

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OTIMIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO DO LAMINADO CONSIDERANDO O CRITÉRIO DE
FALHA DE HOFFMAN PARA MATERIAIS COMPÓSITOS VISANDO DIMINUIÇÃO
DE MASSA FINAL

por

Guilherme Vacaro Gallina

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, abril de 2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

Vacaro Gallina, Guilherme

Otimização da orientação do laminado considerando o critério de falha de Hoffman para materiais compósitos visando diminuição de massa final / Guilherme Vacaro Gallina. -- 2022.

28 f.

Orientador: Daniel Milbrath De Leon.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2022.

1. Materiais compósitos. 2. Otimização por programação sequencial linear. 3. Critério de falha de Hoffman. I. Milbrath De Leon, Daniel, orient. II. Título.

Guilherme Vacaro Gallina

OTIMIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO DO LAMINADO CONSIDERANDO O CRITÉRIO DE FALHA DE HOFFMAN PARA MATERIAIS COMPÓSITOS VISANDO A DIMINUIÇÃO DA MASSA FINAL

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE **ENGENHEIRO MECÂNICO** APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Seppi Bresolin
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Daniel Milbrath De Leon

Comissão de Avaliação:

Prof. Daniel Milbrath De Leon

Prof. Rogério José Marczak

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Porto Alegre, abril de 2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, sem o apoio deles nada seria possível. Também agradeço aos meus amigos de vida e amizades que fiz durante esse árduo e intenso período. Por último, mas não menos importante agradeço a todos professores que de alguma forma nos incentivaram a buscar nossos sonhos e nos ensinaram com paciência e dedicação sobre diversos assuntos que o curso de engenharia mecânica aborda, em especial o professor Daniel De Leon que me ajudou bastante na realização deste trabalho de conclusão.

Gallina, G. V. Otimização da orientação do laminado considerando o critério de falha de Hoffman para materiais compósitos visando a diminuição da massa final. 2022. 28 páginas. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar numericamente o comportamento de um laminado composto por lâminas de material compósito visando obter a melhor configuração do sentido das fibras que resistam a determinados esforços pré-estabelecidos sem apresentar falha, com o intuito de obter a diminuição de massa final através de uma configuração que resulte em um menor número de lâminas possível. Uma rotina desenvolvida no software MatLab na versão estudante, utilizando programação linear sequencial para o trabalho de otimização juntamente com os conceitos de diferenças finitas à frente será utilizado para testar diferentes modelos para os mesmos carregamentos, visando respeitar os critérios de falha de Hoffman (função objetivo). A variável de projeto será a orientação das fibras que sejam capazes de respeitar o critério de falha escolhido, com o intuito de obter um laminado em formato de viga que resista aos esforços com o menor número de camadas necessárias, resultando em uma condição ótima para resistir aos carregamentos versus a massa final do laminado. Este trabalho preconiza a avaliação qualitativa de uma viga genérica, que poderá servir para diversos projetos de engenharia com alguns ajustes. A configuração ideal das fibras para os carregamentos utilizados resultou em um laminado com seis lâminas para o menor carregamento e oito lâminas para o maior carregamento.

PALAVRAS-CHAVE: Material compósito, Programação sequencial linear, Critério de falha de Hoffman.

Gallina, G. V. Laminate orientation optimization considering the Hoffman failure criterion for composite materials aiming at reducing the final mass. 2022. 28 pages. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

ABSTRACT

The present paper aims to numerically analyze the behavior of a laminate composite material in order to obtain the best configuration of the direction of the fibers that bears certain pre-established efforts without presenting failure, in order to obtain the ideal configuration to reduce the final mass. A routine developed in MatLaB software student version, using sequential linear programming for the optimization work together with the concepts of finite differences ahead will be used to test different models for the same loads, aiming to respect the Hoffman failure criteria (objective function). The key design variable will be the orientation of the fibers that are able to respect the chosen failure criterion, in order to obtain a laminate in a beam format that resist the efforts with the fewest layers necessary, resulting in an optimal condition to resist the load versus the final mass of the laminate. This paper advocated the qualitative evaluation of a generic laminate, which can be used for several engineering projects with some adjustments. The ideal fiber configuration for the loads used resulted in a laminate with six layers for the lowest loading and eight layers for the highest loading.

KEYWORDS: Composite materials, Sequential linear programming, Hoffman failure criteria.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	OBJETIVOS	1
2.1	Objetivos específicos	1
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
4.1	Materiais compósitos	3
4.1.1	Conceitos para análise de materiais compósitos	3
4.2	Método para realização dos cálculos.....	5
4.3	Definição do critério de falha escolhido	7
4.4	Otimização – conceitos básicos	8
4.5	Formulação do problema e ferramentas matemáticas para programação	9
5	METODOLOGIA	11
5.1	Hipóteses e simplificações	11
5.2	Propriedades do material escolhido	11
6	RESULTADOS.....	11
6.1	Resposta do laminado com 4 lâminas (n=2)	12
6.2	Resposta do laminado com 6 lâminas (n=3)	13
6.3	Resposta do laminado com incremento no carregamento distribuído sobre a viga	14
7	CONCLUSÃO	15
	REFERÊNCIAS	16
	APÊNCICE.....	17

1 INTRODUÇÃO

Materiais compósitos são a combinação de dois ou mais materiais, com objetivo de se obter uma melhora nas características frente a esforços específicos. Essa combinação pode ser para aprimorar a resistência, aumentar a rigidez, melhorar a condutividade térmica, entre outras propriedades. Como é descrito em Jones (1999), também é enfatizado sobre a utilização desses materiais no processo de otimização de projetos, a fim de obter-se resultados ótimos no que diz respeito a resistir à certos esforços com uma massa final de projeto controlada, o que é muito desejado para diversos projetos, como na aviação, automobilismo e outros que demandam um aumento muito grande de eficiência, visando sempre um resultado que seja possível de se implementar com um custo que irá se pagar em prazos não tão longos.

Os compósitos são constituídos, tipicamente, por duas fases: uma contínua, denominada matriz e envolve outra fase, chamada de fase dispersa ou reforço (Callister, Jr., 2008). A fase dispersa pode ser constituída por fibras contínuas ou descontínuas e por partículas, sendo esta fase responsável por suportar a maioria dos esforços a que o compósito está sujeito e apresenta, normalmente, elevada resistência mecânica. A matriz funciona como aglomerante, responsável por unir as fibras umas às outras, mantendo-se na sua posição relativa, conferindo alguma ductilidade ao compósito, assegurando a transferência de carga para o material de reforço e protegendo de danos superficiais (VIRGINIA, 2017).

Com o avanço das pesquisas e testes relacionados a materiais compósitos esse assunto vem sendo cada vez mais difundido no meio acadêmico e no mercado. Em Jones (1999), é citado que compósitos podem ter a mesma resistência a rigidez que os metais, porém chegam a ter menos de 70% da massa dos mesmos.

Deseja-se criar uma rotina em software MatLab versão estudante com a motivação de simular numericamente a capacidade de uma viga constituída por um laminado de material compósito resistir a esforços respeitando o critério de falha escolhido para análise, também será avaliado o poder de uma ferramenta de otimização para obter-se a melhor configuração do laminado no que diz respeito a orientação das fibras de cada lâmina que resistam a esforços pré estabelecidos na estrutura.

2 OBJETIVOS

Será analisado neste trabalho o comportamento mecânico de uma viga de material compósito, no qual deseja-se obter de forma numérica a melhor relação de resistência/peso frente a um carregamento determinado. Será utilizado um critério de falha para materiais compostos para verificar se este laminado suporta os esforços com o número reduzido de lâminas, que possuem espessura fixa pré-determinada.

