

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# O Efeito Unruh

Omar Ovidio Morozi Silveira Neto

Trabalho de Conclusão de curso sob orientação do  
Professor Dr. Dimiter Hadjimichef (IF-UFRGS) e  
apresentado ao Instituto de Física da UFRGS.

Porto Alegre  
Novembro de 2021.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver os fundamentos teóricos para a compreensão do Efeito Unruh estudado no espaço bidimensional de Minkowski. É feita uma revisão sobre os fundamentos da Relatividade Especial visando obter a expressão da trajetória hiperbólica de um referencial acelerado, chamado observador de Rindler, sob a ótica do referencial estacionário, de Minkowski.

Desenvolvemos também a Teoria de Campos Lagrangiana, que fornece ferramental matemático para criar uma teoria relativística de campos. Desse formalismo, podemos obter a equação de Klein-Gordon, que admite um processo de quantização baseado no oscilador harmônico quântico.

Finalmente, a expressão para a Temperatura de Unruh é obtida comparando as definições de vácuo de cada referencial, calculando o valor esperado do operador número do observador de Rindler no vácuo de Minkowski.

# Abstract

This work aims to develop the theoretical foundations for the comprehension of the Unruh Effect studied in the Minkowski bidimensional space-time. We start by reviewing the foundations of Special Relativity aiming to obtain expression for the hyperbolic trajectory of an accelerated frame of reference, called Rindler observer, under the optics of the stationary frame, called Minkowski Observer.

We also develop the Lagrangian Field Theory, that provides mathematical background to develop a relativistic theory for fields. Under this formalism, we obtain the Klein-Gordon equation, that admits a quantization process based on the quantum harmonic oscillator.

Finally, the expression for Unruh's Temperature is obtained comparing the vacuum definitions of each referencial frame, calculating the expected value of Rindler's number operator on Minkowski's vacuum.

# Sumário

<b>Sumário</b>	.....	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b>	<b>5</b>
2.1	Relatividade Especial	5
2.2	O Espaço-Tempo de Minkowski	6
2.3	O observador de Rindler	8
<b>3</b>	<b>TEORIA DE CAMPOS EM ESPAÇOS PLANOS</b>	<b>13</b>
3.1	A quantização do campo	17
3.2	A Representação de Interação	21
3.3	Solução para a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Rindler	23
<b>4</b>	<b>O EFEITO UNRUH</b>	<b>27</b>
4.1	Transformações de Bogoliubov	27
4.2	A Temperatura de Unruh	30
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>O OSCILADOR HARMÔNICO</b>	<b>33</b>
<b>B</b>	<b>O HAMILTONIANO DO CAMPO DE RADIAÇÃO</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>39</b>



# 1 Introdução

Em 1975 S. Hawking [1] mostrou como o horizonte de eventos de um buraco negro separa as soluções para uma equação de onda para um campo sem massa entre aquelas que propagam-se para o interior do horizonte e as que propagam-se para fora. Esse fato faz com que um buraco negro, ao invés de apenas absorver, seja capaz de emitir partículas, conferindo ao mesmo uma temperatura que depende de sua gravidade de acordo com a expressão

$$T = \frac{\hbar g}{2\pi k_B c}. \quad (1.1)$$

No mesmo ano, P. W. C. Davies [2] mostra que um observador movendo-se com aceleração constante  $a$  (chamado observador de Rindler) no espaço-tempo de Minkowski, detecta um banho térmico de temperatura

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}. \quad (1.2)$$

Essa expressão, assim como aquela obtida por Hawking, acaba emergindo de soluções para uma equação de onda em um espaço com uma fronteira de causalidade, que no caso do observador de Rindler é gerada pela aceleração do mesmo.

Um ano mais tarde, em 1976, W. G. Unruh [3] estudou o comportamento de detectores de partículas submetidos a um referencial de Rindler, mostrando que o fenômeno de absorção observado pelo mesmo é visto como a emissão dessa partícula pelo referencial de Minkowski, sendo capaz de mostrar como o fenômeno não viola a conservação de energia.

Mesmo assim, o próprio conceito de partícula acaba se mostrando mal definido em vista desses resultados, uma vez que ambos referenciais fornecem descrições igualmente válidas para o fenômeno, mesmo que cada um deles precise ter sua própria definição de vácuo.

Embora o presente trabalho restrinja-se a uma aceleração paralela à trajetória do observador, o efeito também pode ser estudado considerando uma aceleração centrípeta, como feito pelos autores<sup>1</sup> de [4] ao estudarem um laser acoplado a um condensado de Bose-Einstein agindo como um detector de Unruh-DeWitt.

---

<sup>1</sup> Gooding, C., Biermann, S., Erne, S., Louko, J., Unruh, W. G., Schmiedmayer, J. e Weinfurtner, S.

Pode-se obter a expressão (1.2) para a temperatura de Unruh no espaço-tempo plano bidimensional. Para tanto, serão consideradas soluções da equação de Klein-Gordon para partículas de massa  $m = 0$ . O operador número, definido por  $\hat{N} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  que provém da solução algébrica do problema do oscilador harmônico na Mecânica Quântica representará o número de partículas que possuem vetor de onda  $\vec{k}$ . Um estudo utilizando a equação de Dirac, que por sua vez resulta em um campo espinorial, pode ser encontrado em [5]. Em [6], que é um estudo sobre a influência do efeito Unruh na violação da simetria CP, pode-se encontrar uma dedução mais formal para a temperatura de Unruh, feita em espaços curvos e utilizando a matriz densidade. Uma dedução mais informal e no entanto mais simples, é feita em [7], calculando o espectro de frequências detectado pelo observador de Rindler considerando o efeito Doppler.

O movimento do observador de Rindler no espaço de Minkowski será obtido na seção 2.3, sendo ele hiperbólico e assim, dividindo o espaço em dois setores. Também é feita uma revisão sobre teoria de campos bem como de aspectos fundamentais da quantização dos campos. A seguir serão escritas soluções para a equação de Klein-Gordon em ambos referenciais, com o objetivo de comparar o valor esperado do operador número medido pelo referencial de Rindler, seja  $(\hat{N}_R)$ , no estado do vácuo de Minkowski  $|0_M\rangle$ . Para tanto, será imposta a continuidade das soluções para a equação de Klein Gordon em ambos os setores, por fim resultando em uma distribuição de Bose-Einstein de onde obtém-se (1.2).

## 2 Conceitos Básicos

### 2.1 Relatividade Especial

A relatividade especial descreve como as leis da física são invariantes frente a troca de referenciais inerciais. Sejam dois referenciais inerciais,  $R$  e  $R'$ , sendo que  $R'$  se move em relação a  $R$  com velocidade constante  $v$  na direção do eixo  $x$  positivo, se um observador em  $R$  medir um evento de coordenadas  $(t, x, y, z)$ , as coordenadas do mesmo evento medidas por um observador em  $R'$ , serão, segundo as transformações de Lorentz:[8]

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (2.1a)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.1b)$$

$$y' = y \quad (2.1c)$$

$$z' = z. \quad (2.1d)$$

Onde defini-se o fator de Lorentz  $\gamma$  por

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.2)$$

Sejam dois eventos,  $E_0$  e  $E$ , respectivamente com coordenadas  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  e  $(t, x, y, z)$ . Segundo as transformações de Lorentz, a quantidade  $(\Delta S)^2$  que é definida por:

$$(\Delta S)^2 = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2, \quad (2.3)$$

é invariante frente a troca de coordenadas entre os referenciais  $R$  e  $R'$ . Podemos escrever então:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta S')^2 \quad (2.4)$$

As Transformações de Lorentz levam à seguinte equação para a energia relativística de uma partícula de massa  $m$ : [8]

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (2.5)$$

Essa equação será utilizada para a tentativa de construir uma equação covariante para representar a radiação eletromagnética.



