

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ESTUDO NUMÉRICO DA DINÂMICA VERTICAL DE VEÍCULOS DE CARGA  
CONSIDERANDO FORÇAS DE AMORTECIMENTO NÃO LINEARES EM  
SUSPENSÕES

por

Matheus Berriel Flores

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2021.

## CIP - Catalogação na Publicação

Flores, Matheus Berriel

Estudo numérico da dinâmica vertical de veículos de carga considerando forças de amortecimento não lineares em suspensões / Matheus Berriel Flores. -- 2021.

32 f.

Orientador: Walter Jesus Paucar Casas.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. conforto veicular. 2. combinação veicular. 3. vibração. I. Casas, Walter Jesus Paucar, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Matheus Berriel Flores

ESTUDO NUMÉRICO DA DINÂMICA VERTICAL DE VEÍCULOS DE CARGA  
CONSIDERANDO FORÇAS DE AMORTECIMENTO NÃO LINEARES EM  
SUSPENSÕES

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Cirilo Seppi Bresolin  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de Avaliação:

Prof. Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Ignacio Iturrioz

Porto Alegre, novembro de 2021

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Leda Rejane, e meu pai, Naurio, por todo carinho e suporte proporcionado ao longo da graduação

À minha irmã, Gabriela, pelo apoio.

À minha namorada, pelo amor incondicional.

Aos meus familiares, amigos e colegas, pelo companheirismo e momentos de alegrias proporcionados.

E a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela gratuidade e qualidade do ensino que me possibilitou chegar a esse momento.

Flores, Matheus Berriel. **Estudo numérico da dinâmica vertical de veículos de carga considerando forças de amortecimento não lineares em suspensões**. 2021. 32f. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

## RESUMO

O presente trabalho estuda a resposta dinâmica de um veículo de carga, do tipo caminhão trator trucado com semirreboque, através da comparação de dois modelos vibracionais de 13 graus de liberdade, onde o primeiro modelo considera forças de amortecimento não lineares na suspensão traseira da cabine e na suspensão traseira do cavalo mecânico, e o segundo modelo considera todas as forças de amortecimento como lineares. O estudo simula a passagem do veículo através de uma lombada trafegando em uma pista com um perfil de irregularidades da Classe A, fundamentada na Norma ISO 8608/2016, se obtendo as acelerações verticais no assento do motorista e no centro de gravidade da cabine. Os procedimentos numéricos de integração das equações de movimento são realizados através do método implícito de Newmark. Os resultados obtidos mostram que o modelo de veículo com forças de amortecimentos lineares atingiu valores extremos maiores de aceleração em relação ao modelo do veículo com forças de amortecimentos não lineares, o qual pode significar que se trata de um modelo conservador. Contudo, o modelo não linear apresenta um valor RMS maior no intervalo de análise, associado a uma suavização do sinal em um tempo maior.

**PALAVRAS-CHAVE:** conforto veicular, combinação veicular, vibração.

Flores, Matheus Berriel. **Numerical study of vertical dynamic of cargo vehicles considering non-linear damping forces in suspension.** 2021. 32p. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

## ABSTRACT

The present work studies the dynamic response of a cargo vehicle, tractor truck type with semi-trailer, through the comparison of two vibrational models of 13 degrees of freedom, where the first model considers non-linear damping forces in the cabin rear suspension and in the rear suspension of the tractor, and the second model considers all damping forces to be linear. The study simulates the passage of the vehicle through a hump traveling on a lane with a Class A irregularity profile, based on the ISO 8608/2016 Standard, obtaining the vertical accelerations in the driver's seat and in the cabin's center of gravity. The numerical procedures for integrating the equations of motion are performed using the implicit method of Newmark. The results obtained show that the vehicle model with linear damping forces reached higher extreme acceleration values compared to the vehicle model with non-linear damping forces, which may mean that it is a conservative model. However, the non-linear model presents a higher RMS value in the analysis interval, associated with a smoothing of the signal in a longer time