2.1 Objetivos específicos

Criar uma rotina em software MatLab (versão estudantil) que seja fácil a modificação de parâmetros de entrada para se obter resultados de saída desejados no estudo. Nesse caso, a variável de projeto será o ângulo das fibras de cada par de laminado e o critério para verificar a validade dos resultados será o número de lâminas suficientes para que o conjunto suporte ao carregamento externo definido, obedecendo o critério de falha escolhido.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em projetos de engenharia é necessário estabelecer quais objetivos deseja-se obter com base em um estudo, estando em foco neste presente trabalho a realização de análises em materiais compósitos com a finalidade de se obter configurações otimizadas para as variáveis e função objetivo propostas. De forma geral, existem quatro áreas de desenvolvimento de metodologias de otimização, sendo por pesquisa operacional, metodologias específicas de projeto, otimização topológica e otimização paramétrica, sendo esta última a utilizada para o desenvolvimento da análise específica.

O uso de compósitos em estruturas tem permitido uma significativa redução de massa final, além disso tem contribuído para melhorar as resistências à corrosão e à fadiga de uma infinidade de componentes presentes em aeronaves, plataformas marítimas de petróleo, satélites, submarinos, foguetes, veículos automotores, trens de alta velocidade, implantes ortopédicos, entre outras aplicações (LEVI, PARDINI, 2006).

Segundo Haftka (1992), a otimização está voltada para a obtenção do melhor resultado de uma determinada operação enquanto satisfaz certas restrições. Conforme descrito por, De Leon (2011), a otimização é uma ferramenta poderosa que auxilia na obtenção das melhores respostas possíveis para um dado problema. A aplicação de um problema de otimização pode resultar em uma estrutura que desempenhe a mesma função estrutural de outras estruturas mais usadas normalmente, com a possibilidade de se usar menos material.

Na literatura existem diversas formas de se trabalhar com materiais compósitos e técnicas de otimização. Matematicamente falando, o grande problema de se buscar o mínimo da função objetivo quando o problema está relacionado a materiais compósitos e usando a orientação da fibra do laminado como variável de projeto está na relação não linear do espaço de soluções. Existe uma grande chance de o problema encontrar mínimos locais bastante ruins em comparação com outras configurações possíveis para o laminado.

No trabalho de Stegmann e Lund (2005), para o problema de otimização é proposto uma função discreta para os valores de ângulo de fibra que permite tentar contornar o problema de múltiplos mínimos locais que ocorre quando se utiliza os próprios valores de ângulos de fibra como variáveis de projeto, desta forma utilizando um algoritmo de otimização baseado em gradientes é possível realizar a otimização dos valores de ângulo de fibra de forma parametrizada, por meio de uma técnica de parametrização direta, chamada de otimização discreta de material (DMO, na sigla em inglês).

Sorensen et al (2014) apresentam um método alternativo chamado em inglês de “Discrete Material and Thickness Optimization” (DMTO). Este método permite otimizar diretamente a orientação do material bem como as espessuras de cada lâmina, ele emprega uma parametrização através de funções interpoladas com penalização, sendo demonstrada em problemas de otimização envolvendo a redução de massa sujeito a restrições como fatores de carga de flambagem deslocamentos limitados, entre outros esforços.

Porém, para essas técnicas acima mencionadas, é preciso escolher um conjunto pré-definido de ângulos de orientação de fibras candidato, ou seja, o conjunto de soluções está em um vetor definido a priori pelo projetista, e o resultado acaba sendo o melhor dentro daquele conjunto, e não o melhor entre um range contínuo de soluções possíveis.

Neste trabalho optou-se por usar uma aproximação contínua para a solução, ou seja, a possibilidade de combinações de ângulo de fibras de cada lâmina não está limitada, ela pode ser definida em um espaço contínuo entre 0 e 90 graus. Para contornar o problema de mínimos locais a técnica de iniciar o problema em diversos chutes iniciais foi aplicada, conforme De Leon et al. (2012).

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 Materiais compósitos

De acordo com Jones (1999), materiais compósitos são a combinação de dois materiais ou mais, em uma escala macro mecânica, com o intuito de formar um composto com propriedades distintas dos seus materiais originários. São possíveis de serem classificados em quatro categorias:

- Materiais compósitos fibrosos: Consistem em fibras e uma matriz, por exemplo: concreto armado.
- Materiais compósitos laminados: Consistem em lâminas dispostas em camadas com diferentes materiais, por exemplo: laminado de fibra.
- Materiais compósitos particulados: Consistem em várias partículas envolvidas por uma matriz, exemplo: concreto.
- Outro tipo seria uma combinação dos três tipos anteriores combinados.

No presente trabalho, será utilizado compósitos laminados para as análises, sendo possível a obtenção de diferentes orientações das fibras para que resistam da melhor forma possível perante os carregamentos estabelecidos respeitando o critério de falha escolhido. Na figura 4.1 é possível visualizar de forma esquemática como este laminado será constituído. Através do processo de otimização calculado pelo software Matlab será possível identificar a melhor orientação das fibras para suportar determinados carregamentos pré-estabelecidos para o projeto.

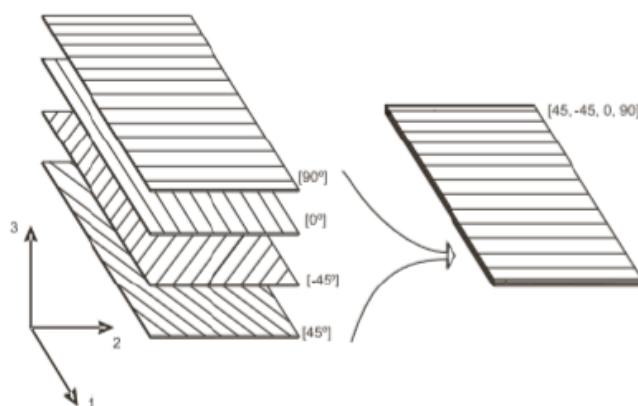


Figura 4.1: Sequência de lâminas de forma esquemática. Fonte: De Leon (2011).

4.1.1 Conceitos para análise de materiais compósitos

Diferente da maioria dos metais, que possuem comportamento isotrópico, os compósitos muitas vezes têm características ortotrópicas ou até mesmo anisotrópicas que acabam tornando seu comportamento um pouco mais complicado de descrever. Nos materiais isotrópicos, quando é aplicado um esforço normal de tração, o mesmo irá comprimir nas direções perpendiculares. Outra característica essencial para essa diferenciação é o fato da relação tensão deformação permanecer a mesma, independente da direção da aplicação. Já nos materiais ortotrópicos, existe uma diferença na resposta dependendo da direção da aplicação do esforço. A relação tensão deformação será diferente quando aplicado em diferentes direções. Já em um material anisotrópico, além da relação tensão deformação serem diferentes quando aplicadas

em orientações diversas, existe a ação cortante ao ser aplicado uma tensão normal. (THIESEN, 2018). Essa diferenciação é evidenciada pela figura 4.2:

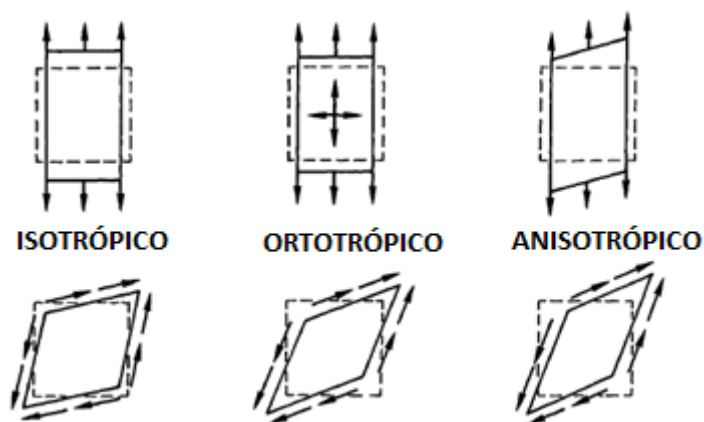


Figura 4.2: Comportamento de um material isotrópico, ortotrópico e anisotrópico. Fonte: Jones (1999).