## 2.2 O Espaço-Tempo de Minkowski

A partir daqui será adotada a convenção de soma de Einstein, onde índices repetidos representam uma soma sobre os mesmos:

$$\sum_{\mu} \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} x^{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}.$$

As transformações de Lorentz (2.1), serão representadas pela matriz  $\Lambda$ , com componentes dadas por:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

A troca de coordenadas de  $R$  para  $R'$  pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Ou, em termos das componentes:

$$x'^{\mu} = \lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (2.8)$$

A invariância da quantidade  $\Delta S$  motiva a formulação do que chamamos de *espaço-tempo de Minkowski*, um espaço vetorial de quatro dimensões que engloba o tempo ( $t$ ) e as três dimensões espaciais ( $x, y, z$ ) em uma única entidade, que chamaremos de quadrivetor contravariante. Um quadrivetor genérico  $V^{\mu}$ , é portanto um objeto que sofre a transformação

$$V^{\mu} \rightarrow V^{\mu'} = \lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu} \quad (2.9)$$

quando o sistema de coordenadas sofre a transformação dada por (2.8).

O quadrivetor posição, por exemplo, será representado por  $x^{\mu}$ . As componentes de um quadrivetor serão dadas variando o índice grego de 0 a 3, sendo a componente 0 a parte temporal, e as componentes de 1 a 3 responsáveis pela parte espacial.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (2.10)$$

O vetor dual será definido de forma análoga, diferenciando-se apenas com o índice grego subscrito ( $x_\mu$ ), e será chamado de quadri vetor covariante.

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3).$$

O tensor de métrica desse espaço será dado por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Isso nos permite estabelecer a relação entre o tensor covariante ( $x_\mu$ ) com o seu equivalente contravariante ( $x^\mu$ ):

$$x_\mu = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} x^\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x_0, x_1, x_2, x_3). \quad (2.12)$$

Nesta notação, para um campo escalar  $\phi$  que é função das coordenadas  $x^\mu$ , as derivadas parciais do campo em relação às suas coordenadas são escritas como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \phi \right), \quad (2.13)$$

que é a generalização do vetor gradiente para o espaço de Minkowski.

## 2.3 O observador de Rindler

Para calcular como a velocidade se transforma, basta calcular as derivadas das equações 2.1. Dessa forma obtemos:

$$u' = \frac{u - v}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)} \quad (2.14)$$

Para a aceleração, será calculada a derivada de (2.14) em relação a  $t$ :

$$\frac{du'}{dt} = a \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^{-1} - (u - v) \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^{-2} \left(-\frac{v}{c^2} \frac{du}{dt}\right) \quad (2.15)$$

Além disso, são convenientes as seguintes relações:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}\right) \quad (2.16)$$

$$\frac{du'}{dt} = \frac{du'}{dt'} \frac{dt'}{dt} \quad (2.17)$$

Juntando as equações (2.15), (2.16) e (2.17), e depois isolando  $a'$ , obtemos:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a}{\gamma} \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^{-2} \left[1 - (u - v) \left(-\frac{v}{c^2}\right) \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^{-1}\right] \\ &= a\gamma^{-3} \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^{-3} \end{aligned} \quad (2.18)$$

No referencial de repouso da partícula, onde  $v=u$ :

$$a' = a\gamma^3(u) \quad (2.19)$$

O cálculo da seguinte derivada nos permite relacionar a aceleração  $a'$  explicitamente com o tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\gamma(u)u] &= \frac{u}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{dt} u + \gamma(u) \frac{du}{dt} \\ &= a \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{u^2}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1} + 1\right] \\ &= a \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1} \\ &= a\gamma^3(u) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\gamma(u)u] &= a' \\ \int \frac{d[\gamma(u)u]}{dt} dt &= \int \frac{du'}{dt'} dt \\ \gamma(u)u &= a't\end{aligned}\tag{2.21}$$

Isolando  $u(t)$  e lembrando que  $\gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ , ficamos com a expressão:

$$u(t) = \frac{a't}{\sqrt{1 + \left(\frac{a'^2 t^2}{c^2}\right)}}\tag{2.22}$$

Partindo da equação (2.1a), podemos escrever:

$$\frac{dt'}{dt} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow u^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{dt'}{dt}\right)^2\right]\tag{2.23}$$

Juntando (2.22) e (2.23) para encontrar  $t(t')$ :

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}}}\tag{2.24}$$

Integrando e invertendo a última relação, obtemos:

$$t'(t) = \frac{c}{a'} \sinh^{-1} \left( \frac{a'}{c} t \right)\tag{2.25}$$

$$t(t') = \frac{c}{a'} \sinh \left( \frac{a'}{c} t' \right)\tag{2.26}$$

Juntando (2.26) diretamente em (2.22) e utilizando a propriedade das funções trigonométricas

$$\cosh(\theta) - \sinh(\theta) = 1,\tag{2.27}$$

obtemos a seguinte expressão:

$$u = \coth\left(\frac{a'}{c}t'\right) \quad (2.28)$$

Integrando para descobrir  $x$  como função de  $t'$ :

$$x(t') = \frac{c^2}{a'} \cosh\left(\frac{a'}{c}t'\right) \quad (2.29)$$

Por fim, juntando (2.26) e (2.29) utilizando a relação fundamental das funções hiperbólicas,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad (2.30)$$

obtemos a seguinte equação de uma hipérbole no espaço-tempo:

$$x^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{a'^2}. \quad (2.31)$$

As coordenadas  $(x, t)$  são as coordenadas do observador de Minkowski. Serão introduzidas as novas coordenadas  $(\eta, \varepsilon)$ , pertencentes ao referencial de Rindler e definidas no setor  $I$  da figura 2 como:

$$t = \frac{1}{a} e^{a\varepsilon} \sinh(a\eta); \quad (2.32a)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\varepsilon} \cosh(a\eta); \quad \text{com } -\infty \leq (\eta, \varepsilon) \leq \infty \quad (2.32b)$$

Trocando o sinal dessas relações permite definir as coordenadas de Rindler também para a região  $IV$ .

A hipérbole tem assíntotas de equações  $ct = \pm x$ . Como mostra a Figura (2), a linha de mundo do observador com aceleração constante está restrita à região  $I$ , portanto jamais será alcançado por qualquer sinal de luz que passe por  $IV$  e  $II$ . Para esse observador, a reta  $ct = x$  forma uma fronteira de causalidade no espaçotempo que se assemelha a um horizonte de eventos de um buraco negro. Se ao invés disso o observador de Rindler estivesse movendo-se na direção de  $-x$ , sua trajetória seria descrita pela "outra metade" da hipérbole, restringindo-se à região  $IV$  e tendo a reta  $ct = -x$  como fronteira de causalidade entre  $I$  e  $II$ .

