

LOBER HERMANY

ESCOAMENTO DE FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS E VISCOPLÁSTICOS:
AVALIAÇÃO ANALÍTICA E APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Porto Alegre
2009



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

**ESCOAMENTO DE FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS E VISCOPLÁSTICOS:
AVALIAÇÃO ANALÍTICA E APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS**

LOBER HERMANY

**ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
ENGENHEIRO(A) MECÂNICO(A)
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica**

BANCA EXAMINADORA:

**Prof. Dr. Adriane Petry
UFRGS / DEMEC**

**Prof. Dr. Jorge Zabadal
UFRGS / DEMEC**

**Prof. Dr. Flávio van der Laan
UFRGS / DEMEC**

**Porto Alegre
2009**

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelo dom da vida e pela sua presença nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais e irmãos pelo apoio incondicional, exemplo de vida e por todo o esforço realizado para que esta conquista fosse alcançada.

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Sérgio Frey* que esteve sempre ao meu lado orientando, solucionando dúvidas com disponibilidade e profissionalismo.

Ao LAMAC, por disponibilizar os recursos necessários para a concretização deste trabalho.

“Procure ser um homem de valor, em vez de ser um homem de sucesso.”

Albert Einstein

HERMANY, L.. **Escoamento de fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos: avaliação analítica e aproximação por elementos finitos.** 27f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

RESUMO

O presente trabalho objetiva a investigação teórica e numérica da dinâmica dos escoamentos dos fluidos industriais. A grande maioria destes fluidos, ao escoarem apresentam um comportamento reológico bem diverso dos apresentados pelos líquidos Newtonianos - sendo, portanto, conhecidos na literatura como fluidos não-Newtonianos. Neste trabalho são desenvolvidas soluções exatas e aproximações de elementos finitos de escoamentos de interesse de fluidos não-Newtonianos pseudoplásticos e viscoplásticos. O modelo pseudoplástico empregado é o conhecido fluido *power-law*, enquanto que o modelo de viscoplasticidade é a equação de Bingham. Com as soluções exatas e aproximações numéricas dos problemas, serão determinados parâmetros cinemáticos e dinâmicos de interesse. Foram também determinados os erros relativos das aproximações numéricas realizadas. Os resultados obtidos foram satisfatórios, mostrando as influências dos parâmetros reológicos, índice de *power-law* e número de Bingham, sobre o escoamento de fluidos não-newtonianos. Esses resultados permitiram também a comparação entre perfis de velocidades obtidos analiticamente e computacionalmente, mostrando que o código computacional utilizado é eficaz. Todo o desenvolvimento teórico e computacional deste trabalho foi realizado no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS.

Palavras-chave: fluidos não-Newtonianos, soluções exatas, elementos finitos, pseudoplásticos, viscoplásticos, *power-law*, equação de Bingham.

HERMANY, L.. PSEUDOPLASTIC AND VISCOPLASTIC FLUIDS FLOW: ANALITIC AVALIATION AND FINIT ELEMENT APROXIMATION. 27f. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

ABSTRACT

The present work aims the theoretical and numerical research of the industrial fluid flows dynamics. The vast majority of these fluids, when drain, present an rheological behavior very different from those presented by Newtonian liquids – and therefore known in the literature as non-Newtonian fluids. This work developed exact solutions and finite element approximations of the flow of interest from non-Newtonian fluid pseudoplastic and viscoplastic. The pseudoplastic fluid model used is the known *power-law*, while the viscoplastic model is the equation of Bingham. With the exact solutions and numerical approximations of the problems, be determined kinematic and dynamic parameters of interest. We also determined the relative errors of numerical approximations made. The results were satisfactory, showing the influence of rheological parameters, index of power-law and Bingham number on the disposal of non-Newtonian fluids. These results also allowed a comparison between velocity profiles obtained analytically and computationally, showing that the computational code used is effective. All the theoretical and computational development from this work will be conducted at the Laboratory of Fluid Mechanics Computational and Applied (LAMAC) Department of Mechanical Engineering at UFRGS.

Keywords: non-Newtonian fluids, exact solutions, finite elements, pseudoplastic, viscoplastic, *power-law*, Bingham equation

SUMÁRIO

ABSTRACT.....	6
1. INTRODUÇÃO.....	8
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	8
3. MODELAGEM MECÂNICA.....	9
3.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONSERVAÇÃO DE MASSA.....	9
3.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas.....	9
3.1.2 Sistema de coordenadas cilíndricas.....	10
3.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.....	11
3.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas.....	12
3.2.1 Sistema de coordenadas cilíndricas.....	13
4. SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA ESCOAMENTO INTERNO EM TUBOS.....	14
4.1 SOLUÇÃO EXATA PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS	15
4.2 SOLUÇÃO EXATA PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS...	16
5. SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA DO ESCOAMENTO DE HAGEN- POISEUILLE PARA FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS.....	17
5.1 SOLUÇÃO EXATA.....	17
5.2 SOLUÇÃO OBTIDA POR ELEMENTOS FINITOS.....	17
5.3 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA.....	18
6. SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA DO ESCOAMENTO DE HAGEN- POISEUILLE PARA FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS.....	20
6.1 SOLUÇÃO EXATA.....	20
6.2 SOLUÇÃO APROXIMADA.....	20
6.3 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA.....	21
7. CONCLUSÕES.....	22
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	23
9. APÊNDICES.....	24

1. INTRODUÇÃO

O entendimento e o controle das propriedades reológicas é de fundamental importância na fabricação e no manuseio de uma grande quantidade de materiais (borrachas, plásticos, alimentos, cosméticos, tintas, óleos lubrificantes, etc.) e em processos de bombeamento de líquidos em tubulações, processos de moldagem de plásticos. Por estes motivos considero relevante o estudo das propriedades e parâmetros de escoamento de fluidos não-Newtonianos, já que a grande maioria dos fluidos industriais apresentam estas características.

Um fluido não-newtoniano é um fluido cuja viscosidade varia de acordo com o grau de deformação aplicado. Estes fluidos podem ser classificados como:

- Pseudoplásticos: são substâncias que, em repouso, apresentam suas moléculas em um estado desordenado, e quando submetidas a uma tensão de cisalhamento, suas moléculas tendem a se orientar na direção da força aplicada. E quanto maior esta força, maior será a ordenação e, conseqüentemente, menor será a viscosidade aparente.

- Plásticos de Bingham : este tipo de fluido apresenta uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, a partir do momento em que se atinge uma tensão de cisalhamento inicial .

- Dilatantes: são substâncias que apresentam um aumento de viscosidade aparente com a tensão de cisalhamento.

- Herschel-Bulkley : também chamado de Bingham generalizado. Este tipo de fluido também necessita de uma tensão inicial para começar a escoar. Entretanto, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear.

O objetivo deste trabalho é investigar analítica e numericamente o escoamento de fluidos não-Newtonianos, procurando entender seus comportamentos cinemáticos e dinâmicos principalmente em escoamentos internos em tubos. O estudo será de fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos. Estes tipos de fluidos apresentam um comportamento reológico bastante diversificado quando comparados com fluidos newtonianos.

De posse das equações da conservação de massa e de movimento para fluidos incompressíveis, serão desenvolvidas soluções exatas e soluções por aproximação de elementos finitos de escoamentos de fluidos não-Newtonianos pseudoplásticos e viscoplásticos. Para modelar o escoamento do fluido pseudoplástico será empregado o modelo *power-law*, enquanto que para o fluido viscoplástico será adotado o modelo de Bingham.

