

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

PREVISÃO DE TAXAS DE MORTALIDADE USANDO O MODELO LEE-CARTER

TÁBATA DE BEM SILVEIRA

Porto Alegre
2021

TÁBATA DE BEM SILVEIRA

PREVISÃO DE TAXAS DE MORTALIDADE USANDO O MODELO LEE-CARTER

Trabalho de Conclusão de Curso, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientador:
Professor Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

Porto Alegre
2021

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Silveira, Tábata de Bem

Previsão de taxas de mortalidade usando o modelo Lee-Carter / Tábata de Bem Silveira, - Porto Alegre: Departamento de Estatística / UFRGS, 2021

Orientador: Flávio Augusto Ziegelmann

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Bacharelado em Estatística, Porto Alegre, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

1. Lee-Carter 2. Séries Temporais 3. Taxas de Mortalidade. I. Ziegelmann, Flávio Augusto., orient. II. Título

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Previsão de taxas de mortalidade usando o modelo Lee-Carter

Tábata de Bem Silveira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Hudson da Silva Torrent
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann (Orientador)
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que compartilharam a caminhada comigo ao longo da graduação e que foram fundamentais para o meu desenvolvimento.

Em especial, a minha mãe e meu pai, por terem me dado a vida e muitíssimo obrigada pela compreensão, carinho e amor nessa jornada. Agradeço aos meus avós por me motivarem todos estes anos a alcançar meus objetivos, por entenderem minhas decisões e meus momentos distantes.

Ao Juscelino, que sempre fez de tudo para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço imensamente por todo carinho, cuidado e apoio que foram essenciais para tornar o final desta jornada mais ameno.

Às minhas amigas e amigos, em especial à Laura, obrigada pelo incentivo, por entenderem minhas ausências e pelo apoio nos momentos mais difíceis.

Ao Professor Flávio, meu orientador, agradeço pela paciência, por todo o ensinamento transmitido ao longo da graduação e sua orientação, sem as quais eu não teria conseguido atingir o objetivo final deste estudo, mesmo ciente de todos os desafios que teriam que ser superados. Muito obrigada pela motivação e por acreditar no meu trabalho.

Por fim, gratidão a todas as professoras, professores e colegas que contribuíram para o encerramento de mais uma etapa na minha vida.

“Na juventude, aprendemos; na maturidade, compreendemos”.

(Marie von Ebner-Esschenbach)

RESUMO

Esta pesquisa é caracterizada por um estudo longitudinal, aplicado e quantitativo, utilizando os dados do *Human Mortality Database* - HMD. Os principais objetivos deste trabalho são a estimação e a previsão das taxas de mortalidade nacionais para uma grade de idades, entre 18 e 85 anos, em países de diferentes continentes e em dois níveis de desenvolvimento distintos. O modelo demográfico de Lee-Carter é usado para estimação das taxas de mortalidade, enquanto os modelos ARIMA são empregados para previsão futura das mesmas. Observamos que o aumento da longevidade e queda nas taxas de mortalidade estão cada vez mais evidentes. Ao analisarmos as populações segregadas por sexo e em diferentes níveis de desenvolvimento, temos um maior panorama de como estas mudanças demográficas estão acontecendo e do quão importante é desenvolver e utilizar ferramentas que possibilitem boas estimações e projeções da mortalidade.

Palavras-chave: Lee-Carter. Séries Temporais. Taxas de mortalidade.

ABSTRACT

This research is characterized by a longitudinal, applied and quantitative study, using data from the *Human Mortality Database* - HMD. The main objectives of this work are the estimation and prediction of national mortality rates for a range of ages, between 18 and 85 years, in countries on different continents and at two different levels of development. The Lee-Carter demographic model is used to estimate mortality rates, while the ARIMA models are used for their future prediction. We observe that the increase in longevity and the drop in mortality rates are increasingly evident. By analyzing populations segregated by sex and at different levels of development, we have a greater picture of how these demographic changes are taking place and how important it is to develop and use tools that enable good estimates and projections of mortality.

Key-words: Lee-Carter. Time Series. Mortality rates.

Conteúdo

1	REVISÃO DE LITERATURA ATUARIAL	15
1.1	Transição demográfica	15
1.2	Taxas de mortalidade	18
1.3	Improvement na expectativa de vida	19
1.4	Risco de Longevidade	20
2	MODELO LEE-CARTER	21
2.1	Identificação do modelo Lee-Carter	22
2.2	Estimação e Previsão do modelo Lee-Carter	24
2.2.1	SVD e Mínimos Quadrados	27
2.2.2	SVD e Estimação Lee-Carter	29
2.2.3	Mínimos Quadrados e Estimação Lee-Carter	31
2.2.4	Passeio aleatório com constante	31
3	ANÁLISE EMPÍRICA	34
3.1	Dados de Mortalidade específicos por idade	34
3.2	Análise e Resultados	36
3.2.1	Análise exploratória dos dados	36
3.2.2	Estimação do modelo Lee-Carter	42
3.2.3	Previsão da mortalidade	46

Lista de Figuras

1	Representação esquemática das cinco fases da transição demográfica	16
2	Projeção de \vec{a} em \vec{v}	27
3	Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, na Bulgária . .	37
4	Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, na França . . .	38
5	Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, no Japão . . .	38
6	Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, no Reino Unido	39
7	Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, nos Estados Unidos	39
8	Total das taxas de mortalidade entre os anos 1950 e 2017, na Bulgária e no Estados Unidos, respectivamente	41
9	Total das taxas de mortalidade entre os anos 1950 e 2017, na França e Japão, respectivamente	41
10	Total das taxas de mortalidade entre os anos 1950 e 2017, no Reino Unido . .	42
11	Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, na Bulgária	43
12	Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, nos Estados Unidos	44
13	Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, na França	44
14	Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, no Japão	45
15	Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, no Reino Unido	45

Lista de Tabelas

1	Primeiras quatro observações das taxas de mortalidade segregadas por sexo e total para os cinco países analisados.	35
2	Percentual da variação explicada pelo modelo ajustado	46
3	Bulgária - κ_t previsto	47
4	Estados Unidos - κ_t previsto	47
5	França - κ_t previsto	47
6	Japão - κ_t previsto	48
7	Reino Unido - κ_t previsto	48

INTRODUÇÃO

A humanidade está passando por notáveis mudanças sociais e demográficas a contar do século passado. De modo geral, vem sendo observada uma queda nas taxas de mortalidade e, depois de um certo tempo, prossegue com a queda nas taxas de natalidade, provocando assim uma grande mudança na estrutura etária da pirâmide populacional. Este fenômeno histórico é chamado de transição demográfica. Uma das consequências do declínio da mortalidade e fecundidade é o envelhecimento populacional, processo que vem ocorrendo em inúmeros países, cada qual com o seu próprio ritmo. Estas mudanças são em razão da evolução do padrão de vida da população em consequência do desenvolvimento econômico e da melhoria da qualidade de vida (Alves, 2008). Com a queda da mortalidade nas idades avançadas houve um aumento do número de pessoas em idades mais avançadas. De acordo com as estimativas das Nações Unidas, a faixa etária de 65 anos ou mais vem crescendo rapidamente. Em 2018, pela primeira vez na história, pessoas deste grupo etário superou o número de crianças com idade inferior a 5 anos em todo o mundo (Nations, 2019).

Estas mudanças trazem à tona algumas preocupações aos formuladores de políticas e gestores de previdência complementar quanto ao impacto que a variação das taxas de mortalidade pode ter sobre os fundos de pensão, já que a projeção da longevidade dos participantes e assistidos influencia diretamente no nível de provisionamento estimado, visando a sustentabilidade do equilíbrio financeiro a longo prazo. Um dos riscos mais relevantes abrange a estimativa da expectativa de vida dos participantes de fundos de pensão, sendo uma medida mutável no tempo e relacionada com a dinâmica do desenvolvimento social e econômico do país. No entanto, quando não monitorada corretamente poderá resultar em acumulação de ativos insuficiente para o pagamento das obrigações atuariais (Antolin, 2007).

O termo Risco de Longevidade, em suma, representa o risco das pessoas viverem mais do que o previsto em uma tábua de mortalidade e ele será maior quando incidir sobre planos de Benefício Definido (PBD) (de Castro et al., 2019; Santos, 2007). Ele está associado ao risco dos resultados futuros de mortalidade e expectativa de vida serem diferentes do esperado (Antolin, 2007). Além disso, para Willets et al. (2004), o não reconhecimento do aumento da

longevidade (ou então, quedas graduais e consistentes das taxas de óbitos) nos cálculos atuariais também pode ser classificado como risco de longevidade. Outro estudo da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (*Organisation for Economic Co-operation and Development* - OECD (2014)) mostrou que os fundos de pensão precisam gerenciar efetivamente o risco de longevidade a que estão expostos. Os indivíduos que recebem uma renda vitalícia podem viver mais do que o esperado ou do que foi contabilizado nos cálculos atuariais para provisionar estes passivos. O risco de longevidade mal administrado pode deteriorar as finanças, causar falência e expor as pessoas ao risco de perder sua renda de aposentadoria.

Os fatores de *improvement* estabelecem o quanto as probabilidades de óbito previstas em uma tábua de mortalidade se modificam a cada ano para que a obtenção da nova probabilidade seja coerente com aquela esperada no mesmo período analisado. Atualmente, em países como Estados Unidos e Canadá, é comum a inclusão das tendências futuras da mortalidade nos cálculos atuariais a partir do uso de tábuas de mortalidade geracionais. Esta alternativa leva em consideração uma escala de melhoria gradual na expectativa de vida ao longo do tempo. Desta forma, quando é garantido ao participante o pagamento de anuidades vitalícias enquanto ele sobreviver após sua aposentadoria, a saúde financeira das entidades é diretamente afetada pela estimativa da sobrevivência dos mesmos (Santos, 2007).

Entre diversos métodos estatísticos propostos para prever as taxas de mortalidade específicas por idade (Booth and Tickle, 2008), o que merece destaque na previsão demográfica é o trabalho de Lee and Carter (1992), que baseia-se nas tendências históricas de mortalidade para projetar os óbitos futuros. O método implementado pelos autores propõe uma análise de componentes principais para modelar as taxas de mortalidade específicas por idade, a fim de se extrair um índice que represente a variação temporal do nível da mortalidade, a partir do qual as projeções são obtidas utilizando um modelo ARIMA(0,1,0), isto é, um modelo de passeio aleatório com tendência (*random walk with drift*). Uma das razões para utilizar o modelo Lee-Carter, segundo Haberman and Russolillo (2005) é que este modelo representa um dos mais recentes e influentes trabalhos desenvolvidos no campo das previsões de mortalidade. Segundo de Castro et al. (2019), Lee-Carter é entendido como um divisor de águas na projeção de mortalidade, sendo considerado atualmente um *benchmark* entre os demais métodos existentes.

Os pontos fortes do método Lee-Carter são sua simplicidade e robustez em situações nas quais os logaritmos das taxas de mortalidade específicas por idade apresentam tendências lineares (Booth et al., 2006). Apesar da limitação de se basear apenas no comportamento histórico da mortalidade, desconsiderando fatores exógenos como melhoria em indicadores macroeconômicos e avanços da medicina, o modelo torna-se conveniente pela combinação de um modelo demográfico rico e parcimonioso com os métodos de séries temporais, baseando-se em uma série histórica de longo prazo (de Jesus, 2016).

Nosso intuito aqui é modelar e projetar taxas de mortalidade específicas por idade para países em diferentes cenários sócio-econômicos, a partir da década de 50, utilizando a metodologia de Lee-Carter, bem como oferecer um texto introdutório sobre o tema, motivando o assunto a futuras pesquisas e exemplificando o problema com dados reais. Logo, queremos estimar o quanto a probabilidade de óbito prevista para cada ano se modifica, ou seja, estimar o *improvement* na expectativa de vida a partir das projeções calculadas.

