2625 mm > 2100 mm.

O cálculo da armadura para reforço ao cisalhamento, à direita do ponto de aplicação da carga, passa pelo cálculo da relação:

$$\beta = a_{vd} / 2d = 2625 / (2 \cdot 1400) = 0,94 \quad (7.36)$$

em que:

$$\beta R_b = 0,94 \cdot 735 = 691 \text{ kN} \quad (7.37)$$

Sendo assim, a área de aço para resistir ao esforço de cisalhamento pode ser determinada da seguinte forma:

$$A_{sw} \geq \beta R_b / f_{yws} \cdot \text{sen} \alpha \quad (7.38)$$

$$A_{sw} = \frac{691000}{(500/1,15) \cdot 1,0} = 1589 \text{ mm}^2 \quad (7.39)$$

E conforme o Eurocode 2:2004, esse valor deve ser fornecido à  $0,75a_v$ , logo:

$$A_{sw} = 1589 / (0,75 \cdot 2,625) = 807 \text{ mm}^2 / \text{m} \quad (7.40)$$

### 7.1.8 Armadura mínima

Em vigas altas, segundo o Eurocode 2:2004, a área mínima de reforço vertical e horizontal por unidade de comprimento que precisa ser fornecida em cada face é igual a  $0,002A_c$ , equivalente à  $2h$ , sendo  $h$  a altura da viga. Desta forma, a distribuição da área mínima a ser fornecida é de  $900 \text{ mm}^2/\text{m}$  em cada face; ou seja:  $\phi 16 \text{ c}/22,5$ , que equivale à  $893 \text{ mm}^2/\text{m}$ .

### 7.1.9 Detalhamento final proposto pelos autores

O detalhamento fornecido pelos autores Goodchild et al. (2014) é apresentado na Figura 29, ficando:  $2 \times 4\phi 25$  para as armaduras principais;  $\phi 16 \text{ c}/17,5$  para as armaduras de pele (horizontais);  $\phi 16 \text{ c}/17,5$  para as armaduras verticais à esquerda do ponto de aplicação da carga; e  $\phi 16 \text{ c}/22,5$  para as armaduras à direita da carga.

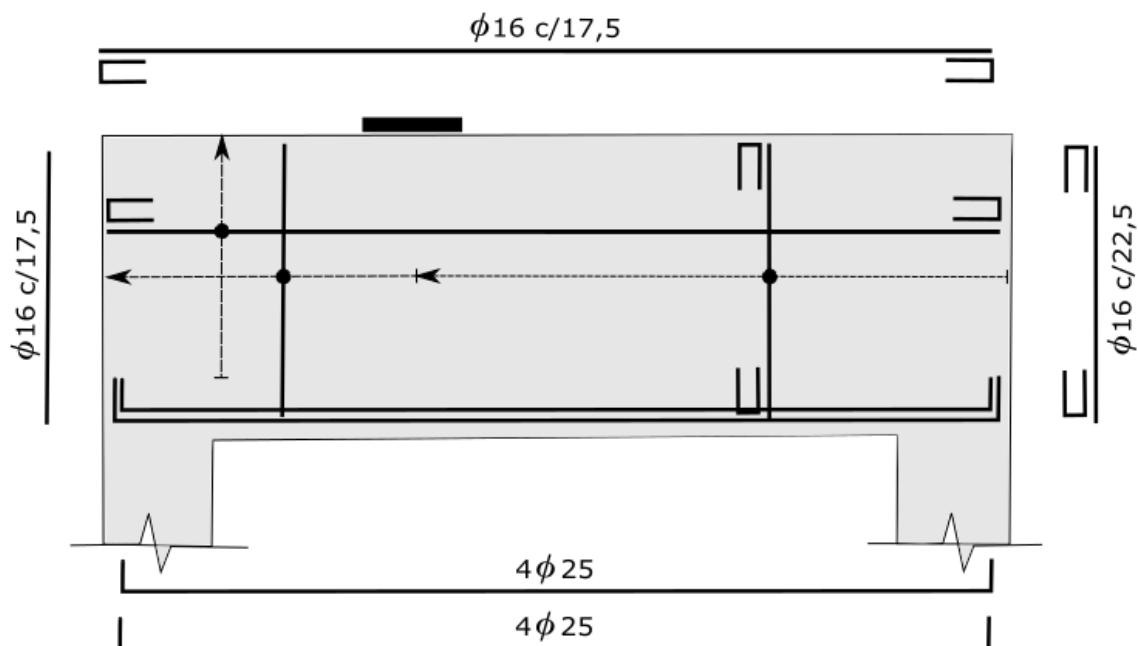


Figura 29 – Detalhamento proposto por Goodchild et al. (2014) (Adaptada de Goodchild et al., 2014).

## 7.2 VIGA ALTA COM ABERTURA PELO ACI 318:2002

Neste exemplo, contido na publicação de Reineck (2002), os autores Novak e Sprenger (2002) avaliam o projeto de uma viga alta assimétrica de concreto armado com abertura (Figura 30) segundo os critérios do ACI 318:2002 (Apêndice A). A estrutura como um todo é considerada como região D, devido à sua geometria. Por simplificação, o peso próprio foi contabilizado por um aumento na carga aplicada.

A viga possui dimensões de  $12700 \times 6000 \times 305$  mm, com uma abertura de  $4000 \times 2000$  mm e uma assimetria no canto superior direito de  $4100 \times 2500$  m. A viga está apoiada sobre pilares com dimensões de  $400 \times 305$  mm, distantes  $12000$  mm entre eixos. Possui uma placa de  $600 \times 305$  mm que recebe uma carga concentrada de  $2000$  kN, já majorada, distante  $4000$  mm do centro do pilar esquerdo. Neste exemplo os autores consideram a resistência de projeto do concreto à compressão  $f_{cd} = 31$  MPa e resistência de projeto do aço à tração  $f_{yd} = 368$  MPa.

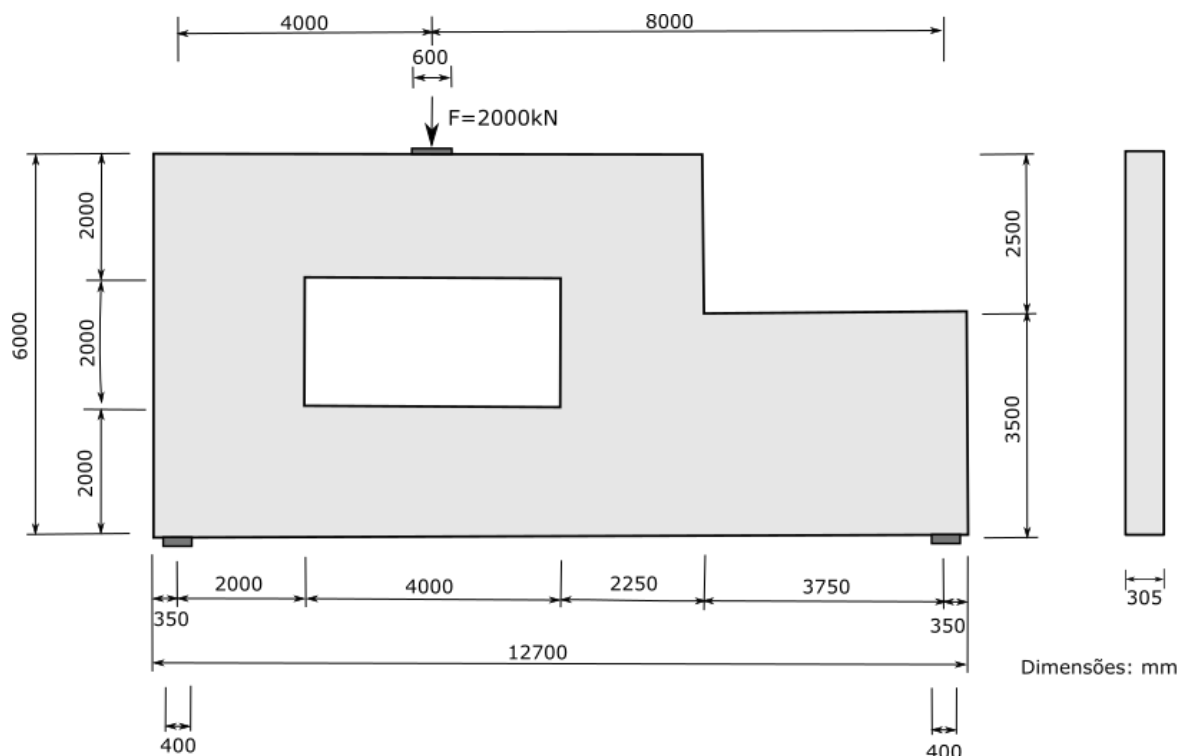


Figura 30 – Viga alta com abertura segundo Novak e Sprenger (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002).

### 7.2.1 Modelo de treliça adotado

Para desenvolvimento do modelo treliçado, Novak e Sprenger (2002) subdividiram a viga alta



em duas partes: acima e abaixo da abertura. Segundo os autores, a estrutura se comporta como uma viga alta superior que se estende até as colunas inclinadas (bielas C3 e C4, Figura 31) apoiadas em uma viga alta inferior. Com base nesse comportamento, os autores desenvolveram o modelo interno de bielas e tirantes como apresentado na Figura 31. Para facilitar o detalhamento do nó A, devido a simetria da região, a carga aplicada foi dividida em duas partes iguais  $F_1 = F_2 = F/2$ , aplicadas próximas uma da outra.

Novak e Sprenger (2002) colocam que o modelo é subjetivo, depende do julgamento do engenheiro, ou pode ser obtido por uma análise do fluxo da carga por elementos finitos. Para estabilidade da estrutura e pensando na parte construtiva, os tirantes foram posicionados onde os esforços principais atuam (no caso, logo acima e abaixo da abertura e na parte inferior da viga alta). Atendendo à seção RA.1 do ACI 318:2002, os autores definem o menor ângulo entre as bielas e os tirantes como sendo  $34^\circ$ , frente aos  $25^\circ$  da Norma.

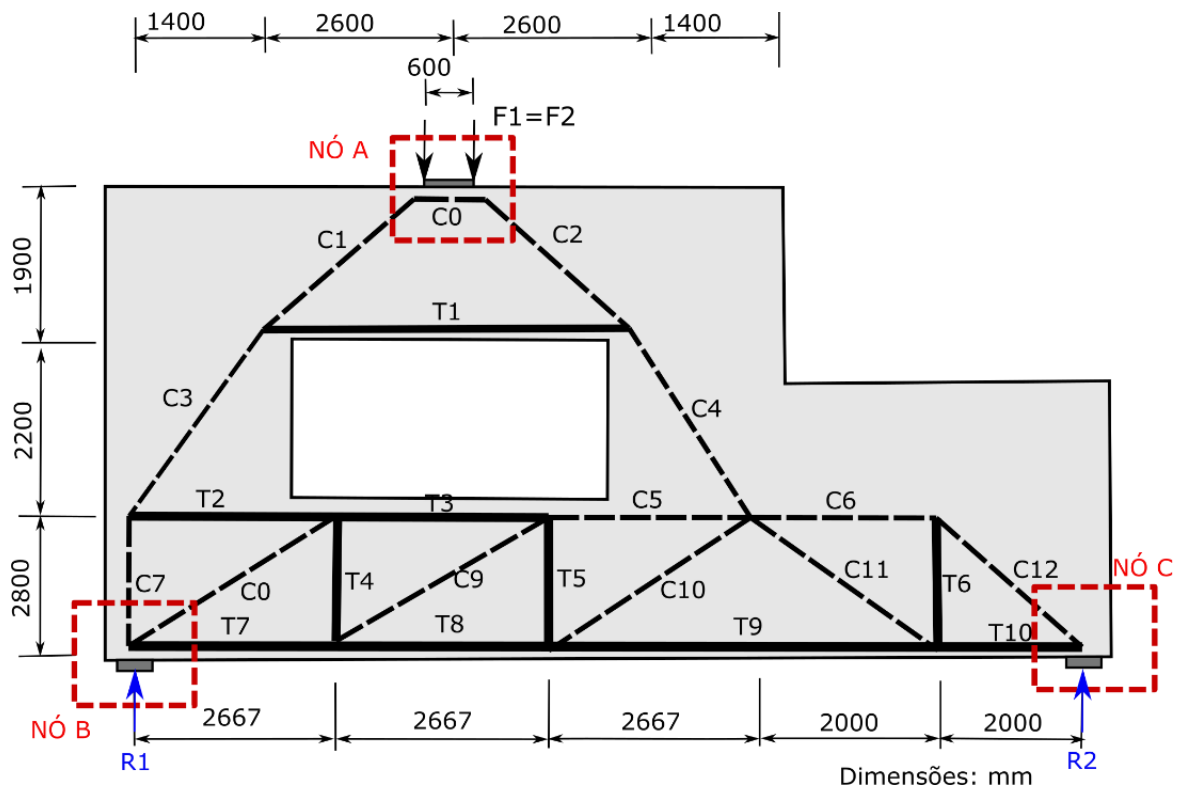


Figura 31 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Novak e Sprenger (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002).

A Figura 31 ilustra as linhas contínuas que representam os tirantes sob esforço de tração e as linhas tracejadas que representam as bielas sob esforço de compressão. Por análise estática da treliça, é possível obter os esforços nos elementos, que são apresentados na Figura 32. Da mesma forma, é possível determinar as reações nos apoios,  $R_1 = 1333$  kN e  $R_2 = 667$  kN.

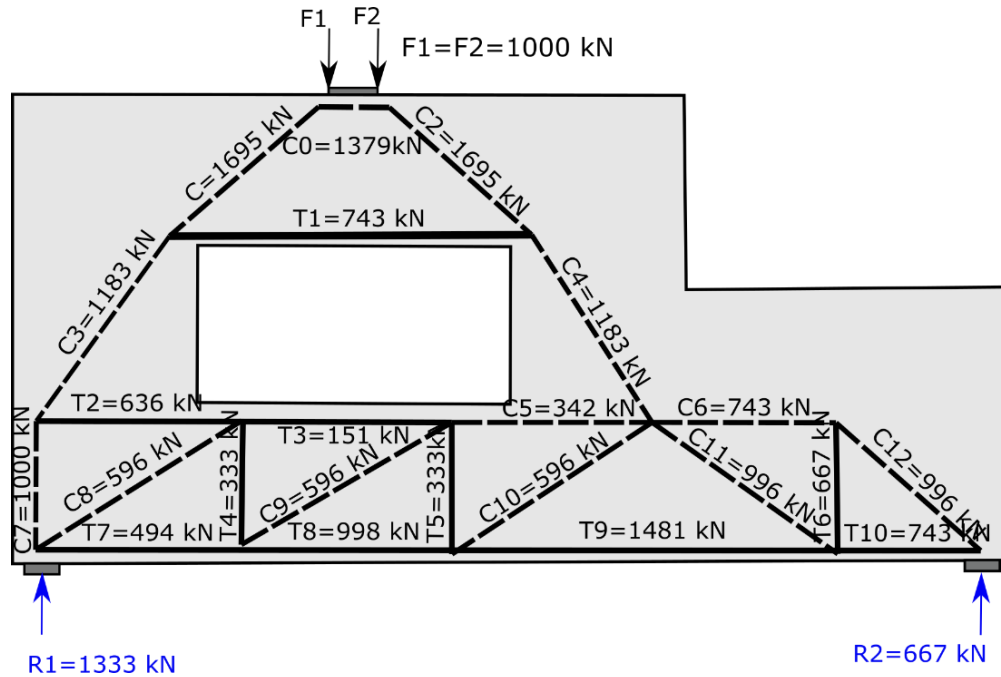


Figura 32 – Forças e reações do modelo de bielas e tirantes de Novak e Sprenger (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002)

## 7.2.2 Verificação das tensões nos apoios e dos pontos de aplicação de carga

Para a verificação das tensões nos apoios e pontos de aplicação de cargas, conforme a equação A-1 do ACI 318:2002, tem-se que

$$\phi_r F_n \geq F_u \quad (7.41)$$

onde  $F_u$  é a força em uma biela (ou tirante);  $F_n$  é a resistência nominal da biela, tirante ou zona nodal; e  $\phi_r$  é o fator de redução de resistência com valor de 0,75 para elementos estruturais dimensionados pelo método de bielas e tirantes. A força resistente pode ser determinada por:

$$F_n = 0,85 f_{cd} A = 2,6372 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot A \quad (7.42)$$

Lembrando que a placa de apoio é da mesma largura que a viga. Logo, para o nó A, a área da placa é  $A = 0,182 \text{ m}^2$  e a força resistente vale:

$$\begin{aligned} \phi_r F_n &= 0,75 \cdot 0,85 f_{cd} \cdot A = 2,6372 \times 10^7 \cdot 0,182 \\ \phi_r F_n &= 3595 \text{ kN} \end{aligned} \quad (7.43)$$

que é maior do que a carga aplicada no nó,  $F_u = 2000 \text{ kN}$ , indicando que esta condição é satisfeita. Para o nó B, tem-se  $\phi_r F_n = 2410 \text{ kN}$  e a carga pontual aplicada é a própria reação

atuante no nó,  $R_1 = F_u = 1333$  kN, indicando a segurança do nó ( $2410$  kN >  $1333$  kN). Igualmente, o nó C é dito seguro visto que  $2410$  kN >  $667$  kN.