Após obtidas as soluções exatas e aproximadas serão determinados parâmetros cinemáticos e dinâmicos de interesse, tais como os perfis de velocidades, queda de pressão ao longo do escoamento, distribuição de tensões de cisalhamento, taxas de cisalhamento experimentadas pelo fluido, limites de escoamento e superfícies de escoamento de materiais viscoplásticos. Também será determinado o erro relativo das aproximações numéricas realizadas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica sobre a lei de conservação de massa e a lei da quantidade de movimento, focando-se uma breve demonstração destas leis em coordenadas cilíndricas e cartesianas. Também será comentado sobre os fluidos não-newtonianos e suas classificações segundo fontes bibliográficas consultadas.

Os autores Fox, McDonald e Pritchard (1981) em seu livro, Introdução a Mecânica dos Fluidos, apresentaram uma discussão sobre a lei de conservação de massa. Nesta discussão demonstraram a obtenção da equação diferencial para essa lei. Partindo de um volume de controle diferencial, propuseram relações matemáticas a fim de mensurar propriedades cinemáticas do comportamento dos fluidos. Demonstraram também a lei de quantidade de movimento, partindo da segunda lei de Newton. Ou seja, propuseram o equacionamento das

forças oriundas das tensões internas sofridas por uma partícula fluida e as forças de origem da cinemática da partícula. Nesta obra os autores também apresentaram aplicações destas leis, como por exemplo o escoamento laminar completamente desenvolvido em duto circular.

Segundo Bennet e Myers (1978) em seu livro, “Fenômenos de transporte de quantidade de movimento, calor e massa”, os fluidos não-newtonianos apresentam uma relação não linear entre a tensão de cisalhamento e o gradiente de velocidades e o tipo dessa relação serve para classificar as diversas classes de fluidos não-newtonianos. Os autores classificam os fluidos não-newtonianos como: fluidos Binghamianos, fluidos pseudoplásticos, fluidos dilatantes, fluidos de Herschel-Bulkley e fluidos não-newtonianos dependentes do tempo.

Já Bird, Armstrong e Hassager (1987) na obra “Dynamics of polymeric liquids” discutiram os escoamentos dos fluidos não-newtonianos. Relataram experimentos realizados e observaram as influências dos parâmetros reológicos de cada classe de fluidos não-newtonianos.

3. MODELAGEM MECÂNICA

3.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONSERVAÇÃO DE MASSA

3.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas

O volume de controle utilizado para obtenção da equação diferencial da continuidade segundo Fox & McDonald, é um cubo infinitesimal com lados de comprimento dx , dy , dz , conforme indicado na Fig. 3.1. A massa específica no centro O , do volume de controle é admitida como sendo ρ e a velocidade é $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$.

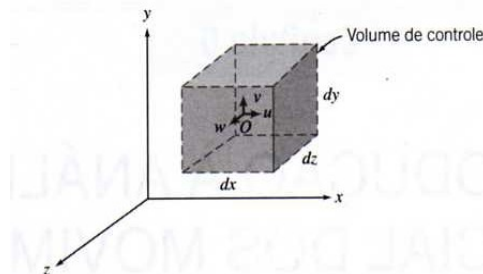


figura 3.1 – volume de controle em coordenadas cartesianas

Para avaliar as propriedades em cada uma das seis faces do volume de controle, foi usada uma expansão em série de Taylor em torno do ponto O .

A lei da conservação de massa diz que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle, mais a taxa de variação de massa dentro do volume de controle deve ser igual a zero. Para a obtenção da taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle, deve-se conhecer a vazão mássica, $\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$, em cada uma das seis faces. Admitindo que as componentes das velocidades em cada face são positivas no sentido dos eixos das coordenadas e adotando a convenção de que a normal da área é positiva para fora de cada face, temos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora do volume de controle é a soma da taxa de fluxo de massa em cada superfície, ou seja

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.1)$$

Como a massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da densidade pelo volume, para um volume de controle infinitesimal, a taxa de variação da massa no seu interior é dada por $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$.

Portanto, a equação diferencial da conservação de massa, em coordenadas retangulares, para fluidos incompressíveis é

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

3.1.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

O volume de controle adequado, novamente baseado em Fox & McDonald, é mostrado na Fig. 3.2. Analogamente à dedução para coordenadas retangulares, a massa específica no centro do volume de controle, O , é tida como ρ e a velocidade, também no centro, é considerada igual a $\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{k}_z V_z$, onde \hat{e}_r , \hat{e}_θ e \hat{k}_z são vetores unitários nas direções r , θ e z , respectivamente, e V_r , V_θ e V_z são as componentes das velocidades também nas direções r , θ e z , respectivamente.

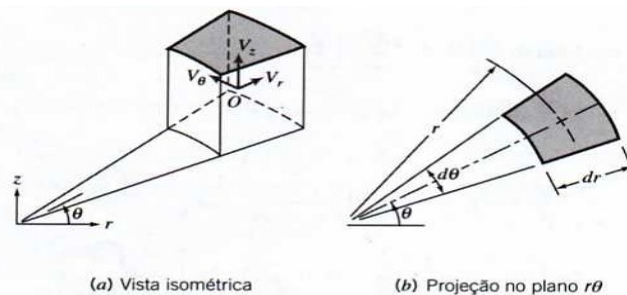


Figura 3.2 – volume de controle em coordenadas cilíndricas.

Novamente é preciso conhecer a taxa líquida de fluxo de massa para fora do volume de controle, ou seja, $\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ e a taxa de variação de massa dentro do próprio volume de controle. Da mesma forma que para coordenadas retangulares, as propriedades nas faces do volume de controle foram obtidas por um desenvolvimento por série de Taylor em torno do ponto O .

Então, se as componentes das velocidades tem o sentido positivo igual ao dos eixos coordenados e adotando a convenção de que a normal da área é positiva para fora das faces do volume de controle e os termos de ordem superior forem negligenciados, a taxa líquida do fluxo de massa é:

•face interna (-r):

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \left(\frac{dr}{2} \right) \right] \left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \left(\frac{dr}{2} \right) \right] \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\theta dz = -\rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz + \rho \frac{\partial V_r}{\partial r} r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \frac{\partial \rho}{\partial r} r \frac{dr}{2} d\theta dz \quad (3.3)$$

•face externa (+r):

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \left(\frac{dr}{2} \right) \right] \left[V_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \left(\frac{dr}{2} \right) \right] \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dz = \rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz + \rho \frac{\partial V_r}{\partial r} r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \frac{\partial \rho}{\partial r} r \frac{dr}{2} d\theta dz \quad (3.4)$$

•face frontal ($-\theta$):

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \left(\frac{d\theta}{2} \right) \right] \left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \left(\frac{d\theta}{2} \right) \right] dr dz = -\rho V_\theta dr dz + \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{2} dr dz + V_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{2} dr dz \quad (3.5)$$

•face posterior ($+\theta$):

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \left(\frac{d\theta}{2} \right) \right] \left[V_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \left(\frac{d\theta}{2} \right) \right] dr dz = \rho V_\theta dr dz + \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{2} dr dz + V_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{2} dr dz \quad (3.6)$$

•face da base ($-z$):

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{dz}{2} \right) \right] \left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \left(\frac{dz}{2} \right) \right] r d\theta dr = -\rho V_z r d\theta dr + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{dz}{2} r d\theta dr + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} r d\theta dr \quad (3.7)$$

•face superior ($+z$):

$$\int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{dz}{2} \right) \right] \left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \left(\frac{dz}{2} \right) \right] r d\theta dr = \rho V_z r d\theta dr + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{dz}{2} r d\theta dr + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} r d\theta dr \quad (3.8)$$

Somando-se os fluxos em todas as faces, vemos que o fluxo total de massa para fora do volume de controle é

$$\int_{vc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz \quad (3.9)$$

Como a massa dentro do volume de controle diferencial, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume pelo próprio volume, temos que a taxa de variação da massa no interior do volume de controle é $\frac{\partial \rho}{\partial t} r d\theta dr dz$.

