

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - RECURSOS HÍDRICOS
E SANEAMENTO

CALIBRAGEM DE AQUÍFEROS REGIONAIS
USANDO FUNÇÕES DE INFLUÊNCIA

Autor: LESLIE MARIA FINGER ROMAN

Orientador: Prof. Dr. NELSON O. LUNA CAICEDO

Porto Alegre, março/1987

CALIBRAGEM DE AQUÍFEROS REGIONAIS
USANDO FUNÇÕES DE INFLUÊNCIA

Trabalho apresentado como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Recursos Hídricos e Saneamento, área de Águas Subterrâneas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, março/1987.

*À memória de Mathilde Elisa Finger,
minha avô.*

A José Nesio e Ida Finger, meus pais.

A Humberto, meu marido.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Nelson Luna Caicedo, pelo empréstimo de sua experiência, conhecimento e dedicação na realização deste trabalho.

- À dona Lygia Ourives Campos, pelo carinho e apoio.

- Às bibliotecárias do IPH, pelos serviços e atendimento prestados.

- À CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

- Aos meus amigos e colegas de curso pelo incentivo e companheirismo.

- Ao Professor Mário Wrege, pela contribuição técnica-científica.

S U M Á R I O

RESUMO	VII
ABSTRACT	VIII
LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABELAS	XI
LISTA DE SÍMBOLOS	XII
 <u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	
1.1. GENERALIDADES	2
1.2. OBJETIVOS	3
1.3. SINOPSE METODOLÓGICA	3
1.4. APRESENTAÇÃO DO TRABALHO	4
 <u>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	
2.1. GENERALIDADES	7
2.2. MODELOS DE PREVISÃO	8
2.3. MODELOS DE IDENTIFICAÇÃO	12
2.3.1. Métodos Diretos	13
2.3.2. Métodos Indiretos	16
 <u>CAPÍTULO 3 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO</u>	
3.1. GENERALIDADES	19
3.2. COLOCAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FLUXO	20
3.3. CONDIÇÕES INICIAIS E DE FRONTEIRA	23
3.4. COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA	24
3.5. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS	29

<u>CAPÍTULO 4 - ALGORITMO DE CÁLCULO</u>	
4.1. GENERALIDADES	34
4.2. PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO	37
<u>CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO DO MODELO</u>	
5.1. GENERALIDADES	41
5.2. MODELO HIPOTÉTICO	42
5.3. MODELO REAL	52
5.3.1. Geologia da Região	59
5.3.2. Hidrogeologia da Região	61
5.3.3. Hidráulica no Aquífero	63
5.3.4. Resultados do Modelo Real	64
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES</u>	82
BIBLIOGRAFIA	87
ANEXO - SISTEMAS LINEÁRES	93

R E S U M O

O movimento da água subterrânea aqui é descrito pela equação linearizada de Boussinesq; um algoritmo numérico baseado na decomposição espacial através dos polígonos de Thiessen é usado para resolver a equação em termos de coeficientes de influência de pulsos unitários de bombeamento. O problema inverso é formulado como um problema de otimização no qual limites superiores e inferiores de transmissividades e porosidades efetivas são adicionadas para garantir a plausibilidade hidrogeológica. O algoritmo empregado tira vantagem do princípio da superposição e somente usa os coeficientes de influência calculados ao final do primeiro intervalo de tempo de duração unitária. O algoritmo é usado para resolver problemas tanto hipotéticos quanto reais.

A B S T R A C T

The groundwater movement is assumed to be described by the linearized Boussinesq equation. A numerical algorithm based on the spatial decomposition through Thiessen polygons is used to solve the governing equation in terms of influence coefficients of unit-pulse pumping excitations. The inverse problem is formulated as an optimization problem in which upper and lower bounds on the transmissivity and effective porosity are added to ensure hydrogeologic plausibility. The algorithm uses the superposition principle and only employs influence coefficients evaluated at the end of the first time interval of unit duration. The algorithm is used to solve both synthetic and real aquifer situations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Referencial de altura piezométrica.	7
Figura 3.1	Balço de volumes no polígono i.	21
Figura 3.2	Aquífero hipotético dividido em células poligonais.	31
Figura 3.3	Subsistema 4.	31
Figura 4.1	Caminhamento do método.	35
Figura 4.2	Fluxograma para a resolução do problema inverso no subsistema i.	39
Figura 5.1	Aquífero hipotético dividido em células poligonais.	43
Figura 5.2	Transmissividades ($m^2/s \times 10^{-2}$) e porosidades efetivas dadas do aquífero hipotético.	46
Figura 5.3	Escala de bombeamento no polígono 1.	47
Figura 5.4	Escala de bombeamento no polígono 2.	47
Figura 5.5	Escala de bombeamento no polígono 3.	48
Figura 5.6	Escala de bombeamento no polígono 4.	48
Figura 5.7	Escala de bombeamento no polígono 5.	49
Figura 5.8	Decaimento da função objetiva no aquífero hipotético.	51
Figura 5.9	Comparação entre rebaixamentos observados e calculados no polígono 2.	56

Figura 5.10	Comparação entre rebaixamentos observados e calculados no polígono 5.	57
Figura 5.11	Rede de nós.	58
Figura 5.12	Distribuição das transmissividades no aquífero Xuxu ($m^2/s \times 10^{-4}$).	62
Figura 5.13	Rebaixamentos iniciais (m) no aquífero Xuxu.	65
Figura 5.14	Escala de bombeamento no polígono 1.	66
Figura 5.15	Escala de bombeamento no polígono 2.	66
Figura 5.16	Escala de bombeamento no polígono 3.	67
Figura 5.17	Escala de bombeamento no polígono 4.	67
Figura 5.18	Escala de bombeamento no polígono 5.	68
Figura 5.19	Decaimento da função objetiva no sistema.	72
Figura 5.20	Taxas de bombeamento observadas e calibradas no polígono 1.	73
Figura 5.21	Taxas de bombeamento observadas e calibradas no polígono 2.	73
Figura 5.22	Rebaixamentos observados e calculados no polígono 1.	79
Figura 5.23	Rebaixamentos observados e calculados no polígono 2.	80
Figura 5.24	Rebaixamentos observados e calculados no polígono 3.	81
Figura A1	Estímulo e resposta tipo impulso unitário.	95
Figura A2	Estímulo e resposta tipo passo unitário.	96
Figura A3	Estímulo e resposta tipo pulso unitário.	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Coordenada dos nós do sistema hipotético.	45
Tabela 5.2	Limites constantes inferiores e superiores dos parâmetros e rebaixamentos iniciais.	50
Tabela 5.3	Comparação entre transmissividades intermediárias reais e calculadas.	53
Tabela 5.4	Comparação entre porosidades efetivas reais e calculadas.	54
Tabela 5.5	Erro percentual cometido na avaliação do rebaixamento.	55
Tabela 5.6	Coordenadas dos nós do sistema real.	60
Tabela 5.7	Opção de parâmetros a serem otimizados.	71
Tabela 5.8	Erro percentual cometido na avaliação dos rebaixamentos no polígono 1.	74
Tabela 5.9	Erro percentual cometido na avaliação dos rebaixamentos no polígono 2.	75
Tabela 5.10	Erro percentual cometido na avaliação dos rebaixamentos no polígono 3.	76
Tabela 5.11	Erro percentual acumulado no sistema para cada opção do número de sub-iterações.	77

LISTA DE SÍMBOLOS

[A]	matriz dos coeficientes de influência no sistema	$L^2 T^{-1}$
[A _i]	matriz dos coeficientes de influência no subsistema i	$L^2 T^{-1}$
A _i	área do polígono i	L^2
b	espessura saturada	L
C	comprimento da bissetriz intermediária associadas aos polígonos i e m	L
h	altura piezométrica	L
I	número total de subsistemas	-
[I]	matriz identidade	-
J(Δ)	função objetiva no sistema	L^2
J(Δ _i)	função objetiva no subsistema i	L^2
K	condutividade hidráulica	$L T^{-1}$
K _x	condutividade hidráulica na direção x	$L T^{-1}$
K _y	condutividade hidráulica na direção y	$L T^{-1}$
L _{m.i}	distância entre os nós i e m	L
N	número de períodos de observação ou calibração	-
Q	descarga/recarga	$L^3 T^{-1}$

$[Q_i]$	vetor com as descargas/recargas no subsistema i	$L^3 T^{-1}$
\bar{Q}_i	média aritmética das descargas no polígono i	$L^3 T^{-1}$
$[\tilde{Q}_m]$	vetor com as descargas artificiais no subsistema m	$L^3 T^{-1}$
s	rebaixamento	L
s_i	rebaixamento no polígono i	L
\hat{s}_i	rebaixamento observado no polígono i	L
s_i^0	vetor com rebaixamento nas condições iniciais no polígono i	L
s_1^s	rebaixamento no estado permanente no polígono i	L
$[S_i^{t+1}]$	vetor com os rebaixamentos no tempo $t+1$	L
T	transmissividade	$L^2 T^{-1}$
$[T_{inf}]$	matriz que contém os limites inferiores para as transmissividades intermediárias no sistema	$L^2 T^{-1}$
$[T_{sup}]$	matriz que contém os limites superiores para as transmissividades intermediárias no sistema	$L^2 T^{-1}$
\bar{T}_i	média aritmética das transmissividades intermediárias do subsistema i	$L^2 T^{-1}$
T'_{im}	transmissividade intermediária entre os polígonos m e i	$L^2 T^{-1}$
$T'_{im,inf}$	limite inferior para a transmissividade intermediária entre os polígonos i e m	$L^2 T^{-1}$

T_{im}^{sup}	limite superior para a transmissividade intermediária entre os polígonos i e m	$L^2 T^{-1}$
δ_{im}	coeficiente de influência entre os polígonos i e m	TL^{-2}
$[\Delta]$	matriz simétrica com os coeficientes de influência no sistema	TL^{-2}
ξ	erro admissível	-
ϵ_Q	constante positiva arbitrária usada para a determinação dos limites variáveis das taxas de descarga	-
ϵ_T	constante positiva arbitrária usada para a determinação dos limites variáveis das transmissividades intermediárias	-
ϵ_ϕ	constante positiva arbitrária usada para a determinação dos limites variáveis das porosidades efetivas	-
$[\tau_i]$	matriz simétrica com as condutâncias no subsistema i	$L^2 T^{-1}$
τ_{im}	condutância entre os polígonos i e m	$L^2 T^{-1}$
ϕ	porosidade efetiva	-
ϕ_i	porosidade efetiva no polígono i	-
$[\phi_{inf}]$	matriz com os limites inferiores das porosidades efetivas no sistema	-

$[\phi_{sup}]$	matriz com os limites superiores das porosidades efetivas no sistema	-
$\bar{\phi}_i$	média aritmética das porosidades efetivas no subsistema i	-
$[\bar{\phi}_i^*]$	matriz diagonal com o produto entre as porosidades efetivas e as áreas dos polígonos no subsistema i	-
$\phi_{i inf}$	limite inferior para a porosidade efetiva no polígono i	-
$\phi_{i sup}$	limite superior para a porosidade efetiva no polígono i	-

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

A escassez de recursos hídricos e o alto grau de contaminação das águas superficiais faz com que o mundo moderno se volte progressivamente para a utilização das reservas de água subterrânea. Modelos matemáticos para a simulação do fluxo subterrâneo têm grande aplicação em nossos dias. Os métodos de resolução estão sendo aprimorados, conhecem-se diversas técnicas cuja aplicabilidade varia com as condições do problema em questão, disponibilidade e capacidade computacionais. Os métodos analíticos são de simples e rápida aplicação, porém contêm grandes simplificações do sistema real. As equações diferenciais representativas do comportamento físico dificilmente têm soluções analíticas na prática. Para resolvê-las recorre-se a métodos numéricos, os quais discretizam o sistema no tempo e no espaço. A quantidade de informações disponíveis determinam o tamanho da malha. Porém, para que não se tenha um grande número de células pequenas onde não existam dados disponíveis, são introduzidas células poligonais baseadas nos polígonos de Thiessen.

Na simulação do comportamento de aquíferos depara-se com a dificuldade de obtenção dos parâmetros hidrogeológicos, transmissividade e porosidade efetiva, principalmente pelo alto custo envolvido nos testes de bombeamento empregados na determinação no campo. Além disto, os testes são locais e nem sempre refletem a realidade em escala regional. Atualmente, existem técnicas numéricas que possibilitam a identificação dos parâmetros, baseando-se em dados oriundos da observação do comportamento do aquífero, durante um determinado período, denominado período de calibra-

ção.

O processo de identificação ou calibração dos parâmetros é denominado de problema inverso. Os métodos utilizados para a determinação dos parâmetros são divididos em dois grupos: diretos e indiretos. Os primeiros determinam os parâmetros em cada célula a partir da equação diferencial do fluxo subterrâneo e das alturas piezométricas em cada ponto. Os métodos indiretos usam procedimentos iterativos para reduzir o erro cometido na avaliação dos rebaixamentos, variando os parâmetros do modelo de acordo com critérios rígidos de ajuste.

1.2. OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver e implementar um modelo matemático que identifique características hidrogeológicas de aquíferos regionais, utilizando coeficientes de influência e dados hidrogeológicos observados.

Espera-se que o modelo minimize tempo e recursos econômicos alocados para a realização de trabalhos similares.

1.3. SINOPSE METODOLÓGICA

A abordagem metodológica processou-se em duas etapas. A primeira etapa do trabalho é voltada para o desenvolvimento numérico de um modelo de previsão de rebaixamento em sistemas aquíferos. A equação básica do fluxo subterrâneo é resolvida em termos de coeficientes de influência e aplicada a cada polígono do sistema pelo balanço de volumes

nas respectivas fronteiras.

Na segunda etapa os coeficientes de influência são otimizados utilizando a programação quadrática. Os valores ótimos são vinculados diretamente às transmissividades e porosidades efetivas ótimas de cada subsistema em que está dividido o sistema geral. A variação das transmissividades e porosidades efetivas é limitada a um intervalo de confiança estabelecido a partir de conhecimentos geológicos da região.

1.4. APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho acha-se estruturado da seguinte forma. O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica suscinta de métodos desenvolvidos para a previsão de rebaiamentos e identificação de parâmetros hidrogeológicos. No capítulo 3 são desenvolvidas as equações de fluxo usadas no modelo e é estabelecida a função objetiva a ser otimizada. No capítulo 4 apresenta-se o algoritmo computacional colocado para a solução do Problema Inverso. No capítulo 5 é mostrada a aplicação do método proposto a aquíferos hipotético e real. As conclusões pertinentes ao trabalho são discutidas no capítulo 6.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. GENERALIDADES

O desenvolvimento da hidrogeologia teve início no século XIX, quando as leis da Física passaram a ser aplicadas para deduzir o fluxo da água nas formações geológicas. DARCY (1856) confirmou a aplicabilidade do princípio do fluxo laminar em areias uniformes, constatando que a velocidade do escoamento é diretamente proporcional ao gradiente hidráulico e a uma constante do meio e do fluido denominada condutividade hidráulica; o resultado de sua observação é conhecido universalmente como Lei de Darcy e, juntamente com a equação da Continuidade, serve de base para as equações do fluxo subterrâneo.

Em aquíferos livres, a equação geral do fluxo subterrâneo é praticamente insolúvel, visto ser normalmente desconhecida a posição da superfície piezométrica ao longo do tempo e as velocidades variarem dentro de uma mesma vertical. DUPUIT (1863) e FORCHHEIMER (1886) introduziram simplificações considerando constante a distribuição da carga piezométrica h ao longo de uma vertical, autorizando escrever h em função das coordenadas espaciais x , y e do tempo t . A função $h(x, y, t)$ representa a altura da superfície livre acima do Plano de Referência (PR) tomado como o limite impermeável (Figura 2.1).

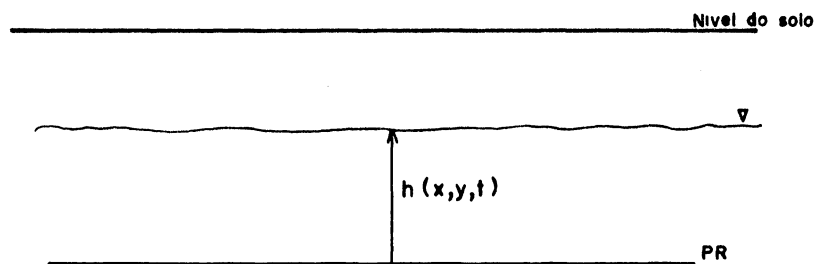


Figura 2.1 - Referencial de altura piezométrica

BOUSSINESQ (1904) considerou as simplificações de Dupuit-Forchheimer e derivou a equação do fluxo em aquíferos livres a partir do balanço de volume em uma porção elementar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \phi \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

onde: x e y são as direções dos eixos coordenados; K_x e K_y são as condutividades hidráulicas nas direções x e y respectivamente; h é a altura piezométrica; ϕ é a porosidade efetiva; t é relativo ao tempo.

A expressão 2.1 é conhecida como equação não-linearizada de Boussinesq, a qual é linearizada quando a variação espacial de h é pequena em relação à espessura saturada do aquífero (b), onde se obtém para meios homogêneos e isotrópicos:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\phi}{bK} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.2)$$

As equações acima reproduzem matematicamente o comportamento do sistema aquífero e expressam relações en-

tre variáveis e parâmetros que o representam. Os parâmetros caracterizam componentes físicos tanto geométricos como hidromecânicos e as variáveis descrevem quantitativamente um fenômeno que varia no tempo e no espaço.

A equação geral do fluxo em aquíferos sujeitos a ações de recarga e/ou descarga é:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\phi}{bK} \frac{\partial h}{\partial t} - Q \quad (2.3)$$

onde $Q > 0$ é a recarga no sistema, e
 $Q < 0$ é a descarga no sistema.

2.2. MODELOS DE PREVISÃO

A previsão de rebaixamentos ou de níveis piezométricos em aquíferos é feita resolvendo a equação diferencial do fluxo subterrâneo. Segundo a forma de resolução da equação os modelos em hidrogeologia são classificados em analógicos, analíticos, numéricos ou digitais.

Os modelos analógicos resolvem indiretamente a equação de fluxo utilizando-se de um fenômeno físico, normalmente o elétrico, que tenha uma equação diferencial do mesmo tipo da dos aquíferos.

Os modelos analíticos são os que dão a solução exata da equação diferencial por meio de funções analíticas ou tabeladas. O início de sua aplicação data do fim do século passado quando foram elaboradas as primeiras soluções para a hidráulica de poços no regime permanente. THEISS(1935), a partir da lei de Darcy e da equação da continuidade apli-

cada ao fluxo radial, obteve a expressão do rebaixamento em poços operando no regime transitório. COPPER e JACOB (1946) apresentaram uma aproximação da equação de Theis, aplicável a pequena distância radial e bombeamentos de longa duração.

Embora os métodos analíticos sejam de simples e rápida aplicação, eles contêm grandes simplificações do sistema real, sendo aplicáveis somente a aquíferos de geometria simples e com coeficientes constantes no tempo e no espaço. As equações diferenciais, representativas do comportamento de um sistema físico real, dificilmente têm soluções analíticas na prática. Para resolvê-las recorre-se aos métodos numéricos, os quais discretizam o sistema no tempo e no espaço, transformando-os em uma série de equações para cada incremento de tempo. Métodos de resolução do sistema de equações são brevemente comentados em BITTINGER et al. (1967).

Com o avanço tecnológico na ciência dos computadores, modelos digitais foram amplamente divulgados e inúmeros trabalhos realizados. WALTON e NEILL (1960) elaboraram um modelo matemático para o cálculo de rebaixamento em poços situados em aquíferos de múltiplas fronteiras, utilizando a teoria das imagens e equações do estado não permanente.

TYSON e WEBER (1964) desenvolveram um modelo bidimensional para o cálculo das alturas piezométricas em aquíferos heterogêneos, utilizando a decomposição espacial por polígonos de Thiessen. Conhecidos os elementos geométricos, as transmissividades nos limites entre polígonos, espessuras saturadas, taxas de recargas e/ou descargas e assinaladas alturas piezométricas iniciais para cada nó (ponto central de um polígono) é realizado o balanço de volumes para todos os polígonos pertencentes ao sistema. O resultado numérico do balanço de volumes é denominado resíduo. A cada intervalo de tempo o modelo entra em um processo ite-

rativo, onde, partindo dos valores iniciais, as alturas piezométricas são ajustadas pela magnitude dos resíduos e atenuadas por um coeficiente de relaxação. O método iterativo usado na resolução do problema é o de Gauss-Seidel.

PINDER e BREDEHOEFT (1968) desenvolveram um modelo numérico utilizando o método das diferenças finitas para quantificar as respostas a ações de bombeamento ou recarga em aquíferos confinados. O modelo foi aplicado a um aquífero em Musquodoboit Harbair (Nova Scotia), apresentando bons resultados.

A inconstância das transmissividades no tempo em função das variações nas espessuras saturadas foi introduzida no modelo de Tyson e Weber (1964), por BOONSTRA e de RIDDER (1980). Além disto a plausibilidade física das alturas piezométricas passa a ser verificada em cada iteração. Quando os níveis calculados ultrapassam os limites físicos pré-estabelecidos, o algoritmo introduz um novo componente no balanço de volumes e assinala um valor que assegura uma nova altura piezométrica que satisfaça os limites. Este novo componente pode ser uma retirada ou percolação adicional dependendo de qual limite, inferior ou superior, é ultrapassado.

A linearidade das equações do meio subterrâneo permite o emprego da teoria dos sistemas lineares, e a equação é resolvida em termos de coeficientes de influência de duração unitária. VENETIS (1970) derivou expressões analíticas para definir respostas do tipo impulso e passo unitário às flutuações do nível piezométrico subterrâneo para aquíferos homogêneos, isotrópicos e com fluxo unidimensional.

MADDOCK (1972) desenvolveu uma relação algébrica para modelar a equação diferencial parcial do rebaixamen

to provocado pelo bombeamento em aquíferos confinados, homogêneos, de espessura uniforme, infinitos e onde existem P poços totalmente penetrantes em operação. A função algébrica é obtida a partir da equação diferencial parcial a duas dimensões do fluxo subterrâneo, utilizando transformadas de Laplace e Fourier e considerando que o bombeamento se dá em uma série de pulsos retangulares cuja amplitude n é a duração do mesmo. Maddock mostrou ainda que a função pode ser extrapolada para meios heterogêneos, finitos e de fronteiras irregulares.

Baseando-se no aspecto aleatório das variáveis de decisão, descargas ou recargas artificiais e naturais, MADDOCK (1974) desenvolveu um modelo estocástico para determinar o rebaixamento em poços. Utiliza a equação linear obtida por ele próprio em 1972, sendo válidas as mesmas hipóteses anteriores em relação ao meio/aquífero, adicionando um trecho de rio o qual considera como limite de carga constante.

MOREL-SEYTOUX e DALY (1975) criaram um processo numérico para determinar os coeficientes discretos de bombeamento, não se necessitando mais que os coeficientes sejam recalculados na presença de modificações na recarga ou fronteiras.