Para o estudo em questão, cada lâmina é considerada como transversalmente isotrópica como forma de simplificação. É necessário estabelecer um sistema de coordenadas local, ao longo das fibras, para depois descrever como as tensões se distribuem considerando um sistema de coordenadas global fixo. É possível observar essa relação entre sistema local e global pela figura 4.3:

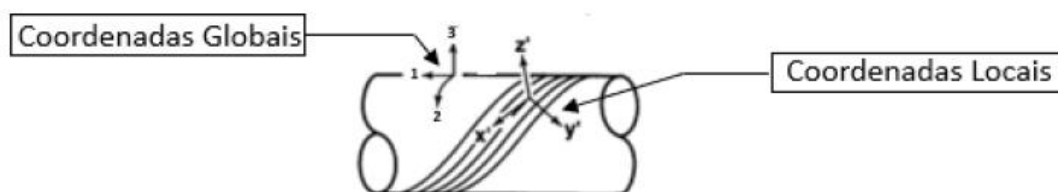


Figura 4.3: Orientação local e global das fibras. Fonte: Adaptada de Jones (1999).

Para realizar as transformações entre coordenadas globais e locais é necessário fazer um ajuste, rotacionando as tensões locais em relação às globais. Para isso é necessário utilizar uma matriz de rotação, demonstrada abaixo pela equação 4.1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A seguir será apresentado como são as relações constitutivas desses materiais, explicado em Jones, 1999. Partindo de uma generalização da lei de Hooke que relaciona as tensões com deformações, equação 4.2.

$$(4.2)$$

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad \text{onde, } i \text{ e } j = 1, 2, 3, \dots, 6$$

onde, σ_i é a componente de tensão em todas as direções do cubo infinitesimal, C_{ij} é a matriz constitutiva e ε_j é a componente de deformação. Esta matriz possui 36 constantes, porém somente algumas delas são independentes. Além disso, ao derivar a energia de deformação específica, como é melhor explicado em Jones, 1999, irá surgir uma simetria, por sua forma quadrática, como podemos ver na equação 4.3.

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (4.3)$$

sendo assim, resultando em 21 variáveis independentes. Estas relações estão descrevendo um material anisotrópico triclinico, ou seja, três eixos oblíquos entre si, porém se por hipótese de simplificação existir dois planos ortogonais, não havendo interação entre as tensões normais e cisalhantes, o material por fim é dito ortotrópico. Dessa forma, o tensor constitutivo possui 9 constantes elásticas, que será apresentada como a matriz de flexibilidade, a qual é a matriz inversa da rigidez, representada abaixo pela equação 4.4. Considerando estado plano de tensões, para uma lâmina unidirecional, pode-se considerar que as tensões se aplicam apenas no plano da lâmina, reduzindo para uma matriz de rigidez três por três, a qual será apresentada a seguir já em termos das suas constantes de engenharia (JONES, 1999).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Onde:

- E_1, E_2 = Módulo de elasticidade, ou módulo de Young nas direções 1 e 2;
- $\nu_{1,2}$ = Coeficiente de Poisson;
- G_{12} = Módulo de cisalhamento;

4.2 Método para realização dos cálculos

Para a realização dos cálculos de laminados de material compósito é utilizada uma teoria específica, chamada de teoria clássica de laminação e se baseia nas hipóteses propostas por Kirchhoff, comentadas a seguir:

- As linhas retas perpendiculares a superfície média, permanecem retas após a deformação;
- As linhas transversais (\overline{AD}) não apresentam deformação na direção z;
- As linhas transversais ao rotacionarem, continuam perpendiculares a linha média;

Essas hipóteses são explicadas com maiores detalhes em Jones (1999) e serão ilustradas pela figura 4.4:

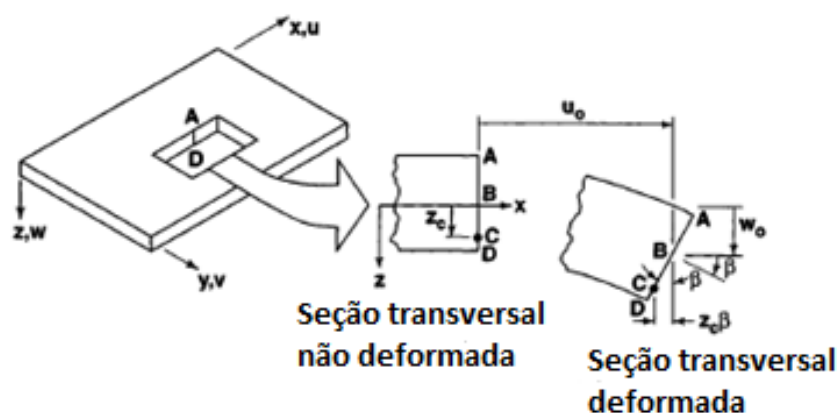


Figura 4.4: Deformação de planos transversais. Fonte: Adaptado de Jones (1999).

Partindo do campo de deslocamento, conforme pode ser visualizado na figura 4.4 acima, pode-se representar as respectivas direções conforme descrito abaixo pela equação 4.5:

$$u_c = u_o - z_c \beta \quad (4.5)$$

Sendo assim, partindo da primeira hipótese de Kirchhoff é possível obter a equação 4.6 abaixo, utilizando conceitos de derivada:

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (4.6)$$

Por fim, resultando as deformações já apresentadas em notação vetorial, conforme equação 4.7, abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_u \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde, ε representa deformação e k representa curvatura. Por questões de simplificações, os termos da matriz \overline{Q}_{ij} estão omitidos, e são melhor explicados em Jones (1999). Como a rigidez de cada lâmina depende da sua orientação, é necessário fazer a multiplicação da deformação por sua rigidez separadamente para conseguir a tensão aplicada sobre ela, como é descrito em Thiesen (2018). A seguir, pode ser visto de forma esquemática este problema, representado pela figura 4.5:

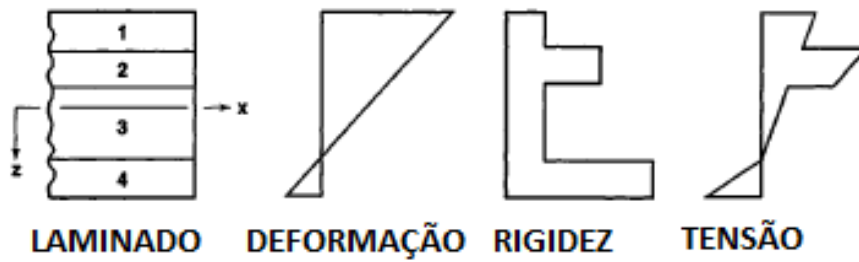


Figura 4.5: Variação hipotética da tensão e deformação sobre uma espessura de laminado.
Fonte: Adaptado de Jones (1999).

Partindo dos conceitos já vistos sobre a mecânica dos materiais compósitos, sabe-se que as forças e momentos por unidade de largura resultantes são a integral da tensão ao longo da espessura em cada lâmina, e é possível concluir que a contribuição da deformação multiplicada pela matriz de rigidez de cada lâmina será a soma das tensões de cada camada do laminado. Essa afirmação se dá pela relação estabelecida, vista na equação 4.7 que determina uma relação entre a matriz de rigidez e os esforços atuantes na estrutura. Contudo, assumindo que a rigidez é constante ao longo de cada camada, é possível estabelecer uma relação direta entre as deformações e esforços atuantes, como é mostrado abaixo pela equação 4.8:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

no qual as matrizes N em (N/m) são os esforços normais por unidade de largura, M em (N/m) esforço fletor por unidade de largura, ε^o deformação e k a curvatura. Já as matrizes A , B e D são definidas pelas equações 4.9, 4.10 e 4.11, abaixo:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (4.9)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (4.10)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4.11)$$

onde, A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são respectivamente a rigidez extensiva, acoplamento entre a rigidez extensiva -fletora e rigidez fletora, os termos z são medidos a partir do centro do laminado até a fibra mais externa de cada lâmina.