Portanto, em coordenadas cilíndricas, a equação diferencial da conservação da massa para fluidos incompressíveis é:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

3.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

O movimento de uma partícula fluida pode ser descrito pela segunda lei de Newton que para um sistema qualquer, é dada por

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (3.11)$$

3.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Em coordenadas cartesianas a aceleração é $\frac{d\vec{V}}{dt} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ e a segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$d\vec{F} = dm \left[u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \right] . \quad (3.12)$$

As forças que atuam sobre uma partícula fluida são as forças de corpo e as forças de superfície. Se as tensões no centro do elemento diferencial e na direção x forem tomadas como sendo igual a σ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} , então as tensões atuando na direção x em cada face do elemento, obtidas por uma aproximação por série de Taylor, são conforme indicado na Fig. 3.3.

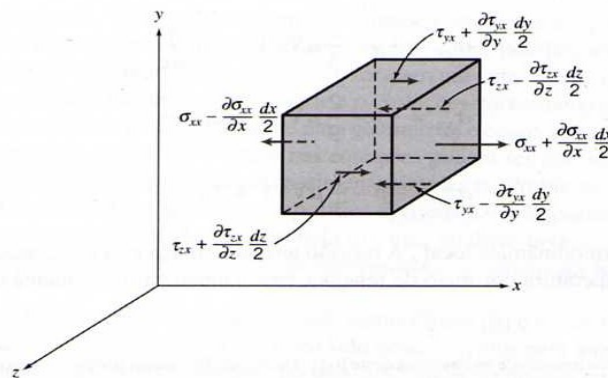


Figura 3.3 – distribuição de tensões na direção x

A força de superfície resultante na direção x, dF_{S_x} é a soma de todas as forças nesta direção. Estas forças estão ilustradas na Fig. 3.3 e a equação se torna, após simplificações

$$dF_{S_x} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz . \quad (3.13)$$

Já a força de corpo, pode-se considerar a gravidade como sendo a única atuante, e então a força de corpo por unidade de massa é igual a \vec{g} . Portanto a força resultante na direção x, dF_x , é dada por:

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz . \quad (3.14)$$

Para as forças resultantes nas outras direções é possível deduzir equações semelhantes. Então, para as direções y e z têm-se:

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left(\rho g_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.15)$$

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left(\rho g_z + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz . \quad (3.16)$$

De posse destas equações é possível obter a equação diferencial da quantidade de momentum em coordenadas cartesianas. Ou seja

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.18)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) . \quad (3.19)$$

3.2.1 Sistema de coordenadas cilíndricas

Para transformar o sistema de coordenadas retangulares para cilíndricas pode-se utilizar, de acordo com a Fig. 3.4, as relações abaixo, porém, para facilitar a didática tomemos $\hat{r} = \hat{e}_r$ e $\hat{\theta} = \hat{e}_\theta$.

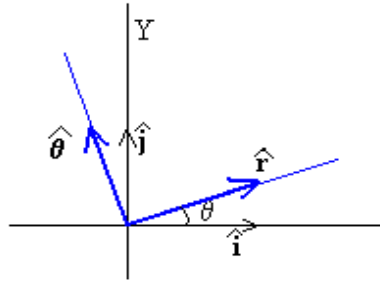


Figura 3.4 – vetores unitários em coordenadas cartesianas e polares

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (3.20)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta = \omega \hat{e}_\theta \quad (3.22)$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{e}_r = -\omega \hat{e}_r \quad (3.23)$$

$$\vec{V}_\theta = r \omega \quad (3.24)$$

Em coordenadas cilíndricas o vetor posição de uma partícula é $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r(t) + z\hat{e}_z$. Portanto, para a obtenção da velocidade da partícula deve-se derivar a posição em relação ao tempo. Ou seja

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z + z \frac{d\hat{e}_z}{dt} = d\vec{V} = dr \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \hat{e}_r + d\theta \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + dz \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \hat{e}_z + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad (3.25)$$

E a aceleração da partícula torna-se:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \hat{e}_r + dr \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + d\theta \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \hat{e}_z + dz \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{d\hat{e}_z}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad (3.26)$$

ou

$$\vec{a} = V_r \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} + V_r \frac{V_\theta}{r} \hat{e}_\theta + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} \hat{e}_r + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (3.27)$$

Portanto, em coordenadas cilíndricas, a segunda lei de Newton torna-se:

$$d\vec{F} = dm \left(V_r \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} + V_r \frac{V_\theta}{r} \hat{e}_\theta + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} \hat{e}_r + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \quad (3.28)$$

A distribuição das tensões em um elemento de fluido em coordenadas cilíndricas é

$$d\vec{F}_{S_r} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] r dr d\theta dz \quad (3.29)$$

$$d\vec{F}_{S_\theta} = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] r dr d\theta dz \quad (3.30)$$

$$d\vec{F}_{S_z} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right] r dr d\theta dz \quad (3.31)$$

Considerando novamente a gravidade como sendo a única força de corpo atuante, a força por unidade de massa é igual a \vec{g} . Portanto pode-se escrever as três parcelas da equação diferencial da quantidade de momentum em coordenadas cilíndricas, como segue

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t} \right) = - \left[\rho g_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] \quad (3.32)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_r \frac{V_\theta}{r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t} \right) = - \left[\rho g_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] \quad (3.33)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) = - \left[\rho g_z + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (2.43)$$

4. SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA ESCOAMENTO INTERNO EM TUBOS

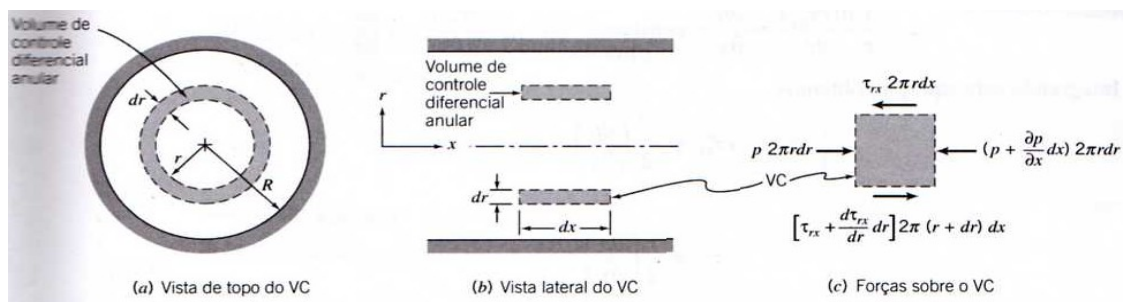


Figura 4.1 – Volume de controle diferencial axissimétrico.

Como o escoamento interno em tubos é axissimétrico, o volume de controle será um espaço anular diferencial conforme mostrado na figura 4.1.

As forças normais (de pressão) atuam nas extremidades direita e esquerda do volume de controle e as forças cisalhantes atuam nas paredes interna e externa. Tomando-se a pressão na face esquerda do volume de controle como sendo igual a p , as forças de pressão atuantes no volume de controle são conforme indicado na Fig. 4.1.