RODRIGUES-AMAYA (1976) resolveu o fluxo subterrâneo em aquíferos finitos e heterogêneos aproximando a equação do fluxo a uma equação em diferenças finitas e resolvendo numericamente pelo método ADI (Alternating Direction Implicit). A transmissividade na fronteira entre duas células adjacentes (transmissividade intermediária) foi definida como a média harmônica dos valores assinalados no centro de cada célula. Os resultados mostraram melhor representação física do movimento da água subterrânea na natureza que aquela obtida por modelos similares que utili

zam a transmissividade intermediária como a média aritmética entre os valores no centro das duas células.

BATHALA et al. (1981) apresentaram um modelo similar aos desenvolvidos por Maddock (1972, 1974). Avaliaram o rebaixamento em aquíferos heterogêneos e isotrópicos divididos em células poligonais e interconectados hidraulicamente a um rio, cuja variação de nível é conhecida.

ILLANGASEKARE et al. (1984) desenvolveram um modelo linear para simular alturas piezométricas em aquíferos heterogêneos utilizando a técnica da reinicialização. O uso da técnica da reinicialização permite que um sistema seja modelado para um grande número de intervalos de tempo, usando somente os coeficientes de influência gerados para o primeiro intervalo. Ao final de cada intervalo o sistema é reinicializado assumindo que os níveis da água calculados são as novas condições iniciais do sistema. A solução para todo o período de simulação é obtida pela repetição do processo ao longo do tempo. A redução do número de coeficientes de influência a serem calculados implica na minimização do tempo e custo computacional, minimização esta que se torna progressivamente mais significativa à medida que aumentam o tamanho do sistema e o número de intervalos de tempo a serem simulados.

2.3. MODELOS DE IDENTIFICAÇÃO

Na previsão do comportamento de aquíferos depara-se com a dificuldade de obtenção dos parâmetros hidrogeológicos, transmissividade e porosidade eficaz ou coeficiente de armazenamento, principalmente pelo alto custo envolvido nos testes de bombeamento empregados na determinação no campo. Além disto, os testes são locais e nem sempre refletem a realidade em escala regional. Atualmente exis-

tem técnicas numéricas que possibilitam a identificação dos parâmetros, baseando-se em dados oriundos da observação do comportamento do aquífero.

O processo de identificação ou calibração dos parâmetros é denominado de problema inverso. NEUMAN (1973) divide o problema inverso, segundo os métodos utilizados na determinação dos parâmetros, em dois grupos: diretos e indiretos. Os métodos diretos determinam os parâmetros em cada célula a partir da equação diferencial do fluxo subterrâneo e das alturas piezométricas ou rebaixamentos em cada ponto. Os indiretos partem de valores iniciais das alturas piezométricas em cada célula e, através de um processo de otimização, determinam o valor ótimo para os parâmetros desconhecidos, segundo critérios rígidos de controle do processo de ajuste.

2.3.1. Métodos Diretos

Os métodos diretos tratam os parâmetros hidrogeológicos como variáveis dependentes na equação do fluxo subterrâneo. Conhecidos os rebaixamentos em todas as células em que está dividida a região, o problema concentra-se na resolução de um sistema de equações lineares, cujas incógnitas são as transmissividades, para o regime permanente, ou estas e os coeficientes de armazenamento, para o regime transiente.

KLEINECKE (1971), utilizando o método da decomposição espacial em células poligonais, empregou a programação linear para minimizar a soma dos máximos resíduos absolutos em cada nó e para todos os intervalos de tempo:

$$Z = \sum_{i, n} \max X_{i, n}, \text{ para } i=1, 2, \dots, I, \text{ e } n=1, 2, \dots, N$$

onde Z é a função objetiva a ser minimizada; $X_{i,n}$ é o resíduo no polígono i e no intervalo de tempo n .

Kleinecke aplicou o modelo a um nó isolado constatando que aproximadamente a metade dos valores calibrados eram próximos aos reais. Concluiu que em bacias sem bom suporte geológico e com dados anuais é necessário que o período de calibração seja de 25-30 anos para que se obtenha estimativas satisfatórias dos parâmetros.

O problema inverso para o estado permanente foi estudado por EMSELLEM e de MARSILY (1971). Ao mesmo tempo em que se preocuparam com a identificação dos parâmetros, buscaram atender critérios de uniformidade da distribuição da solução ao longo da região estudada.

Empregando a técnica dos elementos finitos para resolver a equação do fluxo subterrâneo, NEUMAN (1973) resolveu o problema de identificação aplicando a programação linear. Somente o estado permanente foi considerado, porém a metodologia pode ser extrapolada para resolver problemas no estado transiente. A plausibilidade física dos valores encontrados foi assegurada introduzindo limites inferiores e superiores às variações dos parâmetros.

HEFEZ et al. (1975) apresentaram alguns métodos para formular o problema inverso sob a forma de programação linear ou quadrática. Após terem testado os métodos propostos em modelos sintéticos, concluíram que os melhores critérios são aqueles que minimizam a soma linear ou quadrática dos resíduos originados pelo mau ajuste dos parâmetros na equação do balanço de volume em todas as células.

Considerando os regimes permanentes e transientes, NUTBROWN (1975) apresentou um método indutivo para avaliar os parâmetros hidrogeológicos. A equação bidimensional

do fluxo é aproximada a uma equação em diferenças finitas e a região dividida em malhas quadradas. Da mesma forma que Emsellem e de Marsily (1971), Nutbrown considerou a uniformidade da variação espacial dos parâmetros.

SMITH e PIPER (1978) utilizaram o método da sobre relaxação para resolver a equação do fluxo subterrâneo em diferenças finitas. A identificação dos parâmetros foi feita em duas etapas. Na primeira etapa a transmissividade foi calibrada para o estado permanente. Na segunda etapa, com as transmissividades obtidas da anterior, os coeficientes de armazenamento foram determinados resolvendo o fluxo para o regime transiente. O algoritmo desenvolvido foi aplicado em um aquífero em Tehran (Iran) e os resultados foram satisfatórios.

GUVANASEN e VOLKER (1978) desenvolveram um modelo numérico, empregando a técnica das diferenças finitas, para identificar os parâmetros hidrogeológicos em aquíferos de fluxo bidimensional. A calibração do modelo foi feita aplicando o método de Newton Raphson para minimizar a diferença entre níveis da água observados e calculados para cada célula isoladamente ao longo do período de calibração.

Um método iterativo para resolver o problema inverso em aquíferos de fluxo bidimensional divididos em células retangulares, heterogêneas foi apresentado por BACHMAT e DAX (1979). A cada célula o algoritmo resolve o problema através de programação quadrática, onde limites inferiores e superiores para a variação dos parâmetros foram introduzidos para garantir o significado físico dos resultados. Aplicado a um aquífero de Israel, o método mostrou ser eficiente do ponto de vista técnico e econômico, sendo necessárias poucas iterações para que atingisse um nível de precisão adequado.

KASHYAP e CHANDRA (1982) desenvolveram uma técnica para estimar a distribuição espacial dos valores dos parâmetros relacionados com as propriedades hidrogeológicas do aquífero. Restrições às variações dos parâmetros foram impostas e a soma dos quadrados dos resíduos da equação de Boussinesq minimizados para todas as células e intervalos de tempo que compreendem o período de calibração.

2.3.2. Métodos Indiretos

Conhecidos ou estimados os parâmetros hidrogeológicos, transmissividade e coeficiente de armazenamento, na equação do fluxo subterrâneo, o problema recai em determinar os rebaixamentos para cada ponto e intervalo de tempo. Os métodos indiretos consistem basicamente em resoluções sucessivas da equação de fluxo para diferentes conjuntos de parâmetros estabelecidos por processos matemáticos rígidos no final de cada iteração. De forma diversa aos métodos diretos, as alturas piezométricas observadas somente são usadas para comparação com as calculadas e assim definir o ajuste dos valores estabelecidos.

A quasi-linearização e o método dos mínimos quadrados foram apresentados por YEH e TAUXE (1971a, 1971b) para solucionar o problema inverso em aquíferos homogêneos, isotrópicos, considerando o fluxo radial. Quasi-linearização é uma técnica empregada para resolver sistemas de equações diferenciais que envolvem diferentes conjuntos de valores iniciais de forma que a sequência de soluções obtidas converja para a solução do problema original.

LOVELL et al. (1972) desenvolveram um método de calibração subjetiva estudando os resíduos na equação de balanço de volumes. Informações subjetivas provenientes de conhecimentos hidrogeológicos prévios da área a ser estudada fo

ram introduzidas no modelo. Todos os parâmetros, incluindo estímulos externos ao sistema e alturas piezométricas, foram limitados a um intervalo de confiança que estabelece valores inferiores e superiores admissíveis para cada um. A calibração foi feita automaticamente até que o nível de precisão desejada fosse alcançado, ou que fosse mostrado que este não poderia ser atingido dentro das restrições impostas.

CHANG e YEH (1976) resolveram o problema inverso em aquíferos heterogêneos, isotrópicos e com fluxo bidimensional. A quasi-linearização (Yeh e Tauxe, 1971a) e a programação quadrática foram utilizadas para identificar os parâmetros do sistema enquanto todas as restrições impostas eram satisfeitas.

Aplicando a teoria dos sistemas lineares, LUNACAICEDO (1983) criou um algoritmo numérico para resolver o problema inverso em aquíferos heterogêneos. A equação bidimensional do fluxo subterrâneo foi aproximada a uma equação de diferenças finitas e os coeficientes de influência foram calculados somente no final do primeiro intervalo de duração unitária. O problema inverso foi formulado como um problema de otimização no qual os parâmetros hidrogeológicos foram encontrados iterativamente, atendendo às restrições impostas pelo modelo físico. O algoritmo aplicado a aquíferos reais e hipotéticos mostrou ser econômica e tecnicamente eficaz.

CAPÍTULO 3

DESENVOLVIMENTO DO MODELO

3.1. GENERALIDADES

O modelo consiste na identificação dos parâmetros hidrogeológicos, transmissividade e porosidade efetiva, em aquíferos heterogêneos, isotrópicos, livres e com fluxo vertical desprezível.

O aquífero é dividido em células poligonais (polígonos de Thiessen). O ponto central de cada polígono é denominado nó e a ele é associada uma porosidade efetiva representativa da área. Nos limites entre células é associada uma transmissividade intermediária, obtida pela média harmônica entre aquelas assinaladas para cada nó. O comportamento do aquífero é simulado pela equação de balanço de volumes em cada polígono.

A natureza linear da equação que governa o fluxo permite a utilização do princípio da superposição, isto é, o efeito total (em termos de níveis de água) em um determinado ponto do sistema é igual à soma geométrica dos efeitos individuais produzidos pelos estímulos distintos em um intervalo de tempo.

O acoplamento dos efeitos é feito através de Coeficientes de Influência (Núcleos Discretos). Os Coeficientes de Influência nada mais são senão respostas (em termos de níveis d'água) a estímulos particulares de natureza pulsante.

A técnica da reinicialização (Illangasekare et al. 1984) é utilizada e os coeficientes discretos são calculados apenas no final do primeiro intervalo de tempo de duração unitária.

A Função-Objetivo usada na busca da solução ótima para o problema inverso é estabelecida pela diferença quadrática entre rebaixamentos observados e calculados em cada polígono e para cada intervalo de tempo. São fixadas restrições relacionadas aos limites superiores e inferiores da transmissividade e porosidade efetiva para garantir realidade física.

3.2. COLOCAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FLUXO

A formulação numérica inicia com a divisão do aquífero em células poligonais. Para cada célula do sistema é feito um balanço de volumes, assumindo-se que o fluxo existente dentro do polígono é o que ocorre através das fronteiras adjacentes. Qualquer propriedade no polígono é representada por um único valor assinalado no nó.

O balanço de volumes entre o polígono i e os m polígonos que o cercam (Figura 3.1), considerando que é o único estímulo externo ao sistema é o bombeamento Q_i , é:

$$\sum_m T_{m,i} \frac{C_{m,i}}{L_{m,i}} (s_i - s_m) = \frac{\phi_i A_i}{\Delta t} (s_i^t - s_i^{t+1}) + Q_i \quad (3.1)$$

onde $T_{m,i}$ é a transmissividade harmônica entre os polígonos i e m , $[L^2 T^{-1}]$; ϕ_i é a porosidade efetiva; $C_{m,i}$ é o comprimento da bissetriz perpendicular associada aos polígonos i e m , $[L]$; $L_{m,i}$ representa a distância entre os nós i e m , $[L]$; Σ é o somatório dos termos associados aos lados do polígono

i ; A_i é a área do polígono i , $[L^2]$; s_i^t é o rebaixamento no nó i tomado em relação a um plano horizontal de referência no tempo $[T]$; Δt é o intervalo de tempo $[T]$.

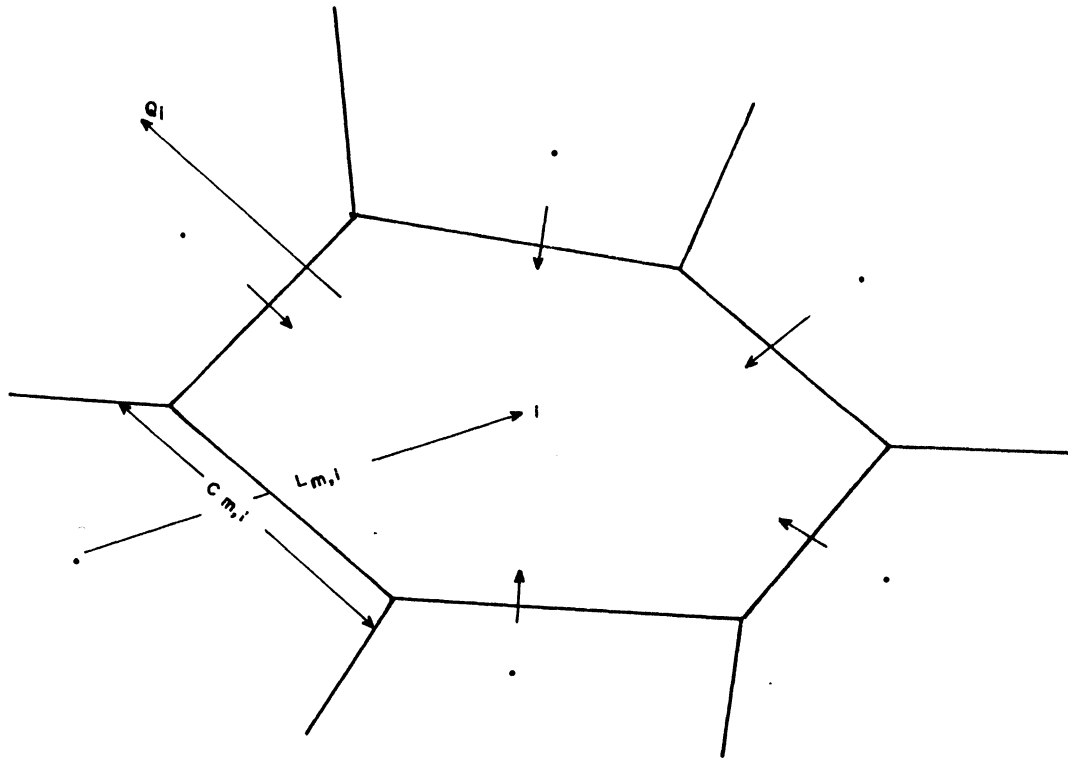


Figura 3.1 - Balanço de volumes no polígono i

O lado esquerdo da equação representa a variação do fluxo nas fronteiras do polígono i , através do lado do comprimento $C_{m,i}$. No lado direito, o primeiro termo representa o armazenamento dentro da área i e o segundo, os estímulos externos.

Os rebaixamentos em cada nó variam no tempo devido às modificações na recarga e/ou na escala de bombeamento. Por consequência a equação (3.1) deve ser resolvida para sucessivos intervalos de tempo. Utilizando um esquema numéri-

co implícito, onde Δt não depende de critérios de estabilidade e considerando que $T_{m,i}$ e Q_i são expressos na unidade de Δt , pode-se reescrever a equação (3.1):

$$s_i^{t+1} \tau_{i,i} - \sum_m s_m^{t+1} \tau_{i,m} + \phi_i^* s_i^{t+1} = s_i^t \phi_i^* + Q_i^{t+1/2} \quad (3.2)$$

onde $\tau_{m,i} = T_{m,i} \frac{C_{m,i}}{L_{m,i}}$ é a condutância entre os polígonos m e i ; $\phi_i^* = \phi_i \Lambda_i$; $Q_i^{t+1/2}$ é a retirada média no intervalo $(t, t+1)$;
 $\tau_{i,i} = \sum_m \tau_{i,m}$.
 A equação (3.2), ao ser escrita para cada polígono, dá origem a um sistema linear de equações cuja variável desconhecida é o rebaixamento s_i^{t+1} . Na forma matricial:

$$[\tau] \{s_i^{t+1}\} + [\phi^*] \{s_i^{t+1}\} = [\phi^*] \{s_i^t\} + \{Q_i^{t+1/2}\} \quad (3.3)$$

onde: $[\tau]$ é uma matriz simétrica que contém as condutâncias entre polígonos adjacentes:

$$\tau_{i,m} > 0, \text{ para } i = m;$$

$$\tau_{i,m} \leq 0, \text{ para } i \neq m;$$

$$\tau_{i,i} = \sum_m \tau_{i,m};$$

$[\phi^*]$ é uma matriz diagonal;

$$\phi_{i,m}^* = 0, \text{ para } i \neq m;$$

$$\phi_{i,m}^* = \phi_i \Lambda_i, \text{ para } i = m;$$

$\{s_i^{t+1}\}$ é o vetor que contém os rebaixamentos no final do período;

$\{s_i^t\}$ é o vetor que contém os rebaixamentos no início do período;

$\{Q_i^{t+1/2}\}$ é o vetor que contém os estímulos médios externos ao sistema no intervalo $(t, t+1)$;

$Q_i^{t+1/2} > 0$, para retiradas no sistema;

$Q_i^{t+1/2} < 0$, para recargas no sistema.

As equações originadas pelo balanço de volumes nos polígonos de um sistema são semelhantes àquelas obtidas pelo método numérico que aproxima a equação diferencial parcial do fluxo bidimensional a uma equação de diferenças finitas (Luna-Caicedo, 1983).

3.3. CONDIÇÕES INICIAIS E DE FRONTEIRA

Para que a equação do fluxo subterrâneo produza a solução de um problema particular as Condições Iniciais e de Fronteira devem ser especificadas. As primeiras descrevem os rebaixamentos iniciais no aquífero e as segundas refletem a influência ou de uma barreira impermeável, ou de um potencial hidráulico conhecido ou de qualquer fluxo que atravesse os limites físicos do sistema.

A equação que define o rebaixamento em um aquífero heterogêneo, isotrópico, definido em um domínio D , nas condições de estado não permanente, e com Condições de Fronteira independentes do tempo e definidas no domínio C , é:

$$T \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) = \phi \frac{\partial s}{\partial t} - Q \quad (3.4)$$

com Condições Iniciais:

$$s = f(x,y), \text{ para } t = 0 \text{ em } D; \quad (3.5)$$

e Condições de Fronteira:

$$L(s) = g(x,y), \text{ para } t \geq 0 \text{ em } C; \quad (3.6)$$

onde $L(s) = a_0 s + a_1 \frac{\partial s}{\partial x} + a_2 \frac{\partial s}{\partial y}$; x, y são coordenadas; a_0, a_1, a_2 são constantes; s é o rebaixamento; T é a transmissividade; ϕ é a porosidade efetiva; Q é a descarga no aquífero.

3.4. COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA

Na análise do comportamento do aquífero de ve-se considerar três fatores básicos que o influenciam: os estímulos externos que provocam alterações no sistema, o efeito das fronteiras que o limitam e o estado inicial. A seguir analisa-se a reação que cada um provoca dentro do sistema.

(1) ESTÍMULOS EXTERNOS

Considera-se que exista bombeamento no polígono i enquanto os demais são mantidos nas Condições Iniciais e de Fronteira. O fluxo não permanente em i é descrito pela equação:

$$\sum_m \tau_{i,m} (s_i^{t+1} - s_m^{t+1}) = \phi_i A_i (s_i^t - s_i^{t+1}) + Q_i^{t+1/2} \quad (3.7)$$

com Condição Inicial: $s = 0$, para $t = 0$;

Condição de Fronteira: $L(s) = g(x,y) = 0$, para $t \geq 0$.

A equação (3.7) é escrita para cada polígono pertencente ao subsistema i , dando origem a um sistema linear de equações. Na forma matricial:

$$[\tau] \{s_i^{t+1}\} + [\phi^*] \{s_i^{t+1}\} = \{Q_i^{t+1/2}\} \quad (3.8)$$

Se o bombeamento for aplicado no nó m durante o primeiro intervalo de tempo de duração unitária sob forma de pulso unitário ($Q_m=1$, para $t=1$; $Q_m=0$, para $t>1$), enquanto os demais nós são mantidos em repouso, o rebaixamento produzido no polígono i em resposta ao estímulo é chamado coeficiente de influência δ_{im} . A equação 3.7 pode ser reescrita:

$$[A_i] \{\delta_{im}\} = \{Q_i\} \quad (3.9)$$

onde:
$$[A_i] = [\tau_i] + [\phi_i^*] \quad (3.10)$$

Quando todos os polígonos tiverem sido estimulados, os vetores $\{\delta_{im}\}$ e $\{Q_i\}$ terão se transformado na matriz simétrica e identidade respectivamente. A equação 3.10 tomará então a seguinte forma:

$$[\Lambda] [\Lambda] = [I] \quad (3.11)$$

As linhas da matriz Λ correspondem aos polígonos de observação e as colunas aos de bombeamento.

O rebaixamento total provocado pelos estímulos externos no polígono i é dado pela superposição dos efeitos individuais:

$$s_i(1) = \sum_m \delta_{im} Q_i(1) \quad (3.12)$$

(2) CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Para modelar o efeito das Condições de Fronteira considera-se o regime permanente e a não interferência de nenhum estímulo. O fluxo é então descrito:

$$\sum_m \tau_{i,m} (s_i - s_m) = 0, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.13)$$

com Condição de Fronteira: $L(s) = g(x,y)$, para $t \geq 0$.

As condições iniciais mantêm-se constantes ao longo do tempo em todo o sistema e o rebaixamento s_i será igual àquele que caracteriza o estado permanente real.

$$s_i = s_i^s \quad (3.14)$$

(3) CONDIÇÕES INICIAIS

Considera-se o estado não permanente com condições de fronteira homogêneas e não ocorrência de estímulos externos. A equação do fluxo escrita para o primeiro intervalo de tempo é:

$$\sum_m \tau_{i,m} (s_i^1 - s_m^1) = \phi_i A_i (s_i^0 - s_i^1) \quad (3.15)$$

com condições iniciais: $s = f(x,y)$, para $t = 0$;

condições de fronteira: $L(s) = 0$, para $t \geq 0$.