Para calcular o intervalo invariante  $ds^2$  nas novas coordenadas, precisamos utilizar a versão diferencial de (2.3), dada por:

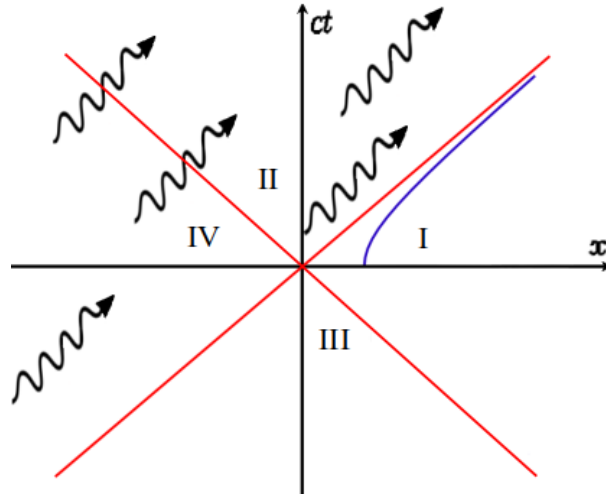


Figura 1 – Trajetória de um observador de Rindler representada no espaço-tempo de Minkowski movendo-se na direção de  $+x$ . Apenas eventos das regiões *I* e *III* podem ter relação causal com o observador.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \quad (2.33)$$

Basta então diferenciar as relações (2.32) e juntar com a equação acima:

$$dt = e^{a\epsilon}(\sinh(a\eta)d\epsilon + e^{a\epsilon} \cosh(a\eta)d\eta); \quad (2.34)$$

$$dx = e^{a\epsilon}(\cosh(a\eta)d\epsilon + e^{a\epsilon} \sinh(a\eta)d\eta); \quad (2.35)$$

Por fim, obtemos o intervalo invariante nas coordenadas de Rindler.

$$ds^2 = e^{2a\epsilon}(c^2 d\eta^2 - d\epsilon^2). \quad (2.36)$$

Nas seções a seguir, será desenvolvida a teoria de campos em espaços planos. Nesse contexto, a equação de Klein-Gordon será discutida, primeiro com as coordenadas de Minkowski e posteriormente utilizando as coordenadas de Rindler de acordo com a equação acima.



### 3 Teoria de Campos em Espaços Planos

Analogamente ao desenvolvimento da mecânica clássica de partículas, onde a trajetória real da partícula, representada pelas coordenadas generalizadas  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$  será aquela que minimiza a integral de ação

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt,$$

podemos construir uma teoria tendo o campo como objeto de estudo.

Seja  $\omega$  um volume arbitrário no espaço-tempo e seja  $\mathcal{L}$  a densidade de Lagrangiana que depende das coordenadas generalizadas  $\phi$  e  $\partial_\mu \phi$ , a integral de ação é dada por [9]

$$S(\omega) = \int_\omega d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (3.1)$$

Postula-se que a equação dinâmica do campo é obtida quando a variação da integral de ação na equação (3.1) é zero. Ou seja:

$$\delta S(\omega) = 0. \quad (3.2)$$

Calculando utilizando (3.1), obtemos

$$\delta S = \int_\omega \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] d^4x. \quad (3.3)$$

O segundo termo pode ser integrado por partes, resultando em

$$\delta S = \int_\omega \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) d^4x + \int_\omega \delta \phi \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \right) \right] d^4x \quad (3.4)$$

Seja  $F^\mu$  um vetor contravariante nesse espaço e  $n_\mu$  um vetor covariante unitário e normal à superfície  $\partial\omega$ , a primeira integral em (3.4) pode ser trabalhada com o teorema de Gauss aplicado ao espaço de Minkowski[10]:

$$\int_\omega \partial_\mu F^\mu d^4x = \int_{\partial\omega} n_\mu F^\mu d^3x,$$



1

Reconhecendo

$$F^\mu = \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right), \quad (3.5)$$

e utilizando (3.5) para transformar a primeira integral de (3.4) em uma integral sobre o contorno  $\partial\omega$ , o resultado será zero pois já definiu-se que  $\delta\phi = 0$  nesse contorno.

Finalmente, para garantir que  $\delta S = 0$  para qualquer funcional  $\mathcal{L}$ , obtemos

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (3.6)$$

que é a equação de Euler-Lagrange que descreve a dinâmica do campo.

Para mudarmos para o formalismo Hamiltoniano, definimos o momentum conjugado ao campo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (3.7)$$

E o Hamiltoniano será a transformada de Legendre do Lagrangiano:

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$$

Uma tentativa de obter uma teoria relativística para ondas de matéria é pautada na relação entre energia e momentum da relatividade especial

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup> A equação utilizada em [10] é referente a um espaço curvo de  $n$  dimensões, e foi simplificada aqui para o espaço de Minkowski.

juntamente com as representações usuais da mecânica quântica para os respectivos operadores.

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad (3.9)$$

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (3.10)$$

Um cálculo direto leva à equação

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (3.11)$$

Definindo a constante  $\mu \equiv \frac{mc}{\hbar}$ , e definindo  $\square$ , o operador d'Alembertiano, como

$$\square = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2, \quad (3.12)$$

reescrevemos a equação (3.11) para reconhecer a equação de Klein-Gordon:

$$(\square + \mu^2)\phi = 0. \quad (3.13)$$

Essa equação, uma vez quantizada, será capaz de descrever partículas relativísticas sem carga e sem spin quando admitirmos um campo escalar real como solução. Podemos utilizar o formalismo da teoria de campos para obter a equação de Klein-Gordon a partir do seguinte Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi - \mu^2\phi^2). \quad (3.14)$$

Para isso, basta aplicar a equação (3.6):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{\mu^2}{2}\frac{\partial\phi^2}{\partial\phi} = -\mu^2\phi \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} &= \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta(\partial_\mu\phi)}[\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\delta\partial_\nu\phi}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi + \partial_\nu\phi\frac{\delta\partial^\nu\phi}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right] \\ &= \frac{1}{2}(\eta^\mu{}_\nu\partial^\nu\phi + \partial_\nu\phi\eta^{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi + \partial^\mu\phi) \\ &= \partial^\mu\phi \end{aligned}$$

E por fim:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad (3.16)$$

, como desejado.

O momentum conjugado a esse campo calculado por (3.7) será

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x), \quad (3.17)$$

que é utilizado para obter o seguinte Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \left( c^2 \pi^2(x) + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi \right)$$

De acordo com o intervalo invariante dado por (2.36), a equação de Klein-Gordon no referencial  $(\eta, \varepsilon)$  será

$$\exp\left\{-\frac{2a\varepsilon}{c^2}\right\} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \right) \phi = 0. \quad (3.18)$$

Os modos de oscilação utilizados como solução dessa equação serão os chamados "modos de Rindler".

### 3.1 A quantização do campo

Por conveniência, a partir de agora será utilizado o sistema de unidades naturais, onde  $c = \hbar = k_B = 1$ .

Uma solução para a equação de Klein-Gordon pode ser escrita como uma onda plana com o quadri vetor de onda definido por  $\mathbf{k} \equiv (\omega_k, \vec{k})$  cujas componentes espaciais variam no intervalo

$$-\infty \leq k \leq +\infty.$$

Para a parte temporal  $\omega_k$  podemos usar o fato de que

$$k_\mu k^\mu = \omega_k^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}$$

para definir:

$$\omega_k \equiv \sqrt{m^2 + \vec{k} \cdot \vec{k}} > 0. \quad (3.19)$$

Assim, um conjunto ortonormal de soluções pode ser escrito como

$$f_k(x^\mu) = \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}}, \quad (3.20)$$

É dito que um modo de oscilação tem frequência positiva, se ele satisfaz

$$\frac{\partial f(x^\mu)}{\partial t} = -i\omega_k f(x^\mu)$$

Para obtermos um conjunto completo de soluções, precisamos verificar a ortonormalidade entre as funções exponenciais  $e^{ik_\mu x^\mu}$  e  $e^{ik'_\mu x^\mu}$ , e para tanto, o produto interno no espaço de soluções deve ser definido. Além disso, para desenvolver a teoria de campos no contexto da relatividade espacial, o produto interno deve ser um invariante de Lorentz.

