

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# **Unicidade de Buracos Negros Estáticos**

Dissertação de Mestrado

Vinícius Weite Thomé

Porto Alegre, Setembro de 2021.

Dissertação submetida por Vinícius Weite Thomé <sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Francisco Vanderson Moreira de Lima (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos (PPGMat-UFRGS)

Prof. Dr. Diego Marcon Farias (PPGMat-UFRGS)

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz (UFAL)

13 de Setembro de 2021

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

*Aos pesquisadores e pesquisadoras que lutam diariamente contra o sucateamento da pesquisa e da educação pública promovido por políticas neoliberais.*

*Pesquisar no Brasil tornou-se um ato de resistência, mas graças a vocês é uma resistência inspirada por pares.*

## Agradecimentos

Agradeço à minha mãe por todo incentivo e apoio desde sempre. Mesmo que ela não entenda o que eu fiz durante a pesquisa, chegando a me perguntar: “esses buracos negros são perigosos para nós?”. Esta conquista também é dela. Eu jamais teria conseguido chegar aqui se não fosse por ela. Tem um pouquinho dela em cada ação minha e em cada palavra que digitei neste trabalho. Muito obrigado por tudo, mãe!

Agradeço à Dafne, minha excelentíssima namorada, por ser a companheira perfeita. Ela entrou recentemente na minha vida, mas chegou a tempo de presenciar o auge da confecção deste trabalho, tornando tudo muito mais leve. Muito obrigado por estar comigo durante esta fase, seja literalmente dormindo ao meu lado enquanto eu passava a madrugada digitando ou por ouvir as minhas angústias e me contagiar com seu otimismo e euforia.

Agradeço ao Vanderson, meu orientador, por conseguir equilibrar o rigor de um professor exigente com a descontração de um amigo. Muito obrigado por apostar em mim, apesar das minhas dificuldades no início do mestrado, e por me dar todas as condições para escrever este trabalho. Obrigado por toda a disponibilidade para ficar tirando dúvidas em momentos aleatórios via *Whatsapp* e pelos muitos (muitos e muitos) comentários feitos em todas as versões do trabalho. Eu sempre achei que certos temas de matemática e física estivessem fora do meu alcance e que eu jamais os entenderia. Felizmente eu estava errado, e as suas orientações foram fundamentais para que eu percebesse isso. Muito obrigado por me guiar nesta jornada!

Agradeço à Alessandra, minha irmã de orientação, por sempre me lembrar que eu não estava sozinho. Muito obrigado por todas as discussões sobre matemática, por todas as fofocas compartilhadas e por sempre estar disponível para ouvir atentamente os argumentos da dissertação.

Agradeço aos demais colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS e aos colegas da minha graduação com os quais ainda tenho contato. Não vou citar nomes, mas vocês fizeram parte da minha história.

Agradeço a todos os professores que já construíram conhecimento comigo, em especial à Carina, ao Nicolau e ao Bruno, por me ajudarem com a matemática que eu precisava para entrar no mestrado, e à Mariana, à Jaqueline e ao Pompermayer por moldarem a minha postura docente e me influenciarem na escolha do tipo de professor que quero ser. Também agradeço à professora Vera, minha professora de matemática do fim do ensino fundamental, que certa vez respondeu atentamente a um questionamento sobre raiz quadrada de números negativos enquanto estudávamos resolução de equações: foi um gesto simples que eu jamais esquecerei.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro e a todos os cientistas, pesquisadores e pesquisadoras que estão em meu passado (ou presente!) causal.

*“Estava decidido a descobrir a lógica subjacente ao universo.  
O que seria difícil, porque havia nenhuma.”  
(Terry Pratchett)*

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar o teorema de unicidade para buracos negros estáticos  $(n + 1)$ -dimensionais. Para isso demonstramos um resultado mais geral, obtido por Sophia Jahns no artigo “Photon sphere uniqueness in higher-dimensional electrovacuum spacetimes”: seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  cujas componentes conexas do bordo  $\partial M^n$  são horizontes estáticos não-degenerados e esferas de fótons quase-locais subextremas, então  $(M^n, g)$  é isométrica a variedade de Reissner-Nordström  $n$ -dimensional de massa  $m$  e carga  $q$ , para qual necessariamente deve valer  $m > |q|$ . Este resultado generaliza os teoremas já conhecidos sobre esferas de fótons e horizontes de eventos de buracos negros estáticos.

**Palavras-chave:** buracos negros estáticos; variedade de Reissner-Nordström; teoremas de unicidade; esferas de fótons.

# Abstract

This work aims to prove the uniqueness theorem for static  $(n + 1)$ -dimensional black holes. For this we prove a more general result, obtained by Sophia Jahns in the paper “Photon sphere uniqueness in higher-dimensional electrovacuum spacetimes” present in [24]: let  $(M^n, g, V, \Psi)$  be an electrostatic system asymptotically Reissner-Nordström of mass  $m$  and charge  $q$  whose connected components of the boundary  $\partial M^n$  are non-degenerate static horizons and subextreme quase-local photon spheres, then  $(M^n, g, V, \Psi)$  is isometric to the  $n$ -dimensional Reissner-Nordström manifold of mass  $m$  and charge  $q$ , for which must necessarily be  $m > |q|$ . This result generalizes previous theorems about photon spheres and static black hole event horizons.

**Keywords:** static black holes; Reissner-Nordström manifold; uniqueness theorems; photon spheres.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>16</b>
2.1	Métricas pseudo-Riemannianas . . . . .	16
2.2	Conexões . . . . .	21
2.2.1	Conexão de Levi-Civita . . . . .	21
2.2.2	Derivada de Lie . . . . .	25
2.2.3	Geodésicas . . . . .	26
2.3	Curvaturas . . . . .	27
2.4	Hipersuperfícies pseudo-Riemannianas . . . . .	30
2.4.1	Hipersuperfícies totalmente umbílicas . . . . .	32
2.5	Princípios do máximo . . . . .	36
2.6	Relatividade geral . . . . .	37
2.6.1	Causalidade . . . . .	38
2.6.2	A Equação de Einstein . . . . .	39
2.6.3	O Teorema da Massa Positiva . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Espaços-tempo estáticos</b>	<b>44</b>
3.1	Equações de Einstein estáticas . . . . .	46
3.2	Sistemas eletrostáticos . . . . .	49
3.3	Espaço-tempo de Reissner-Nordström . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Buracos negros estacionários e esferas de fótons</b>	<b>56</b>
4.1	Buracos negros estacionários . . . . .	56
4.2	Buracos negros estáticos . . . . .	59
4.2.1	O buraco negro de Reissner-Nordström . . . . .	63
4.3	Esferas de fótons . . . . .	67
4.3.1	Propriedades quase-locais . . . . .	69
4.3.2	A esfera de fótons da variedade de Reissner-Nordström . . . . .	77
4.4	Sistemas assintoticamente Reissner-Nordström . . . . .	79
4.4.1	Massa e carga . . . . .	85



<b>5 Prova do Teorema de Unicidade</b>	<b>89</b>
5.1 Ideia da prova . . . . .	89
5.2 Colagem dos cilindros . . . . .	90
5.3 Espelhamento ao longo dos horizontes estáticos . . . . .	98
5.4 Transformação Conforme e Teorema da Massa Positiva . . . . .	101
5.5 Recuperando a variedade de Reissner-Nordström . . . . .	104
<b>Referências</b>	<b>108</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Dentre os diversos objetos astronômicos conhecidos, os buracos negros estão entre os mais misteriosos e interessantes, principalmente por conta de suas propriedades que desafiam a intuição humana e deixam qualquer pessoa intrigada. Sua existência é prevista pela Relatividade Geral, na qual, para certos espaços-tempo, pode existir uma região cujo campo gravitacional é tão intenso que nem mesmo partículas de luz conseguem escapar. Atualmente a pesquisa sobre buracos negros é um campo extremamente amplo, com tópicos diversos tais como o estudo da geometria dos modelos existentes, o estudo de aspectos quânticos ou a busca por mais evidências empíricas da existência destes objetos, dentre outros. Entretanto, a evolução histórica do conceito de buraco negro foi árdua, sendo bastante discutida (ou obstruída) durante o último século.

As primeiras soluções da Equação de Einstein com o comportamento de buraco negro remontam aos anos iniciais da Relatividade Geral: em 1916, apenas um ano após Einstein publicar o primeiro artigo propondo as bases para a teoria, foi publicada a Solução de Schwarzschild [49], cujo propósito era modelar o campo gravitacional ao redor de uma distribuição uniforme e esfericamente simétrica de massa. Esta solução apresenta duas propriedades peculiares: uma singularidade (no sentido de incompletude de geodésicas) e uma região da qual partículas materiais e de luz não podem escapar. Estas propriedades traduziam um comportamento físico bastante estranho, fazendo com que não fossem levadas a sério pelos principais nomes da Relatividade Geral à época, sob o argumento de que seriam apenas patologias matemáticas da teoria.

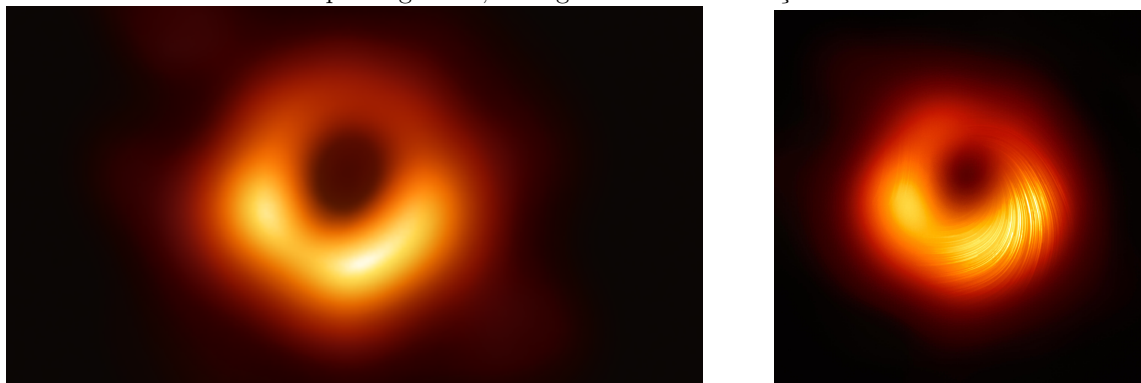
Na década de 1930 foram publicados dois trabalhos importantes que permitiam uma interpretação física das propriedades da solução de Schwarzschild, afirmando que esta solução descreveria uma situação de *colapso gravitacional*, isto é, quando o efeito gravitacional de um corpo se torna tão intenso ao ponto deste colapsar sobre si mesmo. Neste sentido, em 1931, Chandrasekhar demonstrou que não haviam efeitos que poderiam impedir que um corpo frio com massa maior que 1,44 vezes a massa do sol colapsasse indefinidamente, e, em 1939, Oppenheimer e Snyder demonstraram que um corpo esfericamente simétrico e livre de pressão poderia sofrer colapso gravitacional. Apesar destes trabalhos,

acreditava-se que a existência de singularidades e a possibilidade de colapso gravitacional estavam relacionadas à existência de simetrias da solução, sendo assim esperado que em situações genéricas não acontecesse.

A partir da década de 1950, porém, com a descoberta dos quasares, se inicia a era de ouro da Relatividade Geral e dos Buracos Negros, impulsionando o estudo destes objetos. Com a Relatividade Geral em alta, surgiu o interesse em buscar condições mais genéricas para os quais um espaço-tempo poderia apresentar singularidade. Entendendo singularidade como incompletude de geodésicas causais inextensíveis, na década de 60 surgem os Teoremas de Singularidade, demonstrando que em situações suficientemente genéricas (sem hipóteses de simetria) um espaço-tempo apresentará um ponto com estas características. Em 1965, Penrose mostrou que um espaço-tempo satisfazendo algumas condições genéricas apresentaria uma geodésica do tipo luz inextensível e incompleta no futuro e, em 1966, Hawking provou, também sob condições genéricas, que um espaço-tempo apresentaria uma geodésica do tipo tempo inextensível e incompleta. Em 1970, Hawking e Penrose provaram um teorema de singularidade que mostrava a existência de uma geodésica causal inextensível e incompleta. Com estes resultados verificou-se que singularidades ocorrem genericamente na Relatividade Geral e sua existência não está atrelada à existência de simetrias no espaço-tempo, o que foi um passo importante no estudo dos buracos negros.

Recentemente tivemos grandes avanços em relação à evidências empíricas quanto à detecção destes objetos: em 2015, através da cooperação entre os detectores VIGO e LIGO [30], foi possível detectar, indiretamente, ondas gravitacionais, que teriam sido causadas pela fusão de dois buracos negros. Além disso, em abril de 2019 foi divulgada a primeira imagem de um buraco negro, capturada pelo radiotelescópio virtual Event Horizon, correspondendo ao buraco negro super massivo encontrado no centro da galáxia Messier 87. Em março de 2021 uma nova imagem deste objeto foi divulgada, Figura 1, a qual evidencia a assinatura das linhas do campo magnético.

Figura 1.1: Fotografias do Buraco Negro super massivo no centro da galáxia Messier 87. À esquerda a primeira fotografia, divulgada em 10 de abril de 2019. À direita a segunda fotografia, que evidencia a assinatura das linhas de campo magnético, divulgada em 24 de março de 2021.



Fonte: Event Horizon Telescope.

Diversas soluções da Equação de Einstein possuem regiões de buraco negro (tal como a de Schwarzschild). Neste sentido convém estabelecer modelos físicos e geométricos mais realistas possíveis para descrever estes objetos. Do ponto de vista físico, para um buraco negro isolado, é esperado que ao longo do tempo toda a matéria e energia presente na região exterior seja irradiada para o “infinito” (bem longe do sistema) ou capturada pela região interior. Logo espera-se que a solução que modela o sistema evolua para um estado estacionário em seus estágios finais [10], o que motiva o estudo dos buracos negros estacionários.

O presente trabalho se insere nas discussões sobre os Teoremas de Unicidade para buracos negros estacionários, focando no caso estático, ou seja, buscaremos teoremas que garantam que certas famílias suficientemente genéricas de soluções da Equação de Einstein são isométricas à famílias de exemplos mais simples governados por parâmetros que traduzam alguma interpretação física. Neste sentido, para o caso 4-dimensional e com a hipótese de analiticidade do espaço-tempo, temos o *Teorema No-Hair*, estabelecendo que soluções estacionárias e isoladas das Equações de Einstein-Maxwell que possuem regiões de buraco negro são caracterizadas por apenas três parâmetros: massa, carga elétrica e momento angular [14, 16]. Portanto, um problema em aberto bastante relevante para o estudo dos buracos negros consiste em estabelecer um teorema de unicidade para buracos negros estacionários que não dependa da hipótese de analiticidade.

O primeiro teorema de unicidade diz respeito a buracos negros estacionários cuja carga elétrica e momento angular sejam nulos: neste caso o espaço-tempo é necessariamente estático. O resultado estabelece que as únicas soluções estáticas de *vácuo* da Equação de Einstein representando buracos negros isolados são as soluções de Schwarzschild. Ele pode ser enunciado, brevemente, da seguinte maneira.

**Teorema de unicidade para buracos negros estáticos sem carga elétrica:** *Seja  $(\mathbf{M}^4, \mathbf{g})$  um espaço-tempo estático e assintoticamente plano que contém um buraco negro, com  $\mathbf{g}$  uma solução de vácuo da Equação de Einstein. Então o domínio de comunicação exterior de  $\mathbf{M}$  é isométrico ao domínio de comunicação exterior de uma solução de Schwarzschild de mesma massa.*

Este teorema foi inicialmente demonstrado por Israel em 1967 [22], assumindo que o horizonte de eventos seja conexo. Então, em 1986, utilizando o Teorema da Massa Positiva, Bunting e Masood-ul Alan [6] conseguiram retirar a hipótese de conexidade do horizonte de eventos. Os teoremas até então utilizavam uma hipótese de analiticidade, que foi removida por Chruściel e Galloway [13].

Porém a massa não descreve totalmente os buracos negros estáticos: existe a solução de Reissner-Nordström [40, 36], que generaliza a métrica de Schwarzschild considerando um parâmetro  $q \in \mathbb{R}$  de carga elétrica, mas mantendo a estaticidade. Esta métrica é um exemplo de solução *eletrovácuo* da Equação de Einstein e, para o caso em que  $m > |q|$ , dito caso subextremo, representa um exemplo de região exterior a um buraco

negro eletricamente carregado e sem momento angular. Com isso em mente, um bom teorema de unicidade para buracos negros estáticos precisaria considerar a solução de Reissner-Nordström, permitindo que o buraco negro possa ter carga elétrica não-nula.

Analogamente ao teorema de unicidade anterior, existem teoremas de unicidade para espaços-tempo com buraco negro eletricamente carregado, buscando demonstrar que soluções isoladas de eletrovácuo com buraco negro são isométricas a uma solução de Reissner-Nordström. A primeira versão foi obtida em 1968, também por Israel [23], assumindo a hipótese de conexidade do horizonte. Um pouco mais tarde, em 1988, Ruback retirou esta hipótese [41]. Ambos os teoremas de unicidade citados também utilizavam uma hipótese de analiticidade, que foi removida por Cruściel e Galloway em 2010 [13].

Com motivação na Teoria das Cordas, buscou-se generalizar os teoremas de unicidade para dimensões maiores do que quatro. Mesmo considerando apenas o caso de vácuo, o trabalho foi árduo, visto que as provas feitas por Israel, Bunting e Masood-ul-Alan possuem argumentos específicos de topologia das superfícies, por exemplo, a prova feita por Israel que faz uso do Teorema de Gauss-Bonnet. Apenas em 2003 que Gibbons, Ida e Shiromizu conseguiram uma generalização deste caso, para dimensão  $n + 1$ , com  $n \geq 3$ , e sem fazer uso de hipóteses de analiticidade [19]. Mais recentemente, em 2018, Kunduri e Lucietti [26], generalizaram o caso em que há carga elétrica, porém apenas para  $n \geq 5$  e  $m > |q|$ .

Também trataremos de teoremas de unicidade envolvendo o conceito de esferas de fótons. Esferas de fótons são hipersuperfícies do tipo tempo com a propriedade de “capturar” fótons. Elas são importantes pois, tanto na solução de Schwarzschild, quanto na Solução de Reissner-Nordström subextrema, há esferas de fótons “cercando” o horizonte de eventos. Neste sentido, considerando a parte do espaço-tempo que é exterior à esfera de fótons e o caso 4-dimensional, em 2015, Cederbaum provou um teorema de unicidade para o caso de vácuo [8] e em 2016, Cederbaum e Galloway provaram um teorema de unicidade para o caso de eletrovácuo [9].

Com isso em mente, o objetivo deste trabalho é demonstrar o teorema de unicidade para esferas de fótons e horizontes de eventos em espaços-tempo estáticos  $(n + 1)$ -dimensionais, obtido por Sophia Jahns em [24], o qual engloba todos os resultados citados anteriormente. Para englobar o caso em que a carga elétrica é não nula consideramos o conceito de *sistema eletrostático*. De maneira breve, um sistema eletrostático é um espaço-tempo estático padrão que satisfaz a Equação Einstein e as *Equações de Maxwell* sem fontes (por vezes chamado de solução de *eletrovácuo*). Neste caso, a geometria do espaço tempo é completamente determinada através de uma quádrupla  $(M^n, g, V, \Psi)$ , na qual  $(M^n, g)$  é uma variedade Riemanniana e  $V, \Psi$  são funções em  $M^n$  que satisfazem as Equações de Einstein-Maxwell. Portanto, provaremos o seguinte resultado.

**Teorema 1.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , com  $n \geq 3$ . Suponha que  $\partial M$  é orientável, com*

componentes conexas que são horizontes estáticos não-degenerados ou esferas de fótons quase-locais subextremas.

Então  $(M^n, g)$  é isométrica a uma região da variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , onde  $m > |q|$ .

A versão do Teorema 1 enunciada em [24] é mais geral do que a enunciada aqui: lá é considerada a hipótese de que o sistema seja pseudo-eletrostático. Porém, optamos por demonstrar a versão eletrostática, tanto para simplificar cálculos quanto pelo fato de que desta versão já decorre um Teorema de Unicidade para Buracos Negros Estáticos.

**Corolário 1.** (*Unicidade de Buracos Negros Estáticos*) Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ . Suponha que  $\partial M$  é um horizonte estático não-degenerado (possivelmente desconexo).

Então  $(M^n, g)$  é isométrica à região exterior da variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , com  $m > |q|$ .

É importante salientar que o Teorema 1 admite uma caracterização quase-local para esferas de fótons, que será discutida na Seção 4.3.1. Para esferas de fótons em sistemas eletrostáticos (sob ponto de vista global) a caracterização quase-local presente no Teorema 1 vale desde que façamos uma hipótese adicional em relação à curvatura escalar destas hipersuperfícies, como veremos na Proposição 23. Com isso em mente, pode-se enunciar o seguinte teorema de unicidade para esferas de fótons (caracterizadas do ponto de vista global, e não quase-local), também presente em [24], que é consequência imediata do Teorema 1.

**Teorema 2.** Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , com  $n \geq 3$ , tal que  $\partial M$  é uma esfera de fótons (possivelmente desconexa) para qual todas componentes conexas  $\Sigma_i^{n-1}$  são subextremas. Assumindo também que

(i)  $V|_{\partial M^n} > 0$ ;

(ii) a curvatura escalar de  $\Sigma_i^{n-1}$  com respeito à métrica induzida,  $R_{\sigma_i}$ , é constante.

Então  $(M^n, g)$  é isométrica a variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  com  $m > |q|$ . Em particular,  $\partial M^n$  é a esfera de fótons da variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , ou seja, possui apenas uma componente conexa e é uma esfera topológica.

Apesar de parecer redundante, este resultado é bastante importante pois esferas de fótons se conectam com o conceito de lentes gravitacionais, podendo inspirar novos métodos de detecção de buracos negros, auxiliando em observações empíricas. Quanto

ao Teorema 1, este apresenta a vantagem de demonstrar que  $m > |q|$ , sem que precisemos admitir isto como uma hipótese (como era feito em provas antigas).

Este trabalho é organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos as bases teóricas da geometria pseudo-Riemanniana e da Relatividade Geral, focando em resultados que serão úteis para o entendimento das hipóteses do Teorema 1 ou da sua prova. No Capítulo 3 discutimos os espaços-tempo estáticos, com o objetivo de construir a noção de sistema eletrostático e apresentar o espaço-tempo de Reissner-Nordström  $(n + 1)$ -dimensional de massa  $m$  e carga  $q$  como um exemplo de sistema deste tipo. No Capítulo 4 definimos buracos negros estacionários e discutimos uma caracterização para buracos negros estáticos, além de apresentar o conceito de esferas de fótons em sistemas eletrostáticos e estabelecer propriedades quase-locais das mesmas. Finalizamos o Capítulo 4 apresentando considerações referentes a assintoticidade que serão bastante úteis durante a prova do Teorema 1, considerações que fundamentam a interpretação de que buracos negros estáticos são sistemas isolados. No Capítulo 5 apresentamos a prova do Teorema 1.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo apresentamos as preliminares necessárias de geometria pseudo-Riemanniana e de Relatividade Geral. Assumimos do leitor um conhecimento básico da teoria de variedades diferenciáveis, para a qual boas referências são [29] e [37], que foram as referências utilizadas para este capítulo.

### 2.1 Métricas pseudo-Riemannianas

Para discutir aspectos geométricos das variedades diferenciáveis recorreremos ao conceito de métrica pseudo-Riemanniana, que nos permite realizar medições geométricas em uma variedade. Em um espaço vetorial (tal como o espaço euclidiano,  $\mathbb{R}^n$ ), a ferramenta matemática que nos permite estabelecer uma boa noção de métrica é o produto interno. Motivados por uma interpretação física (que será explorada mais adiante) não nos atemos apenas aos produtos internos, mas sim a um objeto um pouco mais geral: as formas bilineares, simétricas e não-degeneradas.

**Definição 1.** *Seja  $V^n$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ . Considere uma aplicação bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é:*

- (i) *simétrica, se  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ , para todos  $u, v \in V$ ;*
- (ii) *não-degenerada, se vale:  $\langle v, w \rangle = 0, \forall w \in V \implies v = 0$ .*

Neste contexto, a seguinte proposição garante uma boa caracterização:

**Proposição 1.** *(Lei da inércia de Sylvester) Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Então existe uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  e inteiros não negativos  $r, s$  para quais  $s + r = n$ , tais que*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -(f^1)^2 - \dots - (f^s)^2 + (f^{s+1})^2 + \dots + (f^{s+r})^2, \quad (2.1)$$

onde  $(f^i)^2 = f^i \otimes f^i$  e  $\{f^1, \dots, f^n\}$  é a base dual associada, isto é,  $f^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$ .



Note que  $\langle e_i, e_i \rangle = 1$  ou  $-1$ , a depender do vetor  $e_i$  considerado, e que  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  para todo  $i \neq j$ . Por conta disso dizemos que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma *base ortonormal* para  $V$ . Os números  $s$  e  $r$  independem da base ortonormal considerada, e por isso estabelecem o que denominamos *assinatura* da forma bilinear, simétrica e não-degenerada. Neste caso dizemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tem assinatura  $(s, r)$ .

Com isso em mente podemos definir métrica pseudo-Riemanniana.

**Definição 2.** *Uma métrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{g}$  em uma variedade diferenciável  $\mathbf{M}$  é um campo  $(0,2)$ -tensorial, simétrico e não-degenerado com assinatura constante. Ao par  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ , formado por uma variedade diferenciável  $\mathbf{M}$  e de uma métrica pseudo-Riemanniana, damos o nome de variedade pseudo-Riemanniana.*

**Observação 1.** *Seguimos a convenção de utilizar o termo “diferenciável” para nos referir à regularidade  $C^\infty$ . Além disso, a menos quando mencionado o contrário ou quando nosso propósito for demonstrá-la, a regularidade  $C^\infty$  será assumida durante o restante do texto. Porém, haverá situações em que a regularidade máxima atingida será  $C^{1,1}$ , isto é, uma vez diferenciável com derivada Lipschitz.*

Assim, em uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ , a métrica  $\mathbf{g}$  associa cada  $p \in \mathbf{M}$  a uma forma bilinear, simétrica e não-degenerada  $\mathbf{g}_p : T_p\mathbf{M} \times T_p\mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Além disso, a assinatura de  $\mathbf{g}_p$  é a mesma para todo  $p \in \mathbf{M}$ , o que nos permite dizer que  $\mathbf{g}$  tem assinatura  $(s, r)$  quando, para cada  $p \in \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{g}_p$  tem assinatura  $(s, r)$ . Também, quando não houver ambiguidade quanto à métrica considerada, utilizamos a notação de produto interno,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , para uma métrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{g}$ . Neste caso, para campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  escrevemos

$$\mathbf{g}(X, Y) = \langle X, Y \rangle \in C^\infty(\mathbf{M}),$$

pois, dado  $p \in M$ , temos  $X_p, Y_p \in T_pM$  e

$$\mathbf{g}(X, Y)(p) = \mathbf{g}_p(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}.$$

De maneira análoga às bases ortonormais de um espaço vetorial, em uma variedade pseudo-Riemanniana podemos estabelecer referenciais ortonormais locais. Seja  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana. Então dado um ponto  $p \in \mathbf{M}^n$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  em  $\mathbf{M}$  na qual existem campos vetoriais  $\{E_1, \dots, E_n\}$  que satisfazem: para cada  $q \in \mathcal{U}$ ,  $\{E_1(q), \dots, E_n(q)\}$  é base ortonormal de  $T_q\mathbf{M}^n$ . Dizemos que  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um *referencial ortonormal local*.

Existem algumas classes de variedades pseudo-Riemannianas que são bastante importantes. Se  $(M^n, g)$  é uma variedade pseudo-Riemanniana de assinatura  $(0, n)$ , então é dita *variedade Riemanniana*. Se  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  é uma variedade pseudo-Riemanniana de assinatura  $(1, n)$ , então  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  é dita *variedade de Lorentz* (ou *variedade Lorentziana*).

**Observação 2.** Ao longo do trabalho adotamos a seguinte convenção: sempre que nos referirmos a uma variedade pseudo-Riemanniana cuja assinatura pode ser qualquer, denotamos a métrica e os invariantes geométricos obtidos desta utilizando **negrito**. Para o caso específico de métricas Riemannianas usaremos a notação sem negrito.

**Exemplo 1.** (Espaço euclidiano  $n$ -dimensional). À variedade Riemanniana  $(\mathbb{R}^n, \delta)$ , onde  $\delta$  é o produto interno euclidiano canônico, é dado o nome de espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Note que, considerando as coordenadas euclidianas  $(x^1, \dots, x^n)$  usuais temos:

$$\delta = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

**Exemplo 2.** (Espaço pseudo-Euclidiano) Dados inteiros positivos  $s$  e  $r$ , definimos o espaço pseudo-Euclidiano de assinatura  $(s, r)$  como a variedade  $\mathbb{R}^{s+r}$  munida da métrica  $\eta^{s,r}$ , que, em coordenadas cartesianas  $(x^1, \dots, x^{s+r})$ , é dada por

$$\eta^{s,r} = -(dx^1)^2 - \dots - (dx^s)^2 + (dx^{s+1})^2 + \dots + (dx^{s+r})^2.$$

Para o caso especial em que  $s = 1$ , escrevemos  $r = n$  e denotamos  $\eta^{s,r}$  simplesmente por  $\eta$ . Neste caso dizemos que  $(\mathbb{R}^{n+1}, \eta)$  é o espaço de Minkowski  $(n + 1)$ -dimensional. Observe que, em coordenadas cartesianas  $(t = x^0, x^1, \dots, x^n)$  vale

$$\eta = -dt^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

**Observação 3.** (Notação de somatório de Einstein). Ao longo do trabalho adotaremos a notação de Einstein para somatórios, que consiste em repetir índices acima e abaixo quando estes denotarem um somatório de termos. Neste caso o conjunto de índices será especificado pelo contexto (evitando ambiguidades). Por exemplo, para somar os elementos  $\{a_i, b^i\}_{i \in I}$  escrevemos

$$a_i b^i := \sum_{i \in I} a_i b^i.$$

Seja  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana e considere  $(x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \subset \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um sistema de coordenadas local. Como a métrica é não-degenerada, então, para cada  $p \in \mathcal{U}$ , a matriz  $(\mathbf{g}_{ij}(p))_{n \times n}$ , dada por

$$\mathbf{g}_{ij}(p) := \mathbf{g}_p(\partial_i|_p, \partial_j|_p), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

é inversível. Além disso, como  $\mathbf{g}$  é diferenciável, cada uma das funções  $\mathbf{g}_{ij}$  é diferenciável. Então escrevemos  $(\mathbf{g}^{ij}(p))_{n \times n} := (\mathbf{g}_{ij}(p))_{n \times n}^{-1}$ . Além disso, pela simetria da métrica, podemos escrever, em  $\mathcal{U}$ :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{ij} dx^i dx^j.$$

Dado outro sistema de coordenadas locais,  $(y^1, \dots, y^n)$  em  $\mathbf{M}$ , temos a seguinte relação

entre os coeficientes de  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g}_{ij}dx^i dx^j = \left( \mathbf{g}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \right) dy^k dy^l = \tilde{\mathbf{g}}_{kl} dy^k dy^l.$$

Uma métrica pseudo-Riemanniana  $\mathbf{g}$  estabelece uma classificação com um importante significado físico aos campos de vetores da variedade  $\mathbf{M}$ , interpretação esta que é denominada *caráter causal* de um vetor ou campo.

**Definição 3.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana,  $p \in \mathbf{M}$  e  $v \in T_p\mathbf{M}$ . Então  $v$  é dito:*

- *do tipo espaço, se  $\langle v, v \rangle > 0$  ou  $v = 0$ ;*
- *do tipo luz, se  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $v \neq 0$ ;*
- *do tipo tempo, se  $\langle v, v \rangle < 0$ .*

Analogamente, dado  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ , dizemos que:

- $X$  é do tipo espaço se  $X_p$  é do tipo espaço para todo  $p \in \mathbf{M}$ ;
- $X$  é do tipo luz se  $X_p$  é do tipo luz para todo  $p \in \mathbf{M}$ ;
- $X$  é do tipo tempo se  $X_p$  é do tipo tempo para todo  $p \in \mathbf{M}$ .

Em um espaço de Minkowski esta caracterização de vetores é representada pelo *cone causal*, que em cada ponto determina o caráter causal dos vetores. Para variedades de Lorentz veremos na Seção 2.6 que, quando estas possuírem um campo global do tipo tempo, é possível atribuir um cone causal em cada ponto.

Propriedades de uma variedade pseudo-Riemanniana que dependem da métrica são interpretadas como propriedades geométricas. Com isso em mente, temos interesse especial em estudar aplicações entre variedades que preservam a métrica, pois estas tem a interpretação de “preservar a geometria”.

**Definição 4.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}_\mathbf{M})$  e  $(\mathbf{N}, \mathbf{g}_\mathbf{N})$  variedades pseudo-Riemannianas. Uma isometria de  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  é um difeomorfismo  $\Phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$  que preserva a métrica, isto é:*

$$\Phi^* (\mathbf{g}_\mathbf{N}) = \mathbf{g}_\mathbf{M}.$$

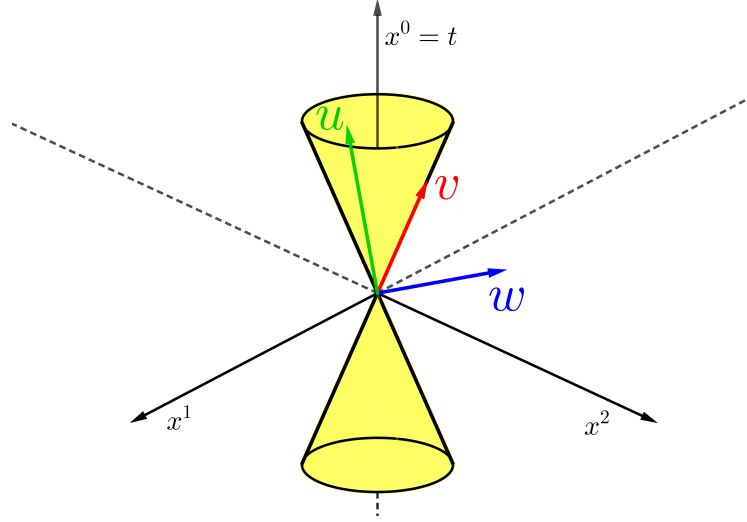
Explicitamente isso significa que, para todo  $p \in \mathbf{M}$  e para todos  $v, w \in T_p\mathbf{M}$  vale

$$(\mathbf{g}_\mathbf{N})_{\Phi(p)} (d\Phi_p(v), d\Phi_p(w)) = (\mathbf{g}_\mathbf{M})_p (v, w),$$

lembrando que  $d\Phi_p(v), d\Phi_p(w) \in T_{\Phi(p)}\mathbf{N}$ .

Existe uma generalização importante do conceito de isometria: as aplicações conformes.

Figura 2.1: Representação do cone causal na origem de um espaço de Minkowski. O vetor  $u$  está no interior da região delimitada pelo cone e representa um vetor do tipo tempo, enquanto  $v$  está no cone representando um vetor do tipo luz. O vetor  $w$  está fora da região delimitada pelo cone e representa um vetor do tipo espaço.



Fonte: elaborada pelo autor.

**Definição 5.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}_{\mathbf{M}})$  e  $(\mathbf{N}, \mathbf{g}_{\mathbf{N}})$  variedades pseudo-Riemannianas. Uma aplicação conforme de  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  é um difeomorfismo  $\Phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$  para qual existe uma função positiva  $\Omega \in C^\infty(\mathbf{M})$ , tal que*

$$\Phi^*(\mathbf{g}_{\mathbf{N}}) = \Omega^2 \mathbf{g}_{\mathbf{M}}.$$

Do ponto de vista geométrico as aplicações conformes são caracterizadas por preservar ângulos. A função  $\Omega^2$  por vezes é chamada de fator conforme. Note que uma isometria é uma aplicação conforme com fator conforme  $\Omega \equiv 1$ . Além disso, é fácil ver que aplicações conformes (e, portanto, isometrias) preservam o caráter causal de vetores.

Uma métrica pseudo-Riemanniana permite estabelecer uma correspondência entre os campos de vetores e as 1-formas diferenciáveis. Sejam  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $V \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  um campo vetorial. Então existe uma única 1-forma diferenciável  $V^\flat \in \Omega^1(\mathbf{M})$  tal que

$$V^\flat(X) = \langle V, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Da mesma maneira, dada  $\omega \in \Omega^1(\mathbf{M})$  uma 1-forma diferenciável, existe um único campo vetorial  $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  tal que

$$\omega(X) = \langle \omega^\sharp, X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Em relação a coordenadas locais, para  $X = X^i \partial_i$  e  $\omega = \omega_i dx^i$ :

$$X^\flat = \mathbf{g}_{ij} X^i dx^j \quad \text{e} \quad \omega^\sharp = \mathbf{g}^{ij} \omega_j \partial_j.$$

Por conta dos símbolos “b” e “#” chamamos esta correspondência entre campos vetoriais e formas de *isomorfismos musicais*. Um importante exemplo da aplicabilidade deste conceito é o campo gradiente.

**Exemplo 3.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $f \in C^\infty(\mathbf{M})$  uma função diferenciável. A aplicação diferencial de  $f$  pode ser vista como uma 1-forma  $df \in \Omega^1(\mathbf{M})$ , o que nos permite definir o campo gradiente de  $f$  por  $\mathbf{grad} f := (df)^\sharp$ , isto é,  $\mathbf{grad} f$  é o único campo vetorial de  $\mathbf{M}$  para o qual vale*

$$df(X) = \langle \mathbf{grad} f, X \rangle.$$

*Em relação a um sistema de coordenadas locais, como  $df = \partial_i(f)dx^i$ , então*

$$\mathbf{grad} f = \mathbf{g}^{ij} \partial_i(f) dx^j.$$

Uma métrica pseudo-Riemanniana não age apenas em campos de vetores: é possível estender a métrica para fibrados tensoriais da seguinte maneira. Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $T, S$  campos  $(k, l)$ -tensoriais. Então:

$$\mathbf{g}(T, S) = \mathbf{g}_{\alpha_1 \lambda_1} \cdots \mathbf{g}_{\alpha_k \lambda_k} \mathbf{g}^{\beta_1 \mu_1} \cdots \mathbf{g}^{\beta_l \mu_l} T_{\beta_1 \cdots \beta_l}^{\alpha_1 \cdots \alpha_k} S_{\mu_1 \cdots \mu_l}^{\lambda_1 \cdots \lambda_k},$$

de modo que o isomorfismo musical garanta que  $\langle X, Y \rangle = \langle X^\flat, Y^\flat \rangle$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ .

A métrica também nos permite definir o traço de um campo tensorial. Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $T$  um campo  $k$ -tensorial covariante em  $\mathbf{M}$ , então definimos o traço de  $T$  como o campo  $(k-2)$ -tensorial  $\text{tr}_{\mathbf{g}} T$  dado em coordenadas locais por:

$$\text{tr}_{\mathbf{g}} T(X_1, \cdots, X_{k-2}) = \mathbf{g}^{\alpha\beta} T(\partial_\alpha, \partial_\beta, X_1, \cdots, X_{k-2}) \quad \forall X_1, \cdots, X_{k-2} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

## 2.2 Conexões

Utilizando a métrica podemos introduzir uma noção de como derivar um campo de vetores com respeito a outro tal campo, de acordo com o seguinte resultado.

