UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM QUESTÕES DA OBMEP

RAFAEL BRAUN PINTO DE QUEIROZ

Porto Alegre
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

OBMEP POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

RAFAEL BRAUN PINTO DE QUEIROZ

Trabalho de Conclusão de Curso da Graduação em Licenciatura em Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant’Ana

Porto Alegre
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM QUESTÕES DA OBMEP

RAFAEL BRAUN PINTO DE QUEIROZ

Banca examinadora:

Profa. Dra. Maria Cecília Bueno Fischer
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana - Orientador
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Porto Alegre
2022

RESUMO

Esse Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo observar e analisar a Resolução de Problemas matemáticos como meio de aprendizagem. O ensino da matemática no Ensino Fundamental apresenta-se como um grande desafio para os professores. Percebe-se que alguns alunos estão focados em replicar técnicas vistas em sala de aula apresentadas pelo professor, não tendo como objetivo compreender a teoria e analisar o problema a fim de chegar em uma solução. Essa pesquisa visa identificar uma alternativa de ensino para contribuir com a construção do conhecimento em matemática por meio da Resolução de Problemas, que pressupõe o desenvolvimento do conteúdo a partir de um problema. Esse método permite que o estudante desenvolva estratégias para solucionar um problema usando a criatividade e o conhecimento teórico. Nessa pesquisa, selecionamos problemas dentre questões de provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e acompanhamos e analisamos um grupo de estudos de matemática de um colégio particular de Porto Alegre durante a elaboração das estratégias para a resolução dos problemas propostos. Nesse ambiente, o professor tem um papel fundamental de mediador e, em conjunto com os estudantes, orienta durante as atividades de investigação propostas, bem como a formaliza o conteúdo trabalhado. Percebemos que nesse ambiente os estudantes são mais ativos na construção do conhecimento e que o professor tem mais êxito ao trabalhar com novos conteúdos.

Palavras-chave: Matemática. Resolução de Problemas. OBMEP. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This Course Completion Work aims to observe and study Mathematical Problem Solving as a means of learning. The teaching of mathematics in Elementary School presents itself as a great challenge for teachers. Students themselves are focused on learning techniques seen in the classroom to learn the theory by the teacher, having no way of understanding the problem to arrive at a solution. This aims to identify an education to contribute to the construction of knowledge in problem solving mathematics, which presupposes the development of content from a problem. This method allows the student to develop strategies to solve a problem using creativity and theoretical knowledge. In this selection, we selected problems among test questions from the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad (OBMEP) and we followed and analyzed a private school in Porto Alegre during the elaboration of strategies to solve the proposed problems. In this environment, the teacher has a fundamental role as a mediator and, together with the students, guides investigation activities, as well as during the formalization of the worked content. We noticed that in this environment, students are more active in building knowledge and that the teacher is more successful when working with new content.

Keywords: Mathematics. Problem solving. OBMEP. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Acompanhando os alunos enquanto resolviam exercícios propostos em uma escola particular de Porto Alegre percebi que, na maioria das situações, eles não compreendiam a teoria, mas apenas replicavam a técnica vista em sala de aula. Consequentemente, não analisavam o resultado encontrado, sem questionar se a resposta encontrada era uma boa solução para o que foi proposto. Por outro lado, ao propor esse ambiente, o professor não contribui para que o aluno faça indagações e use sua criatividade para elaborar soluções e técnicas diferentes de resolução.

Aproximando de situações práticas a Resolução de Problemas permite que o aluno tenha contato com a dúvida e desenvolva maneiras de solucioná-la explorando sua criatividade e conexões com seus conhecimentos teóricos. Assim, quando o professor traz a teoria para a aula, o aluno já experienciou o processo de resolução, coletiva ou individualmente, e pode assimilar o conteúdo com mais naturalidade, dividindo assim a responsabilidade pelo seu aprendizado. Nesse contexto, cabe ao professor o papel de mediador, de orientador durante as atividades de investigação propostas, bem como a formalização do conteúdo.

Neste trabalho, analisamos as estratégias utilizadas por um grupo de alunos durante as resoluções de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) em relação à Resolução de Problemas. Esse grupo é composto por alunos que participam de um Clube de Matemática da escola na qual foi realizada a pesquisa, com vistas à preparação para as provas da OBMEP.

Segundo Polya (1945), temos quatro etapas a serem cumpridas durante a resolução de um problema, a saber: a compreensão do problema; planejamento de estratégias para sua resolução; execução do que foi planejado, analisando cada etapa; e reflexão da validade da resolução e aperfeiçoamento do plano. Baseando-se em Polya, as pesquisadoras Allevato e Onuchic (2009) detalharam mais cada situação e propuseram nove etapas para a resolução de problemas, que serão tratadas no capítulo do referencial teórico.

Entendemos por problema qualquer situação em que não se possui os conhecimentos ou técnicas suficientes para resolvê-la. Allevato & Onuchic (2009) consideram que um problema se refere a tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Sendo assim, o que é problema para uma pessoa pode não ser problema para outra.

Um problema pode ser visto de diversos pontos de vistas com diferentes possibilidades de resoluções.

Este trabalho é organizado em seis capítulos. No próximo será abordado o objetivo principal do trabalho. No terceiro tratamos do referencial teórico que sustenta nossa pesquisa, englobando temas como problemas na matemática, métodos para a resolução de problemas, além de informações sobre as Olimpíadas de matemática e o papel do professor na resolução de problemas. Após a revisão bibliográfica, descrevemos a proposta de atividade incluindo a abordagem metodológica desse estudo de caso. Por fim analisamos os dados coletados sob a ótica do referencial teórico apresentado no capítulo 3, seguido das considerações finais acerca dessa pesquisa. Finalizamos com as referências bibliográficas e as cópias dos Termos de Autorização para participação e realização da pesquisa.

2 OBJETIVO

Nosso objetivo com essa pesquisa é investigar a compreensão do conteúdo por parte do aluno ao ser utilizada a Resolução de Problemas para introduzir ou desenvolver um novo conteúdo, em contrapartida aos ambientes de aprendizagem habituais, nos quais temos predominantemente o uso de exercícios de fixação (Skovsmose, 2000). Ao utilizar os problemas matemáticos após o aluno já ter conhecimento sobre o conteúdo ele se torna um exercício de fixação e não é explorada a sua capacidade de provocar indagação, desejo de solucionar e criatividade.

Para atingir nosso objetivo, buscamos responder a seguinte pergunta norteadora: “Como os estudantes se comportam diante do uso da Resolução de Problemas em atividades que envolvem novos conteúdos?” Em especial, queremos observar se há alterações importantes nas estratégias de abordagem para a solução das questões trabalhadas, bem como nas interações entre os estudantes.

Para buscar responder a essa pergunta, analisamos alunos inseridos em um Ambiente de Aprendizagem[1] (SKOVSMOSE, 2000) aqui caracterizado por um grupo de estudos voltado à matemática que proporcionou, em alguns momentos, Cenários para Investigação[2] (SKOVSMOSE, 2000) beneficiando os processos de resolução das atividades propostas

Entendemos por Ambientes de Aprendizagem os espaços, incluindo os materiais auxiliares disponibilizados, situações ou atividades que são apresentadas aos estudantes desde um exercício de matemática pura até uma pesquisa dentro da sua realidade. Consideramos um Cenário para Investigação sendo um ambiente que permita ao aluno realizar indagações e buscar resoluções e explicações até a solução, sendo os estudantes responsáveis pelos processos.

Decidimos utilizar material da OBMEP por serem questões que potencializam a investigação, o que favorece o uso da metodologia de Resolução de Problemas. Além disso, os alunos que participaram da pesquisa frequentam um clube de matemática do colégio que prepara para a participação em olimpíadas de matemática.

---

[1] Ambiente de Aprendizagem são criados a partir das condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades. Estas atividades podem ter um caráter significativo, ou seja, o estudante consegue relacionar a sua semi-realidade e/ou realidade. Ou apenas identificar determinada atividade como um simples exercício.

[2] Um cenário para investigação é compreendido como um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação que convida o estudante a formular questões e procurar explicações.

O colégio em que foi realizada essa pesquisa oferece, no turno inverso, os clubes e atividades extracurriculares para incentivar o aprimoramento nas diversas áreas do conhecimento. Para participarem desses clubes, os alunos são convidados ou se inscrevem conforme interesse. Nesses clubes temos um ambiente que, por ser diferente da sala de aula convencional, permite maior diálogo entre os alunos e não há o compromisso em ver toda a matéria programada para cada etapa.

Em particular, no Clube Olímpico de Matemática, analisamos as estratégias empregadas pelos alunos durante as atividades, ou seja, durantes as resoluções de questões de provas da OBMEP. Nessas atividades os alunos foram expostos às questões e incentivados a resolvê-las, de forma individual ou coletivamente, debatendo as resoluções por cada um desenvolvidas. Quando as soluções não eram encontradas o professor pesquisador participou mais ativamente, ora relembrando conceitos matemáticos, ora orientando os alunos relembrando o que já estudaram na sala de aula com o professor titular da etapa.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo tratamos dos referenciais teóricos necessários para a realização dessa pesquisa, descrevendo sobre o que é um problema e a resolução desses na matemática. Além de apresentar o método de resolução proposto por George Polya em seu trabalho intitulado “A Arte de Resolver Problemas”, também apresentamos uma abordagem mais atual proposta por Onuchi e Allevato (2009). Após tratamos das Olimpíadas Brasileira de Matemática e suas particularidades. Finalizamos esse capítulo com considerações sobre o papel do professor na resolução de problemas dentro da sala de aula.

3.1 O QUE É UM PROBLEMA?

No cotidiano, encaramos diversas situações nas quais é necessário elaborar um plano para encontrar uma solução, seja no trabalho, nas finanças pessoais, em casa, entre outros momentos. Essas situações podem ser caracterizadas como um problema de forma geral.

Um problema é uma determinada questão ou um determinado assunto que requer uma solução. Van de Walle (2009) define um problema como uma atividade que o indivíduo instigado pela questão não tenha uma resolução predeterminada, ou decorada, nem a compreensão de uma solução específica. De maneira geral, um problema é uma situação cuja solução é desconhecida e precisa-se e deseja-se resolver (SAVIANI, 2000).

Os problemas matemáticos são responsáveis por inúmeras dúvidas presentes entre os alunos. A grande questão é relacionar as informações fornecidas com os símbolos matemáticos, adequados para a solução dos problemas. O aluno precisa entender a situação, identificando a operação mais adequada para a resolução, e isso depende de uma leitura segura e de um processo interpretativo. Com o uso de exemplos, vamos realizar essa leitura interpretativa, selecionando as palavras-chave, bem como utilizando as operações adequadas.

Os autores Díaz e Poblete (2001) definem um problema matemático como uma situação com um objetivo a ser alcançado. Para alcançar esse objetivo, é necessário seguir uma série de etapas que devem ser verificadas previamente. Para tanto, é necessário que o aluno tenha compreensão da situação e esteja motivado a buscar formas de solucioná-la para que se caracterize um problema.

