UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

A Dinâmica de uma Família de Aplicações Unidimensionais

Lineia Schutz

Porto Alegre, Março de 2002

Resumo

A proposta deste trabalho é analisar a dinâmica da seguinte família de aplicações:

Dados $0 < a < 1$ e $0 \leq b \leq 1$, seja $f_{a,b} : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} b + \frac{1-b}{a}x & \text{se } 0 \leq x < a \\ \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{se } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vamos mostrar que:

- Se $b > 1 - a + a^2$ então existe $x \in [0, a]$ tal que o 2-ciclo $\{x, f_{a,b}(x)\}$ é atrator e $f_{a,b}$ não é caótica em nenhum subconjunto $I \subseteq [0, 1]$.

- Se $b < \frac{1}{2-a}$ então $f_{a,b}$ é caótica em $S = \bar{S}_0$, onde $S_0 = \{x \backslash \exists n > 0$ tal que $f^n(x) = \frac{1}{2-a}\}$.

- Se $b < \frac{1}{2-a}$ e $b < 1 - a$ então $f_{a,b}$ é caótica em $[0, 1]$.

- Se $b < \frac{1}{2-a}$, $b \geq 1 - a$ e $b > a$ então $f_{a,b}$ é caótica em $[0, 1]$.

Abstract

The purpose of this work is to classify the dynamic of the following family of maps:

For given $0 < a < 1$ and $0 \leq b \leq 1$, let $f_{a,b} : [0,1] \to [0,1]$ given by

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} b + \frac{1-b}{a}x & \text{se } 0 \leq x < a \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{se } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

We show that:

- If $b > 1-a+a^2$ then there is a point $x \in [0,a]$ for which the 2-cycle $\{x, f_{a,b}(x)\}$ is attracting and $f_{a,b}$ is not chaotic on any set.
- If $b < \frac{1}{2-a}$ then $f_{a,b}$ is chaotic on $S = \bar{S_0}$, $S_0 = \{x$ for which there is $n > 0$ such that $f^n(x) = \frac{1}{2-a}\}$.
- If $b < \frac{1}{2-a}$ and $b < 1-a$ then $f_{a,b}$ is chaotic on $[0,1]$.
- If $b < \frac{1}{2-a}$, $b \geq 1-a$ and $b > a$ then $f_{a,b}$ is chaotic on $[0,1]$.

Índice

1-Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é classificar a dinâmica da família de aplicações $f_{a,b}$ do $[0,1]$ no $[0,1]$ dada por:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} b + \frac{1-b}{a}x & \text{se } 0 \leq x < a \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{se } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde $0 < a < 1$ e $0 \leq b \leq 1$. A figura 1 ilustra o gráfico de $f_{a,b}$.

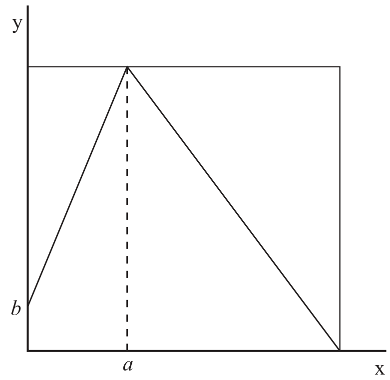


Figura 1: Gráfico da $f_{a,b}$ com $a = 0.4$ e $b = 0.2$

Para classificar tal dinâmica interpretamos a e b de cada aplicação como coordenadas de um ponto do quadrado unitário, que chamamos de "espaço das coordenadas (a,b)", e decompomos esse quadrado em regiões como mostra a figura 2. Cada região corresponde a uma subfamília com dinâmica similar.

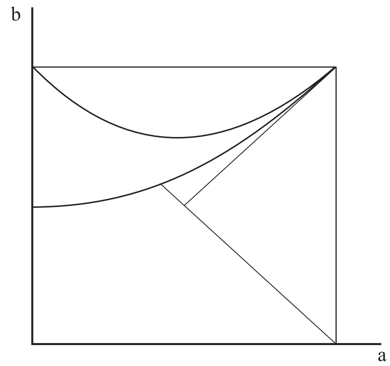


Figura 2: Regiões que determinam diferentes dinâmicas para $f_{a,b}$ no espaço dos parâmetros (a, b)

No capítulo 3 mostramos que se $b > 1 - a + a^2$ então existe $x \in [0, a]$ tal que o 2-ciclo $\{x, f_{a,b}(x)\}$ é atrator e $f_{a,b}$ não é caótica em nenhum subconjunto $I \subseteq [0, 1]$.

No capítulo 4 verificamos que se $b < \frac{1}{2-a}$ então $f_{a,b}$ é caótica em $S = \bar{S}_0$, onde $S_0 = \{x \backslash \exists n > 0$ tal que $f^n(x) = \frac{1}{2-a}\}$.

Finalmente, no capítulo 5 provamos que se $b < \frac{1}{2-a}$ e $b < 1-a$ ou se $b < \frac{1}{2-a}$,$b \geq 1 - a$ e $b > a$ então $f_{a,b}$ é caótica em $[0, 1]$.

Referimos o leitor a [1] para resultados relacionados com o presente trabalho.

2-Definições e Resultados Gerais

Referimos o leitor a [2][3][5] para resultados gerais de Sistemas Dinâmicos.

Definição 1: Seja $f : X \to X$ uma aplicação de X em X. A órbita de um ponto $x \in X$ pela aplicação f é o conjunto $o(x) = \{f^0(x), f^1(x), f^2(X), \ldots\ f^n(x), \ldots\}$. Entender a dinâmica da aplicação f significa descrever a órbita de todos os pontos x do domínio X da f.

Definição 2: Um ponto x é dito periódico se existe $n > 0$ tal que $f^n(x) = x$. A órbita de x é chamada n-ciclo.

Vamos assumir que $x \in [0,1]$ e $f : [0,1] \to [0,1]$ é contínua e diferenciável por partes.

Definição 3: Seja x um ponto periódico de período n e f^n diferenciável em x. O ponto x é hiperbólico se $|f^{n\prime}(x)| \neq 1$.