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} \left( \phi_1 \frac{\partial \phi_2^*}{\partial t} - \phi_2^* \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) d^3x \quad (3.21)$$

[10]

Aplicando o produto interno para as funções  $f(x^\mu)$ :

$$(e^{ik^\mu x_\mu}, e^{ik'^\mu x_\mu}) = (\omega_k + \omega_{k'}) e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.22)$$

Então, com a constante de normalização adequada, um conjunto completo de soluções é dado pelo campo  $\phi(x^\mu)$  escrito como sobreposição infinita de osciladores com os operadores escada operação e aniquilação do oscilador harmônico como coeficientes. Esse procedimento permitirá que o campo  $\phi$ , agora promovido a um operador hermitiano, represente partículas da radiação. A expansão completa do campo em termos dos modos  $f_k$  será então:

$$\dot{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}_k e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ik_\mu x^\mu}) \quad (3.23)$$

O processo de quantização segue a estrutura dos operadores escada do oscilador harmônico quântico tradicional<sup>2</sup>. Cada um dos infinitos 4-vetores de onda  $\mathbf{k}$  terá seus próprios operadores criação  $\hat{a}_k^\dagger$  e aniquilação  $\hat{a}_k$ . Assim, o estado de vácuo para um observador de Minkowski será aquele que resulta em zero com a operação de  $\hat{a}_k$ , para qualquer 4-vetor de onda  $\mathbf{k}$ :

$$\hat{a}_k |0_M\rangle = 0 \quad (3.24)$$

A seguir, serão impostas as relações de comutação com tempos iguais para o campo  $\phi$ :

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.25a)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = [\dot{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] = 0. \quad (3.25b)$$

Onde  $\dot{\phi}$  é simplesmente a derivada temporal de (3.23):

$$\dot{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (i\omega_k \hat{a}_k e^{ik_\mu x^\mu} - i\omega_k \hat{a}_k^\dagger e^{-ik_\mu x^\mu}) \quad (3.26)$$

Para mostrar que o conjunto de imposições em (3.25) recai em relações semelhantes para os operadores escada, primeiro precisamos escrever esses operadores em termos do campo. Para isso, integrando em (3.23):

<sup>2</sup> Uma descrição detalhada pode ser conferida no Apêndice A

$$\begin{aligned}
\int \phi(x^\mu) e^{ik'_\mu x^\mu} d^3x &= \int \int \frac{d^3x d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{i(k'_\mu + k_\mu)x^\mu} + \hat{a}_k^\dagger e^{i(k'_\mu - k_\mu)x^\mu} \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[ \hat{a}_k e^{i(\omega_{k'} + \omega_k)t} \left( \int e^{-i(\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x \right) \right. \\
&\quad \left. + \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t} \left( \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x \right) \right] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2\omega_k}} (\hat{a}_{-k} e^{2i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger) \tag{3.28}$$

Fazendo o mesmo para  $\dot{\phi}$ :

$$\int \dot{\phi}(x^\mu) d^3x = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2\omega_k}} (i\omega_k \hat{a}_{-k} e^{2i\omega_k t} - i\omega_k \hat{a}_k^\dagger) \tag{3.29}$$

Fazendo a combinação linear  $\omega_k \times 3.27 + i \times 3.29$ :

$$\hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int (\omega_k \phi(x^\mu) + i\dot{\phi}(x^\mu) e^{ik_\mu x^\mu}) d^3x \tag{3.30}$$

A mesma operação pode ser feita para isolar  $\hat{a}_k$  se multiplicarmos por  $e^{-ik'_\mu x^\mu}$ . Mas basta como alternativa, basta tomar o conjugado hermitiano de [A.17](#):

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int (\omega_k \phi(x^\mu) - i\dot{\phi}(x^\mu) e^{-ik_\mu x^\mu}) d^3x \tag{3.31}$$

Calculando a relação de comutação:

$$\begin{aligned}
[a_k, a_{k'}^\dagger] &= \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_K} \int \int \left[ \dot{\phi}\dot{\phi}' - i\omega_{k'}\dot{\phi}\phi' + i\omega_k\phi\dot{\phi}' + \omega_k\omega_{k'}\phi\phi' \right. \\
&\quad \left. - \dot{\phi}'\dot{\phi} - i\omega_{k'}\dot{\phi}'\phi + i\omega_{k'}\phi'\dot{\phi} - \omega_k\omega_{k'}\phi'\phi \right] e^{i(k'_\mu x'^\mu - k_\mu x^\mu)} d^3x d^3x' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_K} \int \int e^{i(k'_\mu x'^\mu - k_\mu x^\mu)} \left[ [\dot{\phi}, \dot{\phi}'] + i\omega_k [\phi', \dot{\phi}] + i\omega_{k'} [\phi, \dot{\phi}'] + \omega_k\omega_{k'} [\phi, \phi'] \right] d^3x d^3x' \\
&= \frac{e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k}' \cdot \vec{x}')} \left[ -\omega_k \delta(\vec{x} - \vec{x}') - \omega_{k'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \right] d^3x d^3x' \\
&= -\frac{(2\pi)^3 e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t}}{2\omega_k} (\omega_k + \omega_{k'}) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\
&= \delta(\vec{k} - \vec{k}')
\end{aligned}$$

Para estabelecer uma conexão sólida do operador  $\hat{\phi}$  com partículas de radiação é preciso calcular a energia desse campo. Classicamente, o Hamiltoniano do campo é dada por: [9]

$$H = \int \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} + (\vec{\nabla}\phi)^2 + \mu^2\phi^2 \right] d^3\vec{x}. \quad (3.32)$$

Para obtermos o Hamiltoniano em termos dos operadores escada, basta substituir (3.23) na expressão acima. A derivada temporal do campo foi calculado e resulta na expressão (3.26). O gradiente do campo resulta em:

$$\vec{\nabla}\phi(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} (-i\hat{a}_k e^{ik_\mu x^\mu} + i\hat{a}_k^\dagger e^{-ik_\mu x^\mu}) \vec{k}. \quad (3.33)$$

As integrais foram calculadas mais explicitamente no apêndice (B), e depois de resolvidas em  $dk'$  e  $x$ , fornecem as seguintes expressões:

$$\int \phi^2(x^\mu) d^3k' d^3x = \int d^3k \frac{1}{2\omega_k} [\hat{a}_k \hat{a}_{-k} e^{2i\omega_k t} + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger e^{-2i\omega_k t}] \quad (3.34a)$$

$$\int \dot{\phi}^2(x^\mu) d^3k' d^3x = \int d^3k \frac{\omega_k}{2} [-\hat{a}_k \hat{a}_{-k} e^{2i\omega_k t} + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger e^{-2i\omega_k t}] \quad (3.34b)$$

$$\int (\vec{\nabla}\phi(x^\mu))^2 d^3k' d^3x = \int d^3k \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{2\omega_k} [\hat{a}_k \hat{a}_{-k} e^{2i\omega_k t} + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger e^{-2i\omega_k t}] \quad (3.34c)$$

Juntando as expressões acima utilizando a relação  $k_\mu k^\mu = \omega_k^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}$ , obtém-se por fim

$$H = \int \frac{\omega_k}{2} (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k) d^3k. \quad (3.35)$$

Como desejado, partindo do hamiltoniano clássico, foi possível expressá-lo em termos dos operadores  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  de forma equivalente ao que é feito no problema do oscilador harmônico quântico.