A definição do que seria um problema matemático muitas vezes é simplificada a uma questão que tenha uma contextualização, uma "historinha matemática", indo além do enunciado que solicita calcular o resultado de expressões numéricas. Contudo, diversos autores discordam dessa caracterização, sugerindo que calcular o valor numérico de uma expressão pode ser visto como um problema dependendo de quem o encara.

Abrantes (1988) relata que um problema é qualquer exercício que motive o aluno a querer resolvê-lo exigindo dele seus conhecimentos prévios. Que o problema seja acessível ao conhecimento do aluno, o desafie, o estimule e proporcione uma solução não imediata (BOAVIDA et al., 2008). Polya (1945) diz que é a busca por ações a fim de solucionar objetivos sem que se tenha solução instantânea.

De outra maneira, Thompson (1989) sugere que um problema deva permitir diversas abordagens na busca por sua solução, não se apoiando apenas em conhecimentos prévios, mas que possibilite a construção de novos conceitos.

Ou ainda, como afirma Vianna (2002, p. 402), "Um problema é uma situação em que um sujeito é solicitado a realizar uma tarefa para a qual não possui um método de resolução determinado. Se a realização da tarefa não for desejada pelo sujeito a situação não pode ser considerada um problema".

Vianna (2002, p. 401), nos ajuda a responder à pergunta, fazendo a seguinte colocação: "A matemática, do mesmo modo que qualquer outra atividade humana pode ser definida como a busca de solução para problemas que surgem na luta pela sobrevivência". Desta forma, devemos deixar claro o que é um problema, visto que algumas atividades quando planejadas no intuito de despertar um problema para o aluno, elas podem ser configuradas como exercícios aos estudantes se não foram desafiados a resolve-las. Concordamos com Allevato e Onuchic e consideramos que um problema é uma situação que desejamos solucionar, e que não sabemos como resolver previamente.

Dentro da sala de aula o professor tem como principal função atuar como um mediador aos alunos durante a construção da resolução, auxiliando na busca por novos conhecimentos (D'AMBROSIO, 1996). Esta capacidade do professor em orientar novas discussões e organizar espaço para desenvolvimento de pensamentos dos seus alunos tem grande influência na maneira com que o estudante encara a resolução dos problemas na matemática.

D'Ambrosio (1996) ainda ressalta que há vários casos que encontramos no dia-dia que podemos explorar matematicamente, sendo necessário um esforço do professor, além de coragem, para desenvolver projetos para apresentar para os alunos. O que requer dedicação, estudo e tempo. Essas situações podem ser geradoras de questões a serem utilizadas em aula na construção dos problemas a serem tratados, buscando contextualização e motivação para os alunos.

3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMA NA MATEMÁTICA

Um problema matemático requer uma solução que não está imediatamente aparente para quem o encara, mas que é possível de ser alcançada por meio de ações e operações baseando-se em conhecimentos prévios para construir uma resolução para o problema.

Tendo um problema como ponto de partida e orientação para aprendizagem, a construção do conhecimento se dará por meio da sua resolução (Allevato e Onuchic, 2009). A partir desse problema gerador, o professor insere um tópico matemático novo ao aluno em que as técnicas matemáticas deverão ser desenvolvidas durante a resolução do problema. O problema é proposto antes da formalização do conteúdo.

Na Resolução de Problemas, como metodologia, para aprender matemática, que defendemos nessa pesquisa, tem-se a concepção de que a aprendizagem matemática parta de uma situação-problema, que será discutida, questionada e, a partir da compreensão do aluno, possamos construir as soluções que o problema requer.

Soares e Pinto (2001) também colaboram na problematização desse tema quando evidenciam que:

> “[...] não é suficiente apresentar conhecimentos cristalizados e fora do contexto moderno. É preciso fazer com que os alunos se tornem pessoas capazes de enfrentar situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que eles busquem aprender novos conhecimentos e habilidades” (SOARES; PINTO, 2001).

A Resolução de Problemas possibilita que o aluno desenvolva a capacidade de analisar, pensar, refletir e concluir sobre uma situação proposta, viabilizando o domínio do conteúdo despertando sua autonomia e autoconfiança (MENDES, 2009).

No levantamento de dados bibliográficos sobre resolução de problemas constatei que na maioria das vezes a obra de Polya é tomada como referência. George Polya nasceu em

Budapeste em 1887. Foi um matemático húngaro e professor de matemática, se dedicou especialmente à arte de resolução de problemas de matemática. Em 1945 escreveu “How to Solve it”, traduzido para o português com o título “A Arte de Resolver Problemas”. Nesse livro, Polya propõe algumas ideias que, na visão do autor, poderiam auxiliar os estudantes e mestres interessados na resolução de problemas.

Polya (1945) compara a resolução de problemas com a habilidade de natação por se tratar de um exercício que demanda prática ao longo do tempo. Um dos conceitos relatados pelo autor é que adquirimos habilidade por meio da imitação e prática na resolução dos problemas.

> Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d’água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 2006, p.4).

A resolução de problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas (POLYA, 1945). O autor apresenta quatro passos na resolução de problemas matemáticos:

1. Compreender o problema;
2. Construir um plano de ação;
3. Executar o plano;
4. Rever a resolução.

Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão intercalados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto de resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 2006).

Compreender o problema é perceber claramente o que é necessário, ver como a incógnita está ligada aos dados. É fundamental que, para se resolver um problema, antes de tudo, se identifique suas partes principais, qual ou quais suas incógnitas, quais os dados que ele informa, e qual ou quais são as suas condicionantes. Para isso, antes de tudo, é necessário que o aluno entenda o enunciado. Nessa fase é essencial a capacidade de leitura e interpretação para que o problema possa ser entendido pelo aluno e que possa ser observado de vários ângulos. Quanto mais o estudante estiver familiarizado, quanto mais informações ele conseguir absorver do problema, mais facilidade, mais opções de resolução ele vai ter em mãos para resolvê-lo. Dependendo da complexidade do problema, poderá ser necessário separar em diversas partes, para que sejam estudadas, uma a uma, separadamente. Após sua decomposição, o problema poderá ser novamente consolidado, recombinando-se os elementos considerados essenciais. Portanto, é imprescindível que o aluno entenda o enunciado do problema e verifique a possibilidade de ser ou não resolvido, de acordo com seu conhecimento.

Polya sugere algumas perguntas que podem auxiliar essa compreensão:

- Quais são os dados do problema?
- Quais são as incógnitas?
- Quais são as condições para resolver esse problema?

O segundo passo é o momento de delinear um plano de ação. Uma execução cuidadosa do primeiro passo é fundamental para elaborar o plano de ação. Que vai depender também dos conhecimentos prévios e experiências em outros problemas semelhantes. Polya sugere transformar o problema em um caso particular que seja mais acessível, ou num outro equivalente. Usar um problema auxiliar adequado pode ser uma ferramenta útil, porém deve ter cuidado para não fugir do foco principal, ou seja, do problema original. “Esqueça o problema por um tempo”, para Polya, isso funcionava algumas vezes. O aluno deverá verificar se, ele próprio, já o conhece ou se já resolveu algum outro problema correlato. Se o problema apresentado tem correlação com um problema que já se sabe como resolvê-lo, pode-se utilizar o método antes utilizado. Polya chama atenção para a paciência e a concentração nessa fase.

> O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes se inserem nesse roteiro e, para isso, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro. (POLYA, 2006, p.10).

Terceiro passo, executar o plano, pode ser uma tarefa mais fácil, segundo Polya (2006). Mas esta etapa necessita de paciência e cuidado. É uma das fases mais importantes no processo. Aqui, executa-se o plano, e as estratégias pensadas anteriormente. É o momento no qual o aluno confirmará sua aprendizagem. Muitas vezes podemos encontrar alguma dificuldade que necessite retornar à etapa anterior e modificar ou encontrar outro plano. O professor pode ajudar neste passo observando a realização dos cálculos e verificando se o processo está correto. Esta é a fase do fazer, na qual os cálculos e questionamentos são respondidos.

Por fim, o retrospecto, quando o aluno deve verificar se o resultado encontrado é o que realmente responde o problema. Refletir sobre a solução encontrada e os caminhos que percorreu. Às vezes, nesta observação o aluno consegue estabelecer caminhos diferentes para a mesma solução. E assim fortalecer o resultado encontrado e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas. No caso de erro, pode-se trabalhar a resolução do problema com base no próprio erro. Aos poucos, os alunos perceberão o que estavam errando. O professor será o mediador do desenvolvimento das atividades propostas no projeto, enquanto, de forma natural, o aluno assume mais responsabilidades com seu aprendizado.

Da maneira com que se desenvolve o método, listando uma série de perguntas pertinentes a cada etapa, ajuda muito a pensar e resolver os problemas. Por isto ele é considerado um método heurístico. O método proposto por Polya (2006) possibilita ao professor mediador e ao aluno aprendiz desenvolverem novas habilidades no intuito de fortalecer o pensamento crítico, bem como o raciocínio lógico.

Para Allevato e Onuchic (2009) um problema os objetivos gerais da área de matemática são contemplar várias linhas para trabalhar o ensino de matemática.

> Esses objetivos têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 218)

Nesse contexto, há diferentes caminhos propostos para se chegar a processos de ensino e de aprendizagem. O ensino através da resolução de problemas, é um meio de se ensinar conteúdos matemáticos, no qual o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos.

Durante a resolução de problemas o professor deve observar o trabalho de seus estudantes, incentivar que os mesmos busquem relacionar com o que já conhecem sobre o conteúdo, bem como fazer uso das técnicas operatórias já estudadas e ainda, contribuir para que os estudantes troquem ideias entre si. Contudo, durante a resolução de problemas, o professor não deve fornecer as respostas prontas, e sim, demonstrar confiança no que os estudantes vão construindo. É importante que o professor indique o caminho por meio de perguntas secundárias, levando os estudantes a construir suas próprias estratégias e, também, avaliá-las conforme progride na resolução. É com o exercício das tarefas escolares que o estudante desenvolve e consolida habilidades, mesmo que em vários casos considere a repetição de técnicas para a solução de um certo problema ser cansativa. Os problemas trazidos pelo professor são parte integrante dos processos de ensino e de aprendizagem, na medida em que favorecem a aplicação de novos conhecimentos. É importante que professor e estudantes trabalhem em conjunto, permitindo assim que os estudantes tenham uma participação efetiva na construção do conhecimento e um espaço para discussões.

Essa forma de trabalho contribui para que o aluno elabore justificativas e dê sentido ao que faz. Por outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, e reorienta as práticas de sala de aula. Chamamos a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver a Resolução de Problemas. Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

A partir do momento em que o aluno se sente confiante, o aprendizado matemático pode ser levado por ele para questões que vão além da Matemática. Pode aplicá-los na resolução de problemas do dia a dia ou áreas específicas.

3.3 OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA

A Olimpíada de Matemática é uma sequência de provas, composta por problemas que empregam a matemática para a obtenção da solução. A palavra Olimpíada nos remete às competições esportivas, nas quais estamos muito habituados aqui no Brasil. Em comum elas têm a maneira que o concorrente compete com outros candidatos a fim de conquistar a vitória, respeitando as regras como em qualquer modalidade. Na Olimpíada de Matemática não entra a disputa por força ou habilidade física. É uma disputa intelectual entre estudantes, que usam a inteligência, criatividade e disciplina mental. Antigamente, matemáticos desafiavam uns aos outros propondo questões complicadas e por muitas vezes se reuniam em praça pública para a realização de torneios, e teriam que resolver equações difíceis. O que nasceu talvez por um capricho do ego destas pessoas tornou-se nessa grande competição da atualidade. Como em qualquer outra olimpíada, os participantes precisam estar preparados.