Esta monografia está dividida em 3 capítulos, a contar desta introdução. No capítulo seguinte será abordada a revisão de literatura atuarial, onde temas sobre as taxas de mortalidade e *improvement* na expectativa de vida são contextualizados, trazendo alguns conceitos e definições para auxiliar a compreensão do leitor sobre as questões que motivaram a pesquisa deste trabalho. No capítulo 2 tem-se a técnica utilizada para o modelo Lee-Carter, onde os seguintes tópicos são abordados: identificação, estimação e previsão. O capítulo 3, denominado Análise Empírica, descreve os dados de mortalidade, as análises e resultados obtidos. Na sequência, têm-se as referências bibliográficas que foram utilizadas como base para a realização deste trabalho.

1 REVISÃO DE LITERATURA ATUARIAL

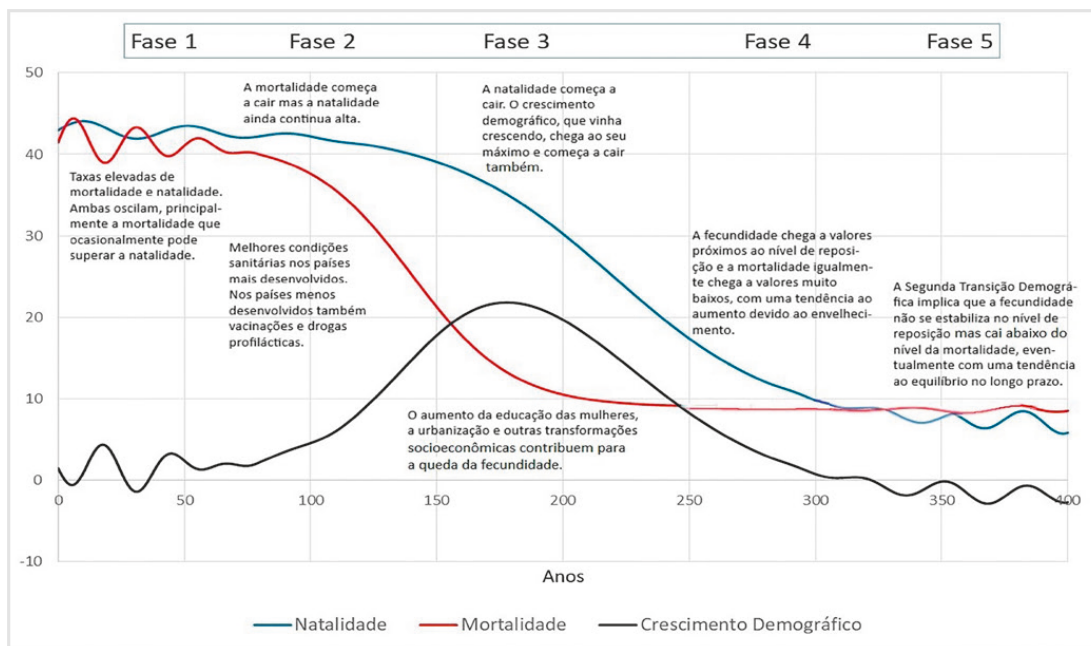
Este capítulo apresentará um breve panorama geral dos principais conceitos de tendência demográfica e terminologias. A demografia se constitui de estudos estatísticos de populações humanas. Esses estudos abrangem a formação e evolução dos grupos populacionais em seus mais variados aspectos, como o seu tamanho, sua distribuição espacial, composição e características migratórias. Além disso, esses estudos estão mais focados nas características gerais dessas populações do que nas características individuais das pessoas que as compõe (Weinstein and Pillai, 2015). Uma das maneiras de medir as taxas de mortalidade é em relação ao número de óbitos que ocorrem anualmente por mil habitantes em uma determinada região.

1.1 Transição demográfica

A transição demográfica pode ser definida como um marco referencial teórico que refere-se ao processo histórico de transição de níveis elevados e instáveis de mortalidade e natalidade na população para patamares mais equilibrados, buscando uma esfera mais baixa e estável para as componentes da dinâmica demográfica. Durante a Revolução Industrial foi observada uma queda nas taxas de fecundidade na Europa, dando origem a este fenômeno. Devido ao acesso da população a vacinas e antibióticos, além de melhores condições sociais e de saneamento, foi possível observar um leve aumento na expectativa de vida (Nasri, 2008).

O esquema “clássico” de transição é inspirado nas transformações que ocorreram na Inglaterra entre os séculos XVIII e XX. Já continentes como África e América Latina seguiram rumos diferentes e implicações distintas quando comparados com outros países europeus, como por exemplo, a França. Após algum tempo, a fim de adequar a teoria à situação dos países em desenvolvimento, buscou-se incorporar certos elementos omitidos da história demográfica europeia. Além disso, os autores do Grupo de Foz (2021) trazem que a evolução da dinâmica demográfica em países mais desenvolvidos gerou a necessidade de novos elementos serem adicionados, já que antes não estavam previstos na formulação original, definida como Segunda Transição Demográfica (STD), sendo composta por um esquema de cinco fases, conforme é apresentado na Figura 1.

Figura 1: Representação esquemática das cinco fases da transição demográfica



Fonte: Grupo de Foz (2021)

A primeira fase é marcada pelos altos níveis de mortalidade e fecundidade, onde eles encontram-se equilibrados. Nesta fase era comum que a quantidade de filhos para cada mulher fossem na ordem de 5 a 8 crianças. A mortalidade também era elevada no mesmo período. Estima-se que no período de 70-192 d.C. a esperança de vida no Império Romano era de aproximadamente 25 anos para mulheres e de 23 anos para homens. Aproximadamente 10% da população se mantinha viva até os 65 anos de idade (Garnsey and Rathbone, 2000). Inclusive, no curto prazo podem ocorrer grandes oscilações nas taxas de mortalidade devido a epidemias ou episódios de fome e doenças. Atualmente não há nenhum país no mundo que não pertença a esta fase.

O declínio da mortalidade caracteriza a segunda fase: a característica essencial e universalmente verificada da teoria é que antes da ocorrência da queda da fecundidade, houve uma redução nas taxas de óbito. Com isso, esta fase resulta em um rápido crescimento demográfico.

fico, devido a natalidade que ainda se mantém elevada, ao passo que a mortalidade assume patamares mais baixos. A massiva maioria dos países já passou desta fase, representada por 90% da população mundial (Garnsey and Rathbone, 2000).

A terceira fase retrata o declínio da fecundidade, onde há uma tomada de consciência tardia da população em relação à queda na mortalidade e da não necessidade de se ter tantos filhos como antes. Devido às melhorias nas condições de vida e tecnologia de saúde pública, há uma mudança na percepção sobre o ambiente onde vivem os indivíduos, fazendo com que esta decisão seja requerida muito mais por parte deles. Assim, esta fase é amplamente afetada pela cultura e instituições sociais. Os países europeus foram precursores na transição da fecundidade. Por exemplo, entre 1830 e 1840 o número médio de filhos entre as mulheres nascidas na França era de 3,5, enquanto na Bélgica e Suécia a média era de 4,5 filhos por mulher (Frejka, 2017).

Quando a mortalidade e fecundidade encontram-se em níveis baixos e equilibrados, se constitui a quarta fase da transição demográfica, gerando um crescimento praticamente inexistente da população. Grande parte dos países desenvolvidos atingiram este equilíbrio por volta da segunda metade do século XX. Entretanto, esta característica não é exclusiva de países desenvolvidos, de forma que observa-se esse fenômeno também em países em desenvolvimento. Entre estes pode-se destacar a China, por exemplo, que reduziu suas taxas de fecundidade em consequência de políticas governamentais que obrigava os casais a terem um número reduzido de filhos, e Cuba, na América Latina, onde a fecundidade caiu a patamares muito baixos, fazendo com que cada nova geração apresente o mesmo tamanho da geração anterior.

A quinta fase está associada à chamada segunda transição demográfica (Van de Kaa, 1987; Lesthaeghe, 1995, 2010), onde além da queda na mortalidade e fecundidade em muitos países, foi influenciada também pela migração internacional. Além disso, visando a reversão desta tendência, alguns países estão considerando a criação de medidas de intervenção na fecundidade ou na migração internacional.

Outro ponto interessante é o de que em vários países mais desenvolvidos, houve um aumento na expectativa de vida das pessoas com mais de 60 anos de idade, onde as razões para tais mudanças estejam relacionadas a cumulativas melhorias no estado de saúde da população ao longo do tempo.

1.2 Taxas de mortalidade

A taxa de mortalidade representa a razão entre o número de óbitos ocorridos e a população exposta ao risco em um determinado período de tempo. Esta relação corresponde ao risco que uma pessoa tem de falecer no decorrer ao longo de um ano calendário.

Nos países mais desenvolvidos, com políticas públicas bem definidas e implementadas, além de acesso à saúde, saneamento básico e educação, esta taxa apresenta-se reduzida quando comparada a países subdesenvolvidos, visto que há uma carência na qualidade de vida, educação e inserção no mercado de trabalho nestes lugares. O estudo da mortalidade é de suma importância do ponto de vista de saúde pública, pois é uma ferramenta que permite a previsão de gastos num futuro próximo e ainda possibilita aprimorar as metodologias e tecnologias na saúde (de Oliveira et al., 2012). A taxa de mortalidade geral é definida como:

$$TMG = \frac{\text{Total de óbitos em determinado período de tempo}}{\text{População total exposta ao risco de morrer (nº habitantes)}} * 1000$$

Também existem taxas de mortalidade específicas que medem o risco de óbito para uma fração específica da população. Neste trabalho serão utilizadas principalmente as taxas por idade e segregadas por sexo, conforme são apresentadas a seguir.

$$TME_{idade} = \frac{\text{Total de óbitos na idade x em determinado período de tempo}}{\text{População total na idade correspondente}} * 1000$$

$$TME_{sexo} = \frac{\text{Total de óbitos do mesmo sexo em determinado período de tempo}}{\text{População total ao sexo correspondente}} * 1000$$

Uma questão importante que precisa ser levada em consideração é que a população muda a cada instante de tempo ao longo de 12 meses. Portanto, é necessário um certo cuidado com qual amostra considerar no denominador da equação. Teoricamente, as pessoas deveriam ser contabilizadas pela fração de ano vivido, ou seja, todos os indivíduos presentes no início

do ano e que vieram a óbito no período analisado, bem como as crianças nascidas no ano, deveriam compor uma parcela de tempo individual e específica. Porém o calculo exato de pessoas-ano acaba sendo inviável e como solução, usa-se uma aproximação para o total de pessoas-ano, adotando-se a estimativa da população total no meio do ano, supondo que as ocorrências de nascimentos e óbitos ocorram uniformemente no decorrer do período. Tratando-se de um período de doze meses, de maneira geral, tal suposição não gera grandes distorções (de Carvalho et al., 2015).

1.3 Improvement na expectativa de vida

Na Demografia e Ciências Atuariais, uma série temporal das taxas de mortalidade específicas por idade costumam ser modeladas e previstas em escala logarítmica, onde traz um ponto importante que merece atenção de não estacionariedade dos dados. Como alternativa, Shang (2019) propôs uma modelagem dinâmica, onde a série torna-se estacionária. Com isso, uma forma de medir o *improvement* nas taxas de mortalidade ano a ano se dá através da equação

$$z_{x,t} = 2 \times \frac{1 - m_{x,t}/m_{x,t-1}}{1 + m_{x,t}/m_{x,t-1}} = 2 \times \frac{m_{x,t-1} - m_{x,t}}{m_{x,t-1} + m_{x,t}}, \quad t = 2, \dots, n, \quad (1)$$

onde para cada idade x no ano t , $m_{x,t}$ representa a taxa de mortalidade bruta, $z_{x,t}$ a taxa de mortalidade transformada e n o número de anos.