### 2.2.1 Conexão de Levi-Civita

**Teorema 3.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana. Então existe uma única aplicação  $\nabla : \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ , chamada conexão de Levi-Civita, tal que, para quaisquer  $X, V, W \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ :*

(D1)  $\nabla_V W$  é  $C^\infty(\mathbf{M})$ -linear em  $V$ ;

(D2)  $\nabla_V W$  é  $\mathbb{R}$ -linear em  $W$ ;

(D3)  $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$  para toda  $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ ;

(D4)  $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$ ;

(D5)  $X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$ .

Além disso,  $\nabla$  é caracterizada pela Fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_V W, X \rangle &= V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle \\ &\quad - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A Conexão de Levi-Civita é um invariante geométrico da métrica, isto é, é preservada por isometrias, de acordo com a seguinte proposição.

**Proposição 2.** (Naturalidade da conexão de Levi-Civita). Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  e  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$  duas variedades pseudo-Riemannianas, com suas respectivas conexões de Levi-Civita  $\nabla$  e  $\widehat{\nabla}$ . Se  $\Phi : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \rightarrow (\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$  é isometria, então  $\Phi^* \widehat{\nabla} = \nabla$ , ou seja, para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  temos  $d\Phi(\nabla_X Y) = \widehat{\nabla}_{d\Phi(X)} d\Phi(Y)$ .

Apesar de isometrias preservarem a conexão, o mesmo não ocorre quando consideramos aplicações conformes, de acordo com a seguinte proposição, presente na página 58 de [5].

**Proposição 3.** Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-riemanniana e  $f \in C^\infty(\mathbf{M})$  uma função positiva. Considere a métrica conforme  $\widehat{\mathbf{g}} = e^{2f} \mathbf{g}$  em  $\mathbf{M}$ . Então a conexão  $\widehat{\nabla}$  de  $\widehat{\mathbf{g}}$  se relaciona com a conexão  $\nabla$  de  $\mathbf{g}$  através da seguinte fórmula:

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + df(X)Y + df(Y)X - \mathbf{g}(X, Y) \text{grad}_{\mathbf{g}} f.$$

No caso em que  $\Omega = \ln f > 0$  temos:

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Omega^{-1} (d\Omega(X)Y + d\Omega(Y)X - \mathbf{g}(X, Y) \text{grad}_{\mathbf{g}} \Omega). \quad (2.3)$$

Utilizando coordenadas locais, podemos definir os símbolos de Christoffel, os quais determinam a conexão localmente.

**Definição 6.** Seja  $(x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  coordenadas locais em  $\mathcal{U} \subset \mathbf{M}$  aberto de uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Os símbolos de Christoffel para esse sistema de coordenadas são as funções reais  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\mathcal{U})$ , dadas por:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

A Proposição seguinte mostra que a conexão de Levi-Civita se comporta como a derivada direcional em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 4.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  campos de vetores em  $\mathbf{M}$ . Então, para cada  $p \in \mathbf{M}$ ,  $(\nabla_X Y)(p)$  depende apenas do valor de  $X_p$  e de  $Y_\gamma$ , onde  $\gamma$  é uma curva de  $\mathbf{M}$  que passa por  $p$  com velocidade  $Y_p$ .*

Por conta da proposição anterior, se  $v \in T_p \mathbf{M}$ , e  $\gamma$  é uma curva tal que  $\gamma'(0) \in T_p \mathbf{M}$ , então fica bem definida a derivada  $\nabla_v \gamma'$ .

A Conexão de Levi-Civita pode ser estendida para fibrados tensoriais mais gerais do que o fibrado tangente.

**Proposição 5.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana e  $T$  um campo  $(0, k)$ -tensorial em  $\mathbf{M}$ . Então*

$$\begin{aligned} (\nabla T)(X, Y_1, \dots, Y_k) &= (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_k) \\ &= X(T(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_{j=1}^k T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_j, \dots, Y_k), \end{aligned} \quad (2.4)$$

define um campo  $(0, k+1)$ -tensorial  $\nabla T$  em  $\mathbf{M}$ . Além disso,  $\nabla$  satisfaz as seguintes propriedades:

(1) *para funções (sendo vista como campos 0-tensoriais) coincide com a diferencial:*

$$\nabla_X f = df(X) = \langle \mathbf{grad} f, X \rangle;$$

(2)  $\nabla$  *obedece a regra*

$$\nabla_X (T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S);$$

(3)  $\nabla$  *comuta com o traço*

$$\nabla_X (\text{tr}_{\mathbf{g}} T) = \text{tr}_{\mathbf{g}} (\nabla_X T).$$

Por conta do item (i) da proposição anterior é comum denotar o gradiente de  $f$  por  $\nabla f$ .

Utilizando a conexão de Levi-Civita para fibrados tensoriais, podemos definir alguns operadores adicionais.

**Definição 7.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  um campo vetorial e  $T$  um campo  $k$ -tensorial. Definimos os divergentes de  $X$  e de  $T$ , respectivamente, por*

$$\begin{aligned} \mathbf{div} X &= \text{tr}_{\mathbf{g}} (\nabla X), \\ \mathbf{div} T(X_1, \dots, X_{k-1}) &= \text{tr}_{\mathbf{g}} (\nabla T)(\cdot, \cdot, X_1, \dots, X_{k-1}). \end{aligned}$$

Para um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ , em coordenadas locais, vale

$$\mathbf{div} X = \mathbf{g}^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} X, \partial_j \rangle.$$

**Proposição 6.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana. Considere  $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  e  $T$  um campo  $(0,2)$ -tensorial em  $\mathbf{M}$ . Então*

$$(1) \quad \mathbf{div}(fX) = f \cdot \mathbf{div} X + df(X);$$

$$(2) \quad \mathbf{div}(fT)(X) = T(\mathbf{grad} f, X) + f(\mathbf{div} T)(X).$$

Considere, para um campo tensorial  $T$  em uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ , o operador  $\nabla^2 T = \nabla(\nabla T)$ . Para funções diferenciáveis em  $\mathbf{M}$  (vistas como campos 0-tensoriais) este operador possui bastante importância.

**Definição 8.** *(Hessiana). Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $f \in C^\infty(\mathbf{M})$  uma função diferenciável. Definimos a segunda derivada covariante de  $f$ , também chamada de hessiana, por*

$$(\nabla^2 f)(X, Y) = (\nabla df)(X, Y) = X(Yf) - \nabla_X Y(f).$$

Note que  $\nabla^2 f$  é um campo 2-tensorial simétrico e que vale a igualdade  $(\nabla^2 f)(X, Y) = \langle \nabla_X(\mathbf{grad} f), Y \rangle$ . Além disso, para um sistema de coordenadas locais vale

$$(\nabla^2 f)(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

Definindo o operador  $(\text{tr}_{\mathbf{g}} \nabla^2) : C^\infty(\mathbf{M}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{M})$  vale  $(\text{tr}_{\mathbf{g}} \nabla^2) f = \mathbf{div}(\mathbf{grad} f)$  e, portanto, para coordenadas locais escrevemos:

$$(\text{tr}_{\mathbf{g}} \nabla^2) f = \mathbf{g}^{ij} (\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f).$$

Para o caso de  $(M, g)$  ser Riemanniana, denotamos o operador  $\text{tr}_g \nabla^2$  por  $\Delta$  e denominamos *laplaciano*.

A Proposição 6 garante uma boa forma de calcular o laplaciano do produto de duas funções: sejam  $f, h \in C^\infty(M^n)$  duas funções suaves em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ . Então vale a relação:

$$\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta g + 2 \langle \mathbf{grad} f, \mathbf{grad} h \rangle. \quad (2.5)$$

Passemos agora ao conceito de forma volume.

**Proposição 7.** *Seja  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana orientada. Então existe uma única  $n$ -forma  $d\mathcal{V}_{\mathbf{g}} \in \Omega^n(\mathbf{M})$ , denominada forma volume pseudo-Riemanniana, caracterizada pelo fato de que, para qualquer co-referencial ortonormal orientado  $\{\phi^1, \dots, \phi^n\}$*



vale

$$d\mathcal{V}_{\mathbf{g}} = (-1)^s \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^n. \quad (2.6)$$

Equivalentemente poderíamos definir a forma volume apenas exigindo que, para qualquer referencial ortonormal orientado  $\{E_1, \dots, E_n\}$  vale  $d\mathcal{V}_{\mathbf{g}}(E_1, \dots, E_n) = (-1)^s$ , ou exigindo que, em coordenadas locais temos  $d\mathcal{V}_{\mathbf{g}} = \sqrt{|\det(\mathbf{g}_{\alpha\beta})|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ .

Não entraremos em detalhes extras sobre integração em variedades, porém, enunciaremos, pela sua importância em um resultado posterior, o Teorema da Divergência, o qual segue diretamente do Teorema de Stokes.

**Teorema 4.** (*Teorema da Divergência*). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana orientada e com fronteira. Seja  $N$  o campo normal unitário de  $\partial M$  que aponta para fora e  $g$  a métrica induzida em  $\partial M^n$ . Então, para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  cujo suporte é compacto, temos que*

$$\int_{M^n} (\operatorname{div} X) d\mathcal{V}_g = \int_{\partial M^n} g(X, N) d\mathcal{V}_g. \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Derivada de Lie

A Derivada Covariante não é a única derivação na álgebra dos campos vetoriais ou tensoriais. Existe também o conceito de Derivada de Lie que aparecerá durante o trabalho.

**Definição 9.** *Sejam  $\mathbf{M}$  uma variedade diferenciável,  $X, V \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  campos de vetores e  $p \in \mathbf{M}$  um ponto. Considere  $\phi$  o fluxo local de  $X$ . Então definimos a Derivada de Lie de  $V$  com respeito a  $X$  por*

$$(\mathcal{L}_X V)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)}(V_{\phi_t(p)}) - V_p}{t} \quad (2.8)$$

O limite em (2.8) existe para todo  $p \in \mathbf{M}$  e, portanto,  $\mathcal{L}_X V$  define um campo de vetores diferenciável. Naturalmente é possível estender esta definição para campos  $(0, k)$ -tensoriais, através da expressão

$$(\mathcal{L}_X T)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t)_p^*(T_{\phi_t(p)}) - T_p}{t}, \quad (2.9)$$

cujo limite também existe para todo  $p \in \mathbf{M}$ , sendo, portanto,  $\mathcal{L}_X T$  um campo  $(0, k)$ -tensorial de  $\mathbf{M}$ .

Para campos vetoriais existe uma boa caracterização da derivada de Lie.

**Proposição 8.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  campos vetoriais em  $\mathbf{M}$ . Então vale:*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Apesar da Derivada de Lie não depender da métrica  $\mathbf{g}$ , mas apenas da estrutura diferenciável de  $\mathbf{M}$ , esta proposição permite relacionar a conexão de Levi-Civita com a derivada de Lie, obtendo:  $\mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ .

### 2.2.3 Geodésicas

Através da conexão de Levi-Civita, a métrica nos permite definir as geodésicas de uma variedade pseudo-Riemanniana. As geodésicas são curvas de aceleração nula, o que nos permite atribuir algumas interpretações físicas a elas (por exemplo, localmente, minimizam energia).

**Definição 10.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{M}$  uma curva diferenciável. Considere o campo vetorial  $\gamma'$ , então dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica se vale  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$  ao longo de  $\gamma$ .*

Para coordenadas locais a relação  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$  determina que,  $\gamma$  é geodésica de  $\mathbf{M}$  se, e somente se, suas funções coordenadas  $x^k \circ \gamma$  satisfazem a equação das geodésicas dada por

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0.$$

Por meio da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, a equação das geodésicas garante a existência local desses objetos.

**Proposição 9.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana,  $p \in \mathbf{M}$  um ponto e  $v \in T_p \mathbf{M}$  um vetor tangente, então existe uma única geodésica  $\gamma_{p,v}$  de  $\mathbf{M}$  que passa por  $p$  com velocidade  $v$  cujo intervalo de definição de  $\gamma_{p,v}$  é maximal.*

A geodésica dada pela Proposição 9 é chamada de geodésica (maximal) de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  que passa por  $p$  com velocidade  $v$ . Com esta notação em mente, vale o Lema de Reescalamento.

**Lema 1.** *(Lema de Reescalamento). Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana. Então, para quaisquer  $p \in \mathbf{M}$ ,  $v \in T_p \mathbf{M}$  e  $c, s \in \mathbb{R}$  vale*

$$\gamma_{p,cv}(t) = \gamma_{p,v}(ct),$$

*sempre que ambos os lados da igualdade estão definidos.*

Este lema permite a seguinte construção: sejam  $p \in \mathbf{M}$  e  $v \in T_p \mathbf{M}$  em uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Então existe um número real  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma_{p,v}$  está definida em um intervalo aberto  $I$  que contém  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Graças ao Lema de Reescalamento temos que  $\gamma_{p, \frac{2v}{\varepsilon}}$  está definida em um intervalo aberto que contém  $(-2, 2)$ , o que nos permite concluir que o conjunto

$$\mathfrak{D} := \{(p, v) \in T\mathbf{M}; \gamma_{p,v} \text{ está definida em um intervalo que contém } [0, 1]\}$$

é não vazio.

Pela unicidade da geodésica maximal, temos que a *aplicação exponencial* dada por

$$\exp : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbf{M}, \quad \exp(p, v) = \gamma_{p,v}(1)$$

está bem definida. Podemos considerar, também, a aplicação exponencial restrita a  $p$ :

$$\exp_p := \exp|_{(\mathfrak{D} \cap T_p \mathbf{M})}.$$

Note que, até o momento, todas as questões envolvendo geodésicas aqui discutidas são de natureza local. Uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  cujas geodésicas possuem  $\mathbb{R}$  como intervalo maximal é dita *geodesicamente completa*.

Finalmente, podemos utilizar a aplicação exponencial para construir as coordenadas normais na vizinhança de um ponto, que são bastante úteis para facilitar cálculos envolvendo objetos tensoriais que dependem da métrica.

**Proposição 10.** (*Coordenadas normais*). *Sejam  $(\mathbf{M}^{s+r}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana de assinatura  $(s, r)$  e um ponto  $p \in \mathbf{M}$ . Então existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  em  $\mathbf{M}$ , chamada vizinhança normal, na qual existem coordenadas  $x^1, \dots, x^{s+r}$  em  $\mathcal{U}$  tais que*

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta}(p) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta)(p) = 0,$$

onde  $\varepsilon_\alpha = -1$  se  $1 \leq \alpha \leq s$  e  $\varepsilon_\alpha = 1$  se  $s+1 \leq \alpha \leq s+r$ .

## 2.3 Curvaturas

A conexão de Levi-Civita permite introduzir uma noção de curvatura em uma variedade pseudo-Riemanniana.

**Definição 11.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana. Definimos o Tensor de Curvatura de  $\mathbf{M}$  em relação à métrica  $\mathbf{g}$  como a aplicação  $\mathbf{R}_\mathbf{g} : \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  dada por:*

$$\mathbf{R}_\mathbf{g}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (2.10)$$

Note que podemos pensar  $\mathbf{R}_\mathbf{g}(X, Y)Z$  como um campo  $(1, 3)$ -tensorial, o que justifica a nomenclatura utilizada. Com este tensor definimos a curvatura de Riemann.

**Definição 12.** (*Curvatura de Riemann*). *Seja  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana. Definimos o Tensor de Curvatura de Riemann como*

$$\mathbf{Rm}_\mathbf{g}(X, Y, Z, W) := \langle \mathbf{R}_\mathbf{g}(X, Y)Z, W \rangle. \quad (2.11)$$

Existem algumas propriedades de simetrias da curvatura bastante importantes

**Proposição 11.** (*Simetrias do tensor de Riemann*). O tensor de curvatura de Riemann obedece às seguintes regras:

$$(1) \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, W) = -\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(Y, X, Z, W) = \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, W, Z);$$

$$(2) \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, W) = \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(Z, W, X, Y);$$

(3) (*Primeira identidade de Bianchi*)

$$\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, W) + \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(Z, X, Y, W) + \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(Y, Z, X, W) = 0; \quad (2.12)$$

(4) (*Segunda identidade de Bianchi*)

$$(\nabla \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}})(X, Y, Z, V, W) + (\nabla \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}})(Z, W, Y, V, W) + (\nabla \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}})(Y, Z, X, V, W) = 0. \quad (2.13)$$

Para que o tensor de Riemann expresse uma boa noção da curvatura de uma variedade precisamos que ele seja um invariante geométrico (isto é, seja invariante por isometrias). Conseguimos ver isso ao escrevê-lo em coordenadas locais. Seja  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}$  seu tensor de curvatura de Riemann. Considere coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$ . Definimos as funções  $\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda}^{\mu}$  e  $\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}$  por:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\partial_{\alpha}, \partial_{\beta})\partial_{\lambda} = \mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda}^{\mu}\partial_{\mu},$$

e

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} = \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_{\alpha}, \partial_{\beta}, \partial_{\lambda}, \partial_{\mu}),$$

valendo a relação

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} = \mathbf{g}_{\lambda\mu}\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda}^{\mu}.$$

Com isso, note que podemos escrever  $\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda}^{\mu}$  em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\lambda}^{\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\lambda}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu}\Gamma_{\beta\nu}^{\mu}.$$

Disso segue que a curvatura é invariante por isometria, visto que os Símbolos de Christoffel o são, ou seja, vale a proposição:

**Proposição 12.** (*Naturalidade da curvatura*). Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  e  $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{g}})$  variedades pseudo-Riemannianas e  $\Phi : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \rightarrow (\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{g}})$  uma isometria local. Então:

$$\Phi^*\mathbf{Rm}_{\widetilde{\mathbf{g}}} = \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}.$$

**Exemplo 4.** Considere os espaços euclidiano  $n$ -dimensional  $(\mathbb{R}^n, \delta)$  e o de Minkowski  $(\mathbb{R}^{n+1}, \eta)$ . Para ambos os casos segue do Exemplo 2 que  $\mathbf{Rm}_{\delta} = 0$  e  $\mathbf{Rm}_{\eta} = 0$ .

Isto motiva o seguinte teorema, que demonstra que o Tensor de Riemann traz, de fato, uma noção boa de curvatura, pois, heurísticamente, compara o quanto que a geometria de uma variedade pseudo-Riemanniana difere localmente da geometria de um espaço pseudo-euclidiano de mesma assinatura.

**Teorema 5.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana. Então  $\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}} = 0$  se, e somente se,  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  é localmente isométrica ao espaço pseudo-euclidiano de mesma assinatura que  $\mathbf{g}$ .*

Também definimos as noções de curvatura de Ricci e curvatura escalar, que dependem da curvatura de Riemann.

**Definição 13.** *(Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar) Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana. Definimos o tensor de Ricci de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  por*

$$\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(X, Y) = \text{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\cdot, X, Y, \cdot),$$

e a curvatura escalar de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  por

$$\mathbf{R}_{\mathbf{g}} = \text{tr}_{\mathbf{g}} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}.$$

Note que, como o Tensor de Ricci é um campo  $(0,2)$ -tensorial, então a curvatura escalar é uma função suave de  $\mathbf{M}$ . A seguinte proposição relaciona estas duas noções de curvatura e terá importância técnica em resultados posteriores.

**Proposição 13.** *Para uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  vale a relação:*

$$\text{div}(\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}) = \frac{d\mathbf{R}_{\mathbf{g}}}{2}. \quad (2.14)$$

Durante a prova do Teorema 1 será necessário uma expressão para a curvatura escalar após uma transformação conforme. Por isso enunciaremos a seguinte proposição, presente na página 59 de [5].

**Proposição 14.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $f \in C^\infty(M^n)$  uma função. Considere a métrica Riemanniana dada por  $\hat{g} = e^{2f}g$  em  $M^n$ . Considere  $R$  a curvatura escalar de  $(M^n, g)$  e  $\hat{R}$  a curvatura escalar de  $(M^n, \hat{g})$ . Então vale a relação:*

$$\hat{R} = e^{-2f} (R - 2(n-1)\Delta_g f - (n-1)(n-2)|\nabla f|_g^2);$$

**Observação 4.** *Há uma diferença de sinal na fórmula anterior em relação à apresentada em [5]. Isso ocorre pois nesta referência o laplaciano é definido como  $-\text{tr}\nabla^2$ , enquanto que aqui utilizamos  $\Delta = \text{tr}\nabla^2$ .*

Existe uma única função  $\Omega$  positiva tal que  $e^f = \Omega$ . Então, para a nossa abordagem das transformações conformes, fazemos  $\Omega = \ln f$  de modo a obter a seguinte fórmula para a relação entre as curvaturas:

$$\widehat{R} = \Omega^{-2} \left( R - 2(n-1) \frac{\Delta_g \Omega}{\Omega} + (n-1)(4-n) \frac{|\nabla \Omega|_g^2}{\Omega^2} \right). \quad (2.15)$$

## 2.4 Hipersuperfícies pseudo-Riemannianas

Nesta subsecção discutimos o conceito de hipersuperfícies e algumas propriedades das hipersuperfícies totalmente umbílicas, que serão importantes na definição de esfera de fótons.

Sejam  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $\mathbf{M} \subset \widehat{\mathbf{M}}$  uma subvariedade. Considere a inclusão  $j : \mathbf{M} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$ . Então definimos a métrica induzida por  $\widehat{\mathbf{g}}$  em  $\mathbf{M}$  como  $\mathbf{g} = j^* \widehat{\mathbf{g}}$ , isto é, para todo  $p \in \mathbf{M}$  e todos  $u, v \in T_p \mathbf{M}$  temos

$$\mathbf{g}_p(u, v) = \widehat{\mathbf{g}}_{j(p)}((dj)_p(u), (dj)_p(v)).$$

Vamos supor que a métrica  $\mathbf{g}$  é também pseudo-Riemanniana<sup>1</sup>, ou seja, que é não-degenerada e possui índice constante. Neste caso dizemos que  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  é uma subvariedade pseudo-Riemanniana de  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$ . Então, para cada ponto  $p \in \mathbf{M} \subset \widehat{\mathbf{M}}$  é possível a decomposição

$$T_p \widehat{\mathbf{M}} = T_p \mathbf{M} \oplus (T_p \mathbf{M})^\perp.$$

Com isso definimos o fibrado normal da imersão  $j$  dado por

$$T^\perp \mathbf{M} = \coprod_{p \in \mathbf{M}} (T_p \mathbf{M})^\perp,$$

com projeção  $\pi : T^\perp \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  dada por  $\pi(p, v) = p$ .

Denotamos as conexões de Levi-Civita de  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$  e  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  respectivamente por  $\widehat{\nabla}$  e  $\nabla$ . Podemos definir a segunda forma fundamental de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  em  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$  como o campo 2-tensorial de  $\mathbf{M}$  dado por:

$$\text{II}(X, Y) = \widehat{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ .

A segunda forma fundamental pode ser vista como a curvatura “extrínseca” da subvariedade  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  em  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$ , visto que ela depende de como que a subvariedade é imersa no espaço (no caso, depende da inclusão  $j$ ). É possível relacionar os tensores de curvaturas de Riemann de uma variedade com uma subvariedade. Considerando métricas induzidas,

<sup>1</sup>Este passo é importante pois existem subvariedades que não são pseudo-Riemannianas.

eventualmente utilizaremos a notação de produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sem especificar se a métrica utilizada é a da subvariedade ou do espaço ambiente. Neste caso os vetores em que são aplicados eliminam qualquer ambiguidade.

**Proposição 15.** (*Equações de Gauss e Codazzi*). *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma subvariedade pseudo-Riemanniana da variedade pseudo-Riemanniana  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$ . Considere  $\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}$  tensor de Riemann de  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{Rm}_{\widehat{\mathbf{g}}}$  tensor de Riemann de  $\widehat{\mathbf{M}}$ . Então, para todos  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  e  $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$  valem:*

(i) *Equação de Gauss:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Rm}_{\widehat{\mathbf{g}}}(X, Y, Z, W) &= \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, W) + \langle \mathbf{II}(X, Z), \mathbf{II}(Y, W) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{II}(Y, Z), \mathbf{II}(X, W) \rangle; \end{aligned} \quad (2.16)$$

(ii) *Equação de Codazzi:*

$$\mathbf{Rm}_{\widehat{\mathbf{g}}}(X, Y, Z, \xi) = \langle (\nabla_X^\perp \mathbf{II})(Y, Z), \xi \rangle - \langle (\nabla_Y^\perp \mathbf{II})(X, Z), \xi \rangle, \quad (2.17)$$

onde

$$(\nabla_X^\perp \mathbf{II})(Y, Z) = \widehat{\nabla}_X(\mathbf{II}(Y, Z)) - \mathbf{II}(\nabla_X Y, Z) - \mathbf{II}(Y, \nabla_X Z).$$

Se vale  $\mathbf{II} \equiv 0$  dizemos que  $\mathbf{M}$  é totalmente geodésica, nome que vem da seguinte caracterização geométrica:  $\mathbf{M}$  é totalmente geodésica se, e somente se, toda geodésica de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  é também uma geodésica de  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$ .

Sejam  $(\widehat{\mathbf{M}}, \widehat{\mathbf{g}})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $\mathbf{M}$  uma subvariedade. O número  $\dim \widehat{\mathbf{M}} - \dim \mathbf{M}$  é denominado codimensão de  $\mathbf{M}$ . O caso de codimensão 1 é o que mais nos interessa, pois estabelece uma generalização do conceito de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 14.** *Uma hipersuperfície  $\Sigma$  em uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  é uma subvariedade pseudo-Riemanniana de codimensão 1.*

Vamos considerar um caso especial: sejam  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  uma variedade de Lorentz e  $(\Sigma^n, \sigma)$  uma hipersuperfície de  $\mathbf{M}$ , onde  $\sigma$  é a métrica induzida em  $\Sigma^n$  por  $\mathbf{g}$ . Como  $\sigma$  é não-degenerada e  $\mathbf{g}$  é uma métrica de Lorentz, há duas opções: ou  $\sigma$  é Riemanniana ou  $\sigma$  também é de Lorentz. Neste caso cabe uma nomenclatura especial, em analogia à utilizada para vetores.

**Definição 15.** *Seja  $(\Sigma^n, \sigma)$  uma hipersuperfície de uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Então,  $\Sigma^n$  é dita:*

- *do tipo espaço, se  $\sigma$  é Riemanniana;*
- *do tipo tempo, se  $\sigma$  é de Lorentz.*

Além disso, vale a seguinte caracterização:

**Proposição 16.**

- (1)  $\Sigma^n$  é do tipo espaço se, e somente se, todo vetor normal a  $\Sigma^n$  é do tipo tempo;
- (2)  $\Sigma^n$  é do tipo tempo se, e somente se, todo vetor normal a  $\Sigma^n$  é do tipo espaço.

Caso  $\sigma$  seja degenerada, isto é, exista  $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  não nulo tal que  $\sigma(V, X) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , dizemos que  $\Sigma$  é uma *hipersuperfície do tipo luz*. Durante o restante do texto, a menos que dito o contrário, estaremos considerando hipersuperfícies para as quais  $\sigma$  é não-degenerada.

A segunda forma fundamental possui uma caracterização importante para hipersuperfícies. Sejam  $(\Sigma^n, \sigma)$  uma hipersuperfície de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ , variedade pseudo-Riemanniana. Então, para cada  $p \in \Sigma$ , o complemento ortonormal do espaço tangente,  $(T_p\Sigma)^\perp$  é um subespaço de dimensão 1 de  $T_p\mathbf{M}$ .

Com isso em mente, assumindo que o fibrado normal de  $\Sigma^n$  é trivial, podemos tomar um campo normal unitário  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  globalmente definido em  $\Sigma^n$ . Então escrevemos

$$\text{II}(X, Y) = -K(X, Y)N,$$

onde  $K(X, Y)$  é um campo 2-tensorial em  $\Sigma^n$ , chamado de *tensor de forma* ou também de *segunda forma fundamental* de  $\Sigma^n$ .

Podemos escrever

$$K(X, Y) = -\langle \widehat{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle \widehat{\nabla}_X N, Y \rangle,$$

onde  $\widehat{\nabla}$  denota a conexão de Levi-Civita de  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ .

Finalmente introduzimos o conceito de curvatura média.

**Definição 16.** (*Curvatura média*). Seja  $(\Sigma^n, \sigma)$  hipersuperfície da variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Definimos o vetor curvatura média de  $\Sigma^n$  por  $\vec{H} = \text{tr}_\sigma \text{II}$  e a curvatura média de  $\Sigma$  por  $H = \text{tr}_\sigma K$ .

Note que o vetor curvatura média e a curvatura média se relacionam, pois, em coordenadas locais, vale:

$$\vec{H} = \text{tr}_\sigma \text{II} = \sigma^{\alpha\beta} \text{II}(\partial_\alpha, \partial_\beta) = -\sigma^{\alpha\beta} K(\partial_\alpha, \partial_\beta)N = -(\text{tr}_\sigma K)N = -HN.$$

### 2.4.1 Hipersuperfícies totalmente umbílicas

**Definição 17.** Seja  $(\Sigma^n, \sigma)$  hipersuperfície de uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Dizemos que  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica se existe uma função  $\lambda \in C^\infty(\Sigma^n)$  tal que

$$\text{II}(X, Y) = \lambda \cdot \sigma(X, Y)N, \tag{2.18}$$



onde  $N$  é uma escolha de normal unitário global em  $\Sigma^n$ .

É possível relacionar a função  $\lambda$  em (2.18) com a curvatura média. Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície totalmente umbílica da variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  e seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal local em  $\Sigma^n$ , onde escrevemos  $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$ . Então

$$H = \text{tr}_g K = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \lambda \langle E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda = n\lambda. \quad (2.19)$$

**Proposição 17.** *Seja  $\Sigma^n$  hipersuperfície de  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$ , variedade pseudo-Riemanniana. Suponha  $\Sigma^n$  é do tipo espaço ou do tipo tempo. Então, são equivalentes:*

- (i)  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica;
- (ii) para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , com  $\langle X, Y \rangle = 0$ , vale  $K(X, Y) = 0$ , onde  $K$  é o tensor de forma de  $\Sigma^n$ .

*Demonstração.* Primeiramente provaremos (i)  $\Rightarrow$  (ii). Suponha que (i) é válida e sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  tais que  $\langle X, Y \rangle = 0$ . Por hipótese segue que

$$K(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle = 0.$$

Agora suponha que (ii) é válida. Seja  $p \in \Sigma^n$  e considere  $v, w \in T_p \Sigma^n$  tais que  $|v| = |w| = 1$ . Então temos  $\langle v + w, v - w \rangle = 0$ , ou seja, de (ii) vale

$$0 = K_p(v + w, v - w) = K_p(v, v) - K_p(w, w).$$

Portanto  $K_p(v, v) = \lambda(p)$ , para todo  $v \in T_p \Sigma^n$  com  $|v| = 1$ , ou seja, pela propriedade tensorial de  $K$  e da métrica temos que  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica.  $\square$

Segue diretamente da proposição anterior que aplicações conformes preservam hipersuperfícies totalmente umbílicas.

**Corolário 2.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana e  $\Omega \in C^\infty(\mathbf{M})$  uma função positiva. Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície totalmente umbílica não-degenerada em  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ . Então  $\Sigma$  é totalmente umbílica em  $(\mathbf{M}, \Omega^2 \mathbf{g})$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  tais que  $\Omega^2 \mathbf{g}(X, Y) = 0$ . Como  $\Omega > 0$  então  $\mathbf{g}(X, Y) = 0$ . Pela proposição anterior temos que  $K_{\mathbf{g}}(X, Y) = 0$ , onde  $K_{\mathbf{g}}$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  com relação a  $\mathbf{g}$  e com respeito ao normal unitário  $N$ . Denotamos por  $K_\Omega$  a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  com relação à métrica  $\Omega^2 \mathbf{g}$  e ao normal  $N$  e denotamos por  $\widehat{\nabla}$  e  $\nabla$  as conexões de Levi-Civita com respeito a  $\widehat{\mathbf{g}}$  e a  $\mathbf{g}$ , respectivamente.

Lembrando que as conexão de duas métricas conformes se relacionam através da fórmula (2.3), e portanto

$$\begin{aligned} K_\Omega(X, Y) &= \widehat{\mathbf{g}}\left(\widehat{\nabla}_X Y, N\right) = \Omega^2 \mathbf{g}\left(\nabla_X Y + \Omega^{-1} d\Omega(X)Y + \Omega^{-1} d\Omega(Y)X, N\right) \\ &= \Omega^2 K_{\mathbf{g}}(X, Y) + \Omega d\Omega(X)\mathbf{g}(Y, N) + \Omega d\Omega(Y)\mathbf{g}(X, N) = 0. \end{aligned}$$

Logo  $\Sigma$  é totalmente umbílica em  $(\mathbf{M}, \Omega^2 \mathbf{g})$ .  $\square$

A próxima proposição é uma aplicação direta de (2.16) ao caso das hipersuperfícies totalmente umbílicas. Porém, pela sua importância técnica em resultados posteriores, estará enunciada e demonstrada como uma proposição.

**Proposição 18.** *(Traço da Equação de Gauss). Sejam uma variedade pseudo-Riemanniana  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  e uma hipersuperfície totalmente umbílica  $(\Sigma^n, \sigma)$ . Suponha que  $\Sigma^n$  é do tipo espaço ou do tipo tempo. Seja  $\nu$  um campo normal unitário à  $\Sigma^n$  e  $\varepsilon_{n+1} = \langle \nu, \nu \rangle$ . Então*

$$\mathbf{R} - 2\mathbf{Ric}(\nu, \nu) = \mathbf{R} - \frac{n-1}{n} H^2 \varepsilon_{n+1}, \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Ric}$  são, respectivamente, as curvaturas escalar e de Ricci de  $\mathbf{M}^{n+1}$ , e  $\mathbf{R}$  e  $H$  são, respectivamente, a curvaturas escalar e média de  $\Sigma^n$ .

*Demonstração.* Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  referencial ortonormal local de  $\Sigma^n$  e  $E_{n+1} = \nu$  campo normal unitário. Então temos que  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  é um referencial ortonormal local de  $\mathbf{M}^{n+1}$ , onde  $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle = 1$  ou  $-1$ , a depender do caráter causal de  $\Sigma^n$ .

Aplicando uma vez o traço a (2.16) com respeito a  $\Sigma^n$  obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{Rm}(X, E_i, E_i, W) &= \mathbf{Ric}(X, W) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \mathbf{II}(X, E_i), \mathbf{II}(E_i, W) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \mathbf{II}(E_i, E_i), \mathbf{II}(X, W) \rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{Ric}$  é a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$ .

Somando  $\varepsilon_{n+1} \mathbf{Rm}(X, \nu, \nu, W)$  a ambos os lados de (2.21), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric}(X, W) &= \mathbf{Ric}(X, W) + \varepsilon_{n+1} \mathbf{Rm}(X, \nu, \nu, W) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \mathbf{II}(X, E_i), \mathbf{II}(E_i, W) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \mathbf{II}(E_i, E_i), \mathbf{II}(X, W) \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Novamente, aplicando o traço aos dois lados de (2.22), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{Ric}(E_i, E_i) &= \mathbf{R} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_{n+1} \mathbf{R}_m(E_i, \nu, \nu, E_i) + \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \Pi(E_j, E_i), \Pi(E_i, E_j) \rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \Pi(E_i, E_i), \Pi(E_j, E_j) \rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Somamos  $\varepsilon_{n+1} \mathbf{Ric}(\nu, \nu)$  a ambos os lados de (2.23), obtendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R} + 2\varepsilon_{n+1} \mathbf{Ric}(\nu, \nu) + \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \Pi(E_j, E_i), \Pi(E_i, E_j) \rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \Pi(E_i, E_i), \Pi(E_j, E_j) \rangle. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica, então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\Pi(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle \nu$ . Isso nos permite reescrever os termos que dependem da segunda forma fundamental em (2.24), pois:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \Pi(E_j, E_i), \Pi(E_i, E_j) \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \lambda \langle E_j, E_i \rangle \nu, \lambda \langle E_j, E_i \rangle \nu \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \lambda \delta_{ij} \varepsilon_i \nu, \lambda \delta_{ji} \varepsilon_i \nu \rangle \\ &= n\lambda^2 \varepsilon_{n+1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \Pi(E_i, E_i), \Pi(E_j, E_j) \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \lambda \langle E_i, E_i \rangle \nu, \lambda \langle E_j, E_j \rangle \nu \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \lambda \varepsilon_i \nu, \lambda \varepsilon_j \nu \rangle \\ &= n^2 \lambda^2 \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Com todas estas relações, e utilizando (2.19), podemos reescrever (2.24) como

$$\mathbf{R} - 2\varepsilon_{n+1} \mathbf{Ric}(\nu, \nu) = \mathbf{R} + n\lambda^2 \varepsilon_{n+1} - n^2 \lambda^2 \varepsilon_{n+1} = \mathbf{R} - \frac{n-1}{n} H^2 \varepsilon_{n+1}.$$

□

## 2.5 Princípios do máximo

Nesta seção discutimos algumas versões do Princípio do Máximo, que serão ferramentas bastante úteis em demonstrações posteriores. Para a primeira versão (Teorema 6) utilizamos [51] como referência, e suas demonstrações podem ser encontradas na Seção 5.2 desta referência. Para a versão geométrica (Teorema 7) utilizamos como referência [17].

Inicialmente consideramos uma variedade Riemanniana  $(M^n, \mathbf{g})$  e um subconjunto compacto e conexo  $\Omega \subset M^n$  com bordo  $\partial\Omega$  não vazio. Nesta variedade estabelecemos princípios do máximo para operadores diferenciais de segunda ordem, isto é, um operador  $L : C^2(M^n) \rightarrow C^0(M^n)$  tal que todo ponto  $p \in M^n$  admite uma vizinhança coordenada  $\mathcal{U}$  onde  $L$  assume a forma

$$L = a^{ij} \partial_i \partial_j + b^i \partial_i,$$

com  $a^{ij}, b^i \in C^\infty(\mathcal{U})$ .

Se a matriz  $(a^{ij})_{n \times n}$  é positiva definida em todo ponto de  $\mathcal{U}$  dizemos que o operador é localmente elíptico. Se para cada  $x_0 \in \Omega$  existirem uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  em  $\Omega$  e duas constantes positivas  $\lambda_{x_0}$  e  $\Lambda_{x_0}$  tais que

$$\lambda_{x_0} |\xi|^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda_{x_0} |\xi|^2,$$

para todo  $x \in \mathcal{U}$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $L$  é localmente uniformemente elíptico.

Neste contexto apresentamos o resultado seguinte, conhecido como *Princípio do Máximo* para operadores elípticos. Sua demonstração está presente na Seção 5.2 de [51].