Na maioria das Olimpíadas, os melhores desempenhos são premiados. Nessas olimpíadas os melhores alunos recebem prêmios como medalhas, bolsas de estudo e menções honrosas. Os objetivos principais dessas competições são valorizar o estudo da Matemática pelos alunos, desenvolvendo maior autonomia, raciocínio lógico-matemático e fazendo com que busquem uma formação mais completa. Busca também desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores e sensibilizá-los para melhoria do ensino, com a disponibilização de material didático de forma gratuita no site da OBMEP[3].

A proposta de competições de matemática é bem antiga, desde a Idade Média. No século XVI havia competições matemáticas nas quais se jogava dinheiro e cargos. Eram verdadeiros "duelos" e o premiado recebia poder e fama (MACIEL; BASSO, 2009). Mais tarde, as competições passaram a ser mais elaboradas e organizadas dando origem às olimpíadas atuais.

A primeira Olimpíada de matemática data de 1959, e desde então é realizada anualmente (MACIEL; BASSO, 2009). Ocorreu na Hungria e destinava-se a alunos que concluíam a segunda etapa do ensino regular. Em 1934 ocorreu a primeira Olimpíada de Matemática Moderna em São Petersburgo, na Rússia.

Atualmente, grande parte dos países do mundo possui um estilo de Olimpíada ou competição de matemática. E destaca-se a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) que reúne cerca de 100 países, inclusive o Brasil. A IMO foi criada no ano de 1959 na cidade de Bucareste, na Romênia, com o objetivo de revelar e aprimorar aptidões e troca de informações entre matemáticos de todo o mundo. Ela é a mais antiga das Olimpíadas Internacionais de Ciências. No início teve a participação de poucos países. No entanto, com o passar do tempo, teve um aumento expressivo sendo na atualidade a competição mais relevante do mundo. Só em 1979, em Londres, o Brasil participou pela primeira vez. Para participar da IMO o aluno deve ter idade menor de 20 anos e estar matriculado regularmente, no Ensino Fundamental ou Médio, em instituição credenciada pelo Ministério da Educação (MEC), durante ou após o dia 1° de dezembro do ano imediatamente anterior à realização da olimpíada. A prova da IMO consiste de 6 problemas matemáticos, sendo que cada um vale 7 pontos. O exame é realizado em dois dias consecutivos e os competidores dispõem de quatro horas e meia para resolver três problemas em cada um dos dias. Os problemas podem ser de qualquer área da matemática do ensino médio. A resolução dos problemas não exige

---

[3] http://www.obmep.org.br/

conhecimento de matemática avançada, necessitando, porém, de grande inteligência e habilidades matemáticas.

O Brasil iniciou sua participação na IMO em 1979 e desde então vem obtendo resultados cada vez mais expressivos. No Brasil, a Academia Paulista de Ciências criou em 1977 a Olimpíada Paulista de Matemática. Dois anos mais tarde, surgiu a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

A 1ª OBM foi realizada em 1979. Em 1991, a competição passou a ter dois níveis: Júnior, para alunos com, no máximo, 15 anos; e Sênior, para alunos do Ensino Médio. Ao longo dos anos, houve mudanças, como a criação, em 2001, do nível Universitário, com duas fases. Em 1985 ocorreu a primeira edição da Olimpíada Ibero-Americana de Matemática, cuja sede foi na cidade de Villa de Leyva, na Colômbia, e ocorre, desde então. A Olimpíada conta com a participação dos seguintes países: Argentina; Bolívia; Brasil; Chile; Colômbia; Costa Rica; Cuba; Equador; El Salvador; Espanha; Guatemala; Honduras; México; Nicarágua; Panamá; Paraguai; Peru; Portugal; Porto Rico; República Dominicana; Uruguai; Venezuela; Angola; Cabo Verde; Moçambique; e Santo Tomé e Príncipe.

Em 2017, a OBM foi integrada à OBMEP. Passa, então, a ser realizada em fase única, para os níveis 1, 2 e 3, e é mantido o nível Universitário, em duas fases, mas conta com a inscrição individual do estudante de graduação. Criado em 2009, o PECI (Preparação Especial para Competições Internacionais) é um programa da OBMEP que possui como objetivo preparar medalhistas selecionados para competições internacionais. O PECI possui dois tipos de atividades: virtuais e presenciais.

Durante os encontros presenciais os alunos são orientados, com instruções, dicas e aulas referentes ao conteúdo voltado para a OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática). Ao mesmo tempo, também estão se preparando para competições internacionais como, por exemplo, a Olimpíada de Matemática do Cone Sul, a Olimpíada Iberoamericana de Matemática e a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Conforme o site oficial da OBMEP (www.obmep.org.br) o Brasil participa das seguintes competições internacionais:

1. INTERNACIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD (IMO): É a mais importante competição internacional, realizada desde 1959. Participam dessa competição cerca de 100 países de todo o mundo;

2. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL: É uma competição internacional da qual participam os países da porção meridional da América do Sul;
3. ROMANIAN MASTER IN MATHEMATICS: Em 2010 o Brasil participou pela primeira vez da Romanian Master in Mathematics, olimpíada que convoca apenas os melhores países do mundo em competições internacionais do gênero;
4. ASIAN PACIFIC MATHEMATICS OLYMPIAD (APMO): É uma competição de caráter internacional realizada em diversos países asiáticos e da América dedicada a estudantes do Ensino Médio. No Brasil a APMO é aplicada aos alunos que tenham sido premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM);
5. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA COMUNIDADE DOS PAÍSES DE LÍNGUA PORTUGUESA: Disputada entre oito países de expressão portuguesa: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor Leste;
6. OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA É uma competição internacional da qual participam países da América Latina, Espanha e Portugal;
7. OLIMPÍADA DE MAIO É uma competição realizada para jovens alunos, disputada em dois níveis na América Latina, Espanha e Portugal;
8. OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA O participante não deve possuir qualquer título Universitário (graduação) ou equivalente e deve estar matriculado em uma Universidade como estudante de graduação.

3.4 O PROFESSOR NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

O professor tem a função de orientar e mobilizar os alunos na busca das estratégias de resolução de problemas e aprendizagem de matemática, desenvolvendo assim o seu raciocínio. O professor age como mediador, valorizando o conhecimento do aluno e intervindo no questionamento das hipóteses. Assim cabe ao professor a responsabilidade pela organização e condução das atividades propostas aos alunos. Não pode ser só um transmissor, mas contribuir para o desenvolvimento dos alunos nos processos de resolução de problemas.

Para Allevato e Onuchic (2009), a Resolução de Problemas é uma ferramenta que potencializa e auxilia o trabalho do professor fazendo com que atue como mediador, consequentemente levando o aluno a pensar em estratégias de soluções. O aluno usa os questionamentos para construir o conhecimento. O professor proporciona comunicações e reflexões e ajuda no decorrer da resolução, a compreensão da linguagem matemática, conceitos e técnicas operacionais. Estabelece relações com diferentes ramos da matemática e assim contribui com a aprendizagem do aluno. O professor deve se preocupar em preparar os alunos para tomada de decisões, pensar de uma maneira global e raciocinar de forma criativa. Não é fácil para o aluno, ficar sentado o tempo todo, ouvindo o professor recitar propriedades, fórmulas e teoremas que para ele, muitas vezes, não fazem sentido. Por isso, o professor precisa ser um provocador da aprendizagem e promover as possibilidades de aprendizagem ao aluno.

A relação entre o aluno e o professor é de enorme importância. Professores comprometidos com a produção do conhecimento em sala de aula, que desenvolvem com seus alunos um vínculo de amizade e respeito mútuo pelo saber, são fundamentais. A relação entre o professor e o aluno depende, fundamentalmente, do clima estabelecido pelo professor, da relação empática com seus alunos e das pontes entre o seu conhecimento e o dos alunos. Segundo Freire (1996), o bom professor é o que consegue, enquanto fala, trazer o aluno até a intimidade do movimento do seu pensamento.

3.5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na literatura são apresentados outros trabalhos nos quais também relatam a aplicação da metodologia de Resolução de Problemas na sala de aula em conteúdo da matemática. Nessa seção apresentamos três trabalhos que consideramos próximos da pesquisa que desenvolvemos, sendo dois Trabalhos de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática e um artigo. Os trabalhos selecionados trazem as pesquisas de Luigi Quintans Riveiro, Alessandro Bagatini e Maura Carlos Romanatto.

Rivero (2021), aplicou a Resolução de Problemas para auxiliar na didática de ensino de equações do 1º grau. Ao final do trabalho o autor pode concluir que o papel do professor como mediador com essa metodologia utilizada possibilitou uma melhor compreensão das noções matemáticas, assim como obtenção de novos conhecimentos. O autor realizou o estudo focado em equações de 1º grau principalmente pelo fato de o conteúdo abordar novos conceitos como as variáveis “x” e “y” e muitas vezes os exercícios aplicados em sala de aula focam apenas em resolver a equação por métodos previamente conhecidos, via fórmulas decoradas. Por isso o autor procura uma alternativa, principalmente, para atrair mais a atenção e interesse do aluno na solução do problema.

Em seu estudo, Bagatini (2010) utilizou-se das provas das Olimpíadas de Matemática como modelo de questão para poder aplicar o método de Resolução de Problemas baseando-se na literatura de Polya e sua sequência sugerida. O autor aplicou as questões em dois grupos distintos, sendo um de estudantes do ensino superior do curso de matemática e outro de alunos participantes do programa de Iniciação Científica Jr. da OBMEP, esses sendo alunos do Ensino Médio. Ele conclui que, após a aplicação das questões, análise e questionar os alunos, a principal dificuldade na resolução dos problemas está relacionada com a ideia inicial de montar o problema, o primeiro passo. Isso acaba tornando o problema complicado de se resolver. Segundo os alunos do estudo, a montagem do problema é o principal fator de facilitação da resolução do problema. Isso mostra a importância do entendimento por parte do aluno do problema como um todo e não apenas aplicar fórmulas conhecidas para a resolução dos mesmos.

Bagatini (2010) ainda relata que, com base no depoimento dos alunos participantes da pesquisa, os assuntos abordados na OBMEP são semelhantes aos vistos em sala de aula, porém com um foco diferente, uma vez que não são resolvidos apenas com aplicação de fórmulas conhecidas e exigem um maior aprofundamento na questão. Esse relato destaca a importância do método de Resolução de Problemas para resolver as questões em estudo e que as questões trabalhadas na OBMEP são apropriadas para nossa pesquisa.