### 7.2.3 Dimensionamento dos tirantes

Considerando que  $\phi_r F_n \geq F_u$ , como na verificação dos nós, essa expressão por ser reescrita como:

$$F_n \geq \frac{F_u}{\phi_r} \quad (7.44)$$

A partir da equação A-6 do ACI 318:2002, a resistência nominal do tirante pode ser calculada da seguinte forma:

$$F_{nt} = A_s f_y + A_{ps} (f_{se} + \Delta f_p) \quad (7.45)$$

como no exemplo analisado não há protensão ( $A_{ps} = 0$ ), a equação passa a ser

$$F_{nt} = A_s f_y \quad (7.46)$$

sendo  $f_y = 414$  MPa. Assim, a equação para dimensionar as armaduras fica sendo:

$$A_s = \frac{F_{nt}}{f_y} = \frac{F_u}{\phi_r f_y} = \frac{F_u}{310,5 Pa} \quad (7.47)$$

Tabela 3 – Áreas de aço e barras propostas por Novak e Sprenger (2002) para detalhamento

Tirante	$F_u$ [kN]	$A_{s,nesc}$ [mm <sup>2</sup> ]	$\phi$ [mm]	Nº de barras	$A_{s,form}$ [mm <sup>2</sup> ]	Distribuição
T1	744,0	2400	32	4	3216,9	4 $\phi$ 32
T2	636,0	2052	25	4	1963,4	4 $\phi$ 25
T3	151,0	484	25	4	1963,4	4 $\phi$ 25
T4	333,0	1071	12,5	10	1227,1	10 $\phi$ 12,5 c/457 mm
T5	333,0	1071	12,5	10	1227,1	10 $\phi$ 12,5 c/457 mm
T6	667,0	2148	12,5	18	2208,9	18 $\phi$ 12,5 c/229 mm
T7	493,0	1587	32	6	4825,3	6 $\phi$ 32
T8	987,0	3181	32	6	4825,3	6 $\phi$ 32
T9	1480,0	4774	32	6	4825,3	6 $\phi$ 32
T10	741,0	2387	32	6	4825,3	6 $\phi$ 32

Fonte: Adaptada de Novak e Sprenger, 2002.

A Tabela 3, resume a área de aço necessária para resistir aos esforços nos tirantes e a correspondente distribuição das barras de aço proposta por Novak e Sprenger (2002), resultando nas áreas de aço utilizadas ( $A_{s,form}$ ) para o detalhamento da estrutura.

#### 7.2.4 Verificação das bielas de compressão

Para a verificação das bielas de compressão, o procedimento é semelhante ( $\phi_r F_{ns} \geq F_{us}$ ) onde  $F_{ns} = f_{cu} A_{c,nec}$ , em que o valor de  $f_{cu} = 0,85 \beta_s f_{cd}$  e com  $A_{c,nec} = w_{nec} t$ , sendo  $t$  a largura da viga. Assume-se o valor de  $\beta_s = 0,60\lambda$ , com  $\lambda = 1$  para concretos com peso normais e para peças que não recebam reforço de aço. Este valor é tomado de forma conservativa, já que bielas com forma de garrafa podem se desenvolver. No caso de haver armadura transversal na biela, o ACI 318:2002 recomenda utilizar  $\beta_s = 0,75\lambda$ . Assim,

$$\phi_r 0,85 \beta_s f_{cd} A_{c,nec} \geq F_u \quad (7.48)$$

ou seja, a largura efetiva requerida da biela comprimida pode ser colocada como:

$$w_{nec} \geq \frac{F_u}{\phi_r 0,85 \beta_s f_{cd}} \quad (7.49)$$

Tabela 4 – Verificação das larguras das bielas de compressão

Biela	$F_u$ [kN]	$w_{nec}$ [mm]	$w_{form}$ [mm]
C1	1685	381	Ok
C2	1685	381	Ok
C3	1185	254	Ok
C4	1185	254	Ok
C5	343	76,2	Ok
C6	741	152,4	Ok
C7	1000	228,6	Ok
C8	595	127	Ok
C9	595	127	Ok
C10	595	127	Ok
C11	997	228,6	Ok
C12	997	228,6	Ok

Fonte: Novak e Sprenger, 2002.

A Tabela 4 apresenta os valores calculados de  $w_{nec}$  para cada uma das bielas de compressão e a indicação  $w_{form}$  'Ok', constata que a área necessária de concreto, composta pela largura da viga e pela largura da biela no modelo (suficiente para ser acomodada), é atendida.

### 7.2.5 Verificação das tensões nos nós da treliça

Assim como nos demais casos, a equação requerida a ser atendida é  $\phi F_n \geq F_u$ . Sendo os nós A, B e C do tipo singulares, devem ser verificados devido à criticidade das tensões do entorno por conta do pouco cobrimento. Sendo o nó A (Figura 33), do tipo C-C-C, no qual confluem 3 bielas de compressão,  $\beta_n = 1,0$ , de acordo com o ACI 318:2002. Enquanto que os nós B e C (Figuras 34 e 35, respectivamente), do tipo C-C-T, é ancorado 1 tirante, portanto  $\beta_n = 0,8$ .

De acordo com o ACI 318:2002, numa zona nodal a resistência nominal compressiva é dada por:

$$F_{mn} = f_{cu} \cdot A_n \quad (7.50)$$

e a tensão efetiva numa face da zona nodal é dada por:

$$\phi_r F_{cu} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot \beta_n \cdot f_{cd} \quad (7.51)$$

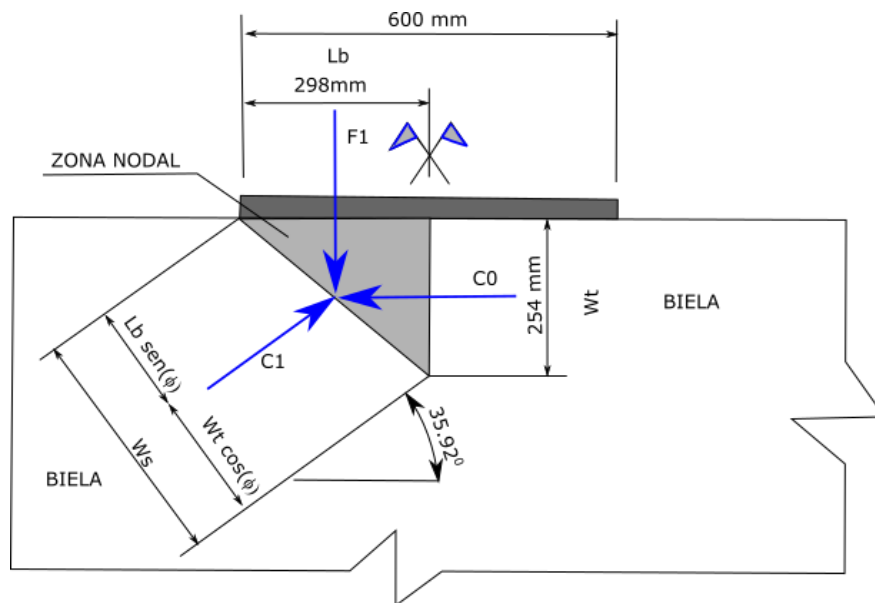


Figura 33 – Geometria do Nó A (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002).

Para o nó A, no qual a Figura 33 apresenta sua configuração, considera-se:  $F_1 = 1000$  kN,  $C_0 =$

1379 kN,  $C_1 = 1685$  kN,  $\theta = 35,92^\circ$  e  $\beta_n = 1,0$ . Sendo as larguras em torno do nó:  $w_{F1} = l_b = 29,4$  mm;  $w_{C0} = 254$  mm; e  $w_{C1} = w_s = Lb \text{ sen}(\theta) + w_t \text{ cos}(\theta) = 381$  mm; as áreas projetadas serão, respectivamente, para cada um dos lados do nó:  $A_{F1} = 9032$  mm<sup>2</sup>;  $A_{C0} = 77420$  mm<sup>2</sup>; e  $A_{C1} = 96774$  mm<sup>2</sup> e as respectivas forças resistentes:

$$F_{m_{F1}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{F1}} = 1797 \text{ kN} > F_1 = 1000 \text{ kN} \quad (7.52)$$

$$F_{m_{C0}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{C0}} = 1530 \text{ kN} > C_0 = 1379 \text{ kN} \quad (7.53)$$

$$F_{m_{C1}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{C1}} = 1917 \text{ kN} > C_1 = 1704 \text{ kN} \quad (7.54)$$

verificando, dessa forma, a segurança do nó A.

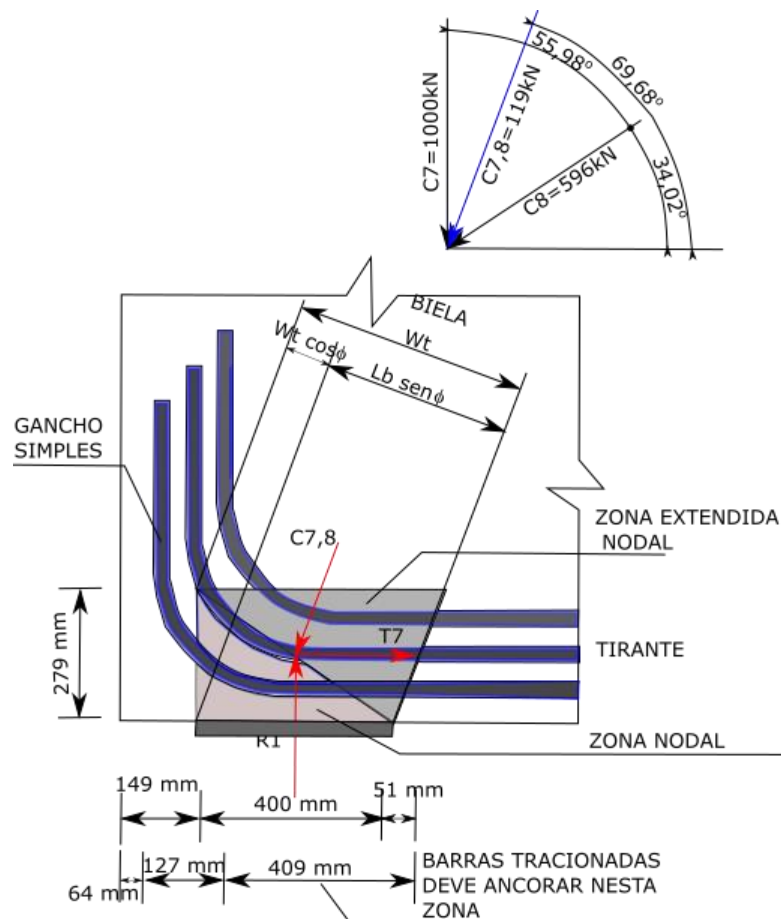


Figura 34 – Geometria do Nó B (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002).

Para o nó B, tem-se a Figura 34, indicativa de sua geometria, na qual:  $R_1 = 1333$  kN,  $T_7 = 494$  kN,  $C_{7,8} = 1419$  kN,  $\theta = 69,68^\circ$  e  $\beta_n = 0,8$ . Assim, calculando as larguras das bielas e tirantes e multiplicando-as pela largura da viga, chega-se às seguintes áreas:  $A_{CR1} =$

$121935 \text{ mm}^2$ ;  $A_{C_{T7}} = 83225.6 \text{ mm}^2$  e  $A_{C_{C7,8}} = 143226 \text{ mm}^2$ . E às seguintes forças resistentes:

$$F_{m_{R1}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{R1}} = 1930 \text{ kN} > R_1 = 1333 \text{ kN} \quad (7.55)$$

$$F_{m_{T7}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{T7}} = 1317 \text{ kN} > T_7 = 494 \text{ kN} \quad (7.56)$$

$$F_{m_{C7,8}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{7,8}} = 2264 \text{ kN} > C_{7,8} = 1419 \text{ kN} \quad (7.57)$$

indicando que o nó também está estável e em equilíbrio.

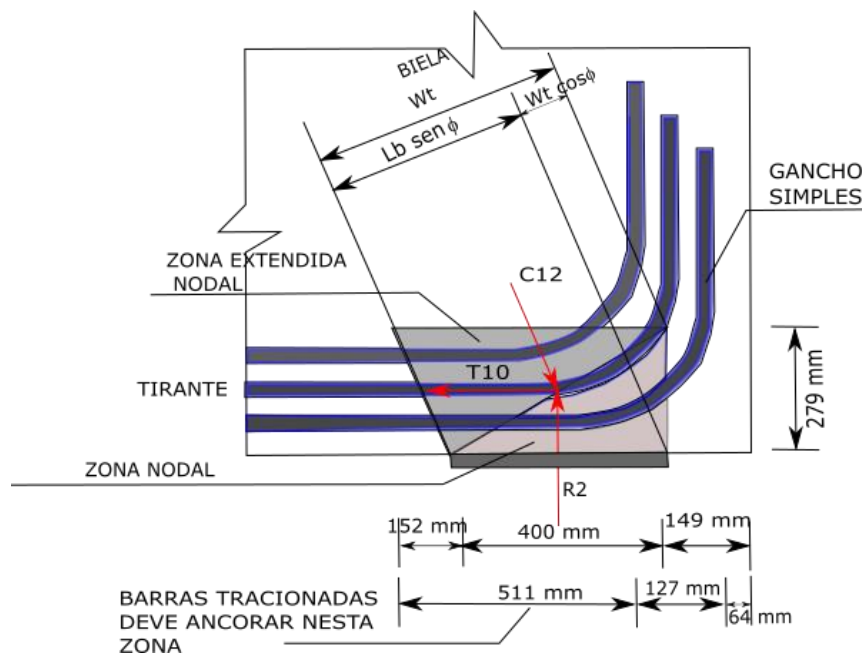


Figura 35 – Geometria do Nó C (Adaptada de Novak e Sprenger, 2002).

Para o nó C, tem-se a Figura 35 indicando sua geometria, para o qual  $R_2 = 667 \text{ kN}$ ,  $C_{12} = 1419 \text{ kN}$ ,  $T_{10} = 743 \text{ kN}$ ,  $\theta = 41,99$  e  $\beta_n = 0,8$ . O procedimento é semelhante ao do nó B. Tomando como início o cálculo das larguras das bielas e dos tirantes para posterior multiplicação pela largura da viga chega-se às seguintes áreas:  $A_{R2} = 121935 \text{ mm}^2$ ,  $A_{T10} = 83225.6 \text{ mm}^2$  e  $A_{C12} = 143226 \text{ mm}^2$ . Dessa forma, o cálculo das forças resistentes para  $\theta = 41,99$  e  $\beta_n = 0,8$ , é dado por:

$$F_{m_{R2}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{R1}} = 1930 \text{ kN} > R_2 = 667 \text{ kN} \quad (7.58)$$

$$F_{m_{T10}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{T10}} = 1317 \text{ kN} > T_{10} = 743 \text{ kN} \quad (7.59)$$

$$F_{m_{c12}} = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 \cdot f_{cd} \cdot A_{c_{c12}} = 2264 \text{ kN} > C_{12} = 997 \text{ kN} \quad (7.60)$$

indicando que o nó C por sua vez está em equilíbrio.