**Teorema 6.** *Seja  $f \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  com  $Lf \geq 0$ . Então, ou  $f$  é constante, ou  $f(x) < \sup_{y \in \partial\Omega} f(y)$  para todo  $x \in \Omega$ .*

Podemos utilizar esta versão analítica do princípio do máximo para estabelecer uma versão geométrica que nos permitirá comparar hipersuperfícies em uma variedade Riemanniana. Sejam uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  e duas hipersuperfícies imersas  $\Sigma_i^{n-1}$  de  $M^n$ ,  $i = 1, 2$ . Vamos supor que exista  $p \in \text{int}(\Sigma_1^{n-1}) \cap \text{int}(\Sigma_2^{n-1})$  tal que  $T_p \Sigma_1^{n-1} = T_p \Sigma_2^{n-1} = P$ . Consideramos  $\varepsilon > 0$  pequeno tal que  $\exp_p|_{B_\varepsilon(0)}$  seja um difeomorfismo sobre sua imagem e definimos o conjunto  $S := \exp_p(B_\varepsilon(0) \cap P)$ . Podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que a aplicação  $W : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$  dada por  $W(x, t) = \exp_p(tN(x))$ , onde  $N$  é o campo normal unitário a  $S$ , é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $p$  em  $M^n$ . Nestas coordenadas a métrica  $W^*g$  pode ser escrita como  $\sigma_t + dt^2$ , onde  $\{\sigma_t\}$  é uma família de métricas suaves em  $S$ , com  $\sigma_0$  igual a métrica induzida de  $M^n$  em  $S$ . Nestas coordenadas podemos interpretar uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma_i^{n-1}$  como um gráfico  $\text{graph}\{(x, u_i(x)); x \in \mathcal{U}\}$ .

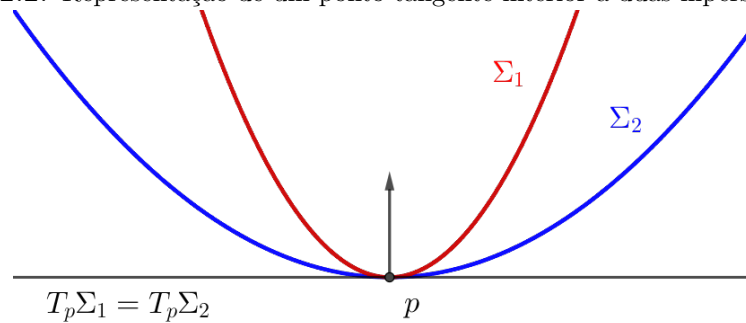
No contexto do parágrafo anterior, consideremos duas hipersuperfícies  $\Sigma_i^{n-1}$  cujos normais unitários coincidem em  $p$ . Então dizemos que  $p$  é ponto tangente interior a  $\Sigma_1^{n-1}$  e

$\Sigma_2^{n-1}$ . Se interpretarmos cada hipersuperfície como um gráfico em uma vizinhança de  $p$ , isto é,  $\Sigma_i^{n-1} = \text{graph}(u_i)$ , então cada  $u_i$  está definido em um mesmo plano tangente. Isso nos permite analisar a função diferença  $\omega = u_1 - u_2$ . Dizemos que  $\Sigma_1^{n-1}$  está acima (respect. abaixo) se  $u_1 \geq u_2$  (respect.  $u_1 \leq u_2$ ). Na vizinhança de  $p$  onde as hipersuperfícies são escritas como gráficos temos que as curvaturas médias satisfazem

$$H_1 - H_2 = L(u_1 - u_2),$$

onde  $L$  é um operador uniformemente elíptico. Então é possível aplicar o princípio do máximo neste contexto, estabelecendo o *princípio do máximo geométrico*.

Figura 2.2: Representação de um ponto tangente interior a duas hipersuperfícies.



Fonte: elaborada pelo autor.

**Teorema 7.** (*Princípio do máximo geométrico*) Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Sigma_i^{n-1} \subset M^n$ ,  $i = 1, 2$  duas hipersuperfícies imersas. Suponha que  $\Sigma_1^{n-1}$  e  $\Sigma_2^{n-1}$  são tangentes no ponto interior  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  e que os campos normais unitários coincidam em  $p$ . Se  $\Sigma_1^{n-1}$  está acima de  $\Sigma_2^{n-1}$  em uma vizinhança de  $p$  então  $H_1(p) \geq H_2(p)$ . Além disso, sob as mesmas hipóteses, se  $H_1 \leq H_2$  em uma vizinhança de  $p$ , então  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ .

## 2.6 Relatividade geral

O grande “palco” onde acontece a relatividade geral são os espaços-tempo.

**Definição 18.** (*Espaço-tempo*) Um espaço-tempo é uma variedade lorentziana  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  com  $n \geq 2$ , onde  $\mathbf{M}^{n+1}$  é uma variedade diferenciável conexa.

**Definição 19.** Sejam  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo e  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{M}^{n+1}$  uma curva diferenciável.

- (1) Dizemos que  $\gamma$  é uma partícula material se  $\mathbf{g}(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau)) = -1, \forall \tau \in I$ . Além disso, a partícula é dita livre se  $\gamma$  é uma geodésica.
- (2) Dizemos que  $\gamma$  é uma partícula de luz se  $\gamma$  é uma geodésica e  $\mathbf{g}(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau)) = 0, \forall \tau \in I$ .

## 2.6.1 Causalidade

O estudo da relatividade também envolve modelar situações em que certos eventos influenciam outros eventos. Em um espaço-tempo modelamos esta relação de “causa e efeito” através da atuação de curvas causais.

**Definição 20.** *Sejam  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo e  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{M}$  uma curva diferenciável por partes. Considere  $\mathcal{S}$  o conjunto onde  $\gamma$  não é diferenciável. Então dizemos que  $\gamma$ :*

- *é uma curva causal se  $\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s)) \leq 0$ , para todo  $s \in I \setminus \mathcal{S}$ ;*
- *é do tipo tempo se  $\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s)) < 0$ , para todo  $s \in I \setminus \mathcal{S}$ ;*
- *é do tipo luz se  $\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 0$ , para todo  $s \in I \setminus \mathcal{S}$ .*

Vamos agora introduzir a noção de orientação no tempo.

**Definição 21.** *(Orientação no tempo). Dizemos que um espaço-tempo  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  admite uma orientação no tempo se existe um campo de vetores do tipo tempo  $X$  globalmente definido. Neste caso dizemos que um vetor causal  $v \in T_p\mathbf{M}$  aponta para o futuro (respectivamente passado) se  $\langle X_p, v \rangle \leq 0$  (respectivamente  $\langle X_p, v \rangle \geq 0$ ). Fazendo uma escolha de um campo  $X$  que define uma orientação no tempo, dizemos que o espaço-tempo  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  está orientado no tempo por  $X$ .*

Em um espaço-tempo orientado no tempo, podemos classificar as curvas causais conforme esta orientação. Assim, dizemos que uma curva causal  $\gamma$  está direcionada para o futuro (ou passado) se  $\gamma'$  é um campo que aponta para o futuro (ou passado). Com isso podemos definir os futuros cronológico e causal de um subconjunto do espaço-tempo.

**Definição 22.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo e  $S \subset \mathbf{M}$ . Então definimos:*

- *o futuro cronológico de  $S$  por*

$$I^+(S) = \{q \in \mathbf{M}; \text{ existe } p \in S \text{ tal que existe uma curva do tipo tempo direcionada para o futuro ligando } p \text{ e } q\};$$

- *o futuro causal de  $S$  por*

$$J^+(S) = \{q \in \mathbf{M}; \text{ existe } p \in S \text{ tal que existe uma curva causal direcionada para o futuro ligando } p \text{ e } q\}.$$

Analogamente definimos os passados cronológico e causal de  $S$ , respectivamente,  $I^-(S)$  e  $J^-(S)$ , exigindo que em ambos itens as curvas sejam direcionadas para o passado.

**Proposição 19.** *Sejam  $A \subset B \subset \mathbf{M}$ . Então:*

$$(i) I^+(B) = I^+(J^+(B)) = J^+(I^+(B)) \subset J^+(B);$$

$$(ii) I^\pm(A) \subset I^\pm(B).$$

**Exemplo 5.** (*Causalidade no espaço de Minkowski*). Considere o espaço de Minkowski 3-dimensional,  $(\mathbb{R}^3, \eta)$ , com coordenadas  $(x^0, x^1, x^2)$ . Dado um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  temos que  $T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ . Então, considerando a orientação no tempo dada por  $\partial_t$  e coordenadas tal que a origem está em  $p$ , temos que o futuro e o passado cronológico e causal de  $\{p\}$  são caracterizados pelo cone de luz neste ponto:

$$\begin{aligned} I^+(\{p\}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}, & I^-(\{p\}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}\}, \\ J^+(\{p\}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}, & J^-(\{p\}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -\sqrt{x^2 + y^2}\}, \end{aligned}$$

isto é,  $J^\pm(\{p\})$  é um cone (inferior ou superior em  $\mathbb{R}^3$ ) e cada  $I^\pm(\{p\})$  é a região delimitada por um cone (inferior ou superior). Também, neste caso, a reta gerada pelo vetor  $u$  da Figura 2.1 é um exemplo de curva do tipo tempo direcionada para o futuro, enquanto que a reta gerada pelo vetor  $v$  da Figura 2.1 é um exemplo de curva do tipo luz direcionada para o futuro.

## 2.6.2 A Equação de Einstein

A Relatividade Geral parte do princípio de que a matéria e a energia em um espaço-tempo deformam a geometria do ambiente. Para relacionar a informação geométrica do espaço-tempo com a informação física de matéria e energia é estabelecida uma relação fundamental, a Equação de Einstein.

**Definição 23.** (*Equação de Einstein*). Dizemos que um espaço-tempo  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  satisfaz a Equação de Einstein se existe um campo tensorial  $T$  em  $\mathbf{M}$  tal que:

$$\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{g}}}{2}\mathbf{g} = 8\pi T. \quad (2.25)$$

O termo  $\mathbf{G} = \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{g}}}{2}\mathbf{g}$  é dito *tensor gravitacional de Einstein* e possui a informação sobre a geometria do espaço-tempo, enquanto o tensor  $T$  é chamado de *tensor de energia-momento* e contém as informações físicas. A constante  $8\pi$  é chamada de *constante universal*, e comumente é substituída por uma constante  $\kappa \in \mathbb{R}$  mais geral. Existe um caso mais geral da Equação de Einstein, no qual se adiciona um termo  $\Lambda \mathbf{g}$  ao tensor  $G$ , onde  $\Lambda \in \mathbb{R}$  é uma constante chamada de *constante cosmológica*. Durante todo o trabalho consideramos  $\Lambda = 0$ .

Apesar da equação (2.25) deixar em aberto informações sobre o tensor de energia-momento, que dependem do modelo estudado, segue da Proposição 13 o seguinte resultado.

**Lema 2.** *Suponha que a Equação de Einstein é válida. Então o tensor energia-momento é um campo  $(0,2)$ -tensorial simétrico para o qual  $\operatorname{div} T = 0$ .*

A Relatividade Geral se dedica ao estudo dos espaços-tempo que satisfazem a equação (2.25). Neste sentido a igualdade  $\operatorname{div} T = 0$  tem a interpretação física de estabelecer que, sob certas condições, podemos obter leis de conservação para algumas quantidades (tais como energia e momento).

É comum combinar diferentes tensores de energia-momento, um para cada fonte de matéria ou energia do espaço, permitindo modelar sistemas que sofrem influência de diversos fatores físicos. Durante este trabalho estamos interessados no caso em que há apenas um tensor proveniente do campo eletromagnético. Discutiremos este caso na Seção 3.2.

### 2.6.3 O Teorema da Massa Positiva

A influência gravitacional de objetos massivos é um tema central na Relatividade Geral. Porém, não é claro como estabelecer definições satisfatórias de massa e energia-momento para o campo gravitacional, já que não existe uma densidade de energia-momento pontual bem definida (para mais detalhes veja [50]). Apesar disso, o formalismo ADM nos permite estabelecer uma noção de massa total para sistemas isolados. Nesta subseção discutimos este conceito.

Tratamos aqui do caso onde existe uma hipersuperfície  $M$  do tipo espaço, totalmente geodésica contida no espaço-tempo. Neste caso  $M$  representa um instante de tempo e sua geometria é Riemanniana.

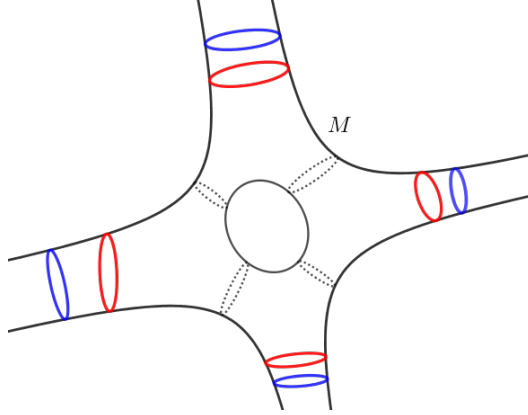
Um sistema isolado traduz a ideia de que a influência gravitacional do objeto diminui com a distância espacial. Isso é coerente com observações acerca da influência gravitacional da matéria, que diminui em função da distância. Do ponto de vista topológico isto envolve o conceito de *fim assintótico*. Primeiramente veremos uma caracterização topológica para este conceito.

Seja  $M$  uma variedade não compacta para qual exista um compacto  $K \subset M$  tal que, para todo compacto  $C \subset M$  que contém  $K$ , temos que  $M \setminus C$  é homeomorfo a  $M \setminus K$  (Figura 2.3). Em particular ambos estes complementares possuem o mesmo número de componentes conexas. Com isso em mente podemos estabelecer a noção de *fim* para  $M$ : cada componente conexa de  $M \setminus C$  é considerada um representante de um fim. Heurísticamente os representantes de fins de uma variedade determinam as diversas maneiras de “ir para o infinito”.

Tendo isso em mente, ao considerar uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , exigimos condições de decaimento na métrica  $g$  para formalizar o conceito de sistema isolado, exigindo que esta métrica se aproxime “no infinito” de alguma outra métrica dada. Por isso nos atemos a uma classe específica de variedades, as assintoticamente euclidianas. Como a nomenclatura indica, são variedades tais que “no infinito” sua geometria se torna



Figura 2.3: Representação de uma variedade com quatro representantes de fim. As elipses vermelhas delimitam um compacto  $K$ , enquanto que as elipses azuis delimitam um compacto  $C$  que contém  $K$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

euclidiana: ou seja, a influência gravitacional diminui a longas distâncias. Podemos assim formalizar a ideia de *sistema gravitacional isolado*.

**Definição 24.** (*Variedade assintoticamente Euclidiana*). Uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , é dita *assintoticamente Euclidiana* se existe um conjunto compacto  $K$  tal que  $M \setminus K$  é a união finita de fins  $M_1, \dots, M_l$  tais que, para cada  $M_k$ , existe um difeomorfismo

$$\Phi_k : M_k \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)},$$

onde  $\overline{B_1(0)}$  é a bola unitária fechada, tal que cada  $\Phi_k$  é vista como um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  (chamado sistema de coordenada assintoticamente plano ou coordenadas exteriores), nas quais:

$$(\Phi_*g)_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}_2(|x|^{-k})$$

para algum  $k > \frac{n-2}{2}$ .

Na Definição anterior, a notação  $\mathcal{O}_2(|x|^{-k})$  significa que existe uma constante  $C > 0$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ , vale

$$|(\Phi_*g)_{ij} - \delta_{ij}| + |x| |D(\Phi_*g)_{ij} - D\delta_{ij}| + |x|^2 |D^2(\Phi_*g)_{ij} - D^2\delta_{ij}| < C|x|^{-k}.$$

Com isso em mente podemos definir a massa ADM de cada fim assintótico.

**Definição 25.** (*Massa ADM*). Seja uma variedade assintoticamente euclidiana  $(M^n, g)$  com fins  $M_1, \dots, M_l$ , definimos a massa ADM do fim  $M_k$  por

$$m_{ADM}(M_k, g) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_\rho} (\overline{\text{div}} g - d(\overline{\text{tr}} g))(\overline{\nu}) \overline{d\mu}_{S_\rho}, \quad (2.26)$$

onde  $\overline{\text{div}}$  e  $\overline{\text{tr}}$  são calculados com respeito à métrica Euclidiana no fim assintótico  $\Phi(M_k)$ ,  $S_\rho$  denota a esfera coordenada de raio  $\rho$  com forma volume  $\overline{d\mu}_\rho$  induzida pela métrica

euclidiana,  $\bar{\nu}$  o vetor normal unitário exterior euclidiano à estas esferas e  $\omega_{n-1}$  o volume da esfera unitária  $(n-1)$ -dimensional.

Assumindo que  $\int_{M_k} |R_g| d\mu_g < +\infty$  pode-se mostrar usando o Teorema da Divergência que o limite acima existe e é finito, logo sob esta hipótese  $m_{\text{ADM}}(M_k, g)$  está bem definida. Além disso, é necessário argumentar que a expressão (2.26) é um invariante geométrico de cada fim assintótico, ou seja, não depende do sistema de coordenadas assintóticas escolhido. Isso foi demonstrado de forma independente por R. Bartnik [4] e Chruściel [11].

A massa ADM foi introduzida por Richard Arnowitt, Stanley Deser and Charles W. Misner [1, 2, 3] através da formulação Hamiltoniana da Relatividade geral. No entanto, a expressão (2.26) possui também uma analogia com a expressão da massa na teoria Newtoniana da gravitação, e pode ser obtida usando a linearização da curvatura escalar, para detalhes veja [28, Capítulo 1].

No seguinte faremos referência a *variedades spin*. Não apresentamos a definição deste conceito devido a grande quantidade de preliminares necessárias, e fazemos apenas alguns comentários. Uma boa referência para este tópico é o livro [27]. A noção de estrutura spin é uma condição topológica que é caracterizada (no caso orientável) por um certo invariante topológico da variedade ser igual a zero. É bem sabido que toda variedade orientável de dimensão 3 é spin, no entanto em dimensão mais alta existem vários exemplos de variedades não spin.

Para que a definição de massa apresentada possua um significado físico é necessário garantir que ela também não seja negativa. Neste sentido temos o seguinte resultado.

**Teorema 8.** (*Teorema da Massa Positiva Riemanniano*). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana completa, assintoticamente euclidiana, com  $R_g \geq 0$ . Suponha que  $3 \leq n \leq 8$  ou que  $M$  é spin. Então a massa ADM de cada fim de  $M$  é não negativa. Além disso, se a massa ADM de algum fim de  $M$  é igual a zero, então  $(M^n, g)$  é isométrica ao espaço euclidiano  $(\mathbb{R}^n, \delta)$*

Este teorema tem uma longa história a qual descrevemos brevemente a seguir. A demonstração original no caso  $n = 3$  é devido a Richard Schoen e Shing-Tung Yau [43], os quais desenvolveram um método de prova por absurdo e cujo passo crucial consistia em perturbar a métrica e construir uma certa superfície mínima na variedade. Algum tempo depois, usando *espinores*, Edward Witten provou o teorema no caso de dimensão qualquer e sob a hipótese da variedade ser spin. No artigo de Witten o argumento geral é apenas delineado, e a prova rigorosa foi estabelecida por Thomas Parker e Clifford Henry Taubes [38].

Em [42, 44], Schoen e Yau estenderam seu método de prova para o caso de dimensão  $n$  sem restrições topológicas. Neste caso a adaptação da prova envolve construir uma hipersuperfície mínima usando *correntes*, logo é necessário assumir que  $4 \leq n \leq 7$ , devido

ao *Teorema de regularidade* estabelecer que correntes minimizantes são suaves apenas fora de um conjunto singular (possivelmente vazio) de dimensão menor do que ou igual a  $n - 8$ . No caso  $n = 8$  a hipersuperfície mínima obtida pode ter singularidades isoladas, no entanto um resultado de Nathan Smale [47] garante que é possível perturbar a métrica e obter uma hipersuperfície suave, e isto é suficiente para utilizar o método.

O Teorema da Massa Positiva no caso de dimensão qualquer e sem a restrição da variedade ser spin, foi anunciado por Schoen e Yau em [46], e independentemente por Joachim Lohkamp em uma série de artigos [31, 32, 33, 34]. Embora as técnicas e abordagens utilizadas sejam bem distintas, em ambos os trabalhos a ideia é usar a técnica de Schoen-Yau e encontrar uma maneira de “escapar” das singularidades da hipersuperfície mínima.

Em [35], foi estabelecido um argumento usando o fluxo de Ricci, o qual vale em qualquer dimensão, que mostra que se o caso de rigidez do teorema da massa positiva é válido em uma certa classe de variedades Riemannianas suaves, então ele também vale para variedades de menor regularidade nessa mesma classe (e o homeomorfismo para o espaço euclidiano é suave no conjunto onde a métrica é suave). Em particular, o trabalho [35] cobre o caso em que a métrica é  $C^{1,1}$  ao longo de uma coleção finita de hipersuperfícies e suave fora dessas. Esta será de fato a versão que utilizamos aqui.

**Observação 5.** *O adjetivo Riemanniano no teorema anterior se deve ao fato que existe uma definição de massa para conjuntos dados iniciais  $(M^n, g, K)$ , onde  $K$  é um campo tensorial do tipo  $(0,2)$  simétrico, o qual faz o papel da segunda forma fundamental dos dados dentro de um espaço tempo. O caso descrito aqui corresponde a  $K = 0$ . Para detalhes do caso geral veja [28, Capítulo 8].*

# Capítulo 3

## Espaços-tempo estáticos

Existe um tipo especial de campo de vetores cujo fluxo estabelece isometrias no espaço-tempo. Estes campos serão úteis nas definições de espaços-tempo estacionário e estático.

**Definição 26.** (*Campo de Killing*). Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  variedade pseudo-Riemanniana. Um campo  $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  é dito campo de Killing se o fluxo local  $\phi_s$  de  $\xi$  age por isometrias de  $\mathbf{g}$ .

Assim, temos que cada aplicação de fluxo  $\phi_s : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{M}$ , com  $\mathcal{U} \subset \mathbf{M}$  uma vizinhança aberta e  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , é uma isometria. Isso nos permitirá obter folheações locais do espaço-tempo, onde as folhas são todas isométricas entre si.

**Definição 27.** (*Espaço-tempo estacionário*). Um espaço-tempo  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  é dito estacionário se possui um campo de Killing  $\xi$ , globalmente definido e do tipo tempo.

O termo estacionário vem em contraste ao termo dinâmico, servindo para descrever e modelar espaços que admitem uma decomposição na qual a parte espacial da métrica não evolui com o tempo. É possível utilizar as curvas integrais de  $\xi$  para obter um sistema de coordenadas locais  $t = x^0, x^1, \dots, x^n$  no qual  $\mathbf{g}$  se escreve como:

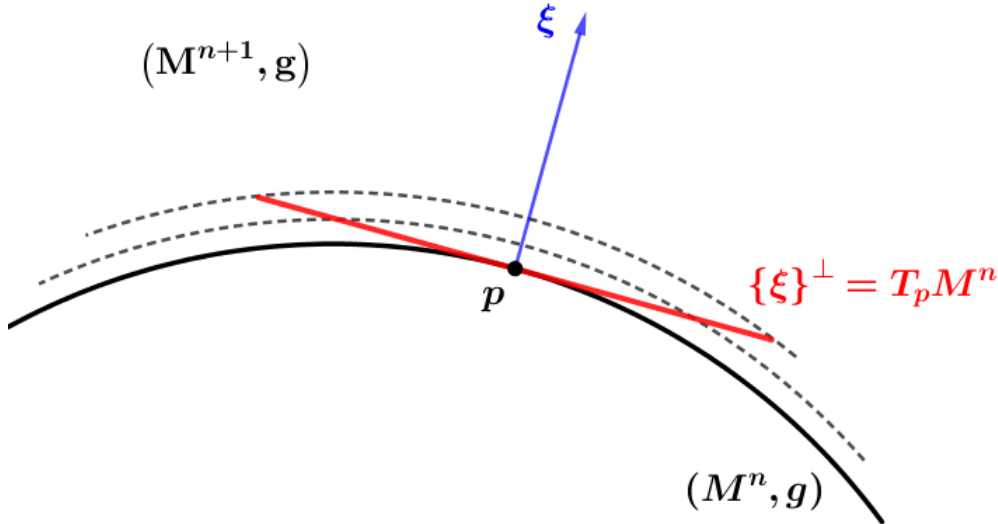
$$\mathbf{g} = -f^2 dt^2 + 2g_{ij}\chi^i dt dx^j + g, \quad (3.1)$$

onde  $g$  é uma métrica Riemanniana,  $f$  é uma função suave em  $\mathbf{M}$  que não depende de  $t$  e é dada por  $f = \mathbf{g}(\xi, \xi)$ , e  $\chi_i$  são funções que não dependem de  $t$ .

Convém questionar: sob quais condições o espaço e o tempo são totalmente independentes em um espaço-tempo estacionário? Dado  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo estacionário, queremos uma condição necessária e suficiente para que  $\mathbf{M}^{n+1}$  seja recoberta por uma família de hipersuperfícies  $M_t^n$  que são isométricas entre si e ortogonais ao campo estacionário  $\xi$ . Em termos da linguagem de distribuições, queremos que, para cada ponto  $p \in \mathbf{M}$  seja possível associar um subespaço  $D_p \subset T_p \mathbf{M}$ , com  $D_p = \{\xi_p\}^\perp$  e que exista uma subvariedade  $M^n \subset \mathbf{M}$  contendo  $p$  para qual  $T_p M = D_p$ . Com isso em mente podemos definir espaço-tempo estático.

**Definição 28.** (*Espaço-tempo estático*). Um espaço-tempo estacionário  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  é dito estático se a distribuição ortogonal de  $\xi$  é integrável.

Figura 3.1: Representação de um espaço-tempo estático.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Destacamos um tipo especial de espaço-tempo estático.

**Definição 29.** (*Espaço-tempo estático padrão*). Seja  $(M^n, g)$  variedade Riemanniana e  $V \in C^\infty(M^n)$  uma função tal que  $V > 0$ . O espaço-tempo dado por  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$  é dito um espaço-tempo estático padrão.

Note que em um espaço-tempo estático padrão, o campo  $\partial_t$  é um campo de Killing global do tipo tempo que é ortogonal às hipersuperfícies  $M_t^n \simeq \{t\} \times M^n$ . Observe ainda que  $\partial_t$  não é o normal unitário às hipersuperfícies  $M_t^n$ , mas sim  $N = V^{-1}\partial_t$ . Este exemplo é bastante importante, pois o Teorema 1 se refere a este tipo de espaço. Além disso, vale a seguinte proposição, garantindo que todo espaço-tempo estático é, localmente, um espaço-tempo estático padrão.

**Proposição 20.** *Sejam  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo estático e  $p \in \mathbf{M}$  um ponto. Considere  $\xi$  o campo de Killing estacionário associado e  $M^n$  a hipersuperfície do tipo espaço que é ortogonal a  $\xi$  e que contém  $p$ . Então existem um intervalo aberto  $I_p \subset \mathbb{R}$ , uma função  $V \in C^\infty(M^n)$ , uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M^n$  e uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  em  $\mathbf{M}$  tais que  $(I_p \times U, -V^2 dt^2 + g)$  é isométrica a  $(\mathcal{U}, \mathbf{g})$ .*

*Demonstração.* Considere  $\phi$  ação do fluxo local de  $\xi$  restrita a  $M^n$ . Então temos que existe um intervalo aberto  $I_p \subset \mathbb{R}$  e uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M^n$  para quais a aplicação  $\phi : I_p \times U \rightarrow \mathbf{M}^{n+1}$  é um difeomorfismo sob uma vizinhança de  $p$  em  $\mathbf{M}^{n+1}$ . Defina

$\mathcal{U} = \phi(I_p \times U)$ . Como  $\xi$  é um campo de Killing, então, para cada  $t \in I_p$  a aplicação  $\phi_t : U \rightarrow \phi_t(U)$  é uma isometria entre  $U$  e  $\{t\} \times U$ . Note também que a função  $V := \mathbf{g}(\xi, \xi)$  não depende de  $t \in I_p$ . Portanto  $(I_p \times U, -V^2 dt^2 + g)$  é isométrica a  $(\mathcal{U}, \mathbf{g})$ .  $\square$

### 3.1 Equações de Einstein estáticas

Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $V \in C^\infty(M)$  tal que  $V > 0$ . Considere o espaço estático padrão associado  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g}) := (\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$ . Vamos supor que  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  satisfaz a Equação de Einstein com constante cosmológica nula. Nosso objetivo é utilizar o fato do espaço-tempo ser estático para reduzir a Equação de Einstein à equações que dependam apenas da geometria de  $(M^n, g)$  e da função  $V$ .

Considere  $M_t^n := \{t\} \times M^n$  a família de hipersuperfícies mergulhadas que folheiam o espaço-tempo (onde todas elas são isométricas a  $M^n$ ). Seja  $\{x^0 = t, x^1, \dots, x^n\}$  um sistema de coordenadas locais em  $\mathbf{M}^{n+1}$ , onde  $\{x^1, \dots, x^n\}$  são coordenadas locais em  $M^n$ . Seguimos a convenção de utilizar letras gregas  $\alpha, \beta$  para índices em  $\{0, \dots, n\}$  e letras romanas  $i, j$  para índices em  $\{1, \dots, n\}$ .

Seja  $N = V^{-1} \partial_t$  o campo normal unitário às hipersuperfícies  $M_t^n$ . Denotamos por  $K_t$  a segunda forma fundamental de  $M_t^n$ , e então

$$\begin{aligned} K_t(\partial_i, \partial_j) &= -\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, N \rangle = -\langle \Gamma_{ij}^\lambda \partial_\lambda, V^{-1} \partial_t \rangle = -\langle \Gamma_{ij}^0 \partial_t, V^{-1} \partial_t \rangle \\ &= -V^{-1} \frac{1}{2} \mathbf{g}^{00} (\partial_i \mathbf{g}_{0j} + \partial_j \mathbf{g}_{0i} - \partial_t \mathbf{g}_{ij}) \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= \frac{1}{2} V^{-1} \partial_t g_{ij} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

pois  $\partial_t \mathbf{g}_{ij} = \partial_t g_{ij} = 0$ .

Isso mostra que hipersuperfícies  $M_t^n$  são totalmente geodésicas em  $\mathbf{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ . Da Equação de Gauss, segue que para todos  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M_t)$  vale:

$$\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, W) = \mathbf{Rm}_g(X, Y, Z, W),$$

igualdade que seguiremos aplicando implicitamente a partir de agora.

Também, da Equação de Codazzi e das simetrias do tensor de Riemann temos:

$$\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_t, X, Y, Z) = \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, \partial_t) = 0.$$

Com isso já podemos escrever

$$G(X, \partial_t) = \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(X, \partial_t) - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{\mathbf{g}} \langle X, \partial_t \rangle = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_\alpha, X, \partial_t, \partial_\beta) = 0. \quad (3.3)$$

Com a fórmula de Koszul (2.2) calculamos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_t} \partial_t &= \mathbf{g}^{\alpha\beta} \langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_\alpha \rangle \partial_\beta = \mathbf{g}^{00} \langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle \partial_t + g^{ij} \langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_i \rangle \partial_j \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{g}^{00} \partial_t \langle \partial_t, \partial_t \rangle - \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \langle \partial_t, \partial_t \rangle \partial_j = -\frac{1}{2} \partial_t V^2 + \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i V^2 \partial_j \\
&= V g^{ij} \partial_i V \partial_j = V \text{grad } V,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i} \partial_t &= \mathbf{g}^{\alpha\beta} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_\alpha \rangle \partial_\beta = \mathbf{g}^{00} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_t \rangle \partial_t + g^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_j \rangle \partial_j \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{g}^{00} \partial_i \langle \partial_t, \partial_t \rangle \partial_t = \frac{1}{2} V^{-2} \partial_i V^2 \partial_t \\
&= V^{-1} \partial_i V \partial_t.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Utilizamos (3.4) e (3.5) para obter

$$\begin{aligned}
\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_i, \partial_t, \partial_t, \partial_j) &= \langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} \partial_t - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial_i} (V \text{grad } V) - \nabla_{\partial_t} (V^{-1} \partial_i V \partial_t), \partial_j \rangle \\
&= \langle \partial_i V \text{grad } V + V \nabla_{\partial_i} \text{grad } V - \partial_t (V^{-1} \partial_i V) \partial_t - V^{-1} \partial_i V \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_j \rangle \\
&= \langle \partial_i V \text{grad } V + V \nabla_{\partial_i} \text{grad } V - \partial_i V \text{grad } V, \partial_j \rangle \\
&= V \langle \nabla_{\partial_i} \text{grad } V, \partial_j \rangle = V (\nabla^2 V) (\partial_i, \partial_j).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Logo, para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M_t^n)$  temos:

$$\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, \partial_t, \partial_t, Y) = V(\nabla^2 V)(X, Y), \tag{3.7}$$

ou seja, aplicando o traço em (3.7)

$$\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\partial_t, \partial_t) = \mathbf{g}^{00} \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_t, \partial_t, \partial_t, \partial_t) + g^{ij} V(\nabla^2 V)(\partial_i, \partial_j) = V \Delta V. \tag{3.8}$$

Com (3.8) podemos reescrever a curvatura escalar referente a  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\mathbf{g}} &= \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\partial_\alpha, \partial_\beta) \\
&= \mathbf{g}^{00} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\partial_t, \partial_t) + \mathbf{g}^{0j} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\partial_t, \partial_j) + \mathbf{g}^{i0} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\partial_i, \partial_t) + \mathbf{g}^{ij} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(\partial_i, \partial_j) \\
&= -V^{-2} V \Delta V + g^{ij} \mathbf{g}^{00} \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_t, \partial_i, \partial_j, \partial_t) + g^{ij} g^{lk} \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(\partial_l, \partial_i, \partial_j, \partial_k) \\
&= -V^{-1} \Delta V - V^{-2} g^{ij} V \nabla^2 V(\partial_i, \partial_j) + \mathbf{R}_g \\
&= -2V^{-1} \Delta V + \mathbf{R}_g.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Unindo (3.8) a (3.9) temos que

$$\begin{aligned} G(\partial_t, \partial_t) &= \mathbf{Ric}_g(\partial_t, \partial_t) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_g \langle \partial_t, \partial_t \rangle = V\Delta V + \frac{1}{2}V^2(-2V^{-1}\Delta V + \mathbf{R}_g) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{R}_g V^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Finalmente de (3.7) e (3.9) vale

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= \mathbf{Ric}_g(X, Y) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_g \langle X, Y \rangle \\ &= \mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{Rm}_g(\partial_\alpha, X, Y, \partial_\beta) - \frac{1}{2}(-2V^{-1}\Delta V + \mathbf{R}_g) \langle X, Y \rangle \\ &= \mathbf{g}^{00}\mathbf{Rm}_g(X, \partial_t, \partial_t, Y) + g^{ij}\mathbf{Rm}_g(X, \partial_i, \partial_j, Y) + V^{-1}\Delta V \langle X, Y \rangle - \frac{\mathbf{R}_g}{2} \langle X, Y \rangle \\ &= -V^{-2}V(\nabla^2 V)(X, Y) + \mathbf{Ric}_g(X, Y) + V^{-1}\Delta V \langle X, Y \rangle - \frac{\mathbf{R}_g}{2} \langle X, Y \rangle \\ &= \mathbf{Ric}_g(X, Y) - \frac{\mathbf{R}_g}{2} \langle X, Y \rangle - V^{-1}(\nabla^2 V)(X, Y) + V^{-1}\Delta V \langle X, Y \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vamos supor que  $\mathcal{L}_{\partial_t}T = 0$ , isto é, que o tensor de energia-momento é estático em relação a  $\partial_t$ . Usando (3.10), (3.3) e (3.11), obtemos:

$$\mathbf{R}_g = 16\pi T(N, N), \quad (3.12)$$

$$T(X, \partial_t) = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Ric}_g - V^{-1}\nabla^2 V + \left(V^{-1}\Delta V - \frac{\mathbf{R}_g}{2}\right)g = 8\pi\Upsilon, \quad (3.14)$$

onde  $\Upsilon$  é um campo (0,2)-tensorial em  $M_t^n$  dado por  $\Upsilon(X, Y) = T(X, Y)$ , chamado de *campo de estresse*. É comum também se referir ao termo  $T(N, N)$  como sendo *densidade de energia*.

Aplicando o traço à Equação de Einstein obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_g \left( \mathbf{Ric}_g - \frac{\mathbf{R}_g}{2}g \right) &= 8\pi \operatorname{tr}_g T \\ \iff \mathbf{R}_g - \frac{1}{2}\mathbf{R}_g \operatorname{tr}_g g &= 8\pi (\mathbf{g}^{00}T(\partial_t, \partial_t) + \operatorname{tr}_g \Upsilon) \\ \iff (2 - n - 1)\mathbf{R}_g &= 16\pi (-V^{-2}T(\partial_t, \partial_t) + \operatorname{tr}_g \Upsilon) \\ \iff -2V^{-1}\Delta V + \mathbf{R}_g &= \frac{16\pi}{1 - n} (-T(N, N) + \operatorname{tr}_g \Upsilon) \\ \iff V^{-1}\Delta V &= \frac{8\pi}{n - 1} (-T(N, N) + \operatorname{tr}_g \Upsilon) + \frac{\mathbf{R}_g}{2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$



Unindo (3.12) a (3.15) obtemos:

$$\begin{aligned}
V^{-1}\Delta V &= \frac{8\pi}{n-1}(-T(N, N) + \text{tr}_g \Upsilon) + 8\pi T(N, N) \\
&= 8\pi \left( -\frac{T(N, N)}{(n-1)} + \frac{\text{tr}_g \Upsilon}{(n-1)} + T(N, N) \right) \\
&= 8\pi \left( \frac{n-2}{n-1} T(N, N) + \frac{1}{n-1} \text{tr}_g \Upsilon \right) \\
&= 4\pi \left( c_n^2 T(N, N) + \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \Upsilon \right),
\end{aligned}$$

onde  $c_n = \sqrt{2\frac{n-2}{n-1}}$ .

Também, unindo (3.14) a (3.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_g - V^{-1}\nabla^2 V &= 8\pi \Upsilon - \left( V^{-1}\Delta V - \frac{\text{R}_g}{2} \right) g \\
&= 8\pi \Upsilon - \left( \frac{8\pi}{n-1} (-T(N, N) + \text{tr}_g \Upsilon) \right) g \\
&= 4\pi \left( 2\Upsilon + \frac{2}{n-1} (T(N, N) - \text{tr}_g \Upsilon) g \right).
\end{aligned}$$

Com isso obtemos as *equações de Einstein Estáticas*:

$$V^{-1}\Delta V = 4\pi \left( c_n^2 T(N, N) + \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \Upsilon \right), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_g - V^{-1}\nabla^2 V &= 4\pi \left( 2\Upsilon + \frac{2}{n-1} (T(N, N) - \text{tr}_g \Upsilon) g \right), \quad (3.17) \\
T(X, \partial_t) &= 0.
\end{aligned}$$

## 3.2 Sistemas eletrostáticos

Antes de discutir o conceito de sistema eletrostático, precisamos discutir algumas questões referentes ao eletromagnetismo em um espaço-tempo estático padrão. Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $V \in C^\infty(M^n)$  uma função com  $V > 0$ . Consideramos o espaço estático padrão associado  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g}) = (\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$ . Para apresentar as equações de Maxwell precisamos primeiramente introduzir o operador estrela de Hodge. Para isso consideramos  $\Omega^k(\mathbf{M})$  o conjunto das  $k$ -formas diferenciais de  $\mathbf{M}$ .