## 3.2 A Representação de Interação

Existem diferentes representações possíveis para os vetores de estado e operadores na Mecânica Quântica. Na representação de Schrödinger, os operadores são constantes, enquanto os vetores de estado evoluem no tempo com sua dinâmica dada pela equação de Schrödinger.[11]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_S = \hat{H} |\psi, t\rangle_S \quad (3.36)$$

Para obtermos a evolução temporal de um vetor de estado nessa representação, podemos definir um operador unitário  $\hat{U}$ , chamado de operador evolução temporal, que leva o sistema de um estado inicial  $|\psi, t_0\rangle$  a um estado posterior  $|\psi, t\rangle$ :

$$|\psi, t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi, t_0\rangle. \quad (3.37)$$

Para esse operador, as seguintes propriedades podem ser demonstradas:

$$\hat{U}(t, t'') = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t'') \quad (3.38)$$

$$\hat{U}(t, t') = U^{-1}(t', t) = U^\dagger(t', t) \quad (3.39)$$

Tomando a derivada parcial de (3.37) no tempo e utilizando (3.39), podemos utilizar a equação (3.36) para obtermos uma equação diferencial para o operador evolução temporal em termos do hamiltoniano do sistema.

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \quad (3.40)$$

Encontrar o operador  $\hat{U}$  que resolve essa nova equação é equivalente a encontrar os vetores de estado que resolvem a equação de Schrödinger. Quando o hamiltoniano não depende do tempo, a solução de (3.40) é simplesmente:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \quad (3.41)$$

A solução mais geral possível, será quando o hamiltoniano depende do tempo e, além disso, quando hamiltonianos em tempos diferentes não comutam entre si. Integrando (3.40) em  $t'$ , obtemos a forma integral dessa equação.



$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0) dt' \quad (3.42)$$

que pode ser resolvida por iterações resultando na chamada série de Dyson:

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \cdots \hat{H}(t_n) \quad (3.43)$$

Uma formulação alternativa é a chamada Representação de Heisenberg. Nela, os operadores evoluem no tempo enquanto os vetores de estado se mantêm constantes. Um operador genérico  $\hat{A}_H$  na representação de Heisenberg, será relacionado com o operador  $\hat{A}_S$  na representação de Schrödinger pela transformação de similaridade através do operador (2.22), tomando  $t_0 = 0$  por simplicidade.

$$\hat{A}_H(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t). \quad (3.44)$$

E o vetor de estado nessa representação será fixo no tempo:

$$|\psi\rangle_H = |\psi, t_0\rangle_S \quad (3.45)$$

Na representação de interação, tanto os vetores de estado quanto os operadores dependem do tempo. Para relacionar ambos com a conhecida representação de Schrödinger:

$$|\psi, t\rangle_I \equiv e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} |\psi, t\rangle_S \quad (3.46)$$

$$\hat{A}_I \equiv e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{A}_S e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \quad (3.47)$$

Esse breve estudo sobre a série de Dyson é um adendo para a revisão da teoria quântica de campos, pois ela dá o aparato matemático para o estudo de partículas virtuais, que emergem na sua aplicação à mecânica quântica.

### 3.3 Solução para a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Rindler

De acordo com o intervalo invariante dado por (2.36), a equação de Klein-Gordon escrita nas coordenadas de Rindler para partículas sem massa, ou seja, com  $\mu = 0$  (e, como consequência, com  $\omega = |k|$ ) pode ser escrita como:

$$e^{-2a\varepsilon} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \right) \phi = 0. \quad (3.48)$$

Por comparação com o que foi desenvolvido para a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Minkowski, seria natural pensar que o modo proporcional a  $e^{-\omega\eta + ik\varepsilon}$ , juntamente de seu conjugado hermitiano, formariam uma base de soluções para (3.48). No entanto, como podemos ver pela orientação da variável  $\eta$  no quadrante *IV* da figura (), valores proporcionais a  $e^{-\omega\eta}$  representam ondas andando no sentido de  $-t$ . Para lidar com este problema, os modos  $g_k$  devem ser definidos por partes, com o sinal trocado na parte temporal do quarto quadrante.

$$g_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ik\varepsilon} & I \\ 0 & IV \end{cases} \quad (3.49)$$

$$g_k^{(2)} = \begin{cases} 0 & I \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{+i\omega\eta + ik\varepsilon} & IV \end{cases} \quad (3.50)$$

Nas coordenadas de Rindler, para as regiões *I* e *IV*, respectivamente, serão definidos os novos operadores aniquilação e criação  $\hat{b}_k^{(1)}$  e  $\hat{b}_k^{(2)}$ , sujeitos à relações de comutação idênticas àquelas impostas para  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , ou seja:

$$\begin{aligned} [\hat{b}_k^{(1)}, \hat{b}_{k'}^{(1)}] &= 0 \\ [\hat{b}_k^{(1)\dagger}, \hat{b}_{k'}^{(1)\dagger}] &= 0 \\ [\hat{b}_k^{(1)}, \hat{b}_{k'}^{(1)}] &= \delta_{kk'} \\ [\hat{b}_k^{(2)}, \hat{b}_{k'}^{(2)}] &= \delta_{kk'} \end{aligned}$$

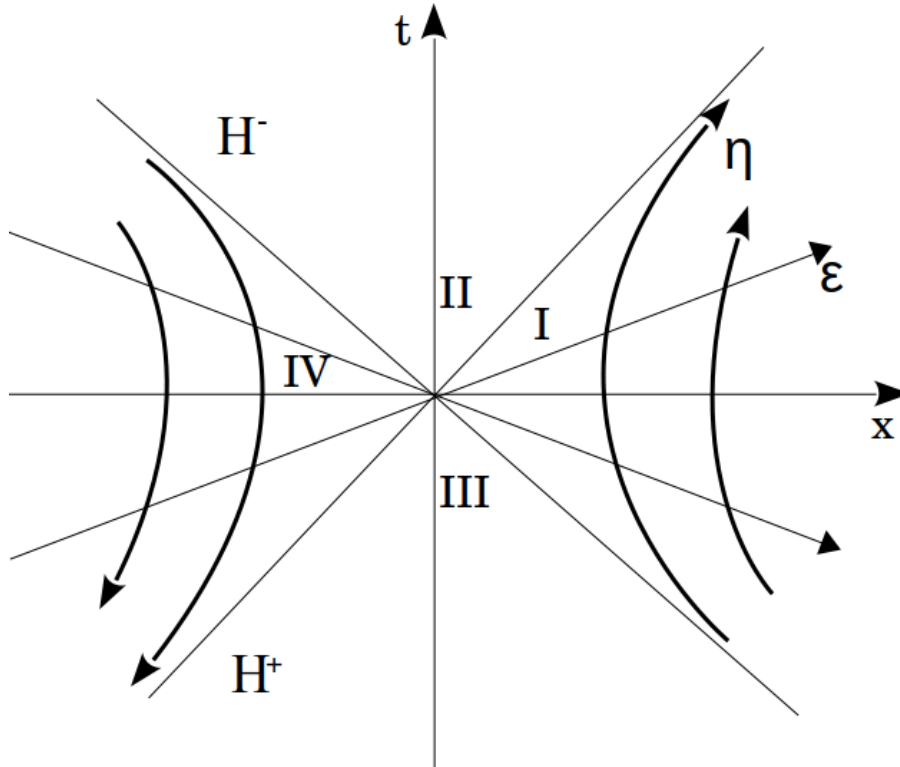


Figura 2 – O espaço de Minkowski dividido nos setores definidos pelos horizontes de Rindler  $H^+$  e  $H^-$  que delimitam as trajetórias das variáveis  $\eta$  e  $\epsilon$ .