### 7.2.6 Comprimentos de Ancoragem

Prevalece o nó B quando o comprimento de ancoragem do gancho disponível é menor que o comprimento do gancho do nó C. O comprimento de ancoragem em um gancho padrão de acordo com o ACI 318:2002 é:

$$l_{dh} = \frac{0,02 \cdot \beta \cdot \lambda \cdot f_y}{\sqrt{f_c}} d_b \quad (7.61)$$

O ACI 318:2002 prescreve ainda, para uma cobertura além do gancho menor que 63,5 mm, um espaçamento de estribos não superior a  $3d_b$  ao longo do comprimento de ancoragem,  $l_{dh}$ , e o primeiro estribo estando dentro de  $2d_b$  da parte externa da dobra,  $l_{dh}$  pode ser multiplicado por 0,7 e, portanto, é reduzido à:

$$l_{dh} = 0,7 \cdot 577,85 = 404 \text{ mm} \quad (7.62)$$

$$l_{a_{nóB}} = \frac{(w_1 / 2)}{\tan 69,68^\circ} + 40 + 14,92 - 6,35 - 12,7 = 409,58 \text{ mm} \quad (7.63)$$

$$l_{a_{nóC}} = \frac{(w_1 / 2)}{\tan 41,99^\circ} + 40 + 14,92 - 6,35 - 12,7 = 510 \text{ mm} \quad (7.64)$$

$$l_{dh} = 404 \text{ mm} \leq 409 \text{ mm} \quad (7.65)$$

Dessa forma, os nós B e C são ditos aceitáveis. O valor de  $l_{dh}$  pode ser reduzido ainda mais pela razão entre  $A_{s,nec}$  e  $A_{s,for}$  ( $2387/4916 = 0,49$ ) conforme o ACI 318:2002. Essa redução adicional em  $l_{dh}$  não foi tomada, pois não altera os resultados.

### 7.2.7 Armadura mínima para retração e temperatura

A razão entre a área de armadura e a área bruta de concreto, segundo o ACI 318:2002, é obtida a partir da Equação (7.66):



$$\rho = A_s / A_c = 0,0018 \quad (7.66)$$

Novak e Sprenger (2002) assumiram uma armadura de 12,5 mm a cada 457,2 mm, pois seguindo o ACI 318:2002 o espaçamento não deve exceder 457,2 mm, com  $A_{st} = 129,03 \text{ mm}^2$ . Portanto, com a largura da parede sendo 304,8 mm, tem-se que:

$$\rho = \frac{2 \cdot 129,032}{457,2 \cdot 304,8} = 0,0019 \geq 0,0018 \quad (7.67)$$

Logo os autores determinaram barras de 12,5mm a cada 457,2 mm em cada sentido e em cada face da viga ( $\phi 12,5 \text{ c}/457$ )

### 7.2.8 Armadura mínima de pele

Verificando os requisitos do ACI 318:2002, são fornecidas apenas as armaduras mínimas horizontal e vertical para retração e temperatura. Caso a profundidade efetiva de uma viga exceder 914 mm, o reforço de pele deve ser distribuído de acordo com a referida norma. O reforço de pele deve ser distribuído por uma distância de  $d/2$  (sendo  $d$  a distância da fibra mais comprimida ao centroide das armaduras) em um espaçamento que não exceda o mínimo de  $s_{sk}$ , sendo:

$$s_{sk} > \begin{cases} d / 6 \\ 762 \text{ mm} \\ 1000A_b / (d - 762) \end{cases} \quad (7.68)$$

dessa forma,

$$s_{sk} = \frac{1000 \cdot 199,99}{1784,35 - 762} = 193 \text{ mm} \quad (7.69)$$

Portanto, a armadura horizontal de  $\phi 12,5 \text{ c}/457$  deve ser alterada para a  $\phi 16 \text{ c}/190 \text{ mm}$  para a borda da viga alta e acima da abertura em uma profundidade de 940 mm.

### 7.2.9 Detalhamento final proposto pelos autores

Por fim, a Figura 36 exemplifica todo o dimensionamento realizado nesta Seção e proposto por

Novak e Sprenger (2002). Tanto a imagem do detalhamento de Goodchild et al. (2014) segundo o Eurocode 2:2004, quando de Novak e Sprenger (2002) segundo o ACI 318:2002 foram desenhadas mantendo um padrão semelhante ao utilizado no Brasil. Desta forma, finda-se o dimensionamento e detalhamento dos exemplos propostos segundo o modelo de bielas e tirantes tradicional, sendo em seguida, realizadas as otimizações das estruturas pelo método de otimização topológica. São realizadas posteriores verificações e comparações das estruturas detalhadas neste capítulo com as estruturas otimizadas e detalhadas no Capítulo 8.

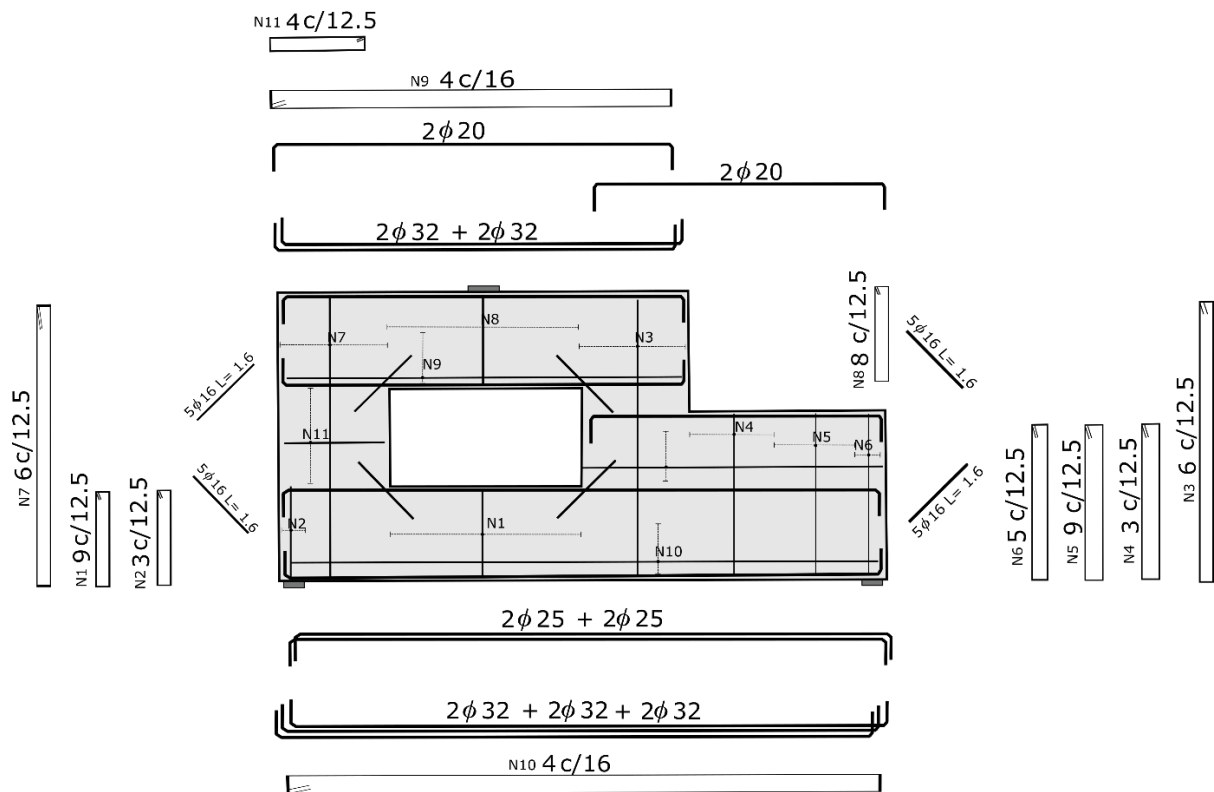


Figura 36 – Detalhamento proposto por Novak e Sprenger (Adaptada de NOVAK e SPRENGER, 2002).

## 8 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DOS EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos por meio das otimizações topológicas dos exemplos de Goodchild et al. (2014) e Novak e Sprenger (2002). São apresentadas as propriedades dos materiais concreto e aço, os parâmetros de otimização utilizados, os resultados e gráficos de otimização obtidos para cada exemplo, bem como as estruturas finais otimizadas. São apresentadas também as comparações das estruturas dimensionadas por meio do método tradicional de bielas e tirantes com as estruturas detalhadas com armaduras discretas a partir das estruturas otimizadas. As comparações são feitas a nível tensões e deformações, além de volume, massa e custos aproximados. Os custos são analisados apenas para se ter um parâmetro, pois não são considerados impostos, encargos e custos com fôrmas, essenciais para uma composição de custos mais detalhada.

Para os exemplos são testadas malhas regulares até chegar às malhas de elementos finitos das estruturas analisadas. As malhas em questão, visam a redução de tempo mantendo a qualidade no resultado final. Os parâmetros utilizados na otimização topológica são escolhidos a partir de testes previamente realizados, com o objetivo de obter a estrutura topologicamente otimizada e que contenha as distribuições de armaduras de forma suave, sem que ocorra o efeito de *checkerboard*.

### 8.1 EXEMPLO SEGUNDO O EUROCODE 2:2004

Iniciando pelo exemplo de Goodchild et al. (2014), com base no Eurocode 2:2004, é realizada a otimização da estrutura e discretização das barras de aço, como visto nas Seções 5 e 6, respectivamente, afim de comparar a estrutura otimizada (e detalhada) com a estrutura projetada por meio da abordagem tradicional do método de bielas e tirantes.

#### 8.1.1 Parâmetros utilizados na otimização

A escolha da fração volumétrica inicial é de extrema importância para o resultado final da estrutura, uma vez que frações volumétricas muito baixas implicam, na fase 2, em mais aço incorporado à estrutura, ou até mesmo na inviabilidade da estrutura a nível de instabilidade estrutural.

Como parâmetros para a simulação, foram utilizados 3000 elementos finitos quadrático sólido de 4 nós em estado plano de tensão, com dimensão de 50×50 mm cada elemento finito. São empregados os critérios de falha de Ottosen para o concreto e o critério de falha de von Mises para o aço. A parcela de peso próprio é considerada a partir aceleração da gravidade (9,81 m/s<sup>2</sup>) aplicada em cada grau de liberdade correspondente na vertical, de forma distribuída em toda estrutura. Visto que o peso próprio segundo o Eurocode 2:2004 é majorado, se fez essa majoração na otimização. No exemplo do Goodchild et al. (2014) todo peso próprio foi considerado aplicado junto com a carga vertical.

Na Tabela 5 são apresentadas as propriedades do concreto e do aço, tais como os módulos de elasticidade, os coeficientes de Poisson, as resistências do concreto à compressão e à tração, a resistência do aço e os pesos específicos. Para os elementos vazios é utilizada uma tolerância de 10<sup>-6</sup>. A tabela é baseada em alguns dados de Goodchild et al. (2014), como  $f_{ck}$  e  $f_y$ . Os dados restantes, são obtidos a partir da NBR 6118:2014.

Tabela 5 – Propriedades do concreto e do aço utilizadas na otimização.

$E_c$	$E_s$	$\nu_c$	$\nu_s$	$f_{ck}$	$f_{ct}$	$f_y$	$\rho_c$	$\rho_s$
[GPa]	[GPa]			[MPa]	[MPa]	[MPa]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[kg/m <sup>3</sup> ]
33	210	0,22	0,30	35	3,2	500	2400	7780

Na sequência (Tabela 6), são apresentados os parâmetros de otimização utilizados no código implementado, seguindo a metodologia BESO. É necessário considerar um raio mínimo para filtro do *checkerboard*,  $r_{min}$ , fração volumétrica de cada fase,  $V_{frac}$ , valor mínimo e máximo para variável de projeto,  $x_{min}$ , taxa evolutiva de cada fase,  $ER$ , expoente de penalização o para critério de *compliance*,  $p$ , expoente de penalização para critério de tensão,  $q$ , parâmetro de estabilização do processo de otimização,  $\alpha$ , e número máximo de iterações admissível.

Tabela 6 – Parâmetros para otimização

Fase	$r_{min}$	$V_{frac}$	$ER$	$x_{lim}$	$p$	$q$	$\alpha$	$tol$	Máx. Iterações
1	4	0,6	0,05						
2	2	0,01	0,01	[0,1]	3	4	0,5	10 <sup>-6</sup>	100

Fonte: Autor.

### 8.1.2 Resultados da otimização de Goodchild et al. (2014)

Como já mencionado, neste trabalho foram consideradas as características específicas de cada material (concreto e aço) para otimização da estrutura, diferenciando-se de outros trabalhos em que a estrutura é constituída por apenas um material, e é otimizada para obtenção do modelo treliçado. Essa consideração, em duas fases (concreto e aço), fez com que a *compliance* (energia de deformação) da estrutura reduzisse consideravelmente com a inserção de aço à estrutura, como é visto na Figura 37. Isso indica que a estrutura é mais rígida em relação a uma estrutura otimizada considerando apenas o material concreto, por exemplo.

É possível observar na Figura 37 que a mudança de fase e redução drástica da *compliance* ocorre a partir da 21ª iteração (linha azul). A partir dessa etapa, os elementos finitos que violaram o critério de falha de Ottosen, ou seja, que extrapolaram a resistência do concreto, foram substituídos por aço e a estrutura, otimizada até a fração volumétrica predeterminada. Nota-se também que há uma etapa de estabilização do processo evolutivo em cada fase ao atingir a fração volumétrica desejada, isso devido ao algoritmo realocar material a fim de obter a menor *compliance* possível, em outras palavras, a estrutura mais rígida possível.

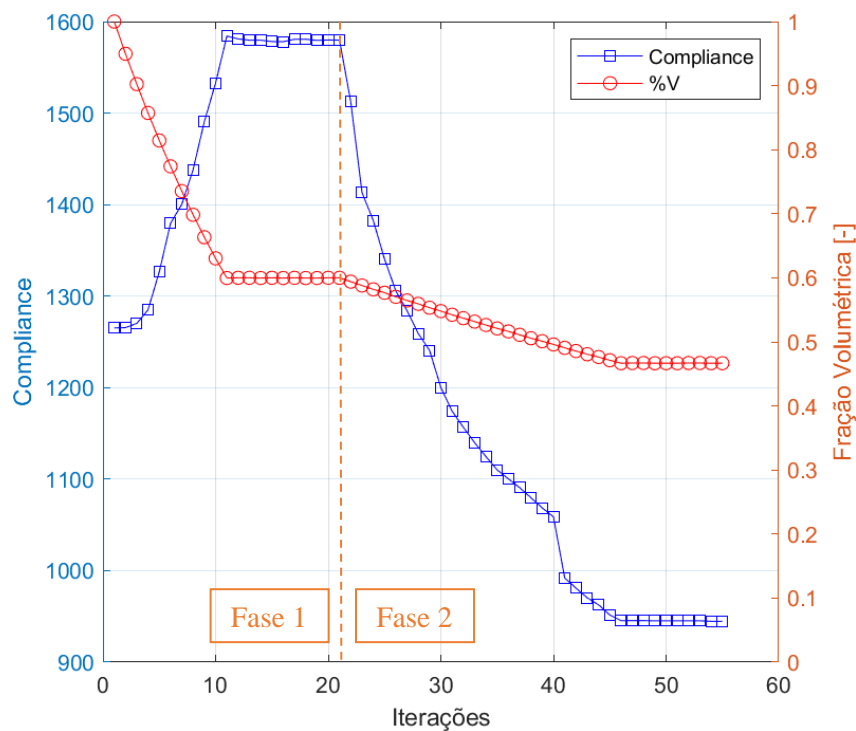


Figura 37 – Curva *compliance*/fração volumétrica versus iterações.

Após o fim da otimização e a partir da fração volumétrica alvo de 0,6, é possível chegar à estrutura ótima em termos de rigidez e tensão, ilustrada na Figura 38, a qual apresenta as

densidades finais do concreto (elementos cinza) e do aço (elementos pretos). Vale salientar que a fração volumétrica final de 0,47 (47%) é devida à substituição de concreto por aço na 2ª fase, reduzindo o volume de concreto. Dessa forma, pode-se afirmar que a fração volumétrica está relacionada apenas ao material concreto. Na Subseção 8.1.4, é apresentada a estrutura final com barras discretas, visto que a estrutura resultante da otimização ainda não se assemelha a uma estrutura com barras de aço discretas.