**Definição 30.** *Seja  $(\mathbf{M}^{s+r}, \mathbf{g})$  uma variedade pseudo-Riemanniana de assinatura  $(s, r)$ . O operador estrela de Hodge é um isomorfismo  $C^\infty(\mathbf{M})$ -linear  $\star : \Omega^k(\mathbf{M}) \rightarrow \Omega^{n-k}(\mathbf{M})$*

definido através da métrica pela expressão:

$$\omega \wedge \star \varphi = \langle \omega, \varphi \rangle_{\mathbf{g}} d\mathcal{V}_{\mathbf{g}} \quad \forall \varphi \in \Omega^{s+r-k}(\mathbf{M}). \quad (3.18)$$

Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial local em  $\mathbf{M}^n$  e  $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^n\}$  o correferencial dual associado. Então, segue da definição acima, que

$$\star \vartheta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_k} = (-1)^l \varepsilon \vartheta^{\alpha_{k+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{\alpha_n},$$

onde

- $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$  é uma permutação de  $(1, \dots, r+s)$ ;
- $\varepsilon$  é igual a 1 (respect.  $-1$ ) se a permutação é par (respect. ímpar);
- $l$  é a quantidade índices  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , tais que  $1 \leq \alpha_i \leq s$ .

Também, na notação da Definição 30, definimos o operador  $d^* : \Omega^k(\mathbf{M}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\mathbf{M})$ , denominado *codiferencial* de  $d$ , onde  $d$  é a diferencial exterior:

$$d^* \omega = -(-1)^{n(k+1)+s} \star d \star \omega.$$

Existe uma relação bastante útil entre a codiferencial e o divergente. Para  $\omega \in \Omega^k(\mathbf{M})$  vale a fórmula

$$\mathbf{div} \omega = -d^* \omega. \quad (3.19)$$

Com isso em mente, retornando ao caso em que o espaço-tempo é um espaço estático padrão, dada uma 2-forma diferenciável  $F \in \Omega^2(\mathbb{R} \times M^n)$ , dizemos que  $F$  satisfaz as equações de Maxwell se

$$dF = 0, \quad d^* F = j, \quad (3.20)$$

para algum  $j \in \Omega^1(\mathbf{M})$ , que pode ser interpretado como uma densidade de corrente elétrica. Chamamos  $F$  de *tensor de Faraday* ou *tensor eletromagnético*. Associamos à  $F$  o *tensor de energia-momento eletromagnético*, dado por

$$T_{EM} = \frac{1}{4\pi} \left( F \odot F - \frac{1}{4} \langle F, F \rangle_{\mathbf{g}} \right), \quad (3.21)$$

de acordo com [52], onde  $(F \odot F)(X, Y) = \text{tr}_{\mathbf{g}} [F(\cdot, X) \otimes F(\cdot, Y)]$ .

Se o espaço-tempo satisfaz a Equação de Einstein,  $G = 8\pi T_{EM}$ , e o tensor de Faraday satisfaz as Equações de Maxwell sem fontes, ou seja, (3.20) com  $j = 0$ , dizemos que o espaço-tempo é uma solução de *eletrovácuo* das equações de Einstein-Maxwell. A este tipo de espaço que vamos nos ater a partir de agora.

Vamos supor também que o tensor de Faraday é estático em relação a  $\partial_t$ , garantindo que o tensor de energia-momento  $T_{EM}$  seja estático em relação a  $\partial_t$ . Logo,  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$

satisfazem as equações de Einstein estáticas deduzidas na seção anterior. Agora utilizamos o que sabemos do tensor  $T_{EM}$  para reescrever estas equações.

Podemos realizar a seguinte decomposição:

$$F = \mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B}, \quad (3.22)$$

onde  $\mathcal{E} \in \Omega^1(\mathbb{R} \times M^n)$  se relaciona com a noção física de *campo elétrico*,  $\mathcal{B} \in \Omega^2(\mathbb{R} \times M^n)$  se relaciona com a noção física de *campo magnético*, e vale que  $\mathcal{E}(\partial_t) = 0$  e  $\mathcal{B}(\partial_t, \cdot) = 0$ . Além disso, como  $F$  é estático temos que  $\mathcal{L}_{\partial_t}\mathcal{E} = \mathcal{L}_{\partial_t}\mathcal{B} = 0$ , ou seja,  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  podem ser vistas como formas em  $M^n$ .

Fixe um ponto  $p \in M$  e seja  $\{x^1, \dots, x^n\}$  um sistema de coordenadas normais em torno de  $p$  em  $M^n$ . Também consideramos  $N = V^{-1}\partial_t$  o campo normal unitário a  $M^n$ , compondo assim um referencial local para  $\mathbf{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times M^n$ , o qual é ortonormal em  $p$ . Seguiremos a convenção de utilizar letras gregas  $\alpha, \beta$  para índices que variam em  $\{0, \dots, n\}$  e letras romanas  $i, j$  para índices que variam em  $\{1, \dots, n\}$ . Em relação a este referencial, considerando a decomposição  $F = \mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B}$ , temos:

$$F_{\alpha\alpha} = 0, \quad F_{i0} = -F_{0i} = \mathcal{E}_i, \quad F_{ij} = \mathcal{B}_{ij}.$$

No seguinte temos cálculos que são realizados no ponto  $p$ . Segue que

$$\begin{aligned} \langle F, F \rangle_{\mathbf{g}} &= \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{g}^{\lambda\mu} F_{\alpha\lambda} F_{\beta\mu} \\ &= \mathbf{g}^{00} \mathbf{g}^{00} F_{00} F_{00} + \mathbf{g}^{00} \mathbf{g}^{kl} F_{0k} F_{0l} + \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}^{00} F_{i0} F_{j0} + \mathbf{g}^{ij} \mathbf{g}^{kl} F_{ik} F_{jl} \\ &= 2\mathbf{g}^{00} g^{ij} F_{0i} F_{0j} + g^{ij} g^{kl} \mathcal{B}_{ik} \mathcal{B}_{jl} \\ &= -2|\mathcal{E}|_g^2 + |\mathcal{B}|_g^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizamos este fato para computar  $T_{EM}(N, N)$ ,  $\Upsilon$  e  $\text{tr}_g \Upsilon$ . Primeiramente:

$$\begin{aligned} T_{EM}(N, N) &= \frac{1}{4\pi} \left( (F \odot F)(N, N) - \frac{1}{4} \langle F, F \rangle_{\mathbf{g}} \mathbf{g}(N, N) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{g}^{\alpha\beta} F(N, \partial_\alpha) F(N, \partial_\beta) + \frac{1}{4} (-2|\mathcal{E}|_g^2 + |\mathcal{B}|_g^2) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{g}^{\alpha\beta} F_{0\alpha} F_{0\beta} - \frac{1}{2} |\mathcal{E}|_g^2 + \frac{1}{4} |\mathcal{B}|_g^2 \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left( |\mathcal{E}|_g^2 + \frac{1}{2} |\mathcal{B}|_g^2 \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
(F \odot F)_{ij} &= \text{tr}_g [F(\cdot, \partial_i) \otimes F(\cdot, \partial_j)] = \mathbf{g}^{\alpha\beta} F(\partial_\alpha, \partial_i) F(\partial_\beta, \partial_j) \\
&= \mathbf{g}^{00} F(N, \partial_i) F(N, \partial_j) + g^{kl} F(\partial_k, \partial_i) F(\partial_l, \partial_j) \\
&= -\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j + g^{kl} \mathcal{B}_{ki} \mathcal{B}_{lj} \\
&= -(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})_{ij} + (\mathcal{B} \odot \mathcal{B})_{ij}, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

e daí

$$\Upsilon = \frac{1}{4\pi} \left( -(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) + (\mathcal{B} \odot \mathcal{B}) + \frac{1}{2} (|\mathcal{E}|_g^2 - |\mathcal{B}|_g^2) g \right). \tag{3.26}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\text{tr}_g \Upsilon &= \frac{1}{4\pi} \left( -|\mathcal{E}|_g^2 + |\mathcal{B}|_g^2 + \frac{n}{2} (|\mathcal{E}|_g^2 - |\mathcal{B}|_g^2) \right) \\
&= \frac{(n-2)}{8\pi} (|\mathcal{E}|_g^2 - |\mathcal{B}|_g^2). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Com isso podemos reescrever (3.16) e (3.17):

$$\begin{aligned}
V^{-1} \Delta V &= 4\pi \left( c_n^2 T(N, N) + \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \Upsilon \right) \\
&= 4\pi \left[ \frac{c_n^2}{8\pi} \left( |\mathcal{E}|_g^2 + \frac{1}{2} |\mathcal{B}|_g^2 \right) + \frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-2}{8\pi} (|\mathcal{E}|_g^2 - |\mathcal{B}|_g^2) \right] \\
&= \frac{c_n^2}{2} \left( 2|\mathcal{E}|_g^2 - \frac{1}{2} |\mathcal{B}|_g^2 \right), \tag{3.28}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_g - V^{-1} \nabla^2 V &= 4\pi \left( 2\Upsilon + \frac{2}{n-1} (T(N, N) - \text{tr}_g \Upsilon) g \right) \\
&= 2(-\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} + \mathcal{B} \odot \mathcal{B}) + \frac{2}{n-1} |\mathcal{E}|_g^2 - \frac{1}{2(n-2)} |\mathcal{B}|_g^2. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Lembrando que como  $F$  satisfaz as equações de Maxwell, com  $j = 0$ , temos que  $dF = 0$  e  $d^*F = 0$ . Da primeira equação segue que  $d(\mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B}) = d\mathcal{E} \wedge dt + d\mathcal{B} = 0$ . Como  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  não dependem de  $t$  então necessariamente vale  $d\mathcal{E} = 0$  e  $d\mathcal{B} = 0$ . Da segunda equação temos que  $d^*F = d^*(\mathcal{E} \wedge dt) + d^*\mathcal{B} = 0$ . Lembrando que  $\mathcal{B}$  não possui termos  $dt$ , fazendo com que  $d^*\mathcal{B}$  também não tenha. Da mesma forma  $d^*(\mathcal{E} \wedge dt)$  possui termos  $dt$ . Portanto a equação  $d^*F = 0$  se escreve como  $d^*\mathcal{E} = 0$  e  $d^*\mathcal{B} = 0$ .

Para prosseguir vamos supor que o campo magnético é nulo e que o campo elétrico vem de um potencial, isto é,  $\mathcal{B} = 0$  e que existe uma função  $\Psi \in C^\infty(M^n)$  tal que  $\mathcal{E} = d\Psi$ , denominada *potencial elétrico*. Com isso as equações que envolvem a diferencial e a codiferencial de  $\mathcal{B}$  tornam-se supérfluas. Também, temos que  $d\mathcal{E} = d(d\Psi) = d^2\Psi = 0$ . Quanto a  $d^*\mathcal{E} = d^*(d\Psi) = 0$  segue de 3.19 que  $\text{div}(d\Psi) = 0$ . Usando o isomorfismo

musical podemos reescrever esta equação como  $\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}\Psi}{V}\right) = 0$ .

Além disso, também podemos reescrever (3.28) e (3.29), respectivamente, como:

$$\begin{aligned} V^{-1}\Delta V &= c_n^2 |d\Psi|_g^2, \\ \operatorname{Ric}_g - V^{-1}\nabla^2 V &= -2(d\Psi \otimes d\Psi) + \frac{2}{n-1} |d\Psi|_g^2. \end{aligned}$$

Com isso obtemos equações que nos permitem expressar a ideia de sistema eletrostático, isto é, expressar uma solução estática das equações de Einstein-Maxwell através da geometria de uma variedade Riemanniana.

**Definição 31.** (*Sistema eletrostático*). *Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $V, \Psi \in C^\infty(M^n)$  funções em  $M^n$  com  $V > 0$ . Dizemos que  $(M^n, g, V, \Psi)$  é um sistema eletrostático se as seguintes equações são satisfeitas:*

$$\Delta V = \frac{c_n^2}{V} |d\Psi|_g^2, \quad (3.30)$$

$$0 = \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}\Psi}{V}\right), \quad (3.31)$$

$$V\operatorname{Ric} = \nabla^2 V - 2\frac{d\Psi \otimes d\Psi}{V} + \frac{2}{(n-1)V} |d\Psi|_g^2 g. \quad (3.32)$$

Aplicando o traço em (3.32) e substituindo em (3.30) obtemos a equação

$$V^2 R = 2 |d\Psi|_g^2. \quad (3.33)$$

Isto motiva a seguinte definição, um pouco mais fraca que a anterior.

**Definição 32.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema para o qual vale (3.30), (3.31) e (3.33), mas não necessariamente (3.32). Então  $(M^n, g, V, \Psi)$  é dito um sistema eletrostático tracejado.*

### 3.3 Espaço-tempo de Reissner-Nordström

Os espaços-tempo de Reissner-Nordström constituem a principal família de exemplos de sistemas eletrostáticos. Considere constantes  $m > 0$  e  $q \in \mathbb{R}$ , a serem denominadas, respectivamente, massa e carga<sup>1</sup>. Vamos supor adicionalmente que  $m^2 > q^2$ , hipótese motivada por razões físicas a serem exploradas na Seção 4.2.1. Então, o espaço-tempo de Reissner-Nordström  $(n+1)$ -dimensional subextremo de massa  $m$  e carga  $q$  é dado pela

---

<sup>1</sup>Apesar de nos referirmos a estes parâmetros como sendo massa e carga, em termos físicos tratam-se na verdade de parâmetros radiais que se relacionam com a massa e a carga do objeto. Porém, como assumimos unidades de medidas geométricas para as quais a constante gravitacional e a velocidade da luz são unitárias,  $G = c = 1$ , podemos denotar, por abuso de notação, estes parâmetros diretamente como massa  $m$  e carga elétrica  $q$ .

variedade de Lorentz

$$\left( \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R^n(0)}, \mathbf{g}_{m,q} \right)$$

onde  $R = \left( m + \sqrt{m^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}$  e

$$\mathbf{g}_{m,q} = - \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 \Omega_{n-1}, \quad (3.34)$$

sendo  $\Omega_{n-1}$  a métrica canônica da esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Neste caso, o espaço-tempo de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  é um sistema eletrostático com lapso  $V_{m,q}$  e potencial elétrico  $\Psi_q$  dados respectivamente por

$$V_{m,q} := \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{1/2}. \quad (3.35)$$

e

$$\Psi_q := \frac{q}{c_n r^{n-2}}. \quad (3.36)$$

Como o espaço-tempo de Reissner-Nordström é um espaço estático padrão, podemos considerar separadamente sua parte espacial e temporal. Neste caso considere as folhas espaciais canônicas do espaço anterior com a métrica induzida, isto é, a variedade Riemanniana  $\left( \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R^n(0)}, g_{m,q} \right)$  onde  $g_{m,q} = V^{-2} dr^2 + r^2 \Omega_{n-1}$ , denominada *variedade de Reissner-Nordström*. É possível realizar uma mudança na coordenada radial de forma que a métrica  $g_{m,q}$  se torne conforme à métrica Euclidiana. De fato, considere uma coordenada  $s$  definida através da igualdade:

$$r = s \cdot \varphi_{m,q}(s)^{\frac{1}{n-2}}, \quad (3.37)$$

onde

$$\varphi_{m,q}(s) = \left( 1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}} \right) \left( 1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}} \right) \quad (3.38)$$

A partir de (3.38) é possível mostrar que:

$$g_{m,q} = \varphi_{m,q}^{\frac{2}{n-2}} \delta, \quad (3.39)$$

onde  $\delta$  é a métrica euclidiana. Note que, através da expansão do fator conforme, a expressão (3.39) garante que a métrica  $g_{m,q}$  é assintoticamente Euclidiana.

Essa nova coordenada introduz o que chamamos de coordenadas isotrópicas. Também

nos permite reescrever o lapso e o potencial:

$$V_{m,q}(s) = \frac{\left(1 - \frac{m^2 - q^2}{4s^{2(n-2)}}\right)}{\left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}}\right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}}\right)} \quad (3.40)$$

$$\Psi_q(s) = \frac{q}{c_n s^{n-2} \varphi_{m,q}(s)^{n-2}} = \frac{q}{c_n s^{n-2} \left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}}\right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}}\right)} \quad (3.41)$$

Com isso podemos reescrever  $\varphi_{m,q}$  em função do lapso e do potencial:

$$\varphi_{m,q} = \left( \frac{(V_{m,q} + 1)^2 - c_n \Psi_q}{4} \right)^{-1}. \quad (3.42)$$

Nas coordenadas em que definimos  $g_{m,q}$  a variedade de Reissner-Nordström fica definida apenas no exterior de uma bola. Porém usando coordenadas isotrópicas podemos estender a métrica de modo que fique definida em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Esta extensão motiva o processo de duplicação da variedade realizado durante a prova do Teorema 1, processo que será detalhado na Seção 5.3. Além disso, esta mudança de coordenadas será bastante útil para discutir propriedades assintóticas em sistemas eletrostáticos, pois apesar de distorcer distâncias, aplicações conformes preservam características que serão importantes durante a prova do Teorema 1.

# Capítulo 4

## Buracos negros estacionários e esferas de fótons

Neste capítulo apresentamos a definição de buraco negro estacionário, partindo da referência [10], e estabelecemos propriedades que nos permitem caracterizar o horizonte dos buracos negros estáticos a partir apenas da função de lapso. Também introduzimos o conceito de esfera de fótons, para as quais estabeleceremos propriedades quase-locais para o caso eletrostático, conforme [24].

### 4.1 Buracos negros estacionários

Para tratar buracos negros como sistemas isolados precisamos considerar a noção de fim assintótico em espaços-tempo. Porém, se tratando de espaços-tempo estacionários, a decomposição existente entre espaço e tempo pode ser utilizada para considerar fins assintóticos apenas com respeito à parte espacial. Para isso exigimos a existência de uma hipersuperfície do tipo espaço com propriedades análogas às exigidas na Definição 24. Definimos assim o conceito de *fim assintoticamente plano* para um espaço-tempo.

**Definição 33.** (*Fim assintoticamente plano*). Dizemos que um espaço-tempo  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  possui um fim assintoticamente plano se  $\mathbf{M}$  contém uma hipersuperfície do tipo espaço  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  difeomorfa a  $\mathbb{R}^n \setminus B_R^n(0)$ , com as seguintes propriedades: existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que, em coordenadas de  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  obtidas de  $\mathbb{R}^n \setminus B_R^n(0)$ , a métrica  $g$  induzida por  $\mathbf{g}$  em  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  e a segunda forma fundamental  $K$  de  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  satisfazem as seguintes condições de decaimento, para algum  $k > 1$ ,

$$g_{ij} - \delta_{ij} = \mathcal{O}_k(|x|^{-\alpha}), \quad (4.1)$$

$$K_{ij} = \mathcal{O}_k(|x|^{-1-\alpha}), \quad (4.2)$$



onde escrevemos  $f = \mathcal{O}_k(|x|^\alpha)$  se existe uma constante  $C > 0$  tal que  $f$  satisfaz

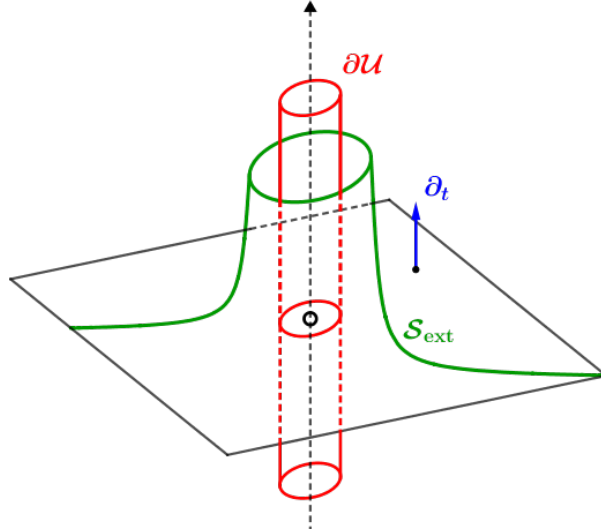
$$\sum_{l=0}^k |x|^l |D^{(l)} f(x)| \leq C \cdot |x|^{-\alpha},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R^n(0)$ .

Uma hipersuperfície que satisfaz as propriedades da definição anterior é chamada de um *representante do fim assintótico*. Observe que um fim tem vários representantes distintos, no entanto todos estão contidos em uma mesma hipersuperfície de  $\mathbf{M}$ .

Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo admitindo um campo de Killing completo e globalmente definido  $\xi$ , e que contém um fim assintoticamente plano. Suponha adicionalmente que existe uma região  $\mathcal{U} \subset \mathbf{M}$ , a qual contém um representante  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  de fim assintoticamente plano e tal que  $\xi$  é do tipo tempo em  $\mathcal{U}$ . Então  $\mathcal{U}$  é uma região estacionária (Figura 4.1). Para  $t \in \mathbb{R}$ , seja  $\phi_t : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  um difeomorfismo proveniente do fluxo de  $\xi$ . Então definimos a região exterior por  $\mathbf{M}_{\text{ext}} := \cup_t \phi_t(\mathcal{S}_{\text{ext}})$ .

Figura 4.1: Representação de um espaço-tempo com uma região estacionária que possui um fim assintoticamente plano. No caso a região estacionária  $\mathcal{U}$  é a região exterior ao cilindro em vermelho, enquanto que a hipersuperfície em verde é uma representante de fim assintoticamente plano.



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que a região exterior depende do representante de fim assintótico considerado. Porém seus futuro e passado cronológico  $I^\pm$  não dependem, como veremos agora. Seja um representante de fim assintoticamente plano  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  em  $(\mathcal{U}, \mathbf{g})$ . O campo de Killing estacionário  $\xi$  permite definir uma função temporal  $t$  em  $\mathcal{U}$ . Além disso, segue da definição acima que existe uma coordenada radial  $r$  em  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$ . Como a região é estacionária, a coordenada radial  $r$  pode ser vista como uma coordenada radial em  $\mathcal{U}$ . Vamos provar que existe  $R_0 > 0$  suficientemente grande tal que, para todo  $R \geq R_0$  vale

$$J^\pm(\mathbf{M}_{\text{ext}}) = J^\pm(\{p \in \mathcal{U}; r(p) = R\}). \quad (4.3)$$

Note que  $\{r \equiv R\} \subset \mathbf{M}_{\text{ext}}$  para valores de  $R$  arbitrariamente grandes (pela definição de  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$ ). Daí segue que  $J^\pm(\{r \equiv R\}) \subset J^\pm(\mathbf{M}_{\text{ext}})$ . Agora tome  $x \in J^-(\mathbf{M}_{\text{ext}})$ . Então existe uma curva causal direcionada para o futuro ligando  $x$  a algum  $(t, p) \in \mathbf{M}_{\text{ext}}$ , onde consideramos  $p \in \mathcal{S}_{\text{ext}}$ . Note que existe  $(t', q) \in \{r \equiv R\}$  que podem ser acessados a partir de  $(t, p)$  por uma curva causal direcionada para o futuro. Isso ocorre pois, como  $\mathcal{S}_{\text{ext}}$  é conexa, então dado  $q \in \mathcal{S}_{\text{ext}}$  com  $r(q) = R$ , existe uma curva  $\sigma(s)$  ligando  $p$  a  $q$ . Daí considerando a curva  $\gamma(s)$  de  $\mathcal{U}$  dada por  $\gamma(s) = (t + (t' - t)s, \sigma(s))$  temos que  $\gamma(0) = (t, p)$ ,  $\gamma(1) = (t', q)$  e  $\gamma'(s)$  é um vetor causal para  $\mathbf{g}$ . Logo  $x \in J^-(\{r \equiv R\})$ . Analogamente se prova para  $J^+$ . Então, tomando um valor grande para  $R_0 > 0$  vale (4.3).

Com isso em mente podemos utilizar a região exterior para definir o *domínio de comunicação exterior*, a *região de buraco negro* e o *horizonte de eventos*.

**Definição 34.** *Domínio de comunicação exterior:*

$$\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle := I^+(\mathbf{M}_{\text{ext}}) \cap I^-(\mathbf{M}_{\text{ext}}). \quad (4.4)$$

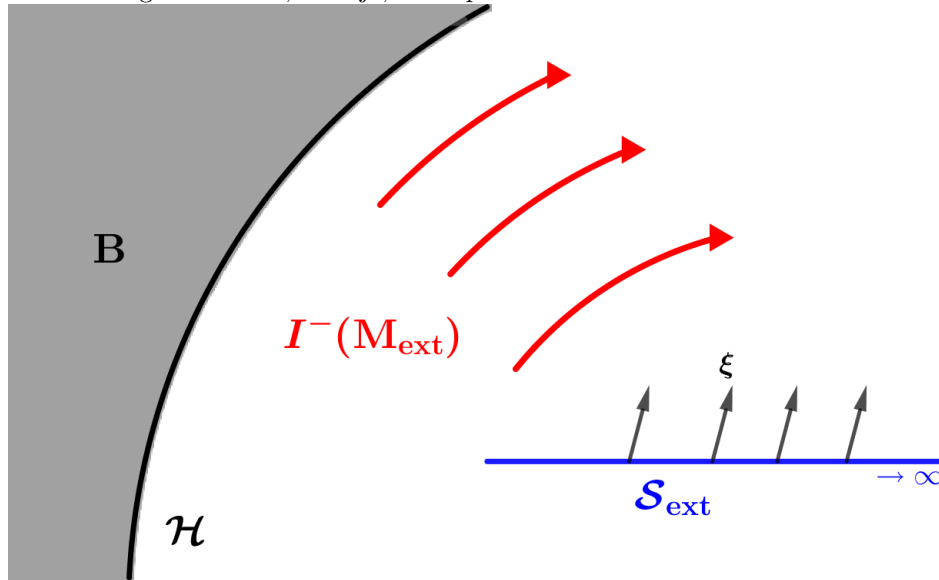
*Região de buraco negro:*

$$\mathbf{B} := \mathbf{M} \setminus I^-(\mathbf{M}_{\text{ext}}). \quad (4.5)$$

*Horizonte de eventos:*

$$\mathcal{H} := \partial \mathbf{B}. \quad (4.6)$$

Figura 4.2: Representação de um buraco negro estacionário. Ao definir a região de buraco negro  $\mathbf{B}$  como o complementar do passado cronológico de  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ , estabelecemos que as partículas desta região não conseguem acessar a região exterior, ou seja, estão presas em  $\mathbf{B}$ .



Fonte: elaborada pelo autor.

Apesar de estarmos utilizando a nomenclatura *buraco negro estacionário*, note que não exigimos que o espaço-tempo em sua totalidade seja estacionário. Isso vem do fato

de que, sob ponto de vista físico, estamos sempre modelando a região exterior ao buraco negro, afinal, se nenhuma partícula de luz consegue escapar desta região então não temos informações diretas sobre a região interior. Sob ponto de vista geométrico não há obstruções para que a região de buraco negro seja dinâmica.

A Definição 34 é uma adaptação de uma situação mais geral. Podemos definir buraco negro para espaços que possuem completamento conforme e que satisfaçam certas hipóteses de assintoticidade. Para os propósitos deste trabalho optamos por utilizar uma definição mais específica que se atenha ao caso estacionário e que é equivalente à definição mais geral, conforme explicitado na Seção 1.3 de [10].

No caso geral, apesar do horizonte de eventos ser definido apenas como um subconjunto do espaço-tempo, é possível provar que  $\mathcal{H}$  é uma subvariedade topológica com um atlas Lipschitz [20]. Porém, para o caso estacionário vale o seguinte resultado mais forte.

**Proposição 21.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  um buraco negro estacionário. Então o horizonte de eventos é uma hipersuperfície do tipo luz suave.*

Esta proposição vem do fato de que, de acordo com [12] o horizonte de eventos para um buraco negro estacionário é suave. Então, de acordo com [20, página 99], quando é suave o horizonte de eventos é necessariamente uma hipersuperfície do tipo luz.

A proposição anterior também garante uma boa propriedade para o campo de Killing estacionário  $\xi$  no horizonte de eventos  $\mathcal{H}$ . Como bordo da região de buraco negro, o horizonte de eventos necessariamente é invariante sob ação das isometrias geradas por  $\xi$ , ou seja,  $\xi$  é tangente a  $\mathcal{H}$  (conforme Capítulo 5 de [20]). Mas, pela proposição anterior,  $\mathcal{H}$  é uma hipersuperfície do tipo luz, fazendo com que  $\xi$  seja do tipo luz ou do tipo espaço em  $\mathcal{H}$ . Estabelecer o caráter causal do campo estacionário no horizonte de eventos é um passo importante na classificação de buracos negros estacionários. Na próxima seção veremos que, no caso estático, o campo de Killing é do tipo luz no horizonte.

## 4.2 Buracos negros estáticos

Nesta seção discutimos o caso de buracos negros estáticos. Seja  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  um buraco negro estacionário com campo de Killing  $\xi$ . Vamos supor que o domínio de comunicação exterior,  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$ , é um espaço-tempo estático padrão, ou seja, que existe uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  e uma função positiva  $V \in C^\infty(M^n)$  tais que  $(\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle, \mathbf{g})$  é isométrica a  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$  e  $\xi = \partial_t$  em  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$ . Neste caso dizemos que o buraco negro é estático.

Para este caso, considere o horizonte de eventos  $\mathcal{H}$ . Vimos que  $\mathcal{H}$  é uma hipersuperfície do tipo luz à qual  $\xi$  é tangente, sendo do tipo espaço ou do tipo luz. Como  $-V^2 = \mathbf{g}(\xi, \xi) < 0$  em  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$ , então por continuidade temos que  $\xi$  é do tipo luz em  $\mathcal{H}$ . Segue que, para

um buraco negro estático

$$\mathcal{H} = \{x \in M^n; V(x) = 0\}.$$

É comum encontrar discussões sobre a *gravidade de superfície* de um buraco negro. Apresentamos esta discussão para o caso estático. Mais detalhes sobre estes conceitos podem ser encontrados em [10].

Seja um buraco negro estático. É possível mostrar que, para este caso, o horizonte de eventos é homeomorfo a  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , onde  $\Sigma$  é uma hipersuperfície do tipo espaço e o conjunto  $\mathbb{R}$  corresponde às trajetórias do fluxo do campo  $\xi$ . Definimos então  $\phi := \langle \xi^b, \xi^b \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$ . Fixe uma componente conexa do horizonte de eventos  $\mathcal{H}$ . Note que  $d\phi(X) = 0$  para todo campo  $X$  tangente a  $\mathcal{H}$ . Além disso, como  $\xi$  é do tipo luz em  $\mathcal{H}$  temos que  $\xi^b(X) = \langle \xi, X \rangle = 0$  para todo  $X$  tangente a  $\mathcal{H}$ . Logo  $d\phi|_{\mathcal{H}}$  e  $\xi^b|_{\mathcal{H}}$  são linearmente dependentes. Então, existe uma função  $\kappa$  tal que

$$d\phi = -2\kappa\xi^b, \quad (4.7)$$

Dizemos que  $\kappa$  é a *gravidade de superfície* de  $\mathbb{R} \times \Sigma$ .

**Lema 3.** *Em cada componente conexa de  $\mathcal{H}$  vale  $\kappa^2 = |dV|_{\mathbf{g}}^2$ .*

*Demonstração.* Em  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$  temos que  $\xi = \partial_t$ . Como  $\xi^b = -V^2 dt$ , então  $d\xi^b = -2V dV \wedge dt$ . Também, sendo  $\phi = \langle \xi^b, \xi^b \rangle = -V^2$  temos  $d\phi = -2V dV$ . Fixando  $p \in \mathbf{M}$ , considere um sistema de coordenadas normais para  $M^n$ ,  $x^1, \dots, x^n$  em torno de  $p$ . Então sendo  $d\mathcal{V}_{\mathbf{g}}$  a forma volume de  $\mathbf{M}$  em  $p$ , temos que  $d\mathcal{V}_{\mathbf{g}} = V dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Com isso em mente, em  $p$  vale:

$$\begin{aligned} \star [dx^i \wedge (V dt)] &= (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \star dx^i &= (-1)^i V dt \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \star (V dt) &= -dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

onde utilizamos  $\widehat{dx^i}$  para indicar que  $dx^i$  não aparece na expressão.

Então note que

$$\begin{aligned} \xi^b \wedge \star d\xi^b &= (-V^2 dt) \wedge (-2V \partial_i V \star (dx^i \wedge dt)) = 2V^2 \partial_i V dt \wedge \star (dx^i \wedge (V dt)) \\ &= 2V \partial_i V (-1)^{i+1} (V dt) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = -2V \partial_i V \star dx^i \\ &= \star d\phi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por continuidade a igualdade  $\xi^b \wedge \star d\xi^b = \star d\phi$  vale também em  $\mathcal{H}$ .

Além disso, segue que

$$\begin{aligned}
-d\phi \wedge \star d\xi^b &= -(-2V dV) \wedge \star(-2V dV \wedge dt) = 2V \partial_i V dx^i \wedge \star(-2V \partial_j V dx^j \wedge dt) \\
&= -4V \partial_i V \partial_j V dx^i \wedge \star(dx^j \wedge (V dt)) \\
&= -4V (\partial_i V)^2 dx^i \wedge (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= -4V |dV|_{\mathbf{g}}^2 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = -4V |dV|_{\mathbf{g}}^2 \star(-V dt) \\
&= -4 |dV|_{\mathbf{g}}^2 \star \xi^b.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado, por (4.7) e (4.8) temos que em  $\mathcal{H}$  vale:

$$-d\phi \wedge \star d\xi^b = 2\kappa \xi^b \wedge \star d\xi^b = 2\kappa \star d\phi = 2\kappa \star(-2\kappa \xi^b) = -4\kappa^2 \star \xi^b. \tag{4.10}$$

Logo, por continuidade vale  $\kappa^2 = \lim_{V \rightarrow 0} |dV|_{\mathbf{g}}^2$ , ou seja,  $\kappa^2 = |dV|_{\mathbf{g}}^2$  em  $\mathcal{H}$ .  $\square$

O seguinte teorema é um caso especial da *Lei zero da termodinâmica de buracos negros*, a qual vale em um contexto mais geral. Para mais detalhes veja [10, Seção 4.3.4].

**Teorema 9.** *Seja  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  um buraco negro estático. Então a gravidade de superfície é constante em cada componente conexa do horizonte  $\mathcal{H}$ .*

A gravidade de superfície nos permite considerar dois tipos de horizontes. Dizemos que uma componente conexa do horizonte de eventos é *degenerada* se  $\kappa = 0$ , e dizemos que é *não degenerada* caso contrário. Mostramos agora que, para o caso considerado neste trabalho, o horizonte sempre será não-degenerado.

**Proposição 22.** *Considere uma componente do horizonte estático  $\mathbb{R} \times \Sigma$  e sua respectiva gravidade de superfície  $\kappa$ .*

(i) *Se  $\kappa \neq 0$ , então  $g$  se estende suavemente para  $\Sigma$ ;*

(ii) *Se  $\kappa = 0$ , então, com respeito a  $g$  temos  $\text{dist}_g(p, \Sigma) = \infty$ , para todo  $(t, p) \in \langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle \simeq \mathbb{R} \times M^n$ .*

*Demonstração.* (i) Como  $|\text{grad}V|_{\Sigma} = |\kappa| \neq 0$  temos que  $V$  pode ser usada como uma coordenada em uma vizinhança de  $\Sigma$ , definindo  $s = V(x)$ . Então a métrica  $g$  assume a forma  $|\text{grad}V|^2 ds^2 + g_s$ , onde  $g_s$  é a métrica induzida por  $g$  em  $\{V \equiv s\}$ .

Por outro lado  $h = \mathbf{g}|_{\Sigma}$  está bem definida e  $g_s \rightarrow h$  quando  $s \rightarrow 0$ , no sentido de que para qualquer sistema de coordenadas os coeficientes de  $g$  satisfazem  $D^k(g_s)_{ij} \rightarrow D^k h_{ij}$ , para todo  $k \geq 0$ .

Como  $ds \neq 0$  em  $\Sigma$ , então vale o resultado.

(ii): como em [25, Seção 2.1], consideramos um sistema de coordenadas local em uma vizinhança de  $\Sigma$  no espaço-tempo  $\mathbf{M}$  para o qual a métrica se escreve na forma

$$\mathbf{g} = r^2 F(r, x) dv^2 + 2dvdr + rh_i(r, x) dv dx^i + h_{ij}(r, x) dx^i dx^j, \tag{4.11}$$

onde  $\partial_v$  representa o campo de Killing do tipo tempo ( $\partial_t$  em  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$ ),  $r = 0$  corresponde ao horizonte,  $\{x^1, \dots, x^{n-1}\}$  são coordenadas em  $\Sigma$  e  $h_{ij}$  é a métrica induzida em  $\Sigma$ .

Como  $\partial_v$  é do tipo tempo em  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$ , então para  $r > 0$  temos que  $F(r, x) < 0$ . Daí, considerando a variedade riemanniana  $(M^n, g)$ , parte espacial canônica de  $\langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle$ , temos:

$$g(\partial_r, \partial_r) = \frac{1}{r^2|F|}, \quad g(\partial_r, \partial_i) = -\frac{rh_i}{r^2|F|}, \quad g(\partial_i, \partial_j) = h_{ij} + \frac{h_i h_j}{|F|}.$$

Seja  $\gamma(r) = (r, x^i(r))$   $r \in [0, r_0]$  uma curva suave em  $M^n$  que intersecta  $\Sigma$ . Note que nesta curva vale  $|h_i \partial_r(x^i)| + |F| \leq c^2$  e, portanto:

$$\begin{aligned} |\gamma'(r)|^2 &= \mathbf{g}(\gamma'(r), \gamma'(r)) = \frac{1}{r^2|F|} - \frac{2h_i(x^i)'}{r|F|} + \frac{(x^i)'(x^j)'h_i h_j}{|F|} + h_{ij}(x^i)'(x^j)' \\ &= \frac{(1 - rh_i(x^i)')^2}{r^2|F|} + h_{ij}(x^i)'(x^j)' \geq \frac{(1 - r_0 c^2)^2}{r^2|F|} \geq \frac{1}{4r^2|F|} \\ &\geq \frac{1}{4c^2 r^2}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

para um valor de  $r_0$  suficientemente pequeno. Logo, considerando o comprimento da curva  $\gamma(r)$  temos:

$$L_g(\gamma) = \int_r^{r_0} |\gamma'(s)| ds \geq \frac{1}{2c} \int_r^{r_0} \frac{ds}{s} \rightarrow \infty \tag{4.13}$$

quando  $s \rightarrow 0$ . Logo, para todo  $p \in M^n$  vale  $\text{dist}_g(p, \Sigma) = \infty$ .  $\square$

Então podemos introduzir o conceito de horizonte para um sistema eletrostático.

**Definição 35.** (*Horizonte Estático*). *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático tal que  $V^{-1}(0) = \cup_{i=1}^l \widehat{\Sigma}_i^{n-1} \subset \partial M^n$ , onde cada  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  é compacta. Então dizemos que as hipersuperfícies  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  são os horizontes estáticos do sistema.*

Segue da discussão anterior que na Definição 35 necessariamente os horizontes são não-degenerados, já que são realizados como fronteira da variedade e não no infinito (como acontece no caso degenerado). De fato no próximo lema vamos provar que as gravidades de superfície são todas diferente de zero, sem apelar para o espaço-tempo, e usando apenas a definição de sistema eletrostático.

**Lema 4.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático e  $\Sigma^{n-1} \subset M^n$  uma componente de horizonte estático. Então*

- (i)  $\kappa := |\text{grad}V|_{\Sigma}$  é constante e não nula;
- (ii)  $\Sigma$  tem curvatura média zero;
- (iii)  $d\Psi|_{\Sigma} = 0$ . Em particular  $\Psi|_{\Sigma}$  é constante.

*Demonstração.* O item (iii) segue direto de (3.33), pois  $V|_{\Sigma} = 0$ .

