UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Sula Cristina Teixeira Nunes

FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM CÁLCULO MENTAL: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental

Porto Alegre
2018

SULA CRISTINA TEIXEIRA NUNES

FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM CÁLCULO MENTAL: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Vellinho Corso

Linha de Pesquisa: Aprendizagem e Ensino

Porto Alegre
2018

CIP - Catalogação na Publicação

Nunes, Sula Cristina Teixeira
FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM CÁLCULO MENTAL: Perfil de estudantes de 2° e 4° anos do Ensino Fundamental / Sula Cristina Teixeira Nunes. -- 2018.
113 f.
Orientadora: Luciana Vellinho Corso.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2018.

1. Flexibilidade cognitiva. 2. Cálculo mental. 3. Raciocínio aritmético. 4. Conhecimento numérico. 5. Ensino Fundamental. I. Corso, Luciana Vellinho, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SULA CRISTINA TEIXEIRA NUNES

FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM CÁLCULO MENTAL: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Profa. Dra. Luciana Vellinho Corso – Orientadora

Profa. Dra. Beatriz Vargas Dorneles – UFRGS

Profa. Dra. Jutta Cornelia Reuwsaat Justo - ULBRA

Profa. Dra. Rosane da Conceição Vargas – Externo

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Profa. Dra. Luciana Vellinho Corso, por acreditar e apoiar a realização desta desafiadora pesquisa e, especialmente, por me ensinar a conversar com a literatura.

Às minhas colegas de linha de pesquisa, Évelin Assis, Alessandra Thornton, Camila Görgen, Lisiane Franquilin e Camila Nogues, pelas contribuições e descontrações.

Às escolas, supervisoras, professoras e estudantes pela disponibilidade em participar dos estudos desta dissertação.

Ao estatístico Lucas Schmidt, pela paciência e pelos ensinamentos durante as análises de dados.

À minha família, pelo apoio e incentivo. Em especial, à minha irmã Thaís, pelo interesse e presença constante.

Ao meu filho Matheus, minha maior motivação de sempre seguir em frente.

Ao Felipe, por acreditar em mim, mesmo quando eu não acreditei.

Às profissionais, Zoé Tonidandel de Miranda, Iara Rodrigues, Sílvia Cabral e Daisy Mendonça cujo suporte garantiu a finalização desta pesquisa.

Às amigas e amigos que compreenderam minha ausência e me incentivaram nessa caminhada, em especial àqueles que trabalham e acreditam na educação.

Ao Campus Restinga do Instituto Federal do Rio Grande do Sul pelo período de afastamento concedido para a realização do mestrado.

RESUMO

A flexibilidade no raciocínio matemático tem sido apontada como um importante objetivo da educação contemporânea para atingir níveis mais elevados de desempenho matemático. No Brasil, não foram encontradas pesquisas sobre essa habilidade de domínio especifico da matemática. A presente dissertação tem como objetivo geral verificar a flexibilidade cognitiva em cálculo mental em estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a compreender como as crianças brasileiras apresentam esta habilidade. Para atender este objetivo foram realizados dois estudos com 84 alunos de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental de quatro escolas públicas de Porto Alegre, sendo 42 alunos do 2º ano e 42 alunos do 4º ano. Os dados foram obtidos a partir de entrevistas que envolviam a classificação, resolução e justificativa do raciocínio utilizado na resolução de 12 cálculos mentais aritméticos; do teste de desempenho aritmético; e do questionário socioeconômico.
O primeiro estudo verificou se os perfis de flexibilidade cognitiva relatados na literatura recente se aplicam à amostra de estudantes brasileiros deste estudo, bem como, associou-os às variáveis desempenho aritmético e nível socioeconômico e, por fim, avaliou a adequação do instrumento avaliativo de flexibilidade à realidade brasileira. O segundo estudo apresentou a diferença de perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental entre crianças de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise dos elementos cognitivos, a saber características dos problemas e procedimentos de solução, utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos.
Os resultados do primeiro estudo evidenciaram os três perfis de raciocínio, flexível, misto e rígido, ou seja, a flexibilidade trata-se de uma habilidade de caráter evolutivo; as variáveis desempenho aritmético e nível socioeconômico não explicaram os diferentes perfis; e a tarefa avaliativa demonstrou valor diagnóstico na avaliação dos graus de flexibilidade, mas a dificuldade dos cálculos desta tarefa implicaram uma limitação deste estudo. Os achados do segundo estudo revelaram que as diferenças na proporção de uso de conhecimento numérico diferenciaram os perfis de flexibilidade entre os anos escolares, assim como demostrou que os estudantes do 4º ano apresentaram maior grau de flexibilidade do que os alunos do 2º ano. Estes resultados sugerem que a flexibilidade cognitiva demonstrada pelos estudantes está relacionada ao senso numérico informal da amostra. Em síntese, os achados destes estudos destacam o potencial da flexibilidade em cálculo mental para a aprendizagem matemática.

Palavras-Chave: Flexibilidade cognitiva. Cálculo Mental. Ensino Fundamental

ABSTRACT

Flexibility in mathematical reasoning has been pointed out as an important goal of contemporary education in order to achieve higher levels of mathematical performance. In Brazil, no research was found on this ability of specific domain of mathematics. The present dissertation aims to verify cognitive flexibility in mental calculation in students from the early grades of Elementary School, in order to understand how Brazilian children are able to present this ability. To meet this objective, two studies were developed with 84 2^{nd} and 4^{th} grade students from 4 public schools in Porto Alegre, 42 students were from the 2^{th} grade and 42 from the 4^{th} grade. Data were obtained from interviews that involved classifying, solving and justifying the reasoning process used in the resolution of 12 arithmetic mental calculations, an arithmetic performance test and a socioeconomic questionnaire.

The first study verified whether the profiles of cognitive flexibility reported in recent literature could be applied to the sample of Brazilian students of this study, as well as relating them to the following variables: arithmetic performance and socioeconomic levels. It assessed if the evaluation instrument on flexibility was adequate to the Brazilian reality. The second study presented the different profiles of cognitive flexibility in mental calculations between 2^{nd} and 4^{th} grades of Elementary School, based on the analysis of cognitive elements, namely problem characteristics and solution procedures used during the resolution of arithmetic calculations.

The results of the first study showed the three profiles of reasoning: flexible, mixed and rigid, which is to say that flexibility is an ability of evolutionary quality. The arithmetic performance and socioeconomic levels variables did not explain the different profiles, and the evaluation task demonstrated diagnostic value in the assessment of flexibility degrees. It is worth noting that the difficult level of some of the calculations presented on the flexibility instrument implied a limitation to this study. Findings from the second study revealed that the differences in the proportion of the use of numerical knowledge differentiated the flexibility profiles between grades, as well as showed that students in the 4^{th} grade had a higher degree of flexibility than students in the 2^{nd} grade. These results suggest that the cognitive flexibility demonstrated by the students is related to the informal number sense of the sample. In summary, the findings of these studies highlight the potential of flexibility in mental calculations for mathematical learning.

Keywords: Cognitive flexibility. Mental Calculation. Elementary School.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esta dissertação aborda a flexibilidade cognitiva em cálculo mental de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental, de modo a compreender a forma como esta habilidade se manifesta em crianças brasileiras.

O interesse da pesquisadora pela área da matemática teve origem na graduação em Psicopedagogia e ampliou-se durante a prática profissional ao verificar a ocorrência das dificuldades matemáticas de estudantes nas diferentes faixas etárias. Deste modo, o enfoque no campo da flexibilidade cognitiva veio ao encontro do interesse pessoal e da necessidade de se fazer frente aos obstáculos enfrentados no processo de ensino e aprendizagem da matemática em todos os níveis de escolaridade, da educação básica à superior. Neste sentido, há evidências na literatura de que a flexibilidade é uma habilidade aspirada tanto para crianças (VERSCHAFFEL et al., 2009) quanto para adultos (TORBEYNS et al., 2009; 2011) e valiosa para os cálculos do conjunto dos números naturais (SERRAZINA; RODRIGUES, 2014) ao conjunto dos números reais (STAR; NEWTON, 2009; STAR et al., 2015). Desta forma, compreender como essa habilidade está presente no contexto brasileiro pode ser um recurso importante a ser utilizado pelos profissionais da educação na prevenção de dificuldades e na promoção de aprendizagens efetivas. No Brasil, de acordo com o levantamento na literatura, não foram realizadas pesquisas neste domínio específico, o que confere a este estudo um caráter inédito.

Esta pesquisa faz parte de um projeto mais abrangente intitulado “Dificuldades de aprendizagem na matemática e na leitura: atraso no desenvolvimento ou déficit cognitivo?” (Plataforma Brasil e Comitê de Ética em Pesquisa da UFRGS, sob o número 4404721 5.3.0000.5347, com duração de 2014 a 2019), coordenado pela professora Luciana Vellinho Corso, que possui como objetivo geral identificar os processos cognitivos deficitários que estão subjacentes ao baixo desempenho em aritmética e leitura, trazendo avanços para a prática educacional e psicopedagógica nestas áreas.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no primeiro capitulo será introduzido um panorama geral da pesquisa sobre flexibilidade; no segundo capitulo é apresentado o estudo intitulado “Cálculo mental flexível : perfis de raciocínio em estudantes brasileiros ” que analisa os padrões gerais de raciocínio para identificar os perfis de flexibilidade cognitiva; o terceiro capítulo trata do estudo “Flexibilidade cognitiva em estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental: um indicador de senso numérico?” e versa sobre as características que diferenciam os perfis de flexibilidade entre os dois anos escolares . Por fim, a dissertação é concluída no quarto capítulo, no qual são apresentadas as considerações gerais dos estudos.

REFERÊNCIAS

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M. A tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo. **GD1-Design de tarefas**, p. 109-120, 2014.

STAR, J. R.; NEWTON, K. The nature and development of experts’ strategy flexibility for solving equations. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 557-567, 2009.

STAR, J. R.; NEWTON, K.; POLLACK, C.; KOKKA, K.; RITTLE-JOHNSON, B.; DURKIN, K. Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. **Contemporary Educational Psychology**, v. 41, p. 198-208, 2015.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; GHESQUIÈRE, P.; VERSCHAFFEL, L. Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 1, p. 1-17, 2009.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; PETERS, G.; GHESQUIÈRE, P.; VERSCHAFFEL, L. Use of indirect addition in adults’ mental subtraction in the number domain up to 1,000. **British Journal of Psychology**, v. 102, n. 3, p. 585-597, 2011.

VERSCHAFFEL, L.; LUWEL, K.; TORBEYNS, J.; VAN DOOREN, W. Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. **European Journal of Psychology of Education**, v. 24, n. 3, p. 335-359, 2009.

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática é um desafio permanente para educadores e estudantes ao redor do mundo. Os altos índices de retenção e evasão escolar, a formalização precoce de conceitos matemáticos ou o treino de habilidades e a mecanização de procedimentos, os déficits na formação docente, livros e materiais didáticos de baixa qualidade metodológica são exemplos de questões verificadas nas diferentes salas de aula e referendadas pela literatura nacional e internacional (CORSO; ASSIS, 2018; VASCONCELOS, 2000; BRASIL, 1997).

Estas dificuldades foram propulsoras de uma série de mudanças na educação matemática, em caráter mundial, a partir da década de 80, com as reformas educacionais que pretendiam superar estes obstáculos e promover padrões mais elevados de aprendizagem através de uma abordagem de ensino mais contextualizada com as demandas da vida cotidiana dos estudantes (BRASIL, 1997). Algumas destas iniciativas ocorreram nos Estados Unidos através das recomendações do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), da implementação do *National Numeracy Strategy* no Reino Unido (ANGHILERI, 2005; THRELFALL,1988) e da publicação de documentos norteadores nacionais em Portugal (VASCONCELOS, 2000), na Alemanha (SELTER, 2001) e na região dos Flandres (VERSCHAFFEL et al., 2007; VERSCHAFFEL et al., 2009). Seguindo a perspectiva destas reformas, o Brasil estabeleceu os princípios que regem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a área de Matemática no ensino fundamental (BRASIL, 1997). Estes documentos destacam a resolução de problemas e o cálculo mental como promotores da construção de conceitos matemáticos, com especial ênfase em desenvolver habilidades flexíveis que adaptem o raciocínio matemático às diferentes demandas da vida cotidiana. Deste modo, a flexibilidade do raciocínio matemático passou a ser um objetivo fundamental da educação matemática contemporânea no mundo todo. (BAROODY; DOWKER, 2003; VERSCHAFFEL et al., 2007, 2009).

Embora haja pouca evidência empírica na pesquisa sobre flexibilidade (NUNES et al., 2016; VERSCHAFFEL et al., 2007, 2009), há indicações de que esta é uma habilidade altamente aspirada, para crianças e adultos, em diversos domínios da matemática, incluindo as crianças mais jovens e com baixo desempenho acadêmico

(BAROODY; DOWKER, 2003; BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015; VERSCHAFFEL et al., 2007, 2009).

A maior concentração de pesquisas está relacionada à aritmética nos anos iniciais do ensino fundamental, envolvendo a adição e subtração de múltiplos dígitos (HARTNETT, 2007; HEINZE; MARSCHICK; LIPOWSKY, 2009; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015; 2017; SELTER, 2009; SERRAZINA; FERREIRA, 2016; TORBEYNS et al., 2009). No entanto, a habilidade flexível dos estudantes das séries finais do ensino fundamental também foi objeto de estudo relacionando-a com os números racionais (REZAT, 2011) e com a resolução de equações (STAR et al., 2015; STAR; NEWTON, 2009; XU et al, 2017).

A flexibilidade aparece na literatura relacionada especificamente ao cálculo mental (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HARNETT, 2007; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017; THRELFALL, 2002), à resolução de problemas(STAR et al., 2015; STAR; NEWTON, 2009; XU et al., 2017), também surge associada ao constructo de senso numérico (BROCARDO; SERRAZINA; KRAEMER, 2003; HARTNETT, 2007, RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015; REZAT, 2011; REZAT; EJERSBO, 2017; SERRAZINA; RODRIGUES, 2016; THRELFALL, 2002), ainda que não esteja clara a natureza desta relação.

Essa diversidade de pesquisas apresenta poucos pontos de convergência teórica e prática, no entanto, não há dúvidas quanto à necessidade de romper as práticas rotineiras da educação e promover a flexibilidade como meio de alcançar níveis mais satisfatórios de aprendizagem matemática. Assim, os diferentes estudos apresentados sobre esse tema trazem contribuições promissoras para o cenário educacional.

1.1 FLEXIBILIDADE: DUAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Subjacente às pesquisas, estão múltiplas perspectivas conceituais e operacionais a respeito de flexibilidade (STAR; NEWTON, 2009), que refletem em diferentes interesses e objetivos e, por consequência, influenciam os métodos de pesquisa e interpretação de dados (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017). Existem duas perspectivas teóricas gerais, a primeira é da Psicologia Cognitiva, na qual o cálculo flexível está relacionado a possuir um repertório de estratégias e a escolher e aplicar a estratégia adequada (SIEGLER, LEMAIRE, 1997, STAR, 2005, TORBEYNS et al., 2009; VERSCHAFFEL et al., 2009). A segunda é da Educação Matemática, que enfatiza a construção de procedimentos pessoais durante o processo de solução, de acordo com o conhecimento do indivíduo e o que ele percebe do problema (SERRAZINA; RODRIGUES 2014, 2016; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017; THRELFALL, 2002, 2009).

Apesar de ser possível diferenciar estas duas linhas teóricas de pesquisa, não significa que sejam opostas ou excludentes, nem que haja consenso dentro de cada uma delas. Esta distinção é válida apenas para fins de desdobramento do conceito de flexibilidade, ainda controverso e com necessidade de considerar as diferentes variáveis subjacentes à habilidade, documentadas na literatura, para fortalecer a compreensão e definição deste constructo.

1.1.1 Psicologia Cognitiva

Nesta perspectiva teórica, a flexibilidade está associada aos procedimentos de solução aprendidos formalmente ou construídos informalmente. Grande parte dos estudos dedica-se a verificar qual é a estratégia mais flexível para determinado tipo de cálculo, pautados na escolha do procedimento mais adequado para a resolução da situação problema (TORBEYNS et al., 2009; VERSCHAFFEL et al., 2007; 2009). Em outras pesquisas o valor do conhecimento de diferentes estratégias está relacionado à compreensão numérica conceitual subjacente a cada procedimento (STAR, 2005). Também há estudos que evidenciam a capacidade de utilizar uma estratégia conhecida de forma criativa e flexível ou de inventar os próprios procedimentos de solução (HATANO, 1982; 1988). Estratégia[1], nesta linha de pesquisa, é a forma geral de conhecimento matemático usado durante a resolução de cálculos, como, por

[1] Os termos estratégias e procedimentos são, frequentemente, utilizados na literatura como sinônimos. Porém poucos autores deixam essa escolha conceitual clara em suas pesquisas, tal como o fazem Blöte, Klein, Beishuizen (2000)

exemplo, contagem, aplicação de um método aprendido, exploração de relações numéricas conhecidas (SERRAZINA; RODRIGUES, 2014; THRELFALL, 2009). Enquanto o procedimento é a execução das etapas de um cálculo (FERREIRA, SERRAZINA, 2011). Por exemplo, o procedimento de compensação para resolver 86 - 25 (85 - 25 + 1 = 60 + 1 = 61) ou de encontrar a diferença para solucionar 31 - 29 (29+1+1=31, então 31-29=2), são métodos pertencentes às estratégias de subtração direta ou indireta (FERREIRA, SERRAZINA, 2011; TORBEYNS et al., 2009).

Siegler propôs um importante modelo teórico e metodológico que contribuiu para o estudo da flexibilidade, introduzindo a perspectiva da escolha e mudança de estratégias Este modelo distingue quatro parâmetros de competências estratégicas: (1) repertório de estratégias, definido como os diferentes tipos de estratégias que os indivíduos usam para resolver problemas aritméticos; (2) distribuição da estratégia, referindo-se à frequência com que cada uma dessas estratégias é aplicada; (3) eficiência estratégica, definida como a precisão e velocidade de execução da estratégia; e (4) seleção de estratégias, referindo-se à flexibilidade na escolha de estratégias (LEMAIRE; SIEGLER, 1995). Cada um destes princípios é diretamente influenciado pela velocidade e pela precisão, de modo que: quanto mais uma estratégia é utilizada, maior será sua velocidade; caso seja exata, se tornará uma estratégia eficiente; caso contrário será descartada. Uma estratégia eficiente fica à disposição no repertório do indivíduo, pronta para ser aplicada na situação mais adequada, enquanto o descarte em conjunto com o aumento da fluência, permite a liberação de recursos atencionais em busca de atalhos e do desenvolvimento de estratégias alternativas (LEMAIRE; SIEGLER, 1995; SHRAGER; SIEGLER, 1998). Desta forma, a flexibilidade estratégica, com base em competências individuais, é definida por Lemaire e Siegler (1995) como a seleção da estratégia que leva o indivíduo rapidamente à resposta exata de um problema.

O conceito de flexibilidade proposto por Lemaire e Siegler (1995) trouxe grandes influências para o campo de pesquisa de tal habilidade, pois introduziu uma perspectiva amplamente adotada por outros pesquisadores (LUWEL; LEMAIRE; VERSCHAFFEL, 2005; TORBEYNS; VERSCHAFFEL; GHESQUIÈRE, 2006; TORBEYNS et al., 2009; TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2016) que produziram importantes estudos para a área. Seguindo essa perspectiva teórica, Verschaffel et al. (2009) realizaram uma importante revisão na literatura que originou o termo flexibilidade/ adaptabilidade e na qual verificaram a existência de dois processos intrínsecos subjacentes a tal constructo. O primeiro é a "flexibilidade" propriamente dita que se refere à alternância "suave" entre as diferentes estratégias disponíveis, enquanto a "adaptabilidade" coloca ênfase na seleção da estratégia mais apropriada para cada tipo de problema. Como são ações inseparáveis, os autores (VERSCHAFFEL et al., 2009) consideram incompleto os termos que façam referência a apenas um dos processos e, portanto, utilizam-os em conjunto. Para os autores, estes processos estão presentes em todas as definições de flexibilidade encontradas na literatura, mesmo que de forma subentendida. Desta forma, considerando os aspectos levantados, os pesquisadores propõem a seguinte definição do que significa flexível/adaptável nas escolhas de estratégias:

> (...) a seleção consciente e inconsciente da estratégia de solução mais apropriada para um determinado item matemático ou problema, para um determinado indivíduo, em um determinado contexto sociocultural (VERSCHAFFEL et al., 2009, p.343, tradução nossa)

Embora o termo "seleção de estratégia" possa sugerir que o processo envolve escolha deliberada e percepção consciente dos fatores que influenciam essa escolha, os autores enfatizam que muitas vezes não há a decisão consciente e, portanto, a seleção da estratégia também pode ocorrer inconscientemente, sem a consideração de estratégias alternativas (VERSCHAFFEL et al., 2009).

O conceito proposto por Verschaffel et al. (2009) é bem aceito na literatura, sendo empregado em sua literalidade (HEINZE; MARSCHICK; LIPOWSKY, 2009) ou adaptado (SELTER, 2009) por diversos autores. Selter (2009), por exemplo, acredita que o elemento criatividade deve ser incluído nesta dinâmica proposta por Verschaffel et al. (2009), visto que, segundo o autor, o termo criatividade esclarece que existe a invenção de novas estratégias ou a modificação das existentes no processo de solução de um problema. Cabe destacar que Verschaffel et al. (2009) não abandonam o modelo de Siegler (LEMAIRE; SIEGLER, 1995; SIEGLER; LEMAIRE, 1997) como perspectiva teórica mais ampla, no entanto, os pesquisadores que assumiram o conceito de flexibilidade/adaptabilidade nem sempre fazem referência ao modelo maior.

Jon Star (STAR, 2005; STAR; NEWTON, 2009; RITTLE-JOHNSON; STAR; DURKIN, 2012; STAR et al., 2015; XU et al., 2017) é um pesquisador que apresenta importantes contribuições para a teoria da flexibilidade, com especial destaque para os estudos sobre álgebra com estudantes das séries finais do Ensino Fundamental. Star (2005, p. 409, tradução nossa) considera "a flexibilidade como um indicador de conhecimento procedimental profundo”*.* O autor contrapõe a ideia de que o conhecimento conceitual tem mais valor do que o conhecimento procedimental para a competência matemática, difundida nos últimos anos no campo da educação matemática (STAR, 2005), e aposta em uma interconexão rica entre estes dois conhecimentos (STAR et al., 2015). Portanto, o conceito geral de flexibilidade definido por Star (STAR; NEWTON, 2009; XU et al., 2017) corresponde ao conhecimento de múltiplas estratégias para resolver um problema e a capacidade de implementar uma estratégia elegante em uma determinada situação de resolução de problemas. Uma estratégia elegante é operacionalizada como a que possui o menor número de etapas e que apresenta os cálculos mais simplificados (STAR; NEWTON, 2009)

Hatano (1988), em seu estudo sobre as bases motivacionais e contextuais do conhecimento matemático, distingue os estudantes considerados “especialistas adaptativos” - que adquirem conhecimento conceitual rico, dos especialistas de rotina –que são os estudantes que não adquiriram tal conhecimento e não são capazes de "inventar" novos procedimentos, baseando-se em tentativa e erro. Portanto, para este autor:

> flexibilidade e adaptabilidade parecem ser possíveis apenas quando há algum conhecimento conceitual correspondente, para dar sentido a cada etapa da habilidade, e fornecer critérios para seleção entre possibilidades alternativas para cada etapa dentro dos procedimentos (HATANO, 1982, p.15, tradução nossa).

Para Hatano (1988), o especialista de rotina é exemplificado pelos estudantes japoneses que são treinados no uso de ábaco, em que o processo de aceleração da velocidade de cálculo resulta em um sacrifício de compreensão e de construção do conhecimento conceitual, de modo que poucos estudantes conseguem transpor um cálculo do ábaco para o algoritmo de lápis e papel com precisão. Ao passo que, como exemplos de especialistas adaptativos, as crianças brasileiras, usavam com flexibilidade a matemática das ruas e os procedimentos de matemática oral para calcular valores e quantidades dos produtos comercializados, apoiando-se em conhecimento conceitual (HATANO, 1988) e demonstrando compreensão do sistema decimal (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1987).

Assim, de acordo com a psicologia cognitiva, a flexibilidade no cálculo é descrita, em termos gerais, como possuir um repertório de métodos de solução, escolher e aplicar a estratégia mais adequada ao resolver um cálculo (NUNES; DORNELES; LIN; RATHGEB-SCHNIERER, 2016). O conceito de “estratégia apropriada” é um dos indicadores que diferenciam a perspectiva teórica dos pesquisadores que se ocupam do estudo da flexibilidade: número de etapas de solução (STAR; NEWTON, 2009, XU et al., 2017), aspectos do contexto (HATANO,1988), características do problema (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN ,2001), velocidade e precisão na obtenção de uma solução (SIEGLER; LEMAIRE, 1997; SHRAGER; SIEGLER, 1998; TORBEYNS; VERSCHAFFEL; GHESQUIÈRE, 2006; TORBEYNS et al., 2009; VERSCHAFFEL et al., 2009; TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2016). Na linha teórica da Educação Matemática, por sua vez, os elementos cognitivos envolvidos no processo de solução de cálculos mentais (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017; THRELFALL, 2002, 2009) subjazem o conceito de flexibilidade.

1.1.2 Educação Matemática

A flexibilidade está relacionada à construção de caminhos de solução, a partir da interação entre o reconhecimento das características numéricas e o conhecimento prévio do indivíduo, adequados ao contexto da situação problema (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015; THRELFALL, 2002, 2009). Esta linha de pesquisa enfatiza o trabalho com os números e seus padrões e relações que constituam uma base conceitual forte para a construção de procedimentos particulares diante de cálculos novos ou familiares (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015; RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015; SERRAZINA; RODRIGUES, 2014, 2016; THRELFALL, 2002, 2009). O foco da pesquisa não está nas estratégias de cálculo, mas no raciocínio envolvido na resolução dos mesmos (SERRAZINA; RODRIGUES, 2014). Nesta perspectiva, a promoção da flexibilidade cognitiva alcança objetivos de longo prazo, pois as aprendizagens vão alicerçando uma base conceitual que apoiará outras aprendizagens mais complexas (THRELFALL, 2002).