Note que a expressão em (1) pode ser vista como a razão entre o *improvement* da mortalidade ($m_{x,t-1} - m_{x,t}$) e a média $(m_{x,t} + m_{x,t-1})/2$ entre duas taxas de mortalidade adjacentes. Além disso, os incrementos positivos nas mudanças das taxas implicam em $z_{x,t} > 0$ e deteriorações nas mesmas são definidas como $z_{x,t} < 0$. Assim,

$$m_{x,t} = \frac{2 + z_{x,t}}{2 - z_{x,t}} \times m_{x,t-1}.$$

1.4 Risco de Longevidade

Nos estudos de projeção da mortalidade, um dos riscos mais importantes a ser levado em consideração, e ainda pouco compreendido, que os patrocinadores de fundos de pensão, empresas de seguros e governos encontram-se expostos é o Risco de Longevidade (Crawford et al., 2008). Ele representa o risco de uma população viver mais tempo do que o previsto.

A diminuição das taxas de mortalidade tem importantes consequências na viabilidade dos fundos de pensões públicos e privados, bem como no seguro de vida de seguradoras, visto que a subestimação da expectativa de vida leva a ineficientes acumulações financeiras. O empregador que administra um Plano de Benefícios Definido (PBD) estabelece a promessa de um pagamento periódico da soma de um capital aos seus empregados, imediatamente após a concessão do benefício de aposentadoria até o final da sua vida. Este financiamento é realizado tanto por parte do empregador quanto pelo empregado, durante a carreira do beneficiário. Além disso, considerando o princípio do mutualismo que dirige os planos BDs, é de responsabilidade coletiva dos participantes e patrocinadores do plano qualquer déficit de fundos futuros. Logo, é fundamental ao empregador a capacidade de prever com uma boa precisão o valor total necessário das obrigações futuras para com seus assistidos. Quando as mudanças na expectativa de vida são previstas e contempladas nas avaliações atuariais, as Reservas Matemáticas podem incluir estas variações e o Risco de Longevidade pode ser mitigado (Boyer et al., 2011).

Mesmo que atualmente observe-se menores taxas de mortalidade e um aumento na longevidade das pessoas, para os sistemas de aposentadoria e pensões que administram planos na modalidade de Benefício Definido, isto não necessariamente representa algo positivo pois esta mudança no padrão de vida das pessoas reflete em maiores pagamentos de benefícios programados e por períodos de tempos mais longos (Antolin, 2007; OECD, 2014). Por isso, o papel dos modelos que projetam a mortalidade atuam de forma fundamental na avaliação do Risco de Longevidade para atuários e demógrafos de Castro et al. (2019).

2 MODELO LEE-CARTER

Ronald Lee e Lawrence Carter desenvolveram em 1992 um método para modelagem e previsão da mortalidade, que vem sendo uma referência técnica no tema. Este método utiliza experiências históricas da mortalidade para a previsão das taxas futuras, com base em um modelo log-aditivo de taxas de mortalidade específicas por idade com um componente de tempo dominante e um componente de idade relativa fixa. Os autores usaram um método de decomposição de matriz para identificar os dois componentes, com base nos dados de mortalidade dos Estados Unidos para 1900-1989. Logo após, projetaram o componente de tempo para 2065, utilizando um modelo ARIMA de previsão linear de séries temporais (Booth et al., 2002).

Ou seja, de forma resumida, Lee-Carter é a combinação de um modelo demográfico com um modelo de séries temporais, que permite a obtenção de intervalos de probabilidade para as previsões e que as taxas de mortalidade decresçam de forma exponencial, sem que seja necessário modificar a desaceleração na expectativa de vida ao ponto que as idades se aproximam dos anos finais. Este método utiliza a combinação de apenas dois fatores, a idade do indivíduo e o tempo, a fim de obter apenas um índice que varia no nível de mortalidade ao longo do tempo, utilizando decomposição de matrizes em que a extrapolação das tendências passadas é um princípio pressuposto.

Assim, seja $m_{(x,t)}$ a taxa central de mortalidade para cada idade x no ano t , obtém-se a matriz de taxas de mortalidade:

$$\begin{aligned} \ln [m_{(x,t)}] &= \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{(x,t)}, \\ \epsilon_{(x,t)} &\sim N(0, \sigma^2), \\ x &= 0, \dots, X, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $m_{(x,t)}$ representa a taxa de mortalidade central, ou seja, a razão entre os óbitos e a população exposta ao risco no meio do ano de uma determinada faixa de idade x no ano t , α_x é o padrão médio da mortalidade para cada idade específica, β_x descreve as alterações nas taxas

de mortalidade na idade x em resposta a mudança no nível geral de mortalidade, κ_t representa o índice de tendência temporal do nível de mortalidade geral, ou seja,

$$\frac{\partial m_{(x,t)}}{\partial t} = \beta_x \frac{\partial \kappa_t}{\partial t}. \quad (3)$$

O termo de erro $\epsilon_{(x,t)}$ é aleatório e denota as tendências da mortalidade para idade x e tempo t que não foram capturadas pelo modelo. Lee and Carter (1992) propuseram as seguintes restrições: $\sum_{x=0}^X \beta_x = 1$, $\sum_{t=1}^T \kappa_t = 0$, e assumiram implicitamente que $E(\epsilon_{(x,t)}) = 0$, $Var(\epsilon_{(x,t)}) = \sigma_\epsilon^2$. Sob essas restrições, α_x mapeia o principal perfil de mortalidade por idade, κ_t representa os efeitos do período e β_x mede as interações com a idade. Para investigar a identificabilidade e estimação do método de Lee-Carter, as sessões seguintes são baseadas no artigo de Yang (2019).

2.1 Identificação do modelo Lee-Carter

É necessário a identificação de um modelo para a estimação de seus parâmetros. A definição de identificação é mostrada a seguir.

Definição 2.1 (Definição de identificabilidade). *Seja $x, y \in \{0, \dots, X\}$, $s, t \in \{1, \dots, X\}$, $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ com espaço de parâmetros Θ sendo um subconjunto de algum espaço dimensional finito. Além disso,*

$$E_\theta (\ln(m_{(x,t)})) = f_\theta(x, t), Cov_\theta (\ln(m_{(x,s)}), \ln(m_{(y,t)})) = g_\theta(x, y, s, t).$$

$$E_{\tilde{\theta}} (\ln(m_{(x,t)})) = f_{\tilde{\theta}}(x, t), Cov_{\tilde{\theta}} (\ln(m_{(x,s)}), \ln(m_{(y,t)})) = g_{\tilde{\theta}}(x, y, s, t).$$

Se $f_\theta = f_{\tilde{\theta}}$ implica que $\theta = \tilde{\theta}$, então os valores esperados são identificáveis;

Se $f_\theta = f_{\tilde{\theta}}$, $g_\theta = g_{\tilde{\theta}}$ juntos, implica $\theta = \tilde{\theta}$, então os valores esperados e as estruturas de covariâncias são identificáveis.

E as restrições que podem garantir a identificabilidade do modelo Lee-Carter são as seguintes:

$$\sum_{x=0}^X \beta_x = 1, \sum_{t=1}^T \kappa_t = 0. \quad (4)$$

Prova. Seja $\theta = \{\alpha, \beta, \kappa\}$, $\tilde{\theta} = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}\}$, $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$. Assumimos $E(\ln_\theta(m_{(x,t)})) = E(\ln_{\tilde{\theta}}(m_{(x,t)}))$, então

$$\alpha_x + \beta_x \kappa_t = \tilde{\alpha}_x + \tilde{\beta}_x \tilde{\kappa}_t,$$

$$\text{isto implica } \sum_{t=1}^T (\alpha_x + \beta_x \kappa_t) = \sum_{t=1}^T (\tilde{\alpha}_x + \tilde{\beta}_x \tilde{\kappa}_t),$$

$$T \alpha_x + \beta_x \sum_{t=1}^T \kappa_t = T \tilde{\alpha}_x + \tilde{\beta}_x \sum_{t=1}^T \tilde{\kappa}_t,$$

$$\alpha_x \stackrel{(4)}{=} \tilde{\alpha}_x,$$

portanto,

$$\beta_x \kappa_t = \tilde{\beta}_x \tilde{\kappa}_t,$$

$$\text{que implica } \sum_{x=0}^X (\beta_x \kappa_t) = \sum_{x=0}^X (\tilde{\beta}_x \tilde{\kappa}_t),$$

$$\left(\sum_{x=0}^X \beta_x \right) \kappa_t = \left(\sum_{x=0}^X \tilde{\beta}_x \right) \tilde{\kappa}_t,$$

$$\kappa_t \stackrel{(4)}{=} \tilde{\kappa}_t.$$

Se existe um κ_t onde $\kappa_t \neq 0$, então

$$\beta_x = \tilde{\beta}_x,$$

$$\theta = \tilde{\theta}.$$

Como resultado, os valores esperados do modelo Lee-Carter são identificáveis.

2.2 Estimação e Previsão do modelo Lee-Carter

A técnica de ajuste do modelo LC é feita em duas etapas:

- A primeira parte do ajuste do modelo consiste na estimação dos parâmetros α_x , β_x e κ_t .
- Já a segunda parte consiste em reestimar κ_t com base nos valores estimados $\hat{\alpha}_x$ e $\hat{\beta}_x$, visando com que o número de óbitos ajustado coincida com os óbitos efetivamente verificados.

Os parâmetros são estimados da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \ln(m_{(x,t)}) &= \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{(x,t)} \\ \sum_{t=1}^T \ln(m_{(x,t)}) &= \sum_{t=1}^T (\alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{(x,t)}) \\ \sum_{t=1}^T \ln(m_{(x,t)}) &= \sum_{t=1}^T \alpha_x + \beta_x \sum_{t=1}^T \kappa_t + \sum_{t=1}^T \epsilon_{(x,t)}, \text{ onde } \epsilon_{(x,t)} \sim N(0, \sigma^2) \\ &\approx T\alpha_x + \beta_x \sum_{t=1}^T \kappa_t, \end{aligned} \quad (5)$$

A princípio, não existe uma solução única para este sistema. Assim, é necessário adicionar as duas seguintes restrições de forma a obter uma solução única: $\sum_{x=0}^X \beta_x = 1$ e $\sum_{t=1}^T \kappa_t = 0$.

Ao usar essas restrições, os coeficientes α_x são uma média aritmética simples ao longo do tempo para os logaritmos das taxas específicas por idade. Assim, os parâmetros β_x e κ_t são determinados de forma única. Portanto, os coeficientes α_x são calculados a partir da seguinte expressão:

$$\hat{\alpha}_x \stackrel{(4)}{=} T\alpha_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(m_{(x,t)}). \quad (6)$$

A matriz A é construída a partir da transformação das taxas de mortalidade específicas por idade, através dos seus logaritmos, e então subtraindo suas médias específicas por idade ao longo do tempo, denotado por $\hat{\alpha}_x$.

$$A = \begin{pmatrix} \ln(m_{0,1}) - \hat{\alpha}_0 & \ln(m_{0,2}) - \hat{\alpha}_0 & \cdots & \ln(m_{0,T}) - \hat{\alpha}_0 \\ \ln(m_{1,1}) - \hat{\alpha}_1 & \ln(m_{1,2}) - \hat{\alpha}_1 & \cdots & \ln(m_{1,T}) - \hat{\alpha}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln(m_{X,1}) - \hat{\alpha}_X & \ln(m_{X,2}) - \hat{\alpha}_X & \cdots & \ln(m_{X,T}) - \hat{\alpha}_X \end{pmatrix}, \quad (7)$$

quando aplicamos Decomposição de Valores Singulares na matriz A, para fatorar A no produto de três matrizes $A = U\Sigma V^T$, onde as colunas de U e V são ortogonais e a matriz Σ é diagonal com entradas reais positivas. Aqui, Σ é uma matriz diagonal $(X+1) \times T$ com valores singulares (SV) na diagonal. No caso, $rank(A) = r \leq T \leq X + 1$, a matriz σ pode ser mostrada da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_T = 0$. Particularmente, A pode ser escrita da seguinte forma:

$$A = \lambda_1 u_1 v_1^T + \lambda_2 u_2 v_2^T + \cdots \lambda_r u_r v_r^T. \quad (8)$$

Os vetores u_i 's e v_i 's compõem a matriz ortogonal A $m \times m$ e a transposta da matriz ortogonal A $n \times n$, respectivamente.