Definição 4: Seja x um ponto hiperbólico tal que $f^n(x) = x$. Então:

1. Se $|f^{n\prime}(x)| < 1$, dizemos que x é um ponto periódico atrator.
2. Se $|f^{n\prime}(x)| > 1$, dizemos que x é um ponto periódico repulsor.

Definição 5: Denotamos por $d(x, B)$, onde $x \in X$ e $B \subset X$, o número

$$d(x, B) = \inf\{|x - y|, y \in B\}.$$

Note que, dado $f : [0,1] \to [0,1]$ e considerando fixado um ponto periódico $x \in X$ de período n, a órbita de x é dada por $o(x) = \{x, f(x), .., f^{n-1}(x)\}$.

Definição 6: Fixada uma órbita periódica $o(z) = \{z, f(z), .., f^{n-1}(z)\}$, a bacia de atração de $o(z)$ é o conjunto

$$B(z) = \{y \mid \lim_{j \to \infty} d(f^j(y), o(z)) = 0\}$$

Definição 7: Uma aplicação f de um subconjunto infinito $S \subset [0,1]$ nele mesmo é caótica se:

1. f é Topologicamente Transitiva: se U e V são intervalos abertos tal $U \cap S \neq \emptyset$ e $V \cap S \neq \emptyset$ então existe $n > 0$ tal que $(f^n(U \cap S)) \cap (V \cap S) \neq \emptyset$.
2. Os pontos periódicos são densos em S: se U é um intervalo aberto contendo um ponto de S então U contém um ponto periódico de S.

Definição 8: Uma função $f : X \to \mathbf{R}$ chama-se contração quando existe uma constante $k \in [0,1)$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|, \forall x, y \in X$.

Teorema do Ponto Fixo de Brower na Reta: Seja $f : [a,b] \to [c,d]$ uma função contínua tal que $c < a < b < d$, então existe $x \in [a,b]$ com $f(x) = x$.

A demostração deste teorema é trivial, basta olhar o gráfico de f e a diagonal.

Teorema do Ponto Fixo para Contrações: Se $X \subset R$ é um intervalo fechado, então toda contração $f : X \to X$ possui um único ponto fixo. Mais precisamente, fixado $x_0 \in X$ qualquer, a sequência das aproximações sucessivas

$x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,...,$x_{n+1} = f(x_n)$,... converge a um único $c \in X$ tal que $f(c) = c$.

Prova: Seja $f : X \to X$ uma contração. Como $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in X$, onde $k \in [0, 1)$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq ... \leq k^n|x_1 - x_0|$. Logo, $|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |x_{n+i-1} - x_{n+i}| \leq |x_1 - x_0| \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$. Assin, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em X, portanto $\exists a \in X$ tal que $x_n \to a$, e como X é fechado então $a \in X$. Ainda, fazendo $n \to \infty$ na igualdade $x_{n+1} = f(x_n)$, como f é contínua, obtem-se $a = f(a)$.

Finalmente, se $b = f(b)$ então $|b - a| = |f(a) - f(b)| \leq k|b - a|$, ou seja, $(1 - k)|b - a| \leq 0$. Como $(1 - k) > 0$ concluímos que $a = b$. Logo o ponto fixo $a \in X$ é único.

Referimos o leitor a [4] para resultados gerais de Análise Real que serão utilizados no texto.

Vamos considerar, a partir de agora, o caso específico de $f = f_{a,b}$, onde $f_{a,b}$ é uma função do intervalo unitário nele mesmo, com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, como segue:

Fixados $a \in (0, 1)$ e $b \in [0, 1]$ seja $f_{a,b} : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} b + \frac{1-b}{a}x & \text{se } 0 \leq x < a \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{se } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Observação 1 Neste trabalho $I \subseteq [0,1]$ e $J \subseteq [0,1]$ representam intervalos fechados não degenerados.

Observação 2 O comprimento do intervalo I é denotado por $|I|$.

Observação 3 As imagens de um conjunto S sobre repetidas aplicações f são denotadas por $f(S)$,$f^2(S)$,...,$f^n(S)$,... .

Observação 4 A órbita de x pode ser geometricamente descrita da seguinte maneira: trace um segmento de reta de (x, x) para $(x, f(x))$, depois outro de $(x, f(x))$ para $(f(x), f(x))$, a seguir outro de $(f(x), f(x))$ para $(f(x), f^2(x))$, e assim por diante, como mostra a figura 3.

Desta maneira podemos observar a natureza extremamente complexa da evolução dinâmica do ponto x, ou seja, da evolução temporal de $f^m(x)$ para um dado fixado ponto $x \in X$.

Note que para $f = f_{a,b}$, onde a, b estão fixados, a aplicação $f = f_{a,b}$ tem um ponto fixo em $x = \frac{1}{2-a}$, que denotamos por c. Note também que $c > a, \forall a \neq 1$.

Lema 1 O ponto fixo c é repulsor. Em particular, se $I \subseteq [a, 1]$ então $|f(I)| > |I|$.

Prova: Como

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-b}{a} & \text{se } 0 \leq x < a \\ \frac{-1}{1-a} & \text{se } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e $c \in [a, 1]$ temos que $|f'(c)| = \frac{1}{1-a} > 1$. Logo, como $f(c) = c$, o ponto c é repulsor.

Dado $I \subseteq [a,1]$, como f é linear em $[a,1]$, $\frac{|f(I)|}{|I|} = |f'(x)| \forall x \in I$. Logo $\frac{|f(I)|}{|I|} = \frac{1}{1-a} > 1$, donde $|f(I)| > |I|$. Sendo assim, dados x, $y \in [a,1]$, temos que $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{1-a}|x-y|$, onde $\frac{1}{1-a} > 1$.