Em termos desses modos, podemos construir uma expansão para o campo equivalente a (3.23):

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{b}_k^{(1)} g_k^{(1)} + \hat{b}_k^{(1)\dagger} g_k^{(1)*} + \hat{b}_k^{(2)} g_k^{(2)} + \hat{b}_k^{(2)\dagger} g_k^{(2)*}) dk. \quad (3.51)$$

O observador de Rindler possui sua própria definição de vácuo, que é o estado  $|0_R\rangle$  tal que

$$\hat{b}_k^{(1)} |0_R\rangle = \hat{b}_k^{(2)} |0_R\rangle = 0. \quad (3.52)$$

Como consequência da definição por partes dos modos  $g_k$ , os modos que se propagam na direção de  $+x$  terão uma transição descontínua de sinal na parte temporal do termo exponencial passando da região  $I$  para a região  $IV$  da figura 2, sendo não-analíticos no horizonte  $H^+$ . O mesmo ocorre para os modos que se propagam para  $-x$ , quando atravessam a fronteira  $H^-$ . Nas coordenadas de Minkowski esse problema não ocorria, pois os modos  $f_k$  são analíticos por toda a parte. Portanto, para a solução de (3.48) cubra todo o espaço, ela deve ser obrigatoriamente uma sobreposição de modos com frequências positivas e negativas. Para finalmente podermos comparar os modos nas coordenadas de Rindler em termos das coordenadas de Minkowski, primeiramente vamos reescrever as transformações (2.32) no setor  $I$ :

$$a(-t + x) = e^{-a(\eta - \varepsilon)} \quad (3.53a)$$

$$a(t + x) = e^{a(\eta + \varepsilon)} \quad (3.53b)$$

Como estamos lidando com partículas sem massa, podemos escolher  $\omega_k$  tal que  $\omega_k = k$  para reescrever  $g_k^{(1)}$  como

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi\omega}g_k^{(1)} &= e^{-i\omega(\eta - \varepsilon)} \\ &= e^{(\eta - \varepsilon)^{-i\omega}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

que juntando com (3.53a) resulta em

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi\omega}g_k^{(1)} &= (a^{-1/a}(-t + x)^{-1/a})^{-i\omega} \\ &= a^{i\omega/a}(-t + x)^{i\omega/a}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Assim está estabelecida a relação entre os modos de Rindler com as coordenadas de Minkowski no setor  $I$ . No entanto, para fazer o mesmo no processo no setor  $IV$  para obtermos os modos de oscilação em função do mesmo termo  $(-t + x)^{i\omega/a}$ , não basta escolhermos o modo  $g_k^{(2)}$  pois, na região  $IV$  teremos:

$$a(-t - x) = e^{a(\eta + \varepsilon)}; \quad (3.56a)$$

$$a(t - x) = e^{-a(\eta - \varepsilon)}. \quad (3.56b)$$

Reescrevendo  $g_k^{(2)}$  e utilizando (3.56a):

$$\begin{aligned} \sqrt{4\pi\omega}g_k^{(2)} &= e^{i\omega\eta + ik\varepsilon} \\ &= e^{(\eta + \varepsilon)^{i\omega}} \\ &= a^{i\omega/a}(-t - x)^{i\omega/a}. \end{aligned}$$

O modo de oscilação que de fato depende do termo  $(-t + x)^{i\omega/a}$  será dado por  $g_{-k}^{(2)*}$ , como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4\pi\omega}g_{-k}^{(2)*} &= e^{-i\omega\eta+ik\varepsilon} \\
&= e^{(\eta-\varepsilon)^{-i\omega}} \\
&= a^{i\omega/a}(t-x)^{i\omega/a} \\
&= a^{i\omega/a}[e^{-i\pi}(-t+x)]^{-i\omega/a} \\
&= a^{i\omega/a}e^{\pi\omega/a}(-t+x)^{i\omega/a}
\end{aligned}$$

Finalmente temos uma combinação contínua e analítica dos modos de Rindler em função das coordenadas de Minkowski.

$$\sqrt{4\pi\omega}(g_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/a}g_{-k}^{(2)*}) = a^{i\omega/a}(-t+x)^{i\omega/a} \quad (3.57)$$

Essa combinação também pode ser feita através dos modos  $g_{-k}^{(1)*}$  e  $g_k^{(2)}$  no setor *IV*, utilizando (3.56a) e (3.56b) para obter

$$\sqrt{4\pi\omega}(g_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/a}g_{-k}^{(1)*}) = a^{i\omega/a}(-t+x)^{i\omega/a}. \quad (3.58)$$

Para encontrar a normalização desses modos, basta utilizar o produto definido em (3.21), que resulta nos modos  $h_k^{(1)}$  e  $h_k^{(2)}$ :

$$h_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\pi\omega/2a}g_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a}g_{-k}^{(2)*}) \quad (3.59)$$

$$h_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\pi\omega/2a}g_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a}g_{-k}^{(1)*}). \quad (3.60)$$

Obtemos então os novos modos de Rindler  $h^{(1,2)h}$  em termos dos antigos,  $g^{(1,2)k}$ , mas agora com o problema da continuidade e da orientação temporal corrigidos. A expansão nova do campo em termos desses modos será:

$$\phi = \int dk (\hat{c}_k^{(1)}h_k^{(1)} + \hat{c}_k^{(1)\dagger}h_k^{(1)*} + \hat{c}_k^{(2)}h_k^{(2)} + \hat{c}_k^{(2)\dagger}h_k^{(2)*}). \quad (3.61)$$

Agora basta obter a relação que os novos operadores escada de Rindler,  $c_k^{(1,2)}$  terão com os antigos,  $b_k^{(1,2)}$ . Essa relação será obtida por intermédio das transformações de Bogoliubov, discutida na seção a seguir.

## 4 O Efeito Unruh

A própria definição de vácuo do observador de Rindler dada por (3.52), em comparação àquela definida pelo observador de Minkowski, dada por (3.24), já deixa pistas de que o próprio conceito de "vácuo" não é fixo quando se estuda teoria de campos. Como ele depende de um conjunto arbitrário de soluções para a equação de Klein-Gordon, podendo estarem expressas tanto nas coordenadas de Rindler quanto de Minkowski, é vital estabelecermos uma relação entre esses conjuntos de soluções.

### 4.1 Transformações de Bogoliubov

A equação de Klein-Gordon em espaços curvos possui uma arbitrariedade semelhante de soluções com a que encontramos em espaços planos mas utilizando referenciais não-inerciais. O conjunto de soluções para ondas planas no espaço de Minkowski é único no entanto, no espaço de Rindler, podemos fazer duas escolhas diferentes igualmente válidas.

Sejam as equações

$$\phi = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*); \quad (4.1)$$

$$\phi = \sum_i (\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^*), \quad (4.2)$$

soluções para 3.16, cada qual com seus operadores obedecendo relações de comutação como os operadores criação e aniquilação:

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = 0 \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \quad (4.3)$$

$$[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (4.4)$$

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (4.5)$$

As definições de vácuo para cada uma das soluções dadas por (4.1) e (4.2) serão, respectivamente,  $\hat{a}_i |0_f\rangle = 0$  e  $\hat{b}_i |0_g\rangle = 0$ . Note que não há nenhum pressuposto que elas sejam equivalentes.