**KEYWORDS:** vehicle comfort, vehicle combination, vibration.

## NOMENCLATURA

### Símbolos

<b>M</b>	Matriz de massa	[kg]
<b>C</b>	Matriz de amortecimento	[Ns/m]
<b>K</b>	Matriz de rigidez	[N/m]
$\vec{\ddot{x}}$	Vetor aceleração	[m/s <sup>2</sup> ]
$\vec{\dot{x}}$	Vetor velocidade	[m/s]
$\vec{x}$	Vetor deslocamento	[m]
$\vec{F}$	Vetor de força	[N]
$a_0, a_1, a_2, a_5, a_6, a_7$	Constantes utilizadas no método de Newmark	[-]
$x_p$	Deslocamento vertical do assento	[m]
$x_c$	Deslocamento vertical do CG da cabine	[m]
$x_b$	Deslocamento vertical do CG do chassi do cavalo mecânico	[m]
$x_1$	Deslocamento vertical do primeiro eixo	[m]
$x_e$	Deslocamento vertical da suspensão equivalente	[m]
$x_t$	Deslocamento vertical do CG do semirreboque	[m]
$x_4$	Deslocamento vertical do quarto eixo	[m]
$x_5$	Deslocamento vertical do quinto eixo	[m]
$x_6$	Deslocamento vertical do sexto eixo	[m]
$\dot{x}_p$	Velocidade do assento	[m/s]
$\dot{x}_c$	Velocidade associada a cabine	[m/s]
$\dot{x}_b$	Velocidade relacionada ao chassi do cavalo mecânico	[m/s]
$\dot{x}_1$	Velocidade associada ao primeiro eixo	[m/s]
$\dot{x}_t$	Velocidade associada a massa do semirreboque	[m/s]
$\dot{x}_4$	Velocidade associada ao quarto eixo	[m/s]
$\dot{x}_5$	Velocidade associada ao quinto eixo	[m/s]
$\dot{x}_6$	Velocidade associada ao sexto eixo	[m/s]
$\ddot{x}_p$	Aceleração do assento	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_c$	Aceleração associada a cabine	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_b$	Aceleração relacionada ao chassi do cavalo mecânico	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_1$	Aceleração associada ao primeiro eixo	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_e$	Aceleração associada ao eixo equivalente	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_t$	Aceleração associada a massa do semirreboque	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_4$	Aceleração associada ao quarto eixo	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_5$	Aceleração associada ao quinto eixo	[m/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{x}_6$	Aceleração associada ao sexto eixo	[m/s <sup>2</sup> ]

$F_{rci}$	Força de amortecimento na suspensão traseira da cabine	[N]
$F_{c2}$	Força de amortecimento entre o chassi do cavalo mecânico e o amortecedor $c_2$	[N]
$F_{c3}$	Força de amortecimento entre o chassi do cavalo mecânico e o amortecedor $c_3$	[N]
$q_1$	Deslocamento do pneu 1	[m]
$q_2$	Deslocamento do pneu 2	[m]
$q_3$	Deslocamento do pneu 3	[m]
$q_4$	Deslocamento do pneu 4	[m]
$q_5$	Deslocamento do pneu 5	[m]
$q_6$	Deslocamento do pneu 6	[m]
$m_p$	Massa do assento e do motorista	[kg]
$m_c$	Massa da cabine	[kg]
$m_b$	Massa suspensa (chassi do cavalo mecânico)	[kg]
$m_1$	Massa do primeiro eixo	[kg]
$m_2$	Massa do segundo eixo	[kg]
$m_3$	Massa do terceiro eixo	[kg]
$m_4$	Massa do quarto eixo	[kg]
$m_5$	Massa do quinto eixo	[kg]
$m_6$	Massa do sexto eixo	[kg]
$m_e$	Massa do eixo equivalente	[kg]
$m_t$	Massa suspensa do semirreboque	[kg]
$J_c$	Inércia rotacional da massa da cabine	[kg m <sup>2</sup> ]
$J_b$	Inércia rotacional da massa suspensa do chassi do cavalo mecânico	[kg m <sup>2</sup> ]
$J_e$	Inércia rotacional da suspensão equivalente	[kg m <sup>2</sup> ]
$J_t$	Inércia rotacional da massa suspensa do semirreboque	[kg m <sup>2</sup> ]
$k_p$	Rigidez do assento	[N/m]
$k_f$	Rigidez da suspensão frontal da cabine	[N/m]
$k_r$	Rigidez da suspensão traseira da cabine	[N/m]
$k_s$	Rigidez da quinta roda	[N/m]
$k_1$	Rigidez da suspensão frontal do cavalo mecânico	[N/m]
$k_2$	Rigidez da suspensão equivalente	[N/m]
$k_{s2}$	Rigidez da suspensão do segundo eixo	[N/m]
$k_{s3}$	Rigidez da suspensão do terceiro eixo	[N/m]
$k_4$	Rigidez da suspensão do quarto eixo	[N/m]
$k_5$	Rigidez da suspensão do quinto eixo	[N/m]