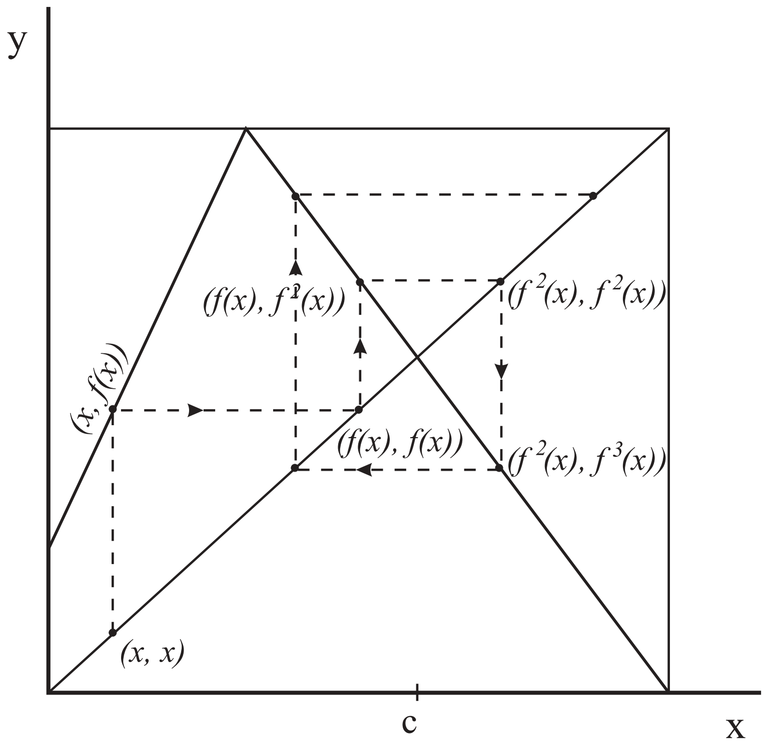


Figura 3: O ponto fixo c e um pedaço da órbita de $x = 0.15$ para $f_{a,b}$.

Vamos agora analisar a dinâmica de $f = f_{a,b}$ para diversos valores de (a,b). O espaço de parâmetros (a,b) pode ser dividido nas seguintes regiões, como mostra a figura 4.:

1. $b \geq 1 - a + a^2$

2. $b < c = \frac{1}{2-a}$

3. ($b < c = \frac{1}{2-a}$ e $b < 1 - a$) unido com ($b < c = \frac{1}{2-a}$, $b \geq 1 - a$ e $b > a$)

4. $c = \frac{1}{2-a} \leq b < 1 - a + a^2$

5. $1 - a \leq b \leq a$

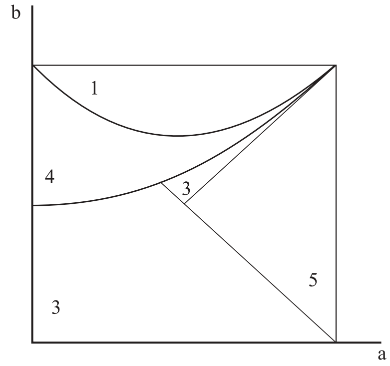


Figura 4: A região 2 é a união das regiões 3 e 5 no espaço de parâmetros (a, b)

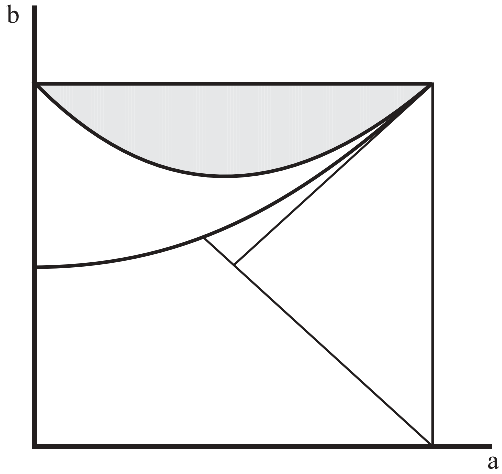
Em cada uma destas regiões teremos diferentes evoluções dinâmicas como veremos a seguir.

No caso em que $b < 1 - a$ a aplicação $f_{a,b}$ é expansiva (ver [2][5] para definição).

Nossa análise será feita caso a caso, com exceção das regiões 4 e 5 acima, que requerem o uso de renormalização e não serão analisadas no presente texto.

3- $f = f_{a,b}$ com (a,b) na região definida por $b \geq 1 - a + a^2$.

A mais simples região a ser analisada é definida por $b > 1 - a + a^2$, desenhada no diagrama da figura 5. A importância dessa desigualdade resulta de $1 - a + a^2 > a$ e $f(1 - a + a^2) = a$.



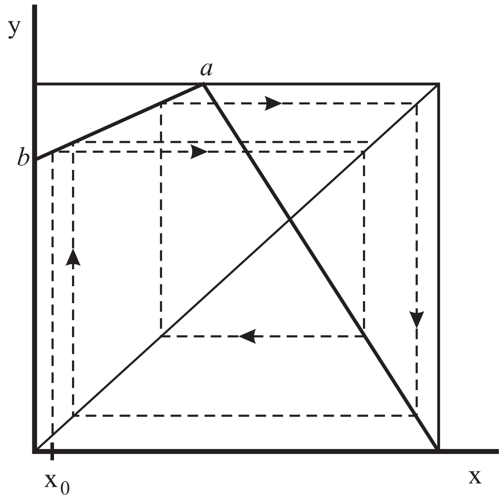


Figura 5: À esquerda apresentamos a região de parâmetros (a,b) com $b > 1 - a + a^2$ e à direita apresentamos uma órbita típica de $f_{a,b}$.

Proposição 1: Se $b > 1 - a + a^2$ então existe $z \in [0,a]$ tal que o 2-ciclo $\{z, f(z)\}$ é atrator, cuja bacia de atração é todo intervalo [0,1]. Além disso, f não é caótica em nenhum conjunto.

Para demonstrar esse resultado necessitamos dos seguintes lemas:

Lema 2: Se $b > 1 - a + a^2$ então $f^2([0,a]) = [0, f(b)] \subset [0,a]$.

Prova: Como f é crescente em $[0,a]$, $f([0,a]) = [f(0), f(a)] = [b, 1]$.