Para provar o item (i) vamos começar supondo que  $\text{grad}V(p) = 0$  para algum  $p \in \Sigma$ . Então ao longo de qualquer geodésica  $\gamma(t)$  de  $\Sigma$  que inicia em  $p$ , a função  $V(t) = V(\gamma(t))$  satisfaz

$$V''(t) = \text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))V(t), \quad (4.14)$$

onde aplicamos 3.32 e o fato de que  $d\Psi|_{\Sigma} = 0$  provado em (iii).

Como  $V(0) = 0$  então  $V''(0) = 0$ . Além disso, estamos supondo que  $V'(0) = 0$ , o que faz com que  $V$  seja identicamente nula em uma vizinhança de  $p$  pela unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Pela continuidade analítica de soluções de equações elípticas [51], com respeito a (3.30), concluímos que  $V$  precisaria ser identicamente nula em  $M^n$ , o que é absurdo. Logo deve valer  $\text{grad}V(p) \neq 0$  para todo  $p \in \Sigma$  e, portanto  $\kappa > 0$ . De (4.14),  $\nabla^2 V(X, Y) = 0$  para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^{n-1})$ , fazendo com que  $\kappa$  seja constante, finalizando (i).

Para provar (ii), mostramos que  $\Sigma$  é totalmente geodésica em  $M^n$  e, portanto, possui curvatura média zero. Note que, como  $\text{grad}V \neq 0$  em  $\Sigma$ , então o horizonte estático é uma hipersuperfície mergulhada em  $M^n$ , pois é a imagem inversa de um valor regular. Então, como o normal unitário a  $\Sigma$  é dado por  $N = \frac{\text{grad}V}{|\text{grad}V|}$ , vale:

$$K(X, Y) = \langle \nabla_X N, Y \rangle = \frac{\langle \nabla_X \text{grad}V, Y \rangle}{|\text{grad}V|} = \frac{\nabla^2 V(X, Y)}{|\text{grad}V|} = 0, \quad (4.15)$$

ou seja,  $\Sigma$  é totalmente geodésica e então possui curvatura média nula.  $\square$

Existem buracos negros estacionários que não são estáticos. Por exemplo, a solução de Kerr-Newmann (Seção 7.4 de [10]) é uma família de buracos negros estacionários que dependem de três parâmetros: massa, carga elétrica e momento angular. No caso em que o momento angular não é nulo temos que esta solução não é estática. Uma solução de Kerr-Newmann cujo momento angular é nulo é igual a uma solução de Reissner-Nordström de mesma massa e carga, o qual, conforme veremos na próxima subseção, é um exemplo de buraco negro estático.

### 4.2.1 O buraco negro de Reissner-Nordström

Nesta seção vamos explorar melhor o espaço-tempo de Reissner-Nordström, definido na Seção 3.3. Primeiramente, considerando o espaço-tempo de Reissner-Nordström como sendo a variedade  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e retirando a hipótese de que  $m > |q|$ , buscamos localizar um horizonte estático que nos permita definir o *buraco negro de Reissner-Nordström*. Lembrando que sua métrica é dada por  $\mathbf{g}_{m,q} = -V_{m,q}^2 dt^2 + V_{m,q}^{-2} dr^2 + r^2 \Omega_2$  e sua função de lapso

$$V_{m,q}(r) = \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.16)$$

e observe que o espaço-tempo é estático apenas nas regiões onde  $V > 0$ .

Apesar de estarmos interessados em estender o espaço-tempo de Reissner-Nordström, não é possível extendê-lo para  $r = 0$ , de modo que a métrica estendida seja de classe  $C^2$ . Para mostrar esta impossibilidade recorreremos ao *escalar de Kretschmann*: para um espaço-tempo  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  com tensor de curvatura de Riemann  $\mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}$  definimos o escalar de Kretschmann [20] como a função

$$\mathfrak{K} = \langle \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}, \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}} \rangle. \quad (4.17)$$

Para o espaço-tempo de Reissner-Nordström, o escalar de Kretschmann diverge para  $+\infty$  quando  $r \rightarrow 0$  [48, página 15]. Por isso dizemos que a métrica  $\mathbf{g}_{m,q}$  tem uma singularidade no conjunto  $\{r = 0\}$ .

Na seção anterior vimos que a existência e localização de um horizonte de eventos em um espaço-tempo estático está relacionada à obtenção de raízes para a função de lapso associada, ou seja, para o caso da Reissner-Nördstrom, está relacionada às possíveis soluções da equação  $V_{m,q}(r) = 0$ . Então, pela expressão de  $V_{m,q}$  temos que, a depender dos valores de  $m$  e  $q$ , podem existir até duas raízes para  $V_{m,q}(r) = 0$ , dadas por

$$r_{\pm} = \left( m \pm \sqrt{m^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{n-2}},$$

onde  $r_+$  coincide com o raio que utilizamos na Seção 3.3 para definir o espaço-tempo de Reissner-Nordström.

Se  $m^2 < q^2$  temos que a equação  $V_{m,q} = 0$  não apresenta soluções reais, fazendo com que a singularidade  $r = 0$  seja uma *singularidade nua* (isto é, uma singularidade que não está “escondida” por um horizonte de eventos). A *Conjectura da Censura Cósmica*, devido a Roger Penrose, afirma que espaços-tempo genéricos não admitem singularidades nuas [39]. Isto nos motiva a abandonar o estudo deste caso pois ele não teria significado físico. Neste caso dizemos que o espaço de Reissner-Nordström é *superextremo*.

Se  $m^2 = q^2$  temos que  $V_{m,q} = 0$  admite uma única solução real. Neste caso dizemos que o espaço de Reissner-Nordström é *extremo*. O horizonte de eventos, neste caso, é degenerado (possui gravidade de superfície nula). De fato, o normal exterior é dado por



$\nu_{m,q} = V_{m,q} \partial_r$ , fazendo com que:

$$\begin{aligned}
0 < \nu (V_{m,q})|_{r=R} &= V_{m,q} \cdot \partial_r (V_{m,q})|_{r=R} \\
&= V_{m,q} \cdot \partial_r \left[ \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Big|_{r=R} \\
&= \frac{V_{m,q}}{2} \cdot \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \partial_r \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right) \Big|_{r=R} \\
&= (n-2) \left( \frac{m}{r^{n-1}} - \frac{q^2}{r^{2n-3}} \right) \Big|_{r=R} \\
&= (n-2) \left( \frac{mr^{n-2} - q^2}{r^{2n-3}} \right) \Big|_{r=R},
\end{aligned}$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned}
mr_+^{n-2} - q^2 > 0 &\iff m \left( m\sqrt{m^2 - q^2} \right) - q^2 > 0 \\
&\iff (m^2 - q^2)(\sqrt{m^2 - q^2} + 1) > 0 \\
&\iff m^2 - q^2 > 0.
\end{aligned}$$

O caso de interesse aqui é quando  $m^2 > q^2$ , fazendo com que existam duas soluções:  $r_{\pm} = \left( m \pm \sqrt{m^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}$ . A solução externa  $r_+$  é um horizonte não-degenerado e delimita uma região de buraco negro, que chamamos de *buraco negro de Reissner-Nordström*, e é o caso em que se modela um buraco negro eletricamente carregado e sem rotação. Neste caso dizemos que o espaço de Reissner-Nordström é *subextremo*. A hipersuperfície  $\{r \equiv r_-\}$  é um *horizonte de Cauchy*, um conceito relacionado a estrutura causal do espaço-tempo, o qual tem implicações sobre condições de fronteira para as equações de Einstein. Porém, esta hipersuperfície está no interior do buraco negro e por isso vamos descartá-la.

Considerando, então, o espaço-tempo de Reissner-Nordström subextremo, observe que a métrica (3.34) não está bem definida nos horizontes. Veremos que é possível estender esta métrica para toda a variedade através de uma mudança de coordenadas.

Consideramos uma nova coordenada  $v$  em função de  $t$  e  $r$ . Seja  $f(r)$  uma função diferenciável, definimos

$$v = t + f(r).$$

Segue que vale:

$$dt^2 = dv^2 - 2f' dr dv + (f')^2 dr^2. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) na expressão de  $\mathbf{g}_{m,q}$  obtemos

$$\mathbf{g}_{m,q} = -V_{m,q}^2 dv^2 + 2V_{m,q}^2 f' dr dv + \left( -V_{m,q}^2 (f')^2 + V_{m,q}^{-2} \right) dr^2 + r^2 \Omega_2. \quad (4.19)$$

Tomemos  $f$  tal que  $-V_{m,q}^2 (f')^2 + V_{m,q}^{-2} = 0$ , ou seja,  $f$  tal que  $f' = \pm V_{m,q}^{-2}$ . Para isso

basta considerar algum  $r_0$  tal que  $V_{m,q}(r_0) \neq 0$  e então definir

$$f(r) := \pm \int_{r_0}^r V_{m,q}^2(s) ds.$$

Fazemos uma mudança de coordenadas deste tipo em cada região onde  $r$  não se anula, obtendo

$$\mathbf{g}_{m,q} = -V_{m,q}^2 dv^2 + 2dvdr + r^2 \Omega_{n-1}. \quad (4.20)$$

Observe que esta métrica está bem definida e é não degenerada em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

As coordenadas que acabamos de definir são chamadas de *coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein* [10]. A vantagem é que, nestas coordenadas a métrica está bem definida para todo valor de  $r > 0$  e portanto podemos estender o espaço-tempo de Reissner-Nordström como a variedade  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , cobrindo os horizontes.

A região interior, onde  $r < r_+$ , é uma região de buraco negro [7] e não é estática. A região exterior é estática e, por isso, pode ser folheada por uma família de hipersuperfícies espaciais isométricas e geodesicamente completas. Uma representante destas hipersuperfícies é a parte espacial canônica do espaço-tempo de Reissner-Nordström e é o que chamamos aqui de variedade de Reissner-Nordström. A região exterior é a que realmente nos interessa, pois, do ponto de vista físico, nenhuma partícula do interior do buraco negro pode se comunicar com o exterior.

Portanto, se  $m^2 > q^2$ , o horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström está localizado em

$$r_+ = \left( m + \sqrt{m^2 - q^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}, \quad (4.21)$$

que coincide com raio utilizado na definição do espaço-tempo de Reissner-Nordström na Seção 3.3.

Em coordenadas isotrópicas, no caso subextremo, o horizonte de eventos é dado pela hipersuperfície  $\{s = S_{m,q}\}$ , onde

$$S_{m,q} = \left( \frac{m^2 - q^2}{4} \right)^{\frac{1}{2(n-2)}}, \quad (4.22)$$

pois, segue de (3.40):

$$\begin{aligned} 0 = V_{m,q}(s) &= \frac{\left( 1 - \frac{m^2 - q^2}{4s^{2(n-2)}} \right)}{\left( 1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}} \right) \left( 1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}} \right)} \iff 0 = 1 - \frac{m^2 - q^2}{4s^{2(n-2)}} \\ &\iff s = \left( \frac{m^2 - q^2}{4} \right)^{\frac{1}{2(n-2)}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note que, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q = 0$  se

reduz a solução clássica de Schwarzschild, dada por:

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, -V_m^2 dt^2 + V_m^{-2} dr^2 + r^2 \Omega_{n-1}),$$

onde a função de lapso  $V_m$  se reduz a

$$V_m(r) = \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

### 4.3 Esferas de fótons

Considere um espaço-tempo  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  e uma hipersuperfície  $\mathbf{P}^n$  mergulhada em  $\mathbf{M}$ , a qual é do tipo luz ou do tipo tempo. Para um ponto  $p \in \mathbf{P}^n$  podemos considerar  $v \in T_p \mathbf{P}^n \hookrightarrow T_p \mathbf{M}$  um vetor tangente do tipo luz e  $\gamma_{p,v}$  a geodésica (do tipo luz) de  $\mathbf{M}$  que passa por  $p$  com velocidade  $v$ . Vimos que  $\gamma$  modela fisicamente a trajetória de uma partícula de luz de  $\mathbf{M}$ . Neste caso temos que em  $p$  esta partícula é tangente a  $\mathbf{P}^n$ . Com isso em mente, podemos formular a seguinte questão: sob quais circunstâncias esta partícula permanecerá tangente a  $\mathbf{P}^n$ , isto é, quando que  $\gamma$  está contida em  $\mathbf{P}^n$ ? Quando isso acontece dizemos que  $\mathbf{P}^n$  é uma *hipersuperfície de fótons* em  $\mathbf{M}$  [15].

Note que toda hipersuperfície do tipo luz automaticamente cumpre esta propriedade, o que nos motiva a pensar: quais critérios uma hipersuperfície do tipo tempo precisa cumprir para capturar fótons? O seguinte teorema estabelece esta caracterização.

**Teorema 10.** *Seja  $(\mathbf{M}^{n+1}, \mathbf{g})$  um espaço-tempo e  $\mathbf{P}^n$  uma hipersuperfície do tipo tempo. Então são equivalentes:*

- (i)  $\mathbf{P}^n$  é totalmente umbílica;
- (ii) Toda geodésica do tipo luz de  $\mathbf{M}^{n+1}$  que inicia tangente a  $\mathbf{P}^n$ , permanece tangente enquanto estiver definida.

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{P}^n \subset \mathbf{M}^{n+1}$  nas hipóteses do teorema. Considere  $\widehat{\nabla}$  conexão de Levi-Civita de  $\mathbf{M}^{n+1}$  e  $\nabla$  conexão de Levi-Civita de  $\mathbf{P}^n$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Vamos supor  $\mathbf{P}^n$  totalmente umbílica. Então, localmente, existe um campo normal unitário  $N \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}^n)^\perp$  e uma função  $\lambda \in C^\infty(\mathbf{P}^n)$  tais que  $\text{II}(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle N$ , para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}^n)$ .

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{M}^{n+1}$  geodésica do tipo luz de  $\mathbf{M}^{n+1}$  tal que  $\gamma(0) = p \in \mathbf{P}^n \hookrightarrow \mathbf{M}^{n+1}$  e  $\gamma'(0) = v \in T_p \mathbf{P}^n \hookrightarrow T_p \mathbf{M}^{n+1}$ . Daí temos que

$$0 = \widehat{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} \gamma' + \text{II}(\gamma', \gamma') = \nabla_{\gamma'} \gamma' + \lambda \langle \gamma', \gamma' \rangle N = \nabla_{\gamma'} \gamma',$$

pois  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$ .

Logo, tomando a geodésica de  $\mathbf{P}^n$  que passa por  $p$  com velocidade  $v$ , segue que essa geodésica coincidirá com  $\gamma$ , ou seja,  $\gamma$  permanecerá tangente a  $\mathbf{P}^n$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): sejam  $p \in \mathbf{P}^n$  e  $X_p, Y_p \in T_p \mathbf{P}^n$  tais que  $\langle X_p, Y_p \rangle = 0$ . Vamos também supor que  $\langle X_p, X_p \rangle = 1$  e  $\langle Y_p, Y_p \rangle = -1$ .

Com isso definimos os vetores  $V_p = \frac{1}{2}(Y_p + X_p)$  e  $W_p = \frac{1}{2}(Y_p - X_p)$ . Note que ambos são do tipo luz e, por hipótese, podem ser estendidos por uma geodésica do tipo luz em  $\mathbf{P}^n$  que é também geodésica de  $\mathbf{M}^{n+1}$  como dois campos  $V$  e  $W$  nos quais  $\widehat{\nabla}_V V = \nabla_V V = \nabla_W W = \widehat{\nabla}_W W = 0$  em suas respectivas geodésicas.

Logo podemos estender também  $X_p$  e  $Y_p$ , definindo  $X = V - W$  e  $Y = V + W$ . Para  $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$  definimos  $X^\perp$  como a projeção de  $X$  na direção normal a  $\mathbf{P}^n$ . Então

$$\begin{aligned} \text{II}(X, Y) &= \text{II}(V - W, V + W) = \left( \widehat{\nabla}_{(V-W)}(V + W) \right)^\perp \\ &= \left( \widehat{\nabla}_V W - \widehat{\nabla}_W V \right)^\perp = [V, W]^\perp = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

pois  $[V, W]$  é tangente a  $\mathbf{P}^n$ . Logo, da Proposição 17, segue que  $\mathbf{P}^n$  é totalmente umbílica.  $\square$

Estamos interessados em uma classe específica destas hipersuperfícies: as *esferas de fótons* em sistemas eletrostáticos.

**Definição 36.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático. Uma hipersuperfície  $\mathbf{P}^n$  do tipo tempo, orientável e mergulhada em  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$  é dita uma esfera de fótons se é totalmente umbílica e se  $V$  e  $\Psi$  são constantes em cada componente conexa de  $\mathbf{P}^n$ .*

Afim de fixar notações, considere um sistema eletrostático  $(M^n, g, V, \Psi)$  e uma esfera de fótons  $\mathbf{P}^n$  no espaço estático padrão associado. Então podemos escrever

$$(\mathbf{P}^n, \mathbf{h}) := \bigcup_{i=1}^l (\mathbb{R} \times \Sigma_i^{n-1}, -V_i^2 dt^2 + \sigma_i),$$

onde cada  $\mathbb{R} \times \Sigma_i^{n-1}$  é uma componente conexa de  $\mathbf{P}^n$  e  $\mathbf{h}$  é a métrica induzida por  $-V^2 dt^2 + g$ .

Definimos:

$$V_i := V|_{\Sigma_i^{n-1}} = cte, \quad \Psi_i := \Psi|_{\Sigma_i^{n-1}} = cte.$$

Seja  $\mathbf{H}$  a curvatura média de  $\mathbf{P}^n = \bigcup_{i=1}^l (\mathbb{R} \times \Sigma_i^{n-1})$  em  $\mathbb{R} \times M^n$  e  $H$  a curvatura média de  $\bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^{n-1}$  em  $M^n$ , denotamos

$$\mathbf{H}_i := \mathbf{H}|_{\mathbb{R} \times \Sigma_i^{n-1}}, \quad H_i := H|_{\Sigma_i^{n-1}}.$$

Escolhemos um campo unitário normal  $\nu$  a  $\bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^{n-1}$  em  $M^n$ . Nesse caso definimos:

$$\kappa_i = \nu(V)|_{\Sigma_i^{n-1}}, \quad \lambda_i = \nu(\Psi)|_{\Sigma_i^{n-1}}.$$

Note que  $\nu = \frac{\text{grad}V}{|\text{grad}V|}$ , pois  $V$  é constante em cada  $\Sigma_i^{n-1}$ . Logo  $\kappa_i = |\text{grad}V|_{\Sigma_i}$ . Iremos abusar da notação  $\nu$ , eventualmente interpretando-o como o normal unitário a  $\mathbf{P}^n$  em  $\mathbb{R} \times M^n$ .

### 4.3.1 Propriedades quase-locais

Até agora só discutimos o conceito de esfera de fótons do ponto de vista global. Será importante para a construção da demonstração do resultado principal estabelecer propriedades quase-locais das esferas de fótons.

**Definição 37.** *Seja  $\Sigma_i^{n-1}$  uma hipersuperfície totalmente umbílica na variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , onde  $(M^n, g, V, \Psi)$  é um sistema (pseudo-)eletrostático. Então  $\Sigma_i^{n-1}$  é dita componente quase-local da esfera de fótons se  $\kappa_i > 0$  e  $V_i \equiv \text{cte}$ ,  $H_i \equiv \text{cte}$  e  $R_{\sigma_i} \equiv \text{cte} > 0$ , e se são satisfeitas as seguintes equações:*

$$R_{\sigma_i} = \frac{n}{n-1}H_i^2 + \frac{2}{V_i^2}\lambda_i^2, \quad (4.25)$$

$$\frac{H_i}{V_i}\kappa_i = \frac{H_i^2}{n-1}. \quad (4.26)$$

A seguinte proposição serve para caracterizar as esferas de fótons de sistemas eletrostáticos com base nas propriedades quase-locais da Definição 37.

**Proposição 23.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático e  $\mathbf{P}^n$  esfera de fótons em  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$ . Então:*

- (i) *Vale (4.25). Em particular,  $R_{\sigma_i} \geq 0$ , sendo esta desigualdade estrita se  $H_i \neq 0$ ;*
- (ii)  *$H_i$  é constante. Em particular  $R_{\sigma_i}$  é constante se, e somente se,  $\lambda_i$  é constante;*
- (iii) *Vale (4.26). Logo  $\kappa_i$  é constante.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{Ric}_g$  e  $\mathbf{R}_g$ , respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar de  $\mathbb{R} \times M^n$ . Relembrando que  $\mathbf{H}$  denota a curvatura média de  $\mathbf{P}^n$  em  $\mathbb{R} \times M^n$  e que  $H$  denota a curvatura média de  $\bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^{n-1}$  em  $M^n$ .

Escolhemos  $N$  um campo vetorial normal unitário a  $\bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^{n-1}$  em  $\mathbf{P}^n$  e  $\nu$  campo normal unitário a  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $M^n$ . Com isso em mente, começamos provando (i). Aplicando o traço à Equação de Gauss, (2.20), à  $(\mathbf{P}^n, \mathbf{h})$  em  $\mathbb{R} \times M^n$  obtemos

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{R}_g - 2\mathbf{Ric}_g(\nu, \nu) + \frac{n-1}{n}\mathbf{H}^2. \quad (4.27)$$

Reescrevemos cada um dos termos de (4.27). Aplicando o traço à Equação de Gauss, (2.20), a  $M^n$  em  $\mathbb{R} \times M^n$  e simplificando pelo fato de  $M^n$  ser totalmente geodésica, obtemos

$$\mathbf{R}_g = R_g - 2\mathbf{Ric}_g(N, N), \quad (4.28)$$

Pela fórmula (3.8) aplicada a  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$  e a equação (3.30), como  $N = V^{-1} \partial_t$ , temos:

$$\mathbf{Ric}_g(N, N) = \frac{\Delta V}{V} = \frac{c_n^2}{V^2} |d\Psi|_g^2.$$

Aplicando esta fórmula e (3.33) reescrevemos (4.28) como

$$\mathbf{R}_g = \frac{2}{V^2} |d\Psi|^2 - \frac{2c_n^2}{V^2} |d\Psi|^2 = \frac{2|d\Psi|^2}{V^2} (1 - c_n^2) = \frac{2\nu(\Psi)^2}{V^2} (1 - c_n^2). \quad (4.29)$$

Substituindo (3.32) em (3.7) temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric}_g(\nu, \nu) &= \text{Ric}_g(\nu, \nu) - \frac{1}{V} \nabla^2 V(\nu, \nu) \\ &= \frac{\nabla^2 V(\nu, \nu)}{V} - \frac{d\Psi(\nu) \otimes d\Psi(\nu)}{V^2} + \frac{2|d\Psi(\nu)|_g^2}{(n-1)V^2} g(\nu, \nu) - \frac{\nabla^2 V(\nu, \nu)}{V} \\ &= \frac{\nu(\Psi)^2}{V^2} + \frac{\nu(\Psi)^2}{(1-n)V^2} \\ &= -\frac{c_n^2 \nu(\Psi)^2}{V^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

É possível relacionar as curvaturas médias através da fórmula  $nH_i = (n-1)\mathbf{H}_i$ , pois

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i K(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i K(E_i, E_i) + \varepsilon_n K(E_n, E_n) \\ &= H_i + \varepsilon_n \lambda \langle \nu, \nu \rangle \\ &= H_i + \frac{\mathbf{H}_i}{n}, \end{aligned}$$

o que nos permite utilizar (4.29) e (4.30) para reescrever (4.27), restringindo-a à  $\Sigma_i^{n-1}$ :

$$\begin{aligned} R_{\sigma_i} &= \mathbf{R}_g - 2\mathbf{Ric}_g(\nu, \nu) + \frac{n-1}{n} \mathbf{H}^2 \\ &= \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2} (1 - c_n^2) + 2\frac{c_n^2 \lambda_i^2}{V_i^2} + \frac{n-1}{n} \mathbf{H}_i^2 \\ &= \frac{n}{n-1} H_i^2 + \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2}. \end{aligned}$$

Note que o lado direito de (4.25) é não negativo, ou seja,  $R_{\sigma_i} \geq 0$ . Além disso se  $H_i \neq 0$  então  $R_{\sigma_i} > 0$ . Isso conclui (i).

Para provar (ii) começamos provando que  $\mathbf{H}_i$  é constante utilizando a Equação de

Codazzi. Considerando  $\nu$  o normal unitário a  $\mathbf{P}^n$  em  $\mathbb{R} \times M^n$  e tomando  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}^n)$  temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Rm}_{\mathbf{g}}(X, Y, Z, \nu) &= (\nabla_X K)(Y, Z) - (\nabla_Y K)(X, Z) \\ &= X \left( \frac{\mathbf{H}_i}{n} \right) \mathbf{h}(Y, Z) - Y \left( \frac{\mathbf{H}_i}{n} \right) \mathbf{h}(X, Z), \end{aligned} \quad (4.31)$$

lembrando que  $\mathbf{h}$  denota a métrica induzida em  $\mathbf{P}^n$  por  $\mathbf{g} = -V^2 dt^2 + g$ .

Então, utilizamos uma simetria do tensor de curvatura e aplicamos o traço em (4.31) para obter:

$$\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(Y, \nu) = (1 - n)Y \left( \frac{\mathbf{H}_i}{n} \right). \quad (4.32)$$

Como o espaço tempo é uma solução das equações de Einstein-Maxwell, então, da Equação de Einstein, sabendo que  $\mathbf{g}(Y, \nu) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(Y, \nu) &= 8\pi T_{EM}(Y, \nu) = 2(F \odot F)(Y, \nu) = 2\mathbf{g}^{\alpha\beta} F(\partial_\alpha, Y) F(\partial_\beta, \nu) \\ &= 2\mathbf{g}^{00} F(\partial_t, Y) F(\partial_t, \nu) = -2V^{-2} (d\Psi)(Y) (d\Psi)(\nu) \\ &= -2V^{-2} \mathbf{g}(\text{grad}\Psi, Y) \mathbf{g}(\text{grad}\Psi, \nu) = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

pois  $\text{grad}\Psi$  é normal a  $\mathbf{P}^n$ . Como  $Y$  é um campo tangente qualquer a  $\mathbf{P}^n$ , segue que  $\mathbf{H}_i$  é constante e, portanto,  $H_i$  é constante. Do item (i) temos que vale (4.25). Então, sendo  $H_i$  constante, segue que  $R_{\sigma_i}$  é constante se, e somente se,  $\lambda_i$  também for constante.

Agora provaremos (iii). Iniciaremos deduzindo (4.26). Aplicando (2.20), isto é, o traço da Equação de Gauss, a  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $M^n$  obtemos

$$R_g - 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) = R_{\sigma_i} - \frac{n-2}{n-1} H_i^2. \quad (4.34)$$

Agora reescrevemos separadamente cada termo de (4.34). Note que estamos escrevendo  $\Delta V$  para o laplaciano de  $V$  em relação à métrica  $g$ . Podemos utilizar o mergulho isométrico suave  $(\Sigma_i^{n-1}, \sigma_i) \mapsto (M^n, g)$  para reescrever este laplaciano em  $\Sigma_i^{n-1}$  utilizando a geometria desta hipersuperfície. Considerando o referencial local  $\partial_1, \dots, \partial_n$ , onde para índices  $j, l \in \{1, \dots, n-1\}$  é um referencial para  $\Sigma_i^{n-1}$  e  $\partial_n = \nu$ , então:

$$\begin{aligned} \Delta V &= g^{nn} \nabla^2 V(\nu, \nu) + g^{jk} \nabla^2 V(\partial_j, \partial_k) = \nabla^2 V(\nu, \nu) + g^{jk} (\partial_j \partial_k V - \Gamma_{jk}^\lambda \partial_\lambda V) \\ &= \nabla^2 V(\nu, \nu) + g^{jk} (\partial_j, \partial_k V - \Gamma_{jk}^l \partial_l V) - g^{jk} \Gamma_{jk}^n \nu(V)|_{\Sigma_i^{n-1}} \\ &= \nabla^2 V(\nu, \nu) + \Delta_{\sigma_i} V + g^{jk} K_{jk} \kappa_i \\ &= \nabla^2 V(\nu, \nu) + \Delta_{\sigma_i} V - H_i \kappa_i, \end{aligned} \quad (4.35)$$

pois  $K_{jk} = K(\partial_j, \partial_k) = -g(\nabla_{\partial_j} \partial_k, \nu) = -g(\Gamma_{jk}^\lambda \partial_\lambda, \nu) = -\Gamma_{jk}^n$ .

Daí, aplicando (3.30) temos que, em  $\Sigma_i^{n-1}$  vale:

$$\begin{aligned}\nabla^2 V(\nu, \nu) &= \Delta V - \Delta_{\sigma_i} V_i - H_i \kappa_i = \frac{c_n^2 |d\Psi|^2}{V_i} - H_i \kappa_i = \frac{c_n^2 \nu (\Psi)^2}{V_i} - H_i \kappa_i \\ &= \frac{c_n^2 \lambda_i^2}{V_i} - H_i \kappa_i,\end{aligned}\tag{4.36}$$

pois  $\Delta_{\sigma_i} V = 0$ , visto que  $V$  é constante em cada  $\Sigma_i^{n-1}$ .

Substituindo (4.36) em (4.30) obtemos:

$$\text{Ric}_g(\nu, \nu) = \frac{\nabla^2 V(\nu, \nu)}{V} - \frac{c_n^2 \lambda_i^2}{V^2} = -\frac{H_i \kappa_i}{V_i}.\tag{4.37}$$

Lembrando que de (3.30) sabemos que  $V^2 R_g = 2 |d\Psi|^2 = 2\nu (\Psi)^2$ .

Com (3.30), (4.37) e (4.25) reduzimos (4.34) a:

$$\begin{aligned}R_g - 2\text{Ric}_g(\nu, \nu) = R_{\sigma_i} - \frac{n-2}{n-1} H_i^2 &\Leftrightarrow \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2} + 2\frac{H_i \kappa_i}{V_i} = \frac{n}{n-1} H_i^2 + \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2} - \frac{n-2}{n-1} H_i^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2H_i \kappa_i}{V_i} = \frac{n}{n-1} H_i^2 - \frac{n-2}{n-1} H_i^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2H_i \kappa_i}{V_i} = \frac{2}{n-1} H_i^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{H_i}{V_i} \kappa_i = \frac{H_i^2}{n-1}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Por fim, do item anterior temos que  $H_i$  é constante. Então de (4.38) segue que  $\kappa_i$  também é constante.  $\square$

Com a proposição anterior, vemos que uma esfera de fótons em um sistema eletrostático satisfaz quase todas as condições para se encaixar na Definição 37. Resta garantir que  $H_i > 0$ , para que então pelo Item (i) da proposição anterior valha  $R_{\sigma_i} > 0$ . Para isso será necessário exigir que o espaço satisfaça condições adicionais.

**Definição 38.** (*Condição de energia nula*). Dizemos que um espaço-tempo estático  $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$  satisfaz a condição de energia nula se, para todo  $v$  do tipo luz vale

$$\mathbf{Ric}_{\mathbf{g}}(v, v) \geq 0.$$

Antes de prosseguir, vamos provar o seguinte lema.

**Lema 5.** (*Lema 3.2 de [18]*). Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana geodesicamente completa e  $f \in C^\infty(M^n)$  para a qual  $\sup |\text{grad} f|_g < \infty$ . Seja  $U$  uma componente conexa de  $\{f \neq 0\}$  e considere a métrica  $\tilde{g} := f^{-2}g$ . Então a métrica  $\tilde{g}$  é completa em  $U$ .



*Demonstração.* Sem perda de generalidade vamos assumir  $f > 0$  em  $U$ , pois se  $f|_U < 0$  bastaria considerar  $-f$ .

Primeiramente mostramos um resultado auxiliar: sejam  $p, q \in U$  distintos e considere  $\text{dist}_g(p, q)$  a distância de  $p$  a  $q$  em relação a  $g$ . Seja  $\beta$  uma curva em  $U$  que liga  $p$  a  $q$  e denote por  $L_{\tilde{g}}(\beta)$  o comprimento de  $\beta$  em relação a  $\tilde{g}$ . Então vale

$$L_{\tilde{g}}(\beta) \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left( 1 + \frac{\Lambda \cdot \text{dist}_g(p, q)}{\min\{|f(p)|, |f(q)|\}} \right), \quad (4.39)$$

onde  $\Lambda = \sup |\text{grad} f|_g$ .

Seja  $l$  o comprimento de  $\beta$  em relação à métrica  $g$ . Neste caso parametrizamos  $\beta$  de modo que  $\beta(0) = p$ ,  $\beta(l) = q$  e  $|\beta'(s)|_g = 1$  para todo  $s \in [0, l]$ . Note que

$$|\beta'(s)|_{\tilde{g}} = \sqrt{\tilde{g}(\beta'(s), \beta'(s))} = [f(\beta(s))]^{-1},$$

ou seja

$$L_{\tilde{g}}(\beta) = \int_0^l |\beta'(s)|_{\tilde{g}} ds = \int_0^l \frac{1}{f(\beta(s))} ds \geq \int_0^d \frac{1}{f(\beta(s))} ds, \quad (4.40)$$

onde  $d := \text{dist}_g(p, q)$ .

Pela parametrização de  $\beta$  por comprimento de arco em relação a  $g$  vale

$$\left| \frac{d}{ds} f(\beta(s)) \right| = |g(\text{grad} f, \beta'(s))| \leq \Lambda, \quad (4.41)$$

ou seja, para todo  $s \in [0, l]$  vale  $f(\beta(s)) - f(\beta(0)) \geq \Lambda s$ .

Como  $f > 0$  em  $U$ , então  $\frac{1}{f(\beta(s))} \geq \frac{1}{f(\beta(0)) + \Lambda s}$ , o que nos permite reescrever (4.40)

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}(\beta) &\geq \int_0^d \frac{1}{f(\beta(0)) + \Lambda s} ds = \frac{1}{\Lambda} [\ln(f(p) + \Lambda d) - \ln f(p)] \\ &= \frac{1}{\Lambda} \ln \left( 1 + \frac{\Lambda d}{f(p)} \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podemos realizar o mesmo processo revertendo a direção de  $\beta$  para obter

$$L_{\tilde{g}}(\beta) \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left( 1 + \frac{\Lambda d}{f(q)} \right). \quad (4.43)$$

Portanto, valendo (4.42) e (4.43) é garantido que valha (4.39).

Para provar a completude geodésica de  $(M^n, \tilde{g})$ , seja  $\beta : [0, T) \rightarrow (M^n, \tilde{g})$  uma geodésica maximal. Vamos supor que  $T < \infty$  e chegar a uma contradição. Sem perda de generalidade vamos supor que  $|\beta'(s)|_{\tilde{g}} = 1$  para todo  $s \in [0, T)$ .

Como  $\tilde{g} = f^{-2}g$ , então  $|\beta'(s)|_g = f(\beta(s))$ . Logo, para todo  $s \in [0, T)$ , vale

$$\left| \frac{d}{ds} f(\beta(s)) \right| = |g(\text{grad}f, \beta'(s))| \leq \Lambda f(\beta(s)). \quad (4.44)$$

Segue que

$$\left| \frac{d}{ds} \ln(f(\beta(s))) \right| \leq \Lambda,$$

e, por integração, vale para todo  $s \in [0, T)$

$$f(\beta(s)) \leq f(\beta(0))e^{\Lambda s}.$$

Portanto, denotando por  $l$  o comprimento de  $\beta$  em  $(M^n, g)$ , temos que

$$l = \int_0^T f(\beta(s)) ds < \infty.$$

Como  $(M^n, g)$  é geodesicamente completa, então  $\lim_{s \rightarrow T^-} \beta(s) = q$ , para algum  $q \in \bar{U} \subset M^n$ . Se  $q \in U$ , então a geodésica  $\beta : [0, T) \rightarrow (U, \tilde{g})$  pode ser estendida a  $T$ , o que contradiz o fato de  $\beta$  ser inextensível. Se  $q \in \partial U$ , então  $f(q) = 0$  e, pela expressão (4.39) o comprimento de  $\beta$  em  $(U, \tilde{g})$  é  $\infty$ , o que contradiz a hipótese que  $T < \infty$ . Portanto  $T = \infty$ , mostrando que  $\tilde{g}$  é completa em  $U$ .  $\square$

Agora podemos provar a seguinte proposição.

**Proposição 24.** (Teorema 3.1 de [18] e Lema 2.6 de [9]). *Seja  $\mathbf{P}^n$  uma esfera de fótons em  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$ , com  $(M^n, g)$  variedade assintoticamente Euclidiana. Suponha que  $(\mathbb{R} \times M^n, -V^2 dt^2 + g)$  satisfaz as Equações de Einstein estáticas e a Condição de Energia Nula. Suponha também que  $\sup |\text{grad}V| < \infty$ . Então  $H_i > 0$ .*

*Demonstração.* Vamos supor que para alguma componente  $\Sigma_i^{n-1}$  da esfera de fótons  $\mathbf{P}^n$  temos  $H_i \leq 0$ .

Seja  $\mathbb{S}_R = \{r \equiv R\}$  uma esfera radial no fim assintótico. Tomamos  $R$  suficientemente grande de modo que a curvatura média de  $\mathbb{S}_R$  com respeito ao normal exterior seja positiva, isto é,  $H_{\mathbb{S}_R} > 0$ . Considerando a métrica  $\tilde{g} = V^{-2}g$ , segue do Lema 5 que  $(M^n, \tilde{g})$  é geodesicamente completa. Então, por compacidade, existem  $p \in \Sigma_i^{n-1}$  e  $q \in \mathbb{S}_R$  tais que  $d_{\tilde{g}}(p, q) = d_{\tilde{g}}(\Sigma_i^{n-1}, \mathbb{S}_R)$ . Seja  $\gamma : [0, L] \rightarrow (M^n, \tilde{g})$  a geodésica parametrizada por comprimento de arco que minimiza a distância entre  $p$  e  $q$ . Neste caso  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(L) = q$ .

Então existe  $W$  vizinhança de  $p$  em  $\Sigma_i^{n-1}$  para qual a aplicação a aplicação

$$F(s, x) := \widetilde{\text{exp}}_x(s\tilde{\nu}),$$

é um difeomorfismo de  $[0, L] \times W$  sobre sua imagem, onde  $\widetilde{\text{exp}}$  é a aplicação exponencial

em relação à métrica  $\tilde{g}$ ,  $s \in [0, L]$ ,  $x \in W$  e  $\tilde{\nu}$  é o campo normal unitário a  $W$  com relação a  $\tilde{g}$  dado por  $\tilde{\nu}(p) = \gamma'(0)$ .

Definimos o conjunto dos pontos que estão a uma distância  $s \in [0, L]$  de  $W \subset \Sigma_i^{n-1}$  como  $W_s = F(s, W)$ . Note que  $W_s$  é uma hipersuperfície de  $M^n$ . Então denotamos por  $H(s)$  a curvatura média de  $W_s$  com respeito ao normal  $\nu(s) = V^{-1}F_*(\frac{\partial}{\partial s})$  em  $(M^n, g)$ .

Agora vamos obter uma fórmula de monotonicidade para a função  $H = H(s)$ . É possível obter a seguinte relação para a variação da curvatura média em uma família de hipersuperfícies (página 111 de [54]):

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\Delta_s V - (\text{Ric}(\nu, \nu) - |\text{II}|^2) V, \quad (4.45)$$

onde  $\Delta_s$  é o laplaciano em  $W_s$  e  $\text{II} = \text{II}(s)$  é a segunda forma fundamental de  $W_s$ .