Referência na perspectiva da Educação Matemática, o professor John Threlfall (1998, 2002, 2009), interessado em como ocorre a flexibilidade da escolha estratégica, questionou os princípios do modelo dominante, mencionado anteriormente, e introduziu uma nova forma de pensar essa habilidade. A primeira questão levantada por Threlfall (1998) se refere ao aspecto estratégico subentendido na perspectiva de escolher a estratégia a partir de um repertório. O sentido semântico da palavra estratégia se refere a um planejamento ou antecipação de uma ação ou decisão. Portanto, para escolher uma estratégia a criança precisaria implementar um plano para avaliar as alternativas para, então, decidir qual será adotada de acordo com a adequação ao cálculo. Para Threlfall (1998) não é isto que ocorre, uma vez que a criança ou adulto, ao se envolver com um cálculo, não está procurando um método, mas sim, uma solução. Desta forma, os sujeitos não trabalham com os números de forma analítica, mas ativamente, recuando, revendo as opções, combinando, comparando, usando partes dos números ou do que estão próximos, progredindo até chegar à resposta. Sendo assim, a busca pela solução de um cálculo, ao contrário do modelo de escolha de estratégia, “(...)parece ser muito mais exploratória, uma questão de sentir o seu caminho e olhar para os números e tentar isso e aquilo até que algo clique e seja feito (...)”(THRELFALL, 1998, p.75, tradução nossa)

A partir desta reflexão, Threlfall (2002) se ocupa em demonstrar que possuir uma variedade de estratégias não é condição suficiente para ser flexível em cálculo mental. Ensinar todas as estratégias possíveis para as crianças parece ser uma tarefa inviável para o autor, uma vez que os sistemas de catalogação de estratégias disponíveis na literatura (até o momento) dispunham de um conjunto muito restrito de estratégias. Logo, há o risco de que a abordagem de cálculo que seja mais eficiente para um cálculo específico não esteja disponível para uso, porque não foi ensinada (THRELFALL, 1998, 2002). Em segundo lugar, ensinar a estratégia adequada leva a outro possível efeito negativo na flexibilidade, conforme Blöte, Klein e Beishuizen. (2000) concluem, a maior familiaridade com um método, a partir da ênfase no ensino, pode fazer com que essa abordagem seja o método inevitável de escolha ou a opção "padrão" para todas as situações de cálculo.

A partir destes questionamentos iniciais, Threlfall (2002) propõe uma nova operacionalização da flexibilidade em cálculo mental, como alternativa ao modelo de escolha das estratégias. O processo cognitivo envolvido no cálculo mental, relevante para a flexibilidade, é chamado de “*zeroing-in*” (THRELFALL, 2009) e não é inteiramente consciente e racional.

> Quando se depara com um novo problema, a criança ou adulto que segue diferentes caminhos de solução, dependendo dos números, não o faz pensando sobre quais são as alternativas e tentando decidir qual delas fazer. Em vez disso, ele ou ela pensa nos números do problema, percebendo suas características e em que números eles estão próximos, e considerando as

> possibilidades de particioná-los ou arredondá-los. (THRELFALL, 2002, p.41, tradução nossa).

Nesta perspectiva, o foco do pensamento flexível não é a estratégia em si, mas o raciocínio envolvido no cálculo. Desta forma, a atenção está voltada para o desenvolvimento conceitual que promova um raciocínio flexivelmente adaptado, tanto às tarefas familiares, como a novas tarefas (SERRAZINA, RODRIGUES, 2014). Como “a ‘estratégia’ (no sentido holístico de todo o caminho da solução) não é decidida, ela emerge” (THRELFALL, 2002, p.42, tradução nossa), o cálculo mental flexível é uma reação individual e pessoal com o conhecimento como resultado de uma “(...) interação entre perceber e conhecer, cada ‘método’ de solução é, em certo sentido, exclusivo desse caso e é inventado no contexto do cálculo particular (...)”(THRELFALL, 2002, p.42, tradução nossa).

A flexibilidade, portanto, não é ensinada, mas surgirá consequentemente através da ênfase em considerar as possibilidades dos números (THRELFALL, 2002, 2009). Threlfall (2009) reconhece que apenas conhecer as características notáveis dos números não garante o raciocínio flexível, mas acredita que a combinação destes com oportunidades adequadas, encorajamento e prática, levará a melhorias no tipo de flexibilidade que é mais valorizada para a aprendizagem da matemática.

A perspectiva introduzida por Threlfall (2002, 2009) traz importantes considerações educacionais que atraíram o olhar de muitos pesquisadores para a sua teoria (FERREIRA; SERRAZINA, 2011; SERRAZINA; RODRIGUES, 2014, 2016; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017), assim como a de alguns críticos (VERSCHAFFEL et al., 2009). Igualmente interessadas na potencialidade do conhecimento numérico de base, Serrazina e Rodrigues (2016) estudam raciocínio quantitativo e o cálculo flexível a partir da perspectiva do senso numérico[2], ou seja, o conhecimento numérico integrado a uma rede de ideias, princípios e processos matemáticos.

As pesquisas destas autoras (FERREIRA; SERRAZINA, 2011; SERRAZINA; RODRIGUES, 2014, 2016) também dão destaque às influências dos contextos sociais e sócio-matemáticos envolvidos na sala de aula, em especial os ambientes que

---

[2]Senso numérico reflete a capacidade de usar os números como meio de comunicação e interpretação de informações. Referindo-se à capacidade de usar flexivelmente a compreensão sobre os números e as operações para realizar julgamentos matemáticos e desenvolver meios de solução de cálculos (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

incentivam a comunicação, exploração, discussão, pensamento e raciocínio. Para essas autoras, tomando as ideias de Baroody e Rosu (2006),

> o cálculo flexível diz respeito ao conhecimento e ao uso de relações numéricas, sendo mais rico na medida em que os alunos vão desenvolvendo o seu sentido de número e são capazes de usar a rede de relações que vão construindo (SERRAZINA; RODRIGUES, 2014, P.119)

Neste sentido, Ferreira e Serrazina (2011) afirmam que o desenvolvimento do senso numérico é promovido nos alunos através do encorajamento em formular suas próprias estratégias de cálculo mental.

Com foco nos cálculos mentais, Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) partem dos pressupostos de Threlfall (2002, 2009) para a sua definição de flexibilidade como uma habilidade intuitiva em relação ao conhecimento dos alunos e ao uso de padrões e relações numéricas (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017). Os autores estão interessados em compreender os processos mentais subjacentes à resolução de cálculos, e de que modo os elementos cognitivos suportam o processo de solução de cálculos mentais. Os elementos cognitivos referem-se aos procedimentos aprendidos (por exemplo, decomposição e algoritmo padrão) e às características, padrões e relações numéricas (exemplo, quase dobro, associatividade, soma fecha dez). Para os autores, os procedimentos de solução aprendidos são considerados como raciocínio rígido, em oposição as características reconhecidas do problema[3] são definidas como raciocínio flexível, portanto estas são um indicador de flexibilidade (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017)

Rathgeb-Schnierer e Green (2017) operacionalizam a flexibilidade como uma construção contínua e bipolar, em que o raciocínio rígido está em um extremo e a flexibilidade no outro, ou seja, ocorre em graus variados. Este modelo permitiu a identificação do perfil de raciocínio dos estudantes em três padrões distintos. Quando o raciocínio dos estudantes se referia às características do problema, uma notável variedade de recursos cognitivos era utilizada e o desempenho na resolução era dinâmico, caracterizando o perfil flexível. Por outro lado, quando a base do raciocínio eram os procedimentos de solução, o repertório era restrito e a atuação estática, os alunos eram considerados rígidos. Entre estes perfis, estavam os estudantes que apresentavam um perfil de raciocínio misto, descrito como mais abrangente,

[3] Os autores Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) utilizam o termo problema para se referir aos cálculos. Este estudo fará uso do termo problema no sentido de cálculo, apenas quando se referir às categorias de raciocínio destes autores.

apresentando uma mescla de raciocínio baseado em características do problema e em procedimentos de solução. Deste modo, os autores propuseram uma nova metodologia de avaliação e categorização da flexibilidade, porque os modelos de pesquisa dominantes não forneciam uma visão profunda dos processos cognitivos individuais na resolução de cálculos aritméticos (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015, 2017).

Até o momento, foram apresentadas as distintas linhas investigativas em que os estudos sobre flexibilidade se embasam, a fim de demonstrar a amplitude de possibilidades que esta área enseja. A Psicologia Cognitiva e a Educação Matemática têm demonstrado a necessidade de empregar esforços no ensino da matemática inicial para que esta faça sentido e se adapte à realidade cotidiana, em oposição a métodos embasados em práticas de rotinas desvinculadas de compreensão de significado (BLÖTE; KLEIN; BEISHUIZEN, 2000; BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HARNETT, 2007; HATANO, 1988).

Destaca-se que os estudos apresentados nesta dissertação estão sustentados pela perspectiva da Educação Matemática, com destaque ao referencial teórico de Threlfall (1998, 2002, 2009) e de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017). Nesta linha de investigação, a flexibilidade é dependente da extensão do conhecimento numérico, que parece estar mais alinhado aos objetivos do ensino da matemática nos dias atuais, pois possibilita a construção de ferramentas cognitivas que sustentarão o raciocínio matemático ao longo do processo de escolarização dos estudantes. No entanto, como mencionado inicialmente, se estabelecerão diálogos com os achados da psicologia cognitiva, uma vez que a flexibilidade ainda é um constructo pouco compreendido, necessitando de mais trabalho que inter-relacione suas variáveis. Faz-se importante destacar que a flexibilidade cognitiva será estudada no recorte dos cálculos mentais (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017).

REFERÊNCIAS

ANGHILERI, J. Some impacts of the National Numeracy Strategy on students written calculation methods for division after five years implementation. In: **Proceedings of the sixth British congress of mathematics education**. Warwick: University of Warwick, 2005. p. 17-24.

BAROODY, A.J.; DOWKER, A. (Eds.). The development of arithmetic concepts and skills. **Constructing adaptive expertise**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2003

BLÖTE, A. W.; KLEIN, A. S.; BEISHUIZEN, M. Mental computation and conceptual understanding. **Learning and instruction**, v. 10, n. 3, p. 221-247, 2000.

BLÖTE, A. W.; VAN DER BURG, E.; KLEIN, A. S. Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. **Journal of Educational Psychology**, v. 93, n. 3, p. 627, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionai**s: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **A área da matemática da BNCC**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica Acesso em: outubro. 2018.

BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; KRAEMER, J.M. Algoritmos e sentido do número. **Educação e Matemática**, p. 11-15, 2003.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A. D. Written and oral mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, p. 83-97, 1987.

CORSO, L.V.; ASSIS, E.F. Reflexões acerca da aprendizagem inicial da matemática: contribuições de aspectos externos ao aluno. In: PICCOLI, L; CORSO, L.V.; ANDRADE, S. S.; SPERRHAKE, R. (Org.). **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa PNAIC UFRGS: práticas de alfabetização, aprendizagem da matemática e políticas públicas**. São Leopoldo: Oikos, 2018, p. 114-138.

FERREIRA, E.; SERRAZINA, L. Strategies and procedures: what relationship with the development of number sense of students? In: PYTLAK, M; SWOBODA, E; ROWLAND, T (Eds.). **Proceedings of the Seventh Congress of the European**

Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, Poland, 2011, p 307-315.

LEMAIRE, P.; SIEGLER, R. S. Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. **Journal of Experimental Psychology: General**, v. 124, n. 1, p. 83, 1995.

HARTNETT, J. E. Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. WATSON; K. BESWICK (Ed.), **Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. (MERGA-30). v.1, p. 345-352. Hobart: MERGA, 2007

HATANO, G. Social and motivational bases for mathematical understanding. **New directions for child and adolescent development**, v. 1988, n. 41, p. 55-70, 1988.

HATANO, G. Cognitive consequences of practice in culture specific procedural skills. **The Quartely Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition**, v. 4, n.1, p. 15-18,1982

HEINZE, A.; MARSCHICK, F.; LIPOWSKY, F. Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 591-604, 2009.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J. Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 23, n. 4, p. 443-463, 2004.

LUWEL, K; LEMAIRE, P; VERSCHAFFEL, L. Children's strategies in numerosity judgment. **Cognitive Development**, v. 20, n. 3, p. 448-471, 2005.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the learning of mathematics**, v. 12, n. 3, p. 2-8, 1992.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (Ed.). **Principles and standards for school mathematics**. National Council of Teachers of, 2000.

NUNES, T.; DORNELES, B. V.; LIN, P. J.; RATHGEB-SCHNIERER, E. Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School. In: **Teaching and Learning About Whole Numbers in Primary School**. Springer, Chan, 2016, p. 1-50.

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems. In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. p. 339-345. 2015

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. In: **Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. p. 353-362. 2013.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Profiles of cognitive flexibility in arithmetic reasoning: a cross-country comparison of German and American elementary students. **Journal of Mathematics Education**, v. 10, n. 1, p. 1-16, 2017.

RECHTSTEINER-MERZ, C.; RATHGEB-SCHNIERER, E. Flexible mental calculation and "Zahlenblickschulung". In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. p. 354-360. 2015.

REZAT, S. Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. In: **Proceedings of CERME** (Ed.7). Polônia. 2011.

REZAT, S.; EJERSBO, L. R. Number sense in teaching and learning arithmetic. In: **Developing Research in Mathematics Education**. Routledge, 2018. p. 45-53.

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M. 'Day number': a promoter routine of flexibility and conceptual understanding. In: **13th International Congress on Mathematical Education**. 2016.

SELTER, C. Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 47, n. 2, p. 145-173, 2001.

SELTER, C. Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 619-625, 2009.

SHRAGER, J.; SIEGLER, R. S. SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. **Psychological Science**, v. 9, n. 5, p. 405-410, 1998.

SIEGLER, R.S.; LEMAIRE, P. Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. **Journal of experimental psychology: General**, v. 126, n. 1, p. 71, 1997.

STAR, J. R.; NEWTON, K. The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 557-567, 2009.

STAR, J. R.; NEWTON, K.; POLLACK, C.; KOKKA, K.; RITTLE-JOHNSON, B.; DURKIN, K. Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. **Contemporary Educational Psychology**, v. 41, p. 198-208, 2015.

STAR, J. R. Reconceptualizing procedural knowledge. **Journal for research in mathematics education**.v 36, n. 5, p. 404-411, 2005.

THRELFALL, J. Are mental calculation strategies really strategies?. **Proceedings of the British society for research into learning mathematics**, v. 18, n. 3, p. 71-76, 1998.

THRELFALL, J. Flexible mental calculation. **Educational studies in Mathematics**, v. 50, n. 1, p. 29-47, 2002.

THRELFALL, J. Strategies and flexibility in mental calculation. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 541-555, 2009.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; GHESQUIÈRE, P.; VERSCHAFFEL, L. Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 1, p. 1-17, 2009.

TORBEYNS, J; VERSCHAFFEL, L. Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. **European Journal of Psychology of Education**, v. 31, n. 2, 99-116, 2016.

TORBEYNS, J.; VERSCHAFFEL, L.; GHESQUIÈRE, P. The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. **Cognition and Instruction**, v. 24, n. 4, p. 439-465, 2006.

VASCONCELOS, C.C. Ensino-aprendizagem da matemática: velhos problemas, novos desafios. **Revista Millenium**, v. 20, 2000.

VERSCHAFFEL, L.; LUWEL, K.; TORBEYNS, J.; VAN DOOREN, W. Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. **European Journal of Psychology of Education**, v. 24, n. 3, p. 335-359, 2009.

VERSCHAFFEL, L.; TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B., LUWEL; K., VAN DOOREN, W. Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. **Educational and Child Psychology**, v. 24, n. 2, p. 16-27, 2007.

XU, L.; LIU, R. D.; STAR, J. R.; WANG, J.; LIU, Y.; ZHEN, R. Measures of Potential Flexibility and Practical Flexibility in Equation Solving. **Frontiers in Psychology**, v. 8, 2017.

2 CÁLCULO MENTAL FLEXÍVEL: PERFIS DE RACIOCÍNIO DE ESTUDANTES BRASILEIROS DE 2º E 4º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Resumo: A flexibilidade cognitiva é uma importante habilidade matemática que tem ganhado espaço nas práticas educacionais e no campo de pesquisa da aprendizagem, embora ainda seja pouco conhecida no Brasil. Estudos têm demonstrado diferenças nas formas de operacionalizar essa habilidade que resultam em várias possibilidades de compreender como a flexibilidade se manifesta nos estudantes. Este artigo tem o objetivo de verificar se os perfis de flexibilidade cognitiva relatados na literatura internacional são comparáveis aos encontrados na amostra de crianças brasileiras deste estudo, bem como identificar algumas variáveis que influenciam essa habilidade e avaliar a adequação do instrumento avaliativo utilizado. O estudo contou com 84 estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental de quatro escolas públicas de Porto Alegre. Através do instrumento de autorrelato, os alunos classificaram, resolveram e justificaram o raciocínio utilizado na resolução de cálculos mentais aritméticos. Os resultados evidenciaram perfis de raciocínio semelhantes aos identificados na literatura internacional; as variáveis desempenho acadêmico e nível socioeconômico não explicaram os diferentes perfis; e a tarefa avaliativa demonstrou importante potencial de reflexão e tomada de consciência do conhecimento numérico dos estudantes, ainda que a dificuldade dos cálculos desta tarefa tenha implicado uma limitação deste estudo.
Palavras-chave: Flexibilidade cognitiva. Cálculo mental. Perfil de raciocínio.

Abstract: Cognitive flexibility is an important mathematical skill that has gained space in educational practices and in the field of learning research, even though it is still little known in Brazil. Studies have shown differences in working this skill that resulted in several possibilities of understanding how flexibility is manifested in the students. This article aims to verify if the profiles of cognitive flexibility reported in the international literature are comparable to those found in the sample of Brazilian children of this study, as well as to identify variables that influence this ability and assess if the evaluation instrument is adequate. Eighty-four students of 4 public schools in Porto Alegre participated in the study. Through the instrument of self-narration, the students classified, solved and justified the thought process they used in the resolution of mental arithmetic calculations. The results show similar profiles of reasoning to those identified in the literature. The variables arithmetic performance and socioeconomic levels did not explain the different profiles, and the evaluation task demonstrated an important potential for reflection and awareness the students' numerical knowledge, although the task's mathematical difficulty level implied a limitation in this study.
Keywords: Cognitive flexibility. Mental calculation. Profiles of reasoning

2.1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a flexibilidade tem sido cada vez mais estudada e recebido considerável atenção nas práticas educativas de alguns países europeus como um componente importante da capacidade de pensamento de ordem superior (VERSCHAFFEL et al., 2009). A flexibilidade é uma habilidade inerente ao cálculo mental e à resolução de problemas, que tem despertado o interesse de muitos pesquisadores em compreender de que modo essa habilidade se manifesta nos estudantes e como pode ser avaliada e promovida em diferentes contextos de pesquisa (SERRAZINA; RODRIGUES, 2016; STAR et al., 2015). Em termos gerais, refere-se à capacidade de assumir ou analisar diferentes abordagens em uma situação problema, assim como a possibilidade de lidar com situações novas sem se prender a padrões pré-determinados. Contudo, possuir uma variedade de estratégias e ser capaz de alternar entre as mesmas possa ser um passo fundamental para a flexibilidade, a simples aplicação de diferentes estratégias de solução, em uma série de cálculos matemáticos similares, dificilmente será considerada uma evidência da habilidade de flexibilidade (VERSCHAFFEL et al., 2009). Neste sentido, este estudo contextualiza algumas diferenças na forma em que a flexibilidade pode ser verificada nos estudantes e apresenta os métodos avaliativos mais utilizados na área. O estudo tem como objetivo verificar se os perfis de flexibilidade cognitiva no cálculo mental encontrados em estudantes alemães e americanos em estudos recentes (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017) se aplicam aos estudantes brasileiros.

2.2 VARIÁVEIS SUBJACENTES À FLEXIBILIDADE

A flexibilidade cognitiva é uma habilidade matemática que pode ser influenciada por diferentes variáveis que irão impactar na compreensão de como esta habilidade se manifesta nos indivíduos. O cálculo mental flexível pode ser influenciado pelas características do cálculo matemático (BLÖTE; KLEIN; BEISHUIZEN, 2000; BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001), pelas particularidades do indivíduo que está resolvendo o cálculo (LEMAIRE; SIEGLER, 1995; SIEGLER; LEMAIRE, 1997) e pelos aspectos do contexto em que o cálculo está sendo resolvido (ELLIS, 1997; HATANO, 1988). Além destas variáveis, também há autores que associam a flexibilidade à adequação dos elementos cognitivos - conhecimento numérico e procedimentos de solução - que sustentam o processo de solução de cálculos mentais (THRELFALL, 2002, 2009; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017) e, aos aspectos que são amplamente correlacionados com o desenvolvimento geral da matemática, como o nível socioeconômico, o gênero, a etnia, o conhecimento prévio, e as diferenças nas ênfases de ensino.(STAR et al., 2015).

No que tange às características dos problemas, Blöte, Van der Burg e Klein (2001) operacionalizam a flexibilidade como a adequação dos procedimentos de solução às características da tarefa. Um aluno será considerado um solucionador de cálculos flexível caso escolha os procedimentos de solução em relação às características numéricas do cálculo (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001), por exemplo, conforme os autores, o modo mais fácil e adequado de resolver “63-29” é arredondar o 29 para 30, subtrair 30 de 63 e, em seguida, compensar adicionando 1. Blöte, Van der Burg e Klein (2001) revelam que o programa de ensino com base em conceitos foi bem-sucedido em ensinar os procedimentos de cálculo mental associado às características dos números, desde o início da escolarização. Deste modo, as crianças holandesas de 2º ano, participantes da pesquisa, se tornaram solucionadores flexíveis.

Threlfall (2009) e Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) concordam que a flexibilidade é afetada pelas características percebidas nos números do cálculo. É possível perceber e inferir, com base em conhecimentos pessoais, diversas particularidades e relações numéricas envolvidas em um cálculo. As inferências sobre os números levam a tentativas exploratórias que podem sugerir os passos necessários na sequência de cálculo. Nesse sentido, a análise das características e relações numéricas de um cálculo não pressupõe o uso de uma estratégia ideal, mas sustentam o processo de solução do cálculo mental. Um estudo recente de Rathgeb-Schnierer e Green (2017) examinou os processos subjacentes à resolução de cálculos em 69 alunos alemães e americanos de 2º e 4º anos. Os autores verificaram se os estudantes reconheciam as características, padrões e relações numéricas envolvidas em cálculos aritméticos, e se usavam esse conhecimento durante o raciocínio matemático. Para estes autores (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017) o raciocínio matemático é sustentado pelos elementos cognitivos, que se referem aos procedimentos de solução aprendidos (algoritmo padrão, decomposição) e às características reconhecidas dos problemas (padrões e relações numéricas). O primeiro está relacionado ao tipo de raciocínio rígido, enquanto o segundo representa a flexibilidade do pensamento. Tal operacionalização, permite medir o grau de flexibilidade dos estudantes através da resolução de cálculos. Os autores encontraram três perfis de raciocínio: flexível, com predomínio de raciocínio por características numéricas (>75%) e repertório de 6 a 13 raciocínios; misto, sem preferência clara entre procedimentos de solução e características dos problemas e repertório de 2 a 8 raciocínios; rígido, preferência por procedimentos de solução (>75%) e repertório de 1 a 4 raciocínios. Este achado comprovou que a flexibilidade cognitiva é um constructo que apresenta diferentes graus de desenvolvimento e, portanto, não é um fenômeno "tudo ou nada". Comparando países e anos escolares, foi encontrada relevância estatística apenas entre os anos escolares alemães, em que o 4º ano foi mais flexível do que 2º ano alemão, creditado à maior familiaridade dos alunos mais velhos com o tipo de cálculo utilizado no instrumento.

Para Siegler e Lemaire (1997), a rapidez na execução de uma estratégia e a exatidão da solução demonstram que o indivíduo detém maior domínio sobre o procedimento, portanto, ao avaliar a velocidade e a precisão durante a resolução de um cálculo, se está contemplando as particularidades do indivíduo. Os achados de Torbeyns e Verschaffel (2016) indicam que, dentre os 58 alunos de 4º ano de diferentes níveis de desempenho matemático, as crianças com desempenho alto e acima da média ajustaram flexivelmente suas escolhas ao domínio individual - velocidade e precisão, respectivamente, ao passo que os estudantes com desempenho abaixo da média não o fizeram. Além disso, todos os estudantes usaram o algoritmo padrão com maior frequência do que o cálculo mental e os autores justificam o achado ao prestígio do procedimento padrão no contexto escolar.

Já os aspectos de contexto, oriundos da linha de pesquisa sociocultural, são apontados por Verschaffel et al. (2009) como mais resistentes à operacionalização direta e controle experimental do que as demais variáveis apresentadas, uma vez que a escolha entre as estratégias refletem não apenas o conhecimento sobre estratégias, mas "o conhecimento implícito sobre o que uma determinada cultura define como apropriado, adaptável e sábio" (ELLIS, 1997, p. 492, tradução nossa). Os aspectos elencados por Ellis (1997) evidenciam que as influências socioculturais desempenham um papel poderoso na formação dos repertórios de estratégias que os indivíduos têm disponível para resolver problemas, como também nas escolhas que eles fazem entre as estratégias disponíveis.

O viés sociocultural apresenta muitas nuances que influenciam o desempenho na aritmética. Ellis (1997) mapeou e analisou as principais evidências da época, dentre as quais cabe destaque: o valor social das soluções construídas na cabeça versus por meio escrito; a independência versus a busca de ajuda; a construção de uma imagem positiva diante dos pares, professores e pais; a manutenção de práticas sociais valorizadas ao invés de mostrar um comportamento de solução eficiente. Portanto, considerar o aspecto sociocultural pode contribuir, de acordo com Ellis (1997), para a compreensão da escolha da estratégia, em especial aquelas que parecem menos efetivas à primeira vista.