Daí, $f^2([0,a]) = f(f([0,a])) = f([b,1])$. Como f é decrescente em $[a,1] \supset [b,1]$ e $b > 1-a+a^2 > a$, $0 < f(b) < f(1-a+a^2) = a$ e $f([b,1]) = [f(1), f(b)] = [0, f(b)]$. Então $f^2([0,a]) = [0, f(b)] \subset [0,a]$.

Lema 3: Se $I \subset [0,a]$ então $|f^2(I)| = \frac{f^2(0)}{a}|I| < |I|$.

Prova: Considere $I \subset [0,a]$.

Dado $y \in I$,$f(y) = b + \frac{(1-b)y}{a}$. Como $f([0,a]) = [b,1]$ e $b > 1-a+a^2 > a$, $f(y) \in [a,1]$. Logo $f^2(y) = \frac{1-f(y)}{1-a} = \frac{1-b}{1-a} - \frac{(1-b)y}{a(1-a)}$. Então f^2 é linear em $I \subset [0,a]$. Portanto $|f^{2\prime}(y)| = \frac{|f^2(I)|}{|I|}$, $\forall y \in I$. Logo, $|f^2(I)| = \frac{(1-b)}{a(1-a)}|I|$.

Como $b > 1-a+a^2$, $1-b < a-a^2 = a(1-a)$, e então $\frac{(1-b)}{a(1-a)} < 1$. Ainda, como $f^2(0) = \frac{1-b}{1-a}$ temos que $|f^2(I)| = \frac{f^2(0)}{a}|I| < |I|$.

Lema 4: Existe $z \in [0,a]$ tal que $f^2(z) = z$.

Prova: Como, pelo lema 3, $|f^2([0,a])| < |[0,a]|$, temos que

$f^2 : [0,a] \to [0,a]$ é uma contração. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo para Contrações, existe um único $z \in [0,a]$ tal que $f^2(z) = z$.

Prova da Proposição 1: Seja z tal que $f^2(z) = z$, que existe pelo lema 4.

Segue do lema 3 que o 2-ciclo $\{z, f(z)\}$ é atrator, pois dado $y \in [0,a]$ com $y \neq z$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $y < z$, temos, por tal lema, que $|f^2([y,z])| = |f^2(z) - f^2(y)| = \frac{f^2(0)}{a}|[y,z]| = \frac{1-b}{a(1-a)}|[y,z]| = \frac{1-b}{a(1-a)}|z-y|$, onde $\frac{1-b}{a(1-a)} < 1$. Logo y é atraido para $\{z, f(z)\}$.

Vamos mostrar agora que a bacia de atração de $\{z, f(z)\}$ é todo $[0,1]$. De fato:

Dado $y \in [0,1]$ temos:

1. Se $y \in [0,a]$ então $f^2(y) \in f(f[0,a]) = f([f(0), f(a)]) = f([b,1]) = [f(1), f(b)] = [0, f(b)] \subset [0,a]$.

2. Se $y \in [b,1]$ então $f(y) \in [f(1), f(b)] = [0, f(b)] \subset [0,a]$.

3. Se $y \in [1-a+a^2, b)$ então $f(y) \in (f(b), f(1-a+a^2)] = (f(b), a] \subset [0,a]$.

   Como $f((a,c)) = (c,1)$ existe x em (a,c) tal que $f(x) = b$. Fixe tal x.

4. Se $y \in (a,x)$ então $f(y) \in (f(x), f(a)) = (b,1)$. Logo, $f^2(y) \in [f(1), f(b)] \subset [0,a]$.

5. Se $y \in (x, 1-a+a^2)$ então, como $c \in (x, 1-a+a^2)$ e pelo lema 1 o ponto fixo c é repulsor, $\exists k > 0$ tal que $f^k(y) \in [b,1]$, donde $f^{k+1}(y) \in [0,a]$.

Como, pela observação feita no começo desta prova, uma vez que a órbita de y entra em $[0,a]$ ela é atraida para $\{z, f(z)\}$, temos que a bacia de atração é $[0,1]$.

Além disso, f não é caótica em nenhum conjunto contido em $[0,1]$ pois, se existir $I \subseteq [0,1]$ tal que f é caótica em I, então os pontos periódicos serão densos em I, logo $\exists y \in I$ e $\exists n > 0$ tal que $f^n(y) = y$.

Portanto a órbita de y não se aproxima do 2-ciclo $\{z, f(z)\}$, o que gera uma contradição, pois a bacia de atração é todo $[0,1]$.

Observação 5: Quando vale a igualdade, ou seja, $b = 1 - a + a^2$, o 2-ciclo $\{z, f(z)\}$ não é atrator.

De fato:

$f^2([0,a]) = f(f([0,a])) = f([f(0), f(a)]) = f([b,1]) = [f(1), f(b)] = [0, f(b)] = [0, f(1-a+a^2)] = [0,a]$.

Dado $x \in [0,a]$ temos:

$f(x) = b + \frac{(1-b)x}{a} = 1 - a + a^2 + \frac{(1-a+a^2)x}{a} =$

$\frac{(1-a+a^2)a+(a+a^2)a}{a} = 1 + \frac{(a+a^2)a+(a+a^2)x}{a} =$

$1 + \frac{(a-a^2)(x-a)}{a} \in [b,1] = [1-a+a^2, 1]$.

$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(1 + \frac{(a-a^2)(x-a)}{a}\right) = \frac{1-\left(1+\frac{(a-a^2)(x-a)}{a}\right)}{1-a} = \frac{1-1-\frac{(a-a^2)(x-a)}{a}}{1-a} =$

$-\frac{a(1-a)(x-a)}{a(1-a)} = a - x$.