Também podemos relacionar o laplaciano  $\Delta$  de  $M^n$  com  $\Delta_s$  de  $W_s$  através de uma fórmula análoga a (4.35), obtendo:

$$\Delta V = \Delta_s V + \nabla^2 V(\nu, \nu) + \frac{H}{V} \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (4.46)$$

Isolando  $\Delta_s V$  e utilizando as Equações de Einstein Estáticas, (3.16) e (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_s V &= \Delta V - \nabla^2 V(\nu, \nu) + \frac{H}{V} \frac{\partial V}{\partial s} \\ &= 4\pi \left( c_n^2 T(N, N) + \frac{2}{n-1} \text{tr}_g \Upsilon \right) V - V \text{Ric}(\nu, \nu) \\ &\quad + 4\pi \left( 2\Upsilon(\nu, \nu) + \frac{2}{n-1} (T(N, N) - \text{tr}_g \Upsilon) \right) V + \frac{H}{V} \frac{\partial V}{\partial s} \\ &= -V \text{Ric}(\nu, \nu) + 8\pi [T(N, N) + \Upsilon(\nu, \nu)] V + \frac{H}{V} \frac{\partial V}{\partial s}. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.45) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s} &= V \text{Ric}(\nu, \nu) - 8\pi [T(N, N) + \Upsilon(\nu, \nu)] V + \frac{H}{V} \frac{\partial V}{\partial s} - (\text{Ric}(\nu, \nu) - |\text{II}|^2) V \\ &= -[|\text{II}|^2 + 8\pi (T(N, N) + \Upsilon(\nu, \nu))] V + \frac{H}{V} \frac{\partial V}{\partial s}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H}{V} \right) = V^{-1} \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{H}{V^2} \frac{\partial V}{\partial s},$$

podemos reescrever (4.47) obtendo

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{H}{V} \right) = -[|\text{II}| + 8\pi (T(N, N) + \Upsilon(\nu, \nu))] \leq 0, \quad (4.48)$$

pois, pela Condição de Energia Nula,  $T(N, N) + \Upsilon(\nu, \nu) \geq 0$ . Como assumimos  $H_0 \leq 0$ ,

segue que  $H_L \leq 0$ .

Note que  $W_L$  tangencia  $\mathbb{S}_R$  em  $q$ . Daí, pela propriedade minimizante de  $\gamma$ , está contida em  $B_R^n(0)$ . Logo, pelo Princípio do Máximo Geométrico (Teorema 7),  $H_{W_L}(q) \geq H_{\mathbb{S}_R}(q) > 0$ , o que contradiz a conclusão do último parágrafo. Portanto deve valer  $H_i > 0$ .  $\square$

Em dimensão 3 a proposição anterior é bastante significativa do ponto de vista topológico: se  $H_i > 0$ , então o Teorema de Gauss-Bonnet e a Proposição 23 garantem que estas hipersuperfícies são esferas topológicas. Isso é o que motiva a nomenclatura “esfera de fótons”.

Por último precisamos checar que uma solução estática das equações de Einstein-Maxwell satisfaz a condição de energia nula. Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático e considere  $T_{EM}$  seu tensor de energia-momento eletromagnético. Seja  $v$  um campo do tipo luz no espaço-tempo estático padrão associado  $(\mathbb{R} \times M^n, \mathbf{g} = -V^2 dt^2 + g)$ . Considere, sem perda de generalidade, que  $v = N + X$ , com  $N = V^{-1} \partial_t$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$  e  $|X|_g^2 = 1$ . Então, de (3.24) e (3.27), lembrando que  $\mathcal{B} = 0$  e  $\mathcal{E} = d\Psi$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
T(v, v) &= T(N, N) + T(X, X) = T(N, N) + \Upsilon(X, X) \\
&= \frac{1}{8\pi} |d\Psi|_g^2 - \frac{1}{4\pi} (d\Psi \otimes d\Psi)(X, X) + \frac{1}{8\pi} |d\Psi|_g^2 g(X, X) \\
&= \frac{1}{4\pi} (-\langle \text{grad}\Psi, X \rangle^2 + |d\Psi|_g^2) \\
&\geq \frac{1}{4\pi} (-|d\Psi|_g^2 |X|_g^2 + |d\Psi|_g^2) = 0,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

onde aplicamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de  $g$  ser Riemanniana.

Pela Equação de Einstein temos que  $\mathbf{Ric}(v, v) \geq 0$  se, e somente se,  $T_{EM}(v, v) \geq 0$ . Logo o espaço-tempo satisfaz a condição de energia nula. Portanto, unindo as Proposições 23 e 24 temos que esferas de fótons em sistemas eletrostáticos se encaixam na Definição 37, permitindo que sejam caracterizadas de maneira satisfatória por propriedades quase-locais. Nas hipóteses do Teorema 1 estamos trabalhando com sistemas que satisfazem certas condições assintóticas (que serão exploradas na próxima seção), mas que satisfazem as hipóteses da proposição anterior.

Por último, há uma caracterização para as esferas de fótons quase-locais de sistemas eletrostáticos, que faz analogia com a classificação dos espaços-tempo de Reissner-Nordström.

**Definição 39.** *Seja  $\Sigma_i^{n-1}$  uma esfera de fótons quase-local em um sistema (pseudo)-eletrostático. Se*

$$\frac{H_i^2}{R_{\sigma_i}} > \frac{n-2}{n-1}, \tag{4.50}$$

*então  $\Sigma_i^{n-1}$  é dita subextrema.*

Analogamente, se vale a igualdade “=” em (4.50) dizemos que a esfera de fótons é *extrema* e se vale “<” dizemos que é *superextrema*.

### 4.3.2 A esfera de fótons da variedade de Reissner-Nordström

Vamos identificar uma esfera de fótons no Espaço-Tempo de Reissner-Nordström subextremo de massa  $m$  e carga  $q$ . Seja  $\mathbf{P}^n$  uma esfera de fótons neste espaço. Como  $V_{m,q}$  e  $\Psi_q$  dependem apenas de  $r$ , então  $\mathbf{P}^n$  possui apenas uma componente conexa e é da forma  $\{r \equiv cte\}$ . Para determinar o raio de  $\mathbf{P}^n$  utilizaremos o fato desta hipersuperfície ser totalmente umbílica. Então para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}^n)$  valem:

$$\langle \nabla_X N, Y \rangle = \lambda(r) \langle X, Y \rangle, \quad (4.51)$$

onde  $N = V_{m,q}(r)\partial_r$  é um vetor normal unitário.

Considere  $\partial_t$ , que é um campo do tipo tempo tangente a  $\mathbf{P}^n$ , e  $\partial_\theta$ , campo do tipo espaço tangente a  $\mathbf{P}^n$ , onde  $\theta := \theta_1$  é a primeira coordenada angular em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Aplicando estes campos (4.51) obtemos:

$$\lambda(r) = \frac{\langle \nabla_{\partial_t} N, \partial_t \rangle}{\langle \partial_t, \partial_t \rangle} = \frac{\langle \nabla_{\partial_\theta} N, \partial_\theta \rangle}{\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle}. \quad (4.52)$$

Calculando cada um dos termos presentes em (4.52) temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_t} N, \partial_t \rangle &= \langle \nabla_{\partial_t} V_{m,q}(r)\partial_r, \partial_t \rangle = \langle (\partial_t V_{m,q}(r))\partial_r + V_{m,q}(r)\nabla_{\partial_t}\partial_r, \partial_t \rangle \\ &= V_{m,q}(r) \langle \nabla_{\partial_t}\partial_r, \partial_t \rangle = V_{m,q}(r) \langle \Gamma_{01}^\lambda \partial_\lambda, \partial_t \rangle = V_{m,q}(r)\Gamma_{01}^0 \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= -V_{m,q}(r)^3 \Gamma_{01}^0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_\theta} N, \partial_\theta \rangle &= \langle \nabla_{\partial_\theta} (V_{m,q}(r)\partial_r), \partial_\theta \rangle = \langle \nabla_{\partial_t} V_{m,q}(r)\partial_r, \partial_\theta \rangle \\ &= \langle (\partial_\theta V_{m,q}(r))\partial_r + V_{m,q}(r)\nabla_{\partial_\theta}\partial_r, \partial_\theta \rangle = V_{m,q}(r) \langle \Gamma_{21}^\lambda \partial_\lambda, \partial_\theta \rangle \\ &= V_{m,q}(r)\Gamma_{21}^2 r^2. \end{aligned}$$

Como  $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = -V_{m,q}(r)^2$  e  $\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle = r^2$ , então (4.52) assume a forma  $\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{21}^2$ . Calculando estes Símbolos de Christoffel obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_t g_{10} + \partial_r g_{00} - \partial_t g_{01}) = -\frac{1}{2}V_{m,q}(r)^{-2}\partial_r(-V_{m,q}(r)^2) \\ &= \frac{1}{2}V_{m,q}(r)^{-2}\partial_r \left( 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}} \right) = \frac{1}{2}V_{m,q}(r)^{-2}2 \left( \frac{(n-2)m}{r^{n-1}} - \frac{(n-2)q^2}{r^{2n-3}} \right) \\ &= V_{m,q}(r)^{-2} \left( \frac{(n-2)m}{r^{n-1}} - \frac{(n-2)q^2}{r^{2n-3}} \right), \end{aligned}$$

e

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\theta g_{12} + \partial_r g_{22} - \partial_\theta g_{21}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2) = \frac{1}{r}.$$

Assim, (4.52) é equivalente à equação

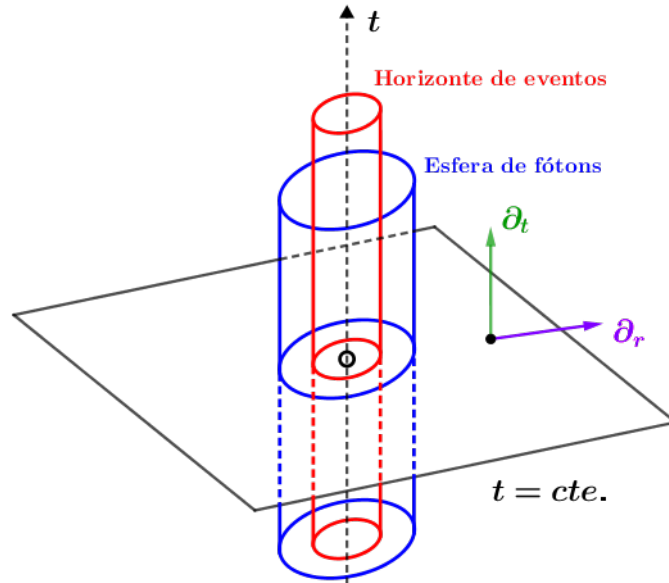
$$\left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}} + \frac{q^2}{r^{2(n-2)}}\right) = r \left(\frac{(n-2)m}{r^{n-1}} - \frac{(n-2)q^2}{r^{2n-3}}\right), \quad (4.53)$$

e portanto o raio da esfera de fótons  $\mathbf{P}^n$  satisfaz (4.53), que é equivalente à equação  $r^{2(n-2)} - mn r^{n-2} + (n-1)q^2 = 0$ , que, sendo vista como equação quadrática em  $r^{n-2}$  possui soluções

$$r'_\pm = \left(\frac{mn}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 n^2 - 4(n-1)q^2}\right)^{\frac{1}{n-2}}. \quad (4.54)$$

É importante salientar que, para  $n > 2$  vale  $n^2 > 4(n-1)$  e, portanto, se  $m^2 - q^2 > 0$  então  $m^2 n^2 - 4(n-1)q^2 > 0$ . Com isso as raízes definidas em (4.54) são reais. Podemos descartar uma destas soluções, pois, sendo  $r_+ = m + \sqrt{m^2 - q^2}$  o raio do horizonte de eventos de Reissner-Nordström, então vale  $r'_- < r_+ < r'_+$ , para todo  $n > 2$  desde que  $m^2 > q^2$ . Daí a hipersuperfície  $\{r \equiv r'_-\}$  está dentro do buraco negro e, portanto, iremos desconsiderá-la. Assim, consideramos que, para o espaço-tempo de Reissner-Nordström subextremo e massa  $m$  e carga  $q$ , existe uma única esfera de fótons localizada em  $\{r \equiv r'_+\}$ .

Figura 4.3: Representação da configuração do espaço-tempo de Reissner-Nordström subextremo. Por se tratar de um espaço-tempo estático, cada região  $\{t = cte\}$  é um instante global de tempo, representado pela variedade de Reissner-Nordström. Além disso, em azul está representada a esfera de fótons considerada, enquanto que em vermelho está representado o horizonte estático do sistema.



Fonte: elaborada pelo autor.

Por último, como a métrica induzida por  $g_{m,q}$  na parte espacial de  $\{r \equiv r'_+\}$  é da

forma  $(r'_+)^2 \Omega_{n-1}$ , então a curvatura escalar  $R_{m,q}$  da parte espacial da esfera de fótons da Reissner-Nordström é dada por

$$R_{m,q} = \frac{(n-1)(n-2)}{(r'_+)^2}. \quad (4.55)$$

Esta fórmula será importante durante a prova do Teorema Principal.

## 4.4 Sistemas assintoticamente Reissner-Nordström

No contexto de sistemas eletrostáticos,  $(M^n, g, V, \Psi)$ , vimos que o espaço-tempo estudado é o espaço estático padrão associado. Para estudar buracos negros neste contexto, consideramos  $M^n$  como um fim assintótico, pois sua segunda forma fundamental já satisfaz automaticamente condições adequadas de decaimento (pois é totalmente geodésica), restando apenas adicionar hipóteses quanto ao decaimento de  $g$  (assintoticamente euclidiana, por exemplo). Porém estaremos interessados em comparar todo o sistema eletrostático com alguma variedade de Reissner-Nordström, isto é, comparar  $g$  com uma métrica de Reissner-Nordström e também suas funções de lapso e potenciais elétricos.

Para isso utilizaremos uma norma no espaço  $C^2(\mathbb{R}^n)$  de acordo com a seguinte definição.

**Definição 40.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um domínio aberto e  $f \in C^2(U)$ . Para  $k \in \mathbb{Z}$ , definimos a norma de  $f$  por:*

$$\|f\|_{C^2_k(U)} := \sup_{x \in U} (|x|^k \cdot |f(x)| + |x|^{k+1} \cdot |Df(x)| + |x|^{k+2} \cdot |D^2f(x)|). \quad (4.56)$$

**Observação 6.** *Para o caso em que  $k = 0$  iremos denotar a norma sem o índice 0. Faremos isso pois  $C_0$  costuma denotar funções com suporte compacto.*

Estaremos interessados em estudar sistemas  $(M^n, g, V, \Psi)$  que, em uma “vizinhança do infinito” se aproximam de algum sistema Reissner-Nordström. Neste caso iremos exigir que não apenas a métrica  $g$  se aproxime de  $g_{m,q}$ , mas também que o lapso  $V$  e o potencial elétrico  $\Psi$  se aproximem, respectivamente, de  $V_{m,q}$  e  $\Psi_q$ . Esta comparação é feita utilizando coordenadas isotrópicas na variedade de Reissner-Nordström, lembrando que o horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström nestas coordenadas é dado por  $s_{m,q} = \left(\frac{m^2 - q^2}{4}\right)^{\frac{1}{2(n-2)}}$ .

**Definição 41.** *Uma quadrupla  $(M^n, g, V, \Psi)$ , formada por uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  e funções  $V, \Psi \in C^\infty(M^n)$ , é dita sistema assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  se:*

1.  $M^n$  é difeomorfa a  $K \sqcup E^n$ , onde  $K$  é um compacto e  $E^n$  é um fim assintótico que é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$  para algum  $S > s_{m,q}$ .

2. Para o difeomorfismo  $\Phi = (x^1, \dots, x^n) : E^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$  e a métrica  $g$ , existe  $C > 0$  tal que

$$\|(\Phi_*g)_{ij} - (g_{m,q})_{ij}\|_{C^2_{-(n-1)}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)})} \leq C, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

3. O pushforward  $\Phi_*g$  é positivo definido e uniformemente contínuo em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$ .

4. Existe  $C > 0$  para qual

$$\|\Phi_*V - V_{m,q}\|_{C^2_{-(n-1)}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)})} \leq C, \quad e \quad \|\Phi_*\Psi - \Psi_q\|_{C^2_{-(n-1)}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)})} \leq C.$$

Note que a assintoticidade do lapso e do potencial pode ser interpretada em termo de seus limites e dos limites das suas derivadas primeira e segunda. Por exemplo, como  $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{m,q}(r) = 1$ , a expressão  $\|\Phi_*V - V_{m,q}\|_{C^2_{-(n-1)}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)})} \leq C$  nos garante que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\Phi_*V)(x) = 1$ . Reciprocamente, se considerarmos uma função diferenciável  $V > 0$  em  $M^n$  tal que seu limite, o limite de sua derivada primeira e o limite de sua derivada segunda são iguais, respectivamente, ao limite do lapso  $V_{m,q}$ , de sua derivada primeira e de sua derivada segunda, então podemos garantir que  $V$  é um lapso assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ . Utilizaremos este raciocínio implicitamente durante as próximas duas proposições.

Note também que toda variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  que se enquadre na Definição 41 é necessariamente assintoticamente euclidiana (Definição 24), pois a variedade de Reissner-Nordström  $n$ -dimensional de massa  $m$  e carga  $q$  é assintoticamente euclidiana. No que segue provaremos duas proposição que serão bastante importantes para aplicar o Teorema da Massa Positiva durante a prova do Teorema 1.

**Proposição 25.** *Seja  $(M^n, g, n, \Psi)$  um sistema assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ . Suponha que  $\Omega_+ \in C^\infty(M^n)$  dada por*

$$\Omega_+ := \left( \frac{(1+V)^2 - c_n \Psi^2}{4} \right)^{\frac{1}{n-2}}$$

*é extritamente positiva. Então a métrica  $\Omega_+^2 g$  é assintoticamente Reissner-Nordström de massa e carga nulas.*

*Demonstração.* Seja  $\Phi : E^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S(0)}$  o difeomorfismo que faz de  $(M^n, g)$  assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  e  $S > s_{m,q}$  de acordo com a Definição 41.

Queremos mostrar que existe  $C > 0$  tal que

$$\left\| (\Phi_*\Omega_+^2 g)_{ij} - (g_{m=0,q=0})_{ij} \right\|_{C^2_{-(n-1)}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)})} \leq C \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$



Com o propósito de não sobrecarregar a notação, escreveremos simplesmente  $\|f\|_{C^2_{-k}}$  para indicar a norma de funções considerada, omitindo o conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$ , pois em todos os casos durante esta demonstração consideraremos este conjunto. Além disso por abuso de notação iremos omitir o termo  $\Phi_*$ , escrevendo simplesmente,  $V$ ,  $\Psi$ ,  $\Omega_+$  e  $g$  para nos referir a  $\Phi_*V$ ,  $\Phi_*\Psi$ ,  $\Phi_*\Omega_+$  e  $\Phi_*g$ , respectivamente.

Lembrando que  $\varphi_{m,q} = \left( \frac{(V_{m,q}+1)^2 - c_n^2 \Psi_q^2}{4} \right)^{-1}$ , então existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\left\| (\varphi_{m,q})^{\frac{-2}{n-2}} - \left( \frac{(V_{m,q}+1)^2 - c_n^2 \Psi_q^2}{4} \right)^{\frac{2}{n-2}} \right\|_{C^2} \leq C_1. \quad (4.57)$$

Por hipótese, também temos que existe  $C_2 > 0$  tal que:

$$\|V - V_{m,q}\|_{C^2_{-(n-1)}} \leq C_2, \quad \|\Psi - \Psi_q\|_{C^2_{-(n-1)}} \leq C_2.$$

Com isso podemos garantir que

$$\left\| \Omega_+^2 - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \right\|_{C^2_{-(n-1)}} \leq C_3, \quad (4.58)$$

para alguma constante  $C_3 = C_3(C_2, n, S)$ .

Note que, de (4.58), temos

$$\left\| \Omega_+^2 - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \right\|_{C^2} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}} \left| \frac{1}{|x|^{n-1}} \right| \cdot \left\| \Omega_+^2 - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \right\|_{C^2_{-(n-1)}} < \frac{C_3}{S^{n-1}}, \quad (4.59)$$

e, então,

$$\left\| \Omega_+^2 \right\|_{C^2} = \left\| \Omega_+^2 + (\varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}}) \right\|_{C^2} \leq \left\| \Omega_+^2 - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \right\|_{C^2} + \left\| \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \right\|_{C^2} < C_4, \quad (4.60)$$

onde  $C_4 = C_4(C_1, C_3, n, S)$ .

Por hipótese (da Definição 41) temos que  $\|g_{ij} - (g_{m,q})_{ij}\|_{C^2_{-(n-1)}} \leq C_5$ , para algum  $C_5$  e para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Daí, de (4.60), temos que

$$\begin{aligned} \left\| \Omega_+^2 g_{ij} - \Omega_+^2 (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C^2_{-(n-1)}} &\leq \sup_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}} |\Omega_+^2| \cdot \|g_{ij} - (g_{m,q})_{ij}\|_{C^2_{-(n-1)}} \\ &\leq \left\| \Omega_+^2 \right\|_{C^2} \cdot \|g_{ij} - (g_{m,q})_{ij}\|_{C^2_{-(n-1)}} \\ &< C_6, \end{aligned} \quad (4.61)$$

para algum  $C_6 > C_5 \cdot C_4$ .

Lembrando que, pelas coordenadas isotrópicas da variedade de Reissner-Nordström temos  $g_{m,q} = \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \delta$ . Daí:

$$\begin{aligned}
\left\| \Omega_+^2 (g_{m,q})_{ij} - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} &= \left\| \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} (\Omega_+^2 \delta_{ij} - (g_{m,q})_{ij}) \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\
&\leq \sup_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}} \left| \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} \right| \cdot \left\| \Omega_+^2 \delta_{ij} - (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\
&< C_7,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

para algum  $C_7 = C_7(C_1, C_3, n, S)$ , pois  $\varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}}$  é limitada em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$ .

Finalmente, unindo (4.61) e (4.62) obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \Omega_+^2 g_{ij} - (g_{m=0,q=0})_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} &= \left\| \Omega_+^2 g_{ij} - \delta_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} = \left\| \Omega_+^2 g_{ij} - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\
&\leq \left\| \Omega_+^2 g_{ij} - (\Phi_* \Omega_+^2) (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\
&\quad + \left\| \Omega_+^2 (g_{m,q})_{ij} - \varphi_{m,q}^{\frac{-2}{n-2}} (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\
&< C,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

para alguma constante  $C > C_6 + C_7$ .

Logo  $(M^n, \Omega_+^2 g)$  é assintoticamente Reissner-Nordström de massa 0 e carga 0.  $\square$

**Proposição 26.** *Seja  $(M^n, g, n, \Psi)$  um sistema assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ . Suponha que  $\Omega_- \in C^\infty(M^n)$  dada por*

$$\Omega_- := \left( \frac{(1-V)^2 - c_n \Psi^2}{4} \right)^{\frac{1}{n-2}}$$

*é extritamente positiva. Então pode-se inserir um ponto  $p_\infty$  em  $(M^n, \Omega_-^2 g)$  obtendo uma variedade Riemanniana completa  $(M_\infty^n := M^n \cup \{p_\infty\}, \widehat{g}_\infty)$  que é  $C^{1,1}$ -regular em  $p_\infty$  e tem bordo  $\partial M_\infty = \partial M$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Phi : E^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$  o difeomorfismo que faz de  $(M^n, g)$  assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  e  $S > s_{m,q}$  de acordo com a Definição 41. Da mesma maneira que fizemos na prova anterior, omitiremos o conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$  dos índices das normas de funções quando este for o conjunto considerado, bem como omitiremos  $\Phi_*$  por abuso de notação.

Por hipótese, existe uma constante  $C > 0$  para qual

$$\|g_{ij} - (g_{m,q})_{ij}\|_{C_{-(n-1)}^2} \leq C, \quad \|V - V_{m,q}\|_{C_{-(n-1)}^2} \leq C, \quad \|\Psi - \Psi_q\|_{C_{-(n-1)}^2} \leq C.$$

Definindo  $\phi_{m,q} := \frac{(1-V_{m,q})^2 - c_n^2 \Psi_q^2}{4}$ , então, analogamente a (4.58) vale que

$$\left\| \Omega_-^2 - \phi_{m,q}^{\frac{2}{n-2}} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \leq C_1, \quad (4.64)$$

para alguma constante  $C_1 = C_1(C, n, S)$ .

Note que, em coordenadas isotrópicas na variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  vale

$$4\phi_{m,q} = (1 - V_{m,q})^2 - c_n^2 \Psi_q^2 = \frac{m^2 - q^2}{s^{2(n-2)} \left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}}\right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{n-2}}\right)}, \quad (4.65)$$

e, portanto,

$$\frac{(1 - V_{m,q})^2 - c_n^2 \Psi_q^2}{4} \cdot \varphi_{m,q} = \frac{m^2 - q^2}{4s^{2(n-2)}} = \left(\frac{s_{m,q}}{s}\right)^{2(n-2)}.$$

De (4.65) temos garantido que  $\left\| \phi_{m,q}^{\frac{2}{n-2}} \right\|_{C_{-4}^2} \leq C_0$ , para alguma constante  $C_0 = C_0(m, q, n, S)$ . Portanto o mesmo vale para  $\Omega_-^2$ , ou seja,  $\|\Omega_-^2\|_{C_{-4}^2} \leq C_0$ .

Segue que

$$\left\| \Omega_-^2 g_{ij} - \Omega_-^2 (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n+3)}^2} \leq \|\Omega_-^2\|_{C_{-4}^2} \cdot \|g_{ij} - (g_{m,q})_{ij}\|_{C_{-(n-1)}^2} < C_2, \quad (4.66)$$

para algum  $C_2 > C_0 \cdot C$ .

Como  $\|(g_{m,q})_{ij}\|_{C^2} \leq C_3$ , para alguma constante  $C_3 = C_3(m, q, n, S)$ , então vale

$$\begin{aligned} \left\| \Omega_-^2 g_{ij} - \left(\frac{s_{m,q}}{s}\right)^4 \delta_{ij} \right\|_{C_{-(n+3)}^2} &= \left\| \Omega_-^2 g_{ij} - \left(\frac{(1 - V_{m,q})^2 - c_n^2 \Psi_q^2}{4}\right)^{\frac{2}{n-2}} (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n+3)}^2} \\ &= \left\| \Omega_-^2 g_{ij} - \Omega_-^2 (g_{m,q})_{ij} + \Omega_-^2 (g_{m,q})_{ij} - \phi_{m,q}^{\frac{2}{n-2}} (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n+3)}^2} \\ &\leq C_2 + \left\| \Omega_-^2 (g_{m,q})_{ij} - \phi_{m,q}^{\frac{2}{n-2}} (g_{m,q})_{ij} \right\|_{C_{-(n+3)}^2} \\ &= C_2 + \left\| \Omega_-^2 - \phi_{m,q}^{\frac{2}{n-2}} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \cdot \|(g_{m,q})_{ij}\|_{C^2} < C_3, \end{aligned} \quad (4.67)$$

para alguma constante  $C_3 > C_2 + C_1 \cdot C_3$ .

Denotaremos por  $(y^i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , coordenadas em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$  para quais  $s = |y|_\delta$ . Então faremos uma inversão na esfera de raio  $s_{m,q}$ , criando novas coordenadas  $\eta^i := \left(\frac{s_{m,q}}{s}\right)^2 y^i$ . Note que

$$\frac{\partial y^i}{\partial \eta^k} = \frac{s^2}{s_{m,q}^2} \left( \delta_k^i - 2 \frac{y^i y_k}{s^2} \right).$$

Denotaremos  $\{\tilde{\partial}_k, \tilde{\partial}_l\}$  os vetor coordenados de  $\{\eta^k, \eta^l\}$  e  $\{\partial_i, \partial_j\}$  os vetores coordenados

de  $\{y^i, y^j\}$ . Então, pela fórmula de mudança de coordenadas em campos tensoriais, vale

$$\begin{aligned} (\Omega_{-g}^2)(\tilde{\partial}_k, \tilde{\partial}_l) &= (\Omega_{-g}^2)(\partial_i, \partial_j) \frac{\partial y^i}{\partial \eta^k} \frac{\partial y^j}{\partial \eta^l} \\ &= (\Omega_{-g}^2)(\partial_i, \partial_j) \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \left( \delta_k^i - 2 \frac{y^i y_k}{s^2} \right) \left( \delta_l^j - 2 \frac{y^j y_l}{s^2} \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

e

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\partial}_k, \tilde{\partial}_l) &= \delta(\partial_i, \partial_j) \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \left( \delta_k^i - 2 \frac{y^i y_k}{s^2} \right) \left( \delta_l^j - 2 \frac{y^j y_l}{s^2} \right) \\ &= \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \sum_{i=1}^n \left( \delta_k^i - 2 \frac{y^i y_k}{s^2} \right) \left( \delta_l^i - 2 \frac{y^i y_l}{s^2} \right) \\ &= \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \sum_{i=1}^n \left( \delta_k^i \delta_l^i - 2 \delta_k^i \frac{y^i y_l}{s^2} - 2 \delta_l^i \frac{y^i y_k}{s^2} + 4 \frac{(y^i)^2 y_k y_l}{s^4} \right) \\ &= \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \left( \delta_{kl} - 2 \frac{y^k y_l}{s^2} - 2 \frac{y^l y_k}{s^2} + 4 \frac{y_k y_l}{s^2} \right) \\ &= \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Utilizando (4.68) e (4.69) obtemos:

$$\begin{aligned} &\left\| (\Omega_{-g}^2)(\tilde{\partial}_k, \tilde{\partial}_l) - \delta_{kl} \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\ &= \left\| \left[ (\Omega_{-g}^2)_{ij} - \left( \frac{s_{m,q}}{s} \right)^4 \delta_{ij} \right] \left( \frac{s}{s_{m,q}} \right)^4 \left( \delta_k^i - 2 \frac{y^i y_k}{s^2} \right) \left( \delta_l^j - 2 \frac{y^j y_l}{s^2} \right) \right\|_{C_{-(n-1)}^2} \\ &\leq C_4, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C_4 = C_4(C_3, m, q, n, S)$ .

Em relação às novas coordenadas  $(\eta^i)$ , utilizando  $S' = \frac{s_{m,q}^2}{S}$  podemos concluir

$$\left\| (\Omega_{-g}^2)(\tilde{\partial}_k, \tilde{\partial}_l) - \delta_{kl} \right\|_{C_{-2}^2(B_{S'}^n(0))} < C_5, \quad (4.70)$$

para algum  $C_5 = C_5(C_2, m, q, n, S)$ .

Portanto, podemos inserir um ponto  $p_\infty$  em  $M^n$ , de modo que  $\eta^i(p_\infty) = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Com isso estendemos  $\hat{g}$  a uma métrica  $\hat{g}_\infty$  em  $M_\infty^n := M^n \cup \{p_\infty\}$  dada por

$$g_\infty(x) := \begin{cases} \Omega_{-g}^2(x), & \text{para } x \neq p_\infty, \\ \delta, & \text{para } x = p_\infty, \end{cases} \quad (4.71)$$

e, por (4.70) temos que  $\hat{g}_\infty$  tem regularidade  $C^{1,1}$  em  $p_\infty$ .  $\square$

### 4.4.1 Massa e carga

Nesta subseção mostraremos dois lemas referentes a sistemas assintoticamente Reissner-Nordström que serão importantes durante a prova do teorema principal.

**Lema 6.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  tal que (3.30) é satisfeita. Suponha que  $V$  é constante em cada componente conexa de  $\partial M^n$  e que  $\nu(V) > 0$  em  $\partial M^n$ , onde  $\nu$  é o vetor normal unitário apontando para o exterior em  $\partial M^n$ . Então  $m > 0$ .*

*Demonstração.* Primeiramente vamos supor que  $V > 0$  em  $\partial M^n$ . Considere coordenadas assintóticas no difeomorfismo  $\Phi : E^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_S^n(0)}$ . Denotamos por  $\mathbb{S}_r$  a imagem inversa por  $\Phi$  da esfera euclidiana de raio  $r$ . Então, pelo Teorema da Divergência e por (3.30) vale

$$\begin{aligned} 0 < \int_{\partial M^n} \nu(V) &= - \int_{B_r^{n-1}(0)} \Delta V + \int_{\mathbb{S}_r} \nu(V) \\ &= - \int_{B_r^{n-1}(0)} \frac{c_n^2}{V} |d\Psi|_g^2 + \int_{\mathbb{S}_r} \nu(V). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Considerando  $\nu_{m,q} = V_{m,q} \partial_r$  o normal exterior às folhas  $\{r \equiv cte\}$  na variedade de Reissner-Nordström, temos que, pelo comportamento assintótico de  $V$ , existe um  $R > 0$  tal que, para todo  $r > R$  vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_r} \nu(V) &= \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} \nu_{m,q}(V_{m,q}) \\ &= (n-2) \int_{\mathbb{S}_1^{n-1}} \left[ \int_r \left( \frac{m}{r^{n-1}} - \frac{q^2}{r^{2n-3}} \right) r^{n-1} dr \right] d\mathcal{V}_{\Omega_{n-1}} \\ &= (n-2) \left( m - \frac{q^2}{(n-2)r^{n-2}} \right) \text{vol}(\mathbb{S}_1^{n-1}), \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde  $d\mathcal{V}_{\Omega_{n-1}}$  denota a forma volume de  $\mathbb{S}_1^{n-1}$ .

Daí, considerando uma sequência crescente de raios  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  com  $r_k \rightarrow \infty$ , podemos unir (4.73) a (4.72), obtendo

$$0 < - \int_{M^n} \frac{c_n^2}{V} |d\Psi|_g^2 + \lim_{r_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{r_k}} \nu(V) \leq \lim_{r_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{r_k}} \nu(V) = (n-2) \text{vol}(\mathbb{S}_1^{n-2}) m,$$

e, portanto,  $m > 0$ .

Se  $V$  se anular em alguma componente de  $\partial M^n$ , podemos utilizar o fato de que  $\nu(V)|_{\partial M^n} > 0$  para considerar um “nível” de  $V$  e cercar o bordo  $\partial M^n$  por uma hipersuperfície fechada na qual  $V > 0$  e  $\nu(V) > 0$ , aplicando o raciocínio anterior a partir desta hipersuperfície, concluindo a demonstração.  $\square$

O Lema seguinte nos permite retirar a hipótese de que  $m > |q|$  do Teorema de Unicidade.

**Lema 7.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático, assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$  para o qual  $\partial M^n$  é orientável. Considere as seguintes afirmações:*

(i) *cada componente conexa de  $\partial M^n$  é uma esfera de fótons quase-local subextrema ou um horizonte estático não-degenerado;*

(ii)  $F_{\pm} = V - 1 \pm c_n \Psi < 0$  em  $M^n$ ;

(iii)  $m^2 > q^2$ .

Então (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

*Demonstração.* Começaremos por (i)  $\Rightarrow$  (ii). Por hipótese podemos escrever  $\partial M = \left( \bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^{n-1} \right) \cup \left( \bigcup_{i=l+1}^L \widehat{\Sigma}_i^{n-1} \right)$ , onde cada  $\Sigma_i^{n-1}$  é uma esfera de fótons quase-local subextrema e cada  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  é um horizonte estático não-degenerado. Seja  $\nu$  o campo vetorial normal unitário interior a  $\partial M^n$  (isto é,  $\nu$  aponta para  $M^n$ ).

Primeiramente vamos mostrar que  $\nu(F_{\pm}) > 0$  em  $\partial M^n$ . Para as componentes de esfera de fótons, podemos utilizar a subextremalidade e as equações (4.25) e (4.26) para obter:

$$\begin{aligned} 0 &< H_i^2 - \frac{n-2}{n-1} R_{\sigma_i} = H_i^2 - \frac{n-2}{n-1} \left( \frac{n}{n-1} H_i^2 + \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} \right) H_i^2 - \frac{c_n^2 \lambda_i^2}{V_i^2} = \kappa_i^2 - c_n^2 \lambda_i^2 \\ &= (\kappa_i + c_n \lambda_i) (\kappa_i - c_n \lambda_i) = \nu(F_+) |_{\Sigma_i^{n-1}} \cdot \nu(F_-) |_{\Sigma_i^{n-1}}. \end{aligned}$$

Então, considerando  $\nu(F_{\pm}) |_{\Sigma_i^{n-1}}$ , temos que ou ambas são positivas ou ambas são negativas. Por hipótese vale que  $\nu(V) |_{\Sigma_i^{n-1}} = \kappa_i > 0$ . Se  $\lambda_i > 0$ , então obrigatoriamente  $\nu(F_+) |_{\Sigma_i^{n-1}} = \kappa_i + c_n \lambda_i > 0$  e, portanto,  $\nu(F_-) |_{\Sigma_i^{n-1}} > 0$ . Se  $\lambda_i < 0$ , então  $\nu(F_-) = \kappa_i - c_n \lambda_i > 0$  e, portanto,  $\nu(F_+) |_{\Sigma_i^{n-1}} > 0$ . Logo  $\nu(F_{\pm}) |_{\Sigma_i^{n-1}} > 0$ .

Para as componentes de horizonte estático  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  temos que  $\nu(F_{\pm}) > 0$  pela análise do comportamento de  $F_{\pm}$  feita próxima do horizonte em [26].

Note que, aplicando a Proposição 6 a (3.31) obtemos:

$$0 = \operatorname{div} \left( \frac{1}{V} \cdot \operatorname{grad} \Psi \right) = \frac{\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Psi)}{V} + d \left( \frac{1}{V} \right) (\operatorname{grad} \Psi) = \frac{\Delta \Psi}{V} - \frac{1}{V^2} dV(\operatorname{grad} \Psi),$$

ou seja,

$$\Delta \Psi = \frac{1}{V} \langle \operatorname{grad} V, \operatorname{grad} \Psi \rangle. \quad (4.74)$$

Juntando (3.30) e (4.74), obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta F_{\pm} &= \Delta V \pm c_n \Delta \Psi = \frac{c_n^2}{V} |d\Psi|^2 \pm \frac{c_n}{V} \langle \text{grad } V, \text{grad } \Psi \rangle \\ &= \pm \frac{c_n^2}{V} (\langle \pm c_n \text{grad } \Psi, \text{grad } \Psi \rangle + \langle \text{grad } V, \text{grad } \Psi \rangle) = \pm \frac{c_n^2}{V} d\Psi(\text{grad } F_{\pm}).\end{aligned}\quad (4.75)$$

Então temos que  $\Delta F_{\pm} \mp \frac{c_n^2}{V} d\Psi(\text{grad } F_{\pm}) = 0$ . Em coordenadas locais esta equação tem a forma

$$LF_{\pm} = g^{ij} \partial_i \partial_j F_{\pm} \pm \frac{c_n^2}{V} g^{ij} (\Gamma_{ij}^{\lambda} \partial_{\lambda} F_{\pm} - \partial_j \Psi \partial_i F_{\pm}),$$

e, portanto, é um operador diferencial de segunda ordem elíptico em  $M^n$  com  $LF_{\pm} \geq 0$ . Com isso podemos aplicar o princípio do máximo a  $F_{\pm}$  em  $M^n$ .