Na forma matricial:

$$[A_i] \{s_i^1\} = [\phi_i^*] \{s_i^0\} \quad (3.16)$$

Isolando $\{s_i^1\}$ e substituindo $[\phi^*]$ de (3.10), ob-
tém-se:

$$\{s_i^1\} = \{s_i^0\} - [A_i]^{-1} [\tau_i] \{s_i^0\} \quad (3.17)$$

As condições iniciais observadas no começo da simulação são o estado resultante de bombeamentos desconhecidos (Illangasekare et al., 1984). A taxa de bombeamento permanente que foi aplicada em cada polígono e que levou o aquífero do estado de repouso para o observado inicialmente somente pode ser determinado a partir dos rebaixamentos iniciais s_i^0 . MOREL-SEYTOUX e DALY (1975) propuzeram uma técnica para criar artificialmente a história do bombeamento no aquífero projetada de forma que leve o sistema do estado permanente às condições iniciais conhecidas. Para fins analíticos, um bombeamento artificial \tilde{Q}_m é aplicado aos m pontos de observação durante o período imediatamente posterior ao tempo zero. A expressão de \tilde{Q}_m é derivada a partir da equação de Poisson e, escrita na forma matricial, toma o seguinte aspecto:

$$\{\tilde{Q}_m\} = [\tau_i] \{s_i^0\} \quad (3.18)$$

Substituindo em (3.17):

$$\{s_i^1\} = \{s_i^0\} - [A_i^{-1}] \{\tilde{Q}_m\} \quad (3.19)$$

A solução do problema é:

$$s_i(1) = s_i(0) - \sum_m \delta_{im} \tilde{Q}_m(1) \quad (3.20)$$

Os rebaixamentos no final do primeiro intervalo de tempo de duração unitária (equação 3.21) são resultantes da superposição dos efeitos produzidos por cada um dos fatores que estimularam o sistema. Para efeitos práticos, os rebaixamentos do estado permanente são considerados incluídos nas condições iniciais.

$$s_i(1) = s_i(0) + \sum_m \delta_{im} (\bar{Q}_m(1) - \tilde{Q}_m(1)) \quad (3.21)$$

Generalizando para N intervalos:

$$s_i(n) = s_i(n-1) + \sum_m \delta_{im} (\bar{Q}_m(n) - \tilde{Q}_m(n)) \quad (3.22)$$

onde $\bar{Q}_m(n)$ é o bombeamento médio no período; $\tilde{Q}_m(n) = \sum_p \tau_{mp} s_p^{(n-1)}$ é a descarga artificial associada aos rebaixamentos calculados no início do enésimo período.

O rebaixamento total em um polígono i , medido em relação a um plano de referência horizontal e avaliado no final do enésimo intervalo de tempo, é função: do rebaixamento $s_i(n-1)$ ocorrido no início do período, do estado permanente real, dos estímulos nos polígonos adjacentes $\sum_m \delta_{im} \bar{Q}_m(n)$ e do estado transiente dos polígonos adjacentes $-\sum_m \delta_{im} \tilde{Q}_m(n)$.

Conhecidas as condições iniciais e armazenados os coeficientes de influência em todos os pontos do aquífero, os rebaixamentos podem ser simulados para qualquer tempo utilizando a reinicialização sequencial.

3.5. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS

O problema inverso fundamenta-se na identificação dos elementos da matriz $[\Delta]$ para todos os poços de observação e/ou exploração (nós). Assume-se conhecidos os rebaixamentos e as descargas e/ou recargas em todos os nós e ao longo do período de duração do processo de calibração. Os rebaixamentos em cada nó e para todo o período determinados pelo modelo (equação 3.22) são comparados com os valores observados, e o ajuste dos parâmetros avaliado pela função-objetivo definida pela soma do quadrado dos erros medidos em cada polígono e em todos os intervalos de tempo.

Nem sempre os parâmetros geradores do melhor ajuste têm significado físico, quer pela negatividade, quer pela acentuada variação de valores entre dois polígonos adjacentes. Para solucionar o problema definem-se limites aceitáveis dentro dos quais devem se situar os parâmetros do modelo.

O problema da identificação é aqui tratado como um problema de otimização que busca determinar os coeficientes de influência tal que a função objetiva ($J(\Delta)$) atinja o ponto de mínimo e os parâmetros transmissividade (T) e porosidade efetiva (ϕ) satisfaçam às restrições impostas pelo modelo físico.

$$\text{Min } \{J(\Delta) = \sum_i \sum_n (s_i(n) - \hat{s}_i(n))^2\} \quad (3.23)$$

$$\text{para } i = 1, 2, 3, \dots, I \quad \text{e } n = 1, 2, 3, \dots, N$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} [T_{\text{inf}}] &\leq [T] \leq [T_{\text{sup}}] \\ [\phi_{\text{inf}}] &\leq [\phi] \leq [\phi_{\text{sup}}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $s_i(n)$ e $\hat{s}_i(n)$ são os rebaixamentos observados e calculados respectivamente; os índices 'inf' e 'sup' referem-se aos limites inferior e superior do intervalo de confiança.

A fim de que sejam reduzidos gastos de memória do computador, diminui-se o número de equações a serem resolvidas utilizando-se o conceito de subsistema. Um subsistema pode ser definido pelos elementos que participam diretamente do balanço de volumes em um polígono i (Figuras 3.2 e 3.3). A equação do fluxo é resolvida somente para os coeficientes de influência internos ao subsistema, estimulando seu polígono central enquanto mantém os demais nas condições de fronteira estabelecidas inicialmente. Cada subsistema pode ser avaliado individualmente, estabelecendo-se uma função-objetivo para o polígono central i (equação 3.25).

$$J(\Delta_i) = \sum_n (s_i(n) - \hat{s}_i(n))^2 \quad (3.25)$$

para $n = 1, 2, \dots, N$.

O problema de otimização em um subsistema i é colocado da seguinte forma:

$$\text{Min } \{J(\Delta_i) = \sum_n (s_i(n) - \hat{s}_i(n))^2\} \quad (3.26)$$

sujeito a:

$$[T_{i_{\text{inf}}}] \leq [T_i] \leq [T_{i_{\text{sup}}}] \quad (3.27)$$

$$[\phi_{i_{\text{inf}}}] \leq [\phi_i] \leq [\phi_{i_{\text{sup}}}]$$

Reduzido o erro no cálculo dos rebaixamentos a um valor tolerável, o sistema move-se para o subsistema se-

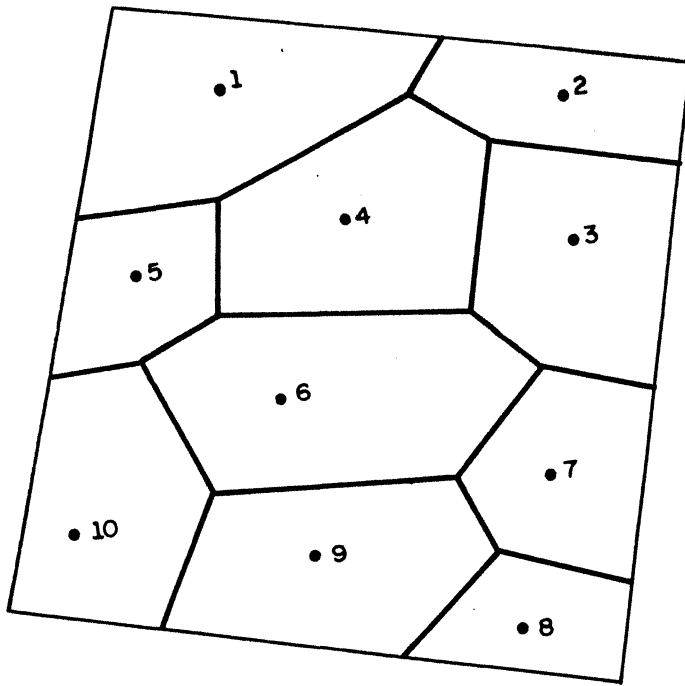


Figura 3.2 - Aquífero hipotético dividido em células poligonais

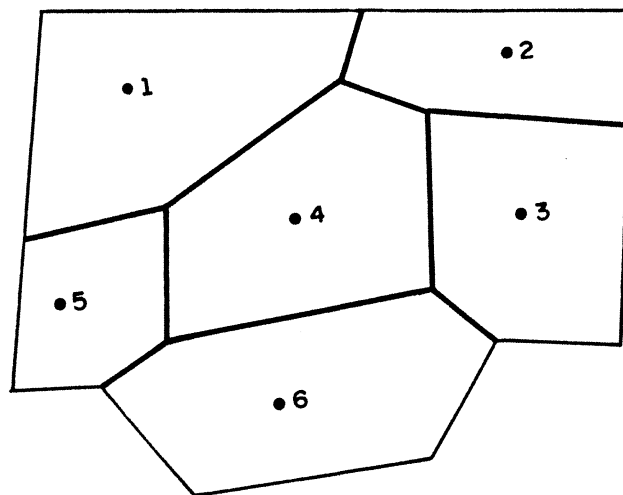


Figura 3.3 - Subsistema 4

guinte e o processo é então reiniciado.

Na equação 3.23, $J(\Delta)$ representa a função objetiva total a ser minimizada, sujeita às restrições da equação 3.24, e que pode ser expressa pelo somatório das funções avaliadas em cada subsistema (equação 3.28).

$$J(\Delta) = \sum_i J(\Delta_i) \quad (3.28)$$

para $i = 1, 2, \dots, I$, onde I é o número total de subsistemas sujeito a

$$\begin{aligned} [T_{\text{inf}}] &\leq [T] \leq [T_{\text{sup}}] \\ [\phi_{\text{inf}}] &\leq [\phi] \leq [\phi_{\text{sup}}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se a função-objetivo total (equação 3.28) for menor ou igual ao erro máximo tolerável ou não se verificou mudança significativa entre duas iterações consecutivas o processo é encerrado. Do contrário, o algoritmo move-se para o primeiro subsistema e inicia nova iteração.

CAPÍTULO 4

ALGORÍTMO DE CÁLCULO

4.1. GENERALIDADES

O problema inverso fundamenta-se na busca dos coeficientes de influência associados a cada polígono do sistema. Para tal, usou-se aqui o algoritmo de otimização de Rosenbrock (1960) para uma função de várias variáveis e com restrição.

Os valores dos coeficientes de influência são encontrados sequencialmente no espaço, no sentido crescente da numeração dos polígonos que definem os subsistemas (Figura 4.1), através do sistema de equações lineares:

$$[A_i] = [\tau_j] + [\phi_i^*] \quad (4.1)$$

A eficiência do modelo em gerar rebaixamentos é definida por uma função-objetivo (equação 3.25 e 3.26) cujo ponto de mínimo está relacionado com os valores ótimos de $[A]$. A divisão do sistema é fixa no espaço e as características geométricas dos polígonos são conhecidas e constantes no tempo. Otimizar coeficientes de influência significa pesquisar valores de transmissividades T e porosidades efetivas ϕ que melhor representem o sistema real.

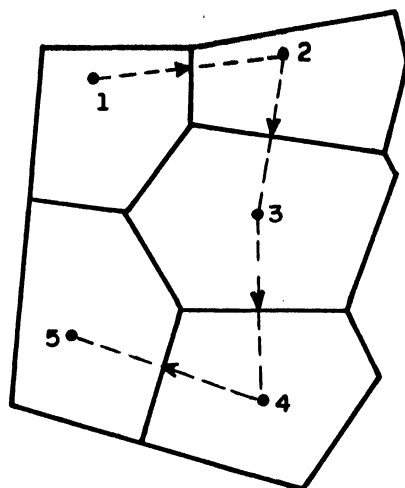


Figura 4.1 - Caminhamento do método para a otimização individual dos subsistemas

Embora cause aumento no número de incógnitas, são otimizadas as transmissividades intermediárias ao invés das assinaladas em cada nó pelas seguintes razões: o modelo matemático utiliza diretamente os valores intermediários e somente indiretamente os pontuais cuja identificação não é necessária ao funcionamento do algoritmo; a identificação dos valores das transmissividades no nó introduz um maior grau de indeterminação na solução do problema, visto que cada transmissividade intermediária é determinada por infinitos pares de transmissividade pontuais; a utilização das transmissividades nos nós é incapaz de reproduzir a mesma solução para diferentes conjuntos de parâmetros iniciais, mesmo em um grande número de iterações (Luna-Caicedo, 1983).

Os valores ótimos dos parâmetros são encontrados iterativamente a partir da otimização de cada subsistema tomado individualmente. O ajuste dos coeficientes é analisado pelos rebaixamentos calculados ao longo do período de calibração no polígono central *i*.

No subsistema i , as descargas artificiais \bar{Q}_m , para $i \neq m$, estão hidraulicamente relacionadas com o polígono central i através do produto $\tau_{im} s_j(n-1)$, onde τ_{im} é a condutância entre os nós i e m e $s_i(n-1)$ é o rebaixamento no polígono i no início do intervalo n . Consequentemente qualquer mudança efetuada em i , em termos de transmissividade, afeta os valores das descargas artificiais nos demais polígonos pertencentes ao subsistema. Por isso, obtidos os novos coeficientes de influência, estes são mantidos constantes, enquanto o método desloca-se para o cálculo das descargas artificiais \bar{Q}_m relacionadas ao subsistema e para todos os intervalos de tempo (equação 4.2).

$$\bar{Q}_m(n) = - \sum_p \tau_{mp} s_p(n-1) \quad (4.2)$$

As descargas artificiais avaliadas para o polígono m no período n são calculadas a partir dos rebaixamentos obtidos para o início do intervalo n no nó central e nos demais nós que formam o subsistema m . τ_{mm} é igual a soma das condutâncias intermediárias.

Conhecidas as descargas médias no aquífero em todos os intervalos do período de calibração, o rebaixamento no polígono central i (\hat{s}_i) no final do período é previsto utilizando a equação:

$$\hat{s}_i(n) = \frac{\hat{s}_i(n-1) + s_i(n-1)}{2} + \sum_m \delta_{im} (\bar{Q}_m(n) - \tilde{Q}_m(n)) \quad (4.3)$$

O rebaixamento no início do período é avaliado a partir da média aritmética entre os calculados e os observados no intervalo $(n-1)$.

Variando sistematicamente os valores dos parâmetros T e ϕ no polígono central i e, por consequência, as descargas artificiais do subsistema, é possível calcular a função-objetivo $J(\Delta_i)$ mínima, ou seja, encontrar valores de transmissividade e porosidade efetiva tal que os rebaixamentos reproduzidos pelo modelo sejam muito próximos aos observados.

4.2. PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

Inicialmente o aquífero a ser simulado é definido pelas coordenadas geométricas dos nós, condições iniciais e de fronteira, taxas de bombeamento e rebaixamentos observados em todos os nós e ao longo do período de calibração. Para facilitar a aplicação do modelo, a numeração dos nós é feita primeiramente nos polígonos interiores do sistema, seguidos dos limites de carga constante, finalizando com os nós situados nos limites impermeáveis.

O próximo passo é aplicar sequencialmente o algoritmo desenvolvido a cada um dos subsistemas definidos para o aquífero, minimizando em cada passo o valor da função-objetivo individual.

Os procedimentos computacionais necessários à resolução do problema inverso são colocados a seguir:

- 1 - Determinar as matrizes $[\tau_i]$, $[\phi_i^*]$ e $[A_i]$.
- 2 - Resolver o sistema linear $\{\delta_i\} = [A_i]^{-1}$.
- 3 - Atualizar as descargas artificiais $\tilde{Q}_m(n)$, para $m \geq i$ e $n = 1, 2, \dots, N$, mantendo constantes as transmissividades intermediárias.

- 4 - Atualizar os rebaixamentos no polígono central i , para todos os intervalos de tempo, utilizando a média aritmética entre os rebaixamentos observados e previstos no início dos períodos, os coeficientes discretos calculados em (2) e as descargas artificiais de (3).
- 5 - Avaliar a função-objetivo. Se o valor não satisfizer à precisão estabelecida, determinar um novo conjunto de transmissividades T_{im} , para $m \geq i$. é, uma nova porosidade para i , utilizando o método de otimização de Rosenbrock.
- 6 - Repetir 1 a 5 até que o valor da função-objetivo seja aceitável ou não houver alteração entre dois valores consecutivos.

Os valores dos coeficientes de influência obtidos em cada subsistema são mantidos constantes até que o sistema tenha sido totalmente percorrido.

O fluxograma do processo é apresentado na figura 4.2.

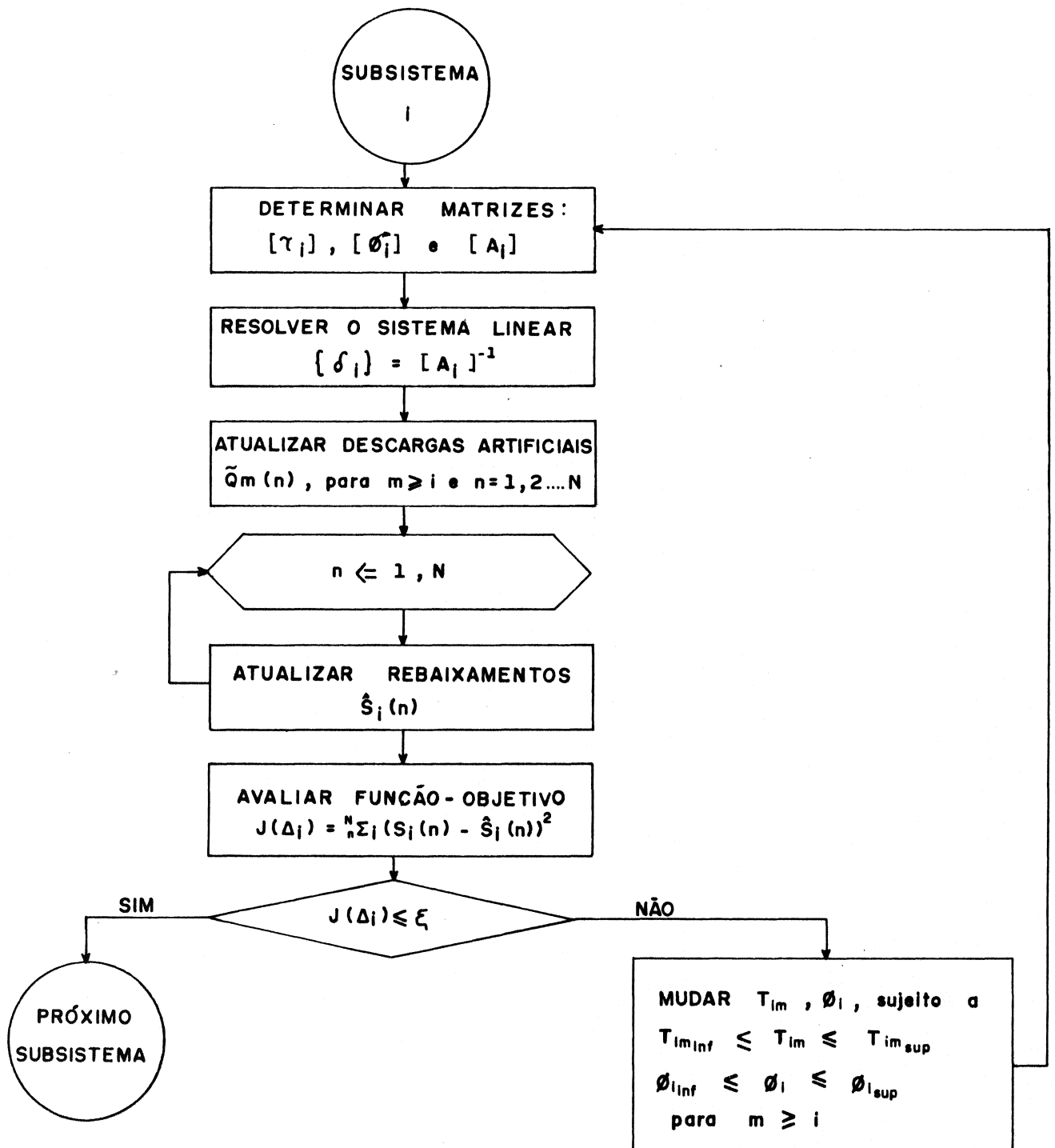


Figura 4.2 - Fluxograma para resolução de problema inverso no subsistema i .

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DO MODELO

5.1. GENERALIDADES

O algoritmo desenvolvido foi aplicado para calibrar dois sistemas: um hipotético construído com base no sistema apresentado por Boonstra e de Ridder (1981) e um real (Luna-Caicedo, 1983).

Em ambos os sistemas, foram estabelecidos limites inferior e superior para os parâmetros hidrogeológicos em cada nó a partir do conhecimento geológico das áreas estudadas. Estes limites, denominados limites constantes, são entradas do modelo e não são alterados durante o processo de calibração. Por outro lado, diferenças acentuadas entre parâmetros de polígonos adjacentes são evitadas impondo-se ao modelo a condição de homogeneidade na distribuição espacial dos parâmetros. A condição de homogeneidade é obtida a partir da média aritmética das transmissividades intermediárias \bar{T}_i e porosidades efetivas $\bar{\phi}_i$ de todo o subsistema.

A cada nova iteração o método estabelece limites inferior e superior T'_{im} e ϕ'_i de tal forma que o modelo satisfaça aos limites constantes e à condição de homogeneidade. Aqueles limites denominados limites variáveis, definem o intervalo de variação dos parâmetros hidrogeológicos a ser usado pelo algoritmo. Os limites variáveis são colocados como seguem:

$$T'_{im\text{inf}} = \text{Max} \{ (T_{i\text{inf}} + T_{m\text{inf}}) / 2, \bar{T}_i - \epsilon_T \bar{T}_i \} \quad (5.1)$$

$$T'_{im\sup} = \text{Min} \{ (T_{i\sup} + T_{m\sup})/2, \bar{T}_i + \epsilon_T \bar{T}_i \} \quad (5.2)$$

$$\phi'_{i\inf} = \text{Max} \{ \phi_{i\inf}, \bar{\phi}_i - \epsilon_\phi \bar{\phi}_i \} \quad (5.3)$$

$$\phi'_{i\sup} = \text{Min} \{ \phi_{i\sup}, \bar{\phi}_{\sup} + \epsilon_\phi \bar{\phi}_i \} \quad (5.4)$$

onde $T'_{im\inf}$ e $T'_{im\sup}$ são os limites variáveis das transmissividades intermediárias entre os polígonos i e m ; $T_{i\inf}$, $T_{i\sup}$, $T_{m\inf}$, $T_{m\sup}$ são os limites constantes das transmissividades no centro dos polígonos i e m respectivamente; $\phi'_{i\inf}$ e $\phi'_{i\sup}$ são os limites variáveis das porosidades efetivas no nó i , $\phi_{i\inf}$ e $\phi_{i\sup}$ são os limites constantes das porosidades efetivas no nó i ; \bar{T}_i e $\bar{\phi}_i$ são respectivamente as médias aritméticas das transmissividades intermediárias e porosidades efetivas no subsistema i ; ϵ_T e ϵ_ϕ são constantes positivas arbitrárias; os índices \sup e \inf referem-se aos limites superiores e inferiores respectivamente.