$k_6$	Rigidez da suspensão do sexto eixo	[N/m]
$k_7$	Rigidez do primeiro pneu	[N/m]
$k_8$	Rigidez do segundo pneu	[N/m]
$k_9$	Rigidez do terceiro pneu	[N/m]
$k_{10}$	Rigidez do quarto pneu	[N/m]
$k_{11}$	Rigidez do quinto pneu	[N/m]
$k_{12}$	Rigidez do sexto pneu	[N/m]
$c_p$	Amortecimento do assento	[Ns/m]
$c_f$	Amortecimento da suspensão frontal da cabine	[Ns/m]
$c_r$	Amortecimento da suspensão traseira da cabine	[Ns/m]
$c_s$	Amortecimento da quinta roda	[Ns/m]
$c_1$	Amortecimento da suspensão do primeiro eixo	[Ns/m]
$c_2$	Amortecimento da suspensão do segundo eixo	[Ns/m]
$c_3$	Amortecimento da suspensão do terceiro eixo	[Ns/m]
$c_4$	Amortecimento da suspensão do quarto eixo	[Ns/m]
$c_5$	Amortecimento da suspensão do quinto eixo	[Ns/m]
$c_6$	Amortecimento da suspensão do sexto eixo	[Ns/m]
$l_1$	Distância entre a suspensão do primeiro eixo e o CG do chassi do cavalo mecânico	[m]
$l_2$	Distância entre o CG do chassi do cavalo mecânico e o eixo equivalente	[m]
$l_3$	Distância entre o segundo eixo e o eixo equivalente	[m]
$l_4$	Distância entre o eixo equivalente e o terceiro eixo	[m]
$l_5$	Distância entre o CG da cabine e o CG do chassi do cavalo mecânico	[m]
$l_6$	Distância entre a suspensão frontal da cabine e o CG da cabine	[m]
$l_7$	Distância entre o CG da cabine e a suspensão traseira da cabine	[m]
$l_8$	Distância entre o CG da cabine e o assento	[m]
$l_9$	Distância entre o CG do chassi do cavalo mecânico e a quinta roda	[m]
$l_{10}$	Distância entre a quinta roda e o CG do semirreboque	[m]
$l_{11}$	Distância entre o CG do semirreboque e o quinto eixo	[m]
$l_{12}$	Distância entre o quarto e o quinto eixo	[m]
$l_{13}$	Distância entre o quinto eixo e o sexto eixo	[m]
$n_{c_2}$	Índice característico de amortecimento para amortecedor $c_2$	[-]