Por fim, Star et al. (2015) chamam atenção para alguns aspectos que são amplamente correlacionados com o desenvolvimento geral da matemática, como o nível socioeconômico, o gênero, a etnia e o conhecimento prévio, mas que ainda são pouco associados à flexibilidade. Os autores acreditam que estas variáveis podem ajudar a explicar a variância no desenvolvimento da flexibilidade. Em um estudo recente, envolvendo 605 estudantes americanos de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, avaliaram os ganhos de flexibilidade ao longo ano letivo. Os resultados indicaram que as meninas tiveram mais ganhos em flexibilidade, em contraponto ao relatado na literatura. O conhecimento prévio foi determinante para alcançar graus mais elevados de flexibilidade, no entanto os maiores ganhos em flexibilidade foram verificados nos alunos que tinham essa habilidade menos desenvolvida. Fatores como nível socioeconômico e etnia não foram determinantes para o desenvolvimento da flexibilidade como era esperado pelos autores.

2.3 AVALIAÇÃO DA FLEXIBILIDADE

As principais formas de avaliar a flexibilidade referenciadas na literatura são as técnicas de autorrelato do raciocínio de resolução de cálculos (BROCARDO ; MENDES; DELGADO, 2014; CAVIOLA et al., 2018; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; HUNTING,1997; RATHGEB-SCHNIERER E GREEN, 2013, 2015, 2017, SERRAZINA; RODRIGUES, 2016; THRELFALL, 2009) e o bem estabelecido método escolha/sem escolha (HEINZE; MARSCHICK; LIPOWSKY, 2009; LUWEL; LEMAIRE; VERSCHAFFEL, 2005; 2010; SIEGLER; LEMAIRE 1997; TORBEYNS; VERSCHAFFEL.; GHESQUIÈRE., 2005, TORBEYNS et al., 2009; TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2016; VERSCHAFFEL et al., 2009). As potencialidades e fraquezas de cada método serão apresentadas na sequência.

O método escolha/sem escolha proposto por Siegler e Lemaire (1997) consiste em testar o participante sob duas condições diferentes. Na condição de escolha, o indivíduo escolhe livremente as suas estratégias para resolver os itens da tarefa avaliativa, enquanto na condição sem escolha, a estratégia é determinada pelo avaliador e seu uso é obrigatório em todas as resoluções. Por exemplo, no estudo de Torbeyns et al. (2009) sobre as estratégias de adição e subtração de números até 100, os pesquisadores testaram as estratégias de compensação (56 + 29 = ?; 56 + 30 = 86; 86 - 1 = 85) e de salto (56 + 29 = ?;56 + 20 = 76; 76 + 9 = 85) para cada um dos 20 cálculos da tarefa avaliativa. Portanto, na condição de escolha as crianças puderam escolher uma das estratégias para resolver os itens. Nas condições sem escolha, uma para cada estratégia, as crianças resolveram os cálculos usando primeiro a estratégia de compensação e depois a estratégia de salto.

Em termos ideais, para obter estimativas imparciais da velocidade e precisão que irão indicar a flexibilidade da estratégia, a quantidade de condições de livre escolha deve ser igual à quantidade sem opção de escolha (VERSCHAFFEL et al., 2009; CAVIOLA et al., 2018). Neste ponto aparece a fraqueza do método, a saber, a tensão entre dados internamente válidos em comparação aos dados ecologicamente válidos (TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2016). Por um lado, se o número de estratégias na condição de "livre" escolha precisa ser restringido para garantir a validade dos dados da pesquisa, consequentemente, o estudo não será capaz de retratar o processo ecológico[4] de escolha da estratégia. Por outro lado, garantindo escolha livre dentro do repertório da criança, garante-se o caráter ecológico do estudo, mas perde-se validade interna ao ter de comparar uma grande quantidade de estratégias utilizadas na condição de escolha com um número limitado de procedimentos na condição sem escolha (TORBEYNS.; VERSCHAFFEL; GHESQUIÈRE, 2005; TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2016)

[4] Ecológico, trata-se do quão próximo a pesquisa está do contexto ambiental, de modo que as conclusões do estudo possam ser relevantes e generalizáveis para ambientes semelhantes (STERNBERG, 2008)

Na abordagem de autorrelato, o entrevistado deve informar o que faz, seja durante a resolução da tarefa usando métodos de protocolo verbal (pensar alto) ou depois, por descrição do raciocínio utilizado (HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; THRELFALL, 2009). Esse método possibilita o uso de um repertório maior de estratégias ou representações numéricas que o participante tem ao seu dispor em comparação ao método escolha/sem escolha (CAVIOLA et al., 2018), o que pode garantir o aspecto ecológico da pesquisa. Fortemente influenciado pelo método clínico de Jean Piaget (HUNTING,1997), as entrevistas clínicas, como também são conhecidas, demonstram a sua potencialidade ao envolver o aluno na resolução de uma tarefa matemática, levando-o a perceber o que pensa ou o que faz a cada passo (BROCARDO; MENDES; DELGADO, 2014). É essencial que seja definido um protocolo que oriente a ação do entrevistador com foco nos aspetos relevantes para a pesquisa (BROCARDO; MENDES; DELGADO, 2014). Deste modo, o pesquisador tem acesso à forma global de raciocínio do indivíduo, indicando como usa e relaciona os conhecimentos que suportam a resolução da tarefa (HUNTING,1997; BROCARDO; MENDES; DELGADO, 2014). Hunting (1997) defende que a virtude deste método está na compreensão do processo de pensamento, não no procedimento de solução, nem no resultado.

Invariavelmente, este também não é um método perfeito. O uso frequente de inferências para conduzir a descrição clara do raciocínio da criança durante a resolução das tarefas leva a alguns riscos, segundo Hunting (1997). O pesquisador pode não ter a experiência necessária para guiar o desenvolvimento do raciocínio da criança ficando impotente diante de sua resposta. Ou ainda, há a possibilidade de influenciar o modo de pensar dos alunos pelo excesso de interferências durante a resolução do cálculo, levando-os a mudar o seu curso do raciocínio (BROCARDO; MENDES; DELGADO, 2014). O contexto de coleta de dados pode influenciá-los, visto que os indivíduos irão responder o que acreditam ser esperado deles naquele determinado espaço. A falta de clareza dos processos envolvidos no raciocínio matemático leva a criança a descrever a solução de forma simplificada. Assim como a descrição do raciocínio pode indicar apenas a estratégia final, já refinada, omitindo passos hesitantes e cálculos exploratórios. Devido a estas razões, Threlfall (2009) afirma que é necessário ter cautela para confiar nos detalhes do método de autorrelato, embora acredite na potência deste instrumento.

De modo geral, de acordo com os pontos destacados, verifica-se que a abordagem de autorrelato está mais afinada com a perspectiva investigativa da educação matemática; enquanto o método escolha/sem escolha está vinculado ao modelo de escolha da estratégia, ambos propostos por Siegler (LEMAIRE; SIEGLER, 1995; SIEGLER; LEMAIRE 1997) e utilizados pela psicologia cognitiva. Como os cálculos mentais não são diretamente observáveis, estes instrumentos têm fornecido evidências para as pesquisas de flexibilidade em cálculo mental.

2.4 PESQUISAS EM FLEXIBILIDADE

A pesquisa contemporânea que versa sobre a flexibilidade revela alguns padrões consistentes. Por exemplo, os alunos que aprendem métodos padronizados de cálculo tendem a preferi-los, pois oferecem uma forma segura de calcular devido à sua relativa simplicidade (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HATANO, 1982, 2003; HATANO; OURA, 2003; SELTER, 2001). Além disso, os estudantes que escolhem os procedimentos padrão demonstram limitado conhecimento numérico (HATANO, 1982, 2003, HEIRDSFIELD; COOPER,2004; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017), e grande dificuldade de generalizar esse pouco conhecimento (HATANO,1988). Já os indivíduos que priorizam estratégias de cálculo mental, demonstram possuir uma forte base conceitual sobre o sistema decimal (VAROL; FARRAN, 2007), sobre fatos básicos e famílias de fatos (BAROODY, 2006), sobre padrões e relações numéricas (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017;FERREIRA; SERRAZINA, 2011; SERRAZINA; RODRIGUES, 2016), assim como possuem senso numérico bem desenvolvido (HARTNETT, 2007, HEIRDSFIELD; COOPER, 2004, VAROL; FARRAN, 2007).

Neste sentido, as pesquisas apontam que os estudantes presos aos algoritmos apresentam um perfil de raciocínio rígido ou inflexível e os alunos que demonstram conhecimento numérico aprofundado são definidos como flexíveis (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017). Havendo, ainda, aquelas crianças que estão na transição entre estes dois padrões, denominados como perfil de raciocínio misto (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017).

Achados indicam que ênfases educativas centradas em diferentes estratégias associadas a padrões e relações numéricas favorecem o desenvolvimento da flexibilidade (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; STAR et al., 2015), em especial os ambientes que promovem a comunicação, a exploração e a comparação de diferentes formas de fazer matemática (FERREIRA;SERRAZINA, 2011; SERRAZINA; RODRIGUES, 2014, 2016). Nesta linha, estudos de intervenção e estudos de caso têm demonstrado que a flexibilidade existe em um "*continuum*", quanto maior é o conhecimento de múltiplas estratégias (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; NEWTON; STAR, 2009) ou mais amplo é o conhecimento numérico (RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015; SERRAZINA; RODRIGUES, 2014) mais ganhos em flexibilidade são evidenciados.

Quanto ao instrumento de avaliação, pesquisas mais recentes têm demonstrado a validade de métodos de autorrelato associados a sistemas de categorização dos raciocínios, pois fornecem informações valiosas sobre o repertório e o uso de características numéricas, e como tais recursos cognitivos podem afetar a resolução dos cálculos (CAVIOLA et al., 2018; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015). No entanto, evidências indicam que o grau de dificuldade dos cálculos selecionados pode impactar negativamente nos resultados (CAVIOLA et al., 2018; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017, SELTER, 2001).

Além disso, é válido destacar que os dados apresentados têm amostras de origem alemã (SELTER, 2001; RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017), americana (LEMAIRE; SIEGLER, 1995; SIEGLER; LEMAIRE 1997; STAR et al., 2015; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017), australiana (HARTNETT, 2007; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004), italiana (CAVIOLA et al., 2018), belga (TORBEYNS et al., 2009; TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2016) e portuguesa (FERREIRA; SERRAZINA, 2011; SERRAZINA; RODRIGUES, 2016). No Brasil, não há registro de pesquisa sobre flexibilidade como uma habilidade cognitiva específica da matemática, muito embora Dorneles e Haase (2018) já apontassem a necessidade de maior atenção para tal habilidade. Isto posto, a relevância deste estudo está na compreensão de como a flexibilidade cognitiva se manifesta no contexto brasileiro, país com características contextuais (educativas, socioeconômicas e culturais) tão diversas dos países acima mencionados.

2.5 O PRESENTE ESTUDO

Esta pesquisa tem o intuito de verificar se os perfis de flexibilidade cognitiva no cálculo mental propostos por Rathgeb-Schnierer e Green (2017) serão identificados em estudantes brasileiros de 2º e 4º anos.

2.5.1 Objetivos específicos

- Identificar os perfis de flexibilidade no cálculo mental, em estudantes brasileiros de 2º e 4º anos, através da análise dos elementos cognitivos, a saber, os procedimentos de solução e características e relações numéricas, que sustentam o processo de solução de cálculo mental;
- Ampliar a compreensão sobre a amostra de estudantes brasileiros deste estudo através das variáveis desempenho aritmético e nível socioeconômico, associando-as aos perfis de flexibilidade;
- Verificar a adequação da tarefa avaliativa de flexibilidade à realidade brasileira, com base no desempenho dos estudantes de 2º e 4º ano nos cálculos deste instrumento.

2.5.2 Hipóteses

- Espera-se encontrar os três perfis de raciocínio descritos por Rathgeb-Schnierer e Green (2017), evidenciando que a flexibilidade é uma habilidade de desenvolvimento contínuo;
- Espera-se encontrar associação entre os graus mais altos de flexibilidade com o desempenho superior no subteste de aritmética (STEIN, 1994) e aos níveis socioeconômicos mais elevados;

- Espera-se encontrar diferenças no desempenho entre os alunos de 2º e de 4º ano na tarefa avaliativa de flexibilidade, sem que essa distinção de desempenho impacte nos resultados da pesquisa.

2.5.3 Método

2.5.3.1 Amostra

A amostra foi composta por 84 estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental de quatro escolas estaduais localizadas no município de Porto Alegre. Essas escolas foram escolhidas a partir de critérios de conveniência do pesquisador. As escolas estão localizadas nos bairros Tristeza, Nonoai, Floresta e Petrópolis, apresentando semelhança na metodologia de ensino e nas características socioeconômicas.

Inicialmente foram avaliados 96 estudantes no subteste de aritmética do Teste de Desempenho Escolar -TDE (STEIN,1994), mantendo-se na amostra apenas aqueles com desempenho médio e superior. Nesta etapa, seis alunos foram excluídos. Outras seis crianças foram retiradas da amostra, porque não acertaram ao menos um cálculo do instrumento de flexibilidade (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013), totalizando 84 estudantes neste estudo (M=9,01 anos).

2.5.3.2 Os instrumentos

2.5.3.2.1 Avaliação da Flexibilidade Cognitiva

O instrumento de avaliação proposto por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) consiste em uma entrevista, direcionada ao reconhecimento das características, padrões e relações numéricas de cálculos de adição e subtração de dois dígitos, em virtude deste conhecimento ser um indicador de flexibilidade para os autores. Cada questão foi projetada para mostrar no mínimo uma característica numérica especial, como, por exemplo, soma inferior a 10, associatividade, reagrupamento, proximidade da dezena e cálculos inversos. Os cálculos foram exibidos em pequenos cartões:

Quadro 1: Cálculos do instrumento de avaliação de flexibilidade

33 + 33	73 +26	34 + 36	65 + 35	56 + 29	47 + 28
66 - 33	88 - 34	95 - 15	46 - 19	63 - 25	31 - 29

Fonte: adaptado de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017)

As entrevistas tiveram dois momentos: o primeiro, destinado a classificar os cálculos e falar sobre o procedimento de classificação; o segundo, à resolução dos cálculos. Na primeira etapa, os cartões foram misturados aleatoriamente na mesa em frente ao estudante, que foi incentivado a observar atentamente os números que compunham cada cálculo para classificá-los nas categorias "fácil" ou "difícil" (estes rótulos foram colocados em cada lado da mesa). Para cada cartão classificado, foi questionado o motivo da triagem: "Por que esse problema é fácil/difícil para você?". Na segunda fase, foi solicitado ao aluno que escolhesse os cálculos de cada lado (fácil ou difícil), pouco a pouco, e explicasse o seu raciocínio durante a resolução mental de cada cálculo. Todos os alunos foram estimulados a finalizar a tarefa.

Apenas raciocínios que levaram à solução correta dos cálculos foram categorizados, assim as crianças (6) que não acertaram ao menos um cálculo deste instrumento foram excluídas da pesquisa.

2.5.3.2.2 Desempenho aritmético

Para avaliar o nível de desempenho aritmético dos estudantes foi utilizado o Subteste de Aritmética (SA) do Teste de Desempenho Escolar - TDE (STEIN,1994). Este é um instrumento psicométrico padronizado para o município de Porto Alegre para avaliar estudantes de 1ª a 6ª ano do Ensino Fundamental. O subteste é composto de duas partes, uma oral e outra de cálculos. A parte oral apresenta três problemas que envolvem comparação de quantidades, adição e subtração A parte de cálculo apresenta 35 itens de cálculo aritmético com grau de dificuldade crescente. O teste apresenta tabela de classificação do desempenho como inferior, médio ou superior para cada ano de escolaridade.

Os escores do TDE (STEIN,1994) foram utilizados como critério de inclusão/exclusão da amostra, sendo mantidos apenas os estudantes com desempenho aritmético médio e superior, a fim de garantir o mínimo de conhecimento numérico. Estes níveis de desempenho serão correlacionados aos perfis de flexibilidade cognitiva.

2.5.3.2.3 Questionário Socioeconômico

Dados sobre o histórico escolar e das condições socioeconômicas das famílias foram coletados através de um modelo de questionário adaptado de Corso, Sperb e Salles (2013) (anexo D).

O critério de classificação econômica da Associação Brasileira de Empresas de Pesquisa (ABEP, 2014) foi utilizado para definir as classes socioeconômicas da amostra. Os dados sobre gênero, idade e classe socioeconômica foram organizados na tabela 3. Os indicadores socioeconômicos serão correlacionados aos perfis de flexibilidade cognitiva.

2.5.3.3 Procedimentos

Quanto à participação na pesquisa, o projeto foi apresentado às escolas e a permissão foi solicitada aos diretores, mediante o Termo de Autorização para a realização da pesquisa para as escolas (ANEXO A). Os professores responsáveis por cada turma assinaram o Termo de Participação (ANEXO B). Os estudantes foram autorizados a participar por seus responsáveis, através do Termo de Consentimento

Livre e Esclarecido (ANEXO C), os quais também preencheram o questionário socioeconômico.

A coleta de dados ocorreu de outubro de 2017 a janeiro de 2018. No primeiro momento, o Subteste de Aritmética (STEIN, 1994) foi aplicado coletivamente em sala de aula para selecionar os estudantes com desempenho médio e superior. No segundo momento, foi aplicado o instrumento de avaliação da flexibilidade, individualmente, em sala reservada dentro da escola, com duração de tempo que variou de 15 a 60 minutos. As entrevistas foram filmadas para a posterior análise de dados.

2.5.3.4 Análise de dados

A fim de identificar os perfis de raciocínio, o conteúdo das entrevistas foi analisado e categorizado pelo sistema de codificação desenvolvido por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017). É composto por duas categorias principais: raciocínio por característica do problema (RCP) e raciocínio por procedimento de solução (RPS). Estas categorias centrais incluem vários códigos, conforme demonstrado no quadro 2.

Quadro 2: Sistema de codificação de raciocínios.

Categoria	**Raciocínio por características do problema**	**Raciocínio por procedimentos de solução**
Códigos	Relações numéricas	Composição ou decomposição
	Relações da tarefa	Contagem
	Analogias entre dezenas e unidades	Encontrar as diferenças
	Características das unidades	Modificar o problema
	Números especiais	Algoritmo padrão
	Tamanho dos números	Outra estratégia
	Fatos básicos	

Fonte: adaptado de Rathgeb-Schinierer e Green (2013, 2015, 2017)

O raciocínio por características do problema foi codificado quando os estudantes se referiram especificamente às características do problema (por exemplo, a relação de dobro e metade de 33 e 66). O raciocínio por procedimentos de solução foi codificado quando os alunos descreveram qualquer técnica de computação mental, passo a passo (contagem, decomposição, algoritmo padrão).

A análise de dados qualitativa de indicadores descritivos de frequência e repertório levaram à identificação inicial dos perfis de flexibilidade. Foram utilizadas técnicas não paramétricas - teste Kruskall Wallis, teste Wilcoxon e teste exato de Fischer - ao nível de significância de 5%, para análise de dados quantitativos. Esta forneceu evidências estatísticas de cada perfil de raciocínio e de comparações entre os mesmos. Verificou-se também a associação dos perfis com as variáveis de desempenho aritmético e nível socioeconômico da família. Neste estudo, a amostra de 2º e 4º anos foi agrupada para fins de alcançar significância estatística nas comparações com as variáveis. Por fim, foi avaliada a validade do instrumento de flexibilidade.

2.5.4 Resultados

2.5.4.1 Perfis de raciocínio flexível

Um total de 2.402 raciocínios (frequência) foram dados pela amostra, dos quais 1.376 foram categorizados como características do problema (57%) e 1.044 como procedimentos de solução (43%).

Para classificar e resolver os cálculos, quando utilizadas as características do problema, o raciocínio dos estudantes referia-se, predominantemente, a fatos básicos (39%) e a características das unidades (17%), que inclui recursos como a soma fecha dez, cinco no lugar das unidades e verificar a necessidade ou não de reagrupamento. Quando o raciocínio por procedimento de solução estava sendo utilizado, a preferência foi pelo algoritmo padrão (44%) e pela contagem (42%).

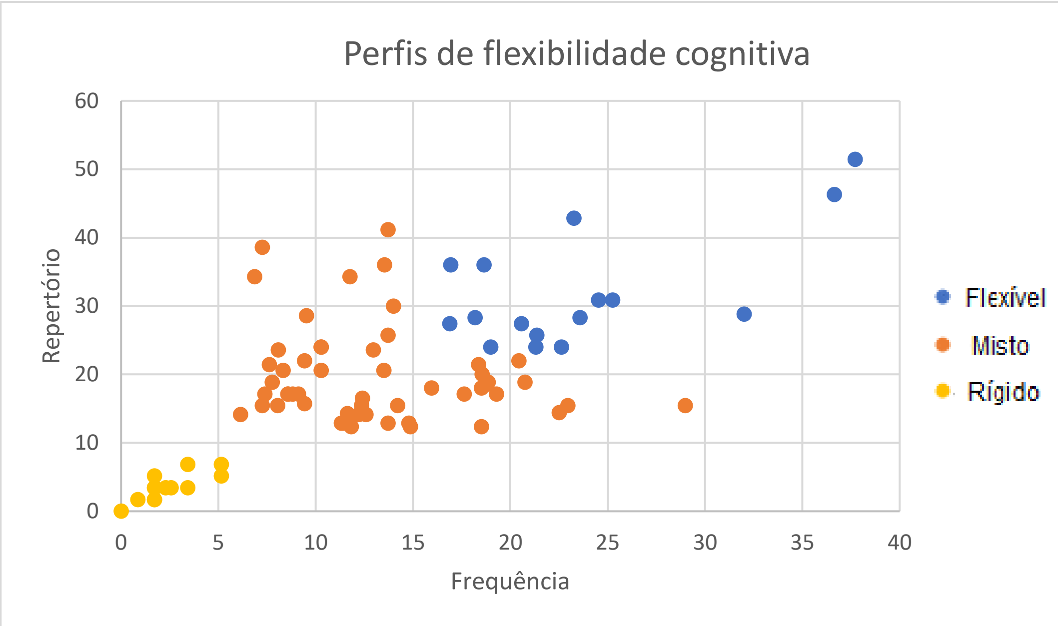
A partir destes dados, tomando como base os indicadores qualitativos de Rathgeb-Schnierer e Green (2017) para a distribuição dos sujeitos nos diferentes perfis de raciocínio, uma razão foi determinada para comparar os dados de raciocínio por características do problema (RCP) e raciocínio por procedimento de solução (RPS) em valores descritivos de frequência e repertório. A frequência é entendida como a quantidade de vezes que o raciocínio se repete, enquanto o repertório se refere à variedade de raciocínio (se usou ou não determinado procedimento).

A razão foi definida como $^{RCP/7}/_{RPS/6}$, em que os valores de RCP e RPS foram divididos respectivamente por 7 e 6, referente à quantidade de códigos de suas categorias (vide o quadro 2) e, por fim, estes resultados foram divididos entre si, indicando a diferença entre RCP e RPS. Em seguida, os resultados de cada aluno foram multiplicados pela quantidade de acertos na tarefa, a fim de reduzir a possibilidade de "falsos positivos" ou "falsos negativos". Esta ponderação foi necessária porque os resultados iniciais igualaram indivíduos com desempenhos diferentes, de modo que alunos com alta frequência e amplo repertório de características do problema apresentavam proporções parecidas com a de estudantes com intervalos bem restritos destas mesmas variáveis. Na sequência, os resultados foram ponderados pelo desempenho médio do ano escolar na tarefa avaliativa de flexibilidade, com o propósito de compará-los em mesma escala, uma vez que o 2º ano obteve uma média de acertos de 5,79 (DP= 3,18) comparado à média de 11,43 (DP=0,89) acertos do 4º ano. Para este fim, os resultados do 2º ano foram dobrados.

Para a definição dos perfis de raciocínio, as métricas finais de repertório e frequência foram avaliadas a partir das seguintes referências: (1) Raciocínio rígido, valores abaixo de 1, indicam prevalência de RPS; (2) Raciocínio misto, valores iguais a 1, equilíbrio entre RCP e RPS e; (3) Raciocínio flexível, valores acima de 1, preferência por RCP. Cabe destacar que estes valores são referências aproximadas, visto que as métricas atingiram valores mais altos devido às ponderações mencionadas anteriormente. Ainda, as métricas de repertório e frequência foram analisadas conjuntamente para encontrar os perfis de raciocínio, conforme a descrição abaixo:

O perfil de raciocínio rígido (n=15) apresentou métricas de frequência e repertório muito baixos. O raciocínio por característica do problema foi ligeiramente menor do que o raciocínio por procedimento de solução neste grupo de alunos; ao passo que, o perfil de raciocínio misto (n=53) apresentou a maior diversidade de raciocínios, se caracterizando como um grupo heterogêneo. Ainda que o RCP tenha se destacado, as taxas de uso deste procedimento também foram altas neste grupo. Este perfil apresenta significativa vantagem em relação ao grupo rígido, com valores de frequência e repertório mais altos; por fim, o perfil de raciocínio flexível (n=16) exibiu métricas igualmente altas demonstrando conexão entre repertório e frequência. Neste grupo, as características dos problemas foram utilizadas duas vezes mais do que os procedimentos de solução.

Gráfico 1 - Dispersão dos perfis de flexibilidade cognitiva



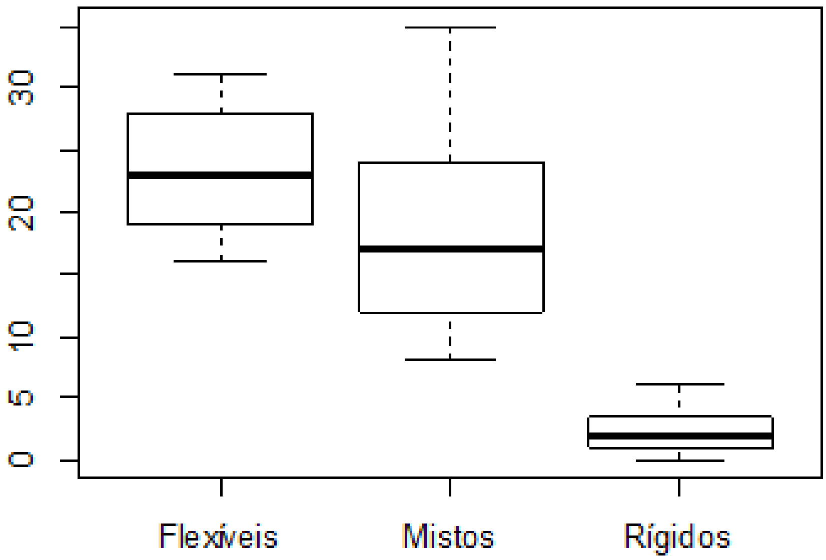
Fonte: elaborado pela autora. Legenda: amarelo-perfil rígido; laranja-perfil misto; azul-perfil flexível.