Romanatto (2012) traz um relato teórico da aplicação da metodologia de Resolução de Problemas em aulas de matemática. Neste estudo é relatado um problema de forma prática e como o professor pode contribuir para a elaboração da solução, por parte dos alunos, mostrando o papel do professor em auxiliar seus alunos a compreenderem os conceitos trabalhados. Ao analisar e discutir um problema o autor relata possíveis intervenções do professor como mediador para a solução do problema em sala de aula, proporcionando aos estudantes o desenvolvimento de uma estratégia para resolver o problema proposto, sem um método de resolução conhecido.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo abordamos a metodologia utilizada nessa pesquisa qualitativa, caracterizada como um estudo de caso. Na pesquisa qualitativa, na visão de Ludke e André (1986), o pesquisador está inserido no espaço em que essa ocorre, sendo ele o principal instrumento na coleta de dados. Nas próximas seções, abordamos o Estudo de Caso, o Ambiente de Aprendizagem no qual foi realizada a pesquisa, e os participantes da mesma.

4.1 ESTUDO DE CASO

O estudo de caso é uma metodologia de pesquisa que visa, segundo Ponte (2006), compreender uma entidade específica em suas motivações e aspectos próprios em relação a determinados fenômenos de interesse do pesquisador. Essa metodologia é utilizada para investigar práticas de ensino, aprendizagens dos alunos, novas abordagens, etc.

Um caso é um exemplo de alguma situação que pode ser positiva (ao se relatar uma experiência bem sucedida), negativa (contrariando os objetivos e certezas iniciais) ou ser neutro (sem grandes marcos positivos ou negativos). Sendo assim, o caso se torna interessante, para Ponte (2006), ao revelar algo de novo em relação objeto de estudo.

Os estudos de caso podem servir para obter-se informações para uma pesquisa futura, podem apenas descrever o caso ou ainda analisar as situações confrontando-as com teoria já existente. Os estudos de caso são usados, também, para apoiar a prática profissional. (Ponte, 2006).

Nesse estudo de caso, observamos o modo como os alunos interagiam entre si na busca pelas soluções dos problemas apresentados e analisamos, junto à Resolução de Problemas, as etapas pelas quais eles passavam.

4.2 AMBIENTE ESCOLAR

Nessa pesquisa, trabalhamos com questões de provas da OBMEP na perspectiva da Resolução de Problemas junto a um grupo de três alunos, um do sexto, um do sétimo e outro do oitavo ano que frequentam o Clube Olímpico de Matemática da escola. Acreditamos que as questões oferecem recursos para investigações pelos alunos e, quando o aluno assume o processo de exploração e explicação, passam a ser um novo ambiente de aprendizagem (Skovsmose, 2000).

Durante três encontros, com duração prevista para uma hora e meia, foram propostas as atividades para os alunos desenvolverem as estratégias de resolução, debaterem as ideias geradas e analisarem os conteúdos matemáticos abordados durante as etapas. As questões foram selecionadas seguindo as atividades programadas das aulas do clube. Todas as etapas da Resolução de Problemas foram objeto de observações e análise pelo professor pesquisador.

A coleta de dados se deu por gravação dos áudios das conversas entre os alunos e professor pesquisador, durante as explicações dos raciocínios e estratégias, bem como por imagens dos desenvolvimentos das questões.

Enfrentamos uma pandemia ocasionada pelo vírus da COVID-19 e, por medidas sanitárias, as autoridades decidiram pelo distanciamento físico. Por esta razão, as aulas presenciais foram canceladas e a escola em que foi realizada essa pesquisa optou por aulas com o uso de plataforma digital. Assim, a coleta de material foi realizada por vias eletrônicas. Os encontros foram realizados por videoconferência, sendo que os alunos já estavam familiarizados. Percebemos que em alguns momentos os alunos são mais contidos para expressar suas opiniões por causa do vídeo, tendo, o professor, de instigar maior participação que se comparado à aula presencial tradicional.

Neste estudo de caso, dentro da realidade e contexto do Clube Olímpico, que será descrito na próxima seção, analisamos o processo de construção e os significados gerados pelos alunos durante os desenvolvimentos das atividades. Por meio de observação, conversas e análise dos documentos produzidos pelos alunos temos assim uma variedade de fontes de informação que permitam representar os diferentes pontos de vista. (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

4.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA

O estudo foi realizado em um colégio particular de Porto Alegre durante o período com as aulas remotas, devido a pandemia de Covid-19. As aulas eram realizadas por vídeo chamada na qual os alunos mostravam as resoluções pela câmera do computador ou explicavam como haviam pensado as questões. Os alunos assinaram um termo de assentimento (ANEXO A) para participar da pesquisa a fim de contribuir com a pesquisa acadêmica para o desenvolvimento da Educação Matemática. Seus nomes não estão divulgados neste trabalho com o intuito de manter o anonimato dos alunos.

No colégio em que foi realizada a pesquisa as aulas foram realizadas por uma plataforma de videoconferência a qual os alunos estão adaptados. Nas aulas do Clube Olímpico de Matemática, as imagens das questões foram projetadas no quadro para que, após a resolução individual dos alunos e comentários sobre suas estratégias, o professor pesquisador auxiliasse os alunos escrevendo as resoluções a partir das falas.

Os alunos dessa pesquisa são participantes do Clube Olímpico de Matemática disponibilizado pelo colégio, o objetivo principal do clube é a preparação para as diversas olimpíadas de matemática além de incentivar, desenvolver e aprimorar o raciocínio lógico e a capacidade de expor as ideias e resoluções das questões. Para participar do clube os alunos interessados podem se inscrever e alguns alunos são convidados por seus resultados na matéria. As aulas do clube são em turno inverso ao da aula regular, sendo considerado uma atividade complementar aos estudos dos alunos desse colégio.

O grupo participante foi formado por três alunos, que participam do clube desde o início do ano letivo. Outros três alunos que participavam deixaram de frequentar o clube devido ao adiamento das provas da OBMEP em razão da pandemia da COVID19. O Aluno A é do 7º ano do Ensino Fundamental, o Aluno B, do 6º ano, e o Aluno C, do 8º ano.

Nesta pesquisa, foram utilizadas questões das provas de 2ª fase da OBMEP de 2018 e 2019 para as atividades, uma vez que as questões de segunda fase requisitam uma justificativa para as respostas encontradas. Essas questões instigaram o debate entre os alunos que por muitas vezes permitiu que, em conjunto, as resolvessem.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

As atividades foram separadas em 3 encontros nos quais foram resolvidas e discutidas questões de prova da OBMEP. Para não identificar os alunos participantes das atividades, os representamos por letras (A, B e C). Nesse capítulo, descrevemos as atividades realizadas. Organizamos o texto por encontro, em seções separadas, sendo que nossa análise e interpretação dos comportamentos dos alunos e do professor pesquisador também está separada por encontro, e apresentadas ao final de cada seção.

5.1 PRIMEIRO ENCONTRO

No primeiro encontro trabalhamos três questões da Prova de 2ª fase Nível 1 da OBMEP de 2019.

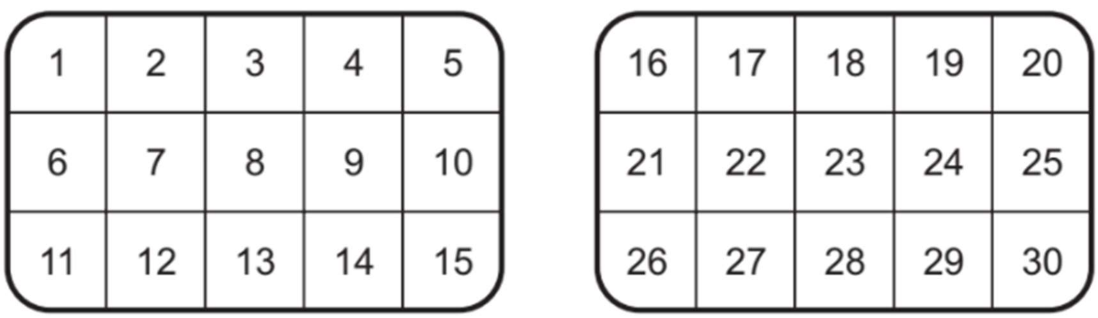
I) A primeira atividade foi a resolução da questão 2 que se divide em 3 perguntas.

- Questão 2 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2019

Roberta tem duas cartelas, uma com os números de 1 a 15 e outra com os números de 16 a 30. Ela escolhe um número de cada cartela e calcula a soma deles.

a) Quais são as escolhas possíveis para Roberta obter a soma 18?
b) Se Roberta fizer todas as escolhas possíveis, quantos resultados diferentes ela poderá obter?
c) Se Roberta fizer todas as escolhas possíveis, qual é o resultado que aparecerá mais vezes? Por quê?

Figura 1 – Imagem da questão 2 - Prova 2019



Fonte: OBMEP PF2N1– 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

a) Quais são as escolhas possíveis para Roberta obter a soma 18?

Logo após a exposição do problema os alunos ficaram em silêncio para a leitura e resolução individual.

Rapidamente o Aluno A respondeu que havia duas possibilidades apenas para obter a soma 18, escolhendo 2 na cartela 1 e 16 na cartela 2 ou escolhendo 1 na cartela 1 e 17 na cartela 2. O Aluno B concordou em seguida com a solução encontrada pelo colega.

b) Se Roberta fizer todas as escolhas possíveis, quantos resultados diferentes ela poderá obter?

Para resolver a segunda pergunta da questão nº 2, os alunos ficaram mais tempo em silêncio. Novamente o Aluno A respondeu, mas desta vez em tom de questionamento "São 225 somas?". Ao ser questionado pelo professor sobre o raciocínio que ele havia utilizado para chegar a este número, respondeu que havia 15 números na primeira cartela e outros 15 números na segunda cartela e, multiplicando conclui que são 225 somas. O professor perguntou, então, se ele havia lido bem a pergunta, e o aluno percebeu que não havia lido a palavra 'diferentes' no enunciado.

Após mais um momento de silêncio, o Aluno B disse que não estava conseguindo entender a pergunta. O professor leu com ele a pergunta novamente e questionou qual era o menor valor possível para uma soma. Assim, chegaram à conclusão que seria 17, pois é a soma dos menores valores de cada cartela (1 e 16). De forma análoga os alunos concluíram que 45 seria a soma de maior valor. Ao concluir que todos os valores entre esses dois números são resultados de uma soma entre as duas cartelas, os alunos responderam que existem 28 somas diferentes. O professor escreveu no quadro a sequência de somas 17, 18, 19, …, 45. Perguntou quantas somas havia até o 19 e os alunos responderam que tem três somas, porém ao serem questionados do porquê a diferença entre 19 e 17 resulta em 2 perceberam que deveriam somar um ao valor de 28 para encontrar o total de somas diferentes. O Aluno B comentou que "quando tu fazes 45 menos 17, tu tiras o 17 e, assim, tem que somar um para colocar ele de volta", chegando ao resultado de 29 somas diferentes.

c) Se Roberta fizer todas as escolhas possíveis, qual é o resultado que aparecerá mais vezes? Por quê?