Ainda, dado $y \in [0,a]$ com $y \neq z$ temos que $y = f^4(y)$ pois:

Como $f^2(y) = a - y \in [0,a]$,

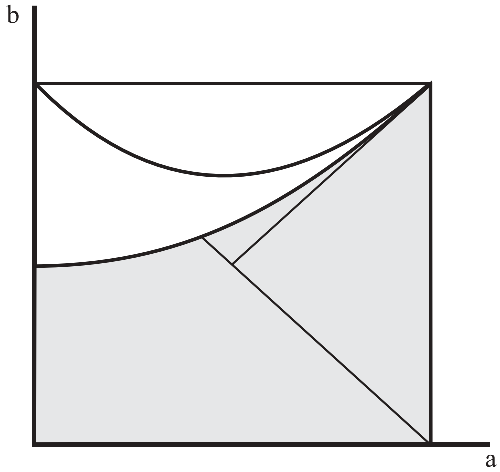
$f^3(y) = b + \frac{(1-b)(a-y)}{a} = 1 - a + a^2 + \left(\frac{1-(1-a+a^2)}{a}\right)(a-y) =$

$\frac{a(1-a+a^2)+(a-a^2)(a-y)}{a} = 1 + \frac{-a(a-a^2)+(a-a^2)(a-y)}{a} =$

$1 + \frac{(a-a^2)(-y)}{a} = 1 + (1-a)(-y) = 1 + y(a-1)$.

Logo $f^4(y) = f(1 + y(a-1)) = \frac{1-1-y(a-1)}{1-a} = y$.

4- $f = f_{a,b}$ **com** (a,b) **na região definida por** $b < c = \frac{1}{2-a}$.



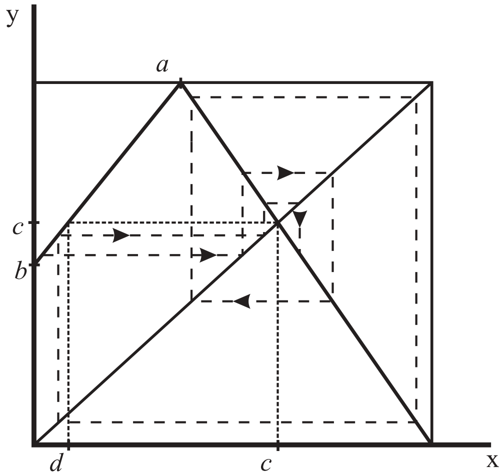


Figura 6: À esquerda a região com $b < c = \frac{1}{2-a}$ e à direita uma órbita típica de um ponto x pela aplicação $f_{a,b}$.

Proposição 2: Defina $S_0 = \{x \backslash \exists n > 0$ tal que $f^n(x) = c\}$. Seja $S = \bar{S}_o$. Então f é caótica em S.

Antes de demonstrarmos esta proposição vejamos alguns resultados.

Proposição 3: Se $c \in I$ então $\exists n > 0$ tal que $f^n(I) = [0,1]$.

Afirmação 1: Se $c \in I$ então $\exists m \geq 0$ tal que $1 \in f^m(I)$, ou seja, $[c,1] \subseteq f^m(I)$.

Prova da afirmação 1:

1. Se $1 \in I$ então considere $m = 0$ e teremos que $1 \in f^0(I) = f(I)$.

2. Se $a \in I$ então, como $f(a) = 1$, para $m = 1$ temos que $1 \in f^m(I)$.

3. Se $a \notin I$ então, como $c \in I$ e $c > a$, $\forall a \neq 1$, $I \subset [a,1]$. Logo, como, pelo lema 1, o ponto c é repulsor, $\exists k > 0$ tal que $1 \in f^k(I)$ ou $a \in f^k(I)$ e $1 \notin f^k(I)$.

   (a) Se $1 \in f^k(I)$ tome $m = k$ e teremos que $1 \in f^m(I)$.

   (b) Caso contrário, como $f(a) = 1$ tome $m = k+1$ e teremos que $1 \in f^m(I)$.

Prova da proposição 3: Seja m tal que $[c,1] \subseteq f^m(I)$. Considere $f^m(I) = [d,1]$ onde $d < c$.

Vamos mostrar que $\exists n > 0$ tal que $f^n(I) = [0,1]$.

1. Se $d = a, f(d) = f(a) = 1$ e então $f^{m+1}(I) = f([a,1]) = [0,1]$ Tome então $n = m+1$ e teremos $f^n(I) = [0,1]$

2. Se $d < a$ então $f([d,1]) = f([d,a]) + f([a,1]) = [0,1] \cup [f(d),1]$. Logo $f([d,1]) = [0,1]$. Então para $n = m+1$ vale a proposição.

3. Se $d > a$, como f é decrescente em $[a,1]$ e $d < c$, $f(d) > f(c) = c$ e então,como $f([c,1]) = [f(1), f(c)] = [0,c]$ e $f([d,1]) = [0, f(d)]$ temos que $[0,c] \subset [0, f(d)] = f^{m+1}(I)$. Ainda, como $c > a$, $\forall a \neq 1$ temos que $[0,a] \subset [0,c] \subset f^{m+1}(I)$. Mas $f([0,a]) = [b,1]$ e $f^{m+2}(I) = f([0, f(d)]) = f([0,a]) + f([a, f(d)]) = [b,1] \cup [f^2(d),1]$. Logo $[b,1] \subset f^{m+2}(I)$.

   (a) Se $b \leq a$, $[a,1] \subset [b,1]$ e então $f([a,1]) \subset f([b,a]) + f([a,1]) = f([b,1])$. Assim $[0,1] \subset f^{m+3}(I)$ e como $f^{m+3}(I) \subset [0,1]$ temos que $f^{m+3}(I) = [0,1]$. Portanto para $n = m+3$ segue o resultado.

(b) Se $b > a$ então, como $b < c$ e $c > a \forall a \neq 1$, $[b, 1] = [b, c] \cup [c, 1]$.

Afirmação 2 : Se $b > a$ então $\exists n$ par tal que $[a, c] \subset f^n([b, c])$.

Da afirmação 2 segue que $f^n([b, c] \cup [c, 1]) = f^n([b, c]) + f^n([c, 1]) \supset [a, c] \cup f^n([c, 1])$ Como n é par e $f^{2k}([c, 1]) = [c, 1]$, $\forall k$ pois c é o ponto fixo da f e como $f^2(1) = 1$ temos que $f^n([b, 1]) \supset [a, 1]$. Portanto $f^{n+1}([b, 1]) = [0, 1]$, como queríamos.