Para confirmar a validade desta distribuição qualitativa de perfis de flexibilidade, foram examinados os dados de frequência e repertório dos raciocínios, estes, por sua vez, tiveram sua significância estatística verificada($p<0,05$).

2.5.4.2 Frequência e repertório dos raciocínios

Os dados de frequência do raciocínio por características do problema e por procedimentos de solução são apresentados em gráficos *box-plots* 2 e 3, respectivamente. Estes gráficos demonstram a distribuição dos raciocínios em cada perfil de flexibilidade. O centro da distribuição é indicado pela linha mediana, localizada dentro da caixa, que divide a metade dos dados, assim abaixo da mediana estão os alunos que usaram os raciocínios com menos frequência e, acima estão os alunos que o utilizaram mais vezes. A amplitude indica o mínimo e o máximo de vezes que o raciocínio foi utilizado em cada grupo, representado pelas linhas horizontais nos limites de cada gráfico e, por fim, os pontos além destes limites representam os alunos que apresentaram desempenho discrepante.

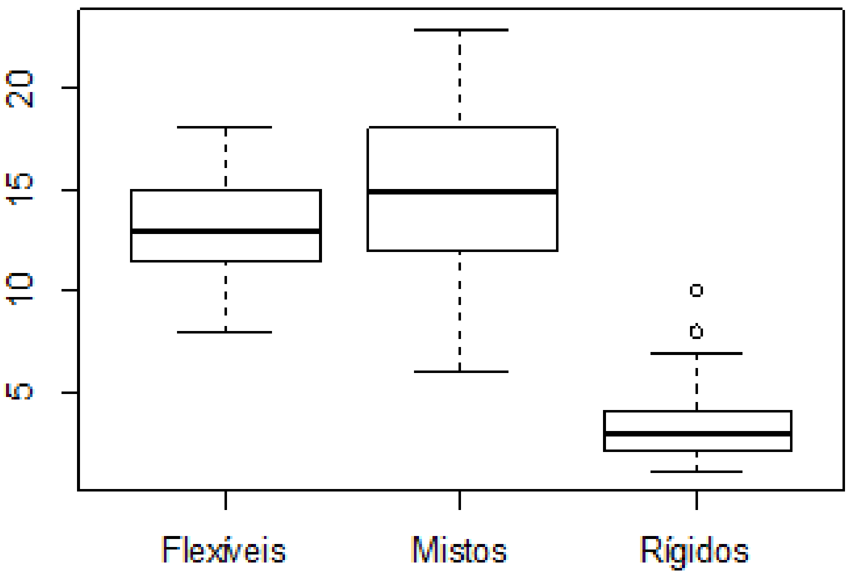
Gráfico 2 - Frequência de raciocínio por características do problema



Fonte: elaborado pela autora

O gráfico demonstra a tendência decrescente esperada de que quanto maior for o grau de flexibilidade do estudante maior será o seu raciocínio por características do problema. O teste Kruskall Wallis (p<0,05) demonstrou que as medianas diferem pelo menos entre dois grupos. O teste de Wilcoxon (p<0,05) mostrou que todos os grupos diferem entre si. A mediana do grupo dos alunos flexíveis (Md=23) é estatisticamente maior do que as medianas dos perfis mistos (p=0,0061) e rígidos (p<0,0001), assim como a mediana do grupo de estudantes mistos (Md=17) é significativamente maior que a mediana de alunos rígidos (Md=2) (p<0,0001).

Gráfico 3 - Frequência de raciocínio por procedimentos de solução



Fonte: elaborado pela autora

Estes resultados não acompanharam a tendência crescente esperada, com maiores frequências para o grupo rígido e menores para o grupo flexível, enquanto o grupo misto estaria colocado entre estes dois padrões. Isto pode ser atribuído ao baixo desempenho dos estudantes rígidos no instrumento avaliativo de flexibilidade. Poucos cálculos resolvidos geraram uma limitada base de dados para ser analisada e categorizada, fazendo com que as frequências fossem significativamente mais baixas neste grupo.

O teste Kruskall Wallis demonstrou que, no mínimo, duas medianas empatam. O teste Wilcoxon indicou que a mediana dos rígidos (Md=3) difere tanto dos mistos (Md=15) quanto dos flexíveis (Md=13), e estes, por sua vez, são equivalentes estatisticamente ($p=0{,}1895$). A mediana do grupo de alunos rígidos é significativamente menor que as medianas dos alunos mistos ($p<0{,}0001$) e dos alunos flexíveis ($p<0{,}0001$).

A tabela 1 sintetiza e compara os dados de frequência de RCP e RPS em cada perfil de raciocínio.

Tabela 1 - Frequências de raciocínio por características do problema e de raciocínio por procedimentos de solução

Raciocínio	Flexíveis		Mistos		Rígidos	
	Md	Amp	Md	Amp	Md	Amp
Característica do Problema	23	16-31	17	8-35	2	2-6
Procedimento de solução	13	8-18	15	6-23	3	1-10
p-valor	p<0,0001		p=0,01495		p=0,2053	

Fonte: elaborado pela autora. Legenda: Md- mediana; Amp -amplitude; Nível de significância à 0,05.

Conforme observado acima, no grupo de estudantes flexíveis tanto a mediana quanto a amplitude da utilização de características do problema são mais altas do que as mesmas variáveis dos procedimentos de solução e esta diferença indica prevalência do raciocínio por características do problema, confirmada pelo teste Wilcoxon (p<0,0001). Os alunos de raciocínio misto se caracterizam pelo grupo de maior variabilidade cognitiva e isto fica evidenciado pelas grandes amplitudes no uso de caraterísticas dos problemas e dos procedimentos de solução. A proximidade das suas medianas indica um equilíbrio entre o uso dos dois itens avaliados, embora a frequência RCP seja estatisticamente superior do que a frequência de RPS (p=0,0149). O grupo de estudantes rígidos apresentam um padrão de raciocínio mais restrito, demonstrado pelas amplitudes reduzidas, utilizando poucos recursos para resolver os cálculos. Ainda que as medianas deste grupo não sejam estatisticamente diferentes (p=0,2053), é possível observar uma leve preferência pelos procedimentos de solução em detrimento às características do problema.

Além da frequência, o repertório é um indicador importante para caracterizar os perfis de raciocínio, pois agrega o dado da variabilidade de recursos empregados para resolver um cálculo, conforme a tabela 2.

Tabela 2 - Repertório de raciocínio por características do problema e de raciocínio por procedimentos de solução.

Raciocínio	Flexíveis		Mistos		Rígidos	
	Md	Amp	Md	Amp	Md	Amp
Característica do Problema	6	3 - 7	5	3 - 7	2	0 - 3
Procedimento de solução	2	2 - 5	3	1 - 5	2	1 - 3
p-valor	p<0,0001		p<0,0001		p=0,7369	

Fonte: elaborado pela autora. Legenda: Md- mediana; Amp -amplitude; Nível de significância à 0,05.

Os dados sobre o repertório de características do problema e procedimento de solução estão alinhados com os dados de frequência citados acima e, desta forma, reforçam a caracterização dos grupos de alunos rígidos, mistos e flexíveis.

Os alunos flexíveis apresentaram a mediana 6 para RCP e mediana 2 para RPS, ou seja, para cada tipo de procedimento de solução utilizado na resolução do cálculo foram usadas três características dos problemas diferentes. O teste Wilcoxon mostrou a significância estatística entre as medianas ($p<0,0001$) dos estudantes flexíveis. No grupo misto, as medianas estão mais próximas, embora RCP (Md=5) seja estatisticamente maior do que RPS (Md=3), desta forma, há prevalência do raciocínio por caraterísticas do problema. Já os estudantes rígidos apresentaram mediana 2 tanto para características do problema quanto para procedimentos de solução, sem diferença estatística ($p=0,7369$). Esse grupo apresentou repertório reduzido e equilibrado, ou seja, para cada caraterística do problema utilizado um procedimento de solução também foi usado.

A tabela 3 mostra a estatística descritiva da amostra, dividida pelos perfis de flexibilidade.

Tabela 3 - Descrição da amostra

	Flexível	**Misto**	**Rígido**	**Total**
Amostra	16	53	15	**84**
	19%	63%	18%	**100%**
2º ano	8	19	15	**42**
	19%	45%	36%	**100%**
4º ano	8	34	0	**42**
	19%	81%	0%	**100%**
Idade média	9,29	9,63	8,13	**9,01**
Meninos	9	36	4	**49**
	18%	73%	8%	**100%**
Meninas	7	17	11	**35**
	20%	49%	31%	**100%**
Classe socioeconômica				
A2	0	3	0	**3**
	0%	100%	0%	**100%**
B1	5	2	1	**8**
	63%	25%	13%	**100%**
B2	6	24	5	**35**
	17%	69%	14%	**100%**

Continuação da Tabela 3 – Descrição da amostra

	Flexível	Misto	Rígido	Total
C1	4	19	7	**30**
	13%	63%	23%	**100%**
C2	1	5	2	**8**
	13%	63%	25%	**100%**
TDE aritmética				
Médio	3	9	7	**19**
	16%	47%	37%	**100%**
Superior	13	44	8	**65**
	21%	71%	13%	**100%**

Fonte: elaborado pela autora.

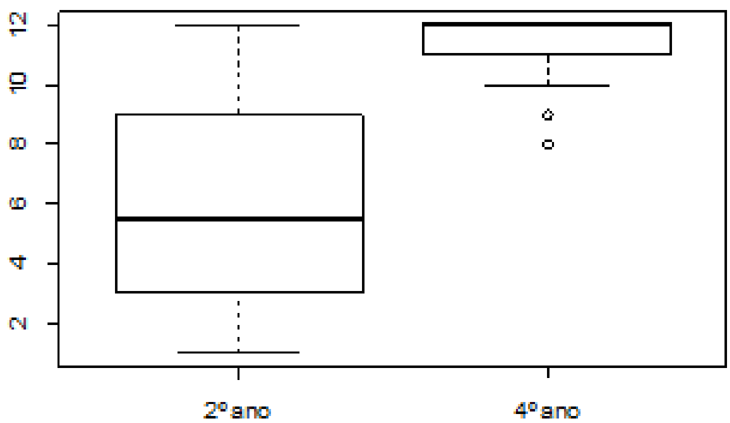
O teste exato de Fischer (p<0,05) não encontrou diferença significativa entre os grupos quanto ao nível socioeconômico (p=0.1749) e ao desempenho no subteste de aritmética do TDE (STEIN, 1994) (p=0.0658).

2.5.4.3 Adequação do instrumento de avaliação da flexibilidade cognitiva

A tarefa avaliativa proposta por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) evidenciou o raciocínio das crianças durante a resolução dos cálculos em que um total de 2.420 (frequência) de raciocínios válidos foram registradas.

O desempenho dos estudantes de 2º e 4º anos nos 12 cálculos que compõem a tarefa avaliativa de flexibilidade foi verificado, conforme o gráfico 4.

Gráfico 4 - Desempenho dos estudantes de 2º e 4º anos nos cálculos da tarefa avaliativa de flexibilidade cognitiva.



Fonte: elaborado pela autora

O gráfico 4 representa a distribuição de acertos dos estudantes de 2º e 4º ano nos cálculos do instrumento de flexibilidade. Os alunos do 2º ano apresentaram maior variabilidade no número de acertos de acordo com a amplitude (1-12) obtendo mediana 5,55. Enquanto a distribuição de acertos dos estudantes do 4º ano apresentou amplitude reduzida (8-12), com mediana 12, isto indica que todos alunos de 4º ano fizeram de 8 a 12 acertos, no entanto a metade destes acertou os 12 cálculos. O teste Wilcoxon verificou que a diferença entre as medianas é estatisticamente significativa ($p<0,0001$).

As proporções de acertos por grupo de cálculos foram verificadas, de acordo com a tabela 4. Para tanto, os cálculos foram agrupados pelas suas caraterísticas principais:

Tabela 4 - Proporções de acertos nos grupos de cálculos

Grupo de cálculos	**2º ano**	**4º ano**	**p- valor**
Soma sem reagrupamento 33+33, 73+26	75%	100%	p=0,0086
Soma com reagrupamento 34+36, 47+28, 56+29, 65+35	41,67%	97,02%	p<0,0001
Subtração com reagrupamento 46-19, 63-25, 31-29	19,84%	84,92%	p<0,0001
Subtração sem reagrupamento 66-33, 88-34, 95-15	67,46%	100%	p<0,0001
TOTAL	**48,21%**	**95%**	**p<0,0001**

Fonte: elaborado pela autora. Legenda: nível de significância à 0,05.

Os dados da tabela acima comparam o desempenho dos estudantes de 2º e 4º ano por grupos de cálculos da tarefa avaliativa. A diferença de desempenho foi significativa em todos os grupos e no total dos cálculos ($p<0,0001$), com destaque para as subtrações que exigiam reagrupamento que apresentaram as menores proporções de acerto. Ou seja, fica evidente a superioridade do desempenho do 4º ano em relação ao 2º ano, fato que parece ter influenciado os dados gerais da pesquisa.

2.6 DISCUSSÃO

O objetivo deste estudo foi verificar os perfis de flexibilidade cognitiva no cálculo mental de estudantes brasileiros, do 2º e 4º anos do Ensino Fundamental, na perspectiva da adequação dos elementos cognitivos que sustentam o processo de solução do cálculo mental proposto por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017). Em seguida, os perfis foram associados ao desempenho aritmético e ao nível socioeconômico para compreender o contexto da flexibilidade em estudantes brasileiros. Por fim, verificou-se a adequação da tarefa avaliativa de flexibilidade à realidade brasileira.

O primeiro objetivo deste estudo propõe a identificação dos graus de flexibilidade no cálculo mental através da análise dos elementos cognitivos que sustentam o processo de solução. A análise de dados demonstrou que os três perfis de raciocínio foram encontrados a partir da avaliação qualitativa inicial de métricas de frequência e repertório de raciocínio por características do problema (RCP) e de raciocínio por procedimento de solução (RPS). O exame destes dois indicadores mostrou-se importante para a definição dos perfis, posto que as descobertas relativas ao repertório ofereceram uma verificação importante dos resultados relatados pela frequência dos raciocínios e pode ser o fator principal no efeito significativo de cada perfil, porque o dado de frequência isolado pode mascarar a variabilidade do raciocínio das crianças. Na sequência, análises estatísticas confirmaram que os perfis flexível, misto e rígido atenderam aos critérios mais amplos propostos por Rathgeb-Schnierer e Green (2015, 2017), em que o perfil flexível é caracterizado pelo predomínio do raciocínio por características do problema e desempenho dinâmico. Quando a base do raciocínio eram os procedimentos de solução e a atuação estática, os alunos eram considerados rígidos. Enquanto os estudantes descritos como raciocínio misto, apresentam uma mescla de raciocínio baseado em características do problema e em procedimentos de solução.

Os estudantes flexíveis (8 alunos do 2º ano e 8 alunos do 4°ano) apoiaram seu raciocínio nas características do problema, com notável variedade e frequência de argumentos desta categoria*,* mas quando raciocinaram sobre procedimentos de solução, seu pensamento era mais restrito e, deste modo, apresentaram diferença significativa entre RCP e RPS. O perfil de raciocínio misto (19 alunos de 2º ano e 34 alunos de 4º ano) é o maior grupo e o mais difícil de caracterizar, visto que os estudantes apresentaram desempenhos diferentes entre si, em que parte dos alunos apresentaram preferências por RCP e outros por RPS ou, então, apresentaram alta frequência e reduzido repertório de raciocínios. Neste sentido, as medianas similares ao perfil flexível se devem a grande variabilidade de raciocínios que compôs o perfil misto. O grupo de alunos rígidos (15 alunos de 2º ano) apresentou o raciocínio equilibrado entre RCP e RPS, indicando leve tendência do último, com uma série de raciocínios bastante restrita. No entanto, os dados do perfil rígido precisam ser interpretados considerando a influência do instrumento de avaliação da flexibilidade que será discutido na análise do terceiro objetivo.

Do total de estudantes, 19% dos alunos foram descritos como flexíveis, 18% foram definidos como rígidos e a maioria (63%) apresentou uma mistura de raciocínio rígido e flexível. Por consequência destes achados, confirma-se a hipótese de que a flexibilidade apresenta um caráter contínuo, ou seja, não se trata de ter ou não flexibilidade, mas de que esta se desenvolve gradativamente. Essa importante característica da flexibilidade cognitiva sugere que a ação pedagógica pode promover ganhos nesta habilidade (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; NEWTON; STAR, 2009; RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015). Tais resultados assemelham-se aos encontrados por Rathgeb-Schnierer e Green (2017) em alunos de 2º e 4º anos, da Alemanha e Estados Unidos, quanto à presença dos três perfis de raciocínio e sobre a caracterização geral de cada um deles, o que traz consistência aos achados verificados no presente estudo.

O segundo objetivo deste estudo trata-se de ampliar a compreensão da flexibilidade cognitiva em estudantes brasileiros, participantes deste estudo, associando às variáveis desempenho aritmético e nível socioeconômico aos perfis de raciocínio. Esperava-se encontrar associação entre os graus mais altos de flexibilidade com o desempenho superior no Subteste de Aritmética (STEIN, 1994) e com níveis econômicos mais elevados, porém essa hipótese não foi confirmada. Não houve interações significativas entre os perfis de raciocínio e as duas variáveis avaliadas, contudo, estes resultados levantam algumas possibilidades de análise. Quanto ao desempenho aritmético, parece haver uma dissonância entre os conhecimentos avaliados pelo instrumento de avaliação da flexibilidade proposto por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) e o Subteste de Aritmética (STEIN, 1994), que levaram à falta de significância entre ambos. Enquanto o primeiro está interessado no conhecimento numérico envolvido no cálculo mental, nas relações e padrões que a criança estabelece entre os números para sustentar seu raciocínio, o segundo parece estar mais restrito a habilidades procedimentais para a execução do cálculo escrito e mecanizado, que podem ser bem executadas através da prática, independente de um conhecimento numérico mais aprofundado. Por exemplo, na avaliação da flexibilidade a criança era incentivada a pensar sobre os números para resolver um cálculo, pois o objetivo era compreender o processo de resolução, assim o estudante estabelecia diversas relações para chegar ao resultado, de acordo com seu conhecimento, como a decomposição, a associação dezena e unidade, o conhecimento de fatos básicos ou até mesmo o algoritmo padrão. Já na avaliação de aritmética, por se tratar de um teste escrito, os estudantes utilizavam a contagem (com representação gráfica) e principalmente o algoritmo padrão, pois parte dos cálculos eram apresentados no modelo deste procedimento, parecendo, desta forma, que o interesse desta testagem está apenas no resultado dos cálculos, independente do raciocínio envolvido. Este resultado vai ao encontro do que Heirdsfield e Cooper (2002) verificaram sobre a compreensão numérica. Os autores afirmam que o entendimento mais complexo é necessário para o cálculo mental flexível, mas pouca ou nenhuma compreensão é necessária para o uso do algoritmo de lápis e papel. Estatisticamente, o desempenho aritmético foi equivalente entre os três perfis de flexibilidade cognitiva. Para a amostra deste estudo, a flexibilidade cognitiva não foi um parâmetro de competência aritmética, diferenciando os desempenhos médio e superior em aritmética.

Quanto ao nível econômico, o fator limitador foi o tamanho da amostra (n=84) que, distribuída entre os diferentes níveis econômicos e perfis de flexibilidade, não alcançou um número amostral significativo. Caso o tamanho da amostra não tivesse sido a causa da ausência de relação estatística, o resultado poderia estar alinhado aos achados de Star et al (2015) de que a classe econômica pode não estar tão fortemente associada ao desenvolvimento de flexibilidade.

O terceiro objetivo foi verificar a adequação da tarefa avaliativa de flexibilidade com base no desempenho dos estudantes de 2º e 4º ano nos cálculos deste instrumento. Esperava-se encontrar diferenças no desempenho entre os alunos de 2º e de 4º ano na tarefa de flexibilidade, no entanto, sem impactar nos resultados da pesquisa. Em primeiro lugar, é necessário salientar que a tarefa avaliativa se mostrou efetiva em evidenciar o raciocínio das crianças, posto que o primeiro objetivo do estudo foi alcançado. A primeira etapa de classificação dos cálculos em “fáceis” ou “difíceis” viabilizou a reflexão sobre os processos de cálculos, como verificado nos 2.420 raciocínios categorizados. Este achado confirma estudos anteriores que evidenciaram a validade do instrumento de autorrelato no campo da investigação matemática (CAVIOLA et al., 2018; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015).

Discutido isso, a discrepância de desempenho entre os dois anos escolares na resolução dos cálculos da tarefa avaliativa indica que esse instrumento apresentou limitações para verificar os perfis de flexibilidade da amostra de estudantes brasileiros deste estudo. A complexidade dos cálculos inviabilizou a conclusão da tarefa e, em decorrência disto, a análise completa do raciocínio de parte das crianças do 2º ano. Como os cálculos foram projetados para evidenciar características e relações numéricas específicas a serem percebidas pelas crianças, ao não finalizar a tarefa os estudantes não tiveram oportunidade de demonstrar o seu conhecimento. Por consequência, dentre os alunos do 2º ano, os que apresentaram desempenho mais baixo na tarefa avaliativa compuseram o perfil rígido, exclusivamente. Os resultados deste grupo de estudantes foram significativamente mais baixos do que dos demais indivíduos da amostra, ou seja, os alunos rígidos não tiveram condições adequadas. Deste modo, a hipótese foi parcialmente confirmada, pois a diferença no desempenho do 2º e 4º anos impactou nos resultados da pesquisa. Esse resultado confirmou a preocupação de pesquisas anteriores de adequar o grau de dificuldade dos cálculos da tarefa avaliativa, de modo a não impactar negativamente nos resultados (CAVIOLA et al., 2018; SELTER, 2001).

2.7 LIMITAÇÕES

Considerando as limitações destacadas sobre a adequação do nível de dificuldade dos cálculos da tarefa avaliativa de flexibilidade e sobre o limitado tamanho amostral, deve-se analisar os dados à luz da influência destes aspectos nos resultados da pesquisa. Estas limitações dificultam o aprofundamento da discussão, e a generalização dos dados encontrados.

O instrumento de avaliação da flexibilidade apresentou uma limitação importante relacionada ao grau de dificuldade dos cálculos para a amostra de 2º ano brasileira, como foi bem destacado durante discussão. Esta é a limitação mais importante deste estudo, portanto os dados sobre os estudantes do perfil rígido devem ser considerados mediante a influência do instrumento de avaliação.

O número amostral foi um fator limitador, embora tenha-se realizado o cálculo estatístico, visto que a possibilidade inicial de análise era comparar os resultados obtidos no Brasil com os dados de estudantes alemães e americanos através de um estudo transcultural, mas acabaram se transformando durante a coleta e análise de dados. A inexperiência em analises estatísticas impediram a pesquisadora de prever este tipo de erro.

Outro ponto importante a ser considerado é a influência da pesquisadora sobre os dados gerados pelos sujeitos da amostra. A pouca prática inicial com o instrumento e, a experiência adquirida no decorrer da coleta de dados podem ter produzido diferentes resultados em termos da quantidade e da qualidade das respostas dos estudantes. Embora apontada essa limitação do estudo, a pesquisadora esteve atenta a estes aspectos durante o processo de coleta de dados, para ajustar seu curso de pesquisa, de modo a minimizar o impacto nos resultados. A pesquisa em educação demanda constante reflexão sobre a prática para que não se recaia em vícios que comprometam a análise dos dados.

2.8 IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS E PARA A PESQUISA

Este estudo traz importantes contribuições para a educação brasileira e para o cenário de pesquisa internacional.

Primeiro, o estudo apresenta uma habilidade específica da matemática que tem sido empregada em diversos países como uma forma de promover níveis mais elevados de educação matemática. A flexibilidade cognitiva se refere a uma forma de pensar matematicamente, implicando a existência de haver diferentes formas de se fazer a mesma matemática. Para isso, é essencial ir além do ensino de estratégias de contagem e do algoritmo padrão como únicas formas viáveis de cálculo.

Para tanto, é importante que os programas de formação de professores dediquem mais espaço para a matemática em suas matrizes curriculares, não obstante, talvez mais importante que isso, seja a necessidade de aprofundamento nos aspectos subjacentes à matemática. Uma ampla compreensão de como a aprendizagem matemática e o pensamento das crianças se desenvolve é fundamental para promover aprendizagens significativas. Além disso, preparar os professores para as situações de discussão, reflexão e comparação dos diferentes meios de solução pode ser uma abordagem apropriada para promover a destreza com cálculo mental e ampliar o conhecimento numérico.

Dado o potencial de desenvolvimento gradual da flexibilidade, conhecer e identificar os perfis de raciocínio dos estudantes fornece informações importantes para o professor planejar e adaptar atividades curriculares, organizar o discurso matemático de sala de aula, criar situações de ensino significativas e estimulantes que promovam conhecimentos flexíveis e a competência matemática.

Para a pesquisa, este estudo introduz uma importante contribuição sobre a realidade brasileira, que difere em muitos aspectos dos países com maior tradição de pesquisa em flexibilidade. Além disso, essa iniciativa introduz tal habilidade no campo de estudo brasileiro que pode trazer notoriedade para esta importante habilidade matemática nos espaços de formação docente.