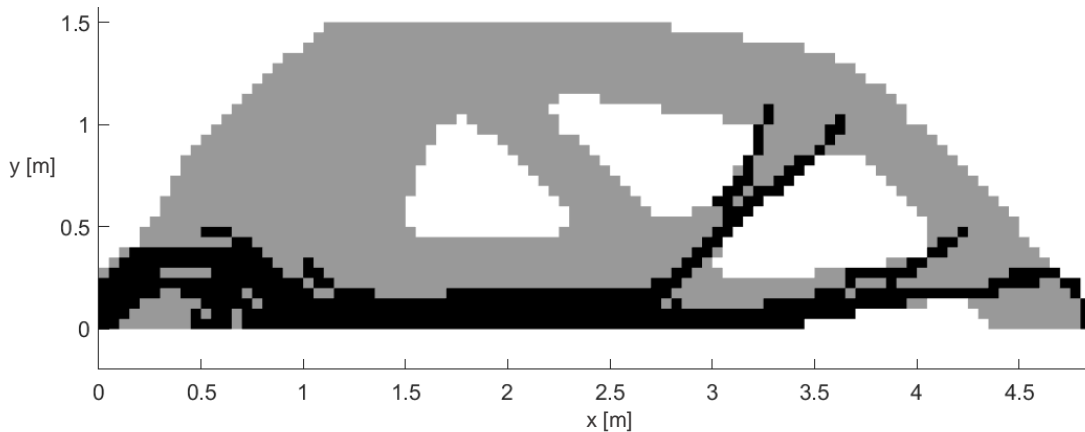


Figura 38 – Gráfico das densidades finais do projeto.

A Figura 39 apresenta as curvas de tensões máximas e residuais de Ottosen e de von Mises em toda estrutura *versus* o número de iterações. Para avaliar de forma adimensional as tensões no concreto e no aço, optou-se por criar a variável denominada de resíduo que, para o concreto,  $\text{Resíduo}_{(\sigma_{ott})} = \sigma_{ott}/f_c - 1$ , e para aço,  $\text{Resíduo}_{(\sigma_{vm})} = \sigma_{vm}/f_y - 1$ . As curvas residuais em vermelho, são um indicativo de que os materiais estão falhando quando  $> 0$  ou atendendo ao critério quando  $\leq 0$ . Por análise quantitativa, observa-se que ao término do processo iterativo tanto o concreto quanto o aço não estão falhando, e inclusive o aço está sendo subutilizado, porque sua tensão está abaixo do valor de referência.

É interessante notar que na fase 1 não há tensão de von Mises visto que não há o material aço alocado na estrutura. Nessa fase, o concreto excedeu seu limite resistente (resíduo maior que 0, próximo a 5) e possui tensão elevada, próxima a 200 MPa. Quando se inicia a segunda fase e o aço começa a ser alocado na estrutura, a tensão no concreto (tensão de Ottosen) começa a reduzir até um valor próximo a 30 MPa, abaixo de sua resistência de 35 MPa; e a tensão no aço (tensão de von Mises) estabiliza-se em aproximadamente 84 MPa, abaixo da resistência limite do aço de 500 MPa.

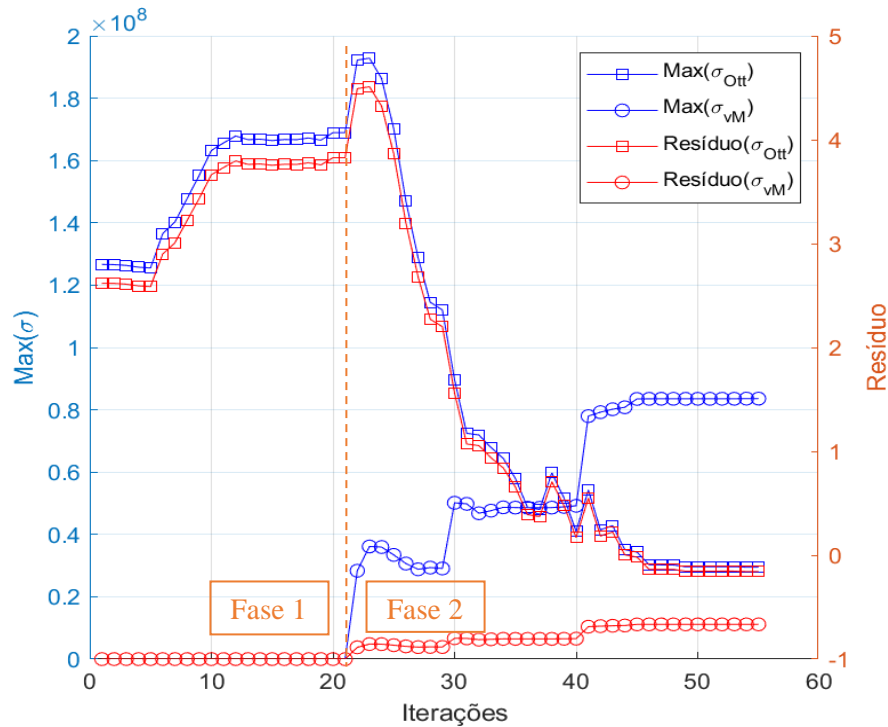


Figura 39 – Curva tensões máximas e resíduos *versus* iterações.

Na Figura 40 é possível visualizar as solicitações que ocorrem nas regiões da estrutura. A região do apoio esquerdo é a região mais solicitada, na qual atua uma tensão de 83,6 MPa, em um elemento de aço. Como visto nos detalhamentos anteriores, pelo método de bielas e tirantes tradicional (esforços obtidos por uma treliça no regime elástico-linear), é necessária a verificação dos nós singulares, dos nós de apoio, de aplicação da carga e de bielas com possíveis tensões de tração transversais. Uma vez que nesta Seção se faz a otimização da estrutura, os nós estão automaticamente verificados a partir dos resíduos e limites resistentes dos materiais, guardadas as devidas aproximações pela análise elástico-linear, uma vez que o algoritmo só irá parar quando todas as regiões estiverem seguras quanto ao critério correspondente.

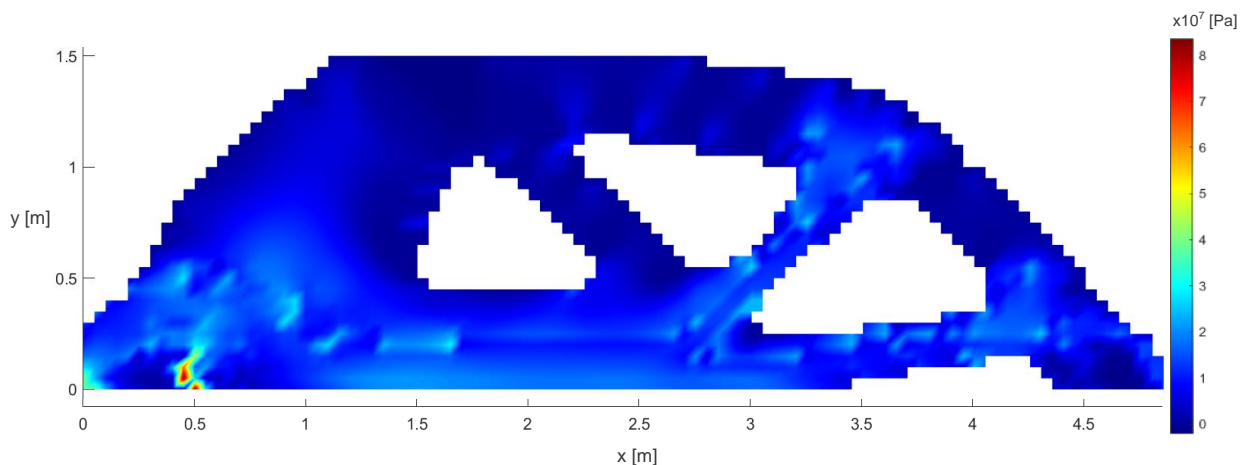


Figura 40 – Gráfico das tensões equivalentes de Ottosen e von Mises (suavizadas).

A Figura 41 auxilia na visualização das direções das tensões principais de tração e de compressão que atuam na estrutura. Em vermelho, é possível notar as tensões de tração indicando reforço horizontal e inclinado. Em azul, estão as regiões com tensões de compressão, indicando as bielas de concreto. Neste caso, as regiões sob tração são substituídas por aço, visto que o concreto não resiste às solicitações internas.

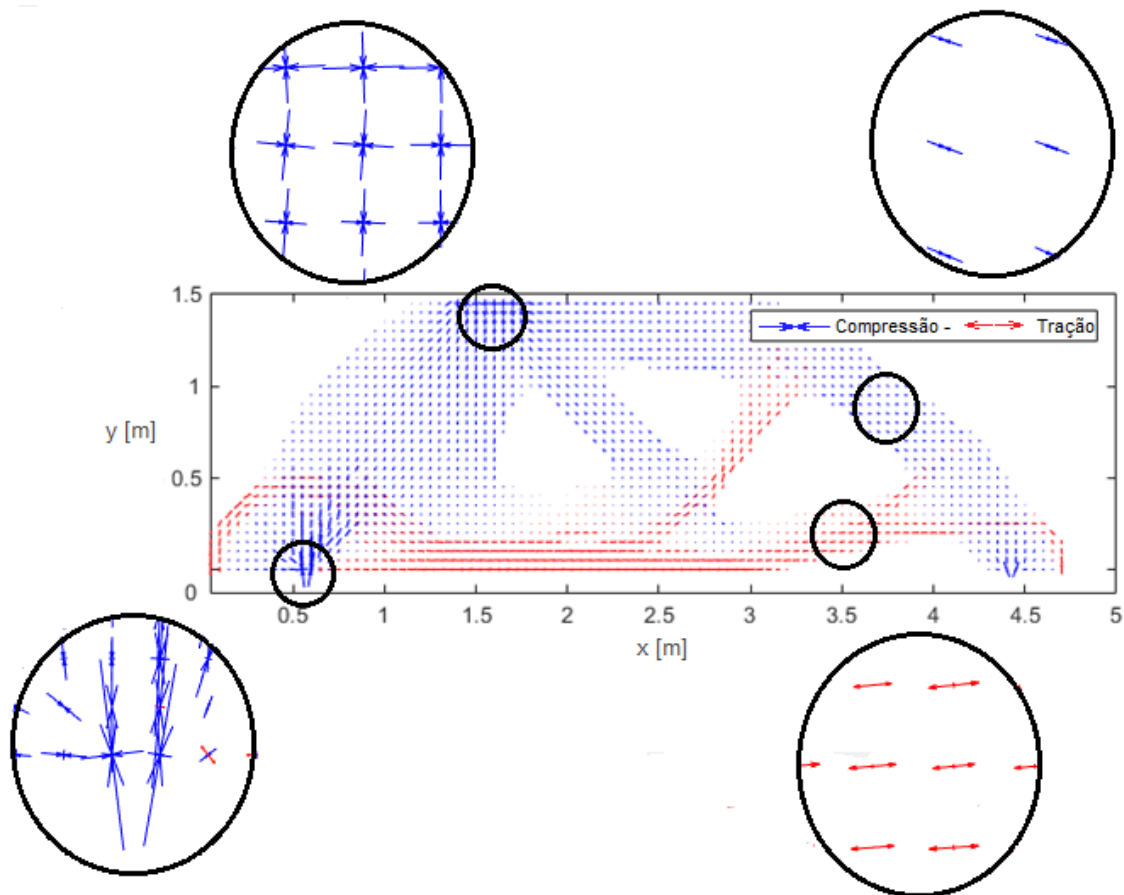


Figura 41 – Gráfico das direções das tensões principais.

### 8.1.3 Detalhamento da estrutura otimizada

Tendo sido realizada a otimização da estrutura, como visto na subseção anterior, parte-se para o dimensionamento e detalhamento da mesma, uma vez que a estrutura otimizada resultante (Figura 38) não condiz com uma estrutura real a nível de execução, necessitando de barras equivalentes à de estruturas reais e de cobrimentos.

Iniciando pelo dimensionamento das barras de aço da parte inferior da viga, equivalente ao tirante principal sob flexão, a força atuante na barra, dada pelo programa de otimização topológica, equivale à:



$$F_t = 4,735 \times 10^5 + 3,993 \times 10^5 + 3,262 \times 10^5 = 1,199 \times 10^6 \text{ N} \quad (8.1)$$

Considerando o coeficiente de segurança  $\gamma_s = 1,15$ , segundo o Eurocode 2:2004, e a resistência característica do aço a tração  $f_{yk} = 500 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ , a área de aço resultante equivale à:

$$A_s = \frac{F_t}{f_{yk} / \gamma_s} = \frac{1,199 \times 10^6}{500 / 1,15} = 2,758 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 2757,7 \text{ mm}^2 \quad (8.2)$$

A área determinada na Equação (8.2) foi distribuída em 3 camadas, mantendo um cobrimento na região inferior da viga. Tal área resultando em  $919,23 \text{ mm}^2$  por camada e foram distribuídas em 3 barras de 20 mm para resistir à força atuante. Assim, as armaduras sob flexão ficaram distribuídas em  $3 \times 3\phi 20$ , resultando em uma área total de  $2828 \text{ mm}^2$ .

Nomeou-se as barras inferiores de N1 a N4 e o detalhamento completo é apresentado na Tabela 7. As armaduras N5, com uma força de 89,3 kN, resultaram em uma área necessária de  $205,39 \text{ mm}^2$ . Optou-se por distribuí-las em  $4\phi 8$ , resultando em  $201,2 \text{ mm}^2$ . As barras N6, por sua vez, com uma força de 250 kN e área necessária de  $575 \text{ mm}^2$ , resultou em  $3\phi 16$  com área total de  $603,3 \text{ mm}^2$ . Optou-se por distribuir em pelo menos 3 barras ao longo da seção transversal da viga para garantir um espaçamento adequado.

Tabela 7 – Detalhamento proposto da viga otimizada com barras discretas

Barra	$F_u$ [kN]	$A_{s,nesc}$ [mm <sup>2</sup> ]	$\phi$ [mm]	Nº de barras	$A_{s,form}$ [mm <sup>2</sup> ]	Espaçamento [cm]	Comprimento [m]	Distribuição
N1	399,7	919,2	20	3	942,6	16,9	4,78	$3\phi 20$
N2	399,7	919,2	20	3	942,6	16,9	2,72	$3\phi 20$
N3	399,7	919,2	20	3	942,6	16,9	2,22	$3\phi 20$
N4	425,3	978,2	20	3	942,6	16,9	2,05	$3\phi 20$
N5	89,3	205,4	8	4	201,2	12,2	0,48	$4\phi 8$
N6	250	575,0	16	3	603,3	17,5	0,42	$3\phi 16$

Uma vez determinadas as barras necessárias para resistir às forças de tração atuantes na viga, ilustradas na Figura 42, é realizada a análise de elementos finitos da viga proposta afim de gerar os valores de tensões e deslocamentos para comparação com a viga segundo o Eurocode 2:2004 (guardas às simplificações para análise elástica-linear).

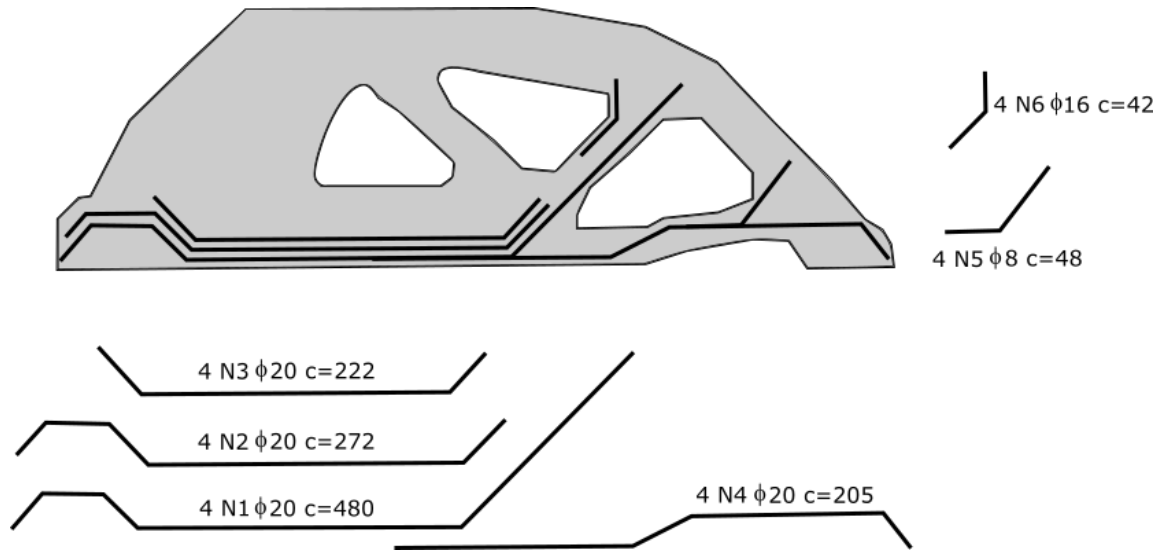


Figura 42 – Detalhamento proposto da estrutura otimizada

### 8.1.4 Estrutura final proposta para análise e verificação

Após detalhada a estrutura otimizada, procede-se com a análise de elementos finitos para obter as tensões e deslocamentos que ocorrem na viga. Dessa forma, a partir da estrutura apresentada na Figura 38, impõe-se as regiões com barras de aço determinadas na Subseção 8.1.3 (Tabela 7, Figura 42). A nova estrutura é apresentada na Figura 43. Neste momento, o procedimento de homogeneização apresentado na Seção 6 é aplicado.