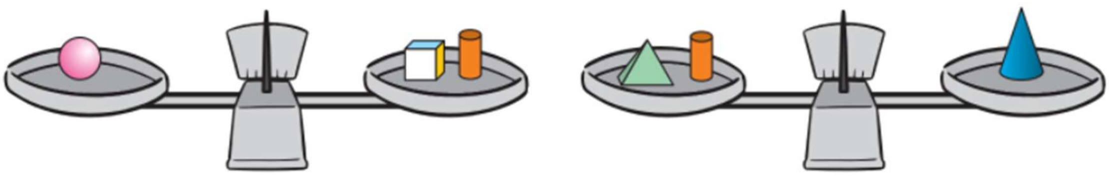
A terceira pergunta foi colocada no quadro e novamente ficaram em silêncio. O Aluno A respondeu que seria a soma 26, mas durante a explicação percebeu que não poderia ser esse valor. O Aluno A comentou que a soma 31 poderia ser formada escolhendo o número1 na cartela 1 e o número 30 na cartela 2 e poderia também escolher o número 15 na cartela 1 e o número16 na cartela 2. Para em seguida concluir que qualquer número que escolhesse da cartela 1 poderia combinar com um da cartela 2 para somar 31, e que com nenhuma outra soma era possível fazer isso.

II) A segunda atividade foi a resolução da questão 3 da prova de segunda fase da OBMEP de 2019 Nível 1.

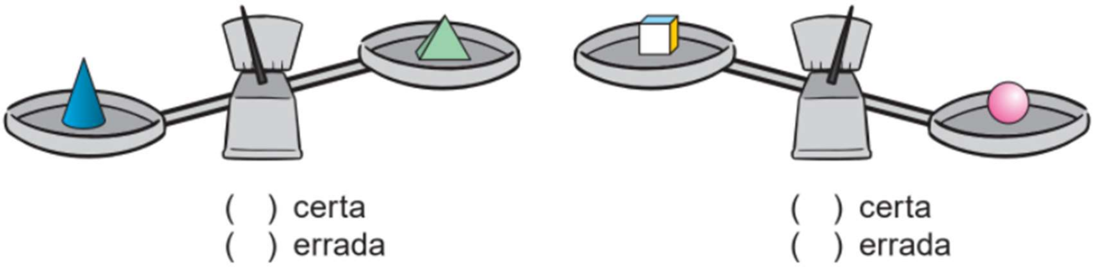
- Questão 3 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2019

Paulinho tem peças com cinco formas diferentes (cubos, pirâmides, esferas, cilindros e cones). Peças com a mesma forma têm o mesmo peso (massa). Ele coloca algumas peças numa balança de pratos e observa o equilíbrio nas duas situações abaixo.

Figura 2 – Imagem da questão 3 – letra a – Prova 2019



a) Indique se as figuras abaixo representam situações certas ou erradas.

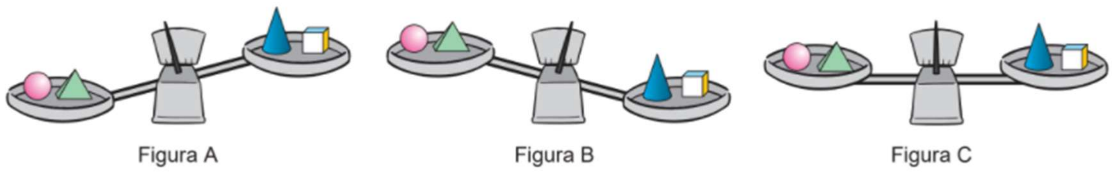


Fonte: OBMEP PF2N1 – 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

A primeira pergunta os alunos responderam rapidamente que as duas comparações estavam certas.

b) Qual das figuras abaixo representa a situação correta?

Figura 3: Imagem da questão 3 – letra b – Prova 2019



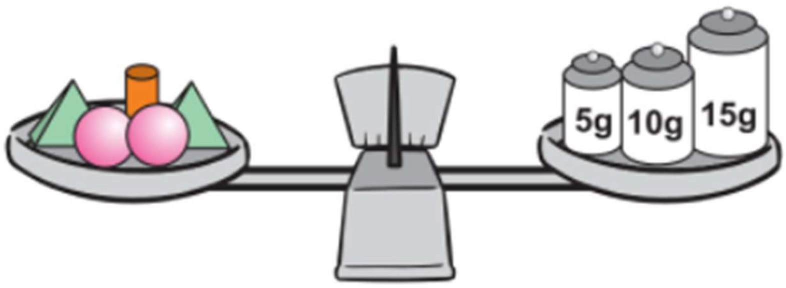
Fonte: OBMEP PF2N1 - 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

Justificativa:

À segunda pergunta, após uma breve análise, responderam que a letra C era a correta. Ao serem questionados por que era a alternativa correta, o Aluno A respondeu que se colocasse um cilindro laranja de cada lado ficaria igual à primeira imagem do problema e que os pesos seriam iguais.

c) Com alguns pesos conhecidos, Paulinho observou a situação de equilíbrio abaixo. Quanto pesam, juntos, um cubo, uma pirâmide, uma esfera, um cilindro e um cone?

Figura 4 – Imagem da questão 3 – letra c – Prova 2019



Fonte: OBMEP PF2N1 – 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

Justificativa:

Para a terceira pergunta levaram mais tempo. Ao serem questionados responderam que não haviam encontrado um modo de calcular. Pensaram em dividir a soma dos pesos pelas figuras, mas perceberam que não faria sentido, pois as figuras eram diferentes. O professor desenhou as figuras da pergunta: cubo, pirâmide, esfera, cilindro e cone, e ressaltou as respostas das perguntas anteriores.

Naquele momento o Aluno A teve problemas com a internet e saiu da chamada de vídeo, ficando apenas os alunos B e C. Com o auxílio do professor, o Aluno B entendeu que poderia usar a resposta da pergunta anterior e, sendo assim, poderia substituir uma esfera e uma pirâmide por um cubo e um cone. E assim a soma das figuras era igual aos pesos.

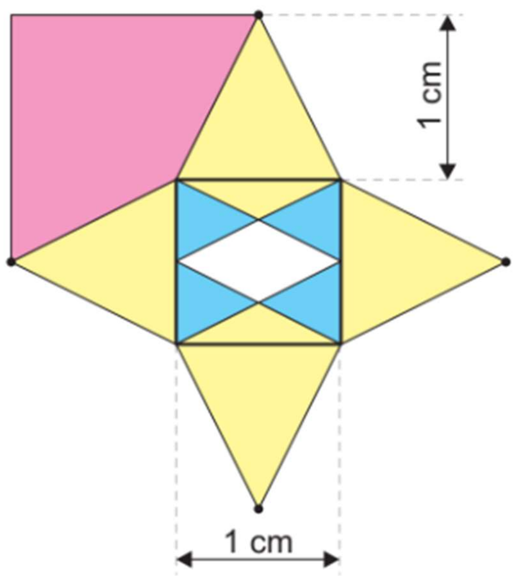
O Aluno B comentou que não havia entendido que poderia utilizar o resultado de uma pergunta anterior para responder as perguntas seguintes.

III) A terceira atividade foi a resolução da questão 4 da prova de segunda fase da OBMEP de 2019 Nível 1.

- Questão 4 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2019

Na figura, o quadrado tem lado 1 cm. Os quatro triângulos azuis são iguais, assim como os dois triângulos amarelos menores. Os quatro triângulos amarelos maiores têm, cada um deles, base igual ao lado do quadrado, altura com relação a essa base igual a 1 cm, e seus outros dois lados com mesma medida. Dois lados do quadrilátero rosa são paralelos aos lados do quadrado.

Figura 5 – Imagem da questão 4 – letra a – Prova 2019



Fonte: OBMEP PF2N1 - 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

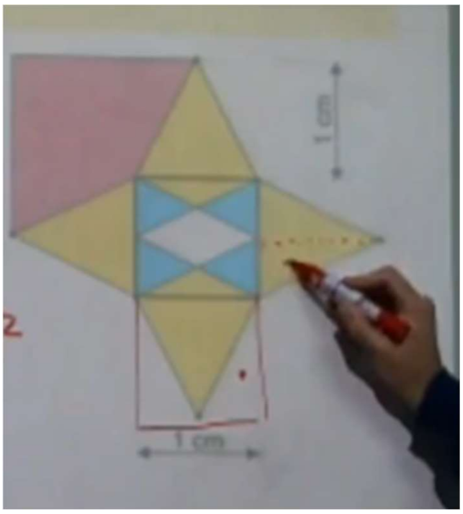
a) Qual é a área da região formada pelos triângulos azuis?

Somente o Aluno B continuava na sala. Ele comentou que pensou em juntar os triângulos azuis e que completariam a metade do quadrado central, porém acreditava que não era possível. Ao expor esse pensamento para o professor, e este desenhá-lo no quadro, concluiu que de fato os triângulos azuis mediam a metade da área do quadrado central. Depois, ele comentou que ainda teria de calcular o valor numérico da área. Sendo então a área do quadrado igual à 1 cm², a área da região formada pelos triângulos azuis é igual à 0,5 cm².

b) Qual é a área da região formada pelos triângulos amarelos?

Na segunda pergunta, após um momento de trabalho individual do Aluno B, ele perguntou qual era a medida dos lados do triângulo. O professor releu a questão pontuando as informações do problema: "base do triângulo igual a 1 cm e altura relativa à essa base também igual a 1 cm". Rapidamente o Aluno B disse que a resposta seria 4, "eu juntei os triângulos para formar um quadrado, e cada parte ficou 2 então deu 4". O professor procurou organizar no quadro a ideia do aluno, que disse ter juntado todos os triângulos para fazer um quadrado maior. O professor desenhou um quadrado a partir de um dos triângulos e em outro dividiu ao meio. O aluno guiou então o desenvolvimento da questão, indicando que cada parte do triângulo poderia completar o quadrado formado.

Figura 6 – Imagem da questão 4 – letra b – Prova 2019



Fonte: O Autor

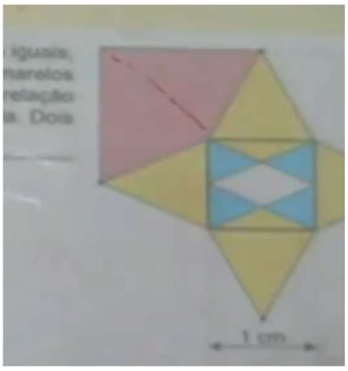
Observando a figura construída, o aluno B comentou que havia construído um retângulo ao juntar os quatro triângulos. Mas agora percebia os quatro triângulos formariam dois quadrados e então a área era de 2 cm². O professor perguntou se essa era toda a região amarela e indicou os dois triângulos amarelos dentro do quadrado central.

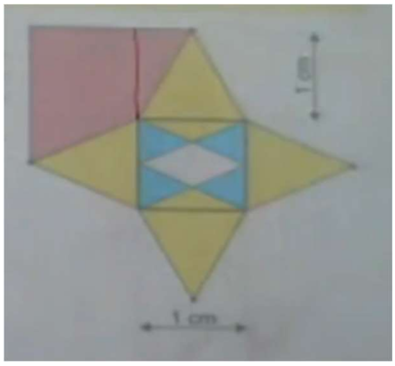
Para calcular a área dos triângulos amarelos internos, o Aluno B sugeriu então que deveria subtrair a área dos triângulos azuis da área do quadro e dividir o valor por quatro, pois a região branca era igual a dois triângulos amarelos pequenos e multiplicar por dois. Ele conclui que os dois triângulos amarelos mediam um quarto da área do quadrado.

c) Qual é a área do quadrilátero rosa?