2.9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo teve como objetivo geral identificar os perfis de flexibilidade cognitiva no cálculo mental em estudantes brasileiros de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental. Em virtude do ineditismo desta pesquisa, buscou-se ampliar a compreensão sobre a amostra para relacionar as variáveis socioeconômicas e de desempenho aritmético à flexibilidade, como também verificar a adequação da tarefa avaliativa para a realidade brasileira. Para tanto, inicialmente foram contextualizadas as diferentes variáveis que influenciam a forma como a flexibilidade pode ser verificada nos estudantes, os métodos avaliativos mais utilizados na área e os principais achados da pesquisa.

Os resultados deste estudo evidenciaram os três perfis de flexibilidade cognitiva, rígido, misto e flexível, nesta amostra de estudantes brasileiros, demonstrando o caráter evolutivo desta habilidade. Tal achado também pode ser um indicativo do potencial de desenvolvimento da flexibilidade mediante ação pedagógica. Portanto, identificar os perfis de raciocínio dos estudantes oferece ao professor uma visão ampla a respeito do conhecimento numérico de seus alunos e, a partir disto é possível traçar um plano de intervenção pedagógica que promova níveis mais sofisticados de pensamento matemático.

Embora o objetivo de ampliar a compreensão da flexibilidade através da associação com as variáveis nível socioeconômico e desempenho aritmético não tenha sido alcançado, foi possível destacar algumas diferenças importantes entre a compreensão numérica e o desempenho aritmético, que envolvem conceitos e habilidades de natureza distinta, fato que pode ter explicado a falta de correlação entre ambos. A ausência desta correlação sugere a necessidade de investir na promoção de conhecimentos conceituais que apoiem as habilidades de cálculo aritmético nos alunos.

A grande variedade de raciocínios apresentados pela amostra demonstrou que a tarefa avaliativa incentivou as crianças a refletirem sobre seu próprio raciocínio, evidenciando o conhecimento numérico subjacente à resolução de cálculos aritméticos. No entanto, a inadequação do grau de dificuldade de seus cálculos impediu que uma parcela dos estudantes demonstrasse seu conhecimento de maneira apropriada, portanto os achados devem ser analisados em vista desta limitação.

De modo geral, este estudo traz indicações importantes sobre a flexibilidade cognitiva que podem contribuir para a ampliação do conhecimento numérico nas escolas brasileiras. Não resta dúvida, no entanto, quanto a necessidade de que mais pesquisas sejam realizadas para que se possa ampliar a compreensão sobre a natureza dos conhecimentos envolvidos na flexibilidade cognitiva.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE EMPRESAS DE PESQUISA. **Critério brasileiro de classificação econômica**. 2014

BAROODY, Arthur J. Mastering the basic number combinations. **Teaching children mathematics**, v. 23, p. 22-31, 2006.

BLÖTE, A. W.; KLEIN, A. S.; BEISHUIZEN, M. Mental computation and conceptual understanding. **Learning and instruction**, v. 10, n. 3, p. 221-247, 2000.

BLÖTE, A. W.; VAN DER BURG, E.; KLEIN, A. S. Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. **Journal of Educational Psychology**, v. 93, n. 3, p. 627, 2001.

BROCARDO, J.; MENDES, F.; DELGADO, C. Entrevistas clínicas para estudar a flexibilidade no cálculo numérico. **Entre a teoria, os dados e o conhecimento (II): olhares para uma realidade**, p. 85-89, 2014.

CAVIOLA, S.; MAMMARELLA, I. C.; PASTORE, M.; LEFEVRE, J. A. . Children's strategy choices on complex subtraction problems: individual differences and developmental changes. **Frontiers in psychology**, v. 9, p. 1209, 2018.

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática. **Revista Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 298-309, 2010.

CORSO, H. V.; SPERB, T. M.; SALLES, J. F. Comparação Entre Maus Compreendedores e Bons Leitores em Tarefas Neuropsicológicas [Comparison between poor comprehenders and typical readers in neuropsychological tasks]. **Psicologia em Pesquisa***,* v. 7, p. 37–49, 2013.

DORNELES, B. V.; HAASE, V. G. Aprendizagem numérica em diálogo: neurociências e educação. In: LENT, R; BUCHWEITZ, A.; MOTA, M.B. (Org.). **Ciência para Educação: uma ponte entre dois mundos**. 1 ed. São Paulo: Editora Atheneu, 2018, v. 1, p. 133-160

ELLIS, S. Strategy choice in sociocultural context. **Developmental Review**, v. 17, n. 4, p. 490-524, 1997.

FERREIRA, E., SERRAZINA, L. Strategies and procedures: what relationship with the development of number sense of students? In: PYTLAK, M; SWOBODA, E; ROWLAND, T (Eds.). **Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, Poland, 2011, p 307-315.

HARTNETT, J. E. Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. WATSON; K. BESWICK (Ed.), Mathematics: Essential Research, Essential Practice**. Proceedings of the thirtieth**

annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Hobart: MERGA, 2007. v.1, p. 345-352

HATANO, G. Cognitive consequences of practice in culture specific procedural skills. **The Quartely Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition**,v. 4, n.1, p. 15-18,1982

HATANO, G. Prefácio. In BAROODY, A.J.; DOWKER, A. (Eds.), **The development of arithmetic concepts and skills** (p. 10-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2003

HATANO, G.; OURA, Y. Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. **Educational researcher**, v. 32, n. 8, p. 26-29, 2003.

HATANO, G. Social and motivational bases for mathematical understanding. **New directions for child and adolescent development**, v. 1988, n. 41, p. 55-70, 1988.

HEINZE, A.; MARSCHICK, F.; LIPOWSKY, F. Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 591-604, 2009.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J. Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 23, n. 4, p. 443-463, 2004.

HEIRDSFIELD, Ann M.; COOPER, Tom J. Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. The Journal of Mathematical Behavior, v. 21, n. 1, p. 57-74, 2002.

HUNTING, R. P. Clinical interview methods in mathematics education research and practice. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 16, n. 2, p. 145-165, 1997.

LEMAIRE, P.; SIEGLER, R. S. Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. **Journal of Experimental Psychology**: General, v. 124, n. 1, p. 83, 1995.

LUWEL, K; LEMAIRE, P; VERSCHAFFEL, L. Children's strategies in numerosity judgment. **Cognitive Development**, v. 20, n. 3, p. 448-471, 2005

MENDES, M. F. P. C. **A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1. º ciclo**. 2012. 591 f. Tese (Doutorado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2012.

NEWTON, K. J.; STAR, J. R. Exploring procedural flexibility in struggling Algebra students. In: **31st Annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Atlanta, GA. 2009.

RECHTSTEINER-MERZ, C.; RATHGEB-SCHNIERER, E. Flexible mental calculation and "Zahlenblickschulung". In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 2015. p. 354-360.

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems. In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 2015. p. 339-345.

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. In: **Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**.2013. p. 353-362

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Profiles of cognitive flexibility in arithmetic reasoning: a cross-country comparison of German and American elementary students. **Journal of Mathematics Education**, v. 10, n. 1, p. 1-16, 2017.

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M. 'Day number': a promoter routine of flexibility and conceptual understanding. In: **13th International Congress on Mathematical Education**. 2016.

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M. A tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo. **GD1-Design de tarefas**, p. 109-120, 2014.

SIEGLER, R.S.; LEMAIRE, P. Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. **Journal of experimental psychology: General**, v. 126, n. 1, p. 71, 1997.

SELTER, C. Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 47, n. 2, p. 145-173, 2001

SPINILLO, Alina Galvão. Usos e funções do número em situações do cotidiano. In: BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Quantificações, registros e agrupamentos. Brasília: Mec, Seb, 2014. p. 20-29.

STAR, J. R.; NEWTON, K.; POLLACK, C.; KOKKA, K.; RITTLE-JOHNSON, B.; DURKIN, K. Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. **Contemporary Educational Psychology**, v. 41, p. 198-208, 2015.

STEIN, L. M. TDE: teste de desempenho escolar: manual para aplicação e interpretação. **São Paulo: Casa do Psicólogo**, p. 1-17, 1994.

STERNBERG, R. J. Introdução à Psicologia Cognitiva. **Sterberg, R.J. Psicologia Cognitiva. Porto Alegre: Artmed**, 2008.

3 DIFERENTES PERFIS DE FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM ESTUDANTES BRASILEIROS DE 2º E 4º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM INDICADOR DE SENSO NUMÉRICO?

Resumo: Este artigo tem como objetivo comparar a diferença de perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental entre estudantes de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise dos elementos cognitivos, a saber características dos problemas e procedimentos de solução, utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. O conhecimento numérico é um indicador de flexibilidade cognitiva no cálculo mental, na perspectiva teórica adotada pelo estudo, e, portanto, estes aspectos são relacionados ao senso numérico na revisão teórica inicial. A amostra deste estudo incluiu 42 estudantes de 2º ano e 42 estudantes de 4º ano, totalizando 84 alunos de quatro escolas públicas de Porto Alegre. Cada criança foi encorajada a classificar 12 cálculos aritméticos, demonstrando seu conhecimento numérico ao explicar o raciocínio envolvido na resolução dos cálculos. Os resultados qualitativos e quantitativos, de modo geral, revelaram que as diferenças de proporções de uso de conhecimento numérico diferenciaram os perfis de flexibilidade entre os anos escolares. Os estudantes do 4º ano revelaram maior grau de flexibilidade do que seus pares do 2º ano. De acordo com estes resultados, e com o quadro educacional brasileiro, argumenta-se que a flexibilidade cognitiva demonstrada pelos estudantes está relacionada ao senso numérico informal da amostra.

Palavras chaves: Cálculo mental. Flexibilidade cognitiva. Senso numérico.

Abstract: This article aims to present the difference of cognitive flexibility profiles in mental calculation between 2nd and 4th grade students of Elementary School, based on the analysis of cognitive elements, namely problem characteristics and solution procedures, used during the resolution of arithmetic calculations. Numerical knowledge is an indicator of cognitive flexibility in mental calculation from the theoretical perspective adopted by this study and, therefore, these aspects are related to the number sense in the initial theoretical revision. The sample of this study included 42 2nd graders, and 42 4th graders, totaling 84 students from 4 public schools in Porto Alegre. Each child was encouraged to classify 12 arithmetic calculations, thus demonstrating their numerical knowledge by explaining the thought process involved in solving the calculations. In general, the qualitative and quantitative results revealed that the different proportions of numerical knowledge used made it possible to distinguish the flexibility profiles between the two grades, it also showed that the 4th grade students presented a greater degree of flexibility than their 2nd grade counterparts. According to these results, and taking into account the Brazilian educational system, it is argued that the cognitive flexibility demonstrated by the students is related to the informal number sense of the sample.

Keywords: Mental calculation. Cognitive flexibility. Number sense.

3.1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem da aritmética constitui um processo complexo para as crianças. Neste sentido, é essencial que os alunos conheçam e utilizem relações numéricas nos cálculos que efetuam (SANTOS; RODRIGUES, 2013).

Para Blöte, Van der Burg e Klein (2001), a flexibilidade no cálculo mental é vista como o uso de estratégias eficientes que são escolhidas de acordo com as combinações numéricas do cálculo em questão. Threlfall (2009) refere que a estratégia não é escolhida, visto que, como defende o autor, os alunos chegam à solução através de um processo que não é totalmente consciente, envolvendo uma ligação entre o que os alunos percebem nos números de um cálculo e o que eles sabem acerca destes números.

O presente artigo tem por objetivo comparar os perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental, de estudantes de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise dos elementos cognitivos utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. Para tanto, será abordada a temática de cálculo mental flexível, bem como sua relação com o senso numérico e as diferenças de ênfase de ensino nos distintos países em que a flexibilidade é pesquisada.

3.2 FLEXIBILIDADE EM CÁLCULO MENTAL

Threlfall (2002, 2009) afirma que a flexibilidade é uma habilidade fundamental para a competência matemática, embora argumente que ninguém precisa ter raciocínio flexível para ser eficiente em cálculos matemáticos. Ainda que a afirmação pareça controversa, Threlfall (2002, 2009), com base nos dados de pesquisa de Blöte, Klein e Beishuizen (2000), explica que se o foco do ensino for apenas o desempenho matemático imediato, envolvendo as atividades diárias de sala de aula, ensinar algumas estratégias que se apliquem a todos os cálculos, provavelmente será o suficiente. No entanto, se o propósito de ensinar cálculos estiver relacionado ao desenvolvimento de habilidades de pensamento, em termos de uma maneira de pensar com os números, em que haja implicações para a aprendizagem de outros domínios matemáticos, então o cálculo mental flexível é válido.

Na perspectiva de Threlfall (2002), o cálculo mental está relacionado a métodos significativos, com uma forte base conceitual que sustenta o seu processo e que, para o autor, é qualitativamente diferente das estratégias mentais ensinadas nas escolas e, principalmente, do algoritmo padrão. Embora Threlfall (2009) não negue o valor destes procedimentos para o desempenho escolar a curto prazo, o autor não acredita nos impactos positivos destes em outros aspectos do desenvolvimento matemático.

As estratégias de cálculo mental diferem dos algoritmos escritos porque exigem mais do que a aplicação de um procedimento passo a passo, requerem a aplicação de um conhecimento mais profundo de como os números funcionam (HARTNETT, 2007). Este ponto parece estar relacionado com as duas formas de resolver cálculos aritméticos de múltiplos dígitos, referenciados por Hickendorff, Torbeyns e Verschaffel (2017), que são as estratégias baseadas em números e em dígitos, esta última referindo-se aos algoritmos padrão. Já as estratégias baseadas em números operam sobre os números, respeitam o seu valor posicional e são aplicadas através de cálculo mental.

Em perspectiva semelhante, Buys (2008, *apud* THRELFALL, 2009) destaca que o cálculo mental permite calcular livremente, sem restrições, possibilitando o desenvolvimento de novas estratégias de cálculo ou usando números de referência e estratégias do repertório pessoal. O autor assinala três características importantes do cálculo mental: (I) opera com números e não com dígitos; (II) usa propriedades elementares das operações e relações numéricas; e (III) permite o recurso a registros intermediários em papel. A ideia de cálculo mental está centrada no trabalho com números, suas relações e padrões, e operações relacionadas à noção de um cálculo pensado e não mecanizado (MENDES, 2012). Corroborando essa ideia, Verschaffel, Greer e De Corte (2007, p. 566, *apud* TEIXEIRA; RODRIGUES, 2015) referem que

> não é a presença ou ausência de papel e lápis, mas sim a natureza das entidades matemáticas e as ações que são cruciais na distinção entre cálculo mental e algoritmos (escritos).

Deve-se estabelecer, portanto, a diferenciação entre o cálculo mental e o cálculo mecanizado sem a relação inerente deste com o cálculo escrito, uma vez que um algoritmo pode ser realizado mentalmente (THRELFALL, 2002), tal como as estratégias de cálculo mental podem requerer o apoio do registro escrito para auxiliar a memória de trabalho, conforme destaca Anghileri (2001).

Baroody (2006) afirma que o domínio de fatos básicos leva à proficiência matemática e a fluência em cálculos mentais. Para tanto, a criança inicia pela etapa de estratégias de contagem, em que se estabelecerão as primeiras regularidades matemáticas, passando pelas estratégias inventadas, a partir do conhecimento das famílias de fatos e, por fim, é alcançado o domínio da fluência de cálculo a partir de conhecimento significativo dos padrões e relações numéricas ricamente interconectadas e estabelecidas nas etapas anteriores.

Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) enfatizam que os procedimentos algorítmicos são uma faceta importante da matemática, no entanto, afirmam que sua introdução precoce pode engessar os conhecimentos do sistema decimal, de valor de lugar e do sentido das operações, impedindo, assim, o desenvolvimento do senso numérico[5] das crianças e de outras estratégias de cálculo. As autoras acreditam no valor de materiais didáticos manipuláveis e da representação gráfica (riscos, bolinhas no papel) como meios de estabelecer as representações mentais mais primitivas dos números. Entretanto, lembram que permitir que a criança recorra a estes recursos por muito tempo é limitador para a compreensão do número e para o desenvolvimento de competências matemáticas mais complexas. Por exemplo, permitir o uso de blocos incentiva a contagem 1 a 1 ao invés de estimular o desenvolvimento de relações numéricas. Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) acreditam que o senso numérico e a criação de estratégias pessoais devem ser viabilizados através do cálculo mental e, assim, a introdução do algoritmo deve ser postergada. Este procedimento será mais eficiente quando a competência numérica estiver estabelecida (MENDES, 2012).

Neste sentido, o cálculo mental, como competência matemática, é um instrumento importante (e possível) de avaliação, intervenção e promoção de flexibilidade para os pesquisadores que se ocupam desta habilidade. (BLÖTE; KLEIN; BEISHUIZEN, 2000; BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; SERRAZINA; RODRIGUES, 2016; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017). Do mesmo modo, um crescente corpo teórico tem demonstrado a validade de ensinar cálculos mentais com o propósito de alcançar a competência matemática (BLÖTE; KLEIN; BEISHUIZEN, 2000; BLÖTE; VAN DER

[5] Para fins de padronização do texto, “senso numérico” é adotado como único termo para designar tal constructo.

BURG; KLEIN, 2001; THRELFALL, 2002, 2009; HARTNETT, 2007; MENDES, 2012; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017; FERREIRA; SERRAZINA, 2011; SERRAZINA; RODRIGUES, 2016). Portanto, como refere Threlfall (2002), o valor de se ter facilidade em cálculos mentais não é um ponto que gere dúvida na literatura, mas a natureza exata das habilidades e as competências envolvidas nesta habilidade é menos clara, como, por exemplo, a sua relação com o senso numérico.

3.3 FLEXIBILIDADE COGNITIVA E SENSO NUMÉRICO

Ainda que haja poucos estudos que investiguem a flexibilidade em cálculo mental relacionando-a diretamente ao senso numérico (HARTNETT, 2007; HEIDSFIELD; COOPER, 2004; RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015; REZAT, 2011), muitas pesquisas sobre o senso numérico, em contraponto, mencionam a flexibilidade como uma habilidade integrante, importante e almejada para a consolidação daquele constructo (CORSO; DORNELES, 2010, FERREIRA; SERRAZINA, 2011; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; REZAT; EJERSBO, 2017; SPINILLO, 2014).

Os autores que se ocupam da pesquisa em flexibilidade (VAROL; FARRAN 2007; HARTNETT, 2007) adotam, em geral, o conceito de senso numérico proposto por McIntosh, Reys e Reys (1992), para discuti-lo em relação aos cálculos mentais. Para eles, o senso numérico

> (...) refere-se ao entendimento geral de uma pessoa sobre o número e as operações, juntamente com a capacidade e a inclinação de usar esse entendimento de maneiras flexíveis para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Reflete uma inclinação e uma capacidade de usar números e métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação de informações. (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992, p.3, tradução nossa)

A relação entre o cálculo mental flexível e o senso numérico é identificada de formas diferentes pelos autores – uns afirmam que o cálculo mental flexível é influenciado primordialmente pelo senso numérico (REZAT, 2011) e outros destacam que o desenvolvimento do cálculo mental promove o senso numérico (HEIRDSFIELD; COOPER, 2004). Por fim, há aqueles que, como Varol e Farran (2007) e Hartnett (2007), evidenciam a inter-relação e interdependência entre o cálculo mental e o senso numérico, assumindo que o desenvolvimento de um promove o desenvolvimento de outro.

Rezat (2011), em seu estudo sobre cálculos mentais com números racionais, conclui que todas as estratégias deste campo se originaram de transformações de métodos de solução do domínio dos números naturais. Nenhuma estratégia específica aos números racionais foi observada em sua pesquisa. Este resultado leva o autor à conclusão de que senso numérico (dos números naturais) influencia os cálculos mentais em todos os outros conjuntos numéricos.

A relação entre cálculo mental flexível e senso numérico é complexa, uma vez que seus limites são bastante sutis. Para Heirdsfield e Cooper (2004), os cálculos mentais podem facilitar o senso numérico quando os alunos são encorajados a serem flexíveis. Para serem flexíveis, as crianças necessitam do desenvolvimento de habilidades numéricas avançadas, como fatos básicos, estimativa numérica, evidência de conhecimento de numeração e do efeito da operação sobre os números.

Com o objeto de verificar a hipótese de que o cálculo mental impacta positivamente na aprendizagem matemática das crianças nos anos iniciais, Varol e Farran (2007) revisaram a literatura existente confirmando a sua hipótese inicial. A revisão demonstrou que as crianças, até o 3º ano do Ensino Fundamental, que possuíam habilidades de cálculo mental faziam uso flexível da estrutura do sistema numérico, pois estavam dispostas a dar sentido à matemática, indicando conhecimento conceitual adequado. Nesse sentido, os autores concluíram que os estudantes das séries iniciais "*devem desenvolver senso numérico para obter sucesso no cálculo mental ou vice-versa*" (VAROL; FARRAN, 2007, p. 91, tradução nossa). Harnett (2007) corrobora essa ideia de interdependência ao afirmar que possuir flexibilidade em cálculos mentais exige ter senso numérico, assim como trabalhar com números de modo flexível aprimora o senso numérico.

Para desvendar as diferentes noções de senso numérico utilizadas por pesquisadores contemporâneos, Rezat e Ejersbo (2018) realizaram um levantamento na literatura recente. A revisão em artigos científicos indicou que tanto a flexibilidade em cálculo mental quanto o senso numérico parecem ser, simultaneamente, o ponto de partida e o objetivo do desenvolvimento de uma compreensão conceitual dos números, mesmo que esta relação ainda não seja completamente clara.

No Brasil, Corso e Dorneles (2010) e Spinillo (2014) também referenciam a habilidade de ser flexível com os números em suas definições de senso numérico. O senso numérico, ou sentido de número, como denominam as autoras, respectivamente, é uma forma de pensar matematicamente que se desenvolve dentro e fora do espaço escolar e que possibilita ao indivíduo agir flexivelmente diante das diferentes situações envolvendo problemas numéricos.

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), um importante indicador de senso numérico pode ser verificado quando um aluno escolhe, desenvolve e utiliza métodos de cálculo que incluem o cálculo escrito, o cálculo mental, a estimativa e o uso de calculadoras. Vários aspectos subjacentes ao modelo de senso numérico proposto por estes autores poderiam ser dirigidos à flexibilidade. Talvez essa aproximação teórica seja um dos motivos pelo qual esse conceito seja amplamente adotado por pesquisadores que os relacionem, conforme indicaram Rezat e Ejersbo (2018). Além destes aspectos, os autores apontam que a gama de estratégias inventadas, criativas e baseadas nas noções mais primitivas e informais de senso numérico podem declinar, ironicamente, à medida que o conhecimento matemático formal dos estudantes é ampliado, e os métodos aprendidos passam a ser valorizados. Por fim, McIntosh, Reys e Reys (1992) apontam possíveis sobreposições conceituais ao diferenciar o que se refere ao componente de cálculos, do seu modelo de senso numérico, e à resolução de problemas, indicando quanto o senso numérico e as habilidades de cálculo estão imbricadas.

Os estudos apresentados até aqui demonstraram a existência de muitas semelhanças na forma de definir e operacionalizar estes dois constructos, indicando uma intrínseca conexão entre o senso numérico e a flexibilidade em cálculo mental, que pode ser vantajosa em termos educacionais.

3.4 DIFERENTES ÊNFASES EDUCACIONAIS EM CÁLCULO MENTAL

Há evidências de que diferentes métodos de ensino influenciam o desenvolvimento matemático das crianças (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; MENDES, 2012). A flexibilidade é sensível ao contexto (HATANO; OURA, 2003) e, portanto, pode variar entre os indivíduos de diferentes países submetidos a contextos educacionais específicos.

Mendes (2012) concluiu, a partir da sua análise do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) de Portugal, que o ensino com ênfase em flexibilidade em cálculo mental evidencia a importância do senso numérico, uma vez que o objetivo final do programa é a compreensão dos números e das operações.

Em países como Bélgica, Itália e Holanda, as crianças aprendem cálculo mental de múltiplos dígitos no 2º ano do Ensino Fundamental e são introduzidas ao algoritmo padrão escrito no 3º ano (CAVIOLA et al., 2016, 2018). A Alemanha também tem grande ênfase no cálculo mental nos anos iniciais, com o ensino dos algoritmos da adição e da subtração adiado para o meio do 3º ano (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN-, 2017). Este país também se destaca pelo ensino sistemático e organizado da matemática, com 5 aulas semanais, de 45 minutos, do 1º ao 6º ano do Ensino Fundamental (DELLATOLAS et al., 2000), ao passo que nos Estados Unidos não é dada tanta atenção aos cálculos mentais (BAROODY; DOWKER, 2003). As crianças americanas são introduzidas ao algoritmo padrão no 1º ano, assim que começam a calcular com números de dois dígitos (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN-, 2017).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) da matemática (BRASIL,1997) indicam que no primeiro ciclo devem ser enfatizadas as construções de soluções pessoais, enquanto os procedimentos formais de resolução de problemas são introduzidos no segundo ciclo. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da matemática (BRASIL, 2017) refere que os conhecimentos matemáticos são retomados, ampliados e aprofundados ano a ano, de modo que cada habilidade serve de base para as aprendizagens posteriores. Neste sentido, no 2º ano, as crianças são estimuladas a procurar regularidades no sistema decimal, a realizar estimativas, a comparar quantidades de modo que estabeleçam relações e padrões numéricos que apoiarão seus caminhos na solução de problemas matemáticos. No 4º ano, os estudantes aprimoram suas estratégias de cálculos mentais e escritos (formais e informais), relacionando-as aos algoritmos padrão das operações matemáticas e adequando o seu uso aos diferentes contextos de resolução de problemas. No entanto, o ensino brasileiro parece ser bem menos sistemático (DELLATOLAS et al., 2000), uma vez que os algoritmos, de modo geral, tendem a ser a única forma de ensinar a calcular. (NUNES et al., 2005).

3.5 PESQUISAS EM FLEXIBILIDADE EM CÁLCULO MENTAL

Embora a flexibilidade seja estudada há décadas, ainda há muito a ser investigado, especialmente no que tange às habilidades envolvidas no cálculo mental e sua relação com o senso numérico. A seguir serão apresentadas algumas pesquisas que estudam a flexibilidade através da resolução de cálculos mentais, vinculada ao conhecimento numérico.