Prova da afirmação 2:

Considere $J = [b, c]$. Como f é decrescente no intervalo $[a, 1] \supset [b, c]$, $f(J) = [c, f(b)]$ e $f^2(J) = [f^2(b), c]$

i. Se $a \in f^2(J)$ tome $n = 2$

ii. Se $a \notin f^2(J)$ então, pelo lema 1, como $f(J) \subset [a, 1]$, $|f^2(J)| = |f(f(J))| = \frac{1}{1-a}|f(J)|$

Mas, como $J = [b, c] \subset [a, 1]$, $|f(J)| = \frac{1}{1-a}|J|$.

Logo, $|f^2(J)| = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2 |J| > |J|$. Portanto f^2 é uma aplicação expansiva em J. Então, como $|[0, 1]| < \infty$, temos que $\exists k$ tal que $f^{2k}(J) \supset [a, c]$, o que finaliza a prova .

Observação: Se $f^m(I) = [c, 1]$ então, como $f^{m+2}(I) = [b, 1]$, por a) e b) do item 3 acima segue o resultado.

Proposição 4 Se $\forall I \subset [0, 1]$ $\exists n$ tal que $f^n(I) = [0, 1]$ então f é caótica em $[0, 1]$ e não existem órbitas periódicas atratoras.

Prova: 1. f é caótica em todo $[0,1]$:

(a) f é topologicamente transitiva pois, dados U e V abertos de $[0,1]$, considere I, J com $I \subset U$ e $J \subset V$ intervalos fechados de $[0,1]$. Por hipótese $\exists m, n$ tais que $f^n(I) = [0,1]$ e $f^m(J) = [0,1]$. Mas $U = I \cup (U - I)$ e $V = J \cup (V - J)$, logo $f^n(U) = [0,1]$ e $f^m(V) = [0,1]$. Como $f^n(U \cap [0,1]) = f^n(U)$ temos que $f^n(U \cap [0,1]) \cap V \neq \emptyset$.

(b) Os pontos periódicos são densos.

De fato, dado $I \subset [0,1]$ temos que $\exists n$ tal que $f^n(I) = [0,1]$. Daí, como f é contínua, temos, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brower para f^n, que $\exists x \in I$ tal que $f^n(x) = x$. Portanto todo intervalo contido em $[0,1]$ possui um ponto periódico de $[0,1]$.

2. f não possui órbitas periódicas atratoras:

Suponhamos que exista órbita periódica atratora, por exemplo o n-ciclo $o(x) = \{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$, onde $x \in [0,1]$. Então, dado $\xi > 0$, para $I = [x - \xi, x + \xi]$, temos que $f^m(I) \to o(x)$ ao $m \to \infty$ e então não existe $N > 0$ tal que $f^N(I) = [0,1]$, o que contradiz a hipótese.

Prova da proposição 2: Em primeiro lugar vamos mostrar que S é um conjunto infinito.

Afirmação 3: S_0 é um conjunto infinito.

Prova : Consideramos $c_0 = c$ e construimos $\{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$ satisfazendo $f(c_{k+1}) = c_k$ como segue:

Seja $d \in [0, a]$ satisfazendo $f(d) = c$ como montra a figura 6. $d \in S_0$. Considere $c_1 = d$.

Encontramos $c_2 \in (c, 1]$ com $f(c_2) = d$ traçando uma linha horizontal de (d, d) para a direita até ela encontrar o gráfico. Como $f^2(c_2) = f(d) = c$, $c_2 \in S_0$.

Encontramos $c_3 \in [a, c)$ com $f(c_3) = c_2$ traçando uma linha horizontal de (c_2, c_2) para a esquerda até ela encontrar o gráfico. $c_3 \in S_0$ pois $f^3(c_3) = f^2(c_2) = c$.

Como o módulo da inclinação do gráfico para a direita de $x = a$ é maior que 1, repetindo esse processo, alternando $c_i \in (c, 1)$ para i par e $c_i \in (0, c)$ para i ímpar, produzimos uma sequência infinita $\{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$ contida em S_0, o que finaliza a prova da afirmação.

Como, pela afirmação 3, S_0 é um conjunto infinito e como, por definição, $S = \bar{S}_0$, temos que S é um conjunto infinito.

Vamos provar agora que f é caótica em S.

1. Vale a transitividade topológica em S:

   Sejam U e V abertos tais que $\exists x \in U \cap S$ e $\exists y \in V \cap S$. Como $S = \bar{S}_0$ existem $x_0 \in U \cap S_0$ e $y_0 \in V \cap S_0$.

Vamos mostrar que existe $p > 0$ tal que $y_0 \in f^p(U \cap S)$.

Como $x_0, y_0 \in S_0$, $\exists k, m > 0$ tais que $f^k(x_o) = c = f^m(y_0)$.

Considere I tal que $x_0 \in I \subset U$. Assim, $c \in f^k(I)$ e, pela proposição 3, $\exists n > 0$ tal que $f^{k+n}(I) = [0, 1]$. Logo $\exists z \in I$ com $f^{k+n}(z) = y_0$ e $f^{k+n+m}(z) = c$. Daí $z \in S_0 \subset S$.

Então, tomando $p = k + n > 0$ temos que $y_0 \in f^p(I \cap S) \subset f^p(U \cap S)$.

Portanto $f^p(U \cap S) \cap (V \cap S) \neq \emptyset$.

2. Os pontos periódicos de S são densos em S:

Considere U aberto com $U \cap S \neq \emptyset$. Como $S = \bar{S}_0$, existe x_0 em $S_0 \cap U$. Seja $I \subset U$ tal que $x_0 \in I$.

Vamos mostrar que existe um ponto periódico em $I \cap S$.