4.3 Definição do critério de falha escolhido

Para realizar um estudo de falha assertivo, deve-se buscar alternativas diferentes das usadas para materiais isotrópicos. As teorias clássicas como Von Mises ou Rankine não conseguem descrever o comportamento dos materiais compósitos com uma precisão aceitável, por se tratarem de materiais ortotrópicos. Contudo existem algumas teorias que possuem os conceitos matemáticos mais ajustados para a realização dessas análises, como as teorias de

critério de falha de máxima tensão, Tsai-Hill, Tsai-Wu e critério de falha de Hoffman. As análises de falha serão avaliadas através do critério de falha de Hoffman, o qual pode ser visto como uma extensão do critério de Tsai-Hill ou uma simplificação do critério de Tsai-Wu. Em relação ao critério de Tsai-Hill, é feita a inclusão de termos lineares de diferenças entre resistências de tração e compressão, este critério consegue dar uma resposta adequada e confiável na obtenção dos dados, conforme demonstrado na comparação dos dados obtidos analiticamente e por ensaios. A seguir será apresentado a formulação matemática do critério de Hoffman, retirado de Jones (1999) e descrito pela equação 4.12, abaixo:

$$-\frac{\sigma_1^2}{X_c X_t} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_c X_t} - \frac{\sigma_2^2}{Y_c Y_t} + \frac{(X_c + X_t)\sigma_1}{X_c X_t} + \frac{(Y_c + Y_t)\sigma_2}{Y_c Y_t} + \frac{\tau_{12}^2}{S_{12}^2} < 1 \quad (4.12)$$

onde, σ_1 é a tensão na direção principal da fibra na lâmina, σ_2 é a tensão na direção transversal a fibra e τ_{12} é a tensão cisalhante na direção principal da fibra na lâmina. Os termos X_c, X_t, Y_c e Y_t são respectivamente as tensões de ruptura na direção X e Y do sistema de coordenadas global e os subíndices c e t indicam compressão e tração. Por fim o termo S_{12} representa a resistência ao cisalhamento da lâmina. Abaixo é possível verificar uma comparação através da figura 4.6 dos resultados obtidos através de cálculos analíticos e ensaios realizados.

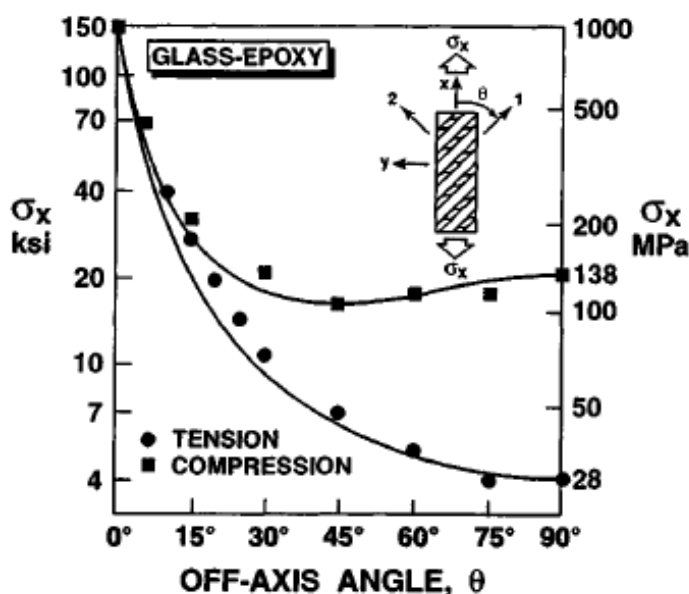


Figura 4.6: Critério de falha de Hoffman comparando ensaios com cálculos analíticos. Fonte: Jones (1999).

É possível verificar uma convergência entre os resultados obtidos através de ensaios e os obtidos através de cálculos analíticos, que são estudos utilizados para avaliar a falha em lâminas de materiais compósitos.

4.4 Otimização – conceitos básicos

Antes da formulação do problema de otimização é importante desenvolver os conceitos relativos ao processo, tais como função objetivo, variáveis de projeto e restrições. A transcrição de um problema de otimização em uma formulação matemática é um passo crítico. Se a

formulação do problema em um projeto é imprópria, a sua solução será inaceitável (ARORA, 2004).

As variáveis do projeto são parâmetros que podem ser alterados na busca pelo resultado ótimo, elas podem ser divididas em variáveis discretas e contínuas, sendo as primeiras aquelas que assumem valores dentro de um conjunto ou um universo finito de possibilidades e as contínuas podem assumir qualquer valor dentro do universo de possibilidades. Por exemplo, se é desejado encontrar a melhor orientação das fibras de um material composto, como é o objetivo proposto do trabalho, a fim de maximizar sua rigidez dado um carregamento específico, pode-se utilizar ambos os tipos de variáveis de projeto. Se o desejo for descobrir a melhor orientação dentre todas possíveis, seria necessário trabalhar com um conjunto de variáveis contínuas do tipo $\{\theta \in X \mid \theta = (-90^\circ < \theta < 90^\circ)\}$ (DE LEON, 2011).

4.5 Formulação do problema e ferramentas matemáticas para programação

Conforme Arora (2004), existem diversos estudos que descrevem sobre a formulação de problemas de otimização. A maneira mais comum de descrever a função objetivo frente as restrições, será apresentada abaixo pela expressão 4.13:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{sujeito a } g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_g \\ & a_k^{inf} \leq x_k \leq a_k^{sup} \quad k = 1, \dots, n_a \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde, $f(x)$ é a função objetivo, $g_i(x)$ são as n_g restrições impostas ao problema, x_k as variáveis de projeto. No problema apresentado, a_k^{inf} e a_k^{sup} são limites laterais que a variável de projeto pode assumir.

Como havia sido mencionado no início do capítulo, será utilizado programação linear sequencial para resolução das equações, como a expressão 4.13 objetivo do projeto. Esse método consiste em criar uma aproximação linear para a função objetivo e restrições a partir da expansão por séries de Taylor truncada no primeiro termo, derivada primeira, conforme pode ser melhor visualizado na figura 4.7.

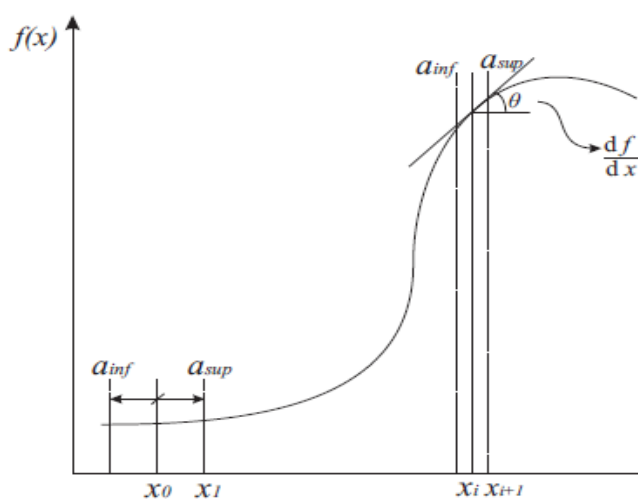


Figura 4.7: Exemplo de expansão por série de Taylor. Fonte: De Leon (2011).