A terceira pergunta sobre a região rosa foi respondida rapidamente que seria igual à área de dois triângulos amarelos, o aluno indicou que fez a divisão como destacada na Figura 7. Mas, ao visualizar, como ficou a imagem percebeu que os triângulos rosas eram maiores que os amarelos.

Figura 7 – Imagem da questão 4 – letra c – Prova 2019





Fonte: O Autor

Ele sugeriu que fizesse outra divisão pela outra diagonal do quadrilátero. Porém logo percebeu que essa imagem não se assemelhava a nenhuma outra figura na imagem. O professor sugeriu que estendesse um dos lados do quadrado, e logo o aluno notou que formaria um triângulo rosa ao lado do amarelo que tem área igual à metade da área do triângulo amarelo. O aluno comentou que poderia fazer desenho análogo pelo outro lado do quadrado e como resultado encontrou outro triângulo rosa e um quadrado de lado 1 cm. Resultando a área rosa com medida de 1,5 cm².

Na resolução do primeiro exercício, foi observado que a atividade foi facilmente resolvida pelos alunos. Leram e entenderam o enunciado, executaram o raciocínio com o conteúdo aprendido e chegaram logo a uma conclusão. Na segunda atividade, houve a intervenção do professor como mediador, relendo com os alunos o enunciado e escrevendo de forma esquemática os números no quadro. Nesse momento, observamos a coparticipação referida por Onuchic e Alletavto (2009), na qual professor e aluno, juntos, durante a resolução de problemas, chegam à solução. Na pergunta seguinte, um aluno responde rapidamente e ao tentar justificar seu raciocínio percebe seu equívoco. Segundo Polya (2006) é preciso refletir sobre a solução encontrada e os caminhos percorridos. Assim o aluno consegue estabelecer outras vias com base no seu próprio erro. No item b) da segunda questão compreenderam o problema, mas não encontraram um modo de responder. O professor interveio esclarecendo o enunciado e ressaltou que deveriam usar as informações anteriores. Já na última questão, somente um aluno continuava na sala, o que impediu a discussão em grupo. No segundo exercício, quando o professor refez a pergunta, o aluno prestou mais atenção e conseguiu entender o que foi solicitado. O professor agiu como um guia para o aluno. Quando o professor questionou, o aluno revisou e corrigiu o raciocínio da resolução. É essa tarefa, segundo Polya (2006), que exige paciência e cuidado: é a etapa de construir um plano e executar.

5.2 SEGUNDO ENCONTRO

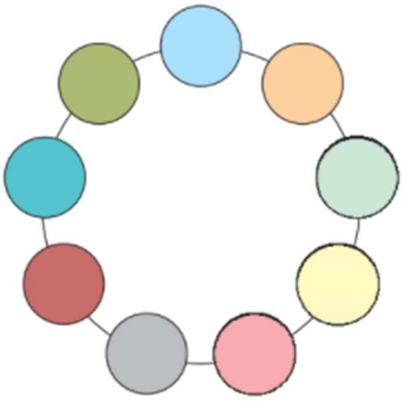
I) A primeira atividade foi a resolução da questão 6 da prova de segunda fase da OBMEP de 2019 Nível 1.

- Questão 6 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2019

Os números da tabela abaixo serão colocados nos círculos coloridos de modo que nenhum deles apareça mais de uma vez e a soma dos números em três círculos consecutivos seja sempre um múltiplo de 3.

Figura 8 – Imagem da questão 6 – Prova 2019

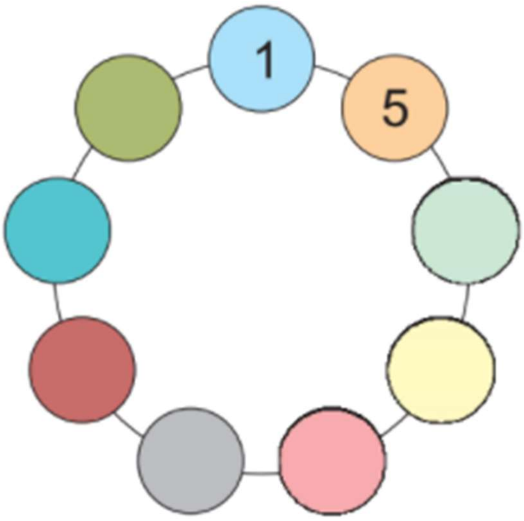
Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
1	2	3
4	5	6
7	8	9



Fonte: OBMEP PF2N1 - 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

a) Complete o preenchimento abaixo.

Figura 9 – Imagem da questão 6 – letra a – Prova 2019



Fonte: OBMEP PF2N1 - 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

Na primeira pergunta, os alunos resolveram com agilidade, cada um ofereceu uma alternativa diferente. O Aluno B inicialmente não havia observado o desenho abaixo do enunciado já com os números 1 e 5 colocados e escreveu uma solução com os círculos em branco. Após a correção feita pelos colegas, ele montou nova solução. Os três alunos resolveram apenas procurando dentre os números disponíveis qual encaixaria seguindo as regras propostas.

Figura 10 – Resolução do Aluno B – questão 6 – Prova 2019

No que tange a imagem a seguir, devido a resolução não ter auxiliado no entendimento, segue a descrição: o aluno desenhou a figura da questão e colocou-a conforme a sequência de números, iniciando pelo espaço mais à esquerda da imagem e no sentido horário: 8, 1, 3, 2, 9, 7, 5, 6, 4.

Fonte: O Autor

b) Explique por que, em qualquer preenchimento, três círculos consecutivos sempre serão preenchidos com números de colunas diferentes da tabela.

Para a segunda pergunta, o Aluno C analisou a soma de um número da primeira coluna com um número da segunda coluna seria múltiplo de 3 e somado com um número da terceira coluna (que todos são múltiplos de 3) sempre resultaria um múltiplo de 3. O professor então fez uma abordagem diferente para a pergunta “Por que não pode haver dois números da mesma coluna seguidos?”. Motivados por essa pergunta começaram a conversar e concluíram que somando dois de uma mesma coluna só poderia colocar um outro da mesma coluna na sequência e assim teria de repetir um número, o que não pode pelas condições do problema.

c) Quantos preenchimentos diferentes são possíveis?

Na terceira pergunta da questão 6 os alunos após lerem tiveram um momento de trabalho individual. O Aluno B, sem muita certeza do valor encontrado, respondeu que o total de possibilidades era 54. Ao ser questionado da resolução, percebeu que estava incompleta. No círculo azul (seguindo a ordem da pergunta anterior) ele disse que havia 9 possibilidades, no círculo à sua direita havia 6 números possíveis pois dois eram da mesma coluna do anterior e no círculo à direita deste último restaria 3 números possíveis. Para o próximo círculo, o Aluno C falou que seriam 6 possibilidades, “pois de 9 já escolhemos 3 números”.

O professor sugeriu aos alunos que escrevessem uma possibilidade completando os círculos que já haviam fixado e perguntou quais eram os números que poderiam ser escritos no próximo círculo. O Aluno B disse que tinha dois números que caberiam. Assim os três alunos perceberam que nos outros círculos poderiam completar seguindo a mesma ideia. O aluno B calculou 27, o resultado das somas das possibilidades, mas em seguida o Aluno C corrigiu dizendo que deveria multiplicar os valores. E chegaram ao resultado.

II) A segunda atividade foi a resolução da questão 1 da prova de segunda fase da OBMEP de 2018 Nível 1.

- Questão 1 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2018

Uma máquina maluca transforma duas frutas em uma fruta, da seguinte maneira:

• Transforma duas maçãs em uma laranja;

• Transforma duas laranjas em uma laranja;

• Transforma uma maçã e uma laranja em uma maçã.

Figura 11 – Imagem da questão 1 – Prova 2018

Fonte: OBMEP PF1N1 - 2018- http://www.obmep.org.br/provas.htm

a) Quantas vezes a máquina deve ser usada para transformar três maçãs em uma maçã?

b) Explique como usar essa máquina algumas vezes para transformar três maçãs e quatro laranjas em uma maçã.

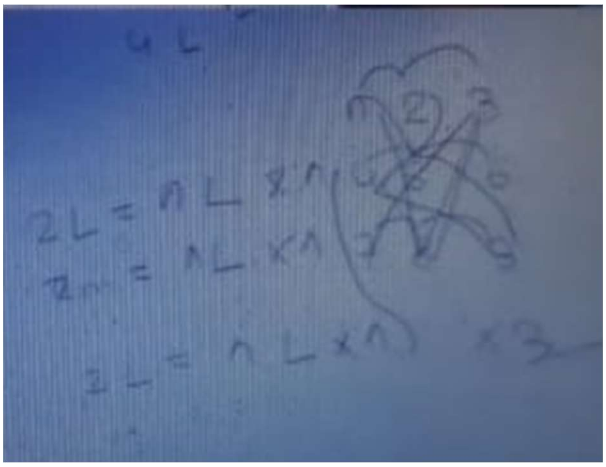
c) Começando com 2018 laranjas e 517 maçãs, a máquina foi usada repetidamente até sobrar apenas uma fruta. Explique por que essa fruta só pode ser uma maçã.

Após algum momento de trabalho individual, o aluno B respondeu que seriam duas utilizações da máquina. O aluno A discordou, acreditando que haveria necessidade mais passagens pela máquina. O Aluno B, então, explicou sua resolução “primeiro transforma duas maçãs em uma laranja e depois uma maçã e uma laranja em uma maçã”. Os outros dois alunos concordaram.

b) Explique como usar essa máquina algumas vezes para transformar três maçãs e quatro laranjas em uma maçã.

Para a segunda pergunta, o Aluno B novamente teve facilidade para resolver a questão, montando em quatro passagens pela máquina “duas laranjas dá uma laranja; duas maçãs dá uma laranja; duas laranjas dá uma laranja; sobra uma maçã e uma laranja e dá uma maçã”. O Aluno C comentou que havia encontrado cinco passos, o professor, então, comentou que poderiam encontrar diferentes números, pois podem usar a máquina de maneiras diferentes. O Aluno A comentou a sua solução com seis passos.

Figura 12 – Resolução Aluno A – questão 1 – Prova 2018



Fonte: O Autor

c) Começando com 2018 laranjas e 517 maçãs, a máquina foi usada repetidamente até sobrar apenas uma fruta. Explique por que essa fruta só pode ser uma maçã.

Para a terceira pergunta ficaram por um bom momento em silêncio, cada um trabalhando sozinho. O Aluno C, sugeriu que por haver duas operações que resulta em laranja e somente uma em maçã e que a única que mistura as duas frutas dá maçã. O professor ressaltou a pergunta do porquê com aquelas quantidades resultaria maçã ao final de qualquer forma. O Aluno C respondeu pelo número de maçãs ser ímpar e sempre sobraria uma maçã. O professor desenhou no quadro com números menores, mas seguindo sempre com um número ímpar de maçãs para explicar aos outros dois alunos.

III) A terceira atividade foi a resolução da questão 2 da prova de segunda fase da OBMEP de 2018 Nível 1.