5.2. MODELO HIPOTÉTICO

Um aquífero hipotético livre, heterogêneo, isotrópico e com fluxo bidimensional foi utilizado para ilustrar a técnica apresentada. A região é dividida em células poligonais (polígonos de Thiessen) como mostra a figura 5.1. Os nós internos (nós 1 a 5) foram escolhidos arbitrariamente e representam poços em exploração na área. Os nós 6 a 11 representam fronteiras de carga constante (rio) e os demais (nós 12 a 15) as fronteiras impermeáveis. As co

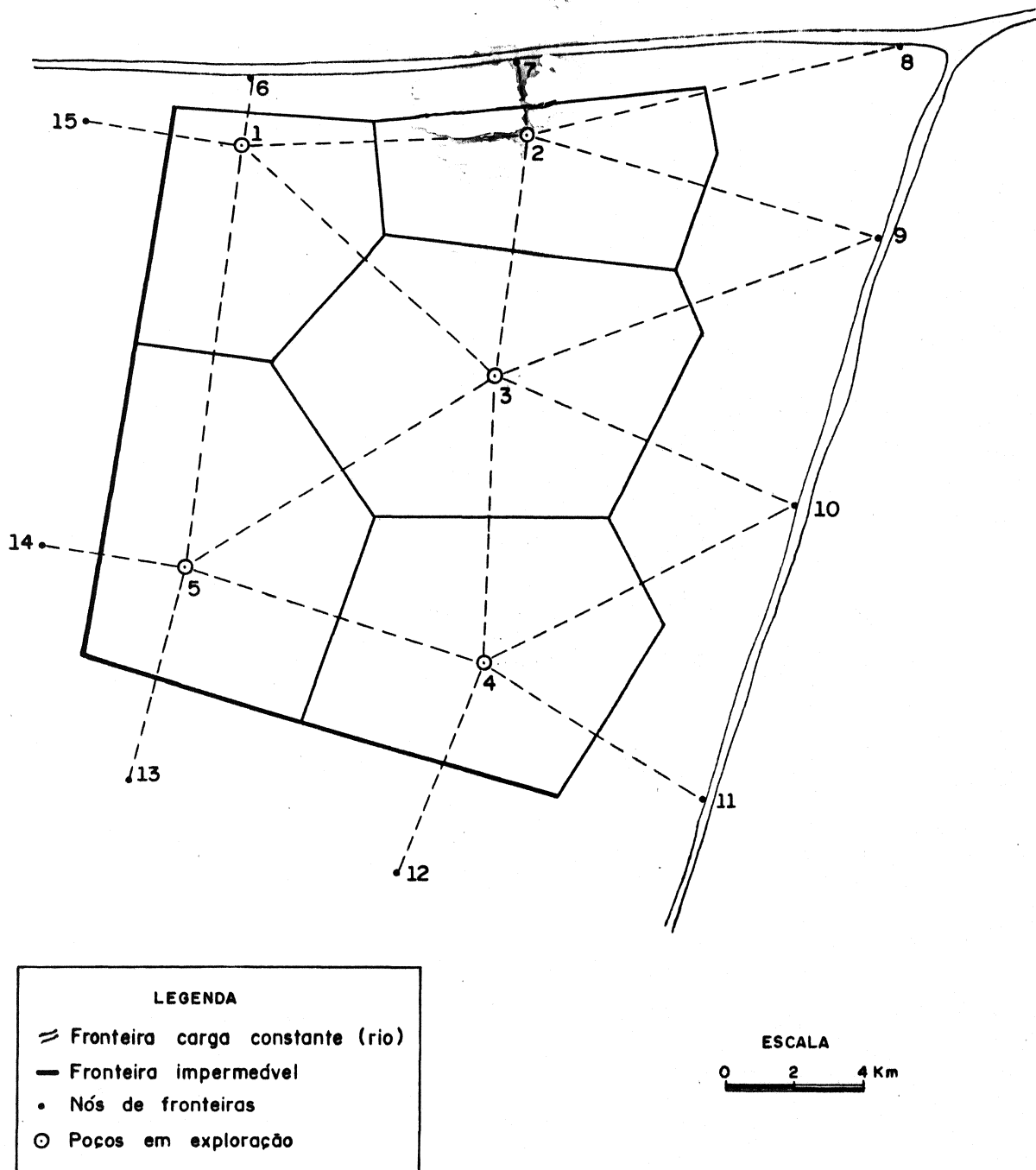


Figura 5.1 - Aquífero hipotético dividido em células poligonais

ordenadas de cada nó, em relação a um sistema de eixos de origem arbitrária, são dadas na Tabela 5.1.

As transmissividades e porosidades efetivas no aquífero foram consideradas conhecidas e seus valores são mostrados na Fig. 5.2.

O incremento de tempo mensal e um período de bombeamento de doze meses foram adotados. Os rebaixamentos mensais necessários à aplicação do algoritmo de identificação foram gerados pelo modelo de Boonstra e de Ridder (1981).

Os valores assumidos para as transmissividades e porosidades efetivas e os rebaixamentos gerados a partir deles são referenciados no presente estudo como transmissividades reais, porosidades reais e rebaixamentos observados.

As figuras 5.3 a 5.7 apresentam as taxas de bombeamento assumidas para todos os polígonos durante os doze intervalos de tempo em que está dividido o período de calibração.

Os rebaixamentos iniciais e os limites constantes inferiores e superiores são mostrados na tabela 5.2.

O algoritmo proposto usou três iterações para que a função-objetivo atendesse ao critério de precisão, $5 \text{ E-}3$, previamente estabelecido. O máximo erro individual ocorreu no polígono 5 e seu valor foi de $2.69 \text{ E-}2 \text{ m}^2$. O decaimento da função-objetivo ao longo do método é mostrado na figura 5.8.

O tempo de execução gasto pelo computador B6700 foi de 38.78s, com custo de processamento de Cz\$ 16,50, não incluída a compilação.

Tabela 5.1 - Coordenadas dos nós do sistema hipotético.

NÓ NÚMERO	COORDENADAS	
	X	Y
1	4.45	12.55
2	8.80	12.80
3	8.35	9.25
4	8.35	4.90
5	3.75	6.30
6	4.50	13.55
7	8.60	13.90
8	14.20	14.15
9	14.40	11.30
10	13.15	7.20
11	11.75	2.80
12	7.35	1.55
13	2.75	3.00
14	1.35	6.55
15	2.05	12.80

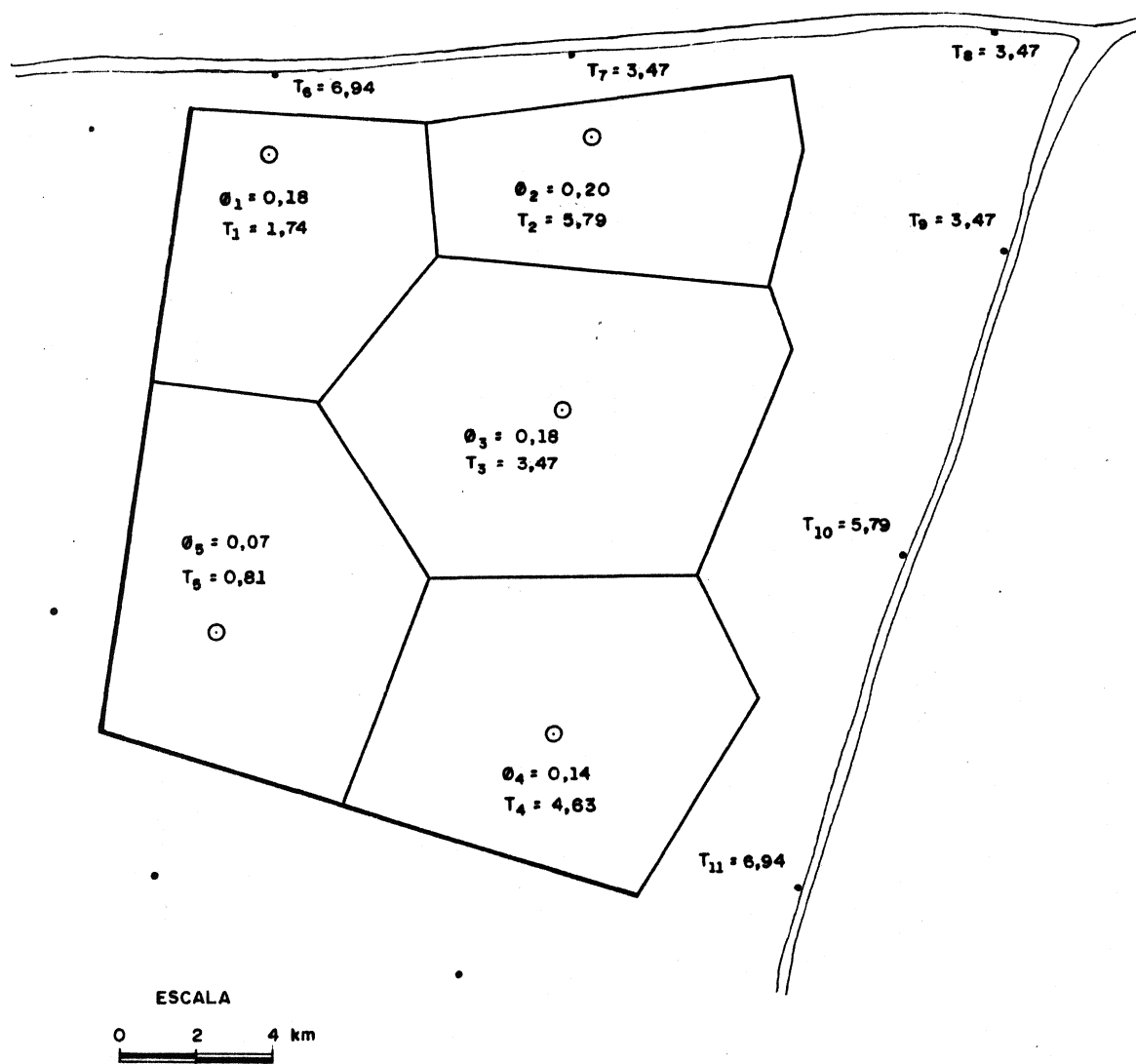


Figura 5.2 - Transmissividades ($m^2/s \times 10^{-2}$) e porosidades efetivas dadas no aquífero hipotético

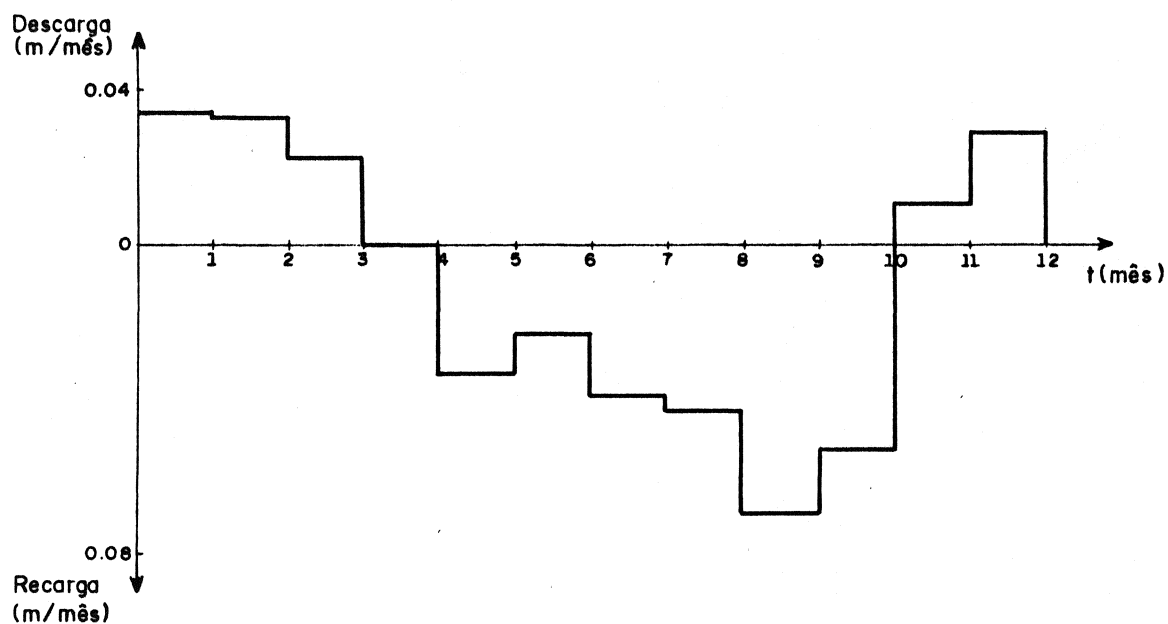


Figura 5.3 - Escala de bombeamento no polígono 1

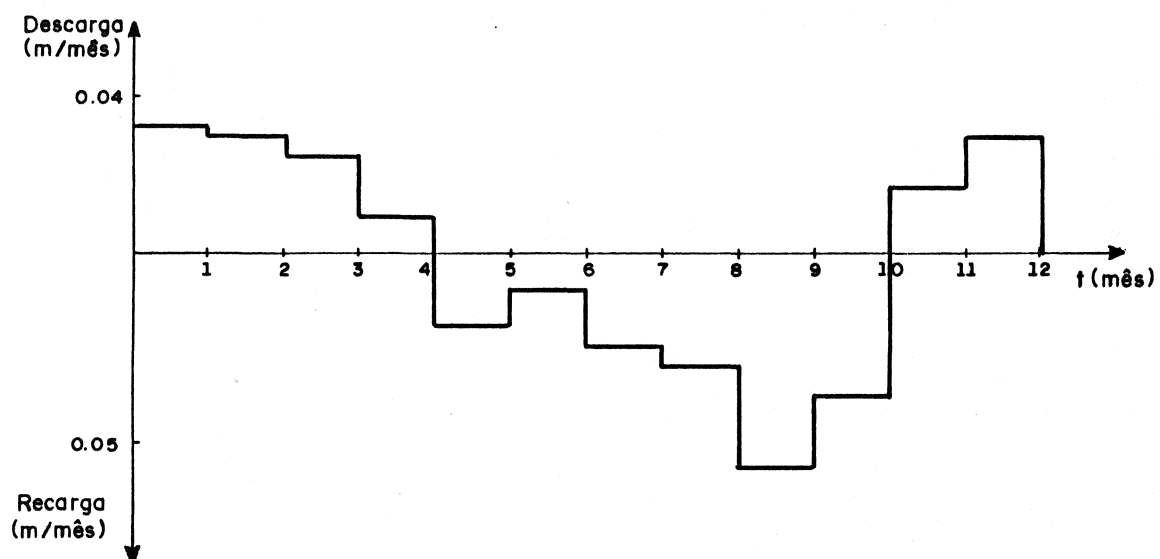


Figura 5.4 - Escala de bombeamento no polígono 2

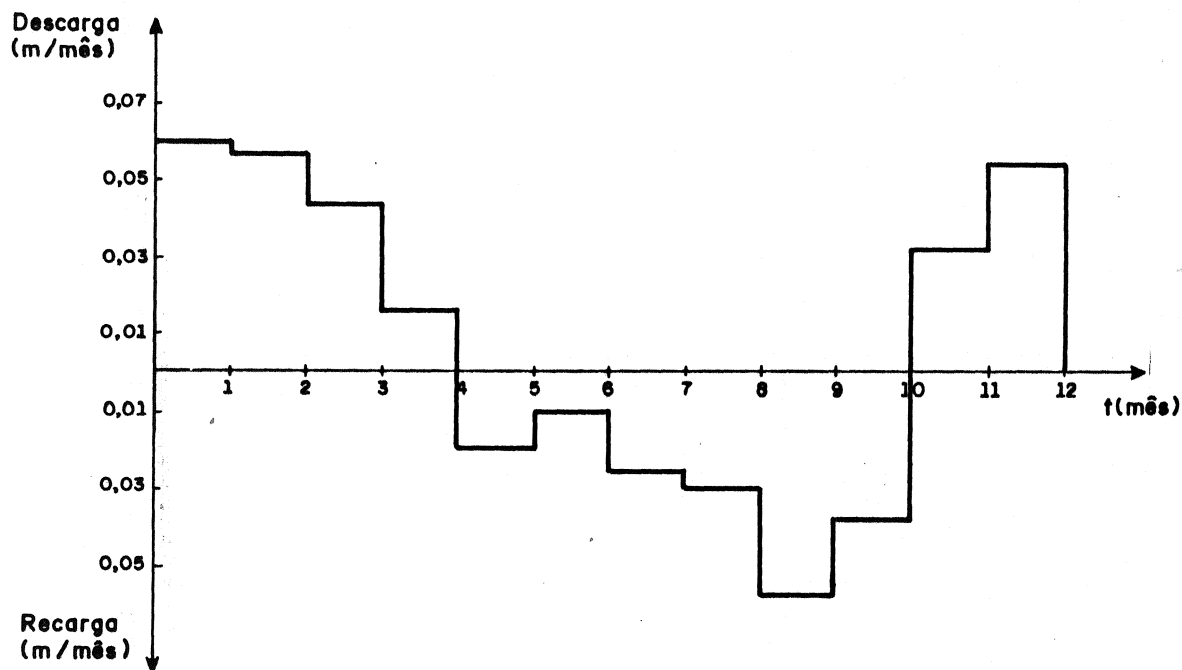


Figura 5.5 - Escala de bombeamento no polígono 3

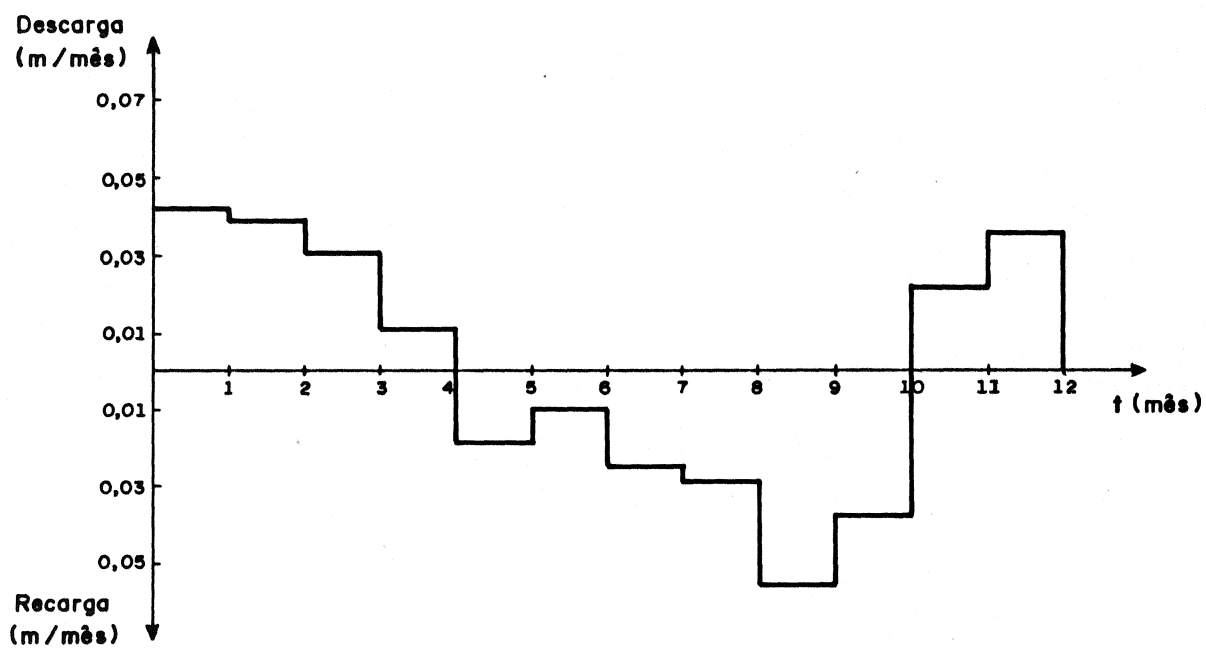


Figura 5.6 - Escala de bombeamento no polígono 4

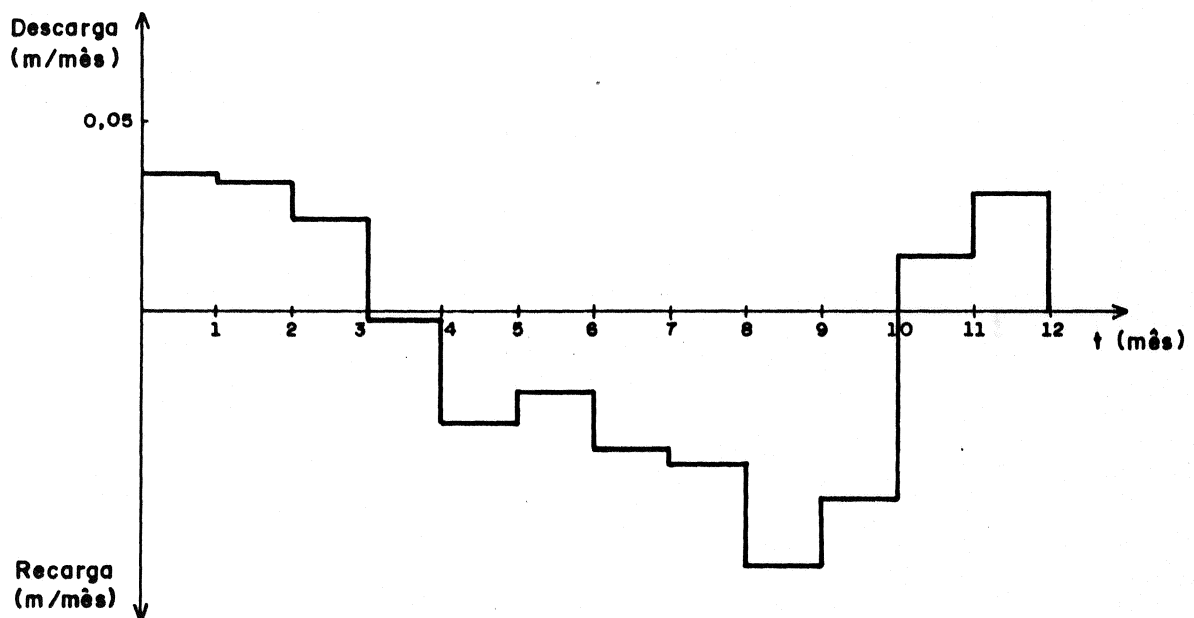


Figura 5.7 - Escala de bombeamento no polígono 5

Tabela 5.2 - Limites constantes inferiores e superiores dos parâmetros e rebaixamentos iniciais.