Para a utilização dessa técnica de aproximação é necessário determinar limites móveis para as variáveis de projeto durante o processo, como mostrado na equação abaixo 4.14 e é necessário que esses limites não sejam muito grandes e nem muito pequenos, por questões de erro e capacidade de processamento pelo computador para rodar o algoritmo (DE LEON, 2011).

$$\begin{aligned} a_{inf} &= x_i - (1 + \delta_{inf})l_{i-1} \text{ se } a \leq 0 \\ a_{sup} &= x_i - (1 + \delta_{sup})l_{i-1} \text{ se } a > 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde, x_i é o valor a ser testado, δ o valor de determina a variação os limites móveis, l_i o comprimento do limite, i o número de interações, a_{inf} e a_{sup} os resultados dos limites inferior e superior. Sendo que a depende da interação dos limites anteriores conforme equação 4.15 abaixo:

$$a = (x_{i-1} - x_{i-2})(x_{i-2} - x_{i-3}) \quad (4.15)$$

no qual, x_{i-1} é o valor da iteração anterior, da mesma maneira x_{i-2} é o valor de suas duas anteriores e finalmente x_{i-3} o valor de três anteriores. Baseado em um histórico visto em De Leon (2011) um limite inferior no valor de 40% e superior no valor de 20% funcionou bem.

Para realizar a sequência de programação foram definidos anteriormente alguns conceitos necessários para otimização do projeto. Como a função objetivo é o critério de falha, determinado pela expressão 4.12 e as variáveis de projeto são os ângulos das lâminas se faz necessário a determinação da sensibilidade do critério de falha em relação ao ângulo θ , porém para determinar analiticamente os cálculos, como a derivada primeira, necessária para expansão de Taylor da linearização será utilizado uma aproximação da derivada, um conceito chamado método das diferenças finitas à frente, no qual se calcula a função partindo de um valor inicial e se repete o cálculo aplicando uma pequena variação do valor final para conseguir essa diferença finita, conforme demonstrado na equação 4.16 abaixo:

$$f'_k(\theta_k) = \frac{f_k(\theta_k + \Delta) - f_k(\theta_k)}{\Delta} \quad (4.16)$$

onde, k representa o número de equações conforme o número de θ , sendo esse ângulo da lâmina e um delta tão pequeno quanto o necessário para aproximar essa função de uma derivada representada por f'_k . Esse valor é fornecido ao código usando o comando LINPROG do MatbLab, retornando um novo valor de θ que irá gerar novamente uma aproximação da derivada, até obter-se convergência. A lógica do código será apresentada no apêndice do trabalho e foi retirada e modificada de Thiesen (2018). O problema de otimização pode ser escrito conforme expressão 4.17:

$$\begin{aligned} & \min_{\theta} CH \\ \text{su}j a. & 0^{\circ inf}_k \leq \theta_k \leq 90^{\circ sup}_k \quad k = 1, \dots, n_a \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde, CH é o critério de Hoffman, sendo que este deseja-se que seja menor que 1, demonstrando que não irá ocorrer falha e o θ é o ângulo de orientação da fibra para a k -ésima camada.

5 METODOLOGIA

O problema principal a ser resolvido consiste em obter resultados de saída, da função objetivo de estudo, de maneira que a estrutura resista a determinados esforços respeitando o critério de falha escolhido. Para isso desenvolveu-se uma programação em software MatLab capaz de otimizar os resultados no que diz respeito a melhor orientação das fibras das lâminas que constituem o laminado, obtendo assim o melhor resultado para cada caso, para resolver esse problema matemático foram usadas ferramentas como programação sequencial linear utilizando a função Linprog do Matlab e outros conceitos matemáticos que foram melhor definidos no capítulo anterior.

5.1 Hipóteses e simplificações

Para realização do cálculo analítico a teoria clássica dos laminados será utilizada e para isso devemos considerar algumas hipóteses e simplificações, como será descrito abaixo:

- Cada lâmina é considerada homogênea, apresentando a mesma propriedade em toda sua extensão;
- Cada lâmina tem comportamento ortotrópico;
- As lâminas são consideradas finas, podendo ser aplicado as hipóteses de Kirchoff-Love, onde γ_{xz} e γ_{yz} são nulas.
- Cada lâmina é carregada apenas em seu plano e apresentam deslocamento contínuo entre elas.
- Hipótese dos pequenos deslocamentos;
- A matriz é responsável por transferir os esforços de uma fibra para outra;
- As fibras são responsáveis por resistir aos esforços;
- Não existe delaminação ou espaçamento entre as lâminas;

5.2 Propriedades do material escolhido

A análise será feita somente de forma numérica, utilizando uma adaptação do código proposto por Thiesen (2018). É importante verificar que uma vez que a lâmina n foi gerada a lâmina $n+1$ será disposta com a mesma angulação, porém com o sinal inverso, esta escolha pode não ser tão usual, porém é proposta por uma simplicidade matemática. Além disso as orientações das lâminas podem variar de 0° até 90° . O material utilizado para a simulação será um composto de fibra de carbono (Toray T700-12K-50C) impregnados em resina Epóxi (UF396) que é o material testado e usado para fabricação de alguns elementos para o Aerodesign da UFRGS, suas propriedades serão mostradas na tabela 5.1:

Tabela 5.1: Propriedades de ensaio do material escolhido para simulação

Propriedades	$E1$ (GPa)	$E2$ (GPa)	$G12$ (GPa)	$\nu12$	$\nu21$
	129,79	9,11	3,16	0,31	0,021
Propriedades	σ_{1t} (MPa)	σ_{2t} (MPa)	σ_{1c} (MPa)	σ_{2c} (MPa)	τ_{12} (MPa)
	1409,9	42,5	520	103,3	74,6

6 RESULTADOS

Para o presente trabalho, foi proposto uma análise qualitativa sobre a formatação do laminado capaz de resistir aos esforços nele aplicados com o objetivo de obter-se a melhor configuração no sentido das fibras que respeitasse o critério de falha escolhido com a menor massa possível mensurado pela quantidade de lâminas exigidas para resistir aos esforços.

Partindo de um laminado com formato de viga, como será mostrado de forma esquemática na figura 6.1, a seguir, será calculado analiticamente os esforços resultantes para um carregamento distribuído de 10[N/m] , sendo que as análises das reações foram observadas no ponto crítico, na raiz do problema, o qual se configura como o ponto engastado, sendo assim obtidas a flexão e tensões no ponto mais solicitado para assim analisar a falha. Utilizando valores arbitrários para as dimensões de comprimento e largura, 5[m] e $0,05\text{[m]}$ respectivamente como forma de simplificar a análise, obteve-se resultados para as forças normais, cisalhantes e os momentos atuantes no projeto naquele ponto. Partindo desses resultados escolhendo um chute inicial para configuração da angulação das fibras, pode-se rodar o código no MatLab e obter as respostas de saída para configurações diferentes de laminados, visando respeitar o critério de falha com o menor número de lâminas possíveis.

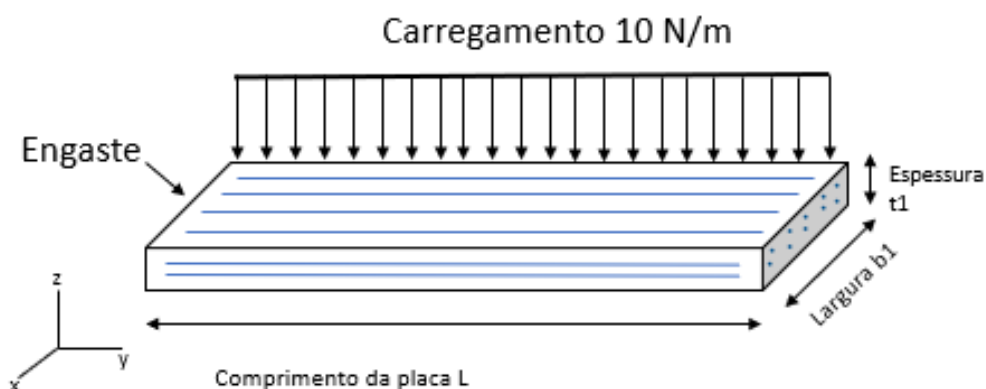


Figura 6.1: Desenho esquemático – Viga com carregamento distribuído. Fonte: Próprio Autor.