$n_{c3}$	Índice característico de amortecimento para amortecedor $c_3$	[-]
$n_{r1}$	Índice característico de amortecimento para amortecedor traseiro da cabine	[-]
$n_{r2}$	Índice característico de amortecimento para amortecedor traseiro da cabine	[-]
$G_d$	Densidade espectral de potência para o deslocamento	[m <sup>3</sup> ]
$n$	Número de onda específico	[ciclos/m]
$n_0$	Frequência de descontinuidade da pista	[ciclos/m]
$W$	Expoente da densidade espectral de potência para o deslocamento	[-]
$f_k$	Frequências da densidade espectral	[-]
$N$	Número de linhas espectrais	[-]
<b>Símbolos gregos</b>		
$\alpha_N$	Parâmetro de estabilidade método de Newmark	[-]
$\delta_N$	Parâmetro de estabilidade método de Newmark	[-]
$\Delta t$	Passo de tempo	[s]
$\theta_c$	Arfagem do CG da cabine	[rad]
$\theta_b$	Arfagem do chassi do cavalo mecânico	[rad]
$\theta_e$	Arfagem do eixo equivalente	[rad]
$\theta_t$	Arfagem do semirreboque	[rad]
$\dot{\theta}_c$	Velocidade de rotação associada ao CG da cabine	[rad/s]
$\dot{\theta}_b$	Velocidade de rotação associada ao chassi do cavalo mecânico	[rad/s]
$\dot{\theta}_t$	Velocidade de rotação associada a massa suspensa do semirreboque	[rad/s]
$\ddot{\theta}_c$	Aceleração de rotação associada ao CG da cabine	[rad/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{\theta}_b$	Aceleração de rotação associada ao chassi do cavalo mecânico	[rad/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{\theta}_e$	Aceleração de rotação associada ao eixo equivalente	[rad/s <sup>2</sup> ]
$\ddot{\theta}_t$	Aceleração de rotação associada a massa suspensa do semirreboque	[rad/s <sup>2</sup> ]
$\lambda_{c2}$	Fator de escala amortecedor $c_2$	[-]
$\eta_{c2}$	Coefficiente de assimetria	[-]
$\lambda_{c3}$	Fator de escala amortecedor $c_3$	[-]
$\eta_{c3}$	Coefficiente de assimetria	[-]
$\lambda_{r1}$	Fator de escala amortecedor do amortecedor traseiro da cabine	[-]
$\eta_{r1}$	Coefficiente de assimetria amortecedor traseiro da cabine	[-]
$\lambda_{r2}$	Fator de escala amortecedor do amortecedor traseiro da cabine	[-]

$\eta_{r2}$	Coefficiente de assimetria amortecedor traseiro da cabine	[-]
$\alpha$	Ângulo de instalação da cabine	[rad]
$\beta$	Ângulo de instalação da cabine	[rad]
$\psi_k$	Ângulo de fase aleatório	[rad]
Abreviaturas e acrômimos		
GDL	Grau de liberdade	
PSD	Densidade espectral de potência	
CG	Centro de gravidade	

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. GENERALIDADES.....	1
1.2. MOTIVAÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	1
1.3. OBJETIVOS.....	1
1.3.1. OBJETIVO GERAL.....	1
1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	2
1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	2
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	3
2.1. SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.....	3
2.2. MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO.....	3
2.2.1. MÉTODO DE NEWMARK.....	3
3. METODOLOGIA.....	4
3.1. MODELO MULTICORPO DO VEÍCULO COM FORÇAS DE AMORTECIMENTO NÃO LINEARES EM COMPONENTES DAS SUSPENSÕES.....	4
3.1.1. MODELO DE SUSPENSÃO EQUIVALENTE.....	6
3.1.2. SUSPENSÃO TRASEIRA DA CABINE.....	7
3.2. MODELO MULTICORPO DO VEÍCULO CONSIDERANDO TODAS AS FORÇAS DE AMORTECIMENTO LINEARES.....	7
3.3. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO.....	10
3.4. PERFIL DE IRREGULARIDADES DA PISTA.....	10
4. RESULTADOS.....	11
4.1. GERAÇÃO DO PERFIL DA PISTA E VERIFICAÇÃO DO MODELO MULTICORPO .....	11
4.2. ACELERAÇÕES VERTICAIS NO ASSENTO DO MOTORISTA E NO CG DA CABINE.....	12
5. CONCLUSÕES.....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	16
APÊNDICE.....	16
ANEXO.....	20

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. GENERALIDADES

Um sistema de transporte eficaz e com qualidade contribui fundamentalmente para o desenvolvimento econômico de um país, trazendo benefícios à sociedade e gerando ganhos ambientais. O principal modal logístico no Brasil é o rodoviário com participação, aproximadamente, de 61% da movimentação de produtos e 95% de passageiros. Contudo, apesar da relevância do modal rodoviário para o crescimento do país, grande parte das rodovias não são pavimentadas representando 78,5% do total da malha rodoviária brasileira, conforme Figura 1. (CNT, 2019).