Para aproximar β e κ , temos que $\hat{\beta} = \frac{u_1}{\sum_{i=1}^{X+1} u_{1,i}}$, $\hat{\kappa} = v_1 \times (\sum_{i=1}^{X+1} u_{1,i}) \times \lambda_1$, além disso, λ_1 é o valor principal do SV.

Note que se $\sum_{i=1}^{X+1} u_{1,i} = 0$, $\hat{\beta}$ não pode ser normalizado. Além disso, os componentes de v_1 sempre serão 0, portanto $\sum_t^T \hat{\kappa}_t = 0$ sempre é válido.

Na segunda parte, tomamos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ estimados anteriormente e reestimamos κ_t 's de modo que eles prevejam corretamente o número total de órbitos a cada ano, ou seja,

$$\sum_x D_{(x,t)} = \sum_x e_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t), \quad (9)$$

onde $e_{x,t}$ o número total de órbitos observado no ano a partir de $D_{(x,t)}$ ocorrências.

Sob a restrição $\sum_t \kappa_t = 0$ e a suposição de que os termos de erro são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d) com distribuição $N(0, 1)$, as estimativas $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$ e $\hat{\kappa}_t$ também são estimativas de máxima verissimilhança.

2.2.1 SVD e Mínimos Quadrados

Sejam A , U , V e Σ elementos tais que $A = U\Sigma V^T$. $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ e Σ é a matriz diagonal com λ_i como sua enésima entrada diagonal. Além disso, definimos

$$\vec{v} = \arg \max_{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|=1} \|AV\|. \quad (10)$$

Seja \vec{v} um vetor unitário arbitrário, \vec{a} um vetor arbitrário e θ é o ângulo agudo formado por estes dois vetores, mostrados na Figura 2. Além disso, \vec{n} é a projeção de \vec{a} no vetor \vec{v} .

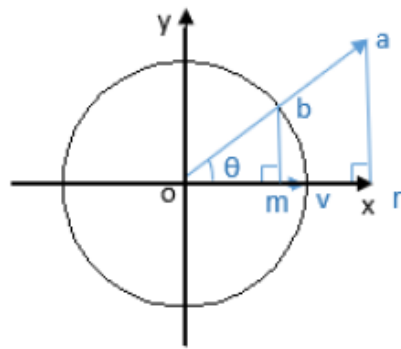


Figura 2: Projeção de \vec{a} em \vec{v} .

Então

$$\vec{a}\vec{v} = \sum_{j=1}^n a_j v_j \times \|\vec{a}\| \times \|\vec{v}\| = \|\vec{a}\| \cos(\theta) = \|\vec{n}\|, \quad (11)$$

Ademais, $\sum_i^n \sum_j^n a_{ij} v_j$ é a soma dos comprimentos das projeções de \vec{a}_i em \vec{v} . Como resultado,

$$\begin{aligned}
\|A\vec{v}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\sum_j a_{ij} v_j\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 \cos(\theta_i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 - \sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 \sin(\theta_i)^2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Maximizar $\|A\vec{v}\|$ é o mesmo que maximizar $\|A\vec{v}\|^2$. Desde que $\|\vec{a}_i\|$ seja constante, maximizar $\sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 \cos(\theta_i)$ também é o mesmo que maximizar $\sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 \sin(\theta_i)$, que é a soma da distância ao quadrado de \vec{a}_i para \vec{v} . Como $A = U\Sigma V^T$, então

$$A^T A = V\Sigma^2 V^T. \tag{13}$$

Agora, seja $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ os autovetores normalizados de $A^T A$. Por definição de \vec{v} .

$$\|A\vec{v}_i\| \leq \|A\vec{v}\|.$$

Além disso, para qualquer vetor unitário \vec{v} ,

$$\begin{aligned}
\|A\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v}^T A^T A \vec{v}} \\
&= \sqrt{\left(\sum_i^m c_i \vec{v}_i^T\right) A^T A \left(\sum_{i=1}^m c_i \vec{v}_i\right)}, \text{ onde } \vec{v} = \sum_{i=1}^m c_i \vec{v}_i \\
&= \sqrt{\left(\sum_i^m c_i \vec{v}_i^T\right) \left(\sum_{i=1}^m c_i A^T A \vec{v}_i\right)} \\
&= \sqrt{\left(\sum_i^m c_i \vec{v}_i^T\right) \left(\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^2 \vec{v}_i\right)} \\
&= \sqrt{\sum_i^m c_i^2 \lambda_i^2}, \text{ como } \vec{v}_i^T \vec{v}_j = 0, \text{ se } i \neq j \\
&\leq \lambda_1 = \sqrt{1 \times \lambda_1^2 + 0 \times \lambda_2^2 + \dots + 0 \times \lambda_n^2}.
\end{aligned}$$

Observe que o limite superior é obtido, porque

$$\begin{aligned}
\|A\vec{v}_1\| &= \sqrt{\vec{v}_1^T A^T A \vec{v}_1} \\
&= \sqrt{\vec{v}_1^T \lambda_1^2 \vec{v}_1} \\
&= \lambda_1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Em suma, a soma das distâncias quadradas de $\vec{a}_i \forall i$ para um vetor unitário arbitrário \vec{v} , $\sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 \text{seno}(\theta_i)^2$, é minimizado quando \vec{v}_1 é um vetor unitário. Além disso, a soma da projeção de $\vec{a}_i \forall i$, $\sum_{i=1}^m \|\vec{a}_i\|^2 \text{cos}(\theta_i)^2$, é maximizado em \vec{v}_1 com um valor de λ_1^2 .

2.2.2 SVD e Estimação Lee-Carter

Como mencionado anteriormente, $\sum_t^T \hat{\kappa}_t = 0$ sempre é válido e será mostrado nesta seção. Pelas equações 5 e 7, sabemos que a soma das linhas de A é 0, ou seja, $\sum_{i=1}^n a_{li} = 0, \forall l$.

Seja (i,j) -ésimo elemento de $A^T A$ dado por $\sum_{l=1}^m a_{li} a_{lj}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m a_{li} a_{lj} &= \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n a_{li} a_{lj} \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} \sum_{l=1}^n a_{li} \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto implica que a soma das colunas de $A^T A$ é 0.

Agora, seja B uma matriz $n \times n$ com a soma das colunas igual a 0, ou seja, $\sum_{i=1}^n b_{ij} = 0$.

Para um vetor arbitrário \vec{v} ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} v_j &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} v_j \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é, os componentes de \vec{v} sobre B somam 0.

Para um autovetor \vec{v} de B para o autovalor $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} B\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} v_j &= \sum_{i=1}^n \lambda v_i. \end{aligned}$$

Note que $\hat{\kappa} = v_1 \times (\sum_{i=1}^{X+1} u_{1,i}) \times \lambda_1$, isto é, $\sum_t \hat{\kappa}_t = 0$.

2.2.3 Mínimos Quadrados e Estimação Lee-Carter

Vamos assumir que os erros são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d) com distribuição $N(0, 1)$, a função de verossimilhança das observações é dada por:

$$L = \prod_{x=0}^X \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(m_{x,t}) - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2}{2}\right),$$

então, a log-verossimilhança (com constante descartada) é definida como:

$$l = \sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} (\ln(m_{x,t}) - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2.$$

Portanto, sob a restrição $\sum_{t=1}^T \kappa_t = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha_{\bar{x}}} &= \sum_{t=1}^T (\ln(m_{\bar{x},t}) - \alpha_{\bar{x}} - \beta_{\bar{x}} \kappa_t) \\ &= \sum_{t=1}^T (\ln(m_{\bar{x},t}) - \sum_{t=1}^T \alpha_{\bar{x}} - \beta_{\bar{x}} \sum_{t=1}^T \kappa_t) \\ &= \sum_{t=1}^T \ln(m_{\bar{x},t}) - T \alpha_{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Como resultado, $\hat{\alpha}_{\bar{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(m_{\bar{x},t})$. Além disso, maximizar a verossimilhança L é similar a minimizar $\sum_{x=0}^X \sum_{t=1}^T \frac{1}{2} (\ln(m_{\bar{x},t}) - \alpha_{\bar{x}} - \beta_{\bar{x}} \kappa_t)^2$, logo, a estimativa de Lee-Carter é justificada pela estimativa de máxima verossimilhança.

2.2.4 Passeio aleatório com constante

As previsões do método Lee-Carter são feitas a partir do modelo ARIMA(0,1,0), também chamado de passeio aleatório com constante. Este modelo específico pode ser visto como um caso especial importante de um modelo ARIMA (*Auto-Regressive Integrated Moving Ave-*

rage, ou Auto-regressivo Integrado de Médias Móveis). Eles são capazes de lidar com padrões de tempo mais interessantes que envolvem etapas correlacionadas, como reversão à média, oscilação, médias variáveis no tempo e sazonalidade, por exemplo. O modelo $ARIMA(p,d,q)$ é composto por três componentes: o componente auto-regressivo (AR), o de médias móveis (MA) e o filtro de integração (I). Também é um caso especial de um processo integrado. Geralmente, tem-se que X_t é integrado de ordem d se $\Delta_d X_t$ for estacionário, e escrevemos $X_t \sim I(d)$.

Seja $W_t = \Delta^d X_t$, a estrutura do modelo $ARIMA(p,d,q)$ é expressa por:

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \dots + \phi_p W_{t-p} + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q}.$$

Segundo Shumway et al. (2000), um modelo de passeio aleatório com constante é definido por

$$x_t = \delta + x_{t-1} + w_t, \text{ para } t = 1, 2, \dots, \text{ e } x_0 = 0. \quad (15)$$

onde w_t é um ruído branco. A constante δ é chamada de *drift*, e quando $\delta = 0$, a equação 15 é chamada de passeio aleatório (ou *random walk*). O termo passeio aleatório vem do fato de que, quando $\delta = 0$, o valor da série no tempo t é o valor da série no tempo $t - 1$ com a adição de um movimento completamente aleatório determinado por w_t . Observe que podemos reescrever a equação 15 como uma soma cumulativa das variáveis de ruído branco. Isso é

$$x_t = \delta_t + \sum_{j=1}^t w_j, \text{ para } t = 1, 2, \dots.$$

A previsão um passo a frente é definida como

$$x_{n+1}^n = E(x_{n+1} | x_n, \dots, x_1) = E(\delta + x_n + w_{n+1} | x_n, \dots, x_1) = \delta + x_n.$$

A previsão dois passos a frente é dada por $x_{n+2}^n = \delta + x_{n+1}^n = 2\delta + x_n$ e conseqüentemente a

previsão m -passos a frente, para $m = 1, 2, \dots$, é

$$x_{n+m}^n = m\delta + x_n$$

Para obter os erros de previsão, usando a equação 15, podemos escrever

$$x_{n+m} = (n+m)\delta + \sum_{j=1}^{n+m} w_j = m\delta + x_n + \sum_{j=n+1}^{n+m} w_j.$$

Finalmente, segue que o erro de previsão m -passos à frente é dado por

$$P_{n+m}^n = E(x_{n+m} - x_{n+m}^n)^2 = E\left(\sum_{j=n+1}^{n+m} w_j\right)^2 = m\sigma_w^2.$$

3 ANÁLISE EMPÍRICA

Os dados de mortalidade são um elemento importante nos campos da ciência atuarial e demográfica, saúde, epidemiologia e planejamento nacional. Os níveis de mortalidade são geralmente considerados como indicadores do bem-estar geral de uma população, refletindo a qualidade de vida em de forma quantitativa. Portanto, um bom modelo de previsão da taxa de mortalidade auxilia uma nação a desenvolver sua qualidade de vida (Basnayake and Nawarathna, 2017).