Se definirmos os seguintes coeficientes, chamados de coeficientes de Bogolubov,

$$\alpha_{ij} = (g_i, f_j); \quad \beta_{ij} = -(g_i, f_j^*), \quad (4.6)$$

podemos escrever a seguinte relação entre os coeficientes das duas soluções:

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (4.7)$$

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*). \quad (4.8)$$

Além disso, essa relação leva à expansão dos próprios operadores escada ( $\hat{a}$ ) e ( $\hat{b}$ ):

$$\hat{a}_i = \sum_j \left( \alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \right) \quad (4.9)$$

$$\hat{b}_i = \sum_j \left( \alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij} \hat{a}_j^\dagger \right) \quad (4.10)$$

O valor esperado do operador número  $\hat{n}_{gi}$  no estado de vácuo  $|0_f\rangle$ :

$$\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle = \langle 0_f | b_i^\dagger b_i | 0_f \rangle \quad (4.11)$$

$$= \sum_{jk} \langle 0_f | (\alpha_{ij} \hat{a}_j^\dagger - \beta_{ij} \hat{a}_j) (\alpha_{ik}^* \hat{a}_k - \beta_{ik}^* \hat{a}_k^\dagger) | 0_f \rangle \quad (4.12)$$

$$= \sum_{jk} (-\beta_{ij}) (-\beta_{ik}^*) \langle 0_f | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_f \rangle \quad (4.13)$$

Onde foi utilizada a definição de vácuo para  $f$ :

$$\hat{a}_i | 0_f \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \langle 0_f | \hat{a}_i^\dagger = 0 \quad \text{para todo } i \quad (4.14)$$

Agora, utilizando a relação de comutação para os operadores  $\hat{a}$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j = \delta_{jk}, \quad (4.15)$$

$$\hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j + \delta_{jk}, \quad (4.16)$$

Conseguirmos o valor esperado do operador número das coordenadas  $g$  quando observa o vácuo de  $f$  em termos do coeficiente  $\beta$ .

$$\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle = \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_f | 0_f \rangle \quad (4.17)$$

$$= \sum_j |\beta_{ij}|^2 \quad (4.18)$$

No entanto, no presente trabalho, não precisamos calcular os coeficientes de Bogoliubov diretamente. Isso porque, na seção anterior já obtivemos as relações entre os modos de oscilação de um referencial como uma combinação dos modos de outro referencial (3.59) e (3.60). Só precisamos do fato que essas relações são equivalentes às transformações (4.7) e (4.8), e induzem as desejadas transformações entre os operadores (4.9) e (4.10). Assim, operadores escada

$$\hat{b}_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger}) \quad (4.19)$$

$$\hat{b}_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}}} (e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-k}^{(1)\dagger}), \quad (4.20)$$

fornecerão a relação necessária para o cálculo do valor esperado do operador número de partículas.



## 4.2 A Temperatura de Unruh

O operador número para o observador de Rindler é  $\hat{b}^{(1)\dagger}\hat{b}_k^{(1)}$ . O seu valor esperado no vácuo de Minkowski será então:

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \hat{b}_k^{(1)\dagger} \hat{b}_k^{(1)} | 0_M \rangle &= \langle 0_M | \frac{1}{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}} \left( e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_k^{(1)\dagger} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-k}^{(2)} \right) \left( e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} \right) | 0_M \rangle \\ &= \frac{1}{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}} \left( e^{\pi\omega} a \hat{c}_k^{(1)\dagger} \hat{c}_k^{(1)} + \hat{c}_k^{(1)\dagger} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} + e^{\pi\omega/a} \hat{c}_{-k}^{(2)} \hat{c}_k^{(1)} + \hat{c}_{-k}^{(2)} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como a definição de vácuo

$$\hat{c}_k^{(1)} | 0_M \rangle = \hat{c}_k^{(2)} | 0_M \rangle = 0 \quad (4.22)$$

é compartilhada com a definição para os operadores  $\hat{a}_k$ , visto que os modos  $h_2$  foram escritos unicamente em termos dos modos de frequência positiva (como no observador de Minkowski), o único termo não nulo será:

$$\langle 0_M | \hat{N}_R | 0_M \rangle = \frac{1}{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}} \langle 0 | \hat{c}_{-k}^{(2)} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} | 0_M \rangle \quad (4.23)$$

$$= \frac{e^{-\pi\omega/a}}{e^{\pi\omega/a} - e^{-\pi\omega/a}} \delta(0) \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \delta(0) \quad (4.25)$$

Obtemos então uma distribuição de Bose-Einstein para as partículas do campo de radiação, o que implica que o observador de Rindler está em um banho térmico de temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi},$$

que em unidades naturais retoma a equação (1.2).

## 5 Considerações Finais

A constatação de que diferentes observadores não-inerciais podem discordar não só sobre a presença de partículas, mas também sobre a temperatura sob a qual estão submetidos, acaba desafiando o próprio conceito de "partículas" e de "vácuo". No início do século XIX, o desenvolvimento da mecânica quântica já havia exigido uma reflexão sobre o que consideramos como partículas. O conceito de onda-partícula foi criado deixando claro que a mesma entidade física, as partículas, possuem aspectos diferentes ao propagarem-se ou ao interagirem com a própria matéria. Porém, mesmo que a equação de Schrödinger tenha revolucionado de vez o que entendia-se classicamente por "partículas", a existência das mesmas jamais era posta em dúvida, não importando qual referencial fosse utilizado para descrever os fenômenos. No entanto, da tentativa de estender a mecânica quântica para os próprios campos e unificá-la com a relatividade especial, emerge o efeito Unruh, e acaba deixando evidente que o velho conceito de partículas não deve ser utilizado como pilar da teoria de campos. No que se diz respeito ao espaço de Minkowski nesse contexto, como ressaltado em [12], o aspecto fundamental não é existência de um único vácuo, e sim de que apenas os referenciais inerciais concordarão entre si, enquanto os referenciais não-inerciais, como o de Rindler, detectarão um banho térmico.

Tal constatação não é nada intuitiva, e em um primeiro momento pode-se pensar que o Efeito Unruh acaba violando pilares ainda mais fundamentais da física, como a conservação de energia. É importante ressaltar que isso não ocorre, pois a energia referente à temperatura do banho térmico do observador é fornecida pelo próprio mecanismo de propulsão desse observador que permite a aceleração constante.

Outro aspecto importante é o efeito ser extremamente fraco. Para que o referencial de Rindler detecte 1K de temperatura no seu banho térmico, seria necessário uma aceleração na ordem de  $10^{20}m/s^2$ , o que inviabiliza qualquer tentativa de detecção direta do fenômeno. No entanto, por ser uma consequência axiomática da teoria de campos relativística, o fenômeno não carece de confirmações experimentais extras além daquelas exigidas para fundamentar a própria teoria. Com segurança pode-se então, utilizar o efeito para estudos mais profundos de outros fenômenos. Um exemplo é o cálculo de taxas de transição de partículas aceleradas devido à interação com o banho térmico. Um exemplo dessa aplicação é o estudo feito por [6], no estudo da violação da simetria CP no decaimento de Káons.



# A O Oscilador Harmônico

O oscilador harmônico unidimensional será a base para a quantização do campo que representará a radiação. A interpretação dos operadores utilizados para resolver esse problema será herdada pela estrutura do campo  $\phi$  quando este for escrito como um operador hermitiano.

Para uma partícula sujeita ao potencial

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad (\text{A.1})$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $\omega$  é a sua frequência angular de oscilação. Dessa forma, a equação de Schrödinger independente do tempo em termos dos operadores posição  $x$  e momentum  $p$  será, para um vetor de onda  $|\psi\rangle$ :

$$\left(\frac{1}{2m}p + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (\text{A.2})$$

Para um dado vetor de estado  $|\psi\rangle$  sujeito ao potencial  $\hat{V}$ , a equação de Schrödinger independente do tempo para um estado estacionário é dada então por:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde  $E$  é a energia do sistema no estado estacionário  $|\psi\rangle$ . Podemos encontrar as funções de onda  $|\psi\rangle$  e os respectivos valores  $E$  de energia de cada estado através de uma solução algébrica definindo os operadores  $a$  (aniquilação) e  $a^\dagger$  (criação) em termos dos operadores posição e momentum  $p$  e  $\hat{x}$ :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (\text{A.5})$$

Para prosseguir, é conveniente calcular a relação de comutação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ .

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[ \left( x + \frac{i}{m\omega} p \right) \left( x - \frac{i}{m\omega} p \right) - \left( x - \frac{i}{m\omega} p \right) \left( x + \frac{i}{m\omega} p \right) \right] \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} \left( x^2 - i \frac{xp}{m\omega} + i \frac{px}{m\omega} - x^2 - i \frac{xp}{m\omega} + i \frac{px}{m\omega} - \frac{p^2}{m\omega} \right) \\
&= \frac{1}{2\hbar} (-ixp + ipx - ixp + ipx) \\
&= -\frac{i}{\hbar} [x, p] \\
&= 1
\end{aligned}$$

O operador número é definido por:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a equação (A.2) para escrever o operador  $\hat{N}$  em termos do hamiltoniano:

$$N = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (\text{A.7})$$

Denotamos por  $n$  o autovalor do operador  $N$  aplicado a um vetor de estado  $|n\rangle$ . Esse autovalor representa o nível de energia da partícula. Ou seja:

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (\text{A.8})$$

Dessa forma, podemos escrever:

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \rightarrow E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (\text{A.9})$$

As seguintes relações de comutação são convenientes para a interpretação do operador  $\hat{N}$  e de seus autovalores  $n$ :

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a} \quad (\text{A.10})$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = \hat{a}^\dagger \quad (\text{A.11})$$

Utilizando essas relações de comutação e aplicando os operadores  $\hat{N}\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{N}\hat{a}$  a um estado  $|n\rangle$ :

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger |n\rangle = ([\hat{N}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger \hat{N}) |n\rangle = (\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{N}) |n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{N}\hat{a} |n\rangle = ([\hat{N}, \hat{a}\hat{N}] + \hat{a}\hat{N}) |n\rangle = (-\hat{a} + \hat{a}\hat{N}) |n\rangle = (n-1)\hat{a} |n\rangle \quad (\text{A.13})$$

Se aplicarmos o operador  $\hat{N}\hat{a}$  em um outro estado diferente, digamos,  $|n-1\rangle$ , obteremos, pelo mesmo processo anterior:

$$\hat{N}\hat{a} |n-1\rangle = (n-2)\hat{a} |n-1\rangle \quad (\text{A.14})$$

Vemos então que os vetores de estado  $|n\rangle$  e  $|n-1\rangle$  são os mesmos a menos de uma constante. Então podemos escrever:  $\hat{a} |n\rangle = l |n-1\rangle$ . Agora, podemos aplicar a condição de normalização para determinarmos a constante  $l$ :

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \langle n-1 | |l|^2 |n-1\rangle = |l|^2 \langle n-1 |n-1\rangle = |l|^2 \quad (\text{A.15})$$

Escrevendo a mesma relação para o operador  $\hat{N}$  lembrando que  $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$ :

$$\langle n | \hat{N} |n\rangle = \langle n | n |n\rangle = n \langle n |n\rangle = n \quad (\text{A.16})$$

Juntando (A.12) e (A.13), a conclusão é que  $n = |l|^2$ . Se impormos a condição de que  $l$  é real e positivo obtemos  $l = \sqrt{n}$ . Então:

$$\begin{aligned} \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^2 |n\rangle &= \sqrt{n}\sqrt{n-1} |n-2\rangle \\ \hat{a}^3 |n\rangle &= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2} |n-3\rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para respeitar a condição  $n = \langle n | \hat{N} |n\rangle = \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle \geq 0$ , após repetidas aplicações de  $\hat{a}$  em um vetor de estado  $|n\rangle$ , queremos que a sequência termine em  $n=0$ . Sendo assim, segundo a equação (6), o nível zero de energia será  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . O mesmo processo feito com o operador  $\hat{a}$  pode ser repetido com o operador  $\hat{a}^\dagger$  para obter:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{(n+1)} |n+1\rangle \quad (\text{A.17})$$

Aplicando o operador  $\hat{a}^\dagger$  sucessivamente partindo do estado fundamental  $|0\rangle$  utilizando a equação (A.17), podemos obter qualquer estado  $|n\rangle$ :

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{1}} |0\rangle \\ |2\rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2 \cdot 1}} |1\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{\sqrt{2}} |0\rangle \\ |3\rangle &= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 1}} |1\rangle \\ &\vdots \\ |n\rangle &= \left( \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right) |0\rangle \end{aligned} \tag{A.18}$$

## B O Hamiltoniano do campo de radiação

Calculando as integrais em  $k'$  e  $x$  dos diferentes termos que aparecem após a substituição da expansão do campo dada por (3.23) na expressão do Hamiltoniano em (3.32):

$$\int \int \frac{\hat{a}_k \hat{a}_{k'} e^{i(k'_\mu + k_\mu)x^\mu}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} d^3x d^3k = \int \int \frac{\hat{a}_k \hat{a}_{k'} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} e^{-i(\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x d^3k \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{\hat{a}_k \hat{a}_{-k} e^{2i\omega_k t}}{2\omega_k} \quad (\text{B.2})$$

$$\int \int \frac{\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger e^{i(k'_\mu + k_\mu)x^\mu}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} d^3x d^3k = \int \int \frac{\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x d^3k \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger}{2\omega_k} \quad (\text{B.4})$$

$$\int \int \frac{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} e^{i(k'_\mu + k_\mu)x^\mu}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} d^3x d^3k = \int \int \frac{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3x d^3k \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k}{2\omega_k} \quad (\text{B.6})$$

$$\int \int \frac{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger e^{i(k'_\mu + k_\mu)x^\mu}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} d^3x d^3k = \int \int \frac{\hat{a}_k \hat{a}_{k'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} e^{i(\vec{k}' + \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x d^3k \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger e^{-2i\omega_k t}}{2\omega_k} \quad (\text{B.8})$$





# Referências

- [1] S. W. Hawking, “Black holes and thermodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 13, pp. 191–197, Jan 1976. Citado na página 3.
- [2] P. C. W. Davies, “Scalar production in schwarzschild and rindler metrics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 8, pp. 609–616, apr 1975. Citado na página 3.
- [3] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 870–892, Aug 1976. Citado na página 3.
- [4] C. Gooding, S. Biermann, S. Erne, J. Louko, W. G. Unruh, J. Schmiedmayer, and S. Weinfurtner, “Interferometric unruh detectors for bose-einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 125, p. 213603, Nov 2020. Citado na página 3.
- [5] V. L. d. S. FARINHA, “Efeito unruh: Um estudo do caso bidimensional,” 2021. Citado na página 4.
- [6] V. Silveira, “On cp violation and relativistic non-inertial effects,” Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 31.
- [7] P. M. Alsing and P. W. Milonni, “Simplified derivation of the hawking-unruh temperature for an accelerated observer in vacuum,” *American Journal of Physics*, vol. 72, December 2004. Citado na página 4.
- [8] W. RINDLER, *Relativity, Special, General and Cosmology*. Oxford University Press, 2006. Citado na página 5.
- [9] F. M. e G. Shawn, *Quantum Fields in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.
- [10] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 7 2019. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 17.
- [11] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Frontmatter*, pp. i–iv. Cambridge University Press, 2 ed., 2017. Citado na página 21.
- [12] N. D. e D. P. C. W. Birrel, *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 1986. Citado na página 31.