6.1 Resposta do laminado com 4 lâminas ($n=2$)

Considerando os esforços aplicados na estrutura e partindo de um chute inicial com angulação das fibras a $[15^\circ, -15^\circ, 45^\circ, -45^\circ]$, foi possível obter resultados de saída para a função objetivo, porém como pode ser visto na figura 6.2 as condições de falha não foram respeitadas (função objetivo > 1), para este laminado composto por 4 lâminas, as orientações das fibras foram otimizadas de forma que resultaram em valores $[13,8^\circ, -13,8^\circ, 34,7^\circ, -34,7^\circ]$ sendo que o código está programado para fazer um passe com a angulação positiva e na sua volta ele inverte o sinal e mantém a mesma angulação e assim sucessivamente de acordo com o número de passes desejado.

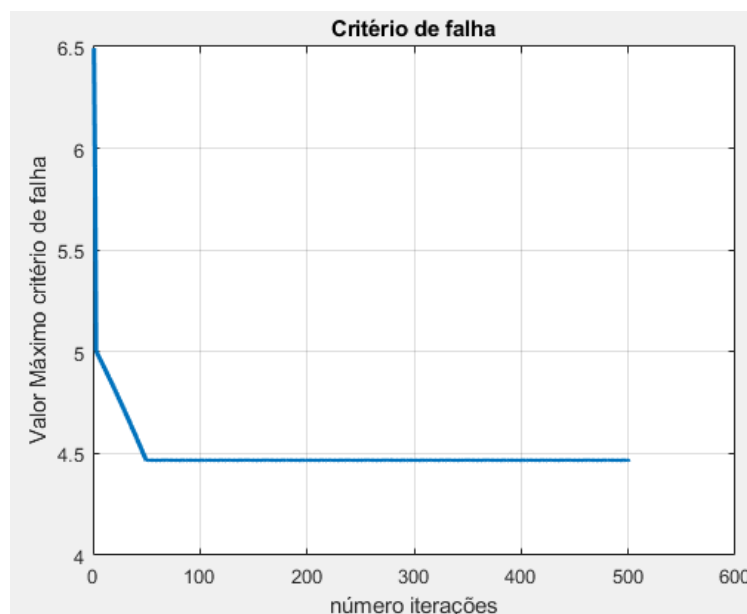


Figura 6.2: Laminado com 4 lâminas $[13,8^\circ, -13,8^\circ, 34,7^\circ, -34,7^\circ]$. Fonte: Autor.

6.2 Resposta do laminado com 6 lâminas (n=3)

Da mesma forma que foi testado anteriormente, deseja-se aumentar o número de lâminas para testar a resistência deste laminado, para uma configuração com 6 lâminas, partindo de um chute inicial com duas lâminas a mais com angulações de $[15^\circ, -15^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 60^\circ, -60^\circ]$, é possível ver uma melhora significativa, chegando em uma configuração que respeita as condições para não falhar (função objetivo < 1), conforme pode ser visto na figura 6.3:

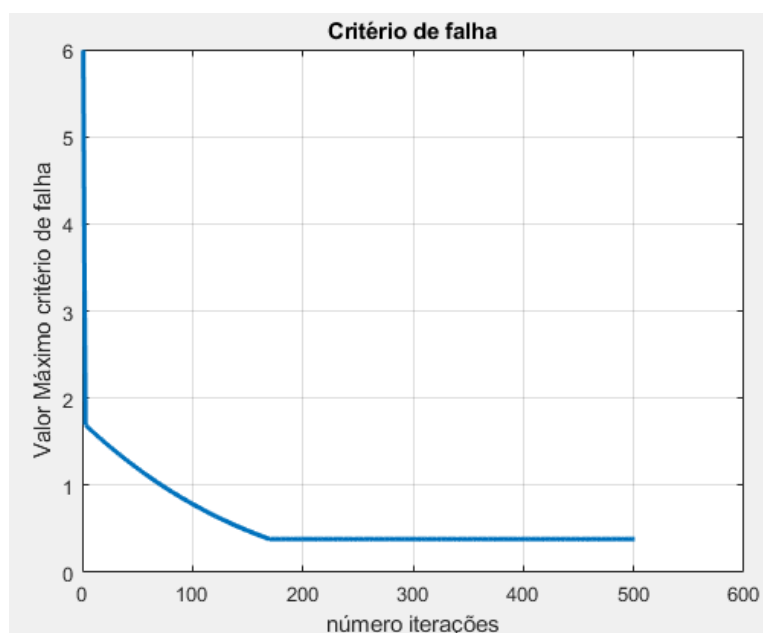


Figura 6.3: Laminado com 6 lâminas $[6,1^\circ, -6,1^\circ, 30,4^\circ, -30,4^\circ, 42,5^\circ, -42,5^\circ]$. Fonte: Autor.

6.3 Resposta do laminado com incremento no carregamento distribuído sobre a viga

Desejando-se avaliar o comportamento do laminado com um carregamento distribuído maior, de 25[N/m], com o intuito de se obter diferentes carregamentos para a análise, e todas as outras condições mantidas iguais, foi proposto um novo teste para a configuração do laminado com 6 lâminas ($n=3$), com a intenção de observar se o mesmo seria capaz de resistir a mais esforços com a mesma quantidade de lâminas. Na figura 6.4 é possível identificar que a função objetivo não foi respeitada, indicando falha para o laminado com 6 lâminas.

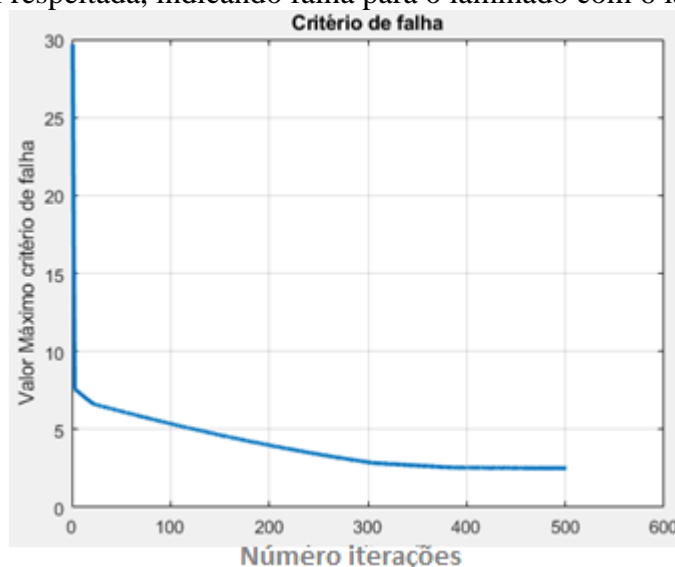


Figura 6.4: Resposta do laminado com 6 lâminas para o novo carregamento, apresentando falha. Fonte: Autor.

Partindo da mesma configuração de esforços, restrições e condições iniciais, foi proposto um incremento de duas lâminas, resultando em um laminado com 8 lâminas ($n=4$). Este laminado foi otimizado e a orientação das fibras das lâminas resultou em angulações de $[4,1^\circ, -4,1^\circ, 48,5^\circ, -48,5^\circ, 46,5^\circ, -46,5^\circ, 16,3^\circ, -16,3^\circ]$ que foram responsáveis por respeitar a função objetivo do projeto, conforme figura 6.5, não apresentando falha.