- Questão 2 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2018

Joãozinho comprou um álbum em que figurinhas numeradas devem ser coladas em ordem crescente, começando na página 2 e terminando na página 61. Nas páginas pares devem ser coladas 5 figurinhas e, nas ímpares,6 figurinhas.

Figura 13 – Imagem da questão 2 – Prova 2018

Fonte: OBMEP PF1N1 - 2018 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

a) No total, quantas figurinhas devem ser coladas no álbum?

b) Em qual página deve ser colada a figurinha de número 196?

c) Para completar seu álbum, Joãozinho comprou muitos pacotes de figurinhas. Após colar a última figurinha que faltava, o número de figurinhas repetidas era oito vezes o número de figurinhas coladas.

Se o álbum custou 20 reais e cada pacote com 5 figurinhas custou 2 reais, quanto Joãozinho gastou para ter seu álbum completo?

Os alunos estavam com dificuldades para ler o quadro em que era projetada. Após o professor ler a questão para eles, o Aluno C respondeu 330 figurinhas e o aluno A, 335. O Aluno B calculou 336 e os três foram convidados a expor suas resoluções. O Aluno A dividiu 60 por 2 e encontrou 30, como eram páginas pares e ímpares fez 30 vezes 6 e 30 vezes 5 e depois somou os produtos. O Aluno C comentou que fez o mesmo desenvolvimento, mas que o resultado foi diferente. O Aluno A percebeu que havia somado uma página ímpar a mais.

b) Em qual página deve ser colada a figurinha de número 196?

Na segunda pergunta o Aluno A respondeu que na página 37 seria colocada a figurinha 196. Em seguida o Aluno C também respondeu 37, juntou uma página par e uma ímpar que teria 11 figurinhas. O Aluno A complementou o raciocínio dizendo que iria somando de 11 em 11 até passar da 196. O aluno B comentou que o cálculo dele havia chegado à página 36. O professor pontuou no enunciado que as páginas com figurinhas começavam na 2 e o aluno concordou que seria na página 37.

c) Para completar seu álbum, Joãozinho comprou muitos pacotes de figurinhas. Após colar a última figurinha que faltava, o número de figurinhas repetidas era oito vezes o número de figurinhas coladas.

Se o álbum custou 20 reais e cada pacote com 5 figurinhas custou 2 reais, quanto Joãozinho gastou para ter seu álbum completo?

A terceira pergunta foi resolvida rapidamente: o Aluno C comentou que havia 330 coladas e 8 vezes esse valor de repetidas, totalizando 2970 figurinhas, em seguida dividir por 5 que cabe em cada pacotinho, multiplicar por 2 que é o valor de cada pacote e por final somar com 20 que era o valor do álbum.

O segundo encontro do clube de matemática aconteceu na semana seguinte. Os alunos A, B e C estavam presentes. Observamos logo a ansiedade de um aluno em querer responder, de imediato, a pergunta colocada, sem observar atentamente todo o enunciado. Mesmo virtualmente, cada um em sua casa, os colegas interagiram e conseguiram responder à pergunta. Conforme Polya (2006) o objetivo não pode ser a resolução imediata, mas o desafio de buscar ações para solucionar o problema. Na próxima resolução, novamente se confirma a interação e discussão entre os alunos como boa ferramenta de aprendizagem. O professor intervém e aumenta o desafio através de outra abordagem do problema. Os alunos, mais motivados, chegam a uma conclusão. Após, observamos o trabalho em grupo depois de um primeiro momento de reflexão individual, e o professor, como guia, conduzindo a resolução construída pelos participantes. Os alunos apresentaram diferentes resultados e depois, juntos, chegaram a uma conclusão. Soares e Pinto (2001) afirmam que os alunos precisam se tornar pessoas capazes de enfrentar situações diferentes e que busquem aprender novos conhecimentos.

No item b da segunda questão, os alunos chegaram aos mesmos resultados usando a máquina de transformar frutas de maneira diferentes. Nesse caso o professor levou os alunos a construírem suas próprias estratégias e também avaliá-las. No item seguinte, o professor aproveitou a questão respondida por um aluno para transmitir o conteúdo aos demais. E na última questão, como os 3 alunos encontraram resultados diferentes, e todos foram convidados pelo professor a exporem seus raciocínios.

5.3 TERCEIRO ENCONTRO

Dando sequência à prova do Nível 1 da OBMEP 2018 Fase 2, os alunos trabalharam as questões 3 e 4.

I) A primeira atividade foi referente a questão 3

- Questão 3 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2019

O sapinho da figura pula de uma pedra para uma pedra vizinha, dando voltas em torno do lago. Por exemplo, se ele pular duas vezes a partir da pedra A, no sentido horário, ele vai parar na pedra C.

Figura 14 – Imagem da questão 3 – Prova 2019

Fonte: OBMEP PF1N1 – 2019 - http://www.obmep.org.br/provas.htm

a) Partindo da pedra A, em qual pedra o sapinho vai parar após pular 15 vezes no sentido horário?

Após exposta a questão para os alunos, eles tiveram um momento de trabalho individual. Em seguida o Aluno A respondeu que na primeira pergunta o sapo pararia na pedra G, e os Aluno B e C confirmaram a resposta do colega. Quando o professor perguntou qual dos alunos gostaria de comentar a resolução, o Aluno B foi direto na resposta "é só contar". Em seguida ele complementou "a partir da pedra A contar 15 casas até a pedra G".

b) Novamente, partindo de A e começando no sentido horário, o sapinho pula 2018 vezes e sempre muda de sentido cada vez que o número de saltos for um múltiplo de 8. Em qual pedra ele vai parar?

Para responder à segunda pergunta os alunos precisaram de mais tempo de trabalho individual. O Aluno B respondeu que o sapo pararia na pedra H e o Aluno A, na pedra G. O Aluno B explicou sua resolução:

- Eu fui tirando 8 de 2018, porque 8 é uma volta e muda o sentido de horário para anti-horário. Aí, tirando 8 sobrou 2. Como a primeira (volta) é em sentido horário e a segunda em sentido anti-horário, eu percebi que as voltas pares eram em sentido anti-horário. E como sobrou 2, o sapo estava na I e foi até a H, ou talvez seja a G.

O professor então perguntou se o processo utilizado pelo aluno permitia que ele soubesse em qual pedra o sapo estaria após subtrair sucessivas vezes 8. O Aluno B ficou reflexivo por um momento e organizou seus cálculos e em seguida concluiu "Eu dividi 2018 por 8 para ver quantas voltas completas daria. Deu 252. A primeira volta é no sentido horário e a segunda é no sentido anti-horário. Então os pares são no sentido anti-horário e a volta 252 começa na pedra I.” Para auxiliar o aluno, o professor desenhou no quadro o desenvolvimento comentado. O professor ressaltou em qual pedra o sapo pararia ao final de cada volta. Após chegar ao final da quarta volta, os alunos concluíram que após 252 voltas completas o sapo estaria na pedra A e iniciaria a próxima no sentido horário, chegando até a pedra C.

c) Finalmente, partindo de A e começando no sentido horário, o sapinho pula 810 vezes e sempre muda de sentido cada vez que o número de saltos for um múltiplo de 8 ou um múltiplo de 12. Em qual pedra ele vai parar?

A terceira pergunta da questão 3 ofereceu maior dificuldade para os alunos. O Aluno B após um longo momento comentou “Isso é demais para o meu cérebro, eu não consigo pensar em nada.” o que provocou risos em todos os participantes. O professor perguntou o que ele havia pensado individualmente.

- Quando ele pulou 8 ele mudou o sentido, aí pulou até 12 e mudou, no 16 mudou, no 24 mudou. E foi mudando daí eu cansei porque estava demorando muito.

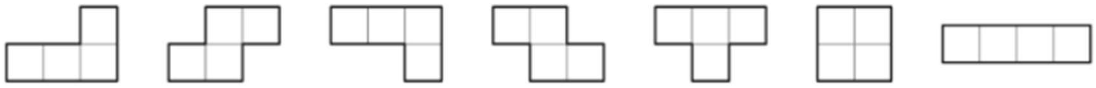
O professor então auxiliou na organização do problema questionando de qual pedra o sapo parte? Os alunos responderam pedra A. O Aluno A completou afirmando que o sapo chegaria até a pedra I após pular 8 pedras no sentido horário e então mudaria o sentido. Professor e alunos continuaram a contagem até o 12° pulo, parando na pedra E, ao que o Aluno B avisou que mudaria o sentido e continuaram a contagem até o 16° pulo parando na pedra I. O Aluno A comentou que pularia no sentido contrário até chegar à pedra A após o 24° pulo. O Aluno B quis continuar a contagem, então o professor perguntou se o sapo havia retornado à posição inicial e os alunos concordaram. Então, o professor instigou, questionando em quantos pulos o sapo voltaria ao início. O Aluno B respondeu que seriam 24 pulos e perguntou se deveria dividir por 24 agora. O professor confirmou que era esse o caminho. Os alunos fizeram a divisão dos 810 pulos por 24 e encontraram o valor de 33 voltas, porém com o resto de divisão igual à 18. Então o professor questionou os alunos sobre o que deveriam fazer com o valor do resto. O aluno A respondeu que esse seria o número de pulos que o sapo faria a partir da primeira posição. Então eles contaram e afirmaram que o sapo finalizaria na posição G.

Essa atividade serviu para mostrar aos alunos o significado do valor do resto de uma divisão e a importância de se identificar, em um problema, padrões. Ou seja, que à cada 24 pulos o sapo voltaria para mesma posição. Esta questão poderia ser resolvida, como sugerida pelo aluno B, por meio de uma contagem até o valor final. Porém o professor interviu para questionar e auxiliar, como mediador, para que os alunos observassem o padrão apresentado no enunciado do problema.

II) A segunda atividade foi a resolução da questão 4 da prova de segunda fase da OBMEP de 2018 Nível 1.

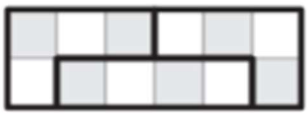
- Questão 4 – Prova Nível 1 – Fase 2 – 2018

Marília tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo.

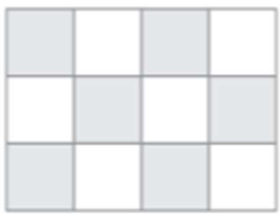


Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro.

Veja como Marília cobriu um tabuleiro 2 x 6:



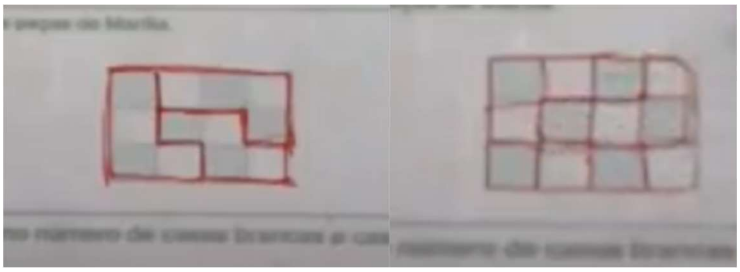
a) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marília.