Como $x_0 \in S_0$, $\exists k > 0$ tal que $f^k(x_0) = c$. Então, pela proposição 3, $\exists n_0 > 0$ com $f^{k+n_0}(I) = [0, 1]$. Logo, $\exists I_1 \subset I$ tal que $f^{k+n_0}(I_1) = I$. Consequentemente, $\exists x_1 \in I_1$ com $f^{k+n_0}(x_1) = x_0$ e, então, tomando $l = 2k + n_0$ temos que $f^{2k+n_0}(x_1) = f^k(x_0) = c$. Daí $x_1 \in S_0$. Da mesma maneira, $\exists I_2 \subset I_1$ tal que $f^{k+n_0}(I_2) = I_1$ e $\exists x_2 \in I_2 \cap S_0$ com $f^{k+n_0}(x_2) = x_1$.

Assim, indutivamente, construímos uma sequência de pontos $x_n \in S_0$ com $x_n \in I_n \subset U$ e $I \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$.

Considere $I = [a, b]$ e $I_n = [a_n, b_n]$. Logo, $a < a_1 < a_2 < ... < a_n < ... < b_n < ... < b_1 < b$ e, então, o conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n,,,\}$ é limitado superiormente e o conjunto $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ é limitado inferiormente.

Sejam $s_1 =$sup$A$ e $s_2 =$inf$B$.

Note que s_1 e s_2 pertencem a I.

Como $f^{n_0+k}(s_2) = f^{n_0+k}(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f^{n_0+k}(b_n) = \lim_{n\to\infty} b_{n-1} = s_2$ e, da mesma forma, $f^{n_0+k}(s_1) = s_1$, temos que s_1 e s_2 são pontos periódicos para f^{n_0+k}.

Vamos mostrar que pelo menos um deles pertence a S.

Ainda, como $f^{n_0+k}([s_1, s_2]) = [s_1, s_2]$, $f^{(n_0+k)l}([s_1, s_2]) = [s_1, s_2]$, $\forall l > 0$. Ora, se existe x_j em $[s_1, s_2]$ então existe $p > 0$ tal que $f^p([s_1, s_2]) = I$, o que gera uma contradição. Portanto, $x_n \in [a_n, s_1] \cup [s_2, b_n]$, $\forall n > 0$. Como $\{x_n\}$ é uma sequência infinita, ocorre um número infinito de vezes $x_{n_j} \in [a_{n_j}, s_1]$ ou ocorre um número infinito de vezes $x_{n_j} \in [s_2, b_{n_j}]$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que ocorre infinitas vezes $x_{n_j} \in [a_{n_j}, s_1]$.

Como $a_{n_j} \leq x_{n_j} \leq s_1$, então $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = s_1$.

Mas $x_n \in [a_n, b_n] \cap S_0$, $\forall n > 0$, logo $s_1 \in S = \bar{S_0}$.

Portanto, s_1 é um ponto periódico em $I \cap S$.

5-$f = f_{a,b}$ com (a,b) na região definida por $b < c = \frac{1}{2-a}$ e $b < 1-a$, e com (a,b) na região definida por $b < c = \frac{1}{2-a}$, $b \geq 1-a$ e $b > a$.

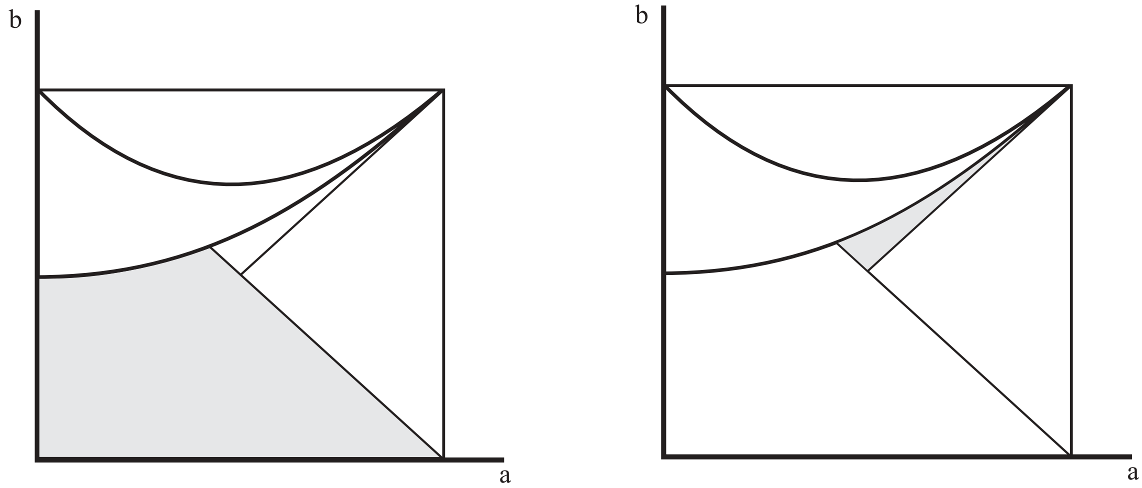


Figura 7: À esquerda a região com $b < c = \frac{1}{2-a}$ e $b < 1-a$. À direita a região com $b < c = \frac{1}{2-a}$, $b \geq 1-a$ e $b > a$.

Nesta região $f = f_{a,b}$ é caótica em todo $[0,1]$. Este resultado segue das proposições 5 e 6 abaixo e da proposição 4 da seção anterior.

Proposição 5: Se $b < c$ e $b < 1-a$ então $\forall I \subset [0,1]$, $\exists n$ tal que $f^n(I) = [0,1]$

Proposição 6: Se $b < c$, $b \geq 1-a$ e $b > a$ então $\forall I \subset [0,1]$, $\exists n > 0$ com $f^n(I) = [0,1]$

Na demonstração dessas proposições necessitaremos do seguinte lema:

Lema 7: Suponhamos $b < c$. Seja d tal que $d \in [0, a)$ e $f(d) = c$, como ilustra a figura 6. Se $a \in I \subset [d, c]$ então $|f^2(I)| \geq \frac{c}{c-d}|I|$.