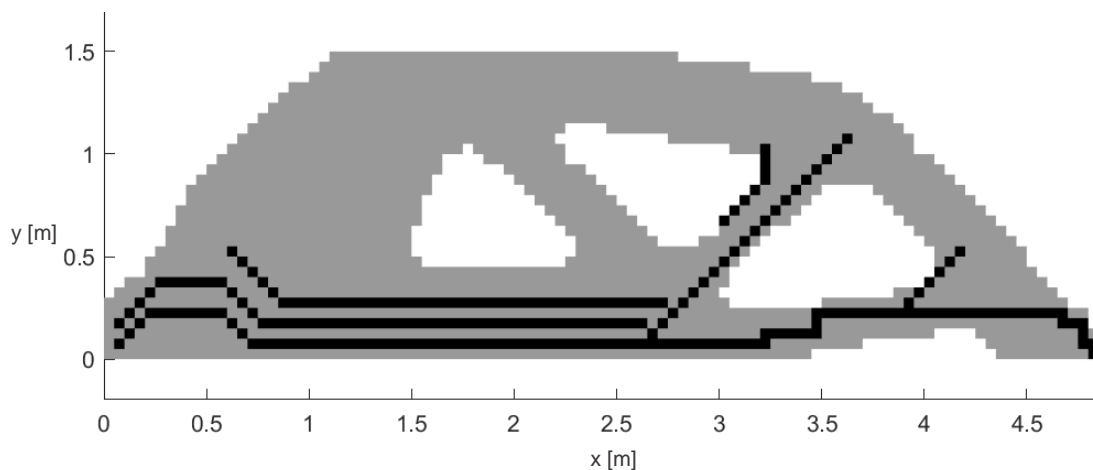


Figura 43 –Estrutura otimizada com as armaduras propostas para verificação.

### 8.1.5 Estrutura de Goodchild et al. (2014) simplificada para análise

Para que possa ser feita a verificação da estrutura proposta por Goodchild et al. (2014), detalhada e apresentadas na Figura 29, é realizada uma simplificação na distribuição das

armaduras, em que as barras originais foram condensadas em elementos de mesmo comprimento e área, conforme Figura 44.

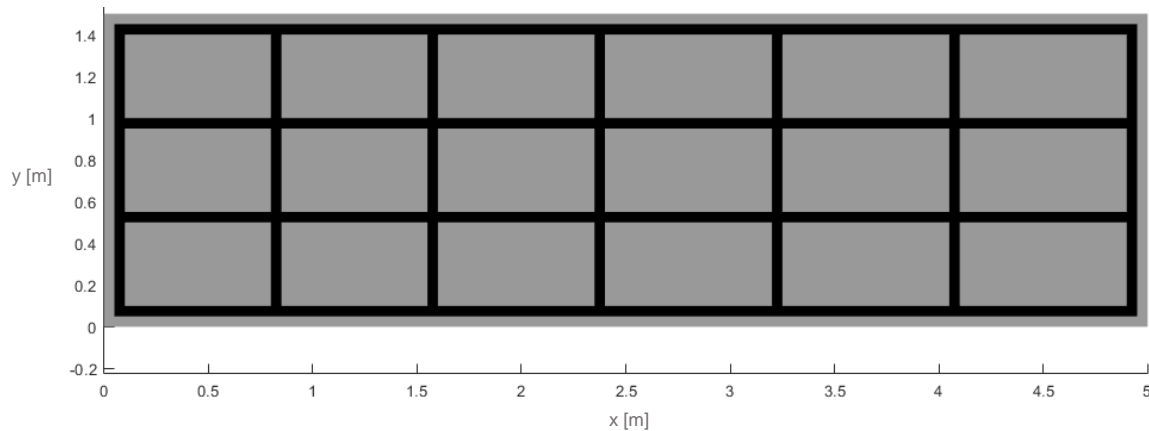


Figura 44 – Simplificação do detalhamento de Goodchild et al. (2014) para verificação.

### 8.1.6 Comparativo de tensões e de flechas

Por fim, com a viga projetada por Goodchild et al. (2014) e com a estrutura proposta (com barras discretas e homogeneizada), é possível gerar os gráficos de tensões atuantes em cada estrutura, bem como os deslocamentos que ocorrem em ambas. Para que as análises e comparações sejam realizadas no regime elástico-linear, é considerado 20% da combinação da carga permanente e variável que ocorrem nas estruturas. Vale lembrar que a parcela de peso próprio é aplicada nos graus de liberdade dos elementos finitos e é mantido o mesmo valor da aceleração da gravidade majorada, visto que o peso da estrutura não muda, mesmo alterando o carregamento.

A iniciar pelos gráficos das tensões equivalentes de Ottosen e de von Mises atuantes nas estruturas, a estrutura com detalhamento proposto apresenta tensão máxima equivalente de Ottosen no concreto de 34 MPa e máxima tensão equivalente de von Mises no aço de 31 MPa, frente à 30 MPa e 34 MPa, respectivamente, que ocorrem na estrutura detalhada por Goodchild et al. (2014) e analisada pelo código de verificação implementado. Os gráficos são apresentados na Figura 45.

A diferença de tensões nas estruturas não é muito significativa, mas nota-se que a estrutura otimizada apresenta uma tensão equivalente ligeiramente maior do que a estrutura por bielas e tirantes. Isso muito provavelmente devido à estrutura otimizada distribuir concreto de forma melhor e com isso, gerar uma redistribuição de tensões notoriamente melhor.

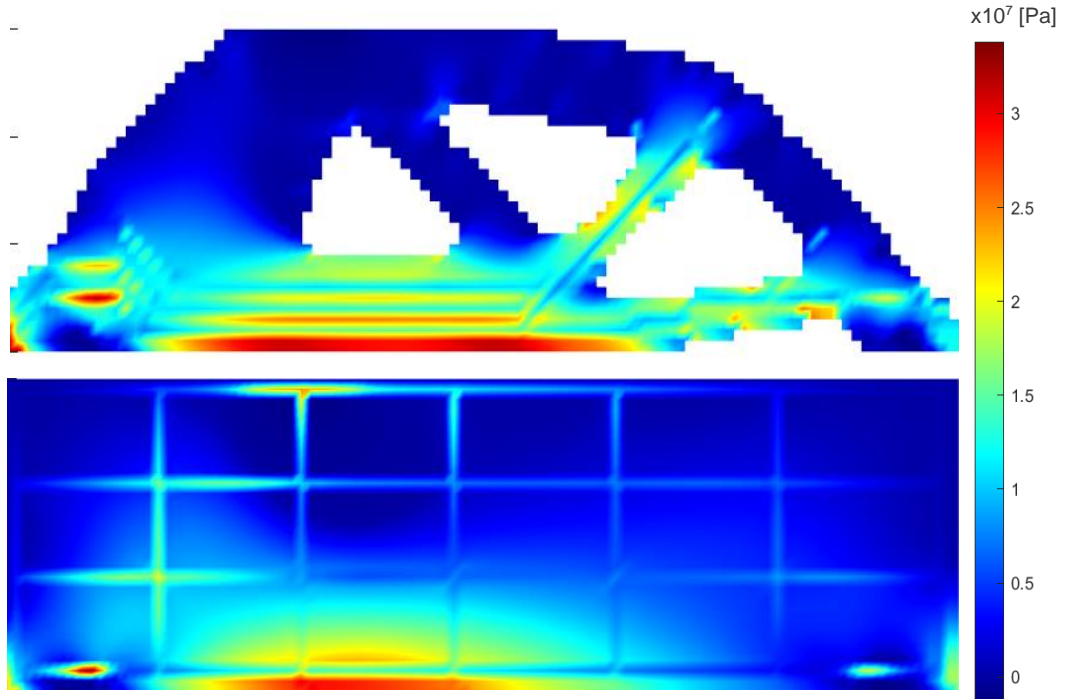


Figura 45 – Tensões equivalentes suavizadas de Ottosen e de von Mises atuantes na estrutura

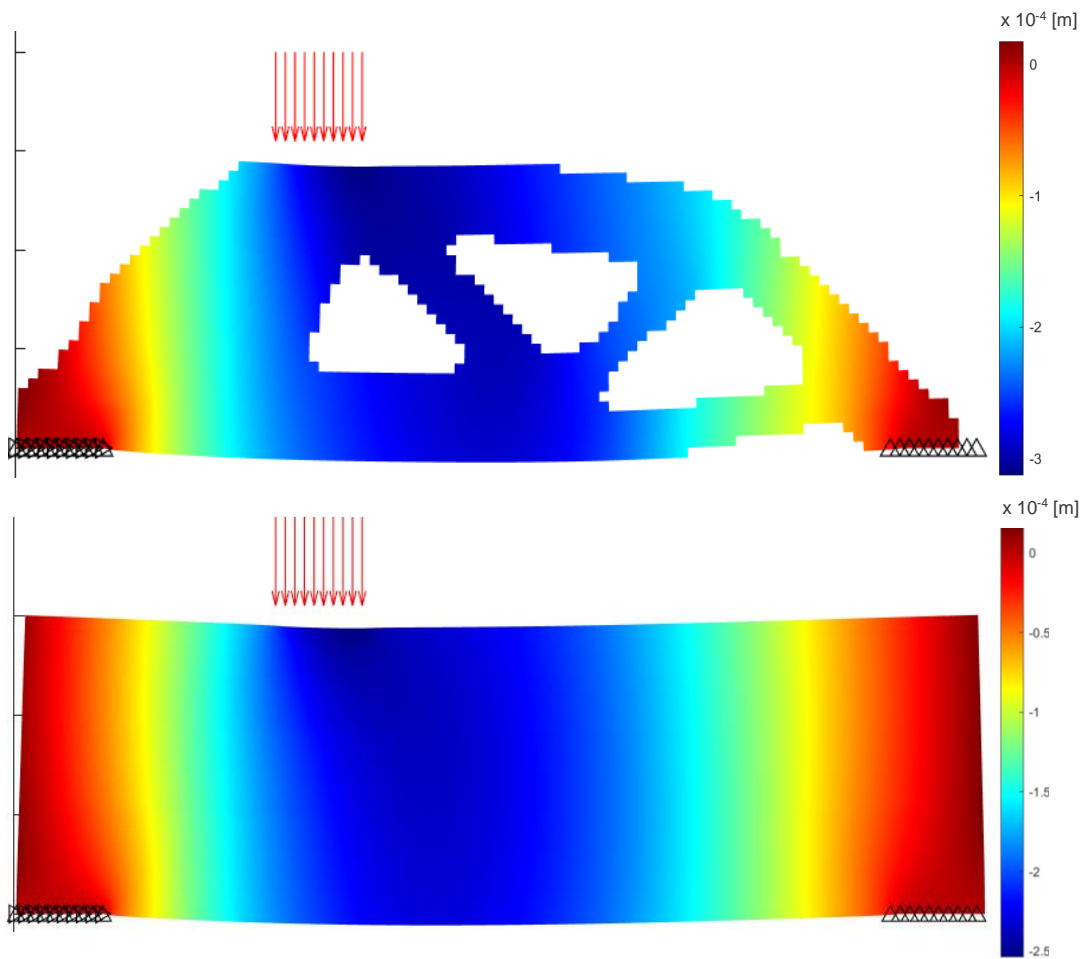


Figura 46 – Gráficos das deformadas das estruturas e seus deslocamentos

Agora, a fim de traçar comparativos entre os deslocamentos máximos que ocorrem nas estruturas, a Figura 46 apresenta os gráficos de suas deformadas contendo seus respectivos deslocamentos. A estrutura com detalhamento proposto tem um deslocamento máximo  $\delta = 0,29$  mm e a estrutura de Goodchild et al. (2014), um deslocamento máximo  $\delta = 0,23$  mm. Sendo deslocamentos extremamente pequenos (na ordem de milímetros) indicando que ambas as vigas são rígidas o suficiente para suportarem ao carregamento, a viga com detalhamento proposto apresenta 26% mais deslocamento do que a viga de Goodchild et al. (2014). Isso já era esperado, uma vez que a estrutura sem vazios é a mais rígida. Mas vale destacar que mesmo com deslocamento maior, a viga proposta tem menos material.

### 8.1.7 Comparativos entre massas, volumes e custos

Afim de trazer mais comparativos ao trabalho, se fez um estudo quantitativo e qualitativo em relação aos volumes, massas e custos das estruturas dimensionadas até o presente momento. São traçados comparativos entre a estrutura dimensionada por bielas e tirantes com a estrutura com a área de aço proposta pelo autor, a partir da estrutura otimizada topologicamente.

Para tornar os valores mais próximos do que de fato ocorre na estrutura projetada por Goodchild et al. (2014), calculou-se a taxa de aço a partir do detalhamento proposto pelos autores (Figura 29). Para isso, com base nos comprimentos e áreas das barras utilizadas, chegou-se ao volume total de aço presente na estrutura e a partir do volume da estrutura (Equação (8.3)), chegou-se na taxa de aço de 1,97%. Entende-se aqui que a taxa de aço é a relação entre o volume de aço pelo volume da estrutura, semelhante ao que se diz no caso de seções de concreto na qual a taxa de aço é a relação entre a área de aço pela área da seção transversal. Também se calculou a massa total da estrutura a partir das proporções de concreto e aço e suas respectivas densidades de  $2400 \text{ kg/m}^3$  e  $7780 \text{ kg/m}^3$ .

$$V_{STM} = 5,0 \cdot 1,5 \cdot 0,45 = 3,375 \text{ m}^3 \quad (8.3)$$

$$m_{STM} = 3,375(0,9803 \cdot 2400 + 0,0197 \cdot 7780) = 8.458 \text{ kg} \quad (8.4)$$

Da mesma forma se determinou o volume e a massa da estrutura com o detalhamento proposto com barras discretas da estrutura otimizada. A partir da Tabela 7, foram determinadas as proporções de volume de concreto (99,43%) e de aço (0,57%) para a fração volumétrica alvo de 0,60, na qual resultou no volume e massa determinados pelas seguintes expressões:

$$V_{OT} = 3,375 \cdot 0,60 = 2,025 m^3 \quad (8.5)$$

$$m_{OT} = 2,025 (0,9943 \cdot 2400 + 0,0057 \cdot 7780) = 4.922 kg \quad (8.6)$$

A nível de volume e massa a estrutura com barras com detalhamento proposto, possui 40% menos volume e 41,8% menos massa. A nível de custos, de acordo com o SINAPI (Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil) de janeiro de 2022, considerando os custos médios desonerados do concreto C30 de R\$ 469/m<sup>3</sup> e do aço CA-50 de R\$ 10/kg, os cálculos dos custos das estruturas projetadas pelo método de bielas e tirantes e da estrutura com o detalhamento proposto são os seguintes:

$$Custo_{STM} = 469 \cdot 3,375 \cdot 0,9803 + 10 \cdot 3,375 \cdot 0,0197 \cdot 7780 = R\$ 6.724 \quad (8.7)$$

$$Custo_{OT} = 469 \cdot 2,025 \cdot 0,9925 + 10 \cdot 2,025 \cdot 0,0075 \cdot 7780 = R\$ 1.842 \quad (8.8)$$

Desta forma, para estrutura dimensionada por meio do método de bielas e tirantes com uma taxa de aço de 1,97% se gastaria, com concreto e aço, em torno de R\$ 6.724 e para a estrutura com armadura proposta a partir da otimização topológica, se gastaria em torno de R\$ 1.842. Esse valor representa 72,6% menos custo com concreto e aço do que a estrutura projetada por Goodchild et al. (2014) segundo o Eurocode 02:2004.

Pode-se notar as vantagens da otimização topológica para um elemento estrutural de concreto armado frente ao método tradicional de dimensionamento de elementos estruturais com descontinuidades, o método de bielas e tirantes em vigor. Claro que se deve levar em conta o projeto e fabricação da fôrma para a estrutura otimizada, visto que sua produção não é convencional e simples, como se pode observar em Jipe e Bernhard (2016). Em contraponto, as vantagens da otimização topológica vão além da diminuição de volume e massa de um elemento estrutural apenas, se estendem também à redução de volume, massa e custos com pilares e fundações, podendo reduzir consideravelmente o custo global de uma edificação como um todo.