Figura 1 – Malha rodoviária brasileira.



Fonte: CNT (2019).

Ainda, conforme avaliação realizada pela CNT (2019), 52,4% da extensão total da rodovia avaliada mostrou ter algum tipo de problema no pavimento, sendo considerados 35,0% regular; 13,7% ruim; e 3,7% péssimo. Defeitos e irregularidades na condição da superfície como buracos, ondulações, afundamentos, fissuras e remendos fazem com que o tempo de viagem aumente, eleve o risco da ocorrência de acidentes e dos custos operacionais, diminuam a durabilidade de componentes veiculares e afeta diretamente no bom desempenho e conforto de condução do motorista.

### 1.2. MOTIVAÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Diante das consequências que uma rodovia precária pode resultar na condução do veículo pelo motorista, a proposta deste trabalho é avaliar a resposta dinâmica de um caminhão trator trucado e semirreboque com 13 graus de liberdade (13-GDL) trafegando em uma pista com lombada com o auxílio de parâmetros experimentais de amortecimento não linear presentes na literatura, de forma que o modelo veicular reproduza melhor a dinâmica do mesmo. A abordagem da solução do problema se dará através da implementação dos modelos matemáticos desenvolvidos através do *software* MATLAB.

### 1.3. OBJETIVOS

#### 1.3.1. OBJETIVO GERAL

Quantificar o conforto veicular em termos das acelerações no assento do motorista e no centro de gravidade da cabine através de métodos numéricos, comparando um modelo de veículo que utiliza forças de amortecimento não lineares com um modelo de veículo com apenas forças lineares nos componentes das suspensões.

### 1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Desenvolver a modelagem multicorpo dos veículos propostos, ambos com 6 eixos e 13 graus de liberdade, a fim de obter as equações dinâmicas de movimento.
- b) Analisar numericamente a resposta dinâmica dos veículos com a utilização de um perfil de pista com irregularidades e lombada, resolvendo através do uso do método implícito de Newmark.

### 1.4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção será apresentada uma revisão da literatura de referência, bastante resumida, sobre artigos científicos, trabalhos de mestrado e doutorado, destacando alguns aspectos relevantes que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

LI (2006) concentrou seus estudos na modelagem e simulação da dinâmica veicular de um caminhão com 3 eixos e vários graus de liberdade. Através das equações de Lagrange foram obtidas as equações de movimento, então, criadas as matrizes do sistema utilizadas em métodos numéricos programados em MATLAB para simular o modelo submetido a excitações externas. Seus resultados revelaram que a rigidez da suspensão dianteira tem a maior influência na aceleração vertical do assento do motorista.

BOARETTO (2012) estudou o comportamento estrutural do chassi de um semirreboque carregado, submetido a manobras direcionais associadas às dinâmicas lateral e vertical a fim de reduzir a tara do semirreboque e permitir o incremento de carga líquida aumentando a eficiência no transporte. Obteve resultados de acelerações e deslocamentos para três tipos de manobras, *double lane change*, *slalom* e *costela de vaca*. Utilizou o programa TruckSim para analisar o comportamento do veículo através de simulações dessas manobras e seus resultados evidenciaram que, para um carregamento apropriado, todas as manobras reproduzem níveis de exigência adequadas com a estrutura proposta.

DREHMER (2017) propôs, para um modelo veicular completo com 15 graus de liberdade, uma ferramenta para otimização robusta multiobjetivo por análise de intervalo não probabilística. Com o propósito de otimizar os parâmetros concentrados da suspensão em um veículo, submetido a manobra *double lane change*, para garantir maior conforto e segurança do motorista.