Prova: $f([d,c]) = f([d,a]) \cup f([a,c]) = [f(d), f(a)] \cup [f(c), f(a)] = [c, 1] \cup [c, 1]$. $f([c,1]) = [f(1), f(c)] = [0, c]$. Logo, $f^2([d,c]) = [0, c]$. Assim, $|f^2(I)| = \frac{c}{c-d}|I|$ se $I = [d, c]$

Considere $I = [p, q] \subset [d, c]$ com $a \in I$.

$f(I) = f([p,q]) = f([p,a]) \cup f([a,q]) = [f(p), f(a)] \cup [f(q), f(a)] = [f(p), 1] \cup [f(q), 1]$

1. Se $f(p) = f(q) = z$ então $f(I) = [z, 1]$.

   Por semelhança de triângulos temos que $\frac{|f^2(I)|}{|I|} = \frac{|f^2(J)|}{|J|}$, onde $J = [c, d]$.

   Daí $|f^2(I)| = \frac{c}{c-d}|I|$.

2. Se $f(p) \neq f(q)$ suponhamos $f(q) > f(p)$.

   Como $f([d,a]) = [c, 1]$ e $f([c,a]) = [c, 1]$, então $\forall p \in [d, a]\ \exists z \in [a, c]$ tal que $f(z) = f(p)$.

   Ainda, como f é decrescente em $[a, 1] \supset [a, q]$ e $f(q) > f(p)$, $\exists \tilde{q} > q$ tal que $f(\tilde{q}) = f(p)$, ou seja, $\exists J = [p, \tilde{q}]$ com $I \subset J$ tal que $f(p) = f(\tilde{q})$ e $f(I) = f(J) = [f(p), 1]$.

   Então $|f^2(J)| = \frac{c}{c-d}|J|$. Mas $|f^2(J)| = |f^2(I)|$ e $|J| > |I|$.

   Portanto, $|f^2(I)| = \frac{c}{c-d}|J| > \frac{c}{c-d}|I|$.

Prova da Proposição 5: Seja $d \in [0, a)$ tal que $f(d) = c$, como mostra a figura 6.

Considere $I \subset [0, 1]$.

1. Se $c \in I$ então, pela proposição 3, $\exists n > 0$ tal que $f^n(I) = [0, 1]$.

2. Se $c \notin I$ e $d \in I$ então, como $f(d) = c$, $c \in f(I)$. Da proposição 3 segue que $\exists n > 0$ tal que $f^{n+1}(I) = [0, 1]$.

3. Se $I \subset (d, c)$ e $a \in I$, pelo lema 7 temos que $|f^2(I)| \geq \frac{c}{c-d}|I|$. Como $\frac{c}{c-d} > 1$, $|f^2(I)| > |I|$. Assim, como $f^2(I)$ expande e $|[d, c]| < \infty$, $\exists k > 0$ tal que $c \in f^{2k}(I)$. Logo, pela proposição 3, $\exists n > 0$ tal que $f^{2k+n}(I) = [0, 1]$.

4. Se $I \subset (a, c)$ ou $I \subset (c, 1]$, pelo lema 1, $|f(I)| > |I|$, ou seja, f é expansiva em I. Logo $\exists k > 0$ tal que $c \in f^k(I)$ e então, pela proposição 3, $\exists n$ tal que $f^{k+n}(I) = [0, 1]$.

5. Se $I \subset [0, d)$ ou $I \subset (d, a)$ então, como f é linear em $[0, a]$, dado $x \in [0, a]$, temos que $|f(I)| = |f'(x)||I|$. Mas $|f'(x)| = \frac{1-b}{a}$, $\forall x \in [0, a]$ e como $b < 1 - a$, $\frac{1-b}{a} > 1$. Logo $|f(I)| > |I|$, ou seja, f é expansiva em I, daí segue que $\exists m > 0$ tal que $f^m(I) = [0, 1]$.

Observação: Note que podemos supor, sem perda de generalidade, que I esta totalmente contido em um dos casos acima. De fato, se I intercepta, por exemplo, (d, c) e $(c, 1)$ podemos considerar um novo I da forma $I \cap (d, c)$ que esta totalmente contido em (d, c).

Prova da Proposição 6: A demonstração é análoga a demonstração anterior exceto no caso 5. Assim, basta mostrar que se $I \subset [0, d)$ ou $I \subset (d, a)$, $\exists n > 0$ tal que $f^n(I) = [0, 1]$.

De fato, como $f([0, d]) = [b, c]$, $f([d, a]) = [c, 1]$ e $b > a$, temos que $f(I) \subset [a, 1]$. Então, segue do lema 1 que $|f^2(I)| = \frac{1}{1-a}|f(I)|$. Mas como $I \subset [0, a]$ e f é linear em $[0, a]$ temos que $|f(I)| = \frac{1-b}{a}|I|$.

Assim, $|f^2(I)| = \frac{1-b}{a(1-a)}|I|$. Ainda, como $b < c$, $1 - b > 1 - c = 1 - \frac{1}{2-a} = \frac{1-a}{2-a}$. Daí $\frac{1-b}{a(1-a)} > \frac{1-a}{2-a}.\frac{1}{a(1-a)} = \frac{1}{a(2-a)} = \frac{c}{a} > 1$. Então f^2 é expansiva em I, logo $\exists m > 0$ tal que $f^m(I) = [0, 1]$.

Portanto, para $f = f_{a,b}$, com (a, b) na região em questão, temos que $\forall\ I \subseteq [0, 1]$ existe $n > 0$ tal que $f^n(I) = [0, 1]$ e então, pela proposição 4, segue que f é caótica em todo intervalo $[0, 1]$.

Bibliografia:

[1] Bassein, S., *The Dynamics of a Family of One-Dimensional Maps*, American Mathematical Monthly, Número 2, Vol 105, Fevereiro de 1998.

[2] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company (1989).

[3] Hirsh, M. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academis Press, (1974).

[4] Lima, E., *Curso de Análise*, Vol 1, Proj Euclides, IMPA, (1976).

[5] Szlenk, W., *An Intrduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems*, PWN-Polish scientific publishers.