## 8.2 NOVAK E SPRENGER (2002) SEGUNDO O ACI 318:2002

Assim como no exemplo anterior, neste exemplo é feita a otimização da estrutura do exemplo proposto por Novak e Sprenger (2002) segundo o ACI 318:2002 (Figura 36). Também é feita a discretização e homogeneização das barras de aço a partir da otimização estrutural, afim de

comparar esta estrutura com a aquela projetada por meio da abordagem tradicional do método de bielas e tirantes apresentada na Seção 7.

### 8.2.1 Parâmetros utilizados na otimização

A estrutura de Novak e Sprenger (2002) possui duas peculiaridades: uma abertura na região central e uma descontinuidade geométrica no canto superior direito (Figura 30). Para considerar a abertura e descontinuidade geométrica, adicionou-se ao programa listas contendo elementos vazios, afim de eliminar esses elementos em específico para não interferir na otimização topológica. Foram utilizados  $254 \times 120$  elementos finitos (cheio + vazio) com dimensão de 50 mm cada. A seguir, na Tabela 8, são apresentadas as propriedades do concreto e do aço para otimização do modelo de Novak e Sprenger (2002).

Tabela 8 – Propriedades do concreto e do aço utilizadas na otimização de Novak e Sprenger (2002).

$E_c$ [GPa]	$E_s$ [GPa]	$\nu_c$	$\nu_s$	$f_{cd}$ [MPa]	$f_{ct}$ [MPa]	$f_{yd}$ [MPa]	$\rho_c$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_s$ [kg/m <sup>3</sup> ]
31	210	0,22	0,30	31	3	414	2400	7780

Fonte: Autor.

Na Tabela 9, são apresentados os parâmetros para otimização utilizados segundo a abordagem BESO. Assim como em Goodchild et al. (2014), se considera o raio mínimo, fração volumétrica, valor mínimo e máximo para variável de projeto, taxas evolutivas para cada fase, coeficientes de penalização para critério de *compliance* e para critério de tensão, parâmetro de estabilização do processo de otimização e número máximo de iterações admissível.

Tabela 9 – Parâmetros para otimização

Fase	$r_{min}$	$V_{frac}$	ER	$x_{lim}$	$p$	$q$	$\alpha$	$tol$	Máx. Iterações
1	4	0,8	0,02	[0,1]	3	4	0,5	$10^{-6}$	100
2	3	0,001	0,01						

Fonte: Autor.

### 8.2.2 Resultados da otimização de Novak e Sprenger (2002)

Devida às grandes dimensões e robustez da estrutura dimensionada por Novak e Sprenger

(2002), é possível notar na Figura 47 um valor inicial de *compliance* mais elevado, se comparado à estrutura de Goodchild et al. (2014), por exemplo. Considerar que a *compliance* é o inverso da rigidez, ou seja, é equivalente à flexibilidade, notoriamente esta estrutura é mais flexível do que aquela dimensionada no exemplo anterior, segundo o Eurocode 2:2004.

Na primeira fase, a *compliance* se estabiliza quando a fração volumétrica alvo de 0,8 é atingida. Vale lembrar que neste estágio há apenas elementos de concreto e vazios. Na fase 2, a *compliance* reduz até atingir a mínima energia de deformação e estabiliza-se quando a estrutura é a mais rígida para fração volumétrica desejada. A fração volumétrica reduz um pouco mais de 0,8 devido à substituição de elementos de concreto por elementos de aço na segunda fase.

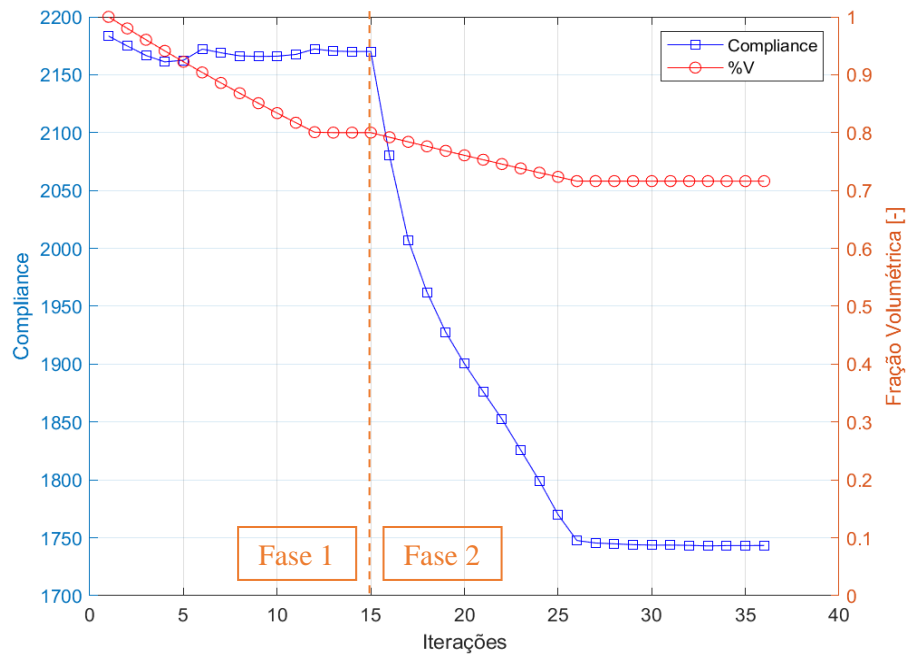


Figura 47 – Curva *compliance* e fração volumétrica versus iterações.

A Figura 48 apresenta as densidades da estrutura final otimizada, a partir da fração volumétrica alvo de 0,8, contendo regiões com aberturas (vazios), concreto (cinza) e aço (preto). Nesta etapa, a malha de aço ainda é grosseira, sendo posteriormente inseridas barras discretas homogeneizadas a fim de realizar as devidas verificações.

Bem semelhante ao que já é dito na análise do gráfico de Goodchild et al. (2014) (Figura 39, Subseção 8.1.2), na Figura 49 pode ser visto que o material ou está falhando (resíduo > 0) ou está com a tensão abaixo de seu limite resistente (resíduo ≤ 0). Na fase 1, o concreto excede seu limite resistente, como se observa o resíduo próximo à 2, e possui tensões elevadas, acima de 95 MPa. Quando se inicia a segunda fase e o aço começa a ser alocado na estrutura, tanto a



máxima tensão quanto o resíduo relacionado à tensão de Ottosen ficam abaixo de seus valores limites, indicando que o material concreto não está sob falha. O mesmo se aplica ao aço, em que tanto a máxima tensão quanto o resíduo relacionado à tensão de von Mises estão abaixo de seus valores limites.

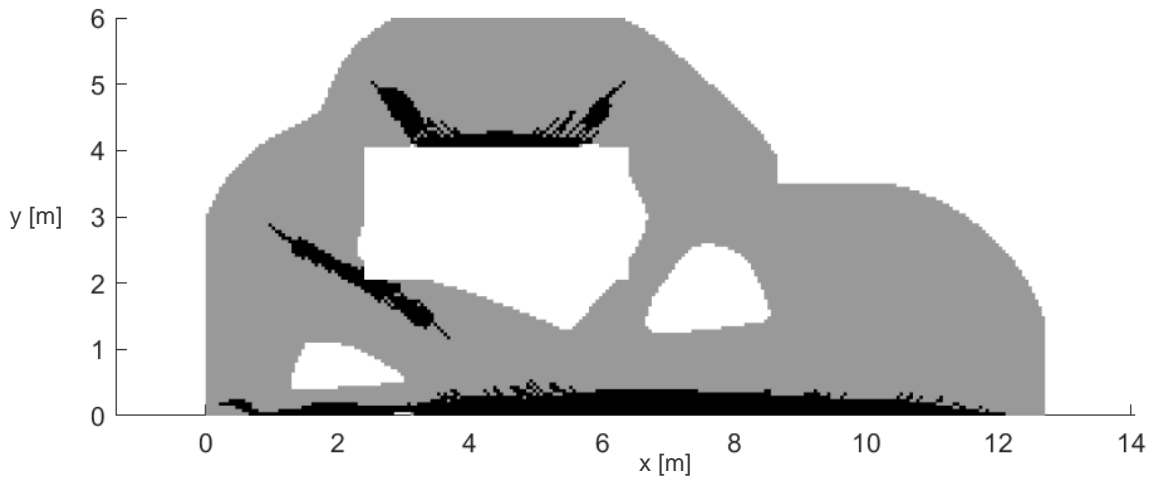


Figura 48 – Gráfico das densidades finais de projeto.

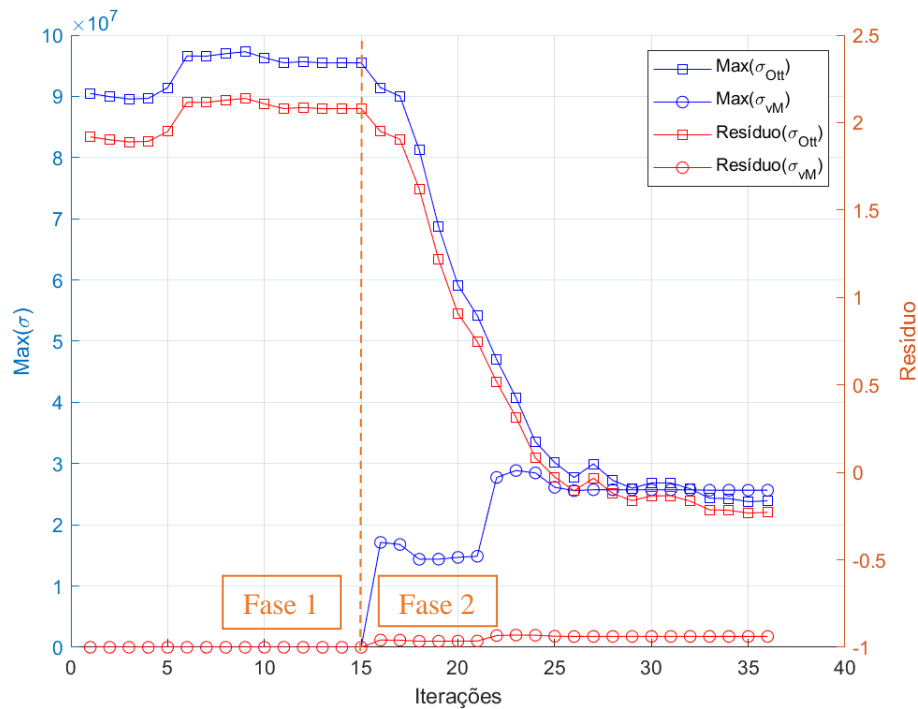


Figura 49 – Curva tensões máximas e resíduos *versus* iterações.

Na Figura 50, que apresenta as tensões equivalentes de Ottosen e de von Mises, é possível visualizar as regiões mais solicitadas da estrutura. Como visto no gráfico anterior, após ter a estrutura otimizada e com elementos que representam o aço, a máxima tensão na estrutura é em torno de 26 MPa, que são alguns pontos vermelhos apresentados na Figura 50. Em conjunto

com o gráfico da Figura 51, é possível notar que são regiões com elementos de aço sob tração. A máxima tensão no concreto é em torno de 24 MPa.

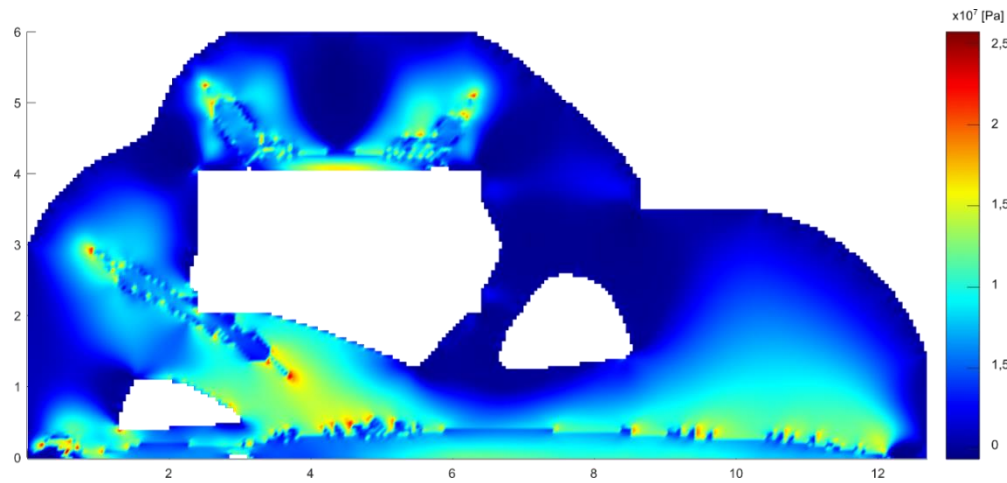


Figura 50 – Gráfico das tensões equivalentes suavizadas de Ottosen e von Mises.

A Figura 51 indica as direções das tensões principais de tração e de compressão que ocorrem na estrutura. As regiões em vermelho, são as regiões onde ocorre tração no concreto, as regiões com vermelho mais forte, são regiões onde houve a troca de concreto por aço e as regiões em azul, são regiões sob compressão. É notório que os nós são as regiões mais comprimidas da estrutura e em algumas arestas há compressões um pouco mais pronunciadas, mas que ainda assim não excedem o limite resistente do concreto, bem como as regiões sob tração.

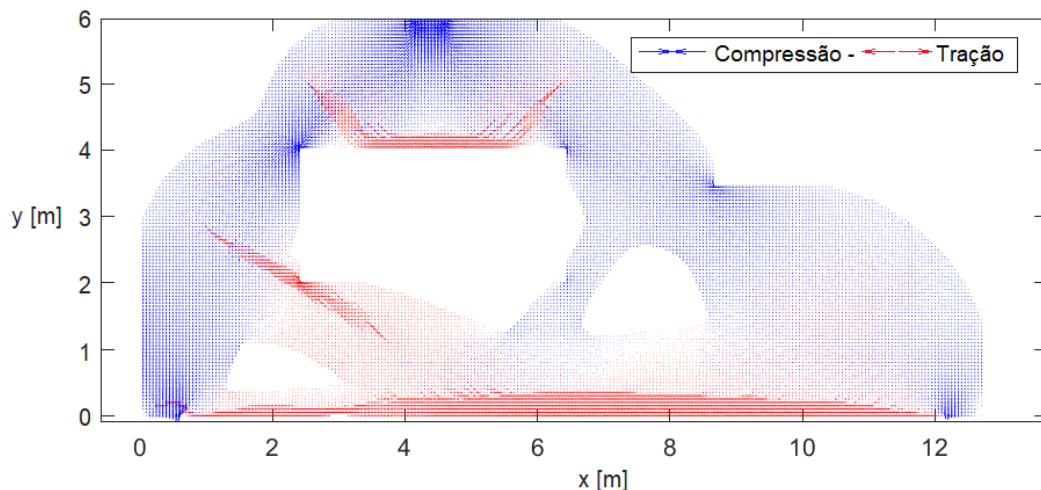


Figura 51 – Gráfico das direções das tensões principais.

### 8.2.3 Detalhamento da estrutura otimizada

A partir da otimização da estrutura, inicia-se a etapa de dimensionamento e detalhamento da

estrutura otimizada, pois, além da região de sob tração apresentar elementos de aço condensados, a estrutura otimizada resultante não condiz com uma estrutura real a nível prático, necessitando de elementos que representem barras de aço discretas e de elementos que façam o papel do cobrimento da estrutura.

Como o procedimento para cálculo das forças resultantes nos elementos que representam as barras de aço já foi demonstrado no detalhamento da estrutura ótima de Goodchild et al. (2014), nesta Subseção são apresentados apenas os resultados que foram utilizados para o dimensionamento da estrutura, e que estão presentes na Tabela 10.