Em 1º de janeiro de 2021 entrou em vigor a Instrução Normativa Previc nº 33/20, que regulamenta os métodos técnicos para a elaboração do estudo de adequação das hipóteses atuariais, dentre outros assuntos. Esta instrução determina que Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) classificadas como Entidades Sistemicamente Importantes, que administrem planos de benefícios adjuntos de risco e adotem tábua geracional de mortalidade geral com a respectiva escala de melhoria de longevidade terão seus estudos técnicos de adequação válidos por cinco anos.

Logo, o objetivo deste trabalho é estimar a mortalidade específica por idade e sexo em países de diferentes continentes e níveis socioeconômico distintos, descrevendo seu comportamento para uma ampla gama temporal, com base no modelo demográfico proposto por Lee e Carter em 1992. As previsões futuras das taxas de mortalidade foram estimadas para uma janela de cinco anos, conforme foi sugerido pela nova Instrução Normativa Previc.

3.1 Dados de Mortalidade específicos por idade

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos através do *Human Mortality Database* (HMD) e estão segregados por sexo feminino e masculino. O HMD fornece inúmeros conjuntos de dados com informações históricas detalhadas sobre mortalidade e população em diversos países do globo. O estudo se concentrará na previsão das taxas de mortalidade total, bem como segregada por sexo feminino e masculino, da população de quatro países desenvolvidos versus um em desenvolvimento: Bulgária, Estados Unidos, França, Japão e Reino Unido. O histórico de registros com os anos dos dados de mortalidade disponíveis no HMD difere entre

alguns lugares. No entanto, o período entre 1950 e 2017 é coberto para todos os dados selecionados e esta será a janela de tempo de referência para prever a mortalidade. Em suma, o conjunto de dados corresponde à taxa de mortalidade anual, segregada por sexo, para cinco diferentes países ao longo de 67 anos para uma ampla gama de idades. As primeiras quatro observações dos dados de cada país são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Primeiras quatro observações das taxas de mortalidade segregadas por sexo e total para os cinco países analisados.

País	Ano	Idade	m_x Feminino	m_x Masculino	m_x Total
Bulgária	1950	18	0,002796	0,003166	0,002984
	1950	19	0,003106	0,003126	0,003116
	1950	20	0,003628	0,003744	0,003687
	1950	21	0,003402	0,004007	0,003707
Estados Unidos	1950	18	0,000837	0,001618	0,001221
	1950	19	0,000883	0,001730	0,001299
	1950	20	0,000925	0,001860	0,0013810
	1950	21	0,000965	0,001948	0,001442
França	1950	18	0,000940	0,001345	0,001146
	1950	19	0,001158	0,001510	0,001337
	1950	20	0,001182	0,001551	0,001370
	1950	21	0,001234	0,001763	0,001504
Japão	1950	18	0,003036	0,003052	0,003044
	1950	19	0,003332	0,003617	0,003475
	1950	20	0,003633	0,004139	0,003886
	1950	21	0,004197	0,004653	0,004424
Reino Unido	1950	18	0,000915	0,001245	0,001073
	1950	19	0,001069	0,001266	0,001163
	1950	20	0,001104	0,001382	0,001238
	1950	21	0,001230	0,001369	0,001297

m_x : taxa de mortalidade posicionada no meio do ano.

3.2 Análise e Resultados

3.2.1 Análise exploratória dos dados

Com a análise exploratória dos dados pode-se observar o comportamento da mortalidade durante os 67 anos (1950-2017) para as idades entre 18 e 85 anos. O corte para as idades superiores a 85 anos foi feito levando em consideração que as observações nestas idades elevadas acabam sendo pouco confiáveis, segundo os autores Lee and Carter (1992). As análises foram feitas através do *software* R e o pacote '*demography*'.

As figuras a seguir mostram as taxas de mortalidade de acordo com a idade e o tempo, onde cada ano é representado graficamente. As cores na vinheta demográfica indicam os diferentes tempos (os mais recentes em violeta e os primeiros em vermelho). Vários comportamentos são mostrados, respectivamente, para a população feminina e masculina ao longo das idades. É possível observar entre os países que, de forma geral, a mudança nas taxas de mortalidade é mais perceptível a partir dos 50 anos de idade e que os maiores índices de mortalidade encontram-se nas idades finais.

Também observa-se nas figuras 3 até 7 que no decorrer do tempo, a curva das taxas de mortalidade tem um formato similar, ao passo que houve um deslocamento relevante para algumas idades, evidenciando uma possível redução. Além disso, é possível notar que na sua maioria as mulheres apresentam taxas de mortalidade inferiores, enquanto as taxas para o sexo masculino tem um aumento mais expressivo entre as idades, com exceção da Bulgária que atualmente apresenta uma maior mortalidade em relação aos anos anteriores, onde as elevadas taxas de óbito resultam de uma combinação de envelhecimento da população, um alto número de pessoas em risco de pobreza e um fraco sistema de saúde (Times, 2021).

Ao analisarmos a figura 3, podemos perceber que a partir dos anos 2000, os homens apresentam uma taxa de mortalidade mais elevada entre os 50 e 70 anos, quando comparada aos anos anteriores. Ou seja, quando espera-se que a mortalidade vá decaindo com o passar do tempo, aqui percebemos que isto não está acontecendo. Além disso, os óbitos de mulheres com mais de 50 anos após a Segunda Guerra eram tão elevados quanto os dos homens.

Já os dados da França mostrados na Figura 4 evidenciam bem o que espera-se: nas

décadas de 60-70, os níveis de óbito eram elevados para toda a população. Com o passar do tempo e as melhorias nas condições sanitárias e de saúde, fica evidente que as taxas de mortalidade caíram ao longo do tempo, bem como o aumento na expectativa de vida.

Na Figura 5 observa-se que os homens apresentavam taxas de mortalidade mais elevadas em comparação aos demais países, na década de 60-70, chegando a taxas de aproximadamente 0,30 nas idades próximas aos 85 anos. As taxas de mortalidade para o sexo masculino na Figura 6 também eram elevadas após a Segunda Guerra, para as idades mais próximas aos 85 anos.

Por fim, as taxas de mortalidade para o sexo masculino na Figura 7 começam a decair de forma mais perceptível a partir dos anos 1980. Já para as mulheres, este aumento na longevidade vem sendo observado desde o início do histórico analisado.