Blöte, Van der Burg e Klein (2001) examinaram os efeitos de duas ênfases de ensino em crianças holandesas de 2º ano. A primeira ensinava conceitos junto com as habilidades procedimentais, enquanto a segunda teve ênfase na aquisição do procedimento padrão. O objetivo deste estudo foi examinar a influência do ensino sobre a aritmética mental e a flexibilidade. Os resultados demonstram que o programa de ensino com base em conceitos foi mais bem-sucedido em ensinar aos estudantes uma maneira flexível de pensar no domínio da adição e subtração de dois dígitos. Desta forma, parece importante ensinar os alunos sobre o uso flexível dos procedimentos de cálculo mental, desde o início da escolarização, pois os estudantes deste estudo que aprenderam inicialmente o procedimento padrão continuaram a usá-lo, mesmo depois de terem aprendido diferentes procedimentos.

Heirdsfield e Cooper (2004) estudaram os procedimentos mentais e a compreensão da adição e subtração em cálculos multidígitos de seis alunos australianos de 3º ano. Os resultados apontaram que os estudantes flexíveis escolheram e implementaram as estratégias apoiados em uma ampla compreensão numérica (senso numérico), conhecimento de fatos básicos, metacognição, efeito de operação na compreensão de números e forte crença em suas próprias estratégias. Os alunos inflexíveis aplicaram uma estratégia automática (imagem mental do algoritmo de lápis e papel) para compensar o seu conhecimento limitado, assim como suas crenças metacognitivas os levavam a não verificar suas soluções, pois confiavam na precisão do procedimento ensinado pelo professor.

Com o objetivo de entender como os alunos desenvolvem o senso numérico em um contexto de resolução de problemas, Ferreira e Serrazina (2011) analisaram os procedimentos de Daniel, um aluno do 2º ano do ensino fundamental, inserido em um experimento de ensino em sala de aula que incentivava a comunicação, discussão e raciocínio. Um dos resultados demonstrou que Daniel não utilizou a estratégia de solução esperada para os cálculos de subtração, mas justificou suas respostas com estratégias e procedimentos adequados. Para as autoras, esse resultado pode estar relacionado com a flexibilidade de Daniel com os números e suas manipulações, o que possibilitou a invenção de procedimentos novos.

A abordagem de Rechtsteiner-Merz e Rathgeb-Schnierer (2015) visa promover o "*Zahlenblick*[6]", que, conforme as autoras, é um constructo semelhante à noção de senso numérico, para desenvolver a flexibilidade no cálculo mental. Esse constructo é definido como:

> Zahlenblick é considerado um resultado do desenvolvimento e significa a competência para reconhecer as características do problema, os padrões de número e as relações numéricas imediatamente, e usá-las para resolver problemas (RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015, p.355, tradução nossa).

As pesquisadoras investigaram como uma abordagem especial chamada "*Zahlenblickschulung*" apoiou 12 crianças com dificuldades em aprender matemática em comparação aos 8 estudantes submetidos ao ensino regular, matriculados no 1º ano do Ensino Fundamental. A análise de dados demostrou que a instrução com "*Zahlenblickschulung*" ofereceu suporte aos alunos menos avançados no desenvolvimento de flexibilidade no cálculo mental, uma vez que o reconhecimento de padrões e relações numéricas foi crucial para aprender a calcular, para além da contagem.

Rathgeb-Schnierer e Green (2017) utilizam os cálculos mentais como meio para avaliar a flexibilidade cognitiva de 69 estudantes americanos e alemães de 2º e 4º ano no total. A noção de flexibilidade destes pesquisadores (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015) é baseada no modelo de processo de cálculo, semelhante à *"interação entre perceber e conhecer"* de Threlfall (2002, p.29, tradução nossa). Neste sentido, o objetivo do estudo foi verificar se os alunos reconhecem e usam as características, padrões e relações numéricas na resolução de cálculos mentais. Esta compreensão numérica é um indicador de raciocínio flexível, em contrapartida, os procedimentos passo a passo indicam uma forma rígida de raciocínio matemático. Tanto as características numéricas percebidas nos cálculos, quanto os procedimentos de solução são classificados como elementos cognitivos que sustentam o processo de solução do cálculo mental (RATHGEB-SCHNIERER;

---

[6]Tradução nossa aproximada: Visão de Número

GREEN, 2013, 2015). Os resultados da pesquisa demonstraram uma variedade de padrões de raciocínio maior do que a esperada, com um total de 902 raciocínios.

Os autores encontraram 3 perfis de raciocínio matemático: (1) raciocínio flexível - predomínio do uso de caraterísticas e relações numéricas durante a resolução dos cálculos; (2) raciocínio misto – caracterizado pelo equilíbrio no uso de características e relações numéricas e procedimentos de solução e; (3) raciocínio rígido – preferências pelos procedimentos de solução. Os autores não encontraram diferenças significativas entre os estudantes dos dois países investigados, nem entre os anos escolares americanos. No entanto, os estudantes alemães de 4º ano apresentaram um raciocínio significativamente mais flexível do que os alunos do 2º ano, possivelmente pela maior experiência com os números (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017)

Caviola et al. (2018) examinaram como as escolhas estratégicas de 160 crianças italianas, de 3º e 5º ano, estão relacionadas ao grau e às variações de complexidade das características dos cálculos. As análises do repertório de estratégias indicaram que as crianças do 3º ano tinham maior probabilidade de relatar estratégias menos eficientes (ou seja, contagem) e dependiam mais do algoritmo (da direita para a esquerda) em comparação às crianças do 5º ano, que usaram mais recuperação de fatos básicos e estratégias da esquerda para a direita baseadas em conceitos (decomposição). No entanto, todas as estratégias foram utilizadas pelas crianças de 3º e 5º ano e o uso variou de acordo com a complexidade do cálculo.

Em síntese, os estudos apresentados destacam o papel das habilidades de cálculo mental no desenvolvimento da flexibilidade, bem como a relação destes com o senso numérico. Há evidências de que os alunos flexíveis tem conhecimento de características, padrões e relações numéricas (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; FERREIRA; SERRAZINA, 2011; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017; RECHTSTEINER-MERZ; RATHGEB-SCHNIERER, 2015) e que os estudantes que preferem o uso de procedimentos de solução apresentam um raciocínio matemático limitado (BLÖTE; VAN DER BURG; KLEIN, 2001; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017).

3.6 O PRESENTE ESTUDO

Este estudo, de caráter transversal, visa verificar a diferença de perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental entre estudantes de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise dos elementos cognitivos utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos.

3.6.1 Objetivos específicos

1) verificar como o repertório de características dos problemas e procedimentos de solução, a saber, elementos cognitivos, caracterizam cada perfil de flexibilidade cognitiva no cálculo mental no 2º ano e no 4º ano;

2) comparar o repertório de características e relações numéricas e de procedimentos de solução entre os anos escolares;

3.6.2 Hipóteses

1) O uso de características, padrões e relações numéricas caracterizará cada perfil de flexibilidade, no entanto os procedimentos de solução terão alta proporção de uso devido à ênfase no ensino do algoritmo padrão;

1.2) O uso de características, padrões e relações numéricas, relacionado à flexibilidade do raciocínio, é um indicador de senso numérico nesta amostra de alunos brasileiros.

2) Os estudantes de 4º ano apresentarão maiores proporções de uso do repertório de características numéricas do que os estudantes do 2º ano, de acordo com os resultados encontrados por Rathgeb-Schnierer e Green (2017).

3.6.3 Método

3.6.3.1 Amostra

A amostra foi composta por 42 alunos de 2º ano e 42 alunos de 4º ano do Ensino Fundamental, totalizando 84 estudantes oriundos de quatro escolas estaduais de Porto Alegre. Essas escolas foram escolhidas a partir de critérios de conveniência da pesquisa, apresentando semelhança na metodologia de ensino e nas características socioeconômicas.

Uma amostra inicial de 96 estudantes foi avaliada através do Subteste de Aritmética do Teste de Desempenho Escolar (TDE)(STEIN,1994). Foram incluídos no estudo apenas os alunos que obtiveram desempenho médio e superior na tarefa. Nesta etapa, seis alunos foram excluídos e outras seis crianças foram retiradas da amostra por não concluírem a avaliação da flexibilidade cognitiva (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2017), totalizando os 84 estudantes. A tabela 5 apresenta a caracterização da amostra.

Tabela 5 - Caracterização da amostra

Dados	**Amostra total**	**2º ano**	**4º ano**
Amostra	84	42	42
	100%	50%	50%
Meninas	35	18	17
	100%	51,42%	48,57%
Meninos	49	24	25
	100%	48,97%	51,02%
Média de idade	9,3	8,27	10,33

Fonte: elaborado pela autora

.

3.6.3.2 Instrumentos

3.6.3.2.1 Avaliação de Flexibilidade Cognitiva

O instrumento de avaliação proposto por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) consiste em uma entrevista, direcionada ao reconhecimento das características, padrões e relações numéricas de cálculos de adição e subtração de dois dígitos. Cada questão foi projetada para mostrar, no mínimo, uma característica numérica especial, conforme o quadro 3:

Quadro 3 - Características dos cálculos do instrumento de avaliação de flexibilidade

CÁLCULOS	CARACTERÍSTICAS
33 + 33	• sem reagrupamento, dígitos duplos, dígitos duplos no lugar das unidades, inverso de 66-33.
34 + 36	• com reagrupamento, dígitos duplos no lugar das dezenas, unidades que somam 10.
47 + 28	• com reagrupamento.
56 + 29	• com reagrupamento, 29 perto de trinta.
65 + 35	• com reagrupamento, cinco no lugar das unidades, unidades somam 10.
73 + 26	• sem reagrupamento.
31 - 29	• com reagrupamento, faixa estreita de números, 29 perto de trinta.
46 – 19	• com reagrupamento, 19 perto de vinte.
63 – 25	• com reagrupamento.
66 – 33	• sem reagrupamento, relação de dobro e metade, dígitos dobrados, inverso de 33+33.
88 – 34	• sem reagrupamento, relação de dobro e metade nas unidades.
95 – 15	• sem reagrupamento, cinco no lugar das unidades.

Fonte: adaptado de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2017).

As entrevistas dividiram-se em dois momentos, o primeiro envolvia classificar os cálculos em “fáceis” ou “difíceis” e justificar a classificação e, no segundo, as crianças resolveram os cálculos. Na primeira etapa, os estudantes foram incentivados a observar atentamente os números em cada cálculo para classificá-los nas categorias "fácil" ou "difícil" (estes rótulos foram colocados em cada lado da mesa). Em seguida, foram questionados os motivos da triagem: "Por que esse problema é fácil/difícil para você?". Na segunda fase, os alunos resolveram os cálculos de cada categoria (fácil ou difícil) e explicaram o raciocínio realizado durante a resolução. Os estudantes foram orientados a realizar os cálculos “na cabeça”. Lápis e papel foram disponibilizados sobre a mesa, mas não foram diretamente oferecidos aos alunos.

Somente raciocínios que levaram a uma solução correta foram computados como dado de pesquisa. Além disso, apenas raciocínios que apresentavam coerência com os números dos cálculos foram registrados. As crianças que não chegaram ao resultado correto de nenhum cálculo foram excluídas do estudo.

3.6.3.2.2 Desempenho aritmético

Para avaliar o nível de desempenho aritmético dos estudantes, foi utilizado o Subteste de Aritmética (SA), do Teste de Desempenho Escolar - TDE (STEIN,1994), instrumento padronizado para a cidade de Porto Alegre, composto por 38 questões envolvendo cálculos aritméticos com grau de dificuldade crescente.

Os escores do TDE (STEIN,1994) foram utilizados como critério de inclusão e a amostra representou os alunos com desempenho médio e alto em aritmética.

3.6.3.2.3 Observações em sala de aula

Durante o período da realização da pesquisa nas escolas foram oportunizadas diversas situações de observação das práticas matemáticas em sala de aula e de momentos de diálogo com os docentes responsáveis pelas turmas e com as supervisoras e orientadoras educacionais.

As observações e conversas forneceram dados qualitativos sobre metodologia, comportamento e crenças sobre a matemática, que ajudam a compreender os dados quantitativos da pesquisa. Foram observadas duas aulas de matemática de cada turma participante da pesquisa.

As turmas de 2º ano tinham pouco tempo destinado à matemática, em razão da prioridade dada ao processo de alfabetização. Em todas as turmas, as professoras forneciam e estimulavam o uso de material concreto para apoiar os cálculos. As atividades de matemática presenciadas tratavam-se de sequências de cálculos de adição e subtração a serem resolvidos em silêncio. Os cálculos eram apresentados na vertical, dentro das colunas de dezena e unidade.

O ensino da matemática nas turmas de 4º ano era mais sistematizado, com mais tempo dedicado e maior frequência de aulas destinadas a este conteúdo. Os estudantes, em geral, eram recriminados por contar nos dedos ou recorrer a registros gráficos durante a realização dos cálculos. Tal como no 2º ano, também eram apresentadas longas listas de cálculos na vertical (multiplicação e divisão) a serem resolvidas individualmente, sem troca de ideias entre os colegas.

Entretanto, cabe destacar que as observações foram realizadas no período de final de ano escolar, momento em que são revisados os conteúdos escolares para as avaliações finais, fato que pode ter contribuído para a ênfase em procedimentos matemáticos durante as aulas.

Em conversa com os profissionais da educação, o sistema das aulas de matemática era definido de acordo com o “tempo que sobrou” do ensino de outros conteúdos mais valorizados pela escola ou com base na preferência pessoal do professor: caso gostasse de matemática, mais tempo era disponibilizado ao seu ensino. As professoras não conheciam os termos técnicos e os conceitos de senso numérico, flexibilidade, estratégias de cálculo.

3.6.3.3 Procedimentos

Quanto à participação na pesquisa, o projeto foi apresentado e a permissão foi solicitada aos diretores das escolas, mediante o Termo de Autorização para a realização da pesquisa para as escolas (ANEXO A). O Termo de Participação do professor responsável pela turma (ANEXO B) foi assinado pelo docente de cada sala de aula pesquisada. Os responsáveis autorizaram a participação dos estudantes através da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO C).

No primeiro momento de coleta de dados, o Subteste de Aritmética (STEIN, 1994) foi aplicado coletivamente em sala de aula para selecionar os estudantes com desempenho médio e superior. No segundo momento, foi aplicado individualmente o instrumento de avaliação da flexibilidade, em sala reservada dentro da escola, com duração de tempo que variou de 15 a 60 minutos. As entrevistas foram filmadas para a posterior análise de dados. A coleta de dados ocorreu de outubro de 2017 a janeiro de 2018.

3.6.3.4 Análise de dados

O conteúdo das entrevistas foi analisado e categorizado pelo sistema de codificação desenvolvido por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017), composto por duas categorias principais: raciocínio por característica do problema (RCP) e raciocínio por procedimento de solução (RPS). Estas categorias centrais incluem vários códigos e subcódigos, conforme demonstrado no quadro 4:

Quadro 4 - Categorias de raciocínios

Códigos	**Subcódigos**
RACIOCINIO POR CARACTERISTICA DO PROBLEMA	
ADU – Analogia dezena e unidade	
RN – Relações numéricas	• Dobro e metade; • Quase dobro; * • Número próximo à dezena; • Distância entre os números.
RT – Relações da tarefa	• Associatividade; • Inversos total; • Operação de soma; * • Operação de subtração. *
CU – Características das unidades	• Soma das unidades é 10; • Soma inferior a 10; • Restante e reagrupamento; • 5 em ambas as unidades; • Restante e reagrupamento não é necessário.
NE – Números Especiais	• Mesmos números; • Números com 9; • Dígitos dobrados; • Números pares e ímpares. *

Continuação do Quadro 4 – Categorias de raciocínios

TN – Tamanho dos números	• Ambos os números são pequenos; • Ambos os números são grandes; * • Um dos números é pequeno; * • Um dos números é grande. *
FB – Fatos básicos	• Parte do cálculo conhecido; • Todo o cálculo conhecido.
RACIOCÍNIO POR PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO	
CD – Composição e decomposição	
CT – Contagem	
ED – Encontrar diferenças	
MP - Modificar o problema	
AP – Algoritmo padrão	
OE – Outra estratégia	
*Estas subcategorias surgiram a partir da amostra deste estudo, mas só foram incluídas porque havia lógica no raciocínio empregado.	

Fonte: elaborado pela autora a partir de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017).

O raciocínio por características do problema foi codificado quando os estudantes se referiram especificamente às características do problema, portanto é um raciocínio flexível. O raciocínio por procedimentos de solução foi codificado quando os alunos descreveram qualquer técnica de computação mental, denominada como raciocínio rígido (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN,2017).

3.6.4 Resultados

A partir da categorização das respostas, foram realizadas comparações dos valores de frequência e repertório dos dados de raciocínio por característica do problema (RCP) e raciocínio por procedimento de solução (RPS), através de uma razão que evidenciava a diferença entre os dois tipos de raciocínio. Nesta razão, o valor de cada tipo de raciocínio foi dividido pela sua quantidade de códigos, em seguida o resultado de RCP foi dividido pelo resultado de RPS gerando métricas para repertório e para frequência. Esta análise foi de caráter qualitativo, em que a razão foi estabelecida pela pesquisadora com auxílio de um profissional da estatística para evidenciar as diferenciar as diferenças entre os perfis de raciocínio

Os seguintes valores (aproximados) foram tomados como referência para a distribuição da amostra nos perfis de raciocínio. As métricas menores que 1 indicavam a prevalência de RPS, portanto o perfil dos alunos era rígido. Os valores iguais a 1 indicavam o equilíbrio entre RCP e RPS, assim estes alunos apresentaram raciocínio misto. Por fim, as métricas maiores que 1 representaram preferência pelo RCP e os estudantes foram classificados como flexíveis.

Deste modo, no perfil flexível foram identificados alunos do 2º ano (n=8) e alunos do 4º ano (n=8). No perfil misto também foram observados estudantes de 2º ano (n=19) e de 4º ano (n=34). O perfil rígido foi composto exclusivamente por crianças do 2º ano (n=15).

Para examinar e caracterizar os perfis de raciocínio flexível dos estudantes, o repertório foi calculado a partir do uso ou não de cada item pelos estudantes durante a resolução dos cálculos da tarefa avaliativa. Deste modo, obteve-se as porcentagens de alunos que utilizaram cada recurso dos dois padrões de raciocínio[7]. Assim, foi possível ter a visão da variabilidade do raciocínio em cada grupo dos perfis de flexibilidade.

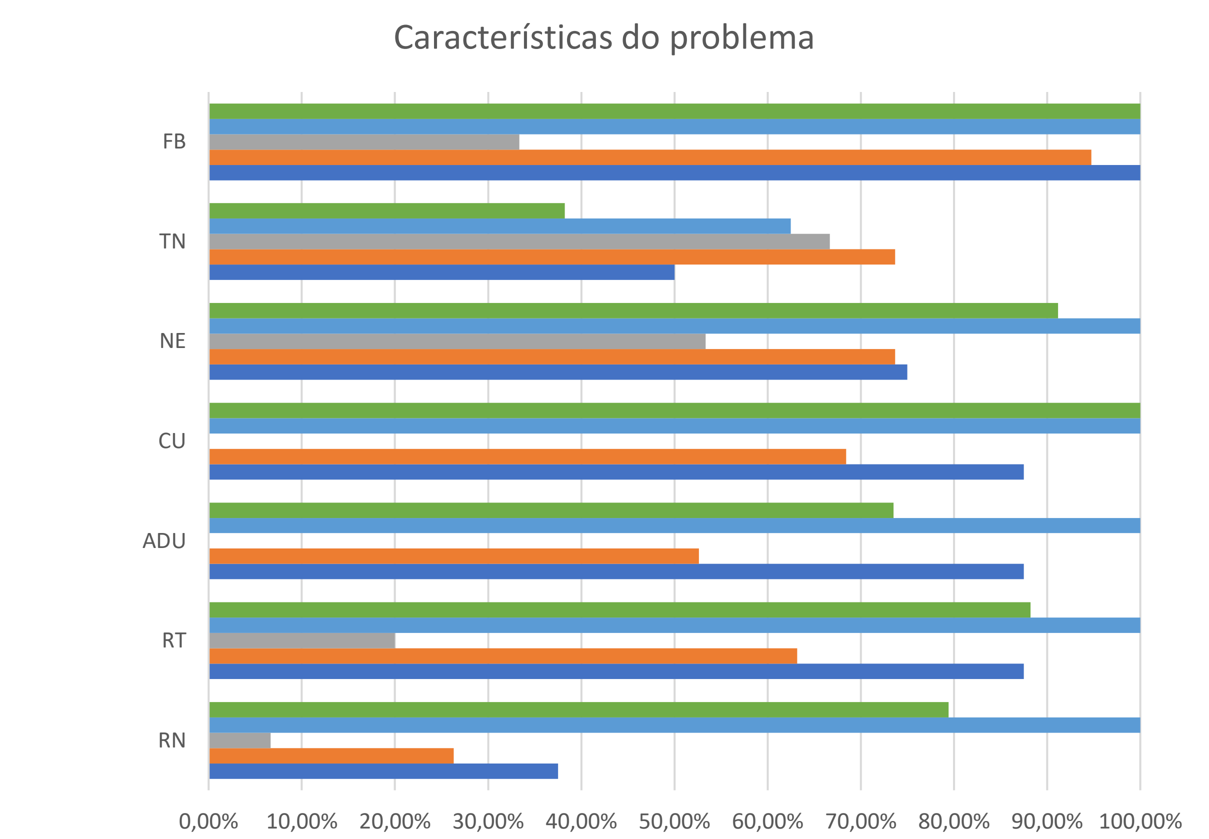
O teste exato de Fischer(p>0,05) verificou a significância estatística das proporções de alunos que utilizaram cada recurso das características dos problemas (CP) e dos procedimentos de solução (PS). O teste verificou as diferenças entres os perfis rígido, misto e flexível dentro de cada ano escolar, como também comparou a diferença entre 2º e 4º ano em cada grupo de raciocínio (por exemplo, mistos de 2º e 4º ano).

Os gráficos 5 e 6, expostos a seguir, demonstram a distribuição do repertório de características do problema e procedimento de solução, respectivamente, por ano

[7]As proporções de uso de que indicam 100%, por exemplo, representa que todos os alunos apresentaram esse recurso em seu repertório pessoal e que o mesmo foi utilizado ao menos uma vez durante a entrevista.

escolar e por padrão de raciocínio. As interpretações de cada gráfico serão descritas, evidenciando as características de cada perfil de raciocínio.

Gráfico 5 -Proporções de uso dos recursos das características dos problemas



	RN	RT	ADU	CU	NE	TN	FB
4º ano Misto	79,41%	88,24%	73,53%	100,00%	91,18%	38,24%	100,00%
4º ano Flexível	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	62,50%	100,00%
2º ano Rígido	6,67%	20,00%	0,00%	0,00%	53,33%	66,67%	33,33%
2º ano Misto	26,32%	63,16%	52,63%	68,42%	73,68%	73,68%	94,74%
2º ano Flexível	37,50%	87,50%	87,50%	87,50%	75,00%	50,00%	100,00%

Fonte: elaborado pela autora. .Legenda: Verde -4º ano misto; Azul claro – 4º ano flexível; Cinza- 2º ano rígido; Laranja – 2º ano misto; Azul escuro – 2º ano flexível.

Relações numéricas (RN): A proporção de alunos que utilizaram RN foi significativamente maior no grupo de alunos flexíveis do 4º ano em comparação ao mesmo grupo do 2º ano (p=0,0256). Mais alunos mistos de 4º ano utilizaram RN do que os estudantes mistos de 2º ano (p=0,0003). Não houve diferença estatística entre os grupos flexíveis, mistos e rígidos de cada ano escolar.

Relações da tarefa (RT): Os alunos rígidos do 2º ano diferiram (p=0,0043) de seus colegas mistos e flexíveis, desta forma, a proporção de alunos rígidos que utilizaram RT foi significativamente menor que a proporção de alunos mistos e flexíveis, estes não diferiram entre si. A proporção de alunos mistos de 4º ano foi estatisticamente superior ($p=0,0410$) do que a proporção dos mistos de 2º ano na utilização de RT.

*Associação dezena e unidade (ADU):*A utilização de ADU foi estatisticamente equivalente entre os grupos de raciocínio e dentro dos anos escolares, com exceção dos estudantes rígidos do 2º ano que não apresentaram ADU em seu repertório ($p>0,0001$) e, portanto, diferiram estatisticamente.

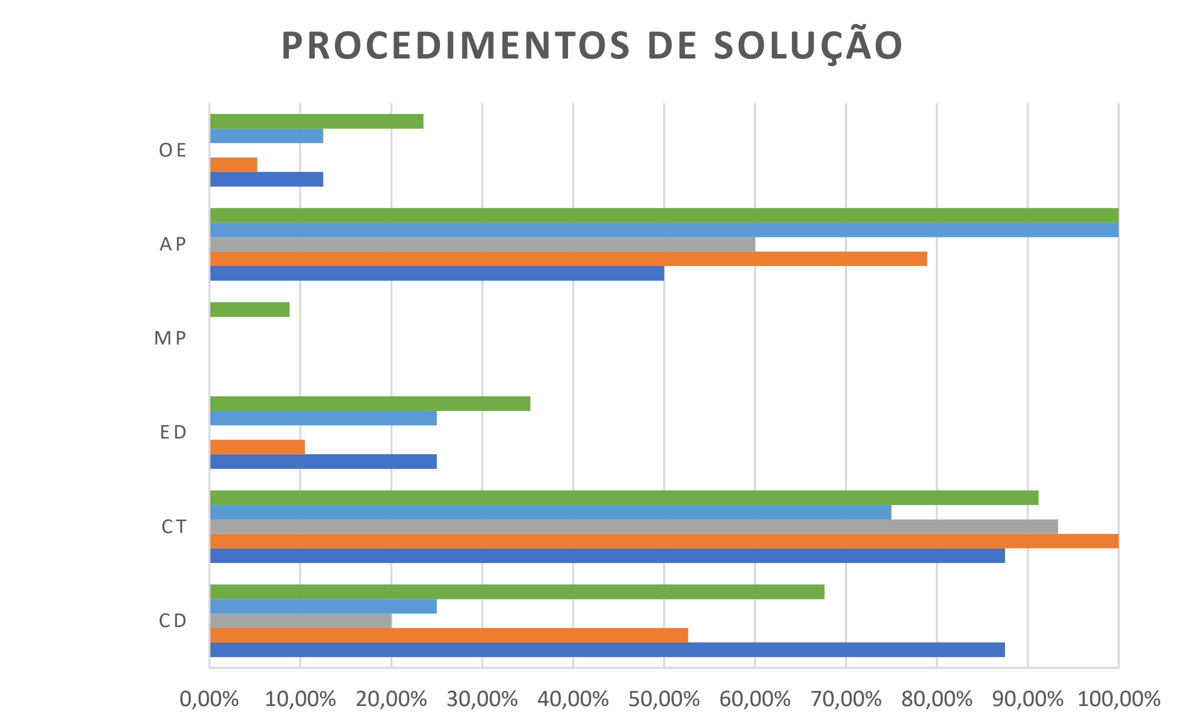
Características das unidades (CU): Todos os estudantes de 4º ano utilizaram o recurso das características das unidades durante a resolução dos cálculos. O grupo misto do 4º ano teve proporção significativamente maior($p=0,0011$) do que o grupo misto de 2º ano no uso de características das unidades. As CU não foram utilizadas pelo grupo de estudantes rígidos ($p<0,001$), portanto diferiu estatisticamente dos seus pares do 2º ano mistos e flexíveis.