O Aluno B perguntou se só havia aquelas peças ou se poderia ter mais de uma do mesmo tipo, o professor leu novamente com os alunos o enunciado e logo perceberam que havia apenas as 7 peças ali indicadas. O Aluno A comentou que no modelo indicado teria sido usada uma peça que não aparece entre as possíveis. O professor, então, mostrou que as peças poderiam ser rotacionadas e o aluno comentou que não havia entendido que poderia ser feito esse movimento.

Em relação a primeira pergunta, cada aluno comentou uma possível maneira de completar e o professor desenhou no quadro para que todos acompanhassem.

Figura 15 – Resolução da questão 4 – Prova 2014



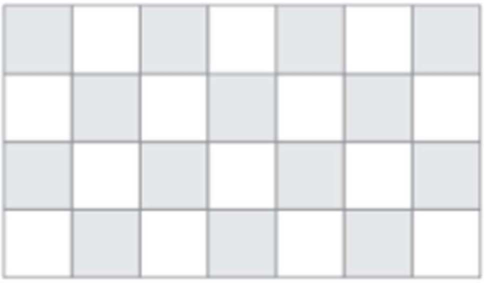
Aluno B Aluno A

Fonte: O Autor

b) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

O Aluno B comentou que a figura que “parece um T” seria a resposta para a segunda pergunta. O Aluno A concordou dizendo que “os quadrados das pontas e de baixo tem a mesma cor e o do meio de cor diferente” e que todas as outras peças teriam dois quadrados de cada cor.

c) Explique por que Marília nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo.



Para a terceira pergunta os alunos após um momento de reflexão individual, responderam que “ela nunca vai conseguir cobrir o tabuleiro, porque não dá para cobrir”. O Aluno B comentou que tentou de várias formas e não deu, mas que não sabia como explicar porque não seria possível cobrir o tabuleiro. O professor, então, chamou a atenção novamente para a questão anterior, relembrando que todas as peças tinham o mesmo número de casas brancas e cinzas, e apenas uma não teria a mesma quantidade. Em seguida, o professor questiona quantas peças de 4 casas deveriam ser colocadas nesse tabuleiro. O

Aluno B contou o número de casas e dividiu por 4, resultando em 7 peças. Sendo assim, teriam que utilizar todas as 7 peças do enunciado. Neste momento, o Aluno A afirma que devido ao caso de uma peça não apresentar o mesmo número de casas brancas e cinzas a soma total das casas brancas seria diferente da soma das casas cinzas, por isso não teria como montar o tabuleiro. O aluno B concordou com a afirmação do colega.

Na terceira questão o professor entrou como mediador logo que os alunos, ao tentarem encaixar as peças, não conseguiam chegar a uma resposta sobre o motivo de não conseguirem completar o tabuleiro. Nesse caso, o professor indicou o caminho por meio de um levantamento de uma informação que os alunos não tinham notado, como o fato de uma das peças ter diferente quantidade de casas brancas e cinzas. Naquele momento os alunos, ao perceberem a diferença, notaram que somente iriam conseguir completar o tabuleiro se todas as peças somadas tivessem o mesmo número de casas brancas e cinzas.

Na resolução da primeira questão desse encontro, os alunos não tiveram dificuldade. Observamos como uma questão inicial de fácil resolução ajuda a motivar e aumenta a autoestima deles. Prepara o aluno para o próximo desafio, instigando a vontade de continuar resolvendo os problemas matemáticos. Na questão seguinte, professor e alunos resolveram juntos, em parceria, com o professor guiando o grupo para chegar a uma conclusão.

Seguindo na resolução dos problemas, vemos o professor chamando a atenção para os alunos reverem o raciocínio utilizado no item anterior e usarem todos os dados disponíveis para formular uma equação que represente ou modele a situação proposta. Polya sugere fazer perguntas sobre os dados, sobre as incógnitas e quais as condições para compreender claramente o problema. Na questão 4, um aluno fez uma pergunta logo após ler o enunciado. O professor percebeu que foi falta de atenção e leu em voz alta a pergunta para a turma: mais concentrados, conseguiram entender o que estava sendo pedido. Assim, o professor desempenhou o papel de orientador, incentivando os alunos a buscarem a solução, sem fornecer a resposta do problema, valorizando a autonomia deles, o que consideramos essencial, uma vez que estavam se preparando para uma prova individual da OBMEP.

6 CONSIDERAÇÔES FINAIS

Nessa pesquisa, observamos como um grupo de alunos de um Clube de Matemática focado na preparação para a prova da OBMEP resolvia as questões de matemática propostas. Nosso interesse foi identificar quais estratégias e interações que os alunos mantinham com os colegas e o professor nas resoluções das questões.

As observações e coleta de dados foram realizadas durante o período da pandemia de COVID-19, o que implicou em adaptações. Os encontros foram realizados por vídeo conferência, exigindo esforços de todos na comunicação virtual. O uso da tecnologia foi fundamental. O colégio disponibilizou uma boa plataforma digital e os alunos tinham um bom domínio de informática. Os alunos estavam familiarizados com a ferramenta utilizada nos encontros, uma vez que era a mesma plataforma utilizada nas aulas curriculares, o que facilitou a realização da pesquisa.

Acreditamos que se a pesquisa tivesse ocorrido sem as restrições impostas pela pandemia, em uma sala de aula do colégio, a participação e a interação entre alunos e professor, seria mais intensa, ou seja, eles estariam mais propensos a interagir e conversar. A pandemia deixou grandes impactos nos alunos, tensão pelo contágio, restrições no convívio social e escolar e adaptações às ferramentas tecnológicas. Além disso, prestar atenção às aulas já era um desafio para boa parte dos alunos, e com as aulas on-line, esta questão se intensificou ainda mais. Foram grandes as adversidades. O trabalho foi realizado com um número restrito de alunos no horário alternativo das aulas curriculares. Com o adiamento da OBMEP nesse ano, houve uma grande evasão de alunos do clube.

Nessa pesquisa, não foi possível avaliar a formalização de novos conceitos aos alunos, principalmente pelo fato deles estarem em anos escolares diferentes, em especial eles não estão tratando os mesmos conteúdos na sala aula regular. Outro ponto relevante, foram as questões utilizadas. Nas atividades, seguimos as provas que abordam temas diferentes entre uma questão e outra, e isso dificultou a generalização do conceito. Foram analisados os métodos de resolução e interações entre os pares de forma que potencializaram a capacidade de resolver as questões em conjunto e individual. Nessa análise, foi possível identificar os passos sugeridos por Polya (2006).

Os resultados obtidos mostram que o desempenho dos alunos foi comparável com aqueles resultados apresentados na literatura. Os métodos tradicionais de ensino baseados em aulas expositivas monótonas ou poucos dinâmicas, baseados apenas em conteúdo de livros didáticos e com pouca interação entre professor e aluno, apresentam baixa eficiência de aprendizagem. Neste processo de produção de conhecimento através da resolução de problemas de forma coletiva, e não apenas como um empreendimento individual, atrai uma atenção especial do aluno, e lhes traz uma experiência mais rica. Entendemos que nesse ambiente os alunos participam de forma ativa, dando suas ideias e trocando informações. Por outro lado, o papel do professor muda de transmissor de informações e avaliador de quanto o aluno consegue reproduzir para um gestor, orientador, mediando discussões coletivas. Nesse ambiente propício, acreditamos que o professor tem maior êxito em trabalhar novos conteúdos.

A partir das observações desse trabalho aplicado a um pequeno grupo de alunos, me senti mais confiante ao desenvolver atividades em uma sala de aula regular tendo como ponto de partida problemas que possam despertar nos alunos algum desafio e assim iniciar um novo conteúdo. Primeiro os alunos trabalhando em grupos pequenos ou individualmente e num segundo momento expondo as resoluções para o grande grupo. E, por fim, aprendendo e construindo, uns com os outros, novos conceitos.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só). **Educação e Matemática**. 1988. n. 8, p. 7-35.

ALLEVATO, N. S; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, 33 (55), 2009.

BAGATINI, A. **Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas. 2010**. 82f. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.

BOAVIDA, A. M., PAIVA, A., CEBOLA, G., VALE, I., & PIMENTEL, T. **A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Continua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.** Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

DÍAZ, M. V; POBLETE, A. Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. **Números**. 2001. v. 45, p. 33-41.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MACIEL, M. V. M., BASSO, V. A. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): As Origens de um Projeto de Qualificação do Ensino de Matemática na Educação Básica**. Ijuí/RS 2009.

MENDES, A. A. **Matemática e investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** São Paulo: Livraria Física, 2009.

POLYA, G. **How to solve it; a new aspect of mathematical method**. Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **A arte de resolver Problemas**. 2. reimpr. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. (2006). **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, 25, 105-132.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M.

C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

RIVEIRO, L. Q. **Sistemas de equações no Ensino Fundamental: abordagem através da Resolução de Problemas**. 2021. 74f. Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2021.

ROMANATTO, M. C. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

SAVIANI, D. **Do senso comum à consciência filosófica**. 13 ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2000.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro. 2000. n. 14, p. 66-91

SMOLE, K. S.; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

SOARES, M. T. C., PINTO, N. B. **Metodologia da resolução de problemas.** In: 24ª Reunião ANPEd, 2001.

THOMPSON, A. G. **Learning to teach mathematical problem solving: changes**. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. The teaching and assessing of mathematical problem solving. Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

VAN DE WALLE, J. A**. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VASCONCELOS, L. Problemas de Adição e Subtração: modelos teóricos e práticos de ensino. **A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa**. Campinas: Papirus, 2008.

VERGNAUD. G. La théorie des champs conceptuels. In: BRUN, J. (org**.). Didactique de Mathématique**. Paris: Delachaux, 2016.

VIANNA, C. **Resolução de Problemas**. In: Livro Temas em Educação I, o livro das Jornadas. Curitiba: [s.n.], 2002. p. 401-410. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Carlos8.pdf>. Acesso em: 06 dez. 2021.

ANEXO A – TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado para participar da pesquisa “OBMEP NA SALA DE AULA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”. Essa pesquisa faz parte do projeto de Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no qual será abordado o tema referente ao uso da metodologia didática Resolução de Problemas como meio de aprendizagem afim de contribuir com pesquisas acadêmicas para o desenvolvimento da Educação Matemática. Os nomes não serão publicados, sendo identificados por meio de letras (ex: A, B, C) no trabalho.

Eu, ____, aceito participar da pesquisa “OBMEP NA SALA DE AULA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”,

Porto Alegre, _____ de ___________________ de ______.

____

Assinatura do(a) aluno(a)

ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO DA ESCOLA

Venho por meio deste solicitar a realização da pesquisa “OBMEP NA SALA DE AULA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”. Essa pesquisa faz parte do Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no qual será abordado o tema referente ao uso da metodologia didática Resolução de Problemas como meio de aprendizagem afim de contribuir com pesquisas acadêmicas para o desenvolvimento da Educação Matemática. Os nomes dos alunos não serão publicados, sendo identificados por meio de letras (ex: A, B, C) no trabalho. Assim como o nome da instituição de ensino onde é realizado a pesquisa.

Eu, ____, autorizo a realização da pesquisa “OBMEP NA SALA DE AULA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”,

Porto Alegre, _____ de ___________________ de ______.

____