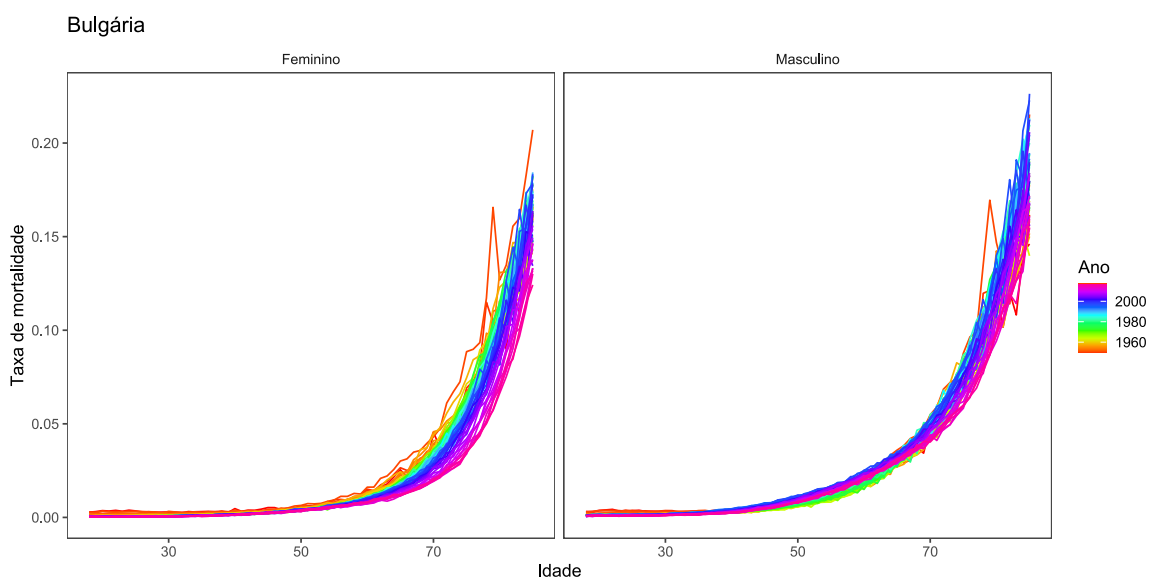


Figura 3: Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, na Bulgária

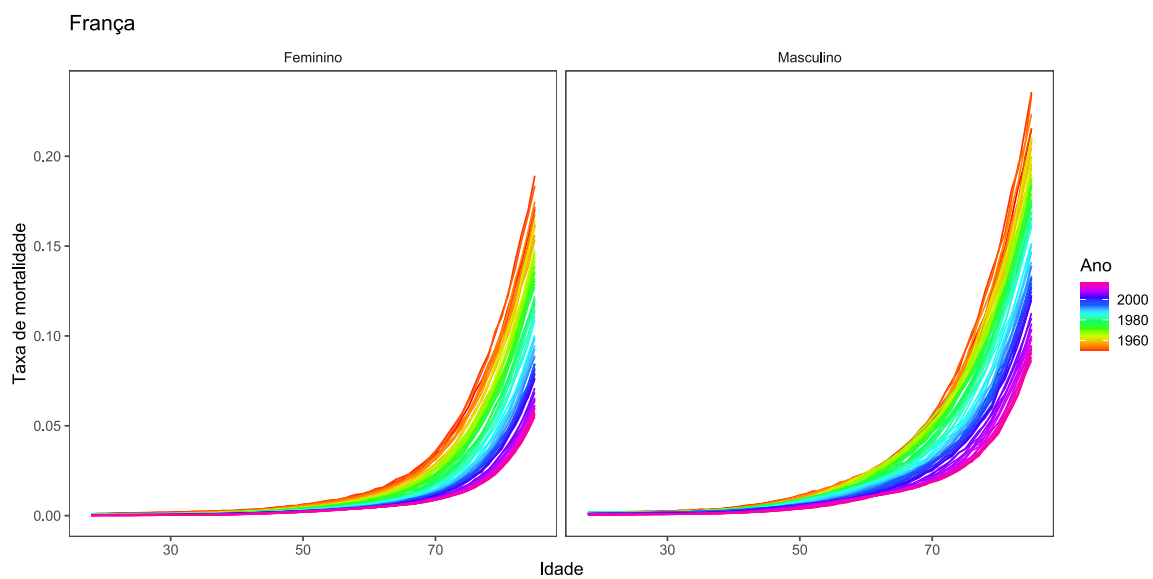


Figura 4: Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, na França

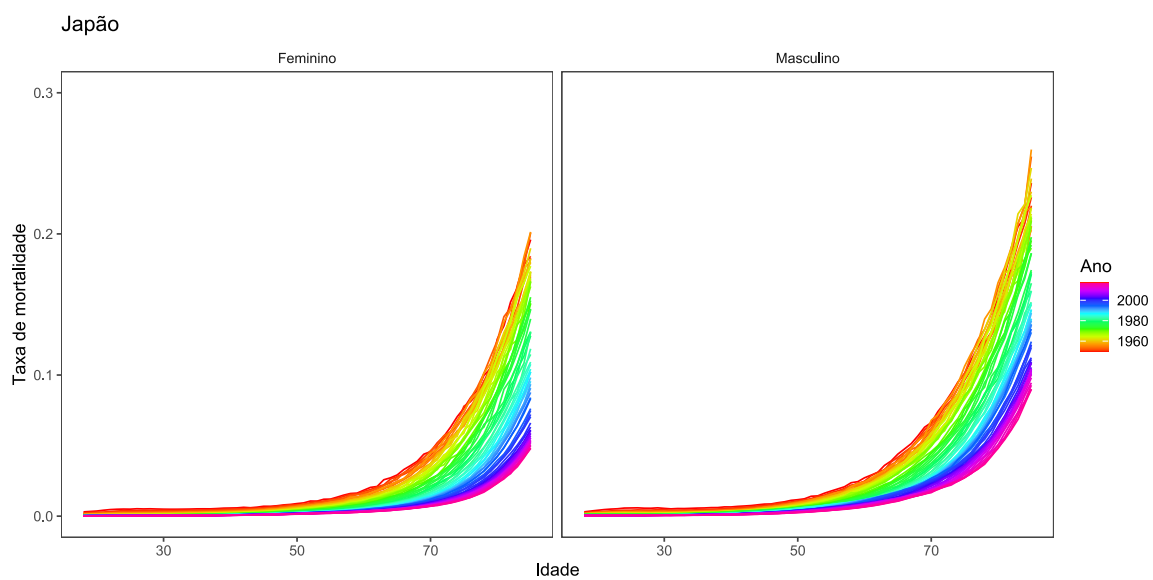


Figura 5: Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, no Japão

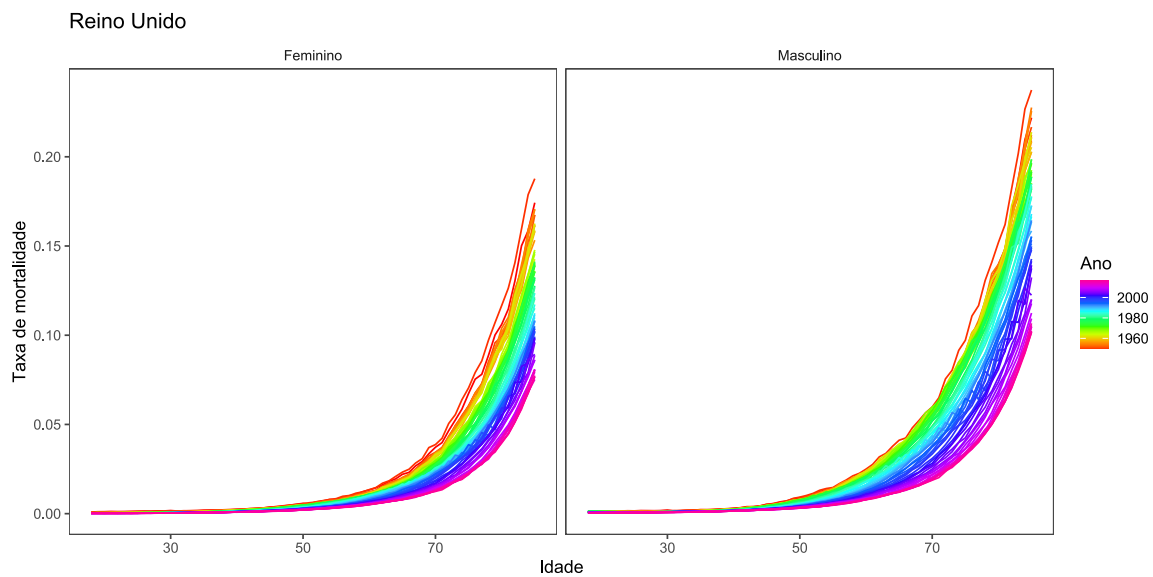


Figura 6: Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, no Reino Unido

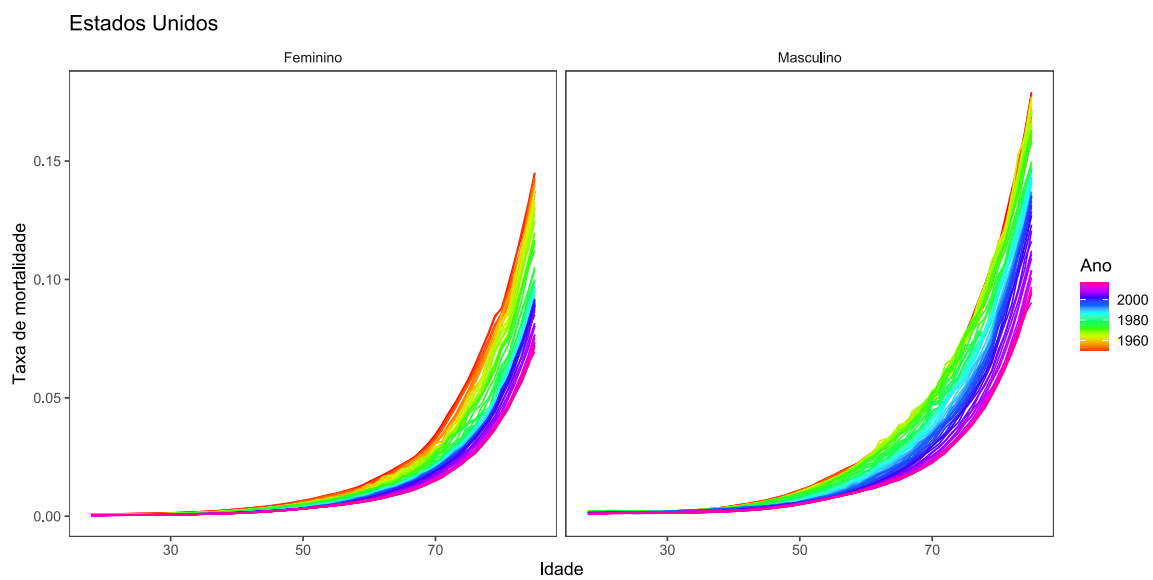


Figura 7: Taxas de mortalidade dos 18 aos 85 anos, segregadas por sexo, nos Estados Unidos

Segundo um estudo da Organização Mundial da Saúde (OMS), a análise da desproporção entre os óbitos femininos e masculinos é de interesse mundial e que as mulheres têm maior expectativa de vida em muitas regiões. Além disso, os autores também apontam alguns fatores e as principais causas que influenciam na disparidade da expectativa de vida entre os sexos (Organization et al., 2019).

Ao mudarmos a forma de visualização dos dados, obtemos as taxas de mortalidade para cada um dos 67 anos do histórico analisado, sendo possível analisar as variações e observar as mudanças mais relevantes. Com isto, tem-se a representação gráfica dos totais das taxas de óbitos para cada país entre os anos 1950 e 2017.

Seguindo o mesmo raciocínio, as próximas figuras apresentam o padrão do total das taxas de mortalidade de acordo com o tempo, onde cada idade é representada graficamente como sua própria série temporal individual. As cores na vinheta demográfica indicam as diferentes idades (as primeiras idades em vermelho e as últimas em violeta).

A partir da Figura 8, após a segunda Guerra, a Bulgária apresentava elevadas taxas de óbito. Além disso, o país teve um aumento na mortalidade por volta dos anos 1985, principalmente para as idades a partir dos 60 anos. Atualmente, o país está em nível de desenvolvimento inferior aos demais e registra as maiores taxas de mortalidade ao longo do histórico analisado. Ainda assim, de uma forma sutil, é possível observar que as taxas de mortalidade estão decaindo nos últimos 15 anos. Já o cenário nos Estados Unidos é um pouco diferente. Aqui fica mais perceptível que as taxas de mortalidade estão diminuindo com o passar do tempo. Esta queda é mais evidente a partir dos 50 anos de idade.

Avaliando as taxas do total de óbitos na França, no Japão e Reino Unido, nas Figuras 9 e 10, nota-se que com o passar do tempo houve uma queda mais considerável ainda nas taxas de mortalidade para as pessoas com idade mais avançadas, por volta dos 70 anos. Espera-se que este comportamento de declínio nas taxas de mortalidade e aumento na expectativa de vida sejam cada vez mais notórios.

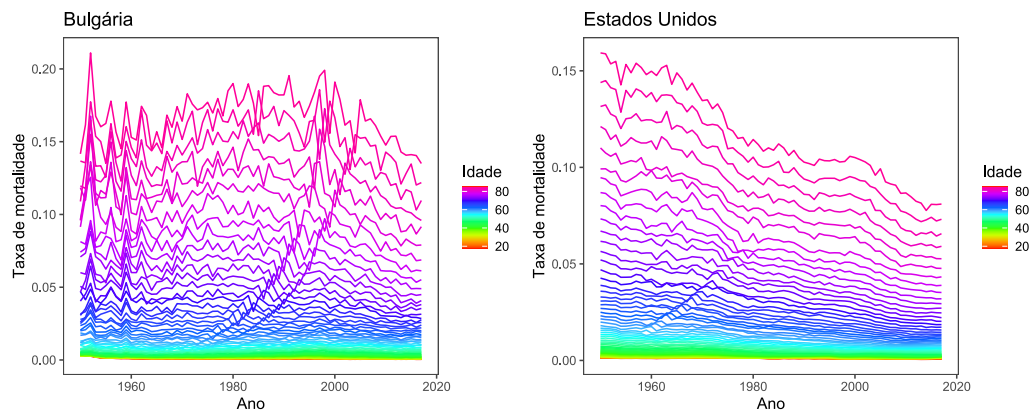


Figura 8: Total das taxas de mortalidade entre os anos 1950 e 2017, na Bulgária e no Estados Unidos, respectivamente

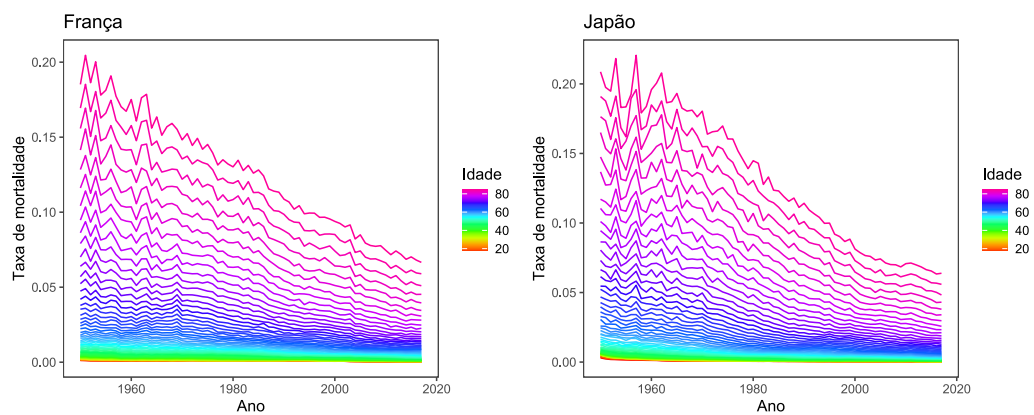


Figura 9: Total das taxas de mortalidade entre os anos 1950 e 2017, na França e Japão, respectivamente

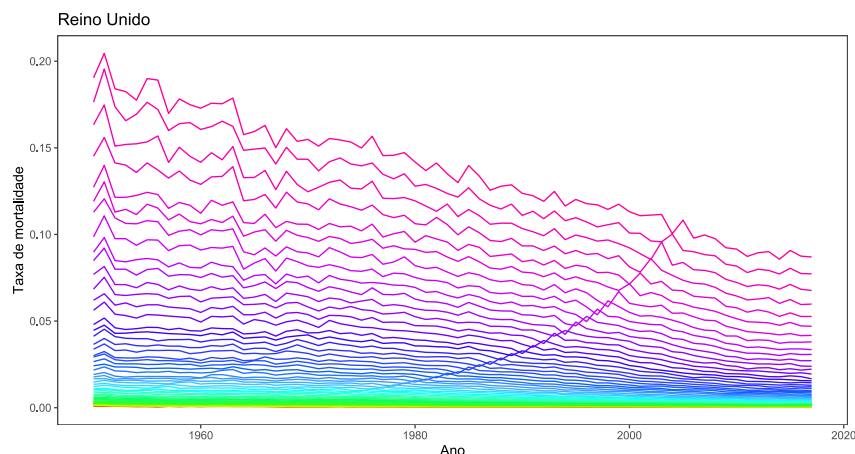


Figura 10: Total das taxas de mortalidade entre os anos 1950 e 2017, no Reino Unido

Visto que o comportamento das taxas de mortalidade vem se modificando ao longo do tempo, cada vez mais fica manifesto a importância de boas previsões para as mesmas. Espera-se que com o passar do tempo a expectativa de vida aumente, devido às melhorias na área da saúde e tecnologias, como já foi debatido anteriormente. Assim, a finalidade é que estas mudanças no comportamento dos óbitos seja capturado pelo método proposto neste estudo.