Números especiais (NE): Não houve diferença estatística na proporção de alunos que utilizaram NE entre os grupos de raciocínio e dentro dos anos escolares.

Tamanho dos números (TN): Essa categoria apresentou a menor proporção de uso geral. Houve diferença estatística apenas no grupo dos alunos mistos ($p= 0,0214$), em que os estudantes de 2º ano utilizaram mais TN do que seus colegas de 4º ano.

Fatos Básicos (FB): Os estudantes mistos e flexíveis de 2º e 4º ano apresentaram alta proporção de uso de FB, sem diferir estatisticamente entre si. No entanto, o grupo de alunos rígidos do 2º ano diferiu significativamente de seus colegas de mesmo ano escolar ($p= 0,0002$), com uma baixa proporção de alunos que recorreram ao uso de fatos básicos.

Gráfico 6 - Proporções de uso dos recursos dos procedimentos de solução



	CD	CT	ED	MP	AP	OE
4º ano Misto	67,65%	91,18%	35,29%	8,82%	100,00%	23,53%
4º ano Flexível	25,00%	75,00%	25,00%	0,00%	100,00%	12,50%
2º ano Rígido	20,00%	93,33%	0,00%	0,00%	60,00%	0,00%
2º ano Misto	52,63%	100,00%	10,53%	0,00%	78,95%	5,26%
2º ano Flexível	87,50%	87,50%	25,00%	0,00%	50,00%	12,50%

Fonte: elaborado pela autora. Legenda: Verde -4º ano misto; Azul claro – 4º ano flexível; Cinza-2º ano rígido; Laranja – 2º ano misto; Azul escuro – 2º ano flexível.

Composição e decomposição (CD): No 2º ano, a proporção de estudantes que utilizam CD foi significativamente maior no grupo flexível (p= 0,0090) do que os grupos mistos e rígidos, estes, por sua vez não diferiram entre si. A proporção de alunos flexíveis do 4º ano que utilizaram CD foi estatisticamente menor do que os estudantes mistos do mesmo ano escolar (p= 0,0449). Dentro do grupo flexível, os alunos do 2º ano apresentaram maior proporção de utilização de CD do que seus colegas do 4º ano (p=0,0405).

Contagem (CT): O uso da contagem apresentou alta proporção de alunos que a utilizaram durante a resolução dos cálculos. Não houve diferença estatística entre os grupos de raciocínio e dentro dos anos escolares.

*Encontrar a diferença (ED):*Foi um recurso pouco utilizado pelos estudantes, com leve destaque para a proporção de alunos mistos de 4º ano que a utilizaram. A proporção de utilização de ED foi estatisticamente equivalente entre os grupos de raciocínio e dentro dos anos escolares.

Modificar o problema (MP): Apenas alguns alunos mistos de 4º ano utilizaram esse recurso. Não houve diferença estatística entre os grupos de raciocínio e dentro dos anos escolares.

Algoritmo padrão (AP): Todos os alunos do 4º ano utilizam o algoritmo padrão durante a resolução dos cálculos. No entanto, apenas a proporção de estudantes mistos de 4º ano que utilizaram AP foi estatisticamente superior à proporção do mesmo perfil de 2º ano (p= 0,0132).

Outra estratégia (OE): Foi um recurso pouco utilizado pelos estudantes em geral, porém com leve destaque para a maior proporção de alunos mistos de 4º ano que a utilizaram. Não foram observadas diferenças estatísticas.

O repertório total da amostra contabilizou 626 raciocínios, destes 402 (64%) são raciocínios por características do problema (RCP) e 224 (36%) são raciocínios por procedimentos de solução (RPS). Os estudantes do 2º ano apresentaram 249 (40%) raciocínios, dos quais 155 (62%) são RCP e 94 (38%) são RPS. Os alunos do 4º ano representam 60% (377) dos raciocínios totais da amostra, em que 247 (66%) são RCP e 130 (34%) são RPS. A tabela 6 demonstra os valores totais das proporções de uso de características do problema e de procedimentos de solução pelos grupos de raciocínio por ano escolar.

Tabela 6 - Proporções de uso de características do problema e de procedimentos de solução

PERFIL	ANO	CP	PS	p- valor
Flexível	2º ano	75,00%	43,75%	0,0005
	4º ano	94,64%	39,58%	<0,0001
		p= 0,0070	p=0,8362	
Misto	2º ano	64,66%	41,23%	<0,0001
	4º ano	81,51%	54,41%	<0,0001
		p=0,0004	p=0,0266	
Rígido	2º ano	25,71%	28,89%	0,8632

Fonte: elaborado pela autora. Legenda: CP – características do problema; PS- procedimentos de solução. Nível de significância à 0,05.

Os dados da tabela sintetizam a caracterização dos perfis de flexibilidade:

1) Estudantes Flexíveis de 2º e 4º ano apresentaram clara preferência por característica do problema (CP) em relação aos procedimentos de solução (PS),

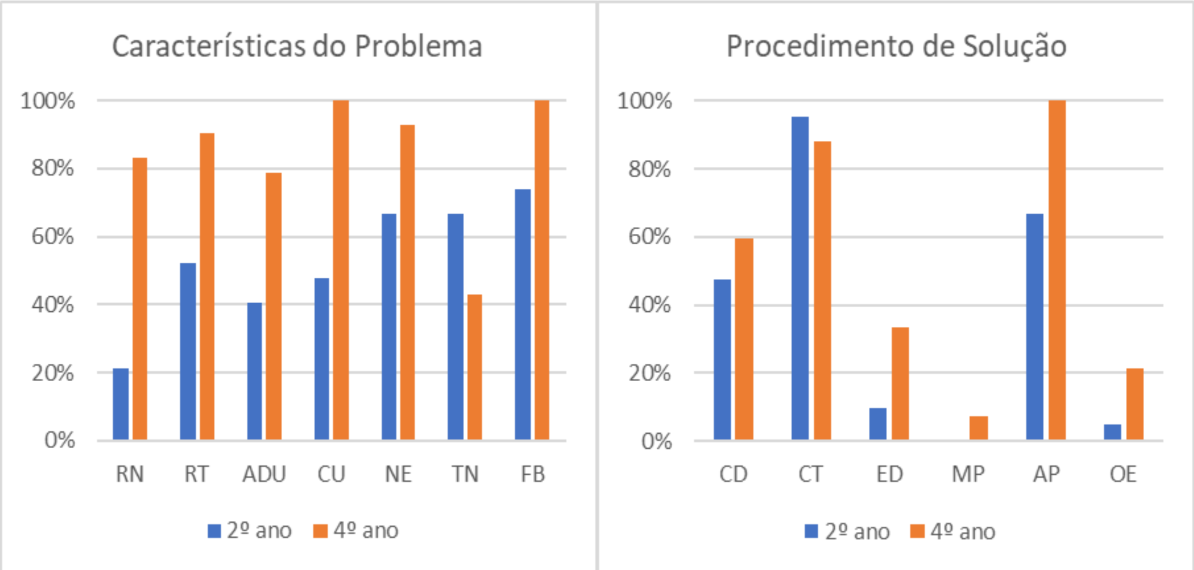
confirmado pela diferença estatística verificada pelo teste exato de Fischer (p=0,0005 e p<0,0001, respectivamente). Os dois anos escolares do perfil flexível não diferem entre si no uso de PS (p=0,8362), no entanto o 4º ano usou CP em maior proporção estatística do que o 2º ano (p=0,0070). Este resultado indica que os estudantes mais velhos exibiram maior grau de flexibilidade do que seus pares mais novos, em virtude do maior repertório de recursos de características do problema.

2) O perfil misto, de 2º e 4º ano, apresenta proporções de CP e PS mais aproximadas, se comparadas ao perfil flexível, mesmo que o uso de características do problema tenha sido significativamente maior do que os procedimentos de solução (p <0,0001 para ambos). Os alunos mistos de 2º e 4º ano diferiram entre si no uso de CP (p =0,0004) e no uso PS (p=0,0266), demonstrando que os alunos de 4º ano usaram maiores proporções dos dois tipos de raciocínio. Estes resultados indicam que o 4º ano apresenta vantagem no grau de flexibilidade em relação aos alunos de 2º ano.

3) O grupo rígido, composto apenas por estudantes de 2º ano, utilizou proporções de CP e PS estatisticamente baixas e equivalentes (p=0,863).

A figura 1 evidencia as diferenças entre 2º e 4º anos na proporção de uso dos recursos de características do problema e de procedimentos de solução.

Figura 1 - Proporções de uso dos recursos do raciocínio por características do problema e do raciocínio por procedimento de solução entre os anos escolares



Legenda: elaborado pela autora.

O 4º ano destaca-se na proporção de uso de recursos de características do problema. Com exceção do tamanho do número (TN), os estudantes do 4º ano apresentaram proporções de uso significativamente superior (p=<0,05) em relação às proporções do 2º ano, verificado pelo teste exato de Fischer. Os alunos do 2º ano utilizaram o tamanho do número em maior proporção estatística (p=0,04) comparado ao uso do 4º ano.

Quanto às proporções de procedimentos de solução, a decomposição (CD), contagem (CT), modificar o problema (MP) e outras estratégias (OE) apresentaram proporção de uso estatisticamente igual entre os dois anos escolares. O algoritmo padrão (AP) (p<0,0001) e encontrar a diferença (ED)(p=0,01) apresentaram proporções maiores e estatisticamente significativas no 4º ano.

3.7 DISCUSSÃO

O presente estudo teve como objetivo geral verificar a diferença de perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental entre estudantes de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise do repertório de características, padrões e relações numéricas e de procedimentos de solução, isto é, os elementos cognitivos que sustentam o processo de resolução de cálculos aritméticos.

Em uma análise geral, foi observada alta proporção de uso de características, padrões e relações numéricas (64%) pelos estudantes de 2º e 4º anos, de forma que o reconhecimento e uso destes levaram os alunos a determinar os passos a serem seguidos no caminho da resolução dos cálculos, a revisar seus procedimentos durante o cálculo e a confirmar os resultados de diferentes maneiras. Os fatos básicos (FB) foram o recurso mais utilizado para chegar à solução, seguidos pelos números especiais (NE) e pelas características das unidades (CU). Em contrapartida, apesar das menores proporções de uso (36%), os procedimentos de solução estavam presentes em quase todos os cálculos realizados, com forte destaque para o algoritmo padrão (AP), composição e decomposição (CD) e contagem (CT).

O primeiro objetivo específico deste estudo foi verificar como o repertório de características dos problemas e procedimentos de solução, a saber, elementos cognitivos, caracterizam cada perfil de flexibilidade cognitiva no cálculo mental no 2º ano e no 4º ano. A primeira hipótese associada a este objetivo esperava que o uso de características, padrões e relações numéricas caracterizasse cada perfil de flexibilidade, no entanto os procedimentos de solução teriam alta proporção de uso devido à ênfase no ensino do algoritmo padrão. A seguir, serão destacados os recursos mais significativos nos perfis de flexibilidade dos dois anos escolares.

O uso da contagem definiu o perfil de raciocínio rígido, e o desempenho destes alunos foi pautado por este procedimento e, assim, determinou o uso de outros recursos. A contagem (93,3%) cumpriu papel de abordagem principal, apoiada nos dedos ou na representação gráfica, de modo a compensar o seu conhecimento numérico limitado. A menor proporção do uso do algoritmo (60%), em comparação ao demais perfis, se deve à falta de compreensão do conjunto de regras deste procedimento. Os alunos rígidos não conseguiam "armar a conta" corretamente e, assim, recorriam à contagem. Dentre as características do problema, o tamanho do número (TN) foi um recurso que obteve a maior proporção de uso (66,6%), pois os alunos procuravam pelos cálculos com números menores, que demandassem menos trabalho na contagem um – a – um (por exemplo, 46-19 e 33+33). Este grupo também se destaca pela menor proporção de fatos básicos (33%). Desta maneira, as baixas proporções de uso das características do problema deste perfil parecem estar associadas ao uso da contagem como principal estratégia de cálculo, porque a sobrecarga cognitiva imposta por este procedimento inviabiliza a construção de relações numéricas (BROCARDO; SERRAZINA; KRAEMER, 2003) e de fatos básicos (BAROODY, 2006).

O grande grupo de alunos mistos, incluindo 2º e 4º anos, abrangeram perfis bastante heterogêneos de raciocínio. Estes alunos apresentaram maior variabilidade na proporção de uso de características do problema (CP) e procedimentos de solução (PS), sem apresentar um padrão de raciocínio dominante. A associação entre altas proporções de uso de contagem (100%) e de tamanho do número (73,6%) também aparece no grupo de alunos mistos do 2º ano. No entanto, a favor destes alunos, a alta proporção de fatos básicos (94,7%) indica que eles já possuem certa prática em cálculos e que a contagem não é a estratégia principal de cálculo (BAROODY, 2006). O perfil misto de 4º ano utilizou todos os recursos dos dois tipos de raciocínio, demonstrando a grande variabilidade cognitiva deste grupo.

Um aspecto interessante que caracteriza o grupo do perfil misto, de 2º e 4º anos, são as altas proporções do uso de composição e decomposição (CD), 52% e

67% respectivamente, ainda que seja categorizado como um raciocínio rígido por Rathgeb-Schnierer e Green (2017), indica conhecimento numérico e de valor posicional (HICKENDORFF; TORBEYNS; VERSCHAFFEL, 2017), dado corroborado pelas elevadas proporções de uso de características do problema.

O perfil flexível de 2º ano foi o grupo que mais recorreu à composição e decomposição (87,5%), o que pode indicar que estava menos vinculado ao algoritmo padrão e mais disposto a basear seu raciocínio em procedimentos matemáticos informais, possivelmente vinculados ao senso numérico (MCINTOSH; REYS; REYS 1992). Estes alunos apresentaram repertório de características do problema variado e estatisticamente superior aos procedimentos de solução, o que é um indicador de flexibilidade, conforme indica pesquisa anterior (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015).

Os estudantes flexíveis de 4º ano apresentaram um padrão de raciocínio com clara preferência pelo raciocínio por características do problema (RCP), conforme o gráfico 5. Estas altas proporções indicam a flexibilidade do raciocínio matemático destes estudantes. No entanto, este grupo apresenta um dado que parece contraditório, pois o algoritmo padrão foi utilizado por todos os estudantes (100%) e a contagem (75%) teve elevada proporção de uso durante a resolução dos cálculos. Argumenta-se que, diante de alguns cálculos, na falta de recursos cognitivos adequados que suportem o raciocínio, as crianças recorreram às estratégias conhecidas e seguras (THRELFALL, 2002).

De acordo com a discussão acima, verifica-se a confirmação parcial da primeira hipótese, visto que as proporções totais (tabela 6) e de cada recurso do raciocínio por características do problema (gráfico 5) diferenciaram os perfis de flexibilidade cognitiva no 2º ano e no 4º ano. Entretanto, a alta proporção de uso de procedimentos de solução (gráfico 6) cumpriu uma função tão importante quanto as características dos problemas na caracterização dos perfis, diferente do desempenho secundário que a hipótese inicial estabelecia. A contagem exerceu um papel fundamental para compreensão da flexibilidade nos estudantes dos dois anos escolares. O limitado conhecimento de recursos matemáticos como, por exemplo, as relações de dobro e metade, associatividade e de família de fatos, levaram as crianças a recorrerem ao recurso seguro para alcançar a solução de um cálculo e, por isso, as proporções de contagem foram altas em todos os perfis de flexibilidade.

A segunda hipótese do primeiro objetivo esperava que o uso de características, padrões e relações numéricas representasse um indicador de senso numérico nesta amostra de estudantes brasileiros. Neste sentido, considerando que o sistema educacional brasileiro imprimiu a marca dos procedimentos de solução em seus estudantes, buscou-se justificativas para a prevalência do raciocínio por características do problema na amostra total (64%), nos alunos de 2º ano (62%) e nos alunos de 4º ano (66%), dado que as práticas de sala de aula não direcionavam sua ação para este tipo de conhecimento numérico.

A partir da revisão na literatura, é possível verificar que o senso numérico é um constructo amplo que se desenvolve através do contato com o mundo numeralizado, inclusive podendo ocorrer nos espaços informais de convívio da criança (CORSO; DORNELES, 2010; MCINTOSH; REYS; REYS 1992). Com o acesso à escolarização, as crianças passam a ter acesso formal aos números e, mesmo que os procedimentos tenham destaque no ensino da matemática, os estudantes procuram por regularidades numéricas para dar sentido à sua prática (BAROODY, 2006). Assim, a criança (sem dificuldades de aprendizagem) em contato com a contagem e com os cálculos aritméticos, estabelece suas próprias relações e padrões numéricos inerentes ao sistema de numeração decimal e posicional que favorece a extensão do seu universo numérico (MENDES, 2012). Sendo assim, o raciocínio por características do problema (RCP) utilizado pelas crianças brasileiras parece estar relacionado à compreensão numérica desenvolvida informalmente através da prática com os números, em maior ou menor grau pelos diferentes perfis de flexibilidade. A compreensão numérica relacionada à flexibilidade no cálculo mental é documentada na literatura como um indicativo de senso numérico (BAROODY, 2006; HEIRDSFIELD; COOPER, 2004; MENDES, 2012, SPINILLO, 2014).

Corroborando essa argumentação teórica, Heirdsfield e Cooper (2004) justificaram a presença de raciocínio flexível em crianças australianas que aprendiam apenas o algoritmo padrão, entre outros fatores, pelo senso numérico bem desenvolvido. Rathgeb-Schnierer e Green (2013) acreditam que, ao julgar a flexibilidade em cálculo mental, destaca-se o uso dinâmico do senso numérico para alcançar uma solução. Colocadas estas considerações, a hipótese de que o uso de características, padrões e relações numéricas, relacionado à flexibilidade do raciocínio, é um indicador de senso numérico nos estudantes brasileiros deste estudo parece viável na perspectiva de senso numérico como um constructo amplo, que abrange uma série de habilidades numéricas diferentes. No entanto, essa hipótese necessita de mais dados empíricos que a confirmem.

O segundo objetivo específico deste estudo pretendia comparar as proporções de uso do repertório de características e relações numéricas e de procedimentos de solução entre os anos escolares. As comparações entre os dois anos escolares indicam que os estudantes de 4º ano apresentaram maiores proporções de uso do repertório de características do problema do que seus colegas de 2º ano, enquanto que o uso do repertório de procedimentos de solução obteve maior equilíbrio entre os dois anos escolares. Destaca-se a maior proporção de uso de tamanho do número (TN) no 2º ano, que se trata de uma abordagem que demanda um conhecimento numérico mais superficial, vinculado a maior proporção de uso de contagem. Ou seja, o 2º ano apresenta recursos cognitivos mais imaturos para sustentar a resolução de cálculos. O 4º ano, por sua vez, apesar de ter apresentado conhecimento numérico mais aprofundado, indicado pelas altas proporções de características do problema, também se destacou no uso do algoritmo padrão (AP) e de encontrar a diferença (ED), o que demonstra a marca do sistema de ensino baseado em procedimentos mecanizados. A prevalência de raciocínio por caraterísticas do problema indica flexibilidade (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2015), portanto os estudantes do 4º ano foram mais flexíveis do que seus pares mais jovens, confirmando a hipótese deste objetivo. Como o senso numérico é um processo evolutivo, essa pode ser a justificativa para o fato de os alunos do 4º ano serem mais flexíveis, em razão da exposição ao mundo numeralizado há mais tempo. (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Este achado vai ao encontro do resultado de uma pesquisa recente que comparou as habilidades de cálculo aritmético de estudantes de 3º e 5º anos, na qual a superioridade da compreensão conceitual dos alunos de 5º ano está de acordo com seu nível de experiência numérica (mais tempo de escolarização) (CAVIOLA et al.,2018).

3.8 LIMITAÇÕES

Os achados deste estudo devem ser considerados de acordo com algumas limitações identificadas: instrumento de avaliação da flexibilidade cognitiva, avaliação do senso numérico das crianças da amostra, o tempo de realização do estudo e a limitada quantidade de pesquisas da área.

O instrumento de avaliação da flexibilidade (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017) apresenta cálculos aritméticos que não foram adequados ao conhecimento matemático dos estudantes de 2º ano da amostra, conforme evidenciado no estudo 1. Desta forma, o desempenho deste ano escolar foi significativamente inferior, gerando poucos dados sobre o raciocínio destas crianças, o que pode ter influenciado nos dados finais, uma vez que o grupo de estudantes rígidos foi composto exclusivamente por estudantes deste ano escolar. Além dos cálculos, o instrumento apresenta limitação no sistema de categorização de raciocínios, que é pouco detalhado na categoria de procedimentos de solução. Embora estes procedimentos não fossem o objeto principal de estudo dos autores (RATHGEB-SCHNIERER; GREEN, 2013, 2015, 2017), para a realidade brasileira a falta de especificações como, por exemplo, a “contagem nos dedos” ou “contar a partir de” poderiam enriquecer a discussão.

A importância da avaliação do senso numérico foi verificada tão logo iniciou-se a coleta de dados da pesquisa e, inclusive, algumas avaliações foram realizadas. No entanto, em virtude do cronograma da pesquisa, que possuía tempo limitado de três meses, e do longo tempo dispendido para realizar as duas tarefas, não foi possível manter a avaliação do senso numérico das crianças da amostra, priorizando-se a flexibilidade. Esta avaliação subsidiaria, através de dados empíricos, a discussão aprofundada sobre a relação entre a flexibilidade cognitiva e o senso numérico, comparando os poucos achados de pesquisa anteriores para verificar o vínculo entre estes constructos na realidade brasileira.

Além destas limitações, ainda há poucos estudos empíricos em flexibilidade na perspectiva da Educação Matemática, especialmente com dados quantitativos, o que limita a comparação e a generalização dos dados encontrados nesse estudo. Por fim, é válido destacar que os resultados refletem as escolhas e o contexto da pesquisa, sendo necessário interpretá-los à luz destas limitações.

3.9 IMPLICAÇÕES DO ESTUDO PARA A EDUCAÇÃO

Os resultados desta pesquisa trazem implicações educacionais que podem favorecer a aprendizagem da matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como influenciar a aprendizagem de domínios mais complexos nos anos de escolarização subsequentes.

Tal qual o senso numérico, a flexibilidade não pode ser ensinada como uma habilidade matemática (THRELFALL, 2002), mas deve ser desenvolvida através da ênfase de ensino que considere as possibilidades envolvidas nos números de um cálculo. O cálculo mental é um importante instrumento de trabalho com os números, pois favorece uma forma de pensar sobre os mesmos, estabelecendo relações com outros conhecimentos já construídos pela criança, como a contagem e os fatos básicos, por exemplo. No cálculo mental, as crianças podem explorar possibilidades como: procurar diferentes formas de dividir um ou ambos os números do cálculo (não apenas em "dezenas e unidades"); procurar dobros ou quase dobros ou outros pontos de referência como o número 5; verificar as proximidades dos números (está perto de qual número “fácil”). As inferências sobre os números oportunizam que a criança estabeleça as suas próprias descobertas numéricas e, assim enriqueça seu repertório de recursos que sustentarão o cálculo aritmético nos anos iniciais e os cálculos parciais nos anos mais avançados.

Favorecer que os estudantes aprendam diferentes formas de representação simbólica dos números colabora para a constituição de uma base numérica adequada que permitirá inferências mais qualificadas. Possibilitar que a criança entenda que o 8, por exemplo, é representado por 4x2 ou 5+3 ou 2+2+2+2 ou 9-1 ou 16÷2, aprofunda o conhecimento das particularidades do 8 e facilita a identificação de relações numéricas (SERRAZINA; RODRIGUES, 2016). Com as crianças mais novas, a exploração com os números pode ser realizada através do jogo, em brincadeiras interativas em que as descobertas são comparadas. Com os estudantes mais velhos, é importante que a flexibilidade com os números seja trabalhada em cálculos e problemas contextualizados, próximos ao cotidiano dos alunos, para que a matemática faça sentido. A verbalização e a discussão de cálculos alternativos são fundamentais para um ambiente profícuo de aprendizagens bem conectadas que estabelecerão uma forma de pensar flexível.

É fundamental que a formação inicial e continuada de professores dedique maior atenção à matemática, especialmente em aspectos como conhecimentos conceituais, habilidades procedimentais, compreensão numérica, senso numérico e flexibilidade do raciocínio matemático. Estes são apenas alguns tópicos necessários para fundamentar a ação pedagógica dos professores: sem estes conhecimentos corre-se o risco da manutenção de práticas rotineiras e descontextualizadas das necessidades da vida contemporânea.

Reconhecer e usar as relações e padrões numéricos é essencial para ir além das estratégias de contagem, agilizando o processo de cálculo. O cálculo mental e, por consequência, a flexibilidade no raciocínio oportuniza às crianças diferentes possibilidades de calcular, permitindo que o aluno utilize o recurso adequado a sua capacidade cognitiva.