Nó número	T_i inferior (m ² /s)	T_i superior (m ² /s)	ϕ_i inferior	ϕ_i superior	Rebaixamento inicial (m)
1	1.16 E-2	2.31 E-2	0.01	0.30	228.80
2	4.06 E-2	6.37 E-2	0.01	0.30	230.30
3	2.89 E-2	4.63 E-2	0.01	0.30	229.40
4	2.89 E-2	5.21 E-2	0.01	0.30	228.90
5	0.58 E-2	1.16 E-2	0.01	0.30	226.40
6	6.21 E-2	7.52 E-2	-	-	228.60
7	2.89 E-2	5.21 E-2	-	-	230.30
8	2.89 E-2	5.21 E-2	-	-	231.50
9	2.89 E-2	5.21 E-2	-	-	231.00
10	4.05 E-2	6.37 E-2	-	-	230.00
11	6.24 E-2	7.52 E-2	-	-	228.00

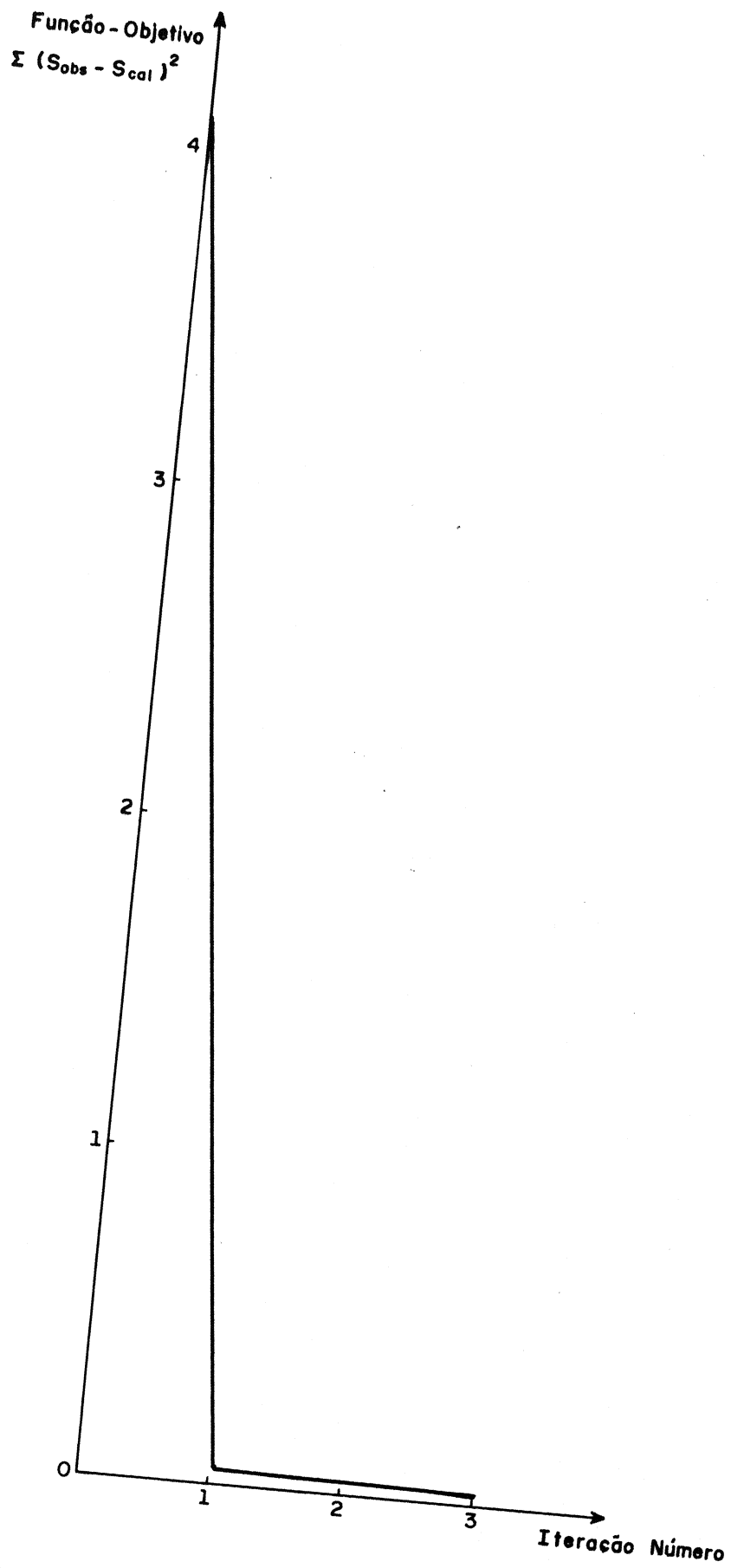


Figura 5.8 - Decaimento da função objetiva no sistema hipotético

As transmissividades harmônicas intermediárias e as porosidades efetivas para os diferentes polígonos do aquífero são comparadas com os respectivos valores reais e os resultados mostrados nas tabelas 5.3 e 5.4. O maior erro percentual cometido na avaliação das transmissividades intermediárias (22.79) ocorreu entre os polígonos 4 e 10 e nas porosidades efetivas (2.78) no polígono 1.

Os rebaixamentos computados durante a calibração pouco diferem dos observados, produzindo erros percentuais inferiores a 0.05 como mostra a tabela 5.5. Comparando a tabela 5.5 com as tabelas 5.3 e 5.4, verifica-se que os erros percentuais cometidos na avaliação dos rebaixamentos são bem inferiores àqueles produzidos na calibração dos parâmetros.

Os rebaixamentos observados e calculados antes e após a calibração dos parâmetros nos polígonos 2 e 5 são comparados nas figuras 5.9 e 5.10, respectivamente.

5.3. MODELO REAL

O aquífero a ser modelado situa-se nos Estados Unidos da América e é denominado ficticiamente de Xuxu. Não é revelado seu verdadeiro nome em virtude do caráter sigiloso com que foram fornecidas as informações a ele pertinentes ao Professor Dr. Hubert Morel-Seytoux, quando da elaboração da tese de doutorado de Nelson O. Luna Caicedo na Universidade Estadual do Colorado (Colorado State University, Fort Collins). Assume-se que o aquífero é livre.

A figura 5.11 mostra a rede de nós em que foi discretizado o aquífero. Os nós internos (nós 1 a 5) representam poços em exploração. Os nós externos, necessários à construção da rede, representam fronteiras de carga constante (nós 6 a 9) e fronteiras impermeáveis (nós 10 a 13). O mē-

Tabela 5.3. Comparação entre transmissividades inter
mediárias reais e calculadas.

$$\text{Erro percentual} = (T_{\text{real}} - T_{\text{calculada}}) \times 100 / T_{\text{real}}$$

Entre nós	Real (m ² /s)	Calculada (m ² /s)	Erro Percentual (%)
1 - 6	2.78 E-2	2.53 E-2	8.99
1 - 2	2.67 E-2	2.31 E-2	13.30
1 - 3	2.31 E-2	2.10 E-2	8.81
1 - 5	1.10 E-2	7.03 E-2	6.09
1 -15	0.00	0.00	0.00
2 - 7	4.34 E-2	4.32 E-2	0.46
2 - 8	4.34 E-2	4.32 E-2	0.46
2 - 9	4.34 E-2	4.32 E-2	0.46
2 - 3	4.34 E-2	3.45 E-2	20.42
3 - 9	4.47 E-2	3.65 E-2	5.13
3 -10	4.34 E-2	3.65 E-2	15.91
3 - 4	3.97 E-2	3.22 E-2	18.78
3 - 5	1.31 E-2	1.20 E-2	8.11
4 -10	5.14 E-2	3.97 E-2	22.79
4 -11	5.56 E-2	4.34 E-2	1.94
4 -12	0.00	0.00	0.00
4 - 5	1.38 E-2	1.24 E-2	10.43
4 -13	0.00	0.00	0.00
5 -14	0.00	0.00	0.00

Tabela 5.4. Comparação entre porosidades efetivas reais e calculadas.

N ^o	REAL	CALCULADA	ERRO PERCENTUAL (%)
1	0.180	0.185	2.78
2	0.200	0.196	2.00
3	0.180	0.181	0.00
4	0.140	0.142	1.43
5	0.070	0.070	0.00

$$\text{Erro Percentual} = (\phi_{\text{real}} - \phi_{\text{calculado}}) \times 100 / \phi_{\text{real}}$$

Tabela 5.5. Erro percentual cometido na avaliação do rebaixamento.

$$\text{Erro Percentual} = \frac{(s \text{ observado} - s \text{ calculado}) \times 100}{s \text{ observado}}$$

Tempo (mês)	POLÍGONO				
	1	2	3	4	5
1	0.000	0.004	0.000	0.000	0.004
2	0.000	0.009	0.000	0.000	0.010
3	0.000	0.009	0.000	0.004	0.010
4	0.000	0.009	0.004	0.010	0.010
5	0.004	0.004	0.009	0.010	0.020
6	0.004	0.009	0.004	0.020	0.020
7	0.004	0.009	0.009	0.020	0.020
8	0.000	0.004	0.009	0.020	0.020
9	0.000	0.004	0.009	0.010	0.020
10	0.004	0.009	0.009	0.010	0.030
11	0.004	0.009	0.009	0.004	0.030
12	0.009	0.010	0.009	0.004	0.040

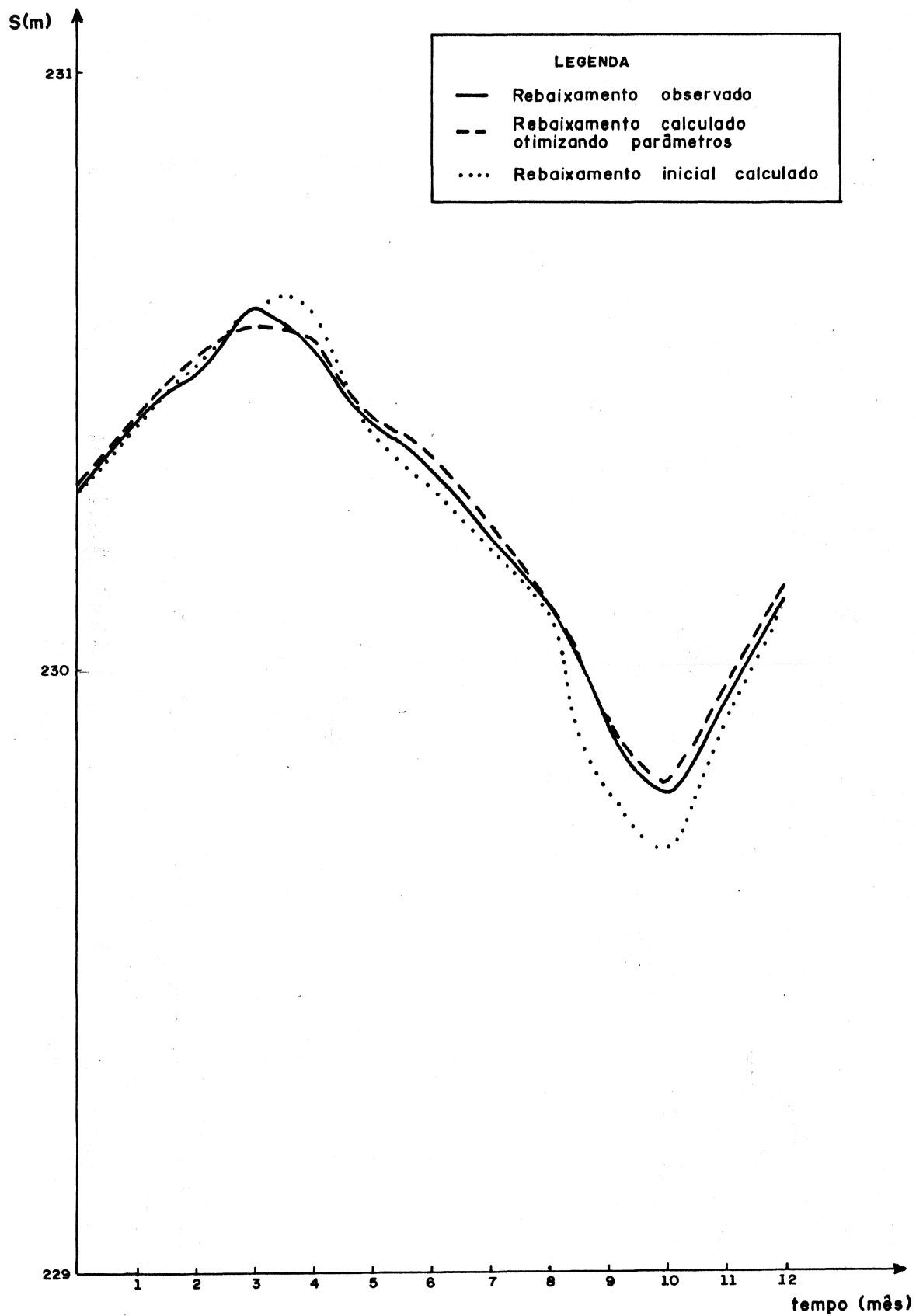


Figura 5.9 - Comparação entre rebaixamentos observados e calculados no polígono 2

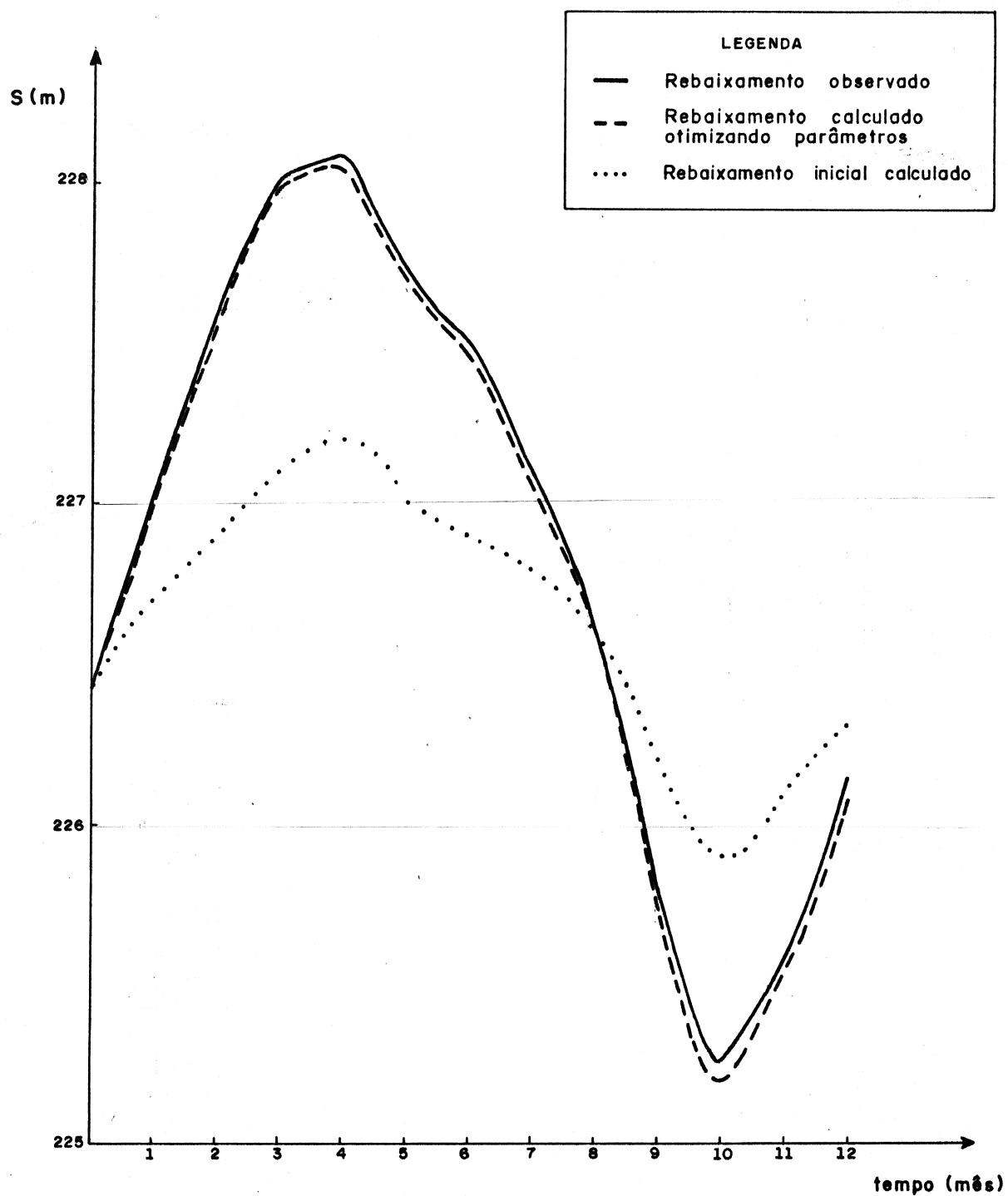


Figura 5.10 - Comparação entre rebaixamentos observados no polígono 5

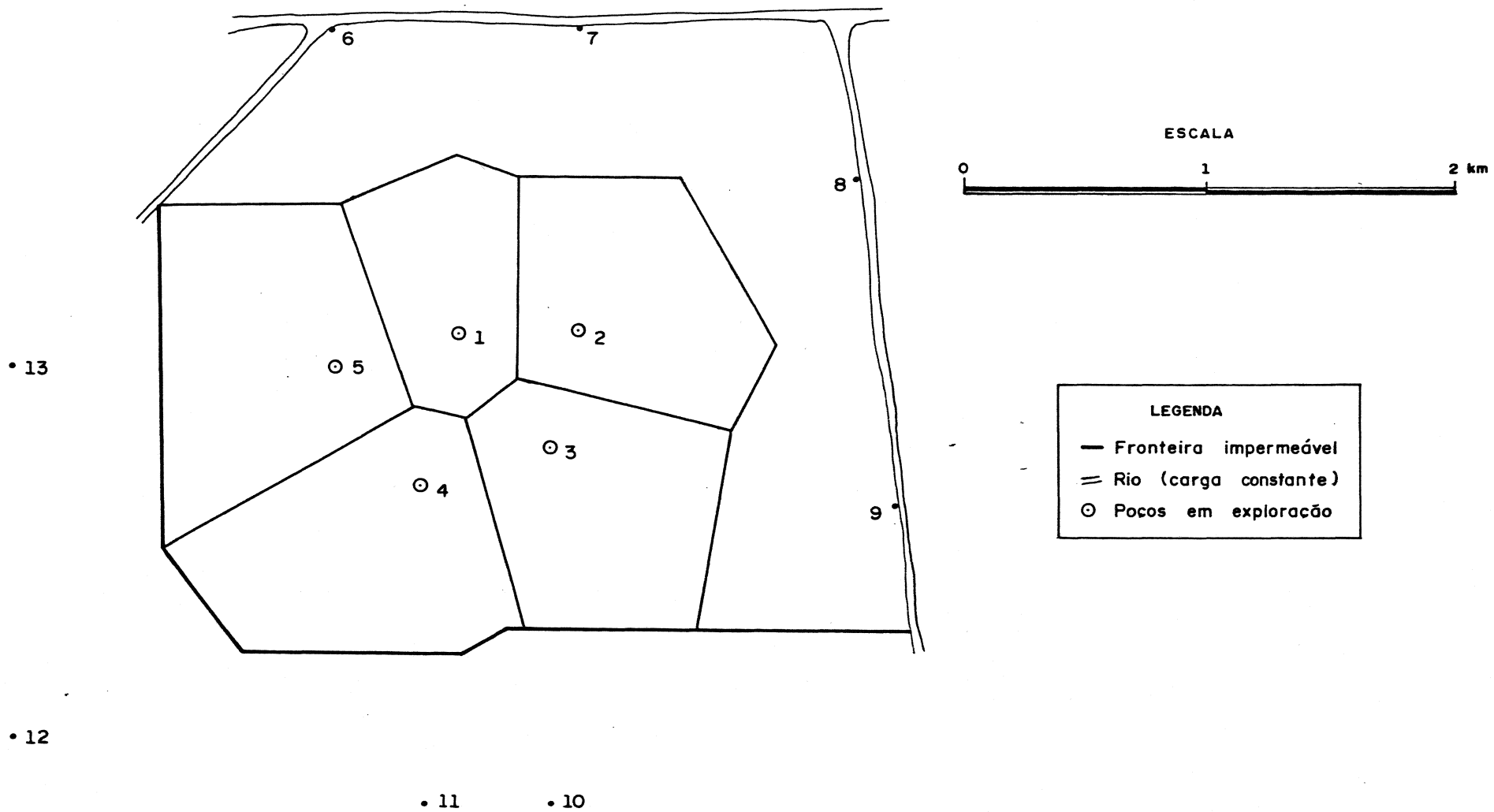


Figura 5.11 - Rede de nós : aquífero real

todo de Thiessen foi empregado na construção da rede. A posição dos nós em relação a um sistema de eixos coordenados de origem arbitrada é dada na tabela 5.6.

5.3.1. Geologia da região

Geologicamente a região é composta por espessos depósitos inconsolidados: till, depósitos estratificados de textura fina de silte e argila, e depósitos estratificados de textura grosseira de areia e cascalho.

O depósito de areia e cascalho constitui o aquífero de maior produtividade na região. Aparentemente foi formado pela deposição de fragmentos de rochas erodidas pela ação de geleiras. A variação no tempo da capacidade de transporte das correntes de degelo produziu depósitos de espessura, característica e extensão variáveis. Normalmente a espessura das camadas de areia e cascalho é inferior a 8m, porém podem ser encontradas camadas com espessura superior a 15m. Em algumas áreas, os poços atravessam duas ou três camadas distintas de areia e cascalho intercaladas por camadas de silte e argila.

Investigações geológicas na área revelaram que:

1 - a espessura do material glacial varia de 0 a mais de 24m;

2 - os solos da área são geralmente bem drenados;

3 - o substrato é composto de calcários e dolomitos fraturados e potencialmente falhados e possui superfície irregular;

4 - as camadas da formação aflorante apresentam

Tabela 5.6 - Coordenadas dos nós do sistema real.

NÓ NÚMERO	COORDENADAS	
	X (cm)	Y (cm)
1	12.50	13.50
2	15.50	13.50
3	15.00	10.50
4	11.50	9.50
5	9.50	12.50
6	9.50	21.50
7	15.50	21.50
8	23.00	18.00
9	24.20	9.00
10	15.00	0.50
11	11.50	0.50
12	0.50	2.20
13	0.50	12.50

planos de mergulho de 30 a 40 graus para leste.

5.3.2. Hidrogeologia da região

A aquífero Xuxu pertence a um complexo sistema hidrogeológico constituído por aquífero de origem glacial sobreposto e hidraulicamente conectado a um aquífero fraturado domolítico (substrato).

O bombeamento no substrato induz no aquífero glacial um fluxo descendente. As baixas condutividades hidráulicas nas lentes de argila existentes provocam descontinuidade no fluxo vertical, criando zonas de aprisionamento. Em alguns locais, bombeamentos no substrato rebaixaram a superfície potenciométrica do mesmo a cotas inferiores à base das camadas de argila, criando um aquífero hidraulicamente isolado no material detrítico.

A água subterrânea utilizada é retirada dos depósitos de areia e cascalho. O abastecimento de pequenas comunidades é feito através de poços do tipo fronteira revestidos com filtro. Para atender maiores demandas são usados poços de grande diâmetro, os quais podem ser revestidos com filtro ou abertos dependendo da quantidade de água a ser extraída e das características das camadas atravessadas. A produção nos poços abertos varia de 1.83 E-4 a $1.26 \text{ E-2 m}^3/\text{s}$, numa média de $2.4 \text{ E-3 m}^3/\text{s}$. Os poços com filtros produzem de 1.27 E-3 a $5.05 \text{ E-2 m}^3/\text{s}$, com média de $2.01 \text{ m}^3/\text{s}$.