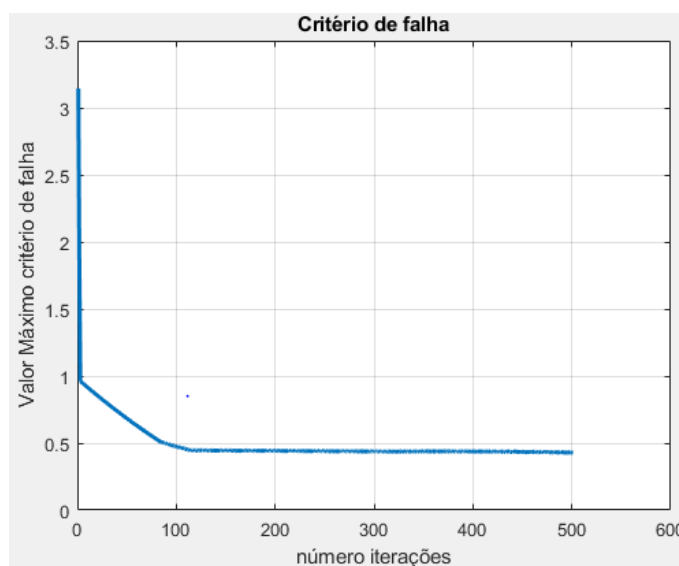


Figura 6.5: Resposta do laminado com 8 lâminas $[4,1^\circ, -4,1^\circ, 48,5^\circ, -48,5^\circ, 46,5^\circ, -46,5^\circ, 16,3^\circ, -16,3^\circ]$. Fonte: Autor.

7 CONCLUSÃO

A avaliação de estruturas fabricadas por materiais compósitos é de suma importância, principalmente no momento atual onde deseja-se obter uma relação ótima de custo/benefício. O presente trabalho propôs a avaliação de forma numérica de uma viga fabricada de material compósito a qual espera-se que resista aos esforços nela aplicados de forma que sua massa final, ou seja, número de lâminas seja a menor possível. Partindo de uma fundamentação teórica priorizando a otimização dessa avaliação, pode-se através de ferramentas matemáticas implementar um código em software MatLab que apresentasse um resultado ótimo no que diz respeito a capacidade da placa resistir aos esforços. As rotinas e adaptações do código foram cruciais para uma análise coerente com o que se espera, sendo possível analisar eventuais distorções e corrigi-las.

A proposta inicial foi testar, para os mesmos esforços, um laminado com ($n=2$), ou seja, quatro camadas de lâminas com orientações do ângulo das fibras de forma otimizada para respeitar o critério de falha de Hoffman adotado, porém para este carregamento determinado a placa não resistiu aos esforços e não cumpriu com os requisitos mínimos de falha. Desejando-se obter um resultado positivo para o projeto, foi incrementando mais duas lâminas, agora com um ($n=3$), resultando em uma placa de material compósito com seis lâminas e novamente o código foi executado e por fim respeitou o critério de falha escolhido, no qual a função objetivo do projeto foi menor que um. Com o intuito de trazer mais conteúdo para o projeto, foi testado mais uma vez este laminado com 6 lâminas, porém com um incremento no carregamento em cima da placa plana, mostrando a incapacidade de o mesmo resistir a falha, sendo assim foi necessário a avaliação de um laminado com ($n=4$), resultando em um laminado com oito lâminas, o qual foi capaz de resistir aos esforços e não falhar, respeitando a função objetivo < 1 . Como o intuito deste trabalho era avaliar um método para otimização de um laminado que respeitasse um critério de falha escolhido com a menor massa possível, obteve-se um resultado de 6 lâminas para o caso com o carregamento de $10[N/m]$ e um laminado com 8 lâminas para um carregamento de $25[N/m]$, como as espessuras das lâminas foram mantidas iguais para todos os casos a sua massa foi representada qualitativamente pela quantidade de lâminas presentes em cada laminado.

O estudo sobre esse tipo de materiais e principalmente sobre otimização, que se mostrou uma ferramenta muito importante neste projeto, a qual busca o ótimo, foram capazes de demonstrar ganhos relevantes na redução de massa final, testes com diferentes tipos de angulações iniciais foram testados e também demonstraram relevância no processo de otimização, demonstrando resultados coerentes para as diferentes análises.

REFERÊNCIAS

- ARORA, J. S. **“Introduction to Optimun Design”**. Elsevier Academic Press, 2ª edition, 2004.
- ÁVILA, S. L. **“Otimização paramétrica com computação evolutiva”**. Publicação da IFSC, 1ª ed., 2020.
- CALLISTER, JR. **“Ciência e engenharia dos materiais”**. Livros técnicos e científicos, 7ª edição, 2008.
- DE LEON, D. M. **“Otimização estrutural de placas compostas laminadas sujeitas a efeitos aeroelásticos”**. Dissertação de mestrado Engenharia Mecânica UFRGS, 2011.
- DE LEON, D. M., DE SOUZA, C. E., FONSECA, J. S. O., DA SILVA, R. G. A. **“Aeroelastic tailoring using fiber orientation and topology optimization”**. Structural and Multidisciplinary optimization, 2012.
- HAFKA, R.T., GURDAL, Z. **“Elements of structural optimization”**. 3ª ed. Springer Netherlands, 1992.
- JONES, R. M. **“Mechanics of composite materials”**. Edward Brothers, Ann Arbor. 2ª ed., 1999.
- JUNIOR, J. H. S. **“Engineering Properties of Carbon/Epoxy filament Wound Unidirecional Composites”**. ECCM16, 2014.
- OLIVEIRA CAMPOS, V. B. **“Análise de critérios de falha em lâmina reforçada com tecido híbrido de fibra de vidro e carbono”**. Dissertação de pós graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2017.
- PARDINI, L.C.; LEVY, F.N. **“Compósitos estruturais – Ciência e Tecnologia”**. 1ª ed. São Paulo, 2006.
- SORENSEN, S. N.; SORENSEN, R.; LUND, E. **“A method for discrete material and thickness optimization of laminated composite structures”**. Structural and multidisciplinary optimization, 2014.
- STEGMANN, J.; LUND, E. **“Discrete material optimization of general composite shell structure”**. International journal for numerical methods in engineering, 2005.
- THIESEN, G. F. **“Uma metodologia para a otimização da orientação das fibras de material laminado de uma longarina considerando critérios de falha”**. Monografia de conclusão de curso Engenharia Mecânica UFRGS, 2018.

APÊNDICE

```

t1=5*10^-4; %Espessura metros
b1=0.05; % base da seção transversal da placa chute inicial metros
E1= 129.79*10^9; %Módulo de Young [GPa] X
E2=9.11*10^9; %Módulo de Young[GPa] Y
G12= 3.16*10^9; %Módulo de Young [GPa] XY
v12= 0.31; %Poisson 1-2
v21= 0.021; %Poison 2-1
Xt= 1409.9*10^6; %Tensão de tração [MPa] X
Xc= -520.0*10^6; %Tensão de Compressão [MPa] X
Yt= 42.5*10^6; %Tensão de tração [MPa] Y
Yc= -103.3*10^6; %Tensão de Compressão [MPa] Y
Talxy= 74.6*10^6; %Tensão de Cisalhante [MPa] Y

n = 3; %número de passes da máquina (mínimo necessário para as condições)

Nx=0; %normais X
Ny=50; %normais Y
T=0; %Cisalhante XY
Nxy=0;%cortante
Mx=-125; %Fletor X
My=0; %Fletor Y
Mxy=0; %Torção XY

N=[Nx ; Ny ; Nxy]; % por unidade de largura [m]
N2=N/(b1);
N1=-2*(N2+[0;0;T]);
M=[Mx ; My ; Mxy]; % por unidade de largura [m]
M1=-2*(M/(b1));

Q11=(E1/(1-v12*v21));
Q22=(E2/(1-v12*v21));
Q21=((v12*E2)/(1-v12*v21));
Q12=Q21;
Q66=G12;

Q=[Q11 Q12 0;Q21 Q22 0;0 0 Q66];

z0=t1*n % z são medidos a partir do centro do laminado

delta = 0.0001; %diferencas finitas
dHofdtheta = zeros(n,1);

notm = 0; %contador da otimização

LGt = 0*pi/180; %restricoes laterais (0° - 90°)
UGt = 90*pi/180;

tetat1(n,1)=0;
tetat2(n,1)=0;
limitet(n,1)=0;

tetat=[15;45;60;30;30;30]*pi/180; %chute inicial
erro = 1;