3.2.2 Estimação do modelo Lee-Carter

O modelo Lee-Carter foi ajustado à matriz das taxas de mortalidade, do ano 1950 a 2017, posicionado na metade do ano, considerando os dados segregados por sexo e também para o total das populações. O *range* de idades varia entre 18 e 85 anos. As figuras a seguir apresentam os valores para os parâmetros estimados através da função **lca**, que retorna um objeto que permite inspecionar o comportamento de α_x , β_x e κ_t , onde as estimativas de α_x descrevem o padrão médio da mortalidade para as idades e os β_x representam a variação da mortalidade quando o nível κ_t se altera.

Nas Figuras 11 até 15 é observado que a diferença no comportamento do padrão médio da mortalidade (α_x) entre homens e mulheres é semelhante, porém o nível de mortalidade observado para as mulheres é menor e mais expressivo dos 20 aos 60 anos, aproximadamente.

Na Figura 11 as estimativas de κ_t para a população feminina da Bulgária nos primeiros anos, apresentaram um nível maior que o sexo oposto, diminuindo a partir de 1995. Nos demais países, o nível da mortalidade se mantém semelhante entre os sexos e, como esperado, κ_t tem uma tendência decrescente com o incremento do tempo. Ao analisarmos a mortalidade central entre os países, também é possível observar que o comportamento para as populações são similares, onde os homens apresentam taxas mais elevadas que as mulheres.

A Figura 15 mostra que a variação do parâmetro β_x para a população do Reino Unido obteve melhores estimativas para o sexo feminino, visto que para o sexo masculino os valores oscilam bastante entre as faixas. Por outro lado, ao analisarmos o comportamento do modelo ajustado para a França, na Figura 13, a maior variabilidade foi para o sexo feminino. O Japão apresenta uma variabilidade muito similar entre ambos os sexos, conforme pode-se observar na Figura 14.

Bulgária

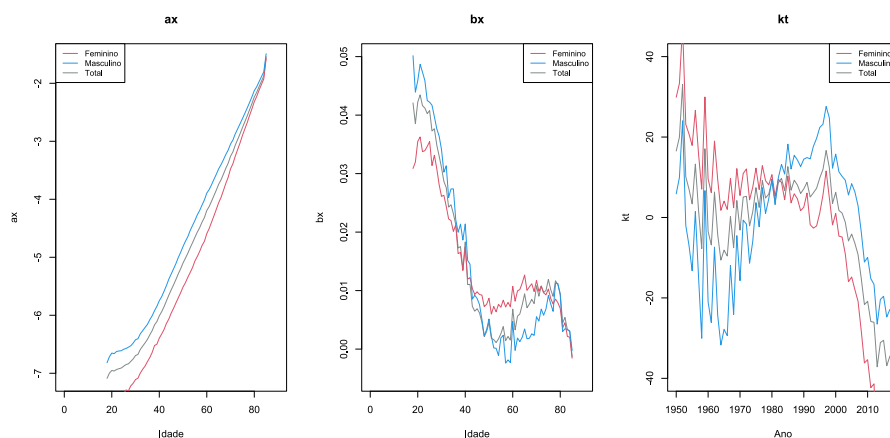


Figura 11: Estimativas dos parâmetro α_x , β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, na Bulgária

Estados Unidos

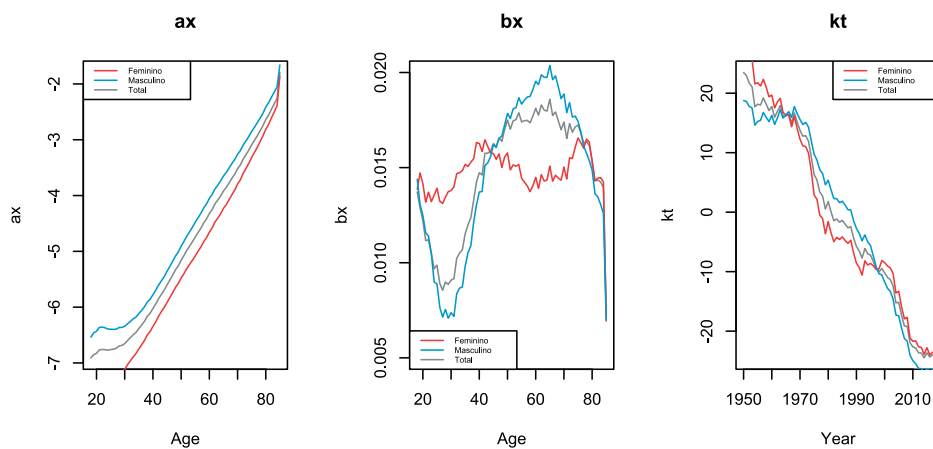


Figura 12: Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, nos Estados Unidos

França

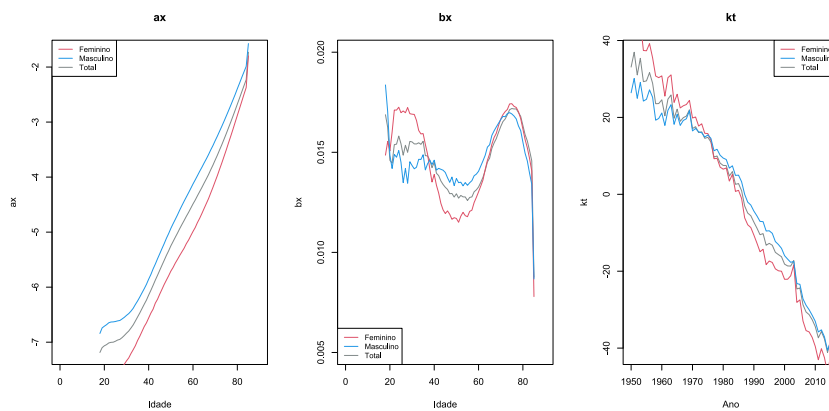


Figura 13: Estimativas dos parâmetro α_x, β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, na França

Japão

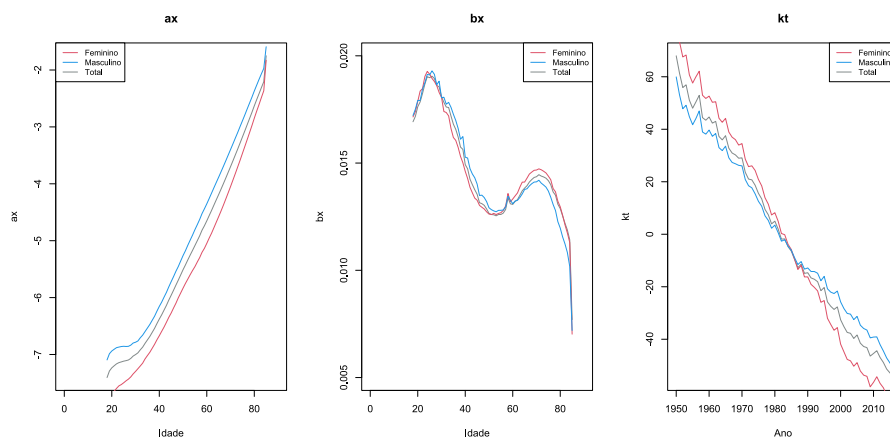


Figura 14: Estimativas dos parâmetro α_x , β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, no Japão

Reino Unido

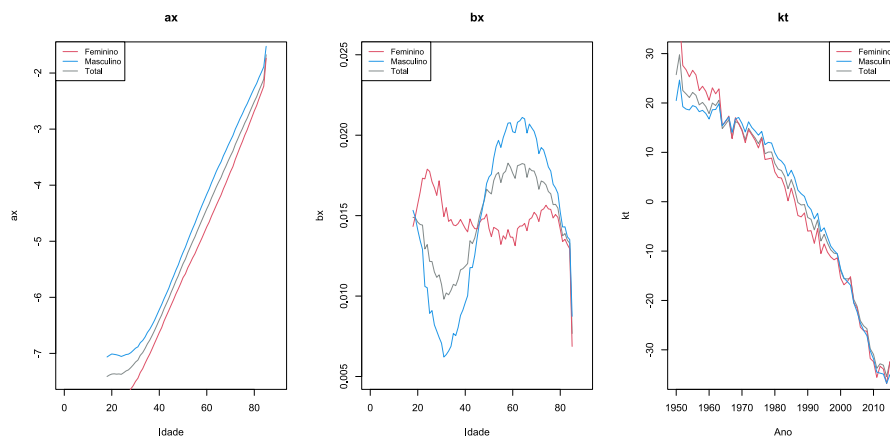


Figura 15: Estimativas dos parâmetro α_x , β_x e κ_t para os sexos feminino e masculino e total, no Reino Unido

A Tabela 2, apresenta para cada modelo estimado entre os países e sexos, o percentual da variação explicada pelo método Lee-Carter. Observa-se que para os países desenvolvidos (Estados Unidos, França, Japão e Reino Unido), o modelo capturou aproximadamente 94% da variação explicada das taxas de mortalidade. Enquanto a análise para a Bulgária os resultados se mostraram em patamares mais baixos. Este reflexo se dá pela relação direta entre desenvolvimento, mortalidade e qualidade da base de dados, isto é, países desenvolvidos possuem uma mortalidade mais baixa do que os países em desenvolvimento, além de dispor de dados com mais qualidade e credibilidade.

Tabela 2: Percentual da variação explicada pelo modelo ajustado

País	Modelo Estimado	Variação Explicada (%)
Bulgária	Mulheres	80,8
	Homens	47,3
	Total	72,6
Estados Unidos	Mulheres	94,7
	Homens	93,3
	Total	94,7
França	Mulheres	96,0
	Homens	93,7
	Total	95,4
Japão	Mulheres	96,4
	Homens	96,6
	Total	96,8
Reino Unido	Mulheres	92,7
	Homens	93,0
	Total	93,4

3.2.3 Previsão da mortalidade

Foram realizadas um grande número de simulações do modelo ARIMA(0,1,0) para os cinco países analisados, a fim de estimar a mortalidade futura. Para as previsões considerou-se razoável um erro de até 5% para realizar previsões 5 anos a frente (2022), visto que todas as

séries temporais contemplavam um histórico de 67 anos. Os valores previstos para o anos de 2018 ao ano de 2022 são apresentados a seguir, segregados por sexo e para o total, bem como o intervalo com 95% de confiança (IC95%).