O somatório das componentes em x das forças atuando sobre o volume de controle deve ser zero. Então

$$\frac{-\partial p}{\partial x} 2\pi r dr dx + \tau_{rx} dr 2\pi dx + \frac{d\tau_{rx}}{dr} r dr 2\pi dx = 0 \quad (4.1)$$

Dividindo-se esta equação por $2\pi r dr dx$, resulta em

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_{rx}}{r} + \frac{d\tau_{rx}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rx})}{dr} \quad (4.2)$$

ou

$$\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = r \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.3)$$

Resolvendo a Eq. 4.3, obtém-se:

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{c_1}{r} \quad (4.4)$$

Contudo, para escoamentos reais – fisicamente possíveis – a tensão τ_{rx} deve ser finita quando $r=0$, e isto só é possível se $c_1=0$. Então, a tensão τ_{rx} se torna

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4.5)$$

4.1 SOLUÇÃO EXATA PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS

Para o modelo *power-law*, tem-se a expressão

$$\tau_{rx} = K \left(\frac{du_x}{dr} + \frac{du_r}{dx} \right)^n \quad (4.6)$$

onde K é o índice de consistência [Pa.sⁿ] e n é o coeficiente de *power-law*. Porém, em um escoamento laminar completamente desenvolvido em tubos, não há variação da velocidade u_r na direção x . Portanto, a equação pode ser simplificada como

$$\tau_{rx} = k \left(\frac{du_x}{dr} \right)^n \quad (4.7)$$

Então, a expressão para du_x fica na forma

$$du_x = \left[\frac{r}{2k} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{n}} dr \quad (4.8)$$

e, resolvendo a Eq. 4.8 obtém-se

$$u_x = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{R^{1+n}}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (4.9)$$

De posse da equação do perfil de velocidades e sabendo que $Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$, pode-se obter a equação da vazão

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{n}{n+1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{R^{1+n}}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \right] r dr d\theta = \left[\frac{\pi n}{n+1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+3n}{n}} \right] - \left[\frac{2\pi n}{n+1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+3n}{n}} \left(\frac{n}{1+3n} \right) \right] \quad (4.10)$$

que após manipulações algébricas e admitindo-se que $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L}$ para escoamentos completamente desenvolvidos, torna-se

$$Q = \pi \frac{n}{1+3n} \left(\frac{\Delta p}{L} \frac{R^{1+3n}}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.11)$$

4.2 SOLUÇÃO EXATA PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

O modelo de Bingham é descrito por

$$\tau_{rx} = \tau_0 + \eta_0 \left(\frac{d u_x}{dr} + \frac{d u_r}{dx} \right) \quad (4.12)$$

onde τ_0 é a tensão limite de escoamento e η_0 é a viscosidade do fluido quando este inicia seu escoamento, ou seja, $\tau_{rx} > \tau_0$. Como não há variação da velocidade u_r na direção x

$$\tau_0 + \eta_0 \frac{d u_x}{dr} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.13)$$

Para a obtenção do perfil de velocidades deve-se integrar a seguinte equação

$$\int_0^{u_x} d u = \int_r^R \left(\frac{r}{2\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\eta_0} \right) dr \quad (4.14)$$

tornando-se:

$$u_x = \left(\frac{R^2}{4\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{R\tau_0}{\eta_0} \right) - \frac{r^2}{4\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{r\tau_0}{\eta_0} \quad (4.15)$$

Para a determinação da vazão, precisa-se calcular $\int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$. Então

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\left(\frac{R^2}{4\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{R\tau_0}{\eta_0} \right) - \frac{r^2}{4\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{r\tau_0}{\eta_0} \right] r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R^4}{16\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{R^3\tau_0}{3\eta_0} + \frac{R^4}{8\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{R^3\tau_0}{2\eta_0} \right) d\theta \quad (4.16)$$

que, depois de simplificado, e considerando que $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L}$ para escoamentos completamente desenvolvidos fica na forma

$$Q = 2\pi \left(\frac{R^4}{16\eta_0} \frac{\Delta p}{L} - \frac{R^3\tau_0}{6\eta_0} \right) \quad (4.17)$$

5. SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA DO ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE PARA FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS

O problema consiste em encontrar o perfil de velocidades e a queda de pressão de um escoamento de Hagen-Poiseuille. A geometria é em um tubo de 0.5m de comprimento com um raio de 0.025m. A vazão na entrada é fixada em 0.001m³/s. Empregou-se o modelo de fluido *power-law* para pseudoplasticidade, com coeficientes de *power-law* variando entre 0.2 e 1.0, com índice de consistência K igual a 1.0.

5.1 SOLUÇÃO EXATA

Para a obtenção da solução exata do escoamento, utilizou-se a Eq. 4.9. No entanto é necessário o conhecimento da queda de pressão ao longo do tubo, a qual pode ser obtida isolando-se Δp na Eq. 4.11, como segue

$$\Delta p = \left(\frac{Q(1+3n)}{\pi n} \right)^n \left(\frac{2kL}{R^{1+3n}} \right) \quad (5.1)$$

A Tab. 5.1 traz as soluções analíticas para a queda de pressão e perfis de velocidades para os diferentes coeficientes de *power-law* estudados.

Tabela 5.1 – Queda de pressão ao longo do duto e perfis de velocidades

Coefficiente de <i>power-law</i>	Queda de pressão	Perfil de velocidades
$n=0.2$	$\Delta p=110,78642 Pa$	$u_x=0,67908-2781514912,81959*r^6$
$n=0.35$	$\Delta p=213,26056 Pa$	$u_x=0,77337-1168857,51521*r^{3,85714}$
$n=0.5$	$\Delta p=403,7012 Pa$	$u_x=0,84883-54325,12*r^3$
$n=0.75$	$\Delta p=1151,99114 Pa$	$u_x=0,94583-5175,50896*r^{2,33333}$
$n=1$	$\Delta p=3259,49324 Pa$	$u_x=1,01859-1629,744*r^2$

5.2 SOLUÇÃO OBTIDA POR ELEMENTOS FINITOS

Para a obtenção da solução aproximada do problema proposto, utilizou-se o software de elementos finitos NNFEM em desenvolvimento no LAMAC - Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional, desta Universidade. A Fig. 5.1 ilustra a malha utilizada para a discretização do domínio, que se trata de um canal com 0.05m de diâmetro e 0.5m de comprimento. Por tratar-se de um problema simétrico, apenas metade da geometria foi simulada. As condições de contorno empregadas são não-deslizamento e impermeabilidade na parede superior, perfis de velocidade uniformes na entrada e saída do canal e condições de simetria na fronteira inferior do domínio - $(du_x/du_r=u_r=\tau_{xr}=0)$. A malha possui 500 elementos bilineares Q1/Q1, totalizando 606 nós.