Tabela 10 – Detalhamento das barras do exemplo otimizado

Barra	$F_u$ [kN]	$A_{s,nesc}$ [mm <sup>2</sup> ]	$\phi$ [mm]	Nº de barras	$A_{s,form}$ [mm <sup>2</sup> ]	Espaçamento [cm]	Comprimento [m]	Distribuição
N1	344	1109	22	3	1140,3	8,45	13,63	3 $\phi$ 22
N2	344	1109	22	3	1140,3	8,45	13,63	3 $\phi$ 22
N3	344	1109	22	3	1140,3	8,45	13,63	3 $\phi$ 22
N4	363	1169	20	4	1256,8	5,17	4,81	4 $\phi$ 20
N5	363	1169	20	4	1256,8	5,17	4,54	4 $\phi$ 20
N6	259	833,5	20	3	942,6	8,75	2,69	3 $\phi$ 20

Fonte: Autor.

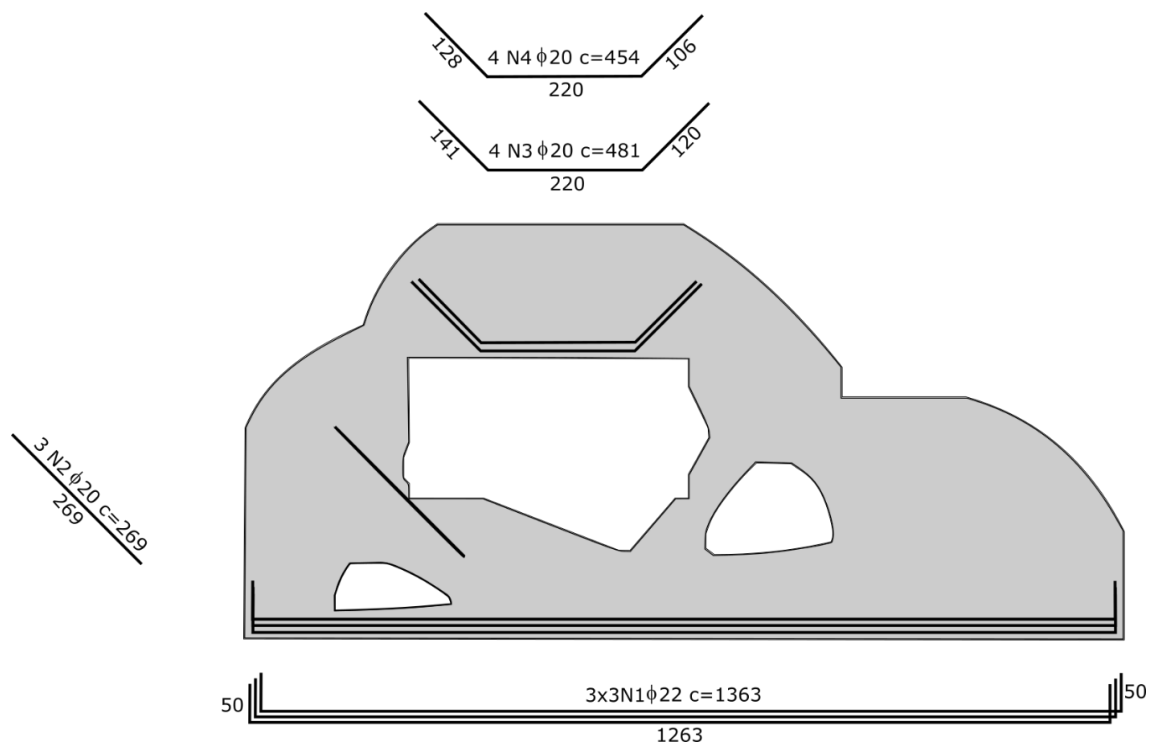


Figura 52 – Detalhamento proposto para a estrutura otimizada.

Desta forma, a Figura 52 ilustra o detalhamento proposto a partir da estrutura otimizada e em seguida, é realizada a análise de elementos finitos para gerar os valores de tensões e deslocamentos para comparação com a viga dimensionada segundo o ACI 318:2002 (método de bielas e tirantes).

### 8.2.4 Análise da estrutura final com as armaduras propostas

Agora procede-se com a análise de elementos finitos para geração dos gráficos de tensões e deslocamentos, para assim, ser possível traçar comparativos entre as estruturas. Na Figura 53 apresenta-se o detalhamento final da estrutura otimizada topologicamente e com barras discretas.

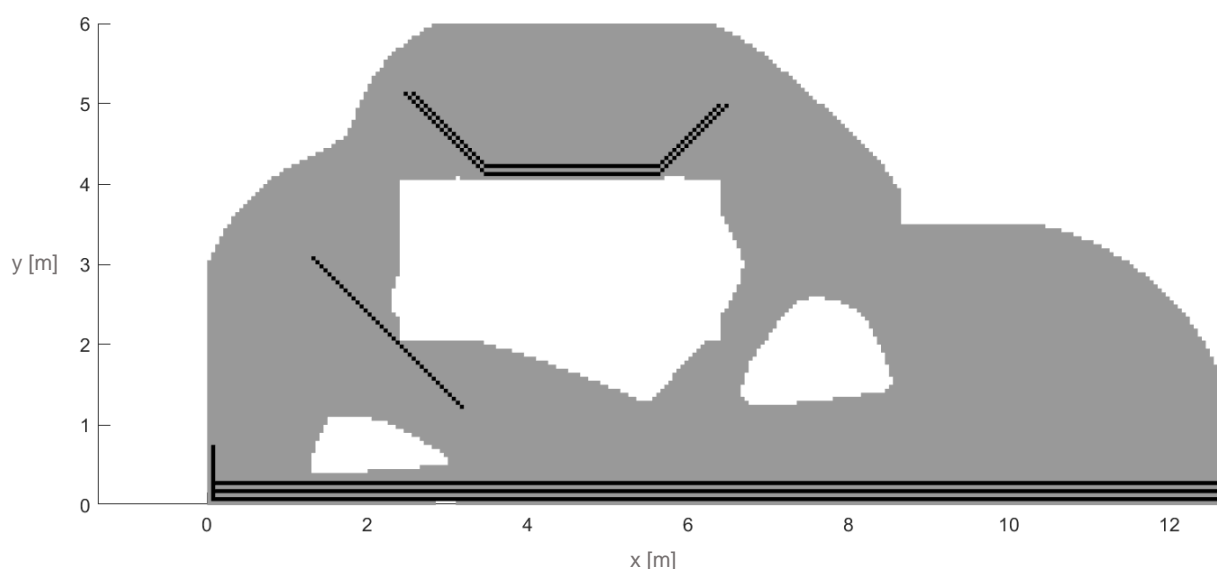


Figura 53 – Estrutura otimizada com armaduras proposta para verificação.

De acordo com a Figura 48 foram estendidas as barras de aço para além das regiões indicadas necessárias para terem aço, com o objetivo de garantir uma certa ancoragem dessas barras. Como, por exemplo, as dobras nas barras inferiores de flexão. Percebe-se na Figura 53 que os estribos estão sendo empregados de uma forma mais racional, inclinados à 45°, diferente do detalhamento tradicional de bielas e tirantes com estribos verticais (Figura 36).

### 8.2.5 Análise do exemplo do Novak e Sprenger (2002)

Assim como na Subseção 8.1.5 é realizada uma simplificação na distribuição das armaduras,

na qual as barras originais foram condensadas em elementos de mesmo comprimento e área, permitindo as comparações. Vale lembrar que essa simplificação tem por objetivo tornar as comparações realizadas pelo mesmo código de análise, evitando diferenças que eventualmente haveria utilizando códigos distintos.

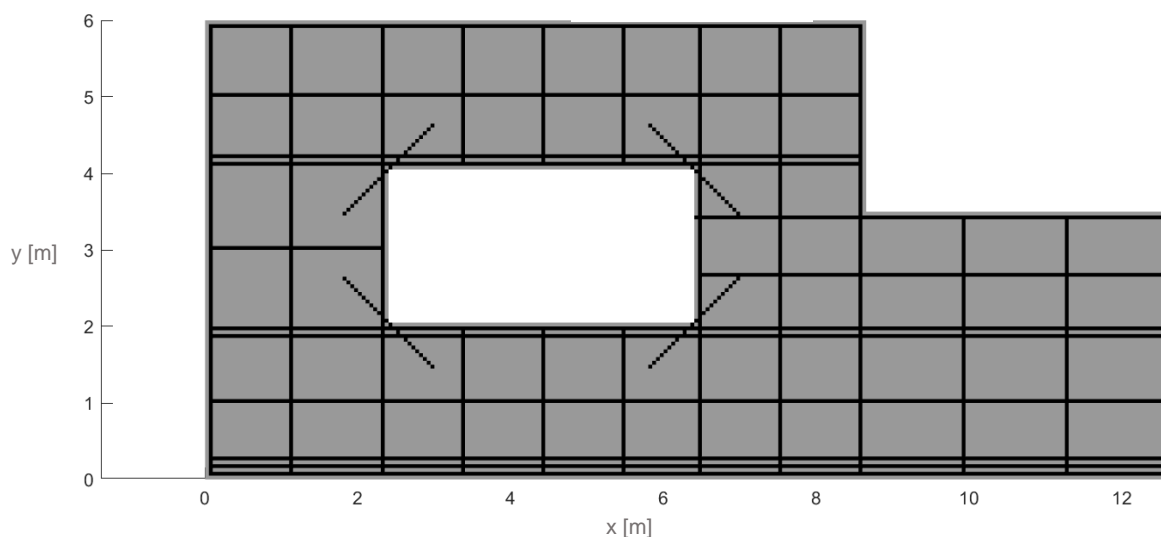


Figura 54 – Simplificação do detalhamento de Novak e Sprenger (2002) para verificação.

## 8.2.6 Comparativo de tensões e deslocamentos

Com as duas estruturas detalhadas e implementadas no algoritmo de verificação, é possível gerar os gráficos de forças e tensões principais atuantes em cada estrutura. São considerados para as estruturas, 10% do carregamento atuante para que as análises pudessem ocorrer no regime elástico-linear.

Iniciando pelo gráfico da estrutura otimizada, a tensão no concreto é de 27 MPa e no aço, de 46 MPa. Já na estrutura dimensionada por Novak e Sprenger (2002), atua uma tensão no concreto de 17 MPa e no aço de 49 MPa. Em ambos os casos, estes valores limites estão restringidos às regiões de apoio da estrutura e cantos da abertura central, sendo estes mesmos valores bem menores nas outras regiões da estrutura.

Relativo aos deslocamentos, vistos na Figura 56, a estrutura proposta apresenta deslocamento máximo  $\delta = 0,41$  mm, enquanto a estrutura dimensionada por Novak e Sprenger (2002) apresenta um deslocamento máximo  $\delta = 0,46$  mm. Comparativamente, os deslocamentos das estruturas são pequenos e próximos um do outro, indicando que as estruturas seão rígidas o suficiente para resistirem ao carregamento.

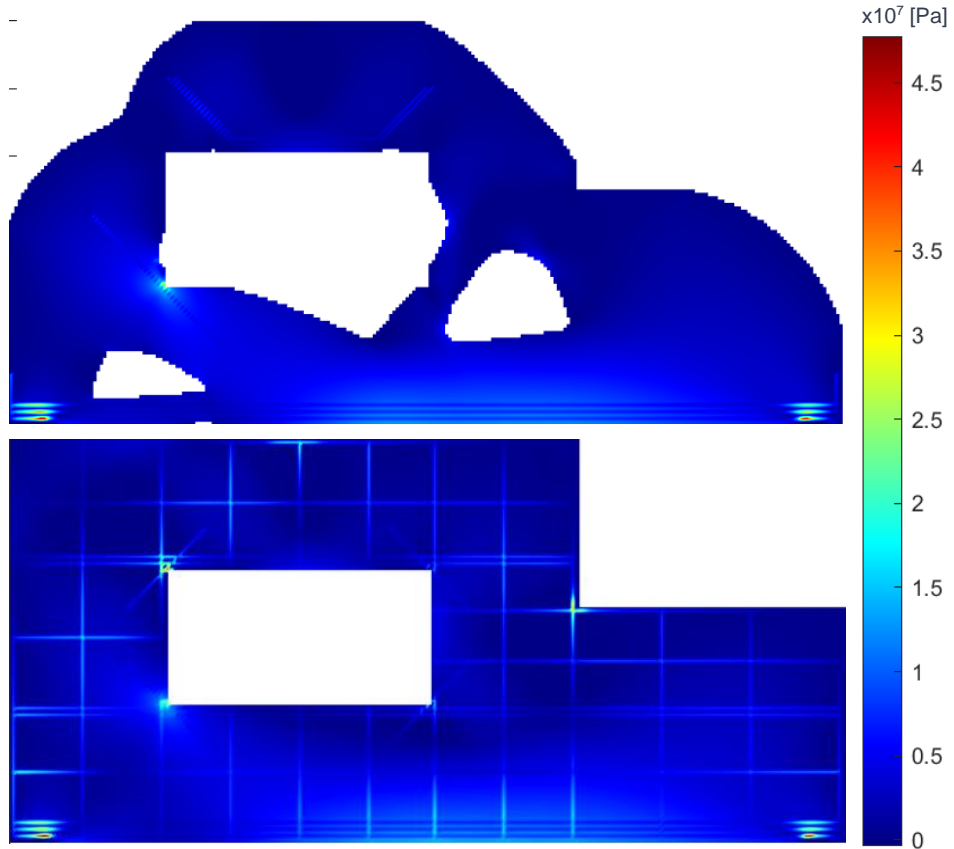


Figura 55 – Tensões equivalentes suavizadas de Ottosen e de von Mises atuantes na estrutura

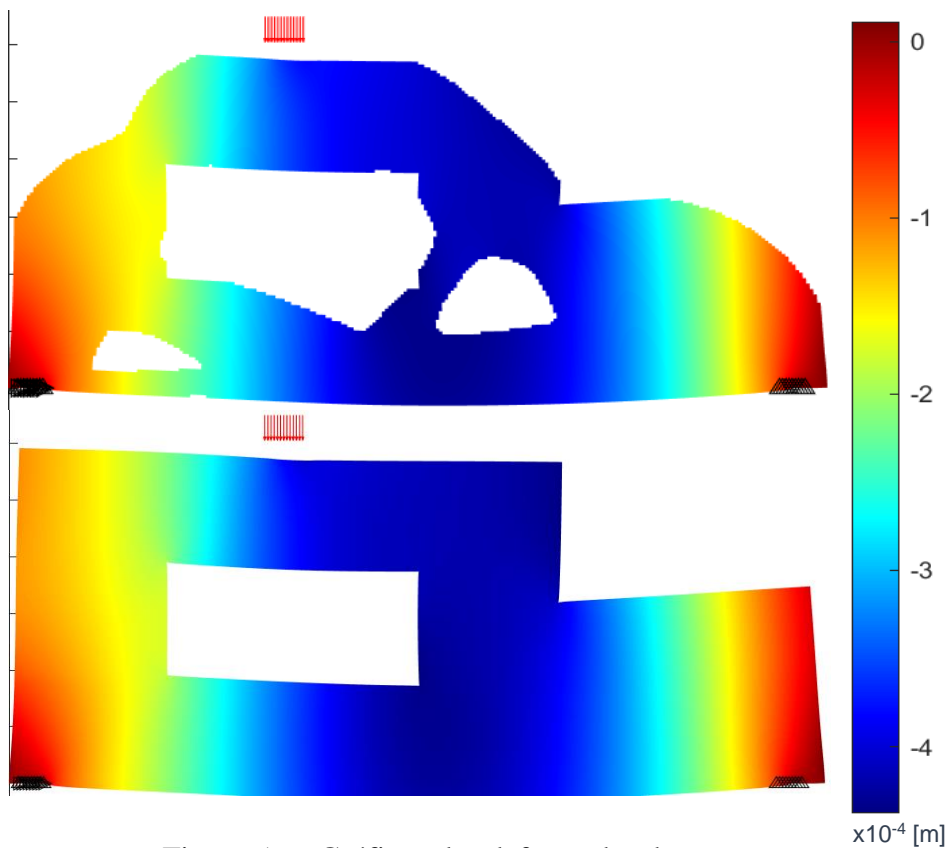


Figura 56 – Gráficos das deformadas das estruturas

### 8.2.7 Comparativos de volume, massa e custos

No exemplo de Novak e Sprenger (2002), que é um caso de uma estrutura maior e robusta do que a estrutura de Goodchild et al. (2014), o volume e a massa são apresentados nas Equações 8.9 e 8.10. O volume total da estrutura é calculado considerando a abertura central e a descontinuidade geométrica do canto superior direito. O volume de aço representa 1,26% do volume total da estrutura, logo:

$$V_{STM} = (12,7 \cdot 6 - 4 \cdot 2 - 4,1 \cdot 2,5) 0,305 = 17,67 \text{ m}^3 \quad (8.9)$$

$$m_{STM} = 17,67 (0,9874 \cdot 2400 + 0,0126 \cdot 7780) = 43.618 \text{ kg} \quad (8.10)$$

Da mesma forma, se determina o volume e a massa da estrutura com o detalhamento proposto com barras discretas. A partir da Tabela 7, foram determinadas as proporções de concreto e aço para a fração volumétrica alvo de 0,80, na qual resultou no volume e massa apresentados a seguir.

$$V_{OT} = 17,67 \cdot 0,80 = 14,14 \text{ m}^3 \quad (8.11)$$

$$m_{OT} = 14,14 (0,9957 \cdot 2400 + 0,0043 \cdot 7780) = 34.262 \text{ kg} \quad (8.12)$$

A nível de volume e massa a estrutura com barras discretas proposta pelo autor, possui 20% menos volume e 21,5% menos massa. A nível de custos, conforme SINAPI de janeiro de 2022, para os custos médios desonerados do concreto C30 de R\$ 469/m<sup>3</sup> e do aço CA-50 de R\$ 10/kg, os cálculos dos custos das estruturas projetadas pelo método de bielas e tirantes e da estrutura com o detalhamento proposto serão os seguintes:

$$Custo_{STM} = 469 \cdot 17,67 \cdot 0,9874 + 10 \cdot 17,67 \cdot 0,0126 \cdot 7780 = \text{R\$ } 25.511 \quad (8.13)$$

$$Custo_{OT} = 469 \cdot 14,14 \cdot 0,9957 + 10 \cdot 14,14 \cdot 0,0043 \cdot 7780 = \text{R\$ } 11.333 \quad (8.14)$$

Desta forma, para estrutura dimensionada por meio do método de bielas e tirantes com uma taxa de aço de 1,26% se gastaria, com concreto e aço, em torno de R\$ 25.511 e para a estrutura com armadura proposta a partir da otimização topológica, com 0,43% de aço, se gastaria em torno de R\$ 11.333. Dessa forma, houve uma redução de 55,6% com custo de materiais em relação à estrutura projetada por Goodchild et al. (2014) segundo o Eurocode 02:2004,

indicando a vantagem da otimização topológica.