```



```

while notm <=500 %erro > 0.01 &&
    notm = notm + 1; %contador

    %calcula deformacoes, tensoes e criterio de falha
    [CHII,CHSS,sigmas,sigmai] = hofman(tl, n, N1, M1, Q, tetat, Q11, Q12,
    Q66, Q22,...
        z0, Xt, Xc, Yt, Yc, Talxy);

    [CHSSmax,b] = max(abs(CHSS(:))); %aqui, busca o maior valor(pior ponto)

    [row,col] = ind2sub(size(CHSS),b); %mapeia a posicao do pior ponto na
matriz

    for m=1:n %loop para calcular derivadas por dif. finitas

        tetat(m) = tetat(m) + delta;

        [dCHII,dCHSS,sigmas,sigmai] = hofman(tl, n, N1, M1, Q, tetat, Q11,
    Q12, Q66, Q22,...
            z0, Xt, Xc, Yt, Yc, Talxy);
        dHofdtheta(m) = (CHSSmax - dCHSS(row,col))/delta;
        tetat(m) = tetat(m) - delta;

    end % fim do loop dif. finitas

    %rotina de otimizacao por prog. linear sequencial
    [x] = otim_orienta(notm, n, tetat, tetat1, tetat2, LGt, UGt,
    dHofdtheta, limitet);

    tetat2 = tetat1; %organiza o historico de resultados
    tetat1 = tetat;
    tetat = x;

    resp(notm) = CHSSmax; %guarda o valor da otimizacao (vetor dinamico)

    %calcula criterio de parada
    if notm > 1;
        erro = abs(resp(notm)-resp(notm-1))/abs(resp(notm));
    end
    sprintf('\n\n ITERACAO %d \n\n',notm)
end %fim do loop de otimizacao

sprintf('\n\n CONVERGENCIA NA ITERACAO: %d \n\n',notm)

sigmas
resp(notm)
tetat*180/pi

p = plot(resp);
set(p,'LineWidth',2)
title('Critério de falha')
xlabel('número iterações')
ylabel('Valor Máximo critério de falha')
grid on

function [tetat] = otim_orienta(notm, n, vtheta, vtheta1, vtheta2, LGt,
    UGt,...

```

```

    dHofdtheta, limitet)

fator1 = 0.01;
limt = pi/50;
LB = zeros(n,1);
UB = zeros(n,1);

f = dHofdtheta;

for i = 1:n
    if notm>2, %essa parte depende que notm seja maior que 2.
        dif1 = vtheta(i,1)-vtheta1(i,1);
        dif2 = vtheta1(i,1)-vtheta2(i,1);
        testel = dif1*dif2;

        if testel > 0,
            limitet(i) = 1.2*limitet(i);%se nao inverteu, pode aumentar os
limitethetas
            end

        if testel <= 0,
            limitet(i) = 0.6*limitet(i); %se inverteu, aperta limitethetas
            end

        if limitet(i) < fator1*limt,
            limitet(i) = fator1*limt;
            end

        if limitet(i) > 2*limt,
            limitet(i) = 2*limt;
            end

    else
        limitet(i) = 0.1*vtheta(i);
        end

    if limitet(i) < fator1*limt;
        limitet(i) = fator1*limt;
        end

    if limitet(i) > 2*limt,
        limitet(i) = 2*limt;
        end

    LB(i) = vtheta(i)-limitet(i); % Define o limite inferior
    UB(i) = vtheta(i)+limitet(i); % Define o limite superior

    if LB(i) >= UB(i),%confere se o limite inferior não passou o superior
        LB(i) = UB(i)-2*limitet(i);
        end

    if UB(i) <= LB(i),
        UB(i) = LB(i)+2*limitet(i);
        end

end
end

```

```

[x] = linprog(-f, [], [], [], [], LB, UB, []);

%restrições laterais - faz a checagem
for i=1:n,
    if x(i) < LGt
        x(i) = LGt;
    end
    if x(i) > UGt
        x(i) = UGt;
    end
end

tetat = x;

end %end function otimiza

%define função objetivo - critério de falha de hoffman
function [CHII, CHSS, sigmas, sigmai] = hofman(tl, n, N1, M1, Q, tetat,
Q11, Q12, Q66, Q22, ...
    z0, Xt, Xc, Yt, Yc, Talxy)

Qtot=zeros(3,3);
T=zeros(3,3);
zks=zeros(n,2);
zki=zeros(n,2);
Atot=zeros(3,3);
Dtot=zeros(3,3);
CHSS=zeros(n,2);
CHII=zeros(n,2);
CHS1=-1000;
CHS2=-1000;
DCHS=zeros(n,1);
tetaaux=0;
g = 0;

for k=1:n
    for j=1:2
        if j==1
            teta=tetat(k,1);
        else
            teta=-tetat(k,1);
        end
        tetai(k,j)=teta;
        c=cos(tetai(k,j));
        s=sin(tetai(k,j));

        QT11=(Q11*(c^4))+2*(Q12+2*Q66)*(s^2)*(c^2)+Q22*s^4;
        QT22=(Q11*(s^4))+2*(Q12+2*Q66)*(s^2)*(c^2)+Q22*c^4;
        QT12=(Q11+Q22-4*Q66)*(s^2)*(c^2)+Q12*(s^4+c^4);
        QT21=QT12;
        QT16=(Q11-Q12-2*Q66)*s*(c^3)+(Q12-Q22-2*Q66)*(s^3)*c;
        QT61=QT16;
        QT26=(Q11-Q12-2*Q66)*(s^3)*c+(Q12-Q22-2*Q66)*s*(c^3);
        QT62=QT26;
        QT66=(Q11+Q22-2*Q12-2*Q66)*(s^2)*(c^2)+Q66*((s^4)+(c^4));
        QT=[QT11 QT12 QT16;QT21 QT22 QT26;QT61 QT62 QT66];
        T=[c^2 s^2 -2*s*c; s^2 c^2 2*s*c; s*c -s*c c^2-s^2];
    end
end

```

```

zks(k,j)=(z0+(g)*t1);
zki(k,j)=(z0+(g-1)*t1);
AT=2*QT*(zks(k,j)-zki(k,j));
DT=(2/3)*QT*(zks(k,j)^3-zki(k,j)^3);
Atot=Atot+AT;
Dtot=Dtot+DT;
g=g+1;
end
end

eo=linsolve(Atot,N1);
kapa=linsolve(Dtot,M1);

for k=1:n
  for j=1:2
    eks=e0+zks(k,j)*kapa;
    eki=e0+zki(k,j)*kapa;
    c=cos(tetai(k,j));
    s=sin(tetai(k,j));
    T=[c^2 s^2 -2*s*c; s^2 c^2 2*s*c; s*c -s*c c^2-s^2];

    es=linsolve(T,eks);
    ei=linsolve(T,eki);
    sigmas=Q*es;
    sigmai=Q*ei;
    CHS=(-
(sigmass(1,1)^2)/(Xt*Xc))+(((sigmass(1,1)*sigmass(2,1)))/(Xt*Xc))+...
((-sigmass(2,1)^2)/(Yt*Yc))+((Xt+Xc)*sigmass(1,1)/(Xt*Xc))+...
(((Yt+Yc)*sigmass(2,1))/(Yt*Yc))+((sigmass(3,1)^2)/(Talxy^2));
    CHI=(-
(sigmai(1,1)^2)/(Xt*Xc))+(((sigmai(1,1)*sigmai(2,1)))/(Xt*Xc))+...
((-sigmai(2,1)^2)/(Yt*Yc))+((Xt+Xc)*sigmai(1,1)/(Xt*Xc))+...
(((Yt+Yc)*sigmai(2,1))/(Yt*Yc))+((sigmai(3,1)^2)/(Talxy^2));

    CHSS(k,j)=CHS;
    CHII(k,j)=CHI;

  end
end
end

```