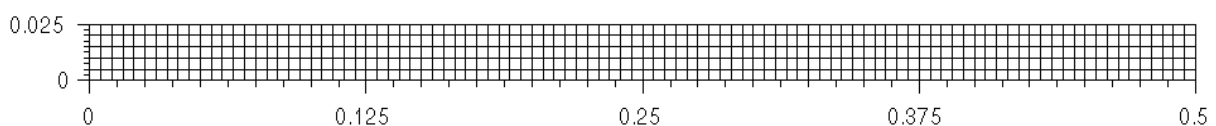
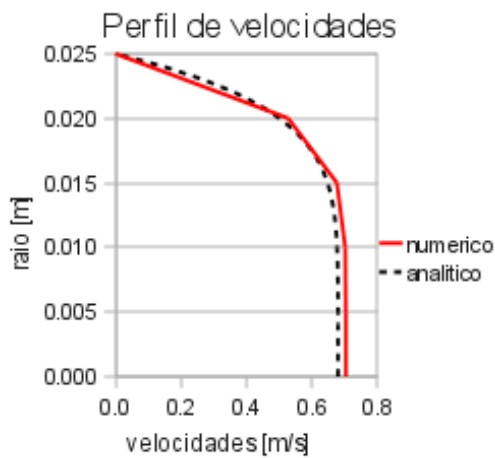


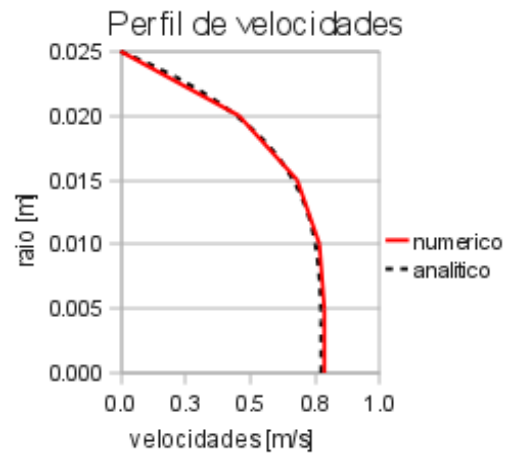
Figura 5.1 – malha utilizada para solução computacional do problema proposto

5.3 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA

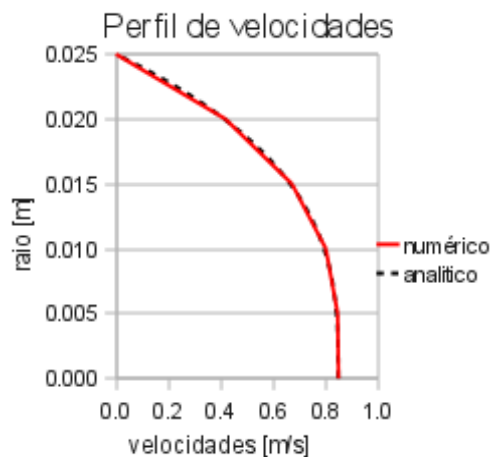
O perfil de velocidades de escoamentos internos em tubos é parabólico para fluidos newtonianos. Para líquidos que escoam de acordo com o modelo *power-law* este perfil é modificado de acordo com o coeficiente n . As Fig. 5.2(a)-(e) mostram este efeito. Observa-se que com a diminuição do coeficiente n acontece o aumento do grau de pseudoplasticidade, ou seja, a viscosidade diminui com o aumento da tensão cisalhante. Em outras palavras, quanto menor o coeficiente n , menor será a tensão cisalhante necessária para que o fluido escoe. E isto acarreta em menor perda de carga e em maior transferência de calor com fluidos externos ao tubo.



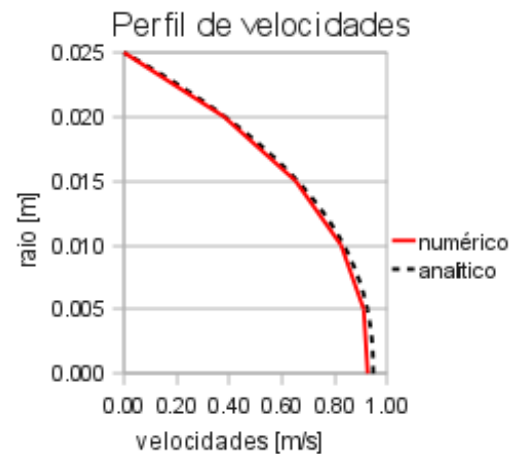
(a)



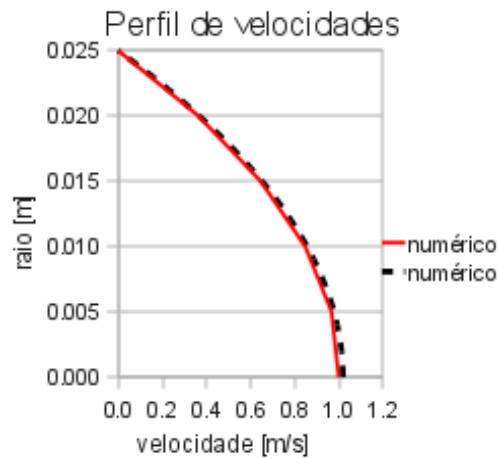
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 5.2 - Perfis de velocidades aproximados e analíticos para $K=1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ variando o coeficiente de *power-law*: (a) $n=0.2$; (b) $n=0.35$; (c) $n=0.5$; (d) $n=0.75$; (e) $n=1.0$.

Na Fig. 5.3, pode-se observar a diferença da perda de carga ao longo do tubo para os diferentes fluidos analisados. O escoamento do fluido newtoniano ($n=1$) é o que apresenta maior queda de pressão, visto que apresenta uma espessura de camada limite maior em relação aos outros fluidos analisados. A perda de carga mostra-se diretamente proporcional ao coeficiente *power-law*, devido ao efeito de *shear thinning* – redução da viscosidade do fluido com o aumento da taxa de deformação.

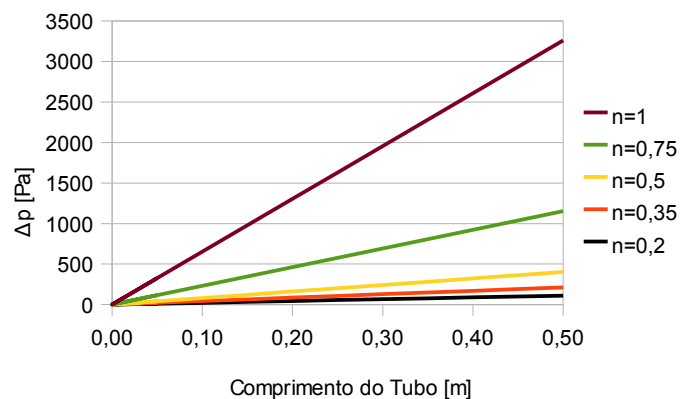


Figura 5.3 – Queda de pressão *versus* comprimento do tubo para os diferentes coeficientes de *power-law*

A Tab. B.1 situada no apêndice B traz os erros relativos entre os perfis de velocidades analítico e aproximado. Pode-se observar que o maior erro entre as velocidades é de 4.88%. Este erro ocorre justamente quando o coeficiente n é menor, devido à existência de um gradiente de velocidade mais severo próximo à parede e a deficiente discretização do domínio nesta região. É conveniente salientar que um erro desta magnitude é aceitável em boa parte das aplicações de engenharia.

6. SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA DO ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE PARA FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

O problema tratado nesta seção obedece as mesmas condições impostas ao problema anterior, assim como mesma geometria. Nesta etapa, será adicionalmente calculada a distribuição de tensões em função do raio do tubo, mostrada no Apêndice D.

O número adimensional que relaciona a tensão limite de escoamento e a tensão devido à cinemática do fluido é o número de Bingham, dado por

$$Bn = \frac{\tau_0}{\eta_0 \left(\frac{U}{2r} \right)} \quad (6.1)$$

onde r é o raio do tubo, U é uma velocidade característica e os demais parâmetros definidos anteriormente.