Suponha que existe  $p \in M^n$  tal que  $F_{\pm}(p) \geq 0$ . Pelo comportamento assintótico temos que  $F_{\pm} \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Denotemos  $\Omega_r$  um compacto de  $M^n$  para qual  $\partial\Omega_r = \partial M^n \cup \mathbb{S}_r$ , onde  $\mathbb{S}_r$  denota a imagem inversa de uma esfera por  $\Phi$  como no lema anterior.

Vamos supor que existe  $r_0 > 0$  tal que para todo  $r \geq r_0$  o máximo de  $F_{\pm}$  em  $\Omega_r$  é atingido em  $\text{int}\Omega_r$ . Então, pelo princípio do máximo para o interior, Teorema 6,  $F_{\pm}$  é constante em  $\Omega_r$  para todo  $r \geq r_0$  e portanto é constante em  $M^n$ . Pelas condições assintóticas,  $F_{\pm}$  só pode ser constante se for identicamente nula, o que entra em contradição com as hipóteses do Lema (pois trata-se de um sistema eletrostático com bordos que definem regiões de buraco negros ou esferas de fótons, ou seja, são soluções não triviais de Einstein-Maxwell). Logo existe uma sequência crescente de raios  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  com  $r_k \rightarrow \infty$  tal que, para todo  $k \in \mathbb{N}$  o máximo de  $F_{\pm}$  em  $\Omega_{r_k}$  é atingido em  $\partial\Omega_{r_k} = \partial M^n \cup \mathbb{S}_{r_k}$ .

Se o máximo estiver em  $\partial M^n$  então teríamos que  $\nu(F_{\pm}) \leq 0$  para algum ponto em  $\partial M^n$ , obtendo uma contradição com o fato de que  $\nu(F_{\pm}) > 0$  em  $\partial M^n$ . Logo, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que o máximo de  $F_{\pm}$  em  $\Omega_{r_k}$  está em  $\mathbb{S}_{r_k} \subset \partial\Omega_{r_k}$ . Sem perda de generalidade vamos supor que  $p \in \Omega_{r_k}$  para todo  $k$ . Então, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe um ponto  $p_k \in \mathbb{S}_{r_k}$  tal que

$$0 \leq F_{\pm}(p) \leq F_{\pm}(p_k) \leq F_{\pm}(p_{k+1}) \rightarrow 0,$$

ou seja,  $F_{\pm} \equiv 0$ , absurdo. Portanto  $F_{\pm} < 0$  em  $M^n$ .

Quanto à (ii)  $\Rightarrow$  (iii), com as expressões do lapso e do potencial elétrico da variedade de Reissner-Nordström em coordenadas isotrópicas, (3.40) e (3.41), temos que

$$V_{m,q} - 1 \pm c_n \Psi_q = \frac{(-m \pm q)s^{-n+2}}{\left(1 + \frac{m+q}{2s^{n-2}}\right) \left(1 + \frac{m-q}{2s^{m-2}}\right)},\quad (4.76)$$

ou seja, para  $s \rightarrow \infty$  vale:

$$V_{m,q} - 1 \pm c_n \Psi_q = (-m \pm q)s^{-n+2} + \mathcal{O}(r^{-n+1}).\quad (4.77)$$

Pelo comportamento assintótico de  $V$  e  $\Psi$  temos que, para  $|x| \rightarrow \infty$  no fim assintótico

$$F_{\pm} = (-m \pm q)|x|^{-n+2} + \mathcal{O}(|x|^{-n+1}). \quad (4.78)$$

Por hipótese  $F_{\pm} < 0$  e, portanto,  $m > \pm q$ , ou seja,  $m^2 > q^2$ . □



# Capítulo 5

## Prova do Teorema de Unicidade

Finalmente partiremos para a demonstração do Teorema 1. Relembrando, queremos demonstrar:

**Teorema 1.** *Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema eletrostático assintoticamente Reissner-Nördstrom de massa  $m$  e carga  $q$ , com  $n \geq 3$ . Suponha que  $\partial M^n$  é orientável, com componentes conexas que são horizontes estáticos ou esferas de fótons quase-locais subextremas. Então  $(M^n, g)$  é isométrica a uma região da variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , com  $m > |q|$ .*

Seja  $(M^n, g, V, \Psi)$  um sistema nas hipóteses do Teorema. Neste caso, o bordo  $\partial M^n$  admite a decomposição

$$\partial M = \left( \bigcup_{i=1}^l \Sigma_i^{n-1} \right) \cup \left( \bigcup_{i=l+1}^L \widehat{\Sigma}_i^{n-1} \right), \quad (5.1)$$

onde cada  $\Sigma_i^{n-1}$  é uma esfera de fótons quase-local e cada  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  é um horizonte estático. Com base nesta decomposição que iniciaremos a prova do teorema.

### 5.1 Ideia da prova

Primeiramente vamos apresentar a argumentação principal utilizada durante a prova do Teorema 1, a ser detalhada nas Seções 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5. Inicialmente anexaremos cilindros a cada componente de esfera de fótons do bordo, de modo que o bordo de cada cilindro seja um horizonte estático não-degenerado (Figura 5.2). Então, vamos considerar a variedade  $\widetilde{M}^n$ , consistindo da variedade original  $M^n$  junto dos cilindros  $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$ . Em seguida duplicaremos  $\widetilde{M}^n$ , anexando as duas cópias,  $\widetilde{M}_+^n$  e  $\widetilde{M}_-^n$ , ao longo do bordo num processo de espelhamento que gerará uma nova variedade, denotada por  $\widehat{M}^n$  (Figura 5.3). A uma das cópias aplicaremos a Proposição 25, mostrando que sua métrica pode ser transformada a uma métrica conforme que é assintoticamente Reissner-Nordström de massa e carga nulas. À outra cópia aplicaremos a Proposição 26, o que permitirá a inserção de um

ponto  $p_\infty$  a  $\widehat{M}^n$ , de modo que a nova métrica seja  $C^{1,1}$  (Figura 5.4). Com isso poderemos aplicar o Teorema da Massa Positiva, o que garantirá que a nossa variedade final seja isométrica ao espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Finalmente utilizaremos esta isometria para mostrar que o espaço original é isométrico à variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ .

## 5.2 Colagem dos cilindros

Para cada componente de esfera de fótons do bordo, isto é, cada  $\Sigma_i^{n-1}$  em (5.1) com  $i \in \{1, \dots, l\}$ , definiremos um raio  $r_i$ , uma massa  $m_i$  e uma carga  $q_i$  associados a uma variedade de Reissner-Nordström de massa  $m_i$  e carga  $q_i$ . Para isso, lembrando que a curvatura escalar  $R_{\sigma_i}$  de  $\Sigma_i^{n-1}$  é positiva e constante (pela Definição 37), definimos:

$$r_i := \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{R_{\sigma_i}}}. \quad (5.2)$$

Como  $\Psi$  é constante em  $\Sigma_i^{n-1}$ , podemos definir uma carga como

$$q_i := \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}} \cdot \frac{\lambda_i}{V_i} \cdot r_i^{n-1}, \quad (5.3)$$

e uma massa como

$$m_i := \frac{r_i^{n-2}}{n} + \frac{(n-1)}{nr_i^{n-2}} \cdot q_i^2. \quad (5.4)$$

Note que, se  $m_i^2 > q_i^2$  então  $R_{\sigma_i}$  coincide com a curvatura escalar da esfera de fótons do espaço-tempo de Reissner-Nordström de massa  $m_i$  e carga  $q_i$ . Pensando nisso, vamos verificar que  $m_i^2 > q_i^2$ , para garantir que o espaço de Reissner-Nordström associado seja subextremo.

Elevando ambos os lados de (5.4) ao quadrado obtemos

$$\begin{aligned} n^2 r_i^{2(n-2)} m_i^2 &= \left( r_i^{2(n-2)} + (n-1)q_i^2 \right)^2 \\ &= r_i^{4(n-2)} + 2(n-1)r_i^{2(n-2)}q_i^2 + (n-1)^2q_i^4. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Subtraindo  $n^2 r_i^{2(n-2)} q_i^2$  em ambos os lados de (5.5) resulta na equação

$$n^2 r_i^{2(n-2)} (m_i^2 - q_i^2) = r_i^{4(n-2)} - (n^2 - 2n + 2) q_i^2 r_i^{2(n-2)} + (n-1)^2 q_i^4.$$

Daí  $m_i^2 > q_i^2$  se, e somente se,

$$r_i^{4(n-2)} - (n^2 - 2n + 2) q_i^2 r_i^{2(n-2)} + (n-1)^2 q_i^4 > 0. \quad (5.6)$$

Pensando (5.6) como uma equação quadrática em  $r_i^{2(n-2)}$ , então o termo da esquerda é estritamente positivo se, e somente se,

$$\begin{aligned}
r_i^{2(n-2)} &> \frac{(n^2 - 2n + 2) q_i^2 + \sqrt{(n^2 - 2n + 2)^2 q_i^4 - 4(n-1)^2 q_i^4}}{2} \\
&= \frac{(n^2 - 2n + 2) q_i^2 + \sqrt{n^2 (n-2)^2 q_i^4}}{2} = \frac{(n^2 - 2n + 2) q_i^2 + n(n-2) q_i^2}{2} \\
&= \frac{(2n^2 - 4n + 2) q_i^2}{2} = (n-1)^2 q_i^2 = (n-1)^2 \cdot \frac{2}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{\lambda_i^2}{V_i^2} \cdot r_i^{2(n-1)} \\
&= \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2} \cdot r_i^{2(n-1)}, \tag{5.7}
\end{aligned}$$

onde substituímos (5.3) em  $q_i^2$ .

Note que a inequação (5.7) pode ser reescrita utilizando (5.2):

$$\frac{R_{\sigma_i}}{(n-1)(n-2)} = r_i^{-2} > \frac{(n-1)}{(n-2)} \cdot \frac{2\lambda_i^2}{V_i^2}.$$

Por hipótese cada  $\Sigma_i^{n-1}$  é uma esfera de fótons quase-local subextrema, o que nos permite aplicar (4.25) e (4.50), concluindo que  $m_i^2 > q_i^2$ , pois:

$$\begin{aligned}
m_i^2 > q_i^2 &\iff \frac{R_{\sigma_i}}{(n-1)(n-2)} > \frac{(n-1)}{(n-2)} \left( R_{\sigma_i} - \frac{n}{n-1} H_i^2 \right) \\
&\iff \left( \frac{1 - (n-1)^2}{(n-1)(n-2)} \right) R_{\sigma_i} > \frac{n}{n-2} H_i^2 \\
&\iff \frac{-n}{n-1} R_{\sigma_i} > \frac{n}{n-2} H_i^2 \\
&\iff \frac{H_i^2}{R_{\sigma_i}} > \frac{n-2}{n-1} \\
&\iff \Sigma_i^{n-1} \text{ é subextrema.}
\end{aligned}$$

Como o espaço-tempo de Reissner-Nordström de massa  $m_i$  e carga  $q_i$  é subextremo, podemos utilizar o seu raio de horizonte de eventos e seu raio de esfera de fótons para definir o intervalo  $I_i$ , que será a “altura” do cilindro. Definimos

$$I_i = [a_i, b_i] := \left[ \left( m_i + \sqrt{m_i^2 - q_i^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}, \left( \frac{m_i n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{m_i^2 n^2 - 4(n-1)q_i^2} \right)^{\frac{1}{n-2}} \right]. \tag{5.8}$$

Em  $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$  definimos a métrica

$$\gamma_i := \frac{1}{V_{m_i, q_i}(r)^2} dr^2 + \frac{r^2}{r_i^2} \sigma_i, \tag{5.9}$$

onde  $\sigma_i$  é a métrica de  $\Sigma_i^{n-1}$  induzida por  $g$  e  $V_{m_i, q_i}(r) = \sqrt{1 - \frac{2m_i}{r^{n-2}} + \frac{q_i^2}{r^{2(n-2)}}$  é o lapso de Reissner-Nordström de massa  $m_i$  e carga  $q_i$ . Lembrando também que o potencial elétrico de carga  $q_i$  é dado por  $\Psi_{q_i}(r) = \frac{q_i}{c_n r^{n-2}}$ .

Utilizaremos isso para construir um sistema eletrostático tracejado, conforme o seguinte lema.

**Lema 8.** *Sejam  $\alpha_i, \beta_i$  constantes com  $\alpha_i > 0$ . Então:*

- (i)  $(I \times \Sigma_i^{n-1}, \gamma_i, \alpha_i V_{m_i, q_i}, \alpha_i \Psi_{q_i} + \beta_i)$  é um sistema eletrostático tracejado.
- (ii)  $\mathbb{R} \times \{b_i\} \times \Sigma_i^{n-1}$  é uma esfera de fótons no espaço estático padrão associado.
- (iii)  $\{a_i\} \times \Sigma_i^{n-1}$  é um horizonte estático não-degenerado.

*Demonstração.* Para provar a afirmação (i), primeiramente provaremos que o sistema

$$(I \times \Sigma^{n-1}, \gamma, V_{m, q}, \Psi_q)$$

é eletrostático tracejado, onde omitimos o índice  $i$  que identifica o cilindro considerado para não sobrecarregar a notação, utilizando-o apenas para diferenciar o raio  $r_i$  (de (5.9)) do raio variável  $r$ . Relembrando, queremos provar que este sistema satisfaz (3.30), (3.31) e (3.33), isto é:

$$\Delta_\gamma V_{m, q} = \frac{c_n^2}{V_{m, q}} |d\Psi_q|_\gamma^2, \quad \operatorname{div}_\gamma \left( \frac{\operatorname{grad}_\gamma V_{m, q}}{V} \right) = 0, \quad V_{m, q} R_\gamma = 2 |d\Psi|_\sigma^2.$$

Utilizamos o fato de que a Reissner-Nordström é um sistema eletrostático para mostrar estas equações. Consideramos referencial ortonormal local para  $I \times \Sigma^{n-1}$   $\{N = E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , onde  $N = V \partial_r$  é o normal unitário a  $\Sigma^{n-1}$ . Utilizaremos letras do alfabeto grego  $\alpha, \beta$  para índices em  $\{1, \dots, n\}$  e letras do alfabeto romano  $j, k$  para índices em  $\{2, \dots, n\}$ . Observe que  $\gamma_{11} = (g_{m, q})_{11}$  e, como  $V_{m, q}$  e  $\Psi_q$  dependem apenas de  $r$ , temos que seus gradientes são iguais tanto no cilindro quanto na Reissner-Nordström associada. Então consideramos simplesmente o gradiente de  $V_{m, q}$  sem enfatizar a métrica, temos  $\nabla V_{m, q} = V_{m, q}^2 V'_{m, q} \partial_r$ . Além disso vale:

$$|d\Psi_q|_\gamma^2 = |d\Psi_q|_{g_{m, q}}^2. \quad (5.10)$$

Note também que  $\nabla_{\partial_r} \nabla V_{m, q} \partial_r$  depende apenas de  $r$  e de  $\partial_r$  e, portanto

$$\langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m, q}, \partial_r \rangle_\gamma = \langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m, q}, \partial_r \rangle_{g_{m, q}}. \quad (5.11)$$

Sendo  $H_{m, q}$  a curvatura média da esfera de fótons da Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , por (4.26) e pela Proposição 24 temos que  $H_i = H_{m, q}$  (ambas com respeito a

$N$ ), o que nos permite concluir:

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma V_{m,q} &= \gamma^{\alpha\beta} \langle \nabla_{E_\alpha} \nabla V_{m,q}, E_\beta \rangle_\gamma \\
&= \gamma^{11} \langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m,q}, \partial_r \rangle_\gamma + \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{E_i} (V_{m,q}^2 V'_{m,q} \partial_r), E_i \rangle_\gamma \\
&= g_{m,q}^{11} \langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m,q}, \partial_r \rangle_{g_{m,q}} + V_{m,q}^2 V'_{m,q} \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{E_i} \partial_r, E_i \rangle_\gamma \\
&= g_{m,q}^{11} \langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m,q}, \partial_r \rangle_{g_{m,q}} + V_{m,q}^2 V'_{m,q} H_i \\
&= g_{m,q}^{11} \langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m,q}, \partial_r \rangle_{g_{m,q}} + V_{m,q}^2 V'_{m,q} H_{m,q} \\
&= g_{m,q}^{11} \langle \nabla_{\partial_r} \nabla V_{m,q}, \partial_r \rangle_{g_{m,q}} + V_{m,q}^2 V'_{m,q} \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{E_i} \partial_r, E_i \rangle_{g_{m,q}} \\
&= (g_{m,q})^{\alpha\beta} \langle \nabla_{E_\alpha} \nabla V_{m,q}, E_\beta \rangle_{g_{m,q}} \\
&= \Delta_{g_{m,q}} V_{m,q} = \frac{c_n^2}{V_{m,q}} |d\Psi_q|_{g_{m,q}}^2 = \frac{c_n^2}{V_{m,q}} |d\Psi_q|_\gamma^2.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Uma conta análoga nos mostra que  $\Delta_\gamma \Psi_q = \Delta_{g_{m,q}} \Psi_q$ . Portanto vale:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_\gamma \left( \frac{\nabla \Psi_q}{V_{m,q}} \right) &= \frac{\Delta_\gamma \Psi_q}{V_{m,q}} - \frac{1}{V^2} (\nabla \Psi_q) = \frac{\Delta_{g_{m,q}} \Psi_q}{V_{m,q}} - \frac{1}{V^2} (\nabla \Psi_q) \\
&= \operatorname{div}_{g_{m,q}} \left( \frac{\nabla \Psi_q}{V_{m,q}} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Para a última equação iremos considerar o cilindro como um produto warped. Neste caso, considerando as variedades Riemannianas  $(I, V_{m,q}^{-2} dr^2)$  e  $(\Sigma^{n-1}, \sigma)$  temos que o cilindro  $(I \times \Sigma^{n-1}, \gamma)$  é o *produto warped*  $I \times_f \Sigma^{n-1}$  com  $f = \frac{r}{r_i}$ , pois  $\gamma = V_{m,q}^{-2} dr^2 + \frac{r^2}{r_i^2} \sigma$ . Então, pelas fórmulas da curvatura de Ricci em produtos warped (página 211 de [37]) vale, para  $\partial_r$  em  $I$  e  $V, W$  em  $\Sigma^{n-1}$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(\partial_r, \partial_r) &= 0, \\
\operatorname{Ric}(\partial_r, V) &= 0, \\
\operatorname{Ric}(V, W) &= \operatorname{Ric}_\sigma(V, W) - \frac{(n-2)}{r^2} \langle V, W \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, a curvatura escalar satisfaz:

$$R = R_\sigma - \frac{(n-1)(n-2)}{r^2}.$$

De maneira análoga, podemos calcular a curvatura escalar da variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , já que podemos interpretá-la como um produto warped das variedades Riemannianas  $(\mathbb{R}, V_{m,q}^{-2} dr^2)$  e  $(\mathbb{S}^{n-1}, \Omega_{n-1})$ . Aplicando as mesmas fórmulas e considerando  $R_{m,q}$  como a curvatura escalar da variedade de Reissner-Nordström e  $R'_{m,q}$

como a curvatura escalar de sua esfera de fótons, obtemos:

$$R_{m,q} = R'_{m,q} - \frac{(n-1)(n-2)}{r^2}.$$

Comparando as expressões 4.55 e 5.2 temos que  $R_\sigma = R'_{m,q}$ . Além disso, como a Reissner-Nordström é um sistema eletrostático, então  $V_{m,q}^2 R_{m,q} = |d\Psi_q|^2$ , ou seja,

$$V_{m,q}^2 R_\gamma = |d\Psi|_\gamma^2.$$

Portanto  $(I \times \Sigma^{n-1}, \gamma, V_{m,q}, \Psi_q)$  é um sistema eletrostático tracejado.

O próximo passo é mostrar que as equações (3.30), (3.31) e (3.33) são invariantes por mudanças do tipo  $(V, \Psi) \mapsto (\alpha V, \alpha\Psi + \beta)$ .

Em primeiro lugar, se  $\Delta V = \frac{c_n}{V} |d\Psi|^2$ , então:

$$\frac{c_n}{\alpha V} |d(\alpha\Psi + \beta)|^2 = \frac{\alpha^2 c_n}{\alpha V} |d(\Psi)|^2 = \alpha \Delta V = \Delta(\alpha V).$$

Por outro lado, se  $\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}\Psi}{V}\right) = 0$ , então:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}(\alpha\Psi + \beta)}{\alpha V}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\alpha \operatorname{grad}(\Psi)}{\alpha V}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}\Psi}{V}\right) = 0.$$

Finalmente, se  $V^2 R = 2|d\Psi|^2$ , então:

$$2|d(\alpha\Psi + \beta)| = \alpha^2 |d\Psi| = \alpha^2 V^2 R = (\alpha^2 V^2) R,$$

o que termina de provar o item (i).

Para verificar (ii), primeiro note que  $\alpha_i V_{m_i, q_i}$  e  $\alpha_i \Psi_{q_i} + \beta_i$  são constantes nesta hipersuperfície, pois ambas dependem apenas do valor de  $r$ . Além disso, ao interpretar o cilindro como um produto Warped temos que as hipersuperfícies na forma  $\{r\} \times \Sigma_i^{n-1}$  são totalmente umbílicas (página 207 de [37]).

Para verificar (iii) note que a função de lapso se anula em  $r = a_i$ , o que de fato acontece pois

$$\alpha_i \cdot V_{m_i, q_i}(a_i) = \alpha_i \cdot 0 = 0.$$

Além disso, tomando o normal unitário exterior a  $\{a_i\} \times \Sigma_i^{n-1}$  como  $\nu_{m_i, q_i} = V_{m_i, q_i}(r) \partial_r$  segue que este horizonte estático é não degenerado pois estamos considerando um espaço-tempo de Reissner-Nordström subextremo.  $\square$

Considere as constantes:

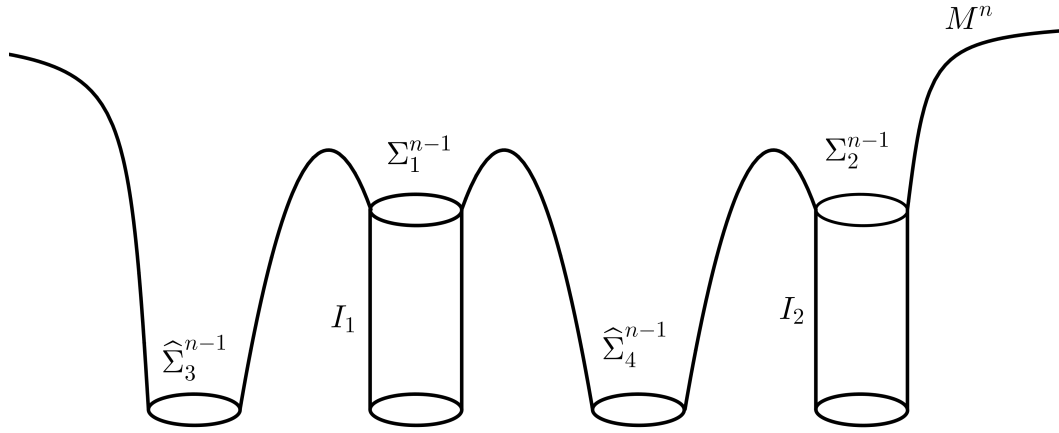
$$\alpha_i := \frac{V_i}{V_{m_i, q_i}(r_i)} > 0, \quad \beta_i := \Psi_i - \alpha_i \Psi_{q_i}(r_i).$$

Essa escolha nos permitirá utilizar o Lema 8 para garantir boas propriedades durante a

colagem das variedades  $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$  ao longo das esferas de fótons da variedade original  $M^n$ , de acordo com a figura 5.2 Para isso definiremos um novo sistema  $(\widetilde{M}^n, \widetilde{g}, \widetilde{V}, \widetilde{\Psi})$ , dado pela união dessas variedades. No caso, definimos:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}^n &:= M^n \cup \left( \bigcup_{i=1}^l (I_i \times \Sigma_i^{n-1}) \right), & \widetilde{g} &:= \begin{cases} g, & \text{em } M^n, \\ \gamma_i, & \text{em } I_i \times \Sigma_i^{n-1}, \end{cases} \\ \widetilde{V} &:= \begin{cases} V, & \text{em } M^n, \\ \alpha_i V_{m_i, q_i}, & \text{em } I_i \times \Sigma_i^{n-1}, \end{cases} & \widetilde{\Psi} &:= \begin{cases} \Psi, & \text{em } M^n, \\ \alpha_i \Psi_{q_i} + \beta_i, & \text{em } I_i \times \Sigma_i^{n-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 5.1: Representação da colagem dos cilindros para o caso em que há duas componentes de esfera de fótons e duas componentes de horizonte estático.



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que após a colagem  $\widetilde{g}$ ,  $\widetilde{V}$  e  $\widetilde{\Psi}$  estão bem definidas e são contínuas:

$$\begin{aligned} g|_{\Sigma_i^{n-1}} &= \sigma_i = \gamma_i|_{\Sigma_i^{n-1}}, \\ V|_{\Sigma_i^{n-1}} &= V_i = \frac{V_i}{V_{m_i, q_i}(r_i)} \cdot V_{m_i, q_i}(r_i) = \alpha_i \cdot V_{m_i, q_i}(r_i) = (\alpha_i V_{m_i, q_i})|_{\Sigma_i^{n-1}}, \\ \Psi|_{\Sigma_i^{n-1}} &= \Psi_i = \alpha_i \Psi_{q_i}(r_i) + \Psi_i - \alpha_i \Psi_{q_i}(r_i) = \alpha_i \Psi_{q_i}(r_i) + \beta_i = (\alpha_i \Psi_{q_i} + \beta_i)|_{\Sigma_i^{n-1}}. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que  $\widetilde{g}$ ,  $\widetilde{V}$  e  $\widetilde{\Psi}$  são de classe  $C^{1,1}$  ao longo de  $\Sigma_i^{n-1}$ , isto é, diferenciáveis com derivada Lipschitz. Para isso teremos que avaliar as derivadas dessas funções ao longo das hipersuperfícies  $\Sigma_i^{n-1}$ . Note que, pela suavidade de  $\Sigma_i^{n-1}$  não é necessário avaliar as derivadas tangentes à hipersuperfície, restando apenas analisar a derivada normal ao longo dela. Para isso definimos o campo normal unitário  $\widetilde{\nu}$  a  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $\widetilde{M}^n$  como:

$$\widetilde{\nu} := \begin{cases} \nu, & \text{em } M^n, \\ \nu_{m_i, q_i} = V_{m_i, q_i} \partial_r, & \text{em } I_i \times \Sigma_i^{n-1}, \end{cases} \quad (5.14)$$

Aplicando este campo a  $\tilde{\Psi}$  em  $M^n$  e em  $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$ ) obtemos:

$$\begin{aligned}
\nu_{m_i, q_i}(\alpha_i \Psi_{q_i} + \beta_i)|_{\Sigma_i^{n-1}} &= \alpha_i V_{m_i, q_i}(r_i) \partial_r (\Psi_{q_i})|_{\Sigma_i^{n-1}} \\
&= \frac{V_i}{V_{m_i, q_i}(r_i)} V_{m_i, q_i}(r_i) \partial_r \left( \frac{q_i}{c_n r^{n-2}} \right) \Big|_{\Sigma_i^{n-1}} \\
&= V_i \left( \frac{-(n-2)q_i}{c_n r^{n-1}} \right) \Big|_{r=r_i} \\
&= -V_i \cdot \frac{(n-2)q_i}{c_n r_i^{n-1}} \\
&= -V_i \cdot \frac{(n-2)}{c_n r_i^{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}} \frac{\lambda_i r_i^{n-1}}{V_i} \\
&= \lambda_i,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde utilizamos (5.3) para substituir  $q_i$  e aplicamos a relação:

$$\frac{(n-2)}{c_n} = \frac{(n-2)}{\sqrt{2 \frac{(n-2)}{n-1}}} = \sqrt{(n-2)^2 \cdot \frac{n-1}{2(n-2)}} = \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

lembrando que  $c_n = \sqrt{2 \frac{(n-2)}{n-1}}$ .

Por hipótese  $\Sigma_i^{n-1}$  é uma esfera de fótons quase-local quando considerada como hipersuperfície de  $M^n$  e, pelo Lema 8,  $\Sigma_i^{n-1} \cong \{r_i\} \times \Sigma_i^{n-1}$  é uma esfera de fótons quase-local quando considerada como hipersuperfície de  $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$ . Daí segue que a equação (4.25) é válida em  $\Sigma_i^{n-1}$  tanto quando consideramos esta hipersuperfície no respectivo cilindro quanto quando consideramos em  $M^n$ . Denotando por  $R_{m_i, q_i}$  e  $H_{m_i, q_i}$  as curvaturas escalar e média de  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$ , respectivamente, temos que é válida a igualdade:

$$R_{m_i, q_i} - R_{\sigma_i} = \frac{n}{n-1} (H_{m_i, q_i}^2 - H_i^2) + \frac{2}{V_i} \left( \lambda_i - \nu_{m_i, q_i}(\alpha_i \Psi_{q_i} + \beta_i)|_{\Sigma_i^{n-1}} \right). \tag{5.16}$$

De (5.2) temos que  $R_{\sigma_i} = R_{m_i, q_i}$ , o que unindo a (5.15) nos permite reescrever (5.16) como

$$H_i^2 = H_{m_i, q_i}^2.$$

Pela Proposição (24) ambas as curvaturas médias são positivas, ou seja,

$$H_i = H_{m_i, q_i}. \tag{5.17}$$

Agora usamos o fato de que (4.26) vale em “ambos os lados” de  $\Sigma_i^{n-1}$  para concluir que  $\tilde{V}$  é suave ao longo de  $\Sigma_i^{n-1}$ , pois:



$$\nu_{m_i, q_i}(\alpha_i V_{m_i, q_i})|_{\Sigma_i^{n-1}} = \alpha_i \nu_{m_i, q_i}(V_{m_i, q_i}) = \frac{V_i}{V_{m_i, q_i}(r_i)} \cdot \frac{H_{m_i, q_i} V_{m_i, q_i}(r_i)}{n-1} = \frac{V_i H_i}{n-1} = \kappa_i.$$

Agora vamos analisar a regularidade da métrica  $\tilde{g}$ . Sejam  $\{y^1, \dots, y^{n-1}\}$  coordenadas locais em  $\Sigma_i^{n-1}$ . Utilizaremos a função  $\tilde{V}$  para criar o sistema de coordenadas  $\{y^1, \dots, y^{n-1}, y^n = \tilde{V}\}$  em uma vizinhança de  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $\tilde{M}^n$ . Então avaliaremos a regularidade das componentes da métrica nessas coordenadas, no caso,  $\tilde{g}_{jl}$ ,  $\tilde{g}_{nj}$  e  $\tilde{g}_{nn}$ . A continuidade destas componentes foi garantida por construção. Resta avaliar a regularidade das suas derivadas. Também por construção temos garantido a suavidade para as derivadas nas direções tangentes à  $\Sigma_i^{n-1}$ . Portanto resta apenas analisar na direção normal. Primeiramente, por construção, garantimos que  $\tilde{g}_{nj} = 0$  em uma vizinhança de  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $\tilde{M}^n$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Daí segue que  $\partial_n(\tilde{g}_{nk}) = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , e portanto essas componentes da métrica são diferenciáveis.

Como utilizamos  $\tilde{V}$  como uma coordenada  $y^n$ , note que que, em uma vizinhança de  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $\tilde{M}^n$ , vale pela regra da cadeia:

$$\partial_n = \frac{1}{\tilde{\nu}(\tilde{V})} \cdot \tilde{\nu}. \quad (5.18)$$

Quanto às componentes  $\tilde{g}_{jl}$ , podemos utilizar o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{jl}^n$  para relacionar a derivada normal desta componente da métrica com a segunda forma fundamental, uma vez que

$$\Gamma_{jl}^n = \frac{1}{2} \tilde{g}^{nn} (\partial_j \tilde{g}_{nl} + \partial_l \tilde{g}_{nj} - \partial_n \tilde{g}_{jl}) = -\frac{1}{2 \tilde{g}_{nn}} \partial_n \tilde{g}_{jl}. \quad (5.19)$$

onde usamos o fato de que, por construção,  $\tilde{g}^{nn} = (\tilde{g}_{nn})^{-1}$ .

Em  $\Sigma_i^{n-1}$  utilizamos (5.19) para relacionar  $\partial_n \tilde{g}_{jl}$  com a segunda forma fundamental  $\tilde{K}_{jl}$  de  $\Sigma_i^{n-1}$  em  $\tilde{M}^n$ :

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{g}_{jl} &= -2 \Gamma_{jl}^n \cdot \tilde{g}_{nn} = -2 \Gamma_{jl}^n \cdot \tilde{g}(\partial_n, \partial_n) = -2 \Gamma_{jl}^n \cdot \tilde{g} \left( \partial_n, \frac{1}{\tilde{\nu}(\tilde{V})} \cdot \tilde{\nu} \right) \\ &= \frac{2}{\tilde{\nu}(\tilde{V})} \cdot -\tilde{g}(\Gamma_{jl}^n \partial_n, \tilde{\nu}) = \frac{2}{\tilde{\nu}(\tilde{V})} \cdot -\tilde{g}(\nabla_{\partial_j} \partial_l, \tilde{\nu}) = \frac{2}{\tilde{\nu}(\tilde{V})} \tilde{K}_{jl}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Como  $\Sigma_i^{n-1}$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica, temos que a segunda forma fundamental pode ser escrita em termos da curvatura média, o que por (5.17) garante que (5.20) concorde em ambos os lados ( $I_i \times \Sigma_i^{n-1}$  e  $M^n$ ).

Com relação a  $\tilde{g}_{nn}$  temos:

$$\tilde{g}_{nn} = \tilde{g}(\partial_n, \partial_n) = \tilde{g}\left(\frac{1}{\tilde{\nu}(\tilde{V})}\tilde{\nu}, \frac{1}{\tilde{\nu}(\tilde{V})}\tilde{\nu}\right) = \frac{1}{\tilde{\nu}(\tilde{V})^2}\tilde{g}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(\tilde{V})^{-2}.$$

Segue que:

$$\partial_n(\tilde{g}_{nn}) = \partial_n\left(\tilde{\nu}(\tilde{V})^{-2}\right) = -2\tilde{\nu}(\tilde{V})\nabla^2\tilde{V}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}). \quad (5.21)$$

Daí, em  $\Sigma_i^{n-1}$  temos, através da fórmula (4.36):

$$\nabla^2\tilde{V}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}) = \Delta\tilde{V} - H_i\tilde{\nu}(\tilde{V})_i = \frac{c_n}{\tilde{V}}\tilde{\nu}(\tilde{\Psi})_i^2 - H_i\tilde{\nu}(\tilde{V}).$$

Portanto de (5.17) e (5.15) temos que (5.21) concorda em ambos os lados.

Com isso construímos o sistema  $(\tilde{M}^n, \tilde{g}, \tilde{V}, \tilde{\Psi})$  onde as componentes da métrica e as funções  $\tilde{V}$  e  $\tilde{\Psi}$  são diferenciáveis, exceto em uma coleção de hipersuperfícies, onde são deriváveis (de classe  $C^1$  e possuem derivadas contínuas). Como estas hipersuperfícies são compactas, temos que estas funções também possuem derivadas parciais limitadas, logo as funções são de classe  $C^{1,1}$ .

### 5.3 Espelhamento ao longo dos horizontes estáticos

Com a construção da seção anterior, pudemos colar cilindros às componentes de esferas de fótons do bordo da variedade original  $(M^n, g)$ , construindo um sistema  $(\tilde{M}^n, \tilde{g}, \tilde{V}, \tilde{\Psi})$  cujo bordo é formado por horizontes estáticos não-degenerados. Agora identificaremos este sistema por  $(\tilde{M}_+^n, \tilde{g}_+, \tilde{V}_+, \tilde{\Psi}_+)$  e tomamos uma cópia dele, a ser identificada por  $(\tilde{M}_-^n, \tilde{g}_-, \tilde{V}_-, \tilde{\Psi}_-)$ . Anexar estas duas cópias através do bordo é o processo ao qual denominamos “espelhamento ao longo do bordo”. Note que, pela construção dos cilindros, temos

$$\partial\tilde{M}_+^n = \partial\tilde{M}_-^n = \bigcup_{i=1}^L \hat{\Sigma}_i^{n-1},$$

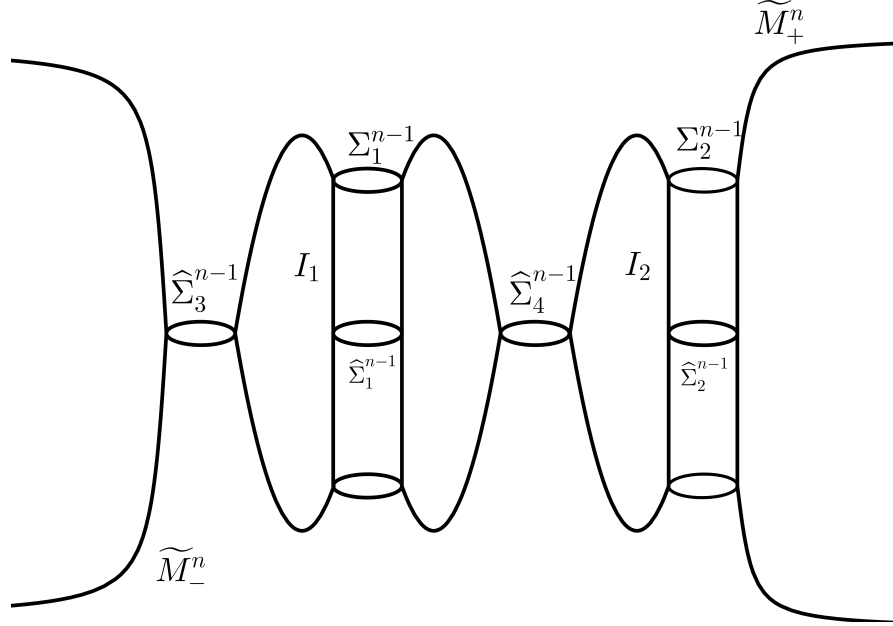
onde cada  $\hat{\Sigma}_i^{n-1}$  é um horizonte estático.

Isto nos permitirá utilizar  $\tilde{V}$  como função de colagem ao longo do bordo, definindo um novo sistema  $(\hat{M}, \hat{g}, \hat{V}, \hat{\Psi})$ , onde  $\hat{M} = \tilde{M}_+ \cup \tilde{M}_-$ ,

$$\hat{g} := \begin{cases} \tilde{g}_+, & \text{em } \tilde{M}_+^n, \\ \tilde{g}_-, & \text{em } \tilde{M}_-^n, \end{cases}, \quad \hat{V} := \begin{cases} \tilde{V}_+, & \text{em } \tilde{M}_+^n, \\ -\tilde{V}_-, & \text{em } \tilde{M}_-^n, \end{cases}, \quad \hat{\Psi} := \begin{cases} \tilde{\Psi}_+, & \text{em } \tilde{M}_+^n, \\ \tilde{\Psi}_-, & \text{em } \tilde{M}_-^n. \end{cases}$$

Vamos fixar  $1 \leq i \leq L$  para provar a regularidade  $C^{1,1}$  de  $(\hat{M}^n, \hat{g}, \hat{V}, \hat{\Psi})$  ao longo de

Figura 5.2: Representação do processo de reflexão ao longo dos horizontes estáticos, para o caso em que há duas componentes de esfera de fótons e duas componentes de horizonte estático.



Fonte: elaborada pelo autor.