A figura 5.11 mostra a localização dos poços de produção no aquífero Xuxu.

A distribuição das transmissividades no aquífero dolomítico é mostrada na figura 5.12.

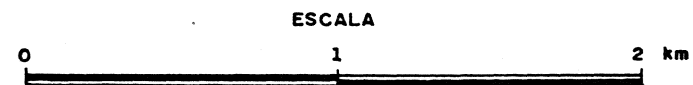
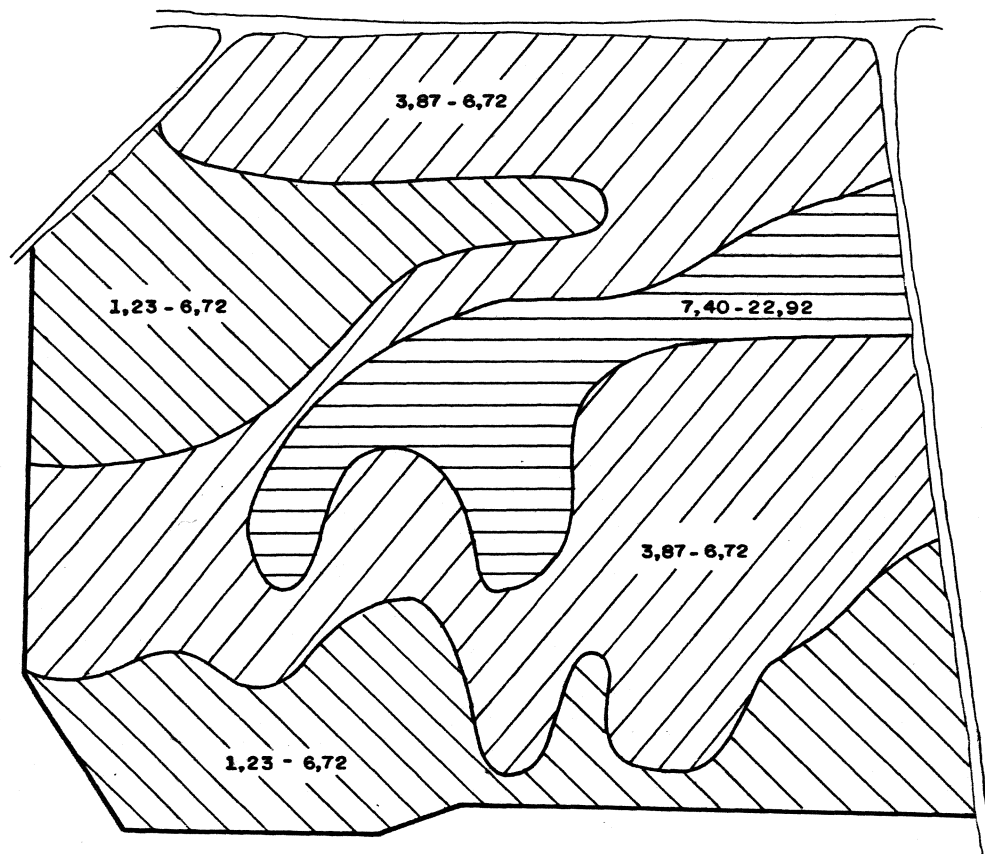


Figura 5.12 - Distribuição das transmissividades no aquífero Xuxu ($\text{m}^2/\text{s} \times 10^{-4}$)

Praticamente toda água subterrânea da região provém da precipitação local, 10mm de chuva produz cerca de 21.000.000 litros de água por quilômetro quadrado. A precipitação média anual na área é de aproximadamente 1143 mm.

5.3.3. Hidráulica no Aquífero

Vários testes foram realizados na região para definir as características hidráulicas no aquífero glacial e no aquífero dolomítico.

1. Teste de bombeamento no poço 2 apresentou os seguintes dados:

- a. Capacidade específica: 2.97 E-2 a 4.44 E-2 m^2/s ;
- b. Condutividade hidráulica do substrato: 5.56 E-4 a 6.67 E-4 m^2/s ;
- c. Transmissividade: aproximadamente 8.28 E-2 m^2/s ;
- d. Coeficiente de armazenamento: aproximadamente 1 E-6 .

2. Níveis d'água medidos em poços de observação próximos ao poço 2 não responderam ao teste de bombeamento.

3. Testes de bombeamento em poços rasos apresentaram os seguintes resultados:

- a. Condutividade hidráulica nos depósitos glaciais não consolidados e bem classificados de areia e cascalho: 2.72 E-4 a 1.92 E-3 m/s ;
- b. Condutividade hidráulica nos depósitos de till misturados com depósitos fluviais, glaciais e

lacustres: 1.25 E-4 m/s ;

c. Condutividade hidráulica nos depósitos de till: 3.77 E-4 m/s ;

d. Condutividade hidráulica no substrato: 1.11 E-5 a 3.39 E-4 .

4. Foram confeccionados mapas para representar as superfícies potenciométricas nas camadas glaciais e no substrato. Dados obtidos de poços de observação revestidos com filtros indicaram a existência de forte gradiente vertical em parte da região. Como consequência, os gradientes horizontais e verticais podem ser confundidos e os mapas das superfícies potenciométricas construídas a partir dos dados coletados podem não representar a situação do fluxo subterrâneo na área com precisão.

5.3.4. Resultados do Modelo Real

O aquífero Xuxu foi calibrado durante um período que compreende 9 intervalos de tempo de duração igual a 1 mês cada um.

Os dados de entrada exigidos para a análise do problema são taxas de bombeamento e/ou recargas e rebaixamentos em todos os polígonos e durante o período de calibração. Os rebaixamentos observados no primeiro mês são considerados condições iniciais e mostrados na figura 5.13.

As taxas médias de bombeamento assumidas para todos os polígonos são plotadas nas figuras 5.14 a 5.18. Os valores negativos indicam que ocasionalmente a recarga ultrapassa a retirada no polígono.

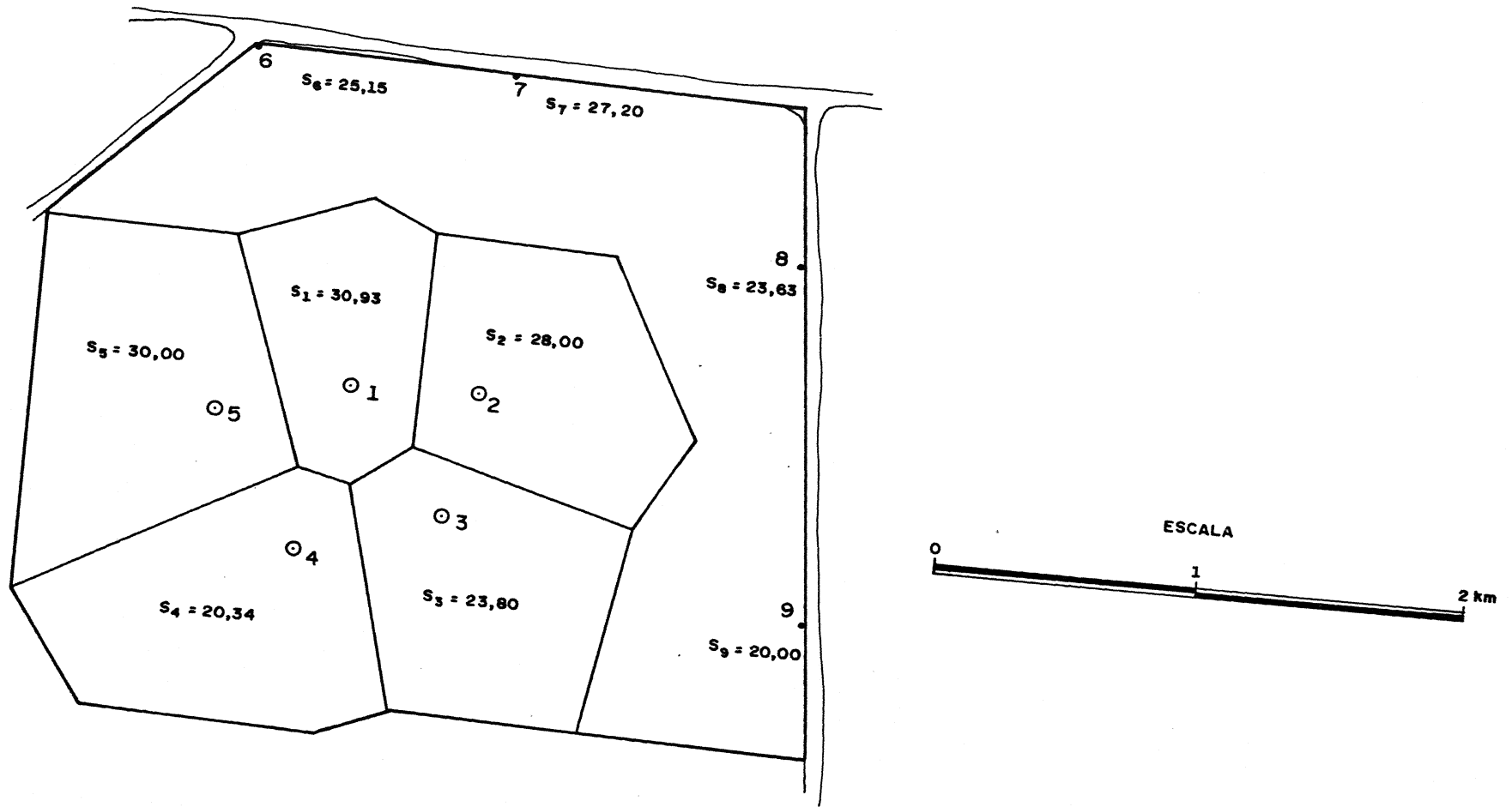


Figura 5.13 - Rebaixamentos iniciais (m) no aquífero Xuxu

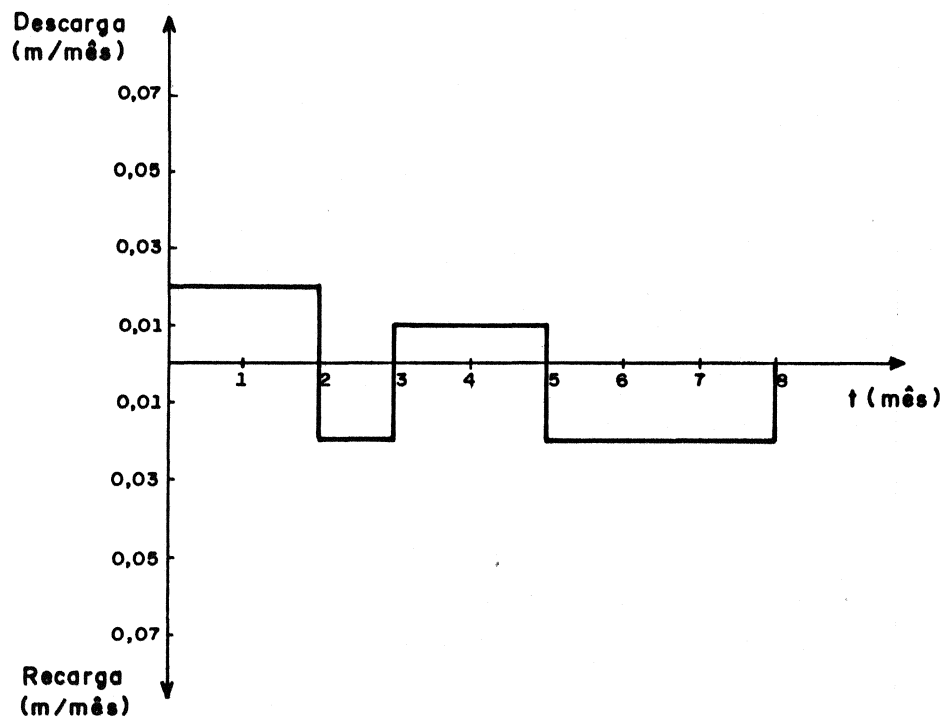


Figura 5.14 - Escala de bombeamento no polígono 1

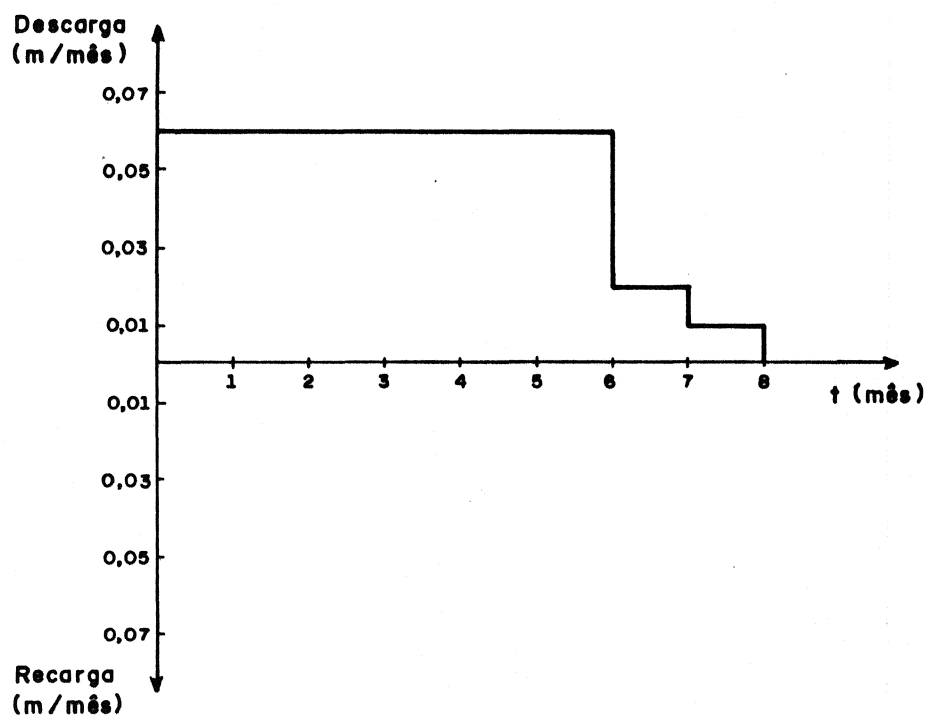


Figura 5.15 - Escala de bombeamento no polígono 2

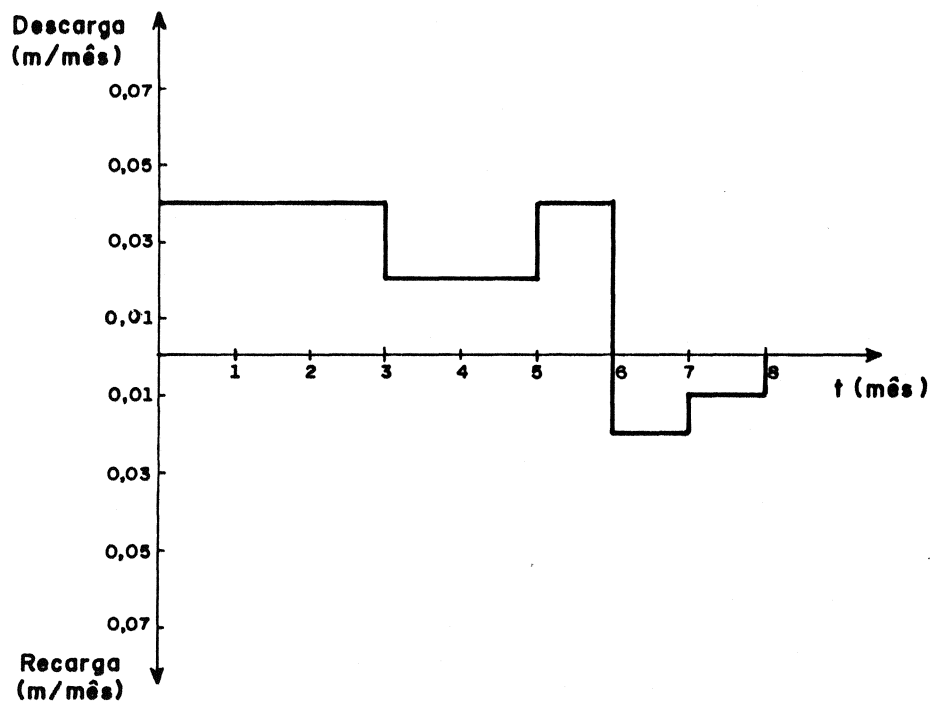


Figura 5.16 - Escala de bombeamento no polígono 3

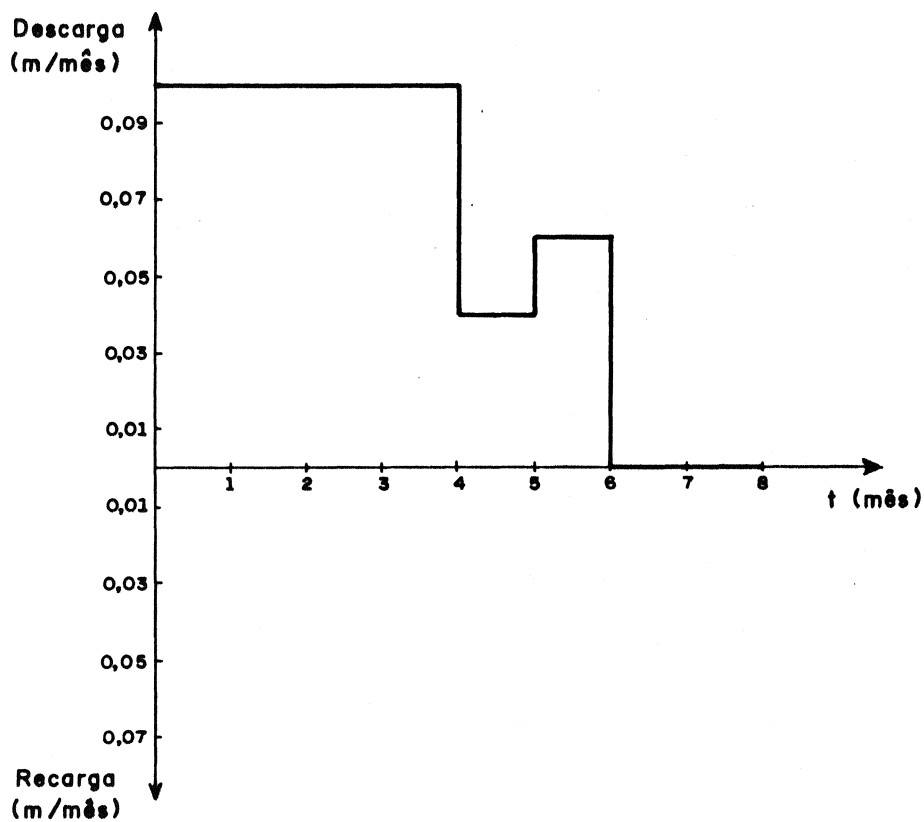


Figura 5.17 - Escala de bombeamento no polígono 4

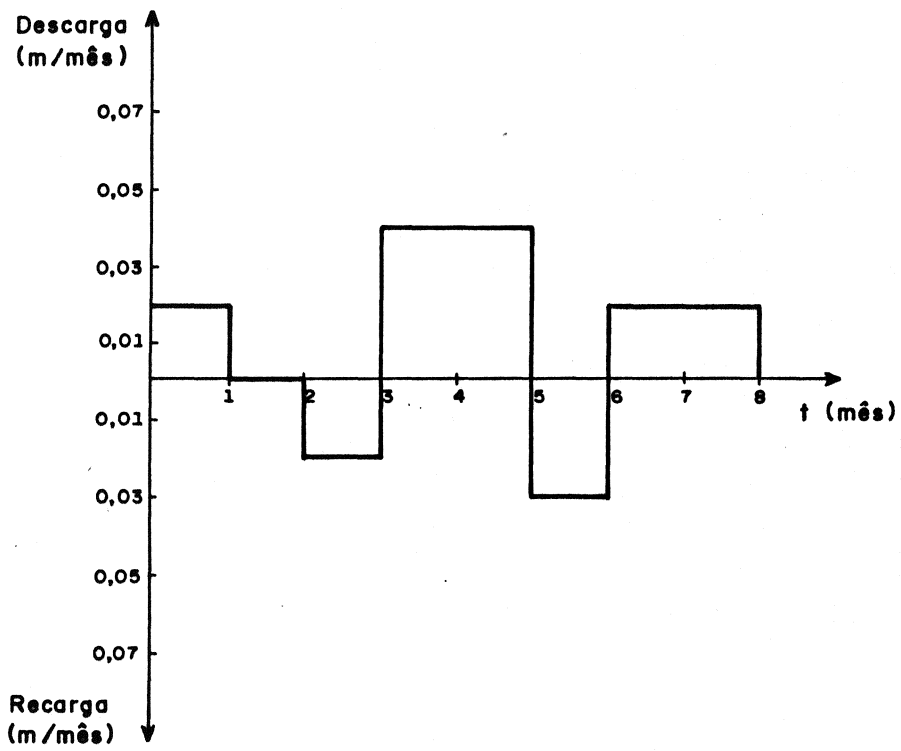


Figura 5.18 - Escala de bombeamento no polígono 5

Em muitos problemas práticos desconhecem-se as taxas de recarga e/ou descarga (taxas de estímulo) no sistema ou em alguns polígonos do mesmo. Em outros casos, ganhos ou perdas no aquífero são de difícil identificação ou não são passíveis de serem computados dentro de uma precisão razoável. Nestas circunstâncias, as taxas de estímulos são parâmetros desconhecidos do sistema os quais, da mesma forma que os parâmetros hidrogeológicos, devem ser otimizados para que o algoritmo reproduza as condições observadas na natureza, mantendo seus valores dentro de restrições impostas por critérios de homogeneidade na distribuição das taxas ao longo do tempo.

Os limites inferior e superior das taxas de estímulos no polígono i , $Q_{i_{inf}}$ e $Q_{i_{sup}}$ respectivamente, são definidas a cada passo dentro do algoritmo computacional da seguinte maneira:

$$Q_{i_{inf}} = \bar{Q}_i - \epsilon_Q \bar{Q}_i \quad (5.5)$$

$$Q_{i_{sup}} = \bar{Q}_i + \epsilon_Q \bar{Q}_i \quad (5.6)$$

onde \bar{Q}_i é a média aritmética das taxas de bombeamento e/ou recarga no polígono i ao longo do tempo; ϵ_Q é uma constante arbitrária positiva de valor próximo a unidade.

Os parâmetros são calibrados aplicando o algoritmo ao longo do sistema seguindo o roteiro abaixo:

1. otimização das porosidades efetivas;
2. otimização das transmissividades intermediárias e das porosidades efetivas;

3. otimização das taxas de estímulos

Desta forma uma iteração pode ser definida como o conjunto de sub-iterações que ao percorrerem o sistema otimizam seus parâmetros seguindo o roteiro colocado acima.

O número de sub-iterações define os parâmetros a serem otimizados como mostra a tabela 5.7. A opção 1 caucula o problema direto.