6.1 SOLUÇÃO EXATA

Para se calcular a distribuição de tensões através da Eq. 4.5, deve-se conhecer a queda de pressão por comprimento de tubo. Para isso emprega-se a Eq. 4.17. Isolando $\frac{\Delta p}{L}$ nesta equação, tem-se que

$$\frac{\Delta p}{L} = \left(\frac{Q}{2\pi} + \frac{R^3 \tau_0}{6\eta_0} \right) \frac{16\eta_0}{R^4} \quad (6.2)$$

A fim de variar o número de Bingham sem alterar as condições cinemáticas do problema, a tensão limite de escoamento τ_0 será calculada pela Eq. 6.1 para obter-se os números de Bingham estipulados.

Os resultados obtidos para os números de Bingham estipulados são mostrados na Tab. 6.1 em conjunto com a tensão limite de escoamento empregada; a queda de pressão por comprimento de tubo e a distribuição de tensão em função do raio do tubo obtidas para cada caso.

Tabela 6.1 – Soluções analíticas para a distribuição de tensão e queda de pressão no tubo.

Bn	τ_0 [Pa]	$\Delta p/L$ [Pa/m]	τ_{xy} [Pa]	Perfil de velocidades
0,1	1,02	6634,83	3317.41 * r	-1656,91*r ² +1,0186*r+1,01
1	10,19	7605,49	3802.75 * r	-1901,373*r ² +10,186*r+0,934
5	50,93	11951,52	5975.76 * r	-2987,88*r ² +50,93*r+0,594
10	101,86	17384,48	8692.24 * r	-4346,12*r ² +101,86*r+0,1698

6.2 SOLUÇÃO APROXIMADA

Para as simulações envolvendo problemas de viscoplasticidade utilizou-se uma malha de elementos finitos composta por 1000 elementos bilineares Q1/Q1, totalizando 1111 nós. A malha está representada na Fig. 6.1.

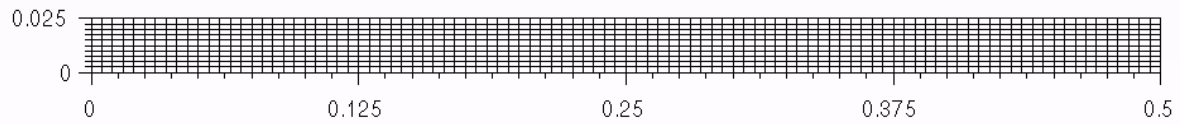


Figura 6.1 – malha utilizada para solução computacional do problema proposto

6.3 ANÁLISE E COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES EXATA E APROXIMADA

Nas Fig. 6.2(a)-(e) apresentam-se as comparações entre os perfis de velocidades obtidos analiticamente e através das simulações numéricas. Todos os gráficos foram gerados com o perfil de velocidade obtido no centro da geometria ($x=0.25m$), posição onde assumiu-se que o escoamento esteja completamente desenvolvido, livre dos efeitos de entrada e saída. Pode-se observar um perfil de velocidade cada vez mais achatado à medida que o número de Bingham aumenta.

Pode-se verificar também que o aumento do número de Bingham acarreta um aumento na região de escoamento tampão (*plug flow*) – região onde assume-se que o fluido não se deforma. Essas regiões são melhor visualizadas na Fig. A.1 do Apêndice A, onde são representadas pelas zonas pretas.

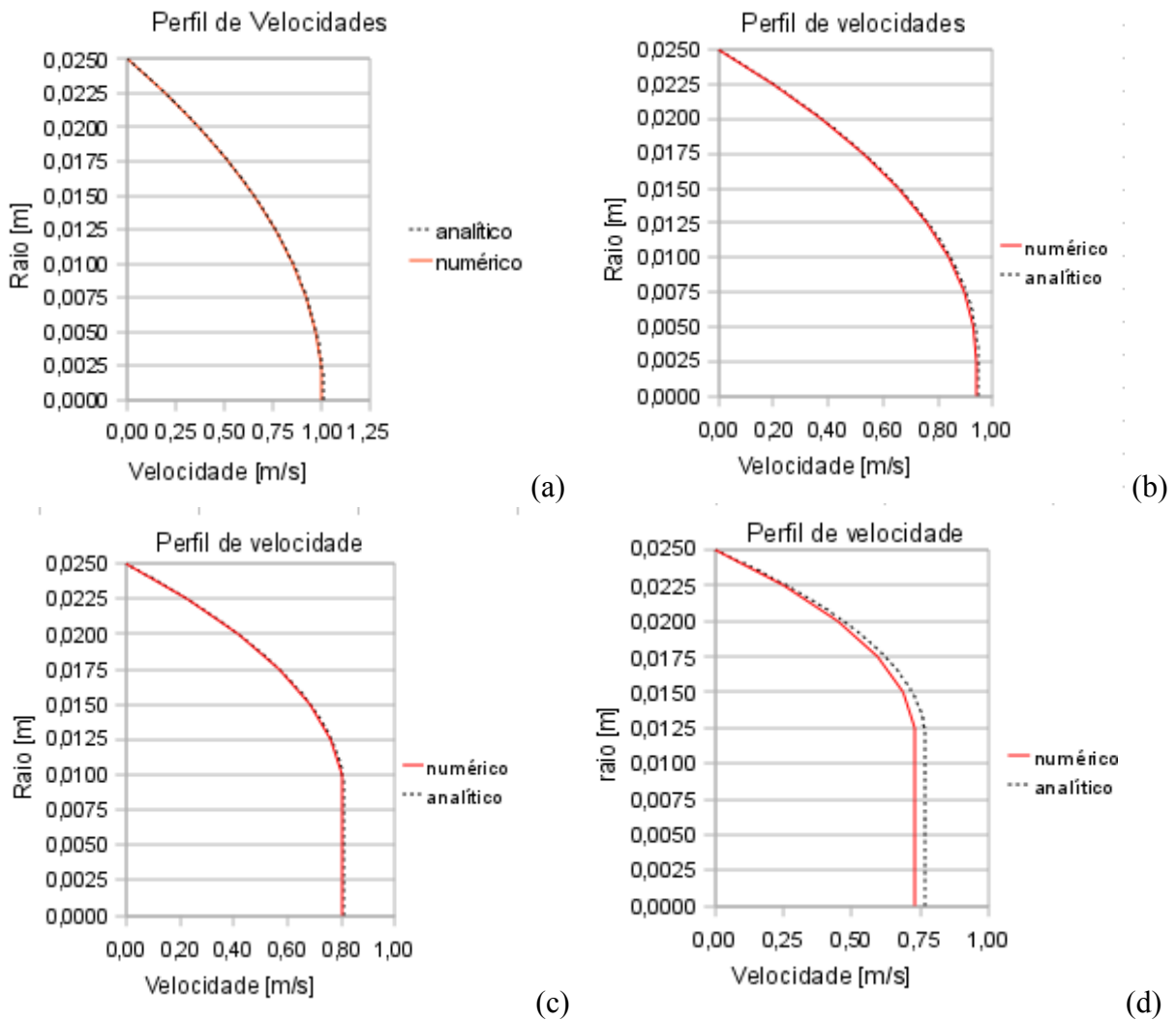


Figura 6.2 – Perfis de velocidades para $\eta_0 = 1.0 Pa.s$, $U=0.59m/s$: (a) $Bn=0.1$; (b) $Bn=1.0$; (c) $Bn=5.0$; (d) $Bn=10.0$;

Da mesma forma que para o caso de fluido pseudoplástico, foi gerada uma tabela de erros entre as velocidades calculadas analiticamente e as obtidas via simulação numérica. Esta tabela pode ser visualizada no Apêndice C, Tab. C.1. Os resultados obtidos apresentam erro relativo inferior a 5%, porém possuem tendência de crescimento com o aumento do número de Bingham.

7. CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou um estudo teórico e numérico da dinâmica dos fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos. Para tal foi determinado analiticamente os perfis de velocidade ao longo do escoamento e comparados com o campo de velocidades obtidos via elementos finitos. No Capítulo 1 foi realizada uma breve revisão dos modelos de fluidos não-Newtonianos mais utilizados, bem como apresentados os objetivos e a motivação do trabalho. No Capítulo 2, seguiu-se a metodologia adotada por Fox & McDonald para a demonstração da equação de conservação de massa e balanço de momentum em coordenadas cartesianas e cilíndricas. No Capítulo 3, através da hipótese de axissimetria, foram calculadas as soluções analíticas para o campo de velocidades e queda de pressão de escoamento interno em tubos para os dois modelos, *power-law* e Bingham. A partir dos resultados para fluidos pseudoplásticos obtidos no Capítulo 4 concluiu-se que a influência do coeficiente de *power-law* sobre o perfil de velocidades é significativa, visto que, quando da diminuição do coeficiente, o perfil de velocidades torna-se mais plano em torno da linha de centro do escoamento (regiões sujeitas a baixas taxas de deformação), e uma região próxima a parede com gradientes de velocidade mais severos. Outro fenômeno observado foi a diminuição da espessura da camada limite de acordo com a diminuição do grau de pseudoplasticidade, e, conseqüentemente, a diminuição da perda de carga. Na seção 4.2 foram realizadas as simulações de elementos finitos com aproximação de Galerkin Mínimos Quadrados com o código computacional NNFEM em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional. Através da comparação entre os resultados das simulações computacionais com os obtidos analiticamente, foram calculados os erros relativos das velocidades tanto para o fluido pseudoplástico como para o fluido viscoplástico. Observou-se que apesar da utilização de uma malha pouco refinada, os resultados se mostraram satisfatórios uma vez que os erros máximos foram da ordem de 4%. É possível obter-se resultados muito mais precisos com malhas mais refinadas. Com os resultados do Capítulo 5 para fluidos viscoplásticos, observou-se que o número de Bingham é o parâmetro reológico que governa o escoamento, uma vez que relaciona a tensão limite de escoamento do fluido com a tensão gerada pela cinemática do escoamento. Conforme esse número aumenta, a magnitude da tensão necessária para o início do escoamento cresce – as zonas não deformadas aumentam, acarretando uma maior perda de carga no sistema. Como no caso tratado no capítulo anterior, foi feita a comparação entre os resultados analíticos e computacionais. Pôde-se perceber que o aumento do número de Bingham provoca o aumento do erro entre os resultados, com erro máximo da ordem de 5% alcançado quando $Bn=10$. Este comportamento pode estar associado à regularização utilizada para a implementação computacional do modelo.

Perspectivas futuras:

- Utilização de formulação de elementos finitos que possua velocidade, pressão e tensão viscosa como variáveis – formulação multi-campos.
- Refinamento da malha para melhorar a estimativa do campo de velocidades na região próxima à parede do duto e para obter com maior precisão na interface entre as zonas rígidas e escoantes.
- Simulação inversa para a otimização dos parâmetros utilizados.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bennett, C. O., Myers J. E., 1978. “Fenômenos de transporte de quantidade de movimento, calor e massa”, editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.

Fox, R.W., McDonald A. T., 1981. “Introdução à Mecânica dos Fluidos”, 2a ed., editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987 “Dynamics of polymeric liquids”, v.1, John Wiley & Sons, U.S.A.

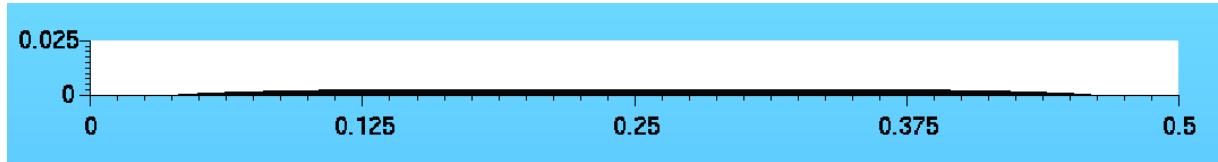
Barnes, H. A., Roberts, G. P., and Carew, P., 2001. “Modelling the flow behaviour of very shear-thinning liquids”, Chemical Engineering Science, vol. 56.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Fluido_n%C3%A3o_newtoniano

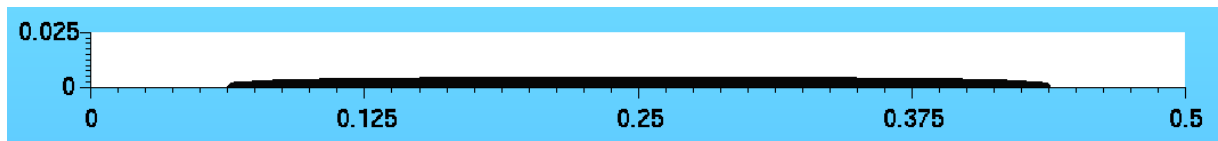
http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/cinematica_v/V_veloc_coord_cilindrica/

9. APÊNDICES

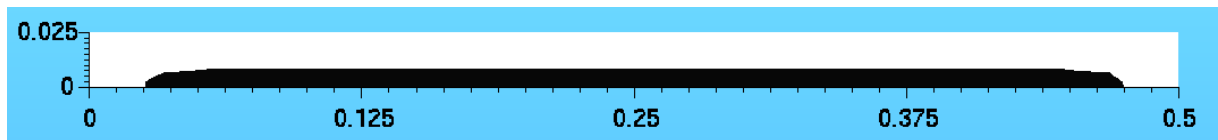
Apêndice A – Figura para visualização do efeito do número de Bingham sobre o escoamento. Na cor preta vemos as regiões não deformadas do fluido.



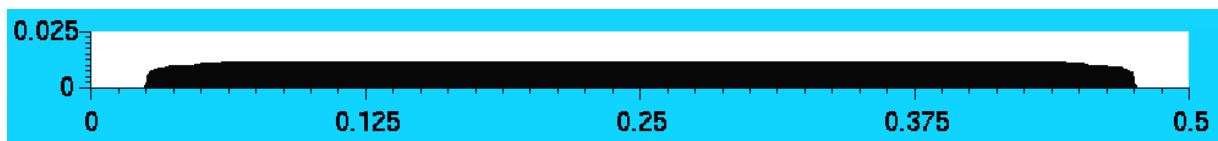
a)



b)



c)



d)

Figura A.1 – Efeito do número de Bingham no escoamento. a) $Bn=1$, b) $Bn=2$, c) $Bn=5$, d) $Bn=10$

Apêndice B – Tabela de erros entre as soluções analíticas e numericamente aproximadas para os diversos índices *power-law* simulados.