$\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ . Começemos definindo um campo normal unitário  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ . Para isso definimos

$$\widehat{\nu} := \begin{cases} \widetilde{\nu}_+, & \text{em } \widetilde{M}_+^n, \\ -\widetilde{\nu}_-, & \text{em } \widetilde{M}_-^n, \end{cases}$$

lembrando que

$$\widetilde{\nu}_\pm := \begin{cases} \nu, & \text{em } M^n, \\ \nu_{m_i, q_i}(r)\partial_r, & \text{em } I_i \times \Sigma_i^{n-1}. \end{cases}$$

Quanto a  $\widehat{V}$  temos que, por construção, é contínua ao longo de  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ , pois,

$$\widehat{V}|_{\widehat{\Sigma}_i^{n-1}} = \widetilde{V}_+|_{\widehat{\Sigma}_i^{n-1}} = -\widetilde{V}_-|_{\widehat{\Sigma}_i^{n-1}} = 0.$$

Além disso, aplicando as derivadas normais a  $\widehat{V}$  obtemos:

$$\widetilde{\nu}(\widehat{V}) = \begin{cases} \widetilde{\nu}_+(\widetilde{V}_+) > 0, & \text{em } \widetilde{M}_+^n, \\ -\widetilde{\nu}_-(-\widetilde{V}_-) = \widetilde{\nu}_-(\widetilde{V}_-) > 0, & \text{em } \widetilde{M}_-^n, \end{cases}$$

pois  $\widetilde{\nu}_+(\widetilde{V}_+) = \widetilde{\nu}_-(\widetilde{V}_-) > 0$ , o que vem do fato de que  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  é horizonte estático. Logo  $\widehat{V}$  é suave ao longo de  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ .

Quanto ao potencial elétrico  $\widehat{\Psi}$ , sua regularidade  $C^{1,1}$  é garantida do fato de que  $d\Psi|_{\widehat{\Sigma}_i^{n-1}} = 0$ , conforme o Lema 4.

Para analisar a regularidade da métrica  $\widehat{g}$ , em analogia ao que foi feito durante a colagem dos cilindros na seção anterior, definimos um sistema de coordenadas  $\{y^1, \dots, y^{n-1}, y^n =$

$\widehat{V}$ } em uma vizinhança de  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ , onde as funções  $y^j$ ,  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  definem um sistema de coordenadas em  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ . Analisaremos a métrica e suas derivadas neste sistema de coordenadas. Por construção temos que as derivadas nas direções tangentes  $\partial_i$  são diferenciáveis, restando apenas analisar na direção normal.

Em uma vizinhança de  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  temos que  $\widehat{g}_{nj} = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Logo valerá  $\partial_n(\widehat{g}_{nj}) = 0$  em ambos os lados ao longo da colagem em  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ .

Denotando por  $\widehat{\nu}_+$  o unitário normal à  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  em  $\widehat{M}_+^n$ , temos:

$$\partial_n(g_{nn}) = -2(\widehat{\nu}_+(\widehat{V}))^2 \nabla^2 \widehat{V}(\widehat{\nu}_+, \widehat{\nu}_+).$$

Utilizando a fórmula (4.36), o fato de que  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  tem curvatura média nula e  $\widehat{V}|_{\widehat{\Sigma}_i^{n-1}} = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \partial_n(\widehat{g}_{nn}) &= -2(\widehat{\nu}_+(\widehat{V}))^2 \nabla^2 \widehat{V}(\widehat{\nu}_+, \widehat{\nu}_+) \\ &= -2(\widehat{\nu}_+(\widehat{V}))^2 \left( \Delta \widehat{V} - \Delta_{\sigma_i} \widehat{V} - H_i \widehat{\nu}(\widehat{V}) \right) \\ &= -2(\widehat{\nu}_+(\widehat{V}))^2 \Delta \widehat{V} \\ &= -2(\widehat{\nu}_+(\widehat{V}))^2 \cdot \frac{c_n}{\widehat{V}} |d\Psi|^2 = 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos que  $\Delta_{\sigma_i} \widehat{V} = 0$ , pois  $\widehat{V}$  é constante em  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  e aplicamos (3.30) e o Lema 4 nas duas últimas igualdades. Como essa expressão é satisfeita em ambos os lados da fronteira durante a colagem, temos que  $\widehat{g}_{nn}$  possui regularidade  $C^{1,1}$  ao longo de  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$ .

Para as componentes da forma  $\widehat{g}_{jl}$  com  $j, l \in \{1, \dots, n-1\}$ , realizando um cálculo análogo a (5.20), denotando por  $\widehat{K}$  a segunda forma fundamental de  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  em  $\widehat{M}^n$ , temos que

$$\partial_n \widehat{g}_{jl} = \frac{2}{\nu_+(\widehat{V})} \widehat{K}_{jl} = 0,$$

vale em ambos os lados, pois  $\widehat{\Sigma}_i^{n-1}$  é um horizonte estático (possui segunda forma fundamental nula) em ambos os lados da colagem.

Portanto, construímos um sistema  $(\widehat{M}^n, \widehat{g}, \widehat{V}, \widehat{\Psi})$  com uma “metade superior”  $\widetilde{M}_+$  e uma “metade inferior”  $\widetilde{M}_-$  tal que  $\widehat{g}$ ,  $\widehat{V}$  e  $\widehat{\Psi}$  são suaves exceto numa coleção finita de hipersuperfícies, nas quais serão garantidamente  $C^{1,1}$ . Além disso, a variedade original  $(M^n, g)$  pode ser mergulhada isometricamente em  $(\widehat{M}^n, \widehat{g})$  com  $\widehat{V}|_{M^n} = V$  e  $\widehat{\Psi}|_{M^n} = \Psi$ .

Além disso,  $\widehat{g}$ ,  $\pm \widehat{V}$  e  $\widehat{\Psi}$  satisfazem as equações (3.30), (3.31) e (3.33) em  $\widetilde{M}_\pm^n$ , exceto possivelmente nas superfícies de colagem, nas quais pode acontecer das derivadas segundas não existirem. Lembremos que  $(\widetilde{M}_\pm^n, \widetilde{g}_\pm, \pm \widehat{V}, \widehat{\Psi})$  são assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ .

## 5.4 Transformação Conforme e Teorema da Massa Positiva

Agora provaremos que  $(\widehat{M}^n, \widehat{g})$  é conforme a  $(\mathbb{R}^n, \delta)$ , o que nos permitirá aplicar o Teorema da Massa Positiva para construir a isometria que terminará a prova do teorema principal.

Considere a função definida por

$$\Omega := \left( \frac{(1 + \widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2}{4} \right)^{\frac{1}{n-2}},$$

que é diferenciável fora do conjunto de colagem, e é  $C^{1,1}$  neste. Vamos provar que  $\Omega > 0$  em toda a  $\widehat{M}^n$ .

Seja  $F_{\pm} := \widehat{V} - 1 \pm c_n \widehat{\Psi}$ . Então, do Lema 7, temos que  $F_{\pm} < 0$  na variedade original  $M^n$ . Logo, em  $M^n$  temos que

$$0 < F_+ F_- = (1 - V)^2 - c_n^2 \Psi^2 < (1 + V)^2 - c_n^2 \Psi^2 = 4\Omega^{n-2}.$$

Em  $\widetilde{M}^n$  vale o mesmo, pois  $\widehat{V} = -V$ , ou seja:

$$0 < F_+ F_- = ((1 + \widehat{V})^2 - c_n^2 \Psi^2) = ((1 - V)^2 - c_n^2 \Psi^2) = 4\Omega^{n-2}.$$

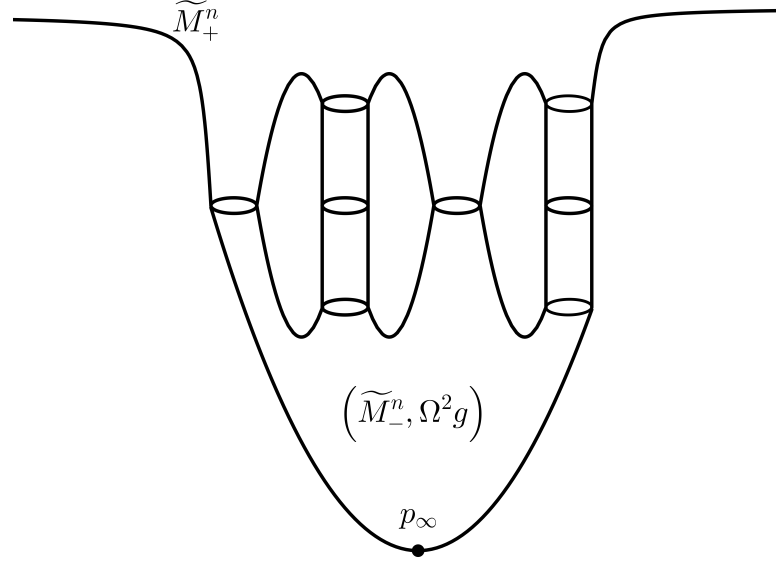
Resta garantir que  $F_{\pm} < 0$  também nos cilindros de colagem. Temos que, essa desigualdade é válida nas componentes de esfera de fótons, isto é,  $F_{\pm}|_{\Sigma_i^{n-1}} < 0$ . Uma análise da derivada de  $F_{\pm}$  (que depende apenas de  $r$  no cilindro) nos garante que esta função é crescente em  $I_i$ , ou seja,  $F_{\pm} < 0$  nos cilindros de colagem. Isso garante que  $\Omega > 0$  em toda  $\widehat{M}^n$ .

Daí utilizaremos as Proposições 25 e 26:

- da Proposição 25 temos que  $(\widetilde{M}_+^n, \Omega^2 \widehat{g})$  é assintoticamente Reissner-Nordström de massa 0 e carga 0;
- da Proposição 26 podemos adicionar um ponto  $p_{\infty}$  a  $\widetilde{M}_-^n$ , de modo que  $(\widehat{M}^n, \Omega^2 \widehat{g})$  vire uma variedade completa  $(\widehat{M}_{\infty}^n, \widehat{g}_{\infty})$ , com regularidade  $C^{1,1}$  em  $p_{\infty}$ .

Agora calcularemos a curvatura escalar  $\widehat{R}$  de  $(\widehat{M}_{\infty}^n, \widehat{g}_{\infty})$ . Lembrando que  $(\widehat{M}_{\infty}^n, \widehat{g}_{\infty})$  é diferenciável exceto numa coleção finita de hipersuperfícies, nas quais é de classe  $C^{1,1}$ . Então essa variedade é  $C^2$  em quase todo ponto. Logo em  $(\widehat{M}_{\infty}^n, \widehat{g}_{\infty})$  são válidas (3.30), (3.31) e (3.33), assim como (4.74). Então podemos calcular a curvatura escalar  $\widehat{R}$  de

Figura 5.3: Representação do processo de inserção de um ponto após a transformação conforme, para o caso em que há duas componentes de esfera de fótons e duas componentes de horizonte estático.



Fonte: elaborada pelo autor.

$(\widehat{M}_\infty, \widehat{g}_\infty)$  em função da curvatura escalar  $R$  de  $(M^n, g)$  através da fórmula (2.15):

$$\Omega^2 \widehat{R} = R - 2(n-1) \frac{\Delta_g \Omega}{\Omega} + (n-1)(4-n) \frac{|\nabla \Omega|_g^2}{\Omega^2}. \quad (5.22)$$

Vamos computar separadamente cada termo desta expressão. Note que, para toda função  $f$  em uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  vale:

$$\Delta_g \left( f^{\frac{1}{n-2}} \right) = \frac{3-n}{(n-2)^2} f^{\frac{5-2n}{n-2}} |df|_g^2 + \frac{f^{\frac{3-n}{n-2}}}{n-2} \Delta_g f. \quad (5.23)$$

As equações (3.30) e (4.74) nos permitem relacionar  $\Delta_g \widehat{V}$  e  $\Delta_g \widehat{\Psi}$  com  $|\nabla \widehat{\Psi}|_g^2$  e  $\langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle$ , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \Delta_g \left( \frac{(1 + \widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2}{4} \right) &= \frac{1}{2} \left( (1 + \widehat{V}) \Delta_g \widehat{V} + |\nabla \widehat{V}|_g^2 - c_n^2 \widehat{\Psi} \Delta_g \widehat{\Psi} - c_n^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |\nabla \widehat{V}|_g^2 - \frac{c_n^2 \widehat{\Psi}}{\widehat{V}} \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle_g + \frac{c_n^2}{\widehat{V}} |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \nabla \left( \frac{(1 + \widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2}{4} \right) \right|_g^2 &= \frac{1}{4} \left| \nabla \widehat{V} + \widehat{V} \nabla \widehat{V} - c_n^2 \widehat{\Psi} \nabla \widehat{\Psi} \right|_g^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( (1 + \widehat{V})^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2c_n^2 \widehat{\Psi} (1 + \widehat{V}) \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^4 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right). \end{aligned}$$

Logo, de (5.23), segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_g \Omega}{\Omega} &= \frac{3-n}{(n-2)^2} \Omega^{4-2n} \left| \nabla \left( \frac{(1+\widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2}{4} \right) \right|_g^2 + \frac{\Omega^{2-n}}{(n-2)} \Delta_g \left( \frac{(1+\widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2}{4} \right) \\
&= \frac{3-n}{(n-2)^2} \Omega^{4-2n} \cdot \frac{1}{4} \left( (1+\widehat{V})^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2c_n^2 \widehat{\Psi} (1+\widehat{V}) \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^4 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \\
&\quad + \frac{\Omega^{2-n}}{(n-2)} \cdot \frac{1}{2} \left( |\nabla \widehat{V}|_g^2 - \frac{c_n^2 \widehat{\Psi}}{\widehat{V}} \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + \frac{c_n^2}{\widehat{V}} |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \\
&= \frac{\Omega^{4-2n}}{8\widehat{V}^2} \left[ \frac{2(3-n)}{(n-2)^2} \widehat{V}^2 \left( (1+\widehat{V})^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2c_n^2 \widehat{\Psi} (1+\widehat{V}) \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^4 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(n-2)} \left( (1+\widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2 \right) \left( \widehat{V}^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - c_n^2 \widehat{V} \widehat{\Psi} \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^2 \widehat{V} |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \right].
\end{aligned}$$

Além disso, também temos

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla \Omega|_g^2}{\Omega^2} &= \frac{2\Omega^{4-2n}}{8(n-2)^2} \left( (1+\widehat{V})^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2c_n^2 (1+\widehat{V}) \widehat{\Psi} \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^4 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \\
&= + \frac{\Omega^{4-2n}}{8\widehat{V}^2} \cdot \frac{2\widehat{V}^2}{(n-2)^2} \left( (1+\widehat{V})^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2c_n^2 (1+\widehat{V}) \widehat{\Psi} \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^4 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right).
\end{aligned}$$

Utilizando (3.33) obtemos:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{2|\nabla \widehat{\Psi}|^2}{\widehat{V}^2} = \frac{\Omega^{4-2n}}{\widehat{V}^2} \cdot \frac{2|\nabla \widehat{\Psi}|^2}{\Omega^{4-2n}} = \frac{\Omega^{4-2n}}{\widehat{V}^2} \cdot \Omega^{2(n-2)} 2|\nabla \widehat{\Psi}|^2 \\
&= \frac{\Omega^{4-2n}}{\widehat{V}^2} \left( \frac{(1+\widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2}{4} \right)^2 2|\nabla \widehat{\Psi}|^2 \\
&= \frac{\Omega^{4-2n}}{8\widehat{V}^2} \left( (1+\widehat{V})^4 - 2(1+\widehat{V})^2 c_n^2 \widehat{\Psi}^2 + c_n^4 \widehat{\Psi}^4 \right) |\nabla \widehat{\Psi}|^2. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Com isso podemos reescrever (5.22):

$$\begin{aligned}
\frac{8\widehat{V}^2}{\Omega^{2-2n}} \widehat{R} &= \frac{8\widehat{V}^2}{\Omega^{4-2n}} \left[ R - 2(n-1) \frac{\Delta \Omega}{\Omega} + (n-1)(4-n) \frac{|\nabla \Omega|_g^2}{\Omega^2} \right] \\
&= \left( (1+\widehat{V})^4 - 2(1+\widehat{V})^2 c_n^2 \widehat{\Psi}^2 + c_n^4 \widehat{\Psi}^4 \right) |\nabla \widehat{\Psi}|^2 \\
&\quad + \frac{4}{c_n^2} \widehat{V}^2 \left( (1+\widehat{V})^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2c_n^2 \widehat{\Psi} (1+\widehat{V}) \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^4 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \\
&\quad - \frac{4}{c_n^2} \left( (1+\widehat{V})^2 - c_n^2 \widehat{\Psi}^2 \right) \left( \widehat{V}^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - c_n^2 \widehat{V} \widehat{\Psi} \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + c_n^2 \widehat{V} |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \right) \\
&= 4\widehat{V}^2 \widehat{\Psi}^2 |\nabla \widehat{V}|_g^2 - 2\widehat{V} \widehat{\Psi} (\widehat{V}^2 - 1 + c_n^2 \widehat{\Psi}^2) \langle \nabla \widehat{V}, \nabla \widehat{\Psi} \rangle + (\widehat{V}^2 - 1 + c_n^2 \widehat{\Psi}^2)^2 |\nabla \widehat{\Psi}|_g^2 \\
&= |2\widehat{V} \widehat{\Psi} \nabla \widehat{V} - (\widehat{V}^2 - 1 + c_n^2 \widehat{\Psi}^2) \nabla \widehat{\Psi}|_g^2,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\widehat{R} = \frac{\Omega^{2-2n}}{8\widehat{V}^2} |2\widehat{V}\widehat{\Psi}\nabla\widehat{V} - (\widehat{V}^2 - 1 + c_n^2\widehat{\Psi}^2)\nabla\widehat{\Psi}|_g^2 \geq 0. \quad (5.25)$$

Com isso temos que  $(\widehat{M}_\infty^n, \widehat{g}_\infty)$  é geodesicamente completa, possui curvatura escalar não-negativa e massa nula. Aplicando o Teorema da Massa Positiva (Teorema 8) temos que  $(\widehat{M}_\infty^n, \widehat{g}_\infty)$  é isométrica a  $(\mathbb{R}^n, \delta)$ , sendo essa isometria diferenciável exceto numa coleção finita de hipersuperfícies nas quais é de classe  $C^{1,1}$ .

## 5.5 Recuperando a variedade de Reissner-Nordström

Agora iremos mostrar que a variedade original  $(M^n, g)$  é isométrica a uma parte exterior da variedade de Reissner-Nordström  $n$ -dimensional. Vamos considerar a isometria  $(\widehat{M}_\infty^n, \widehat{g}_\infty) \simeq (\mathbb{R}^n, \delta)$  sem representá-la explicitamente, fazendo a identificação  $\Omega^2\widehat{g} \mapsto \delta$ .

Lembremos que cada componente do bordo  $\Sigma_i^{n-1}$  é fechada e totalmente umbílica. Como ser totalmente umbílica é uma propriedade invariante por transformações conformes (Corolário 2), temos que  $\Sigma_i^{n-1}$  são esferas redondas em  $(\mathbb{R}^n, \delta)$ . Como  $\Omega$  é constante em cada  $\Sigma_i^{n-1}$ , temos que  $(\Sigma_i^{n-1}, g|_{\Sigma_i^{n-1}})$  são esferas redondas.

A construção garantiu que  $\widehat{M}_\infty^n$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , o que garante que  $\widehat{M}^n$  (sem o ponto  $p_\infty$ ) é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Assim podemos calcular o grupo de homotopia de dimensão  $n-1$  de  $\widehat{M}^n$  [21, p.361]:

$$\pi_{n-1}(\widehat{M}^n) = \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}. \quad (5.26)$$

Como cada componente conexa  $\Sigma_i^{n-1}$  do bordo  $\partial M^n$  é uma esfera topológica, então (5.26) só pode valer se  $\partial M^n$  possuir apenas uma componente conexa. Com isso podemos finalmente ignorar o índice  $i$  e nos referir ao bordo como  $\widehat{\Sigma}^{n-1}$ . Da mesma forma temos apenas um horizonte estático, o qual é uma esfera redonda.

Para finalizar a prova iremos determinar o fator conforme  $\Omega^2$ , utilizando o Princípio do Máximo. Agora sabemos que a variedade  $(\widehat{M}_\infty^n, \widehat{g}_\infty)$  é plana, temos que, em particular, possui curvatura escalar nula. Logo, de (5.25) temos que

$$2\widehat{V}\widehat{\Psi}\nabla\widehat{V} = (\widehat{V}^2 - 1 + c_n^2\widehat{\Psi}^2)\nabla\widehat{\Psi}. \quad (5.27)$$

Em  $\widetilde{M}_+^n$  definimos a função

$$u_\pm := (1 + \widetilde{V} \pm c_n \widetilde{\Psi})^{-1}. \quad (5.28)$$

Vamos provar que  $u_\pm$  é harmônica com respeito à métrica  $\delta = \Omega^2 g$ , isto é,  $\Delta_\delta u_\pm = 0$ , o que nos permitirá aplicar um argumento de unicidade à  $u_\pm$  via Princípio do Máximo. Em relação a uma métrica conforme o laplaciano pode ser calculado utilizando a seguinte



expressão:

$$\Delta_\delta u_\pm = \Omega^{-2} \left( \Delta_g u_\pm + \frac{(n-2)}{\Omega} \langle \nabla \Omega, \nabla u_\pm \rangle \right). \quad (5.29)$$

Utilizando (3.30) e (4.74) para relacionar  $\Delta_g \tilde{V}$  e  $\Delta_g \tilde{\Psi}$ , respectivamente, com  $|\nabla \tilde{\Psi}|_g^2$  e  $\langle \nabla \tilde{V}, \nabla \tilde{\Psi} \rangle$  obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_g u_\pm &= 2u_\pm^3 |\nabla(1 + \tilde{V} \pm c_n \tilde{\Psi})|^2 - u_\pm^2 \Delta_g(1 + \tilde{V} \pm c_n \tilde{\Psi}) \\ &= 2u_\pm^3 \langle \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle - u_\pm^2 \left( \Delta_g \tilde{V} \pm c_n \Delta_g \tilde{\Psi} \right) \\ &= u_\pm^3 \left[ 2 \langle \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle - u_\pm^{-1} \left( \frac{c_n^2}{\tilde{V}} |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \pm \frac{c_n}{\tilde{V}} \langle \nabla \tilde{V}, \nabla \tilde{\Psi} \rangle \right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{(n-2)}{\Omega} \langle \nabla \Omega, \nabla u_\pm \rangle &= \frac{(n-2)}{\Omega} \frac{\Omega^{3-n}}{2(n-2)} (-u_\pm^2) \langle (1 + \tilde{V}) \nabla \tilde{V} - c_n^2 \tilde{\Psi} \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle \\ &= -\frac{u_\pm^2 \Omega^{2-n}}{2} \langle (1 + \tilde{V}) \nabla \tilde{V} - c_n^2 \tilde{\Psi} \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle. \end{aligned}$$

Como  $4\Omega^{n-2} = u_\pm^{-1} u_\mp^{-1}$  então

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\delta u_\pm}{u_\pm^4 \Omega^{2-n}} &= \frac{u_\mp^{-1}}{2} \langle \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle - \Omega^{n-2} \left( \frac{c_n^2}{\tilde{V}} |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \pm \frac{c_n}{\tilde{V}} \langle \nabla \tilde{V}, \nabla \tilde{\Psi} \rangle \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle (1 + \tilde{V}) \nabla \tilde{V} - c_n^2 \tilde{\Psi} \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Agora vamos computar cada parcela de (5.30), substituindo a relação de (5.27). Primeiramente:

$$\begin{aligned} &\frac{u_\mp^{-1}}{2} \langle \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \rangle = \frac{u_\mp^{-1}}{2} \left( |\nabla \tilde{V}|_g^2 \pm 2c_n \langle \nabla \tilde{V}, \nabla \tilde{\Psi} \rangle + c_n^2 |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \right) \\ &= \frac{u_\mp^{-1}}{2} \left( \frac{(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)^2}{4\tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2} |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \pm \frac{2c_n(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)}{2\tilde{V}\tilde{\Psi}} |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 + c_n^2 |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \right) \\ &= \frac{(1 + \tilde{V} \mp c_n \tilde{\Psi})}{8\tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2} \left( (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)^2 \pm 4c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) + 4c_n^2 \tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2 \right) |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \\ &= \frac{1}{8\tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2} \left[ (1 + \tilde{V})(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)^2 \pm 4c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \mp 4c_n^3 \tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^3 \right. \\ &\quad \left. + 4c_n^2 \tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2 (1 + \tilde{V}) \mp c_n \tilde{\Psi} (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)^2 - 4c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \right] |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Também vale:

$$\begin{aligned}
& -\Omega^{n-2} \left( \frac{c_n^2}{\tilde{V}} |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \pm \frac{c_n}{\tilde{V}} \langle \nabla \tilde{V}, \nabla \tilde{\Psi} \rangle \right) = -\Omega^{n-2} \left( \frac{c_n^2}{\tilde{V}} \pm \frac{c_n}{\tilde{V}} \frac{(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)}{2\tilde{V}\tilde{\Psi}} \right) |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \\
& = -\frac{(1 + \tilde{V})^2 - c_n^2 \tilde{\Psi}^2}{8\tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2} \left( 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 \pm c_n \tilde{\Psi} (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \right) |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \\
& = \frac{1}{8\tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2} \left[ -2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (1 + \tilde{V})^2 \mp c_n \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) + 2c_n^4 \tilde{V} \tilde{\Psi}^4 \right. \\
& \quad \left. \pm c_n^3 \tilde{\Psi}^3 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \right] |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\langle (1 + \tilde{V}) \nabla \tilde{V} - c_n^2 \tilde{\Psi} \nabla \tilde{\Psi}, \nabla \tilde{V} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \right\rangle \\
& = -\frac{1}{2} \left\langle (1 + \tilde{V}) \frac{(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)}{2\tilde{V}\tilde{\Psi}} \nabla \tilde{\Psi} - c_n^2 \tilde{\Psi} \nabla \tilde{\Psi}, \frac{(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)}{2\tilde{V}\tilde{\Psi}} \nabla \tilde{\Psi} \pm c_n \nabla \tilde{\Psi} \right\rangle \\
& = -\frac{1}{2} \left( (1 + \tilde{V}) \frac{\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2}{2\tilde{V}\tilde{\Psi}} - c_n^2 \tilde{\Psi} \right) \left( \frac{\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2}{2\tilde{V}\tilde{\Psi}} \pm c_n \right) |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \\
& = \frac{1}{8\tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2} \left( -(1 + \tilde{V})(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) + 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 \right) \left( (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \pm 2c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} \right) |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2 \\
& = \frac{1}{8\tilde{V}^2} \left[ -(1 + \tilde{V})(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)^2 + 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \right. \\
& \quad \left. \mp 2c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \pm 4c_n^3 \tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^3 \right] |\nabla \tilde{\Psi}|_g^2. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Somando os termos entre colchetes de (5.31), (5.32) e (5.33) obtemos:

$$\begin{aligned}
& \pm 4c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) + 4c_n^2 \tilde{V}^2 \tilde{\Psi}^2 (1 + \tilde{V}) \mp c_n \tilde{\Psi} (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2)^2 \\
& - 4c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) - 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (1 + \tilde{V})^2 + 2c_n^4 \tilde{V} \tilde{\Psi}^4 \pm c_n^3 \tilde{\Psi}^3 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \\
& \mp c_n \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \mp 2c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (\tilde{V} + 1)(\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \\
& = (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) \left[ \pm 4c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V}) \mp c_n \tilde{\Psi} (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) - 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 \mp c_n \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})^2 \right. \\
& \quad \left. \pm c_n^3 \tilde{\Psi}^3 \mp c_n \tilde{\Psi} (1 + \tilde{V})^2 \mp 2c_n \tilde{V} \tilde{\Psi} (\tilde{V} + 1) \right] + 2c_n^3 \tilde{V}^3 \tilde{\Psi}^2 - 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 + 2c_n^4 \tilde{V} \tilde{\Psi}^4 \\
& = -2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) + 2c_n^2 \tilde{V} \tilde{\Psi}^2 (\tilde{V}^2 - 1 + c_n^2 \tilde{\Psi}^2) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto  $\frac{\Delta_\delta u_\pm}{u_\pm^4 \Omega^{2-n}} = 0$ . Como  $\Omega \neq 0$  então  $u^{-1} \neq 0$ . Logo  $\Delta_\delta u_\pm = 0$ . Como o sistema original  $(M^n, g, V, \Psi)$  é assintoticamente Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , temos que, do ponto de vista assintótico,  $u_\pm(y) \rightarrow \frac{1}{2}$  quando  $|y| \rightarrow \infty$ , pois  $V_{m,q} \rightarrow 1$  e  $\Psi_q \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

Vimos também que o horizonte  $\hat{\Sigma}^{n-1}$  é uma esfera redonda de raio  $T > 0$  e centrada em  $a \in \mathbb{R}^n$ , isto é,  $\mathbb{S}_T(a) \subset \mathbb{R}^n$ . Note que  $u_\pm|_{\hat{\Sigma}^{n-1}} = u_\pm|_{\mathbb{S}_T(a)}$  são constantes. Podemos

excluir a possibilidade de  $u_{\pm}|_{\mathbb{S}_T(a)} \in \{0, \pm\infty\}$ , pois  $\Omega$  nunca se anula em  $\widetilde{M}^n$  e

$$u_+u_- = \frac{1}{4}\Omega^{-(n-2)}.$$

Como  $\widetilde{\Psi}$  é constante em  $\mathbb{S}_T(a)$ , então considere um par de constantes  $c_{\pm}$  dadas por:

$$\widetilde{\Psi}|_{\mathbb{S}_T(a)} = \pm \frac{c_{\pm}}{T^{n-2}}. \quad (5.34)$$

Então vale  $u_{\pm}|_{\mathbb{S}_T(a)} = \left(1 \pm \frac{c_{\pm}}{T^{n-2}}\right)^{-1}$ . Considere as funções  $f_{\pm} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus B_T^n(a))$  dadas por:

$$f_{\pm}(y) = \left(1 + \left(1 - \frac{T^{2(n-2)} + c_{\pm}^2}{T^{n-2}|y-a|^{n-2}} + \frac{c_{\pm}^2}{|y-a|^{2(n-2)}}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{c_{\pm}}{|y-a|^{n-2}}\right)^{-1}. \quad (5.35)$$

Note que  $f_{\pm}|_{\mathbb{S}_T^n(a)} = \left(1 \pm \frac{c_{\pm}}{T^{n-2}}\right)^{-1}$  e que  $\Delta f_{\pm} = 0$ . Então, aplicando o princípio do máximo à diferença  $u_{\pm} - f_{\pm}$  e argumentando como na prova do Lema 7 obtemos que  $u_{\pm} = f_{\pm}$ .

Portanto

$$1 \pm \frac{c_{\pm}}{T^{n-2}} = \frac{1}{u_{\pm}|_{\mathbb{S}_T(a)}} = 1 \pm c_n \Psi \implies c_{\pm} = c_n \Psi|_{\widehat{\Sigma}^{n-1}} T^{n-2},$$

ou seja,  $c_+ = c_- := c$ .

Comparando assintoticamente, isto é, analisando os limites quando  $r \rightarrow \infty$ , temos que:

$$m \pm q = \frac{T^{n-2}}{2} + \frac{c^2}{2T^{n-2}} \pm c,$$

o que é equivalente a

$$2m = T^{n-2} + \frac{c^2}{T^{n-2}}, \quad q = c.$$

Logo

$$u_{\pm} = (1 + V_{m,q} \pm c_n \Psi_q)^{-1}.$$

Portanto as funções  $V$  e  $\Psi$  são as respectivas funções da variedade de Reissner-Nordström. Portanto  $(M^n, g)$  é exatamente a variedade de Reissner-Nordström de massa  $m$  e carga  $q$ , o que conclui a demonstração do Teorema 1.

□

# Referências Bibliográficas

- [1] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, *Energy and the criteria for radiation in general relativity*, Phys. Rev. 118 (1960), no. 4, 1100-1104.
- [2] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. 122 (1961), no. 3, 997–1006.
- [3] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, *The dynamics of general relativity*, *Gravitation: An introduction to current research*, Wiley, New York, 1962, 227–265.
- [4] Robert Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), no. 5, 661-693, DOI 10.1002/cpa.3160390505.
- [5] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, 1987.
- [6] Gary L. Bunting and Abdul Kasem Muhammad Masood-ul-Alam, *Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time*, General Relativity and Gravitation, 19(1987), no. 2, 147–154.
- [7] Rogério Augusto Capobianco, *Geodesic motion in the Reissner-Nordström space-time* [dissertação]. São Carlos: Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos; 2019 [citado 2021-06-18]. doi:10.11606/D.76.2019.tde-03092019-111952.
- [8] Carla Cederbaum, Uniqueness of photon spheres in static vacuum asymptotically flat spacetimes. In *Complex Analysis & Dynamical Systems VI*, volume 667 of *Contemp. Math*, pages 86–99. AMS, 2015.
- [9] Carla Cederbaum and Gregory J. Galloway, Uniqueness of photon spheres in electrovacuum spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 33 (2016), no. 7:075006.
- [10] Piotr T. Chruściel, *Geometry of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford, 2020.
- [11] Piotr T. Chruściel, *Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view*, *Topological properties and global structure of space-time* (Erice, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., vol. 138, Plenum, New York, 1986, pp.49-59.

- [12] Piotr T. Chruściel, Enwann Delay, Gregory J. Galloway, and Ralph Howard, *Regularity of horizons and the area theorem*, Annales Henri Poincaré 2, 109 (2001).
- [13] Piotr T. Chruściel and Gregory J. Galloway, G.J., *Uniqueness of static black holes without analyticity*, Class. Quantum Grav., 27 (2010), no. 15, 152001.
- [14] Piotr T. Chruściel and Luc Nguyen, *A Uniqueness Theorem for Degenerate Kerr-Newmann Black Hole*, Annales Henri Poincaré, 11 (2010), 585-609.
- [15] Clarissa-Marie Claudel, Kumar Shwetketu Virbhadra, George F. R. Ellis, *The Geometry of Photon Surfaces*, J. Math. Phys., 42 (2001), no. 2, 818-839.
- [16] João L. Costa, *On the classification of stationary electro-vacuum black holes*, Class. Quantum Grav., 27 (2010), no. 3, 035010.
- [17] José M. Espinar, *Maximum Principles and Geometric Applications*. Artigo. Universidade de Brasília, (2014).
- [18] Gregory J. Galloway and Pengzi Miao. *Variational and rigidity properties of static potentials*. Comm. Analysis and Geometry, 25(1):163–183, 2017.
- [19] Gary W. Gibbons, Daisuke Ida, Tetsuya Shiromizu, *Uniqueness and Non-Uniqueness of Static Vacuum Black Holes in Higher Dimensions*, Progress of Theoretical Physics Supplement, 148 (2002), 284–290.
- [20] Éricourgoulhon, *Geometry and physics of black holes*, Lecture notes. Disponível em: <https://luth.obspm.fr/luthier/gourgoulhon/bh16> .
- [21] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [22] Werner Israel, *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times*, Phys. Rev., 164 (1967), no. 5, 1776–1779.
- [23] Werner Israel, *Event Horizons in Static Electrovac Space-Times*, Commun. Math. Phys., 164 (1968), no. 8, 245–260.
- [24] Sophia Jahns, *Photon sphere uniqueness in higher-dimensional electrovacuum spacetimes*, Class. Quantum Gravity. 36 (2019), no. 23.
- [25] Marcus Khuri, Eric Woolgar, *Nonexistence of degenerate horizons in static vacua and black hole uniqueness*, Physics Letters B, 777 (2018), 235-239.
- [26] Hari K. Kunduri and James Lucietti, *No static bubbling spacetimes in higher dimensional einstein-maxwell theory*, Class. Quantum Gravity, 35 (2018), no. 8.

- [27] H. Blaine Lawson Jr and Marie-Louise Michelsohn, *Spin geometry*. Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp. ISBN: 0-691-08542-0.
- [28] Dan A. Lee, *Geometric Relativity*. Graduate Texts in Mathematics, 2019.
- [29] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer, New York, 2011. xviii+433 pp. ISBN: 978-1-4419-7939-1.
- [30] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. 115 (2016), no.6, 12pp.
- [31] Joachim Lohkamp, *Skin Structures on Minimal Hypersurfaces*, arXiv:1512.08249.
- [32] Joachim Lohkamp, *Hyperbolic Geometry and Potential Theory on Minimal Hypersurfaces*, arXiv:1512.08251.
- [33] Joachim Lohkamp, *Skin Structures in Scalar Curvature Geometry*, arXiv:1512.08252.
- [34] Joachim Lohkamp, *The Higher Dimensional Positive Mass Theorem II*, arXiv:1612.07505.
- [35] Donovan McFeron and Gábor Székelyhidi, *On the positive mass theorem for manifolds with corners*, Communications in Mathematical Physics, 313 (2012), no. 2, 425-443.
- [36] Gunnar Nordström, *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk. 26 (1918), 1201-1208.
- [37] Barret O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, 1983.
- [38] Thomas Parker, Clifford Henry Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. 84 (1982), no. 2, 223-238.
- [39] Roger Penrose, *Gravitational colapse: The Role of General Relativity*, Gen.Rel.Grav. 34 (2002) 1141-1165.
- [40] Hans Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Annalen der Physik. 50 (1916), 106-120.
- [41] Peter Ruback. *A new uniqueness theorem for charged black holes*, Classical and Quantum Gravity, 5(1988), no. 10, 155–159.
- [42] Richard M. Schoen, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), 120-154, Lecture Notes in Math., 1365, Springer, Berlin, 1989.

- [43] Richard M. Schoen, Shing-Tung Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, *Comm. Math. Phys.* 65 (1979), no. 1, 45-76.
- [44] Richard M. Schoen, Shing-Tung Yau, *Complete manifolds with nonnegative scalar curvature and the positive action conjecture in general relativity*, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 76(1979), no. 3, 1024-1025.
- [45] Richard M. Schoen, Shing-Tung Yau, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, *Manuscripta Math.* 28 (1979), no. 1-3, 159-183, DOI 10.1007/BF01647970.
- [46] Richard M. Schoen, Shing-Tung Yau, *Positive Scalar Curvature and Minimal Hypersurface Singularities*. arxiv:1704.05490, April 2017.
- [47] N. Smale, *Generic regularity of homologically area minimizing hypersurfaces in eight-dimensional manifolds*, *Comm. Anal. Geom.* 1(1993), no. 2, 217-228.
- [48] Luanna Karen de Souza, *Um estudo da métrica exterior de Reissner-Nordström* [monografia]. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Física; 2019.
- [49] Von Karl Schwazschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, (1916), 189-196.
- [50] Lázló B. Szabados, *Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in General Relativity*, *Living Rev. Relativity*, 12 (2009), no. 4.
- [51] Michael E. Taylor, *Partial Differential Equations I*, Second Edition, Springer, 2010.
- [52] Robert M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [53] Edward Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, *Comm. Math. Phys.* 80(1981), no. 3, 381-402.
- [54] Hangjun Xu, *Uniformly Area Expanding Flows in Spacetimes*, arXiv:1508.03779.
- [55] Stoytcho Yazadjiev, Boian Lazov, *Uniqueness of the Einstein-Maxwell spacetimes with a photon sphere*, *Classical and Quantum Gravity*, 32 (2015), no. 16.