Para modelar o aquífero Xuxu foram utilizadas todas as opções disponíveis. O número de iterações necessárias para que o problema atingisse o erro, ou no caso, a variação mínima aceitável entre 2 iterações consecutivas ($1E-3$) foi igual a 4 para a opção 2 e igual a 5 para as opções 3 e 4. O decaimento da função-objetivo foi significativo mais rápido, atingindo menores valores, quando foram otimizadas também as taxas de bombeamento e/ou recargas, como mostra a figura 5.19.

As figuras 5.20 e 5.21 mostram as taxas de bombeamento observadas e calibradas nos polígonos 1 e 2 respectivamente.

As tabelas 5.8 a 5.10 apresentam os erros percentuais cometidos na avaliação dos rebaixamentos em cada intervalo de tempo nos polígonos 1, 2, 3 respectivamente. Verifica-se que em certos intervalos o erro percentual aumenta em algumas opções com maior número de parâmetros a otimizar. Este acréscimo no erro percentual não é significativo, visto que o algoritmo não otimiza os valores em um intervalo de tempo, mas sim cada subsistema individualmente, minimizando o erro em todo o sistema. O erro percentual acumulado decresce a medida que aumenta o número de sub-iterações, como mostra a tabela 5.11.

Tabela 5.7 - Opção de parâmetros a serem otimizados.

Opção	Número de Sub-iterações	Parâmetros Otimizados
1	0	Nenhum
2	1	Porosidades Efetivas
3	2	Transmissividades Intermediárias Porosidades Efetivas
4	3	Transmissividades Intermediárias Porosidades Efetivas Taxas de Descarga

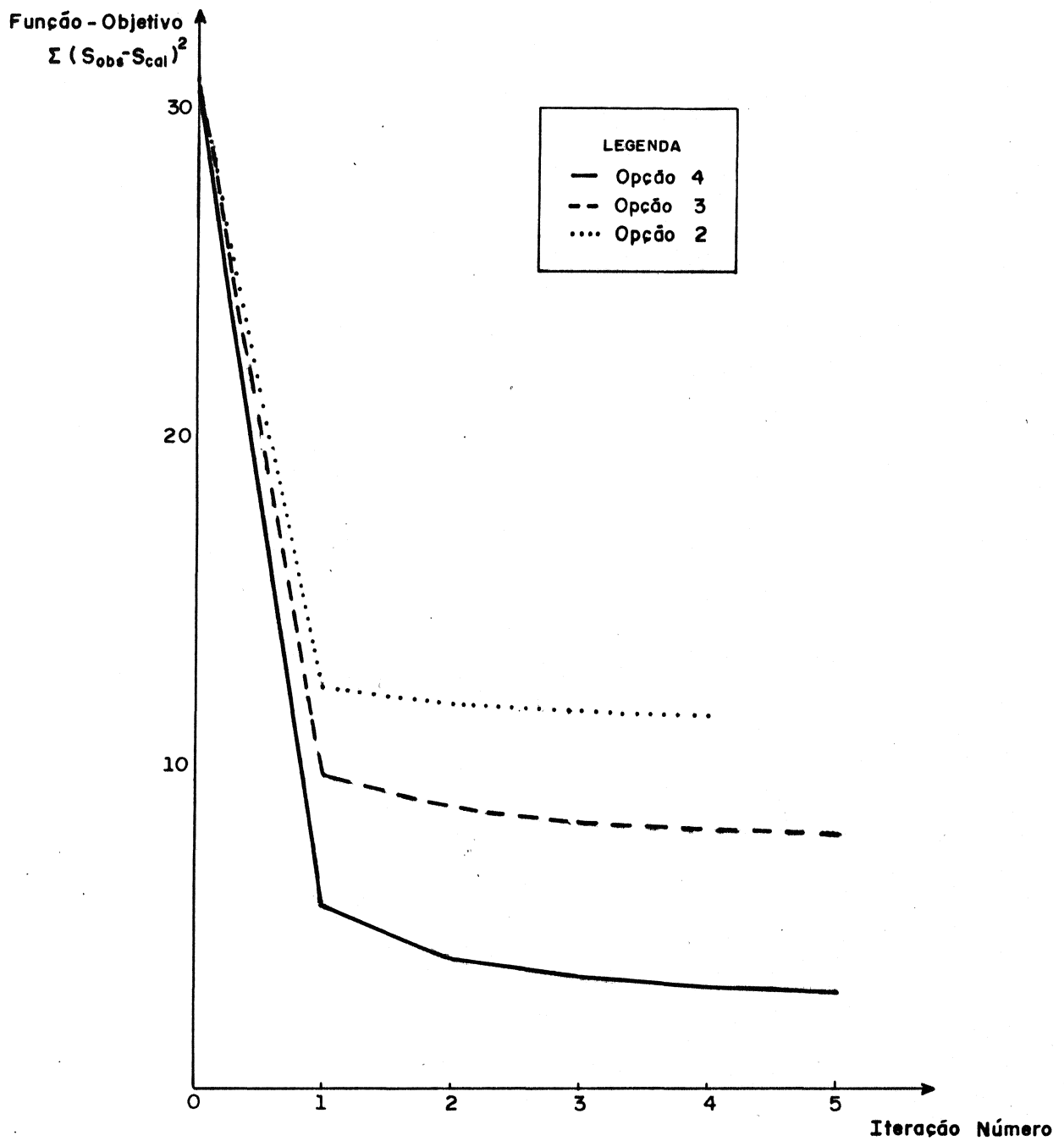


Figura 5.19 - Decaimento da função objetiva no sistema

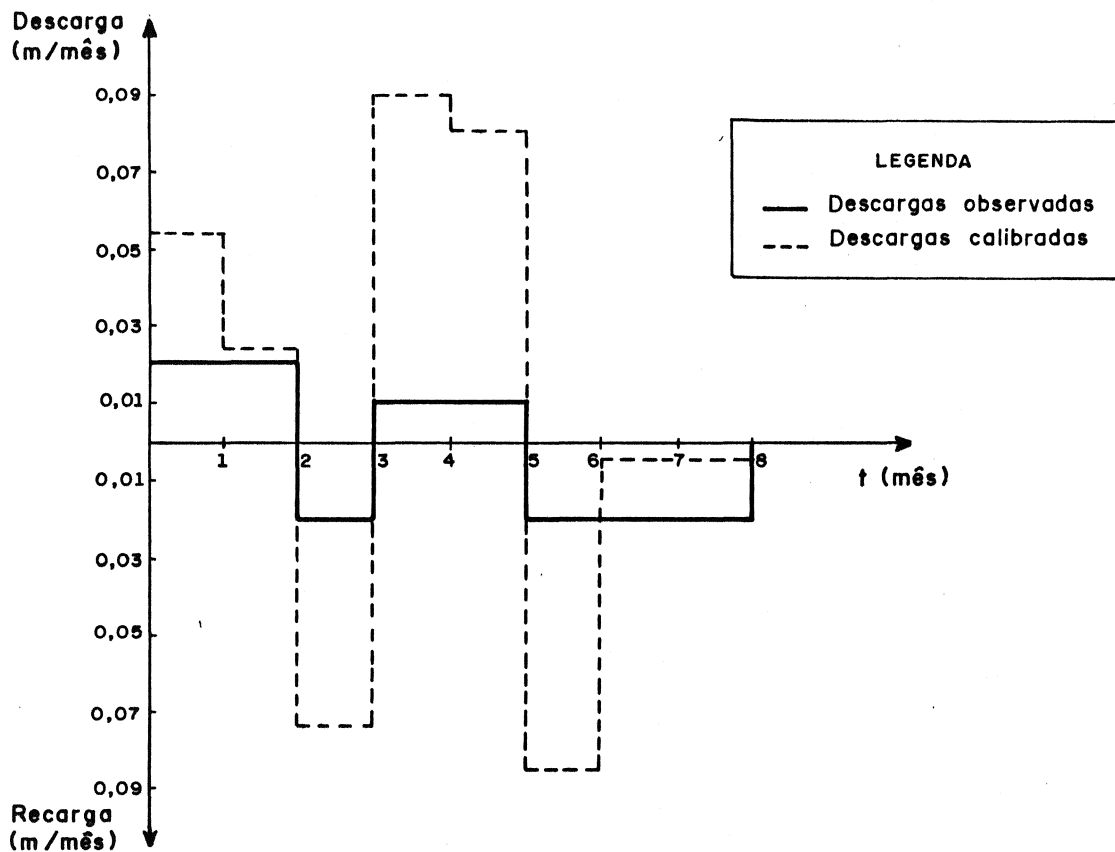


Figura 5.20 - Taxas de bombeamento observadas e calibradas no polígono 1

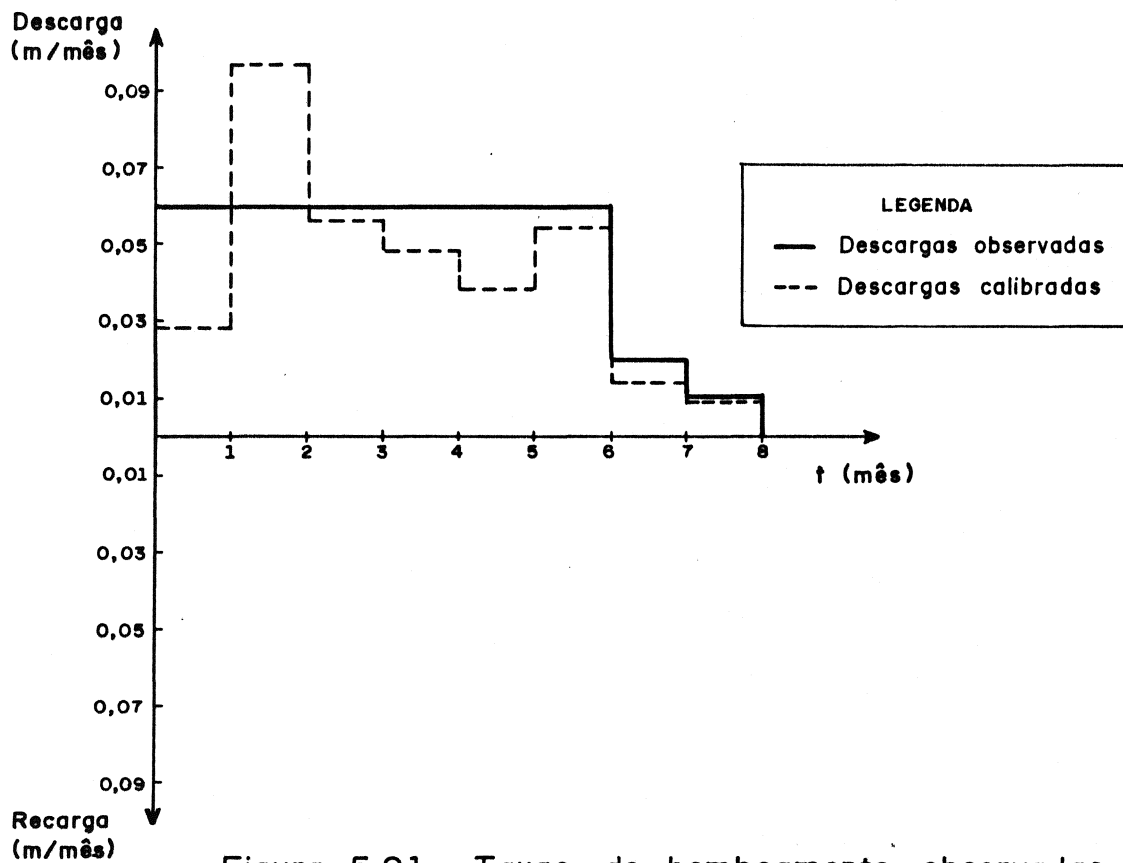


Figura 5.21 - Taxas de bombeamento observadas e calibradas no polígono 2

Tabela 5.8 - Erro percentual cometido na avaliação dos rebaixamentos no polígono 1.

TEMPO (mês)	O P Ç Ã O			
	1	2	3	4
1	0.77	0.62	0.53	0.13
2	0.97	0.68	0.51	0.06
3	0.33	0.33	0.55	0.33
4	2.16	1.38	1.09	0.30
5	3.30	2.43	2.09	0.48
6	2.22	1.03	0.67	0.09
7	3.25	1.83	1.45	0.52
8	3.66	2.03	1.65	0.57

EP = (s observado - s calculado) x 100/s observado.

Tabela 5.9 - Erro percentual cometido na avaliação dos rebaixamentos no polígono 2.

TEMPO (mês)	O P Ç Ã O			
	1	2	3	4
1	0.82	1.44	1.62	0.10
2	2.33	1.20	0.94	0.04
3	2.81	1.19	0.92	0.01
4	2.63	0.62	0.41	0.08
5	2.42	0.29	0.39	0.01
6	2.30	0.39	0.37	0.09
7	0.96	1.52	0.50	0.02
8	0.52	2.96	0.60	0.09

$$EP = (s \text{ observado} - s \text{ calculado}) \times 100/s \text{ observado.}$$

Tabela 5.10 - Erro percentual cometido na avaliação dos rebaixamentos no polígono 3.

TEMPO (mês)	O P Ç Ã O			
	1	2	3	4
1	1.23	0.40	0.34	0.24
2	1.77	0.20	0.09	0.12
3	4.55	2.38	2.24	0.29
4	3.71	1.23	0.01	0.13
5	2.67	0.10	0.26	0.74
6	3.79	0.50	0.35	0.33
7	1.97	4.99	5.04	1.11
8	3.13	5.89	5.77	0.39

EP = (s observado - s calculado) x 100/s observado.

Tabela 5.11 - Erro percentual acumulado no sistema para cada opção do número de sub-ite_ rações.

Opção	Erro Percentual Acumulado no Sistema (%)
1	109.96
2	64.25
3	37.46
4	29.69

$$EP \text{ acumulado} = \sum_i \sum_n (s \text{ obs}_i(n) - s \text{ cal}_i(n)) \times 100 / s \text{ obs}_i(n)$$

Finalmente, pode-se dizer que o decréscimo no valor da função-objetivo é influenciado principalmente pela otimização das transmissividades intermediárias e das taxas de recarga e descarga no aquífero ao longo do tempo.

Comparações entre rebaixamentos observados e calculados, otimizando os parâmetros hidrogeológicos e as taxas de bombeamento, são feitas nas figuras 5.22 a 5.24.

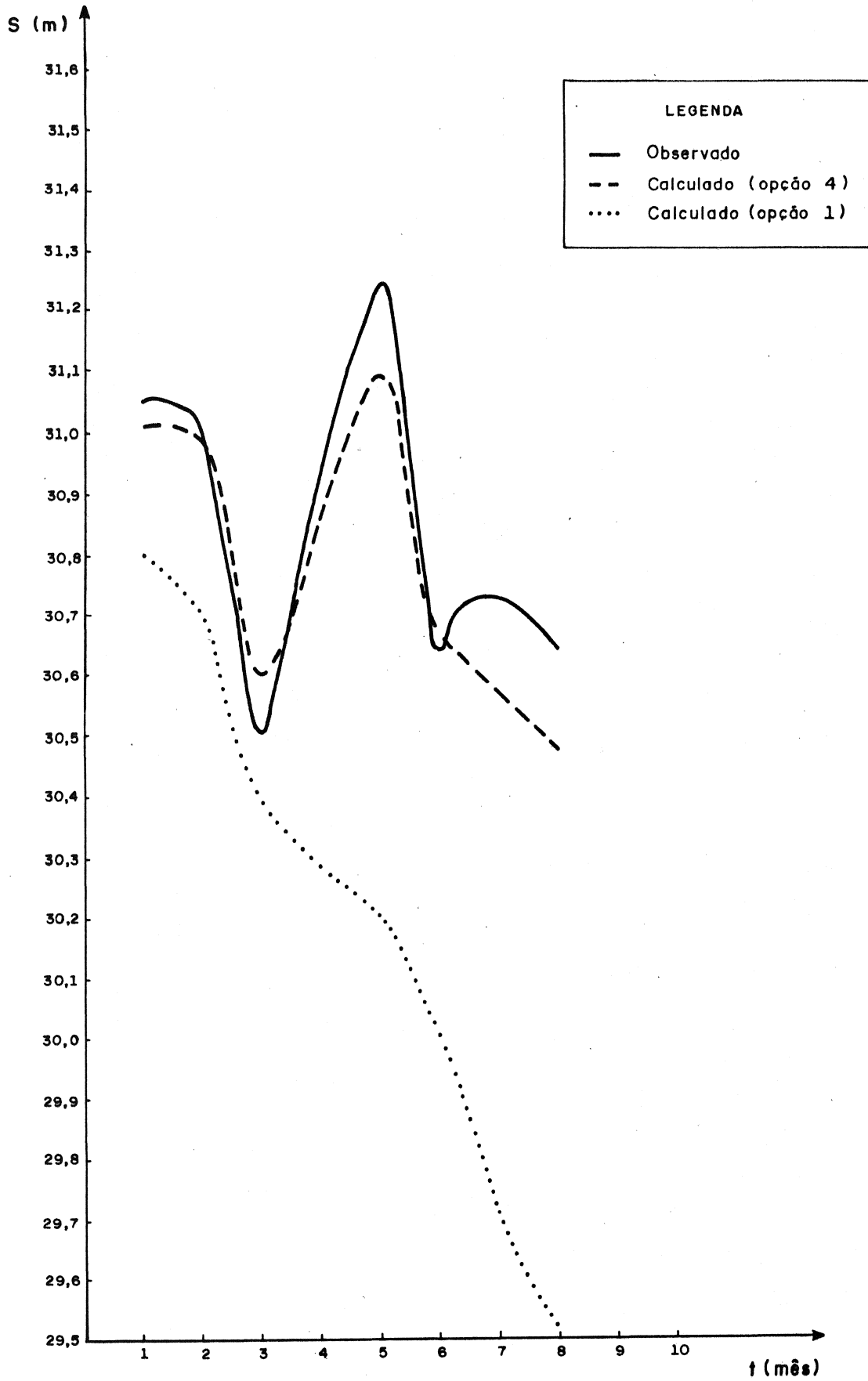


Figura 5.22 - Rebaixamentos observados e calculados no polígono 1

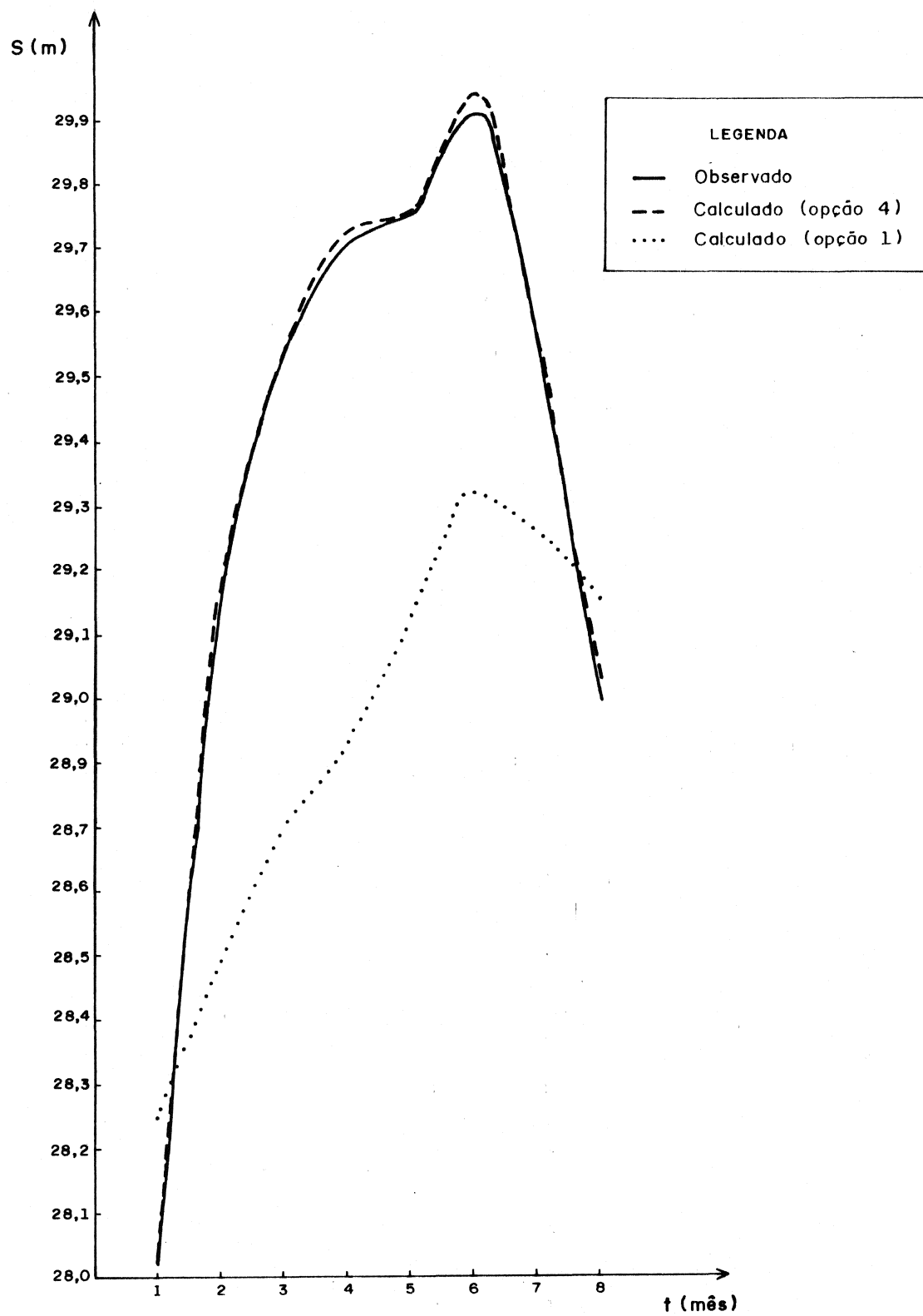


Figura 5.23 - Rebaixamentos observados e calculados no polígono 2

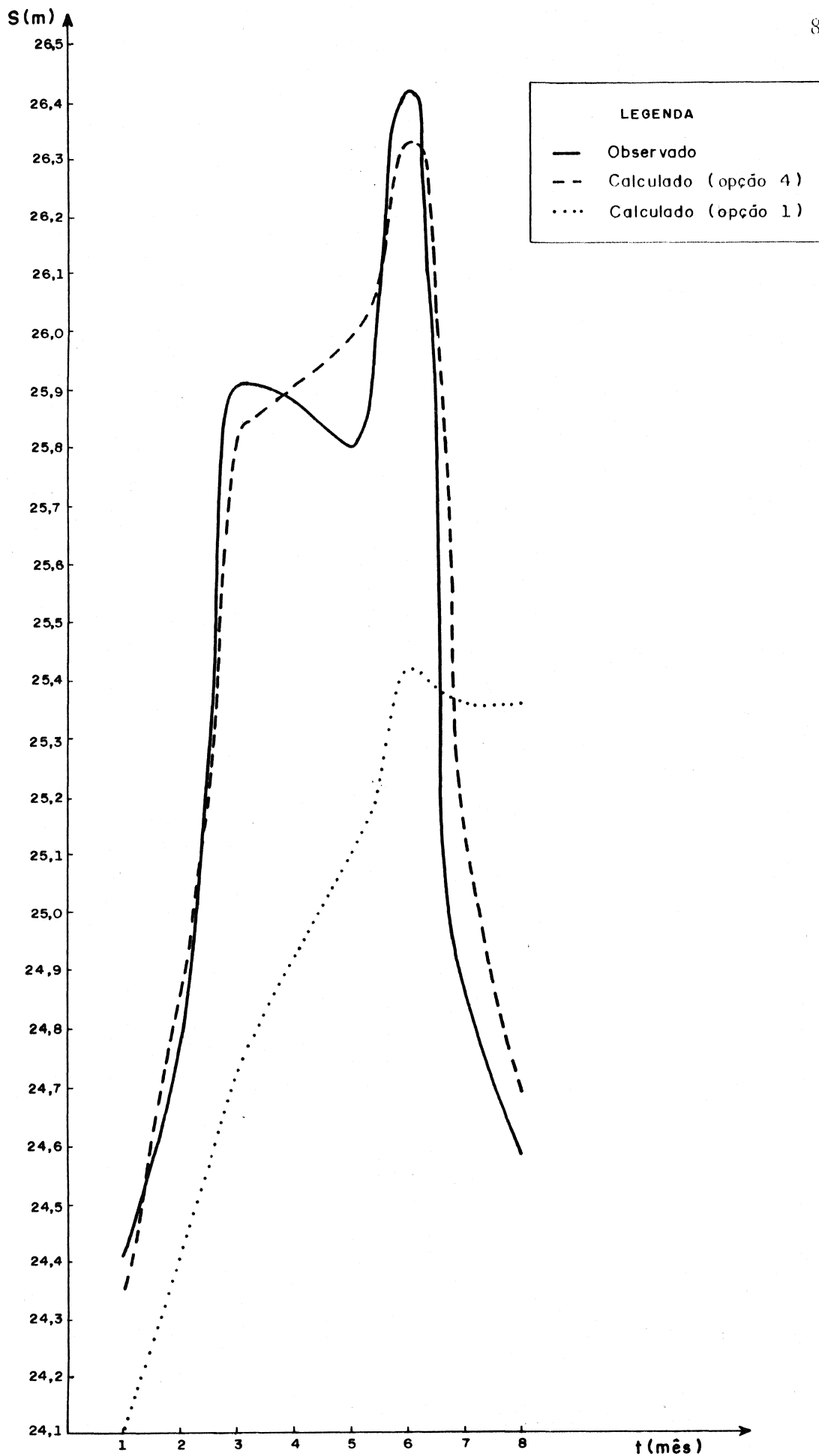


Figura 5.24 - Rebaixamentos observados e calculados no polígono 3

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Um modelo para identificação das características físicas do sistema aquífero subterrâneo foi desenvolvido. Primeiramente, o sistema foi dividido em células poligonais utilizando o método de Thiessen. As equações de fluxo, derivadas do balanço de volumes em cada polígono foram escritas usando coeficientes de influência e o conceito de reinicialização (Illangasekare et al., 1984). A seguir, as características físicas do sistema foram calibradas utilizando um algoritmo de otimização que minimiza as diferenças quadráticas entre rebaixamentos calculados e observados através da rotina de Rosenbrock. Limites inferiores e superiores foram estabelecidos a cada iteração de tal forma que os parâmetros satisfizessem às informações geológicas e às condições de homogeneidade na distribuição espacial.