3.10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi verificar a diferença de perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental entre estudantes de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise dos elementos cognitivos utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. Inicialmente, buscou-se evidenciar a importante relação entre a flexibilidade, o cálculo mental e o senso numérico. Na sequência foram apontadas as diferenças educacionais dos países com maior tradição de pesquisa em flexibilidade, como também foram apresentadas as principais pesquisas em cálculo mental flexível.

A flexibilidade cognitiva, o cálculo mental e o senso numérico aparecem fortemente relacionados em pesquisas que destacam a compreensão numérica como uma competência fundamental para o desempenho matemático. Neste sentido, o estudo verificou como os alunos de 2º e 4º anos utilizam a compreensão numérica (características do problema) e os procedimentos de solução para resolver cálculos mentais. A flexibilidade cognitiva apresenta três perfis diferentes: flexíveis, mistos e rígidos, diferenciados pela proporção de uso de caraterísticas do problema e de procedimentos de solução (elementos cognitivos).

Dentre os resultados, ficou evidenciado que os estudantes mais flexíveis apresentavam conhecimento numérico desenvolvido e que as porcentagens de uso deste conhecimento diferenciaram os perfis de flexibilidade entre os anos escolares. Neste sentido argumentou-se que a flexibilidade cognitiva pode ser um indicador de senso numérico, posto que o ensino experienciado pelos alunos da pesquisa enfatizava habilidades procedimentais em detrimento do conhecimento numérico. Os resultados também demonstraram que todos os recursos do raciocínio por características do problema foram usados pelos dois anos escolares, com menores proporções no 2º ano e maiores no 4º ano, ou seja, de modo geral, estes recursos cognitivos já estavam disponíveis para as crianças mais novas e o uso foi ampliado nas crianças mais velhas. Este achado está relacionado ao nível de experiência numérica e, possivelmente, ao senso numérico. Embora o conhecimento numérico tenha se destacado nos resultados, os procedimentos de solução também evidenciaram as fragilidades deste conhecimento nos estudantes brasileiros, pois houve alta proporção de contagem, considerada a mais imatura das estratégias de cálculo (BAROODY, 2006).

Flexibilizar o raciocínio matemático das crianças parece uma alternativa viável para superar os obstáculos da aprendizagem matemática. Este estudo apresenta as primeiras impressões sobre a flexibilidade cognitiva no contexto educacional brasileiro e aponta para algumas direções importantes, como a importância da relação entre o cálculo mental flexível e o senso numérico, para atingir níveis mais elevados de competência matemática. No entanto, são necessárias mais pesquisas que correlacionem a flexibilidade em cálculo mental a habilidades de domínio especifico (como o senso numérico) e de domínio geral (por exemplo, a memória de trabalho), particularmente em pesquisas longitudinais que acompanhem o desenvolvimento da flexibilidade durante o processo de escolarização, para, assim, ampliar a compreensão deste constructo.

REFERÊNCIAS

ANGHILERI, J. Development of division strategies for Year 5 pupils in ten English schools. **British Educational Research Journal**, v. 27, n. 1, p. 85-103, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionai**s: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **A área da matemática da BNCC**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica Acesso em: outubro. 2018.

BAROODY, Arthur J. Mastering the basic number combinations. **Teaching children mathematics**, v. 23, p. 22-31, 2006.

BLÖTE, A. W.; KLEIN, A. S.; BEISHUIZEN, M. Mental computation and conceptual understanding. **Learning and instruction**, v. 10, n. 3, p. 221-247, 2000.

BLÖTE, A. W.; VAN DER BURG, E.; KLEIN, A. S. Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. **Journal of Educational Psychology**, v. 93, n. 3, p. 627, 2001.

BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; KRAEMER, J.M. Algoritmos e sentido do número. **Educação e Matemática**, p. 11-15, 2003.

CAVIOLA, S.; MAMMARELLA, I. C.; PASTORE, M.; LEFEVRE, J. A. . Children's strategy choices on complex subtraction problems: individual differences and developmental changes. **Frontiers in psychology**, v. 9, p. 1209, 2018.

CAVIOLA, S.; GEROTTO, G.; MAMMARELLA, I. C. Computer-based training for improving mental calculation in third-and fifth-graders. **Acta psychologica**, v. 171, p. 118-127, 2016.

CORSO, L. V. **Dificuldades na leitura e na matemática:** um estudo dos processos cognitivos em alunos da 3ª a 6ª série do Ensino Fundamental. 2008. 218 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. 2008

CORSO, L. V.; DORNELES, B. V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática. **Revista Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 298-309, 2010.

DELLATOLAS, G.; VON ASTER, M.; WILLADINO-BRAGA, L.; MEIER, M.; DELOCHE, G. Number processing and mental calculation in school children aged 7 to 10 years: A transcultural comparison. **European child & adolescent psychiatry**, v. 9, n. 2, p. S102-S110, 2000.

DORNELES, B. V.; HAASE, V. G. Aprendizagem numérica em diálogo: neurociências e educação. In: LENT, R; BUCHWEITZ, A.; MOTA, M.B. (Org.). **Ciência para Educação: uma ponte entre dois mundos**. 1ed. São Paulo: Editora Atheneu, 2018, v. 1, p. 133-160.

FERREIRA, E., SERRAZINA, L. Strategies and procedures: what relationship with the development of number sense of students? In: PYTLAK, M; SWOBODA, E; ROWLAND, T (Eds.). **Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, Poland, 2011, p 307-315.

HARTNETT, J. E. Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. WATSON; K. BESWICK (Ed.), **Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Hobart: MERGA, 2007. v.1, p. 345-352.

HATANO, G.; OURA, Y. Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. **Educational researcher**, v. 32, n. 8, p. 26-29, 2003.

HEIRDSFIELD, A. M.; COOPER, T. J. Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 23, n. 4, p. 443-463, 2004.

HICKENDORFF, M.; TORBEYNS, J.; VERSCHAFFEL, L. Grade-related differences in strategy use in multidigit division in two instructional settings. **British Journal of Developmental Psychology**, v. 36, n. 2, p. 169-187, 2018.

MENDES, Maria de Fátima Pista Calado. **A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número**: um estudo com alunos do 1. º ciclo. 2012. 591 f. Tese (Doutorado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2012.

MCINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the learning of mathematics**, v. 12, n. 3, p. 2-8, 1992.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. Educação Matemática 1: **Números e Operações Numéricas.** São Paulo: Cortez, 2005.

RECHTSTEINER-MERZ, C.; RATHGEB-SCHNIERER, E. Flexible mental calculation and "Zahlenblickschulung". In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. p. 354-360. 2015.

REZAT, S. Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. In: **Proceedings of CERME** (Ed.7). Polônia. 2011.

REZAT, S.; EJERSBO, L. R. Number sense in teaching and learning arithmetic. In: **Developing Research in Mathematics Education**. Routledge, 2018. p. 45-53.

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems. In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 2015, p. 339-345.

RATHGEB-SCHNIERER, E.; GREEN, M. Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. In: **Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 2013, p. 353-362.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth; GREEN, Michael. Profiles of cognitive flexibility in arithmetic reasoning: a cross-country comparison of German and American elementary students. **Journal of Mathematics Education**, v. 10, n. 1, p. 1-16, 2017.

SANTOS, S.; RODRIGUES, M. A flexibilidade de cálculo multiplicativo: um estudo no 3. º ano. **Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, 2017, n. 1, p. 242-260.

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M. 'Day number': a promoter routine of flexibility and conceptual understanding. In: **13th International Congress on Mathematical Education**. 2016.

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M. A tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo. **GD1-Design de tarefas**, p. 109-120, 2014.

SPINILLO, Alina Galvão. Usos e funções do número em situações do cotidiano. In: BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Quantificações, registros e agrupamentos. Brasília: Mec, Seb, 2014. p. 20-29.

STEIN, L. M. TDE: teste de desempenho escolar: manual para aplicação e interpretação. **São Paulo: Casa do Psicólogo**, p. 1-17, 1994.

TEIXEIRA, R. RODRIGUES, M. Evolução de estratégias de cálculo mental: um estudo no 3. º ano de escolaridade. **Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto**, p. 249-267, 2015.

THRELFALL, J. Flexible mental calculation. **Educational studies in Mathematics**, v. 50, n. 1, p. 29-47, 2002.

THRELFALL, J. Strategies and flexibility in mental calculation. **ZDM**, v. 41, n. 5, p. 541-555, 2009.

TORBEYNS, J.; DE SMEDT, B.; GHESQUIÈRE, P.; VERSCHAFFEL, L. Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 1, p. 1-17, 2009.

TORBEYNS, J; VERSCHAFFEL, L. Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. **European Journal of Psychology of Education**, v. *31*, n. 2, 99-116, 2017.

TORBEYNS, J.; VERSCHAFFEL, L.; GHESQUIÈRE, P. Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. **Cognition and Instruction**, v. 23, n. 1, p. 1-21, 2005.

VAROL, F.; FARRAN, D. Elementary school students' mental computation proficiencies. **Early Childhood Education Journal**, v. 35, n. 1, p. 89-94, 2007.

4 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O objetivo principal desta dissertação foi compreender de que forma os estudantes brasileiros de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental manifestam a flexibilidade cognitiva em cálculo mental.

Foram desenvolvidos dois estudos para alcançar esse objetivo, além de uma breve revisão da literatura. A revisão mostrou as duas linhas principais da pesquisa: por um lado, existe um repertório de estratégias, a escolha e aplicação destas deve ser adequada ao cálculo. Por outro lado, estão as respostas individuais, relacionadas com a construção de meios de solução, de acordo com o conhecimento numérico do indivíduo. Este segundo conceito foi definido como perspectiva teórica das duas pesquisas que se seguiram, posto que esta ideia de flexibilidade está alinhada com os objetivos da educação, não somente por favorecer o aprofundamento do conhecimento numérico, mas também por instrumentalizar o professor que atua em sala de aula.

O primeiro estudo teve o propósito de verificar se os perfis de flexibilidade cognitiva no cálculo mental propostos por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) seriam identificados em estudantes brasileiros, bem como tentar compreender algumas influências nesta habilidade através da associação de tais perfis com o nível socioeconômico e com o desempenho aritmético. Os resultados deste estudo demostraram que os três perfis, flexíveis, mistos e rígidos, foram verificados nos estudantes brasileiros confirmando que a flexibilidade é uma habilidade de desenvolvimento contínuo. Este é um importante achado, uma vez que o caráter evolutivo da flexibilidade indica a possibilidade de intervenção pedagógica. Não foram encontradas associações com os níveis socioeconômicos e desempenho aritmético, no entanto, a partir da falta desta última variável, foi possível abordar a importante discussão sobre a dicotomia entre as habilidades e conhecimentos envolvidos na compreensão numérica e no desempenho aritmético. Isto revela que a educação brasileira precisa empregar esforços no ensino de conhecimentos conceituais que apoiem e deem sentido à execução dos procedimentos tão valorizados no meio escolar. Por fim, o instrumento avaliativo de flexibilidade evidenciou o raciocínio matemático das crianças, mas a dificuldade envolvida nos cálculos foi um limitador dos dois estudos.

O segundo estudo verificou a diferença dos perfis de flexibilidade cognitiva entre estudantes de 2º e de 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise dos elementos cognitivos utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. Os resultados deste estudo estão pautados na importante relação entre a flexibilidade, o cálculo mental e o senso numérico. O estudo apresentou evidências de que o nível de conhecimento numérico, a partir da análise de proporções de uso de recursos deste tipo de raciocínio, foi um indicador importante para diferenciar os perfis de flexibilidade entre os anos escolares. Entretanto, os procedimentos de solução desempenharam um importante papel na caracterização de cada perfil de flexibilidade, com destaque para a contagem que teve alta proporção de uso, inclusive pelos alunos flexíveis. Outro resultado, relacionado ao nível de experiência numérica, indicou que estudantes de 4º ano foram mais flexíveis do que seus colegas mais jovens. Para justificar estes achados relacionados ao conhecimento numérico, argumentou-se que a flexibilidade cognitiva pode ser um indicador de senso numérico, em razão da ênfase no ensino dos sujeitos desta pesquisa em habilidades procedimentais. O senso numérico percebido nas crianças, através da avaliação da flexibilidade cognitiva, não está associado à intencionalidade de ensino, mas à capacidade individual de inferir e perceber regularidades matemáticas nos espaços formais e informais de ensino. Talvez por esse motivo o conhecimento numérico dos estudantes apresente fragilidades como a dependência da contagem e do algoritmo padrão.

Os dois artigos desta dissertação exploraram alguns aspectos iniciais a respeito da flexibilidade cognitiva no contexto brasileiro e possibilitaram a reflexão sobre a aprendizagem da matemática. Atualmente, as práticas de ensino da matemática estão associadas a procedimentos mecanizados, atividades rotineiras de contagem e de cálculo com o algoritmo padrão. Essa abordagem educacional restringe a construção de uma variedade de recursos matemáticos que poderiam auxiliar e apoiar o raciocínio do aluno, implicando no uso de poucos procedimentos seguros para realizar os cálculos ou para confirmar os resultados. Este é um ponto crítico para a aprendizagem da matemática, visto que, ao não oferecer outras ferramentas para operar com os números, o ensino está obstaculizando o acesso a níveis mais complexos e sofisticados de raciocínio matemático. Favorecer situações de cálculo mental, que estimulem a compreensão de número, e postergar a introdução do algoritmo padrão são aspectos adequados às premissas do PCN (1997) e BNCC (2017) da matemática.

O conhecimento envolvido no cálculo mental possibilita a superação da contagem e, pode estabelecer uma ponte significativa para a aprendizagem do algoritmo padrão.

A flexibilidade cognitiva, na perspectiva adotada por esta dissertação, parece fundamental para a redução de lacunas na aprendizagem matemática, posto que a sua operacionalização centrada na compreensão numérica, tem relevância para as realidades vividas em salas de aulas. A flexibilidade veicula uma forma de pensar matematicamente que influencia a trajetória de aprendizagem dos indivíduos. Favorecer a construção do conhecimento a partir da percepção e de inferências sobre as regularidades do sistema de numeração decimal, bem como sobre as relações e as características dos números, geram recursos cognitivos/matemáticos que irão subsidiar o cálculo mental. A destreza com cálculo mental na aritmética, por sua vez, aprimora o domínio sobre os números e as suas relações, o que é fundamental para as competências matemáticas mais complexas dos anos escolares subsequentes. Ter facilidade em cálculos também pode ter como consequência a visão mais positiva da matemática.

Conforme mencionado anteriormente, o PCN (1997) e a BNCC (2017) da matemática destacam a necessidade de promover habilidades de cálculo mental nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enquanto o Pacto Nacional da Alfabetização na Idade Certa -PNAIC (BRASIL, 2014) colocou o senso numérico em posição de destaque da educação dos anos iniciais. Ou seja, hoje no Brasil, a promoção da capacidade de raciocinar flexivelmente não depende de novas políticas públicas, mas é crucial que os professores tenham acesso ao conteúdo destes documentos de forma efetiva, para que, desta forma o algoritmo padrão e a contagem deixem de ser as únicas estratégias de cálculo possíveis em sala de aula. Além disso, é necessário que os espaços de formação docente, redes de ensino e professores compreendam e valorizem o ensino da matemática como parte integrante do processo de alfabetização dos estudantes.

Obviamente há muito a se caminhar tanto em flexibilidade cognitiva quanto no ensino da matemática no Brasil. Esta dissertação, ao mesmo tempo que responde algumas questões, suscita muitas outras.

Os dados elucidados pela amostra desta pesquisa podem ser categorizados por outros sistemas que gerem novas análises e novos achados. O desempenho dos estudantes nos cálculos na tarefa avaliativa de flexibilidade abre muitas possibilidades de análise, como, por exemplo, verificar quais recursos foram utilizados nos cálculos com maior percentual de erro ou comparar os raciocínios empregados para resolver os cálculos de adição e de subtração. Ampliando e complementando, desta forma, os achados dos dois estudos e o entendimento da flexibilidade cognitiva no contexto brasileiro.

É importante que outras pesquisas inter-relacionem a flexibilidade cognitiva ao senso numérico, para confirmar ou rebater os dados do segundo estudo desta dissertação. É fundamental que novas pesquisas sejam realizadas, a partir de distintas posições teóricas, utilizando outros instrumentos de avaliação e com diferentes amostras, visto que, diante de diferentes prismas, a compreensão sobre a flexibilidade é aprofundada e ampliada. Parece interessante realizar pesquisas nos cursos de graduação de pedagogia para entender como acontece a formação de matemática destes futuros professores, verificando o papel da flexibilidade e do cálculo mental para a instrumentalização da prática docente.

O campo de pesquisa em flexibilidade tem demandado que maiores esforços sejam empregados em pesquisas interventivas e longitudinais, inclusive com crianças com dificuldades de aprendizagem na matemática. Desta maneira, as implicações educacionais mapeadas pela pesquisa poderão ser aplicadas e a efetividade dos resultados avaliada.

Em síntese, essa dissertação aponta direções importantes para o ensino e para a aprendizagem da matemática. A flexibilidade cognitiva se coloca como uma habilidade fundamental quando os objetivos educacionais são mais amplos e de longo prazo, posto que essa habilidade implica uma forma de pensar e de ler o mundo a partir do conhecimento de conceitos e princípios matemáticos. Neste sentido, o cálculo mental e o senso numérico destacam-se na formação do pensamento flexível, de caráter investigativo e articulador, pautado na compreensão numérica. A revisão teórica realizada e os resultados desta dissertação introduzem a flexibilidade cognitiva no campo da educação brasileira e avaliam a primeira aproximação desta habilidade em estudantes brasileiros.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **A área da matemática da BNCC**. Brasília, DF, 2017. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica Acesso em: outubro. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionai**s: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Apresentação / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

ANEXO A - TERMO DE AUTORIZAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÂO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Projeto: “Flexibilidade cognitiva em cálculo mental: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental”

Eu, ____, no cargo de ____, represento a escola ____, situada no endereço ____, em Porto Alegre, no sentido de autorizar o desenvolvimento do projeto “Flexibilidade cognitiva em cálculo mental: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental” e a participação livre e espontânea dos alunos das turmas de 2º e 4º ano. Declaro estar ciente que o projeto se desenvolverá nas dependências da escola e da necessidade de a instituição disponibilizar uma sala para realizar as avalições com os alunos participantes.

Porto Alegre, ________ de ___________________de 2017.

____
Assinatura do (a) representante da escola

ANEXO B - TERMO DE PARTICIPAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Projeto: “Flexibilidade cognitiva em cálculo mental: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental”

Eu, ____, professor(a) responsável pela(s) turma(s) _____________________________, na Escola____, aceito participar da pesquisa desenvolvida pela pesquisadora Sula Cristina Teixeira Nunes intitulada “**Flexibilidade cognitiva em cálculo mental: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental”**, fornecendo informações referentes ao desempenho escolar dos estudantes participantes do estudo, bem como cedendo espaço durante o período de aula para que seja realizada a pesquisa.

Porto Alegre, ___ de ________________ de 2017.

____

Professor(a) da Escola

ANEXO C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ACEITE DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Pelo presente termo, eu____, identidade______________________________________, responsável pelo(a) estudante ____ autorizo a participação deste (a) na pesquisa intitulada "**Flexibilidade cognitiva em cálculo mental: Perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental**" desenvolvida pela mestranda Sula Cristina Teixeira Nunes sob a orientação da professora Dra. Luciana Vellinho Corso da UFRGS.

O(A) estudante participará de atividades que envolvem situações de cálculos de adição e subtração, tema principal da pesquisa. Estas atividades serão realizadas em horário de aula, fora do espaço de sala de aula, dentro da escola com a duração de 1 (um) ou, no máximo, 2 (dois) encontros de aproximadamente 30 minutos. As atividades serão registradas por meio de gravações de áudio e vídeo. A pesquisadora assegura o sigilo da identidade do (a) estudante através da omissão do nome e da imagem em qualquer documento que se torne público. Os dados gerados pela pesquisa serão utilizados estritamente para fins de pesquisa, incluindo a publicação de artigos científicos. O aluno poderá deixar de participar da pesquisa a qualquer momento.

O grupo de pesquisadoras envolvidas comprometeu-se a dar a devolução dos resultados e, como benefício da pesquisa, serão indicados meios pedagógicos de promover o desenvolvimento da flexibilidade cognitiva em cálculo mental para os professores interessados.

Ao aceitar participar da pesquisa, solicitamos que o questionário socioeconômico (em anexo) seja preenchido.

Em caso de dúvida sobre a pesquisa, os responsáveis poderão entrar em contato com a direção da escola para contatar as responsáveis pelo estudo – Sula Nunes ou Luciana Corso, ou através do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFRGS pelo telefone (51) 3308- 3738.

Porto Alegre, ___ de _______________ de 2017.

____

Assinatura do responsável

ANEXO D - QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

SRS. PAIS E/OU RESPONSÁVEIS

Dando continuidade à pesquisa Intitulada “FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM CÁLCULO MENTAL: perfil de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental”, que você autorizou seu(sua) filho(a) a participar, solicito que sejam preenchidos os dados abaixo. Em caso de dúvida sobre a pesquisa, os responsáveis poderão entrar em contato com a direção da escola para contatar as responsáveis pelo estudo – Sula Nunes ou Luciana Corso, ou através do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFRGS pelo telefone (51) 3308- 3738

Quem preencheu: ____

Grau de parentesco com a criança: _____________________________________

Fone residencial: ____

Fone Celular: ____

Endereço Completo:____

PERGUNTAS SOBRE A CRIANÇA:

1.	Nome completo da criança:
2.	Nome do pai:
3.	Nome da mãe:
4.	Data de nascimento da criança:
5.	A criança fala outra língua? ( ) não ( ) sim 5.1 Qual?
6.	Já apresentou dores de ouvido frequentes (otites) ( ) não ( ) sim
7.	Já apresentou dificuldades para escutar ( ) não ( ) sim
8.	Usa aparelho para ouvir? ( ) não ( ) sim
9.	Dificuldades para enxergar ( ) não ( ) sim
10.	Usa óculos? ( ) não ( ) sim
11.	Usa lentes de contato? ( ) não ( ) sim
12.	Já fez cirurgia para correção da visão? ( ) não ( ) sim

13.	Já apresentou ou apresenta alguma dificuldade para produzir ou para compreender a fala? ( ) não ( ) sim
14.	A criança já teve algum acidente grave? ( ) não ( ) sim
14.1	Descreva o acidente:
15.	Teve ou tem convulsão? ( ) não ( ) sim
15.1	Desde que idade tem convulsão?
16.	A criança apresenta ou apresentou alguma doença grave (por ex. epilepsia, tumor, meningite, pneumonia) ou psiquiátricas (depressão, transtorno de déficit de atenção e hiperatividade)? ( ) não ( ) sim
16.1	Qual/quais doença/s?
17.	Já ficou hospitalizada?
17.1	Quanto tempo ficou hospitalizada?
18.	A criança já tomou algum tipo de medicação por um longo período de tempo? ( ) não ( ) sim
18.1	Qual medicação?
18.2	Por que tomou esta medicação?
18.3	Por quanto tempo tomou?
18.4	Se já parou de tomar, há quanto tempo parou?
19.	Com que idade a criança entrou na escola?
19.1	Fez pré-escola? ( ) sim ( ) não
20.	A criança tem ou teve problemas para aprender a ler e escrever? ( ) não ( ) sim
20.1	Quando teve estes problemas?
21.	A criança repetiu alguma série? ( ) não ( ) sim
21.1	Se repetiu, qual foi/quais foram?
22.	Como você classifica o rendimento (ou desempenho) escolar de seu filho? Regular ( ) Bom ( ) Muito bom ( ) Ótimo ( )
23.	Qual a maior dificuldade dele? Leitura ( ) Escrita ( ) Matemática ( )
23.1	Caso não seja nenhuma das dificuldades citadas, cite qual seria a outra (ou outras) grande/s dificuldades de seu/sua filho/a:

24.	Ele/ela tem problemas de sono ou para dormir?
24.1	Que tipo de problemas?
25.	Frequenta algum tipo de tratamento (médico, psicológico, fonoaudiológico)? ( ) não ( ) sim
25.1	Qual tipo de tratamento?
25.2	Por que realiza este tratamento?
26.	Outras Informações que achar importante:

PERGUNTAS SOBRE A FAMÍLIA:

1.	**Quem é o chefe da família em sua casa?** ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Outros
2.	**Qual a escolaridade da mãe (ou a responsável)** ( ) Analfabeto/1ª a 4ª séries incompletas – última série que frequentou:
	( ) 1ª a 4ª séries completas (primário ou ensino fundamental I)
	( ) 5ª a 8ª séries incompletas – última série que frequentou:
	( ) 5ª a 8ª séries completas (ginasial ou ensino fundamental II)
	( ) 1º ao 3º anos incompletos – último ano que frequentou:
	( ) 1º ao 3º anos completos (colegial, científico ou ensino médio)/curso técnico, qual?
	( ) Ensino superior incompleto – quantos anos frequentou:
	( ) Ensino superior completo
	Repetiu alguma série? ( ) não ( ) sim Qual/quais?
3.	Qual a Profissão?
4.	**Qual a escolaridade do pai (ou o responsável):**
	( ) Analfabeto/1ª a 4ª séries incompletas – última série que frequentou:
	( ) 1ª a 4ª séries completas (primário ou ensino fundamental I)

	( ) 5ª a 8ª séries incompletas – última série que frequentou:
	( ) 5ª a 8ª séries completas (ginasial ou ensino fundamental II)
	( ) 1º ao 3º anos incompletos – último ano que frequentou:
	( ) 1º ao 3º anos completos (colegial, científico ou ensino médio)/curso técnico, qual?
	( ) Ensino superior incompleto – quantos anos frequentou:
	( ) Ensino superior completo
	Repetiu alguma série? ( ) não ( ) sim Qual/quais?
5.	Qual a Profissão?
6.	**Quais e quantos desses itens sua família possui?** TV em cores ____________ Vídeos-cassetes/DVD ____________________ Rádios _________________ Banheiros ____________ Carros ___________ Empregados mensalistas _____________ Máquina de lavar ____________ Geladeira _________ Freezer (separado ou 2ª porta da geladeira) ________