Tabela 3: Bulgária - κ_t previsto

Ano	Mulheres	Homens	Total
2018	-1,29 (-16,57;14,00)	-0,42 (-20,63;19,77)	-0,76 (-15,53;14,01)
2019	-2,57 (-24,35;19,20)	-0,85 (-29,63;27,92)	-1,52 (-22,56;19,52)
2020	-3,86 (-30,72;23,01)	-1,28 (-36,78;34,21)	-2,28 (-28,24;23,67)
2021	-5,14 (-36,38;26,10)	-1,71 (-43,00;39,57)	-3,04 (-33,23;27,14)
2022	-6,42 (-41,60;28,74)	-2,14 (-48,62;44,33)	-3,80 (-37,79;30,18)

Tabela 4: Estados Unidos - κ_t previsto

Ano	Mulheres	Homens	Total
2018	-0,80 (-3,53;1,93)	-0,67 (-2,69;1,35)	-0,71 (-2,90;1,48)
2019	-1,60 (-5,47;2,29)	-1,35 (-4,23;1,53)	-1,42 (-4,54;1,71)
2020	-2,39 (-7,18;2,41)	-2,02 (-5,58;1,53)	-2,13 (-5,98;1,73)
2021	-3,18 (-8,75;2,39)	-2,70 (-6,83;1,43)	-2,83 (-7,31;1,65)
2022	-3,97 (-10,25;2,31)	-3,37 (-8,03;1,27)	-3,54 (-8,59;1,50)

Tabela 5: França - κ_t previsto

Ano	Mulheres	Homens	Total
2018	-1,27 (-7,11;4,55)	-1,00 (-5,38;3,38)	-1,08 (-5,98;3,82)
2019	-2,55 (-10,86;5,75)	-2,00 (-8,24;4,24)	-2,16 (-9,15;4,82)
2020	-3,83 (-14,07;6,42)	-3,00 (-10,70;4,70)	-3,24 (-11,86;5,38)
2021	-5,10 (-17,02;6,81)	-4,00 (-12,96;4,95)	-4,32 (-14,34;5,70)
2022	-6,38 (-19,79;7,04)	-5,00 (-15,08;5,08)	-5,40 (-16,68;5,88)

Tabela 6: Japão - κ_t previsto

Ano	Mulheres	Homens	Total
2018	-2,15 (-7,20;2,89)	-1,66 (-5,98;2,65)	-1,83 (-6,37;2,71)
2019	-4,31 (-11,50;2,88)	-3,32 (-9,47;2,83)	-3,66 (-10,13;2,81)
2020	-6,46 (-15,33;2,41)	-4,98 (-12,56;2,60)	-5,49 (-13,47;2,49)
2021	-8,62 (-18,93;1,70)	-6,64 (-15,46;2,18)	-7,32 (-16,60;1,97)
2022	-10,77 (-22,38;0,85)	-8,30 (-18,23;1,63)	-9,15 (-19,60;1,31)

Tabela 7: Reino Unido - κ_t previsto

Ano	Mulheres	Homens	Total
2018	-1,02 (-6,23;4,20)	-0,85 (-4,15;2,44)	-0,90 (-4,95;3,15)
2019	-2,04 (-9,46;5,38)	-1,71 (-6,40;2,99)	-1,80 (-7,56;3,96)
2020	-3,06 (-18,22;6,10)	-2,56 (-8,36;3,23)	-2,70 (-9,81;4,41)
2021	-4,08 (-14,73;6,57)	-3,42 (-10,15;3,32)	-3,60 (-11,87;6,7)
2022	-5,10 (-17,09;6,89)	-4,27 (-11,86;3,31)	-4,50 (-13,81;4,81)

DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Países desenvolvidos seguem as mudanças demográficas que vêm sendo observadas ao longo dos séculos passados. Aqueles que estão em desenvolvimento também acompanham as transições da população, porém de outras formas. O considerável aumento da longevidade fica claro ao analisar as séries temporais dos países que apresentaram uma evolução na expectativa de vida de mulheres e homens com idades mais avançadas, acima de 70, 80 anos, onde geralmente o indivíduo recebe algum tipo de benefício previdenciário. No que diz respeito à sustentabilidade dos sistemas de aposentadorias e pensões, governos e formuladores de políticas públicas e de saúde, este aspecto merece destaque.

Com o passar dos anos, cada vez fica mais evidente que a população, em geral, está apresentando decrescentes taxas de óbitos, bem como vivendo por maiores períodos de tempo. Neste trabalho foi possível observar que a partir dos 50 anos, a maioria dos países apresentaram uma perceptível queda nas taxas de mortalidade a partir da Segunda Guerra Mundial, com exceção da Bulgária. Quando conhecemos parte da evolução da mortalidade, uma das principais questões levantadas é saber qual seria o caminho futuro previsto do tempo de vida da população. É razoável pensar que o futuro, de alguma forma, é a continuidade do passado, e neste sentido, uma boa alternativa para um olhar prospectivo pode ser a partir de uma trajetória retrospectiva.

Neste âmbito, utilizar de um bom modelo de projeções que capte o gradual mudança na sobrevivência das pessoas e na mortalidade tornam-se ferramentas fundamentais para gestores. O modelo demográfico de Lee-Carter apresentou boas estimativas para os países desenvolvidos, tanto para as taxas centrais de mortalidade, quanto para os parâmetros $(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$. Os valores de α_x corresponderam ao esperado, mostrando o padrão médio de mortalidade da população. Já as estimativas para β_x variaram muito, tendo uma estabilidade diferente da observada para os sexos. Isto pode ser explicado pelo baixo número de óbitos em algumas idades específicas mais avançadas. Os valores de κ_t para as mulheres nos primeiros anos obtiveram níveis mais altos que para os homens. Para a Bulgária, o modelo apresentou uma variação explicada de aproximadamente 81% para as mulheres, 47% para os homens e 73% para o total. Nos demais países, todos os modelos ajustados obtiveram uma variação explicada superior a 90%, tanto

para as mulheres, quanto para os homens e totais.

As projeções das taxas de mortalidade foram estimadas por um passeio aleatório com constante, ou seja, um modelo ARIMA(0,1,0), com erro de até 5% para realizar previsões 5 passos a frente. A escolha desta janela se deu por conta do que vem sendo aplicado atualmente no Brasil, como tempo de validade dos estudos técnicos de adequação das hipóteses atuariais das entidades de previdência complementar fechada. Visto que estes estudos têm validade de 5 anos, não se viu necessidade de calcular previsões mais anos a frente. Para os países desenvolvidos, isto é, França, Japão, Estados Unidos e Reino Unido, as previsões apresentaram uma maior precisão nas estimativas pontuais, visto que os intervalos de confiança associados mostraram pouca variabilidade. Por outro lado, não foi possível observar a mesma assertividade do modelo nas estimativas pontuais para a Bulgária, já que os intervalos de confiança para as previsões se mostraram bem mais amplos.

Partindo do princípio que a massa de participantes dos diversos segmentos da previdência possuem um perfil mais similar ao de países desenvolvidos, devido ao acesso a saúde, melhor qualidade de vida e lazer, a maioria destes acabam não sendo acometidos por doenças que os levam a óbito antes de chegarem em idades mais avançadas. Ou seja, as observações da mortalidade segregadas por sexo, neste caso, tornam-se vantajosas por captarem o comportamento futuro da mortalidade projetada a partir de um modelo parcimonioso, praticamente eliminando a subjetividade inerente à causas externas que o modelo possa não captar.

Uma sugestão interessante para futuros trabalhos é a criação de uma nova metodologia que garanta projeções também coerentes da mortalidade, segregadas por sexo e país, e que proporcione a inclusão de outras dimensões (e.g. recortes de raça/cor, renda, escolaridade), necessárias para atingir coerência entre os sub-grupos populacionais.

Referências

- Alves, J. E. D. (2008). A transição demográfica e a janela de oportunidade. *São Paulo: Instituto Fernand Braudel de Economia Mundial*, page 3. 12
- Antolin, P. (2007). Longevity risk and private pensions. *OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions*, (3). 12, 20
- Basnayake, B. and Nawarathna, L. (2017). Modeling and forecasting norway mortality rates using the lee carter model. *Biometrics and Biostatistics International Journal*, 6:00158. 34
- Booth, H., Hyndman, R. J., Tickle, L., and de Jong, P. (2006). Lee-carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15:289–310. 14
- Booth, H., Maindonald, J., and Smith, L. (2002). Age-time interactions in mortality projection: Applying lee-carter to australia. 21
- Booth, H. and Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of actuarial science*, 3(1-2):3–43. 13
- Boyer, M. M., Stentoft, L., and Mejza, J. (2011). Measuring longevity risk for a canadian pension fund. *CIRANO-Scientific Publication*, (2011s-43). 20
- Crawford, T., de Haan, R., and Runchey, C. (2008). Longevity risk quantification and management: a review of relevant literature. *Society of Actuaries*, 73. 20
- de Carvalho, J. A. M., Sawyer, D. O., and do Nascimento Rodrigues, R. (2015). Introdução a alguns conceitos básicos e medidas em demografia. *Textos Didáticos*, 1:4–60. 19
- de Castro, L. G. et al. (2019). Projeções dos níveis e padrões da mortalidade no brasil e grandes regiões 1950-2010-2110 pelo método coerente lee-carter estendido e outros: a tábua br-geracional e o risco de longevidade nas instituições previdenciárias do país. 12, 13, 20

- de Foz, G. (2021). *Métodos demográficos: Uma visão desde os países de língua portuguesa*. Blucher Open Access. 15
- de Jesus, Jéssica Santos e de Oliveira, K. F. (2016). Previsão da mortalidade do estado de sergipe utilizando o modelo lee & carter. *Anais*, pages 1–22. 14
- de Oliveira, A. I. C. N. et al. (2012). Projeções da taxa de mortalidade. 18
- Frejka, T. (2017). The fertility transition revisited: A cohort perspective. *Comparative Population Studies*, 42. 17
- Garnsey, P. and Rathbone, D. (2000). *The High Empire, AD 70-192: Edited by Alan K. Bowman, Peter Garnsey, Dominic Rathbone*. Cambridge University Press. 16, 17
- Haberman, S. and Russolillo, M. (2005). Lee carter mortality forecasting: application to the italian population. Working Paper Actuarial Research Paper No. 167, City University London, London, UK. 13
- Lee, R. D. and Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting u.s. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):659–671. 13, 22, 36
- Lesthaeghe, R. (1995). The second demographic transition in western european countries: An interpretation. *Gender and family change in industrialized countries*, pages 18–48. 17
- Lesthaeghe, R. (2010). The unfolding story of the second demographic transition. *Population and development review*, 36(2):211–251. 17
- Nasri, F. (2008). O envelhecimento populacional no brasil. *Einstein*, 6(Supl 1):S4–S6. 15
- Nations, U. (2019). Growing at a slower pace, world population is expected to reach 9.7 billion in 2050 and could peak at nearly 11 billion around 2100: Un report. *World Population Prospects 2019: Press Release*, page 3. 12
- OECD (2014). *Mortality Assumptions and Longevity Risk*. 13, 20

- Organization, W. H. et al. (2019). *World health statistics 2019: monitoring health for the SDGs, sustainable development goals*. World Health Organization. 40
- Santos, R. R. (2007). Técnicas de modelagem do improvement para construção de tábuas geracionais. *Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Dissertação de Mestrado*. 12, 13
- Shang, H. L. (2019). Dynamic principal component regression: Application to age-specific mortality forecasting. *ASTIN Bulletin*, 49(3):619–645. 19
- Shumway, R. H., Stoffer, D. S., and Stoffer, D. S. (2000). *Time series analysis and its applications*, volume 3. Springer. 32
- Times, F. (2021). Bulgaria battles to stop its brain drain. <https://www.ft.com/content/51f1bd86-d6cc-11e7-ae3e-563c04c5339a>. Accessed: 2021-11-16. 36
- Van de Kaa, D. J. (1987). Europe's second demographic transition. *Population bulletin*, 42(1):1–59. 17
- Weinstein, J. and Pillai, V. K. (2015). *Demography: The science of population*. Rowman & Littlefield. 15
- Willets, R. C., Gallop, A. P., Leandro, P. A., Lu, J. L. C., Macdonald, A. S., Miller, K. A., Richards, S. J., Robjohns, N., Ryan, J. P., and Waters, H. R. (2004). Longevity in the 21st century. *British Actuarial Journal*, 10(4):685–832. 12
- Yang, L. (2019). Strength & weakness of lee-carter models. 22