Problemas causados por desconhecimento ou erros embutidos nos valores observados da escala de bombeamento no período de calibração foram solucionados introduzindo no algoritmo a possibilidade de calibração das taxas de recarga e/ou descarga. Da mesma forma que para os parâmetros hidrogeológicos, foram estabelecidas restrições às variações das taxas, calibradas de forma a satisfazer ao critério de homogeneidade na distribuição temporal das mesmas.

O modelo permite ao usuário optar pelo número de parâmetros a serem otimizados em cada iteração. O acréscimo de custo e tempo computacionais provocado pelo aumento no número de parâmetros otimizados é compensado pela diminuição no valor da função-objetivo e consequente aumento na precisão dos resultados.

Para testar o desempenho do modelo um sistema real e um sistema hipotético foram calibrados.

O aquífero hipotético como primeiro exemplo foi criado e colocado de forma a reproduzir todas as nuances e complexidades de um sistema real. Aplicado ao algoritmo desenvolvido, este mostrou ser capaz de identificar as características hidrogeológicas do meio com erros percentuais inferiores a 23%.

De posse dos parâmetros calibrados, a equação diferencial do fluxo subterrâneo foi resolvida. Constatou-se que o erro percentual máximo cometido na avaliação dos rebaixamentos ao longo do período de calibração foi menor do que 0,05%, valor este significativamente inferior aquele produzido na identificação das Transmissividades Intermediárias e Porosidades Efetivas.

No segundo exemplo, o aquífero real foi calibrado. As taxas de bombeamento e recarga utilizadas inicialmente foram estimadas a partir de contas de luz pagas pelos moradores da área estudada e decrescidas de uma taxa média de infiltração considerada constante no tempo e no espaço. A falta de precisão dos dados coletados gera curvas de rebaixamento de magnitude e/ou comportamento diferentes das curvas observadas na natureza. O problema foi solucionado inserindo no modelo uma rotina para a otimização das taxas estimadas.

O erro percentual acumulado no sistema decaiu a medida que aumentou o número de parâmetros a serem otimizados. Este erro antes de ter início qualquer processo de otimização (opção 1) foi de 109.96%, decaindo para 37.46%, quando foram identificados os parâmetros hidrogeológicos, e para 29.96% quando também foram otimizadas as taxas de estímulo.

Da mesma forma que os erros percentuais, a função-objetivo diminuiu na razão inversa ao aumento do número de parâmetros calibrados. Para qualquer opção de parâmetros a otimizar, o maior decaimento no valor da função--objetivo ocorreu no final da primeira iteração a partir da qual esse foi diminuindo até atingir a variação mínima aceitável entre duas iterações consecutivas previamente estabelecidas.

Os rebaixamentos calculados após a otimização de todos os parâmetros hidrogeológicos e das taxas de bombeamento e/ou recarga apresentaram valores muito próximos aos observados na natureza, com erros percentuais inferiores a 2%.

Uma vez que o tempo de execução e o espaço de memória computacional exigidos por um determinado modelo cresce linearmente com o número de células a serem computadas, a grande vantagem do método apresentado é a da decomposição física do sistema em pequeno número de células poligonais, nas quais existem dados disponíveis, diminuindo o número de equações a serem resolvidas a cada iteração, minimizando o tempo de execução gasto na solução do problema. Por exemplo, somente 76.53 segundos foram gastos pelo computador B-6700 para calibrar os parâmetros hidrogeológicos e as taxas de recarga e/ou descarga no aquífero real, numa média de 15.31 segundos por iteração.

O algoritmo pode ser facilmente modificado para resolver outras formulações do problema inverso que envolvam parâmetros ou estímulos de caráter linear.

A presente dissertação descreve uma técnica para a identificação de parâmetros hidrogeológicos, fornecendo ao hidrogeólogo um instrumento capaz de auxiliar na resolução de problemas de gerenciamento em Hidrogeologia.

Um modelo de gerenciamento de bacias subterrâ-

neias é constituído por dois componentes: componente alocação e componente físico. O componente de alocação define os objetivos e as estratégias para a utilização dos recursos levando em consideração as limitações impostas por fatores físicos, econômicos e legais. A qualidade da água, limitação física, é assegurada pela manutenção dos níveis d'água acima de valores mínimos que evitem a intrusão de águas in desejáveis provenientes de aquíferos adjacentes e/ou fronteiras superficiais. A estrutura e profundidade dos poços existentes limitam economicamente o rebaixamento do nível subterrâneo. As limitações legais visam à proteção de usuários de poços situados no mesmo aquífero quando a exploração de um afeta o nível de água nos outros.

O componente físico prevê a nova situação da bacia após terem sido introduzidas as decisões tomadas na alocação, permitindo verificar se as limitações impostas ao nível subterrâneo foram satisfeitas.

O algoritmo desenvolvido é o componente físico de um modelo de gerenciamento de bacias subterrâneas. Identificados os parâmetros hidrogeológicos, é possível calcular os coeficientes de influência para cada polígono do modelo. Para as mesmas condições iniciais e de fronteiras, pode-se usar estes valores na simulação das estratégias propostas na alocação.

O presente trabalho é o primeiro passo na formulação de um modelo mais amplo na área de gerenciamento em recursos hídricos que vise ao uso integrado das águas subterrâneas e superficiais.

BIBLIOGRAFIA

1. BACHMAT, Y. & DAX, A. 1979. An iterative method for calibrating a multicell aquifer model. Water Resources Research, Washington, 15(2):305-12, Apr.
2. BATHALA, C.T.; RAO, A.R.; SPOONER, J.A. 1980. Linear system models for regional aquifer evaluation studies Water Resources Research, Washington, 16(2):409-22, Apr.
3. BITTINGER, M.W.; DUKE, H.R.; LONGENBAUGH, R.A. 1967. Mathematical simulations for better aquifer management. In: HAIFA SYMPOSIUM, 1967. Artificial recharge and management of aquifers. Gentbrugge. p.509-19. (International Association of Hydrological Sciences. Publication n.72).
4. BOONSTRA, J. & RIDDER, N.A.de 1981. Numerical modelling of groundwater basins. Wageningen, International Institute for Land Reclamation and Improvement. 226p.
5. BOUSSINESQ, J. 1904. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Paris, 10:5-78 apud FREEZE, R.A. & CHERRY, J.A. 1979. Groundwater. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. p.558.
6. CHANG, S. & YEH, W.W-G. 1976. A proposed algorithm for the solution of the large scale inverse problems in ground water. Water Resources Research, Washington, 12(3): 365-74, June.
7. COOPER, H.H., Jr. & JACOB, C.E. 1946. A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well-field history. Transactions American Geophysical Union, Washington, 27(4): 526-34, Aug.

8. DARCY, H. 1856. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, Victor Dalmont apud FREEZE, R.A. & CHERRY, J.A. 1979. Groundwater. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. p.562.
9. DUPUIT, J. 1863. Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans le canaux découverts et à travers les terrains perméables. Paris, Dunod apud FREEZE, R.A. & CHERRY, J.A. 1979. Groundwater. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. p.563.
10. EMSELLEM, Y. & MARSILY, G.de 19-7. An automatic solution for the inverse problem. Water Resources Research, Washington, 7(5): 1264-83, Oct.
11. GUVANASEN, V. & VOLKER, R.E. 1978. Identification of distributed parameters in groundwater basins. Journal of Hydrology, Amsterdam, 36:279-93.
12. HEFEZ, E.; SHAMIR, U.; BEAR, J. 1975. Identifying the parameters of an aquifer cell model. Water Resources Research, Washington, 11(6): 993-1004, Dec.
13. ILLANGASEKARE, T.H.; MOREL-SEYTOUX, H.J.; VERDIN, K.L. 1984. A technique of reinitialization for efficient simulation of large aquifers using the discrete kernel approach. Water Resources Research, Washington, 20(11): 1733-42, Nov.
14. KASHYAP, D. & CHANDRA, S. 1982. A nonlinear optimisation method for aquifer parameter estimation. Journal of Hydrology, Amsterdam, 57:163-73.
15. KLEINECKE, D. 1971. Use of linear programming for estimating geohydrologic parameters of ground water basins. Water Resources Research, Washington, 7(2):367-74, Apr.
16. LOVELL, R.E.; DUCKSTEIN, L.; KISIEL, C.C. 1972. Use of subjective information in estimation of aquifer parameters. Water Resources Research, Washington, 8 (3): 680-90, June.

17. LUNA-CAICEDO, N.O. 1983. Identification of aquifer parameters using transient observations and the discrete Kernel approach. Porto Alegre, Instituto de Pesquisas Hidráulicas da UFRGS. 88p. (Recursos Hídricos, Publicação n.7). Tese (Ph.D.) Colorado State University.
18. MADDOCK, T., III. 1972. Algebraic technological function from a simulation model. Water Resources Research, Washington, 8(1):129-34, Feb.
19. MADDOCK, T., III. 1974. The operation of a stream-aquifer under stochastic demands. Water Resources Research, Washington, 10(1):1-10, Feb.
20. MOREL-SEYTOUX, H.J. & DALY, C.J. 1975. A discrete Kernel generator from stream-aquifer studies. Water Resources Research, Washington, 11(2):253-60, Apr.
21. NARASIMHAN, T.N. & WITHERSPOON, P.A. 1976. An integrated finite difference method for analyzing fluid in porous media. Water Resources Research, Washington, 12(1): 57-64, Feb.
22. NEUMAN, S.P. 1973. Calibration of distributed parameter groundwater flow models viewed as a multiple objective decision process under uncertainty. Water Resources Research, Washington, 9(4):1006-21, Aug.
23. NUTBROWN, D.A. 1975. Identification of parameters in a linear equation of groundwater flow. Water Resources Research, Washington, 11(4):581-8, Aug.
24. PINDER, G.G. & BREDEHOEFT, J.D. 1968. Application of the digital computer for aquifer evaluation. Water Resources Research, Washington, 4(5): 1069-93.
25. RODRIGUEZ-AMAYA, C. 1976. A decomposed aquifer model suitable for management. Fort Collins, Colorado State University. 104f. Tese (Ph.D.).
26. ROSENBROCK, H.H. 1960. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. Computer Journal, London, 3:175-84.

27. SHERMAN, L.K. 1932. Stream flow from rainfall by the unit-graph method. Engineering News-Record, New York, 108:501-5, Apr. apud CHOW, V.T., ed. 1964. Handbook of applied hydrology. New York, McGraw-Hill. Sect.14-90.
28. SMITH, P.J. & PIPER, B.S. 1978. A non-linear optimization method for the estimation of aquifer parameters. Journal of Hydrology, Amsterdam, 39:255-71.
29. THEISS, C.V. 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. Transactions American Geophysical Union, Washington, 16:519-24.
30. THIESSEN, A.H. 1911. Precipitation for large areas. Monthly Weather Review, Washington, 39:1082-4, July apud CHOW, V.T., ed. 1964. Handbook of applied hydrology. New York, McGraw-Hill. Sect.9-66.
31. TYSON, H.N., Jr. & WEBER, E.M. 1964. Ground-water management for the nations future-computer simulation of ground-water basins. Journal of the Hydraulics Division, New York, 90(4):59-77, July.
32. VENETIS, C. 1970. Finite aquifers: characteristic responses and applications. Journal of Hydrology, Amsterdam, 12:53-62.
33. WALTON, W.C. & NEILL, J.C. 1960. Analyzing ground-water problems with mathematical models and a digital computer. In: HELSINKI GENERAL ASSEMBLY. 1960. Subterranean waters. Gentbrugge, IASH. p.336-46. (International Association of Hydrological Sciences. Publication n.52).
34. YEH, W.W-G. & TAUXE, W. 1971a. A proposed technique for identification of unconfined aquifer parameters. Journal of Hydrology, Amsterdam, 12:117-28.

35. YEH, W.W-G. & TAUXE, W. 1971b. Quasilinearization and the identification of aquifer parameters. Water Resources Research, Washington, 7(2):375-81, Apr.

ANEXO

SISTEMAS LINEALES

A exemplo da Hidrologia Superficial, onde os hidrogramas são largamente aplicados, a Hidrologia Subterrânea vem se valendo da Teoria dos Sistemas Lineares. A condição necessária para que um sistema seja linear é a aplicabilidade do Princípio da Superposição, ou seja, se dois estímulos $X_1(t)$ e $X_2(t)$ produzem saídas $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ respectivamente, então $X_1(t) + X_2(t)$ produzirá uma saída $Y_1(t) + Y_2(t)$. A condição que dá validade à anterior é o Princípio da Homogeneidade, é dizer, dado $X_1(t) = X_2(t) = \dots = X_n(t)$, o somatório $Y_n(t) = nY_1(t)$.

Considerando um bombeamento de distribuição uniforme no tempo e no espaço, podem ser formuladas três proposições básicas para a bacia subterrânea, análogas à teoria do Hidrograma Unitário de Sherman (1932):

- a - Invariância no tempo: iguais bombeamentos aplicados em tempos diferentes produzem o mesmo rebaixamento;
- b - Proporcionalidade: dois bombeamentos de igual duração dão lugar a curvas rebaixamento x tempo em que as ordenadas em tempos correspondentes são proporcionais às quantidades produzidas;
- c - Independência: o rebaixamento resultante de um bombeamento independe de bombeamentos anteriores.

Considerando um sistema aquífero composto por 2 poços, um de operação e outro de observação, estimulado por

um bombeamento unitário de duração infinitesimal, a este estímulo dá-se o nome de Impulso Unitário e a resposta produzida pela bacia subterrânea de Hidrograma Unitário Instantâneo (Figura A.1). A resposta final $Y(t)$ é expressa como o somatório das respostas $y(t)$ resultantes de estímulos infinitesimais individuais

$$y(t) = \int_0^t x(\sigma)k(t-\sigma) d\sigma \quad (A.1)$$

onde $y(t)$ é a saída do sistema, $x(t)$ é a entrada no sistema; $k(t)$ é a função impulso unitário.

A equação A.1 é conhecida como equação da convolução.

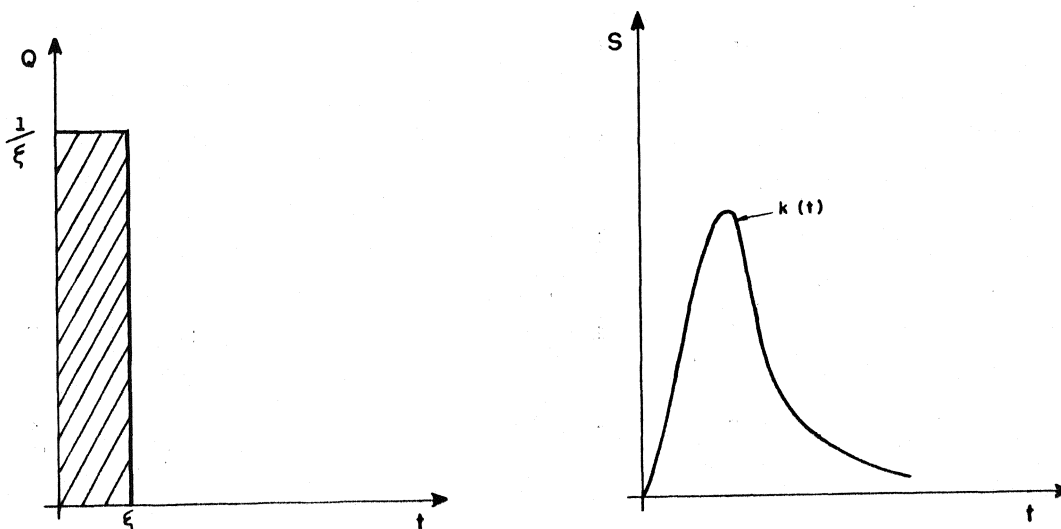


Figura A.1 - Estímulo e resposta tipo impulso unitário

Se o estímulo unitário se mantiver indefinidamente ao longo do tempo, o aquífero atingirá o estado de equilíbrio (regime permanente) onde os rebaixamentos originados em cada ponto são praticamente constantes e independentes do tempo. A este estímulo dá-se o nome de Passo Unitário e a resposta $k(t)$ por ele induzida tem comportamento semelhante à curva S na Hidrologia Superficial (Figura A.2). A relação entre as funções passo e impulso unitário é dada por:

$$k(t) = \frac{dK(t)}{dt} \quad (\text{A.2})$$

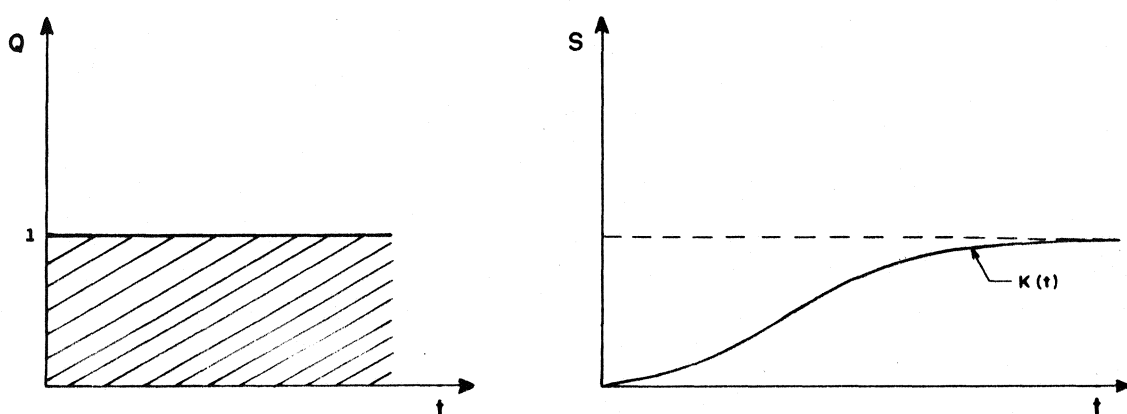


Figura A.2 - Estímulo e resposta tipo passo unitário

Um estímulo unitário aplicado durante um intervalo de tempo de duração unitária é denominado Pulso Unitário. A função Pulso Unitário $\delta(t)$ (Figura A.3) pode ser deduzida a partir da função passo unitário pela seguinte relação:

$$\delta(t) = K(t) \quad , \quad t < 1$$

(A.3)

$$\delta(t) = K(t) - K(t-1) \quad , \quad t > 1$$

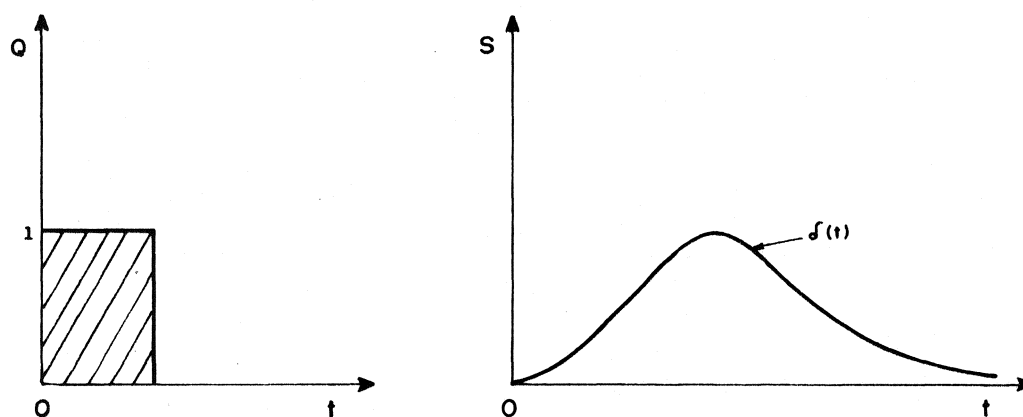


Figura A.3 - Estímulo e resposta tipo pulso unitário

Na prática, os estímulos são dados de forma discreta no tempo. A relação funcional discreta entre um estímulo do tipo pulso unitário e o rebaixamento no aquífero é denominada Coeficiente Discreto ou Coeficiente de Influência.