## 9 CONCLUSÃO

Os objetivos deste trabalho são atingidos a partir da otimização topológica de estruturas presentes na literatura utilizando o algoritmo BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) com as devidas modificações para levar em conta a otimização do concreto e do aço na estrutura. Observa-se que as estruturas otimizadas e com os detalhamentos propostos apresentam tensões e deslocamentos semelhantes aos das estruturas tradicionais, projetadas pelo método de bielas e tirantes, e que as estruturas otimizadas são suficientemente rígidas, seguras e com uma redução significativa de material.

É visto que o método de bielas e tirantes, abordado inicialmente por Schlaich, Schäfer e Jannewein em 1987, posteriormente difundido e aplicado nas principais normas como ABNT NBR 6118:2014, Eurocode 2:2004 e ACI 318:2002, por exemplo, simplifica o dimensionamento e detalhamento de estruturas especiais com algum tipo de descontinuidade (estática e/ou geométrica).

São apresentados os conceitos de otimização estrutural e suas diferentes abordagens (paramétrica, de forma e topológica). A otimização topológica, além de mais completa, possibilita gerar uma estrutura rígida, com menos material, com formas e dimensões diversas. Tradicionalmente, essas características são atingidas por meio da redução de material a partir da restrição de volume ou de tensão. Uma estrutura otimizada por essa abordagem, tem sua topologia otimizada sem perder sua funcionalidade e segurança. Apresentam-se também as variáveis essenciais do método BESO para redução da *compliance* (energia de deformação) a partir do número de sensibilidade de volume e de tensão.

A abordagem BESO, implementada neste trabalho, é realizada considerando as duas restrições (de volume e de tensão) e, para isso, as estruturas são otimizadas em 2 fases. Como visto, na fase 1 as estruturas são otimizadas quando a fração volumétrica é atingida e a *compliance* se estabiliza. Na fase 2, os critérios de falha de Ottosen e de von Mises são utilizados para as análises de tensões dos elementos de concreto e de aço, respectivamente. Nessa fase os elementos de concreto que violam o critério de Ottosen são substituídos por aço; e as estruturas atingem o estágio de otimização quando as tensões no concreto e no aço estão abaixo de seus limites resistentes.

Neste trabalho o peso próprio é distribuído em cada grau de liberdade da estrutura como um

todo, diferentemente do que é feito simplificadaamente no método de bielas e tirantes, no qual é considerado todo o peso como carregamento externo. Essas abordagens, acrescidas ao algoritmo BESO, se diferenciam em muito de outras abordagens presentes na literatura. Nos materiais revisados, os autores consideram apenas um único material e a topologia final serve apenas como parâmetro para definir a orientação das barras do modelo treliçado, contendo bielas comprimidas e tirantes tracionados (para o método de bielas e tirantes).

Outro ponto distinto de outros trabalhos, é a verificação das estruturas propostas e das estruturas dimensionadas por bielas e tirantes, numa análise posterior, sob as mesmas condições de carregamento. Essa verificação, por análise de elementos finitos, possibilitou a inclusão das barras detalhadas às estruturas e, para isso, se homogeneizou as propriedades dos elementos de concreto e aço contidos em uma mesma região. Sendo assim, foi possível obter as tensões e os deslocamentos que ocorrem nas estruturas, o que possibilitou traçar comparativos importantes.

A estrutura detalhada a partir da otimização da estrutura de Goodchild et al. (2014) segundo o Eurocode 2:2004, apresentou vantagens notórias, como a redução de 40% do volume e 42% de massa em relação à estrutura de Goodchild et al. (2014), que levaram à uma redução de 73% de custo com concreto e aço. Se verificou que a estrutura com detalhamento proposto apresentou 26% mais deslocamento. Tal fato era esperado pois, como visto, a estrutura cheia sempre é a mais rígida se comparada à estrutura otimizada. pois esta apresenta vazios, aquela, não.

Por sua vez, a estrutura otimizada a partir do exemplo de Novak e Sprenger (2002) segundo o ACI 318:2002 apresentou redução de 20% do volume total, que acarretou em 21,5% menos massa total. Essas reduções levaram a uma economia de 56% com os principais materiais (concreto e aço). Neste caso, a estrutura otimizada teve um deslocamento máximo 11% menor do que a estrutura cheia. Acredita-se que tal ocorrido se deve pelas grandes dimensões da viga cheia, acarretando em mais peso e mais deslocamento, o que pode ter se sobreposto à menor rigidez da estrutura otimizada topologicamente, que contém menos massa.

De forma geral, é notório que a otimização estrutural traz vantagens significativas para redução de custo de uma estrutura especial e não apenas servir como uma abordagem para definir o modelo treliçado de bielas e tirantes. Pelos exemplos analisados pôde-se chegar a uma redução de até 73% dos custos com concreto e aço de apenas um elemento estrutural. Caso se considere uma edificação como um todo, essa redução pode ser ainda mais significativa. Destaca-se que

o elemento estrutural otimizado terá a mesma funcionalidade de um elemento estrutural não otimizado, com tensões semelhantes e deslocamentos próximos.

## 9.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para futuros trabalhos que possam complementar ou iniciar outros estudos a partir deste trabalho, se elaborou a lista apresentada a seguir:

- Verificação detalhada da suficiência dos comprimentos de ancoragem das barras da estrutura otimizada topologicamente;
- Análise não linear da estrutura final detalhada topologicamente;
- Análise de outros tipos de estruturas não usuais como bloco de coroamento, dente Gerber, consoles de pilares, vigas contínuas com furos, etc.;
- Implementação de um modelo de barras discretas de aço incorporadas ao modelo de elementos finitos;
- Extensão para análise tridimensional;
- Refinamento da malha de elementos finitos;
- Utilização de malhas não regulares de elementos finitos de baixa ordem (triangular) ou de alta ordem (8 ou 9 nós) para problemas em estado plano de tensão;
- Consideração de custos mais detalhados considerando custos com fôrmas, bem como as possíveis economias com pilares e fundações devida às estruturas otimizadas serem mais leves; e
- Implementar um código para adequar a geometria final do processo a um desenho mais suave e que possa ser construído.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L.; OLIVEIRA NETO, L. **The strut-and-tie models in reinforced concrete structures analyzed by a numerical technique**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, vol. 6, Num. 1, Feb. 2013, p. 139-157

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-02. **Building code requirements for structural concrete (ACI 318:2002) and commentary (ACI 318R-02)**. Reprinted by ACI Committee 318. Appendix A - Strut and Tie Models. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2014 Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**, Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 7480:2007 Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto – Especificação**. Rio de Janeiro, 2007.

\_\_\_\_\_. **NBR 8681:2004 Ações e segurança nas estruturas – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2004.

BENDSØE, M. P. **Optimal shape design as a material distribution problem**. Structural optimization. 1989; 1,193-202. DOI: 10.1007/BF01650949

BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape, and Material**. Springer Springer-Verlag, New York, 1995. DOI: 10.1007/978-3-662-03115-5

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. North-Holland, 1988; 1(4):197-224.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Method and Application**. Springer. Berlin, 2003.

BIONDINI, F.; BONTEMPI, F.; MALERBA, P. G. **Optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures**. Proc. The Australasian Conference on Structural Optimization, Sydney, Edited by G.P. Steven, O.M., Querin, H. Guan and Y.M., Xie, p. 115-122. 1998.

BRUYNEEL, M.; DUYSINX, P. **Note on topology optimization of continuum structures including self-weight**. Struc. Multidisc Optim. 29, 245-256. 2005

CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN G. P. **Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints**. Finite Elements in Analysis and design. p. 239-251. Elsevier. Australia, 1996.

EN 1992-1-1 EUROCODE 2: **Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings**. December 2004.

GOMES, H. M. **Técnica de avaliação de confiabilidade em estruturas de concreto armado**. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) Universidade Federal do

Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2001.

GOODCHILD, C. H.; MORRISON, J.; VOLLUM, R. L. **Strut-and-tie Models: How to design concrete members using strut-and-tie models in accordance with Eurocode 2**. 2014

GUERRA, M. B. B.; GRECO, M. **Modelos de concepção para estruturas de concreto armado com comportamento não linear obtidos pelo método de bielas e tirantes e otimização topológica**. Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo, v. 14, n. 1, p. 59-78, jan. /abr. 2017. DOI: 10535/rsae.v14i1.6510

HARDJASAPUTRA, H. **Evolutionary structural optimization as toll in finding strut-and-tie-models for designing reinforced concrete deep beam**. Proceedings of the 5th International Conference of Euro Asia Civil Engineering Forum (EACEF-5). Procedia Engineering, 125, p.995-1000, 2015.

HASSANI, B.; HINTON, E. **Homogenization and Structural Topology Optimization Theory, Practice and Software**. Springer-Verlag London, 1999. DOI: 10.1007/978-1-4471-0891-7

HUANG, X.; XIE, Y. M. **Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications**. John Wiley & Sons, UK, 223p, 2010.

KIKUCHI, N., BENDSØE, M. P. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71 (2), 197-224, 1988.

KUMAR, P. **Optimal force transmission in reinforced concrete deep beams**, Computers and Structures, 8(2), pp.223-229. 1978.

KWAK, H. G.; NOH, S. H. **Determination of strut-and-tie models using evolutionary structural optimization**. Engineering Structures 28 (2006) 1440–1449. DOI:10.1016/j.engstruct.2006.01.013

LI, Q.; STEVEN, G.P; XIE, Y. M. (2001). **A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization**. Struct. Multidisc. Optim. 22: 230–9.

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. **Topology optimization of strut-and-tie models for reinforced concrete structures using an evolutionary procedure**. ACI Structural Journal, V. 97, No. 2, March-April 2000.

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. T.; SCHIMIDT, L. C. **Topology optimization of strut-and-tie models in non-flexural reinforced concrete members**. International Conference on Mechanics of Structures, Materials and Systems. 17-19 February, 1999, Wollongong, Australia. p.309-315, 1999.

MATLAB, 2010. version 7.14 (R2012a), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.

MICHELL, A. G. M. **The limits of economy of material in frame-structures**. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904; 8(47):589–97.

NOVAK, L. C.; SPRENGER, H. **Example 4: Deep beam with opening**, In: ACI SP-208, Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie model, Editor Karls-Heiz

Reineck, ACI International, SP-208, 2002. ISBN: 0-870310-086-0

NOVATNY, A. A.; LOPES, C. G.; SANTOS, R. B. **Topological derivative-based topology optimization of structures subject to self-weight loading**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021.

OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete**. Journal of the engineering mechanics division. p. 527-535 Aug.1977

PONTOJA, J. C.; VAZ, L. E.; MARTHA, L. F. **Modelo de bielas e tirantes gerados por otimização topológica e elementos indutores**. Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE XXX, ABMEC-COPPE/URFJ, Armação de Búzios, RJ, Brazil, November 8-11, 2009.

QIU, Y.; LIU, X. **Comparison on construction of strut-and-tie models for reinforced concrete deep beams**. J. Cent. South Univ. Technol. (2011) 18: 1685–1692. DOI: 10.1007/s11771-011-0889-x

RAO, S. S., **The Finite Element Method in Engineering**, 6th Edition, Elsevier, 763p., 2018.

ROZVANY, G. I. N.; MAUTE, K. **Analytical and numerical solutions for a reliability-based benchmark example**. Struct Multidisc Optim, 2011 43:745–753. DOI 10.1007/s00158-011-0637-8

SANTOS, V. M. P.; ALMEIDA, S. R. M.; PANTOJA, J. C. **Um estudo sobre geração de modelos de bielas e tirantes usando técnicas de otimização de topologia**. Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE XXXIV, Z.J.G.N Del Prado (Editor), ABMEC, Pirenópolis, GO, Brazil, November 10-13, 2013

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. **Toward a consistent design of structural concrete. Special Report**, PCI Journal, 32(3):74-150, 1987. Doi: 10.15554/pcij.05011987.74.150

SIMONETTI, H. L.; ALMEIDA, V. S.; OLIVEIRA NETO, L.; NEVES, F. A. **Optimal strut-and-tie models using smooth evolutionary structural optimization**. Revista CIATEC, UPD, V.8 (2), pp.34-49, 2016.

TAUZOWSKI, P.; BLACHOWSKI, BARTLAMIEJ.; LÓGÓ, J. **Topology optimization of elasto-plastic structures under reliability constraints: A first order approach**. Computers and Structures 243, 2021

TAVARES, J. M. A; CANHA, R. M. F. **Método de otimização topológica para o projeto de modelos de bielas e tirantes**. In: XIII SIMMEC Simpósio de Mecânica Computacional, ABMEC, Vitória, ES, UFES, p.p.1-14, 2018.

TAVARES, J. M. A; CANHA, R. M. F. **Método de otimização topológica para o projeto de modelos de bielas e tirantes**. In: As Engenharias frente a Sociedade, a Economia e o Meio Ambiente 3. Cap. 11. Organizador Henrique Ajuz Holzmann. Porta Grossa, PR, Editora Atena, p.p.127-141, 2019.

VICTORI, M.; QUERIN, O. M.; MARTÍ, P. **Generation of strut-and-tie models by topology**

**design using different material properties in tension and compression.** Struct Multidisc Optim. 44:247-258. Springer-Verlag, 2011

XIA, Y.; LANGELAAR, M.; HENDRIKS, M. A. N. **A critical evaluation of topology optimization results for strut-and-tie modeling of reinforced concrete.** Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering. 2020b; 35:850–869. DOI: 10.1111/mice.12537

XIA, Y.; LANGELAAR, M.; HENDRIKS, M. A. N. **Automated optimization based generation and quantitative evaluation of strut-and-tie models** Computers and Structures, 2020a: 238:106297. DOI: 10.1016/j.compstruc.2020.106297

XIA, Y.; LANGELAAR, M.; HENDRIKS, M. A. N. **Optimization-based three-dimensional strut-and-tie model generation for reinforced concrete.** Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering. 2020c; 1–18. DOI: 10.1111/mice.12614

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. **A simple evolutionary procedure for structural optimization.** Computers & Structures. 1992. Vol. 49, No 5, pp. 885-896.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. **Evolutionary Structural Optimization.** Springer-Verlag London, 1997. DOI: 10.1007/978-1-4471-0985-3

YANG, X. B. E. **Bidirectional evolutionary method for stiffness and displacement optimization.** Victoria University of Technology. Melbourne, Australia. Feb. 1999.