Tabela B.1 – Erros relativos entre as velocidades analítica e aproximada.

n (índice de <i>power-law</i>)	raio	velocidade analítica [m/s]	velocidade aproximada [m/s]	erro relativo [%]
0.2	0.000	0.67908	0.70262	3.35
0.2	0.005	0.67904	0.70262	3.36
0.2	0.010	0.67630	0.70098	3.52
0.2	0.015	0.64740	0.67558	4.17
0.2	0.020	0.50106	0.52679	4.88
0.2	0.025	0.00000	0.00000	0.00
0.35	0.000	0.77337	0.78566	1.56
0.35	0.005	0.77181	0.78521	1.71
0.35	0.010	0.75080	0.76648	2.05
0.35	0.015	0.66555	0.68070	2.23
0.35	0.020	0.44633	0.45619	2.16
0.35	0.025	0.00000	0.00000	0.00
0.5	0.000	0.84883	0.84976	0.11
0.5	0.005	0.84204	0.84645	0.52
0.5	0.010	0.79450	0.80145	0.87
0.5	0.015	0.66548	0.67192	0.96
0.5	0.020	0.41423	0.41809	0.92
0.5	0.025	0.00000	0.00000	0.00
0.75	0.000	0.94583	0.92482	2.27
0.75	0.005	0.92370	0.90970	1.54
0.75	0.010	0.83433	0.82384	1.27
0.75	0.015	0.65864	0.65135	1.12
0.75	0.020	0.38388	0.38002	1.02
0.75	0.025	0.00000	0.00000	0.00
1	0.000	1.01859	0.99900	1.96
1	0.005	0.97785	0.96660	1.16
1	0.010	0.85562	0.84740	0.97
1	0.015	0.65190	0.64626	0.87
1	0.020	0.36669	0.36374	0.81
1	0.025	0.00000	0.00000	0.00

Apêndice C – Tabela de erros relativos entre as velocidades analiticamente calculadas e numericamente aproximadas para escoamento de fluidos viscoplásticos analisados.

Tabela C.1 – erros relativos entre as velocidades, para três diferentes números de Bingham.

Bn	raio [m]	Velocidades (analítico) [m/s]	Velocidades (numérico) [m/s]	Erro [%]
0.1	0	1.010251	1.0007108	0.944
0.1	0.0025	1.002290	0.9973354	0.494
0.1	0.0050	0.9737700	0.9703965	0.346
0.1	0.0075	0.9245380	0.9221025	0.263
0.1	0.0100	0.8545950	0.8528128	0.209
0.1	0.0125	0.7639400	0.7626490	0.169
0.1	0.0150	0.6525740	0.6516665	0.139
0.1	0.0175	0.5204970	0.5198953	0.116
0.1	0.0200	0.3677080	0.3673533	0.096
0.1	0.0225	0.1942080	0.1940522	0.080
0.1	0.0250	0.0000000	0.0000000	0.000
5	0	0.811210	0.801049	1.253
5	0.0025	0.811210	0.801049	1.253
5	0.0050	0.811210	0.801048	1.253
5	0.0075	0.811210	0.801044	1.253
5	0.0100	0.804690	0.799877	0.598
5	0.0125	0.763940	0.760732	0.420
5	0.0150	0.685850	0.683810	0.297
5	0.0175	0.570410	0.569219	0.209
5	0.0200	0.417620	0.417028	0.142
5	0.0225	0.227490	0.227278	0.093
5	0.0250	0.000000	0.000000	0.000
10	0	0.76664	0.729644	4.826
10	0.0025	0.76664	0.729643	4.826
10	0.0050	0.76664	0.729642	4.826
10	0.0075	0.76664	0.729641	4.826
10	0.0100	0.76664	0.729637	4.827
10	0.0125	0.76399	0.729629	4.498
10	0.0150	0.71985	0.687776	4.456
10	0.0175	0.62138	0.594095	4.391
10	0.0200	0.4686	0.448339	4.320
10	0.0225	0.26145	0.250344	4.248
10	0.0250	0	0.000000	0.000

Apêndice D – Gráficos da distribuição de tensões em função do raio

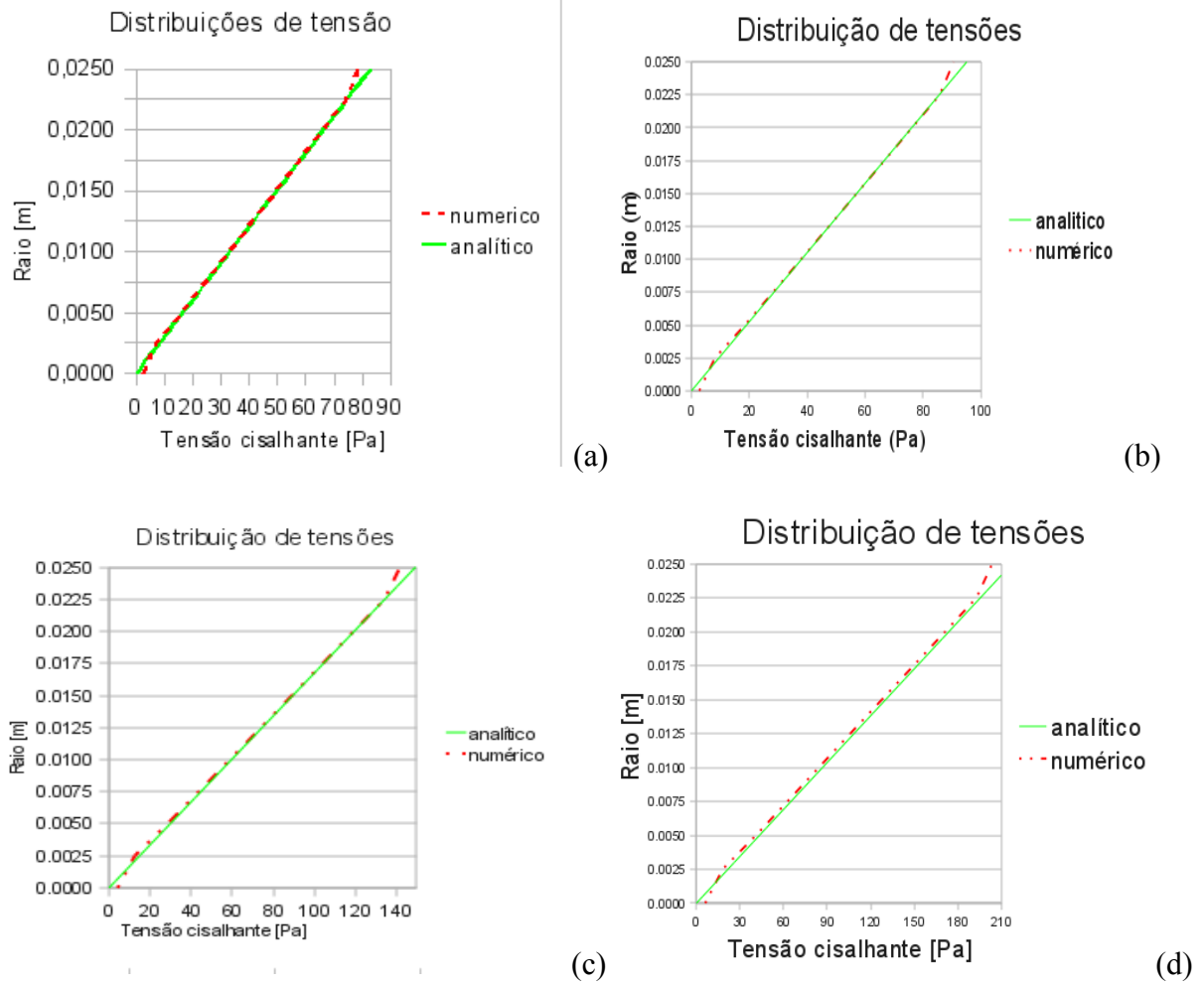


Figura D.1 – Distribuição de tensões para $\eta_0 = 1.0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $U = 0.59 \text{ m/s}$: (a) $Bn = 0.1$; (b) $Bn = 1.0$; (c) $Bn = 5.0$; (d) $Bn = 10.0$;