CHEN et al. (2020) estudaram o conforto vibracional de um semirreboque através da otimização de parâmetros da suspensão e propuseram um modelo de veículo com 13 graus de liberdade considerando não linearidades de componentes do sistema de suspensão. Através de seus estudos concluíram que a suspensão dianteira do chassi é o sistema mais significativo para o conforto vibracional do veículo.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

De acordo com RAO (2011), o número de graus de liberdade de um sistema é definido pelo número mínimo de coordenadas necessárias para descrever o movimento de massas concentradas e corpos rígidos. As equações de movimento de um sistema com vários graus de liberdade podem ser formuladas através da 2ª Lei de Newton, descritas pelas Eq. (1) e Eq. (2).

$$\sum_j F_{ij} = m_i \ddot{x}_i \quad (1)$$

$$\sum_j M_{ij} = J_i \ddot{\theta}_i \quad (2)$$

onde a Eq. (1) é o somatório de todas as forças atuando na massa  $m_i$  e a Eq. (2) indica o somatório de momentos de todas as forças atuando no corpo rígido de momento de inércia de massa  $J_i$ .

As equações de movimento podem ser escritas de forma matricial da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (3)$$

sendo  $\mathbf{M}$  a matriz de massa, diagonal, de tamanho igual ao número de graus de liberdade do sistema, correspondendo as propriedades de inércia. As matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  também são quadradas, representando a rigidez elástica e o amortecimento, respectivamente.

### 2.2. MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Conforme MIGUEL (2006), os métodos de integração direta correspondem em procedimentos numéricos do tipo passo a passo que não necessitam o cálculo preliminar das características dinâmicas da estrutura, como autovalores e autovetores. Podendo ser classificados como explícitos ou implícitos, os métodos de integração direta explícitos utilizam a equação de movimento no instante  $t$  para calcular a resposta no instante  $t + \Delta t$ , já os métodos implícitos utilizam a equação de movimento no instante  $t + \Delta t$  para calcular a resposta neste instante (MIGUEL, 2006). Como exemplo de método implícito, pode ser citado o método de Newmark.

#### 2.2.1. MÉTODO DE NEWMARK

De acordo com RAO (2011), o método de Newmark se baseia na suposição de que, entre dois instantes de tempo, a aceleração varia linearmente e, parâmetros  $\alpha_N$  e  $\delta_N$  indicam a influência da aceleração nas equações de velocidade e de deslocamento ao final do intervalo de tempo.

Os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no tempo  $t_{i+1}$  são descritos através das Eq. (4), Eq. (5) e Eq. (6), respectivamente.

$$\bar{x}(t_{i+1}) = (a_0 \mathbf{M} + a_5 \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}(t_{i+1}) + \mathbf{M} [a_0 \bar{x}(t_i) + a_1 \dot{\bar{x}}(t_i) + a_2 \ddot{\bar{x}}(t_i)] \\ + \mathbf{C} [a_5 \bar{x}(t_i) + a_6 \dot{\bar{x}}(t_i) + a_7 \ddot{\bar{x}}(t_i)] \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\dot{\bar{x}}(t_{i+1}) = a_5 [\bar{x}(t_{i+1}) - \bar{x}(t_i)] - a_6 \dot{\bar{x}}(t_i) - a_7 \ddot{\bar{x}}(t_i) \quad (5)$$

$$\ddot{\bar{x}}(t_{i+1}) = a_0 [\bar{x}(t_{i+1}) - \bar{x}(t_i)] - a_1 \dot{\bar{x}}(t_i) - a_2 \ddot{\bar{x}}(t_i) \quad (6)$$

Os vetores  $\bar{x}(t_i)$ ,  $\dot{\bar{x}}(t_i)$  e  $\ddot{\bar{x}}(t_i)$  correspondem ao deslocamento, velocidade e aceleração no tempo  $t_i$ , respectivamente.

As constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$  utilizadas no método de Newmark são expressas nas equações a seguir:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha_N \Delta t^2}; a_1 = \frac{1}{\alpha_N \Delta t}; a_2 = \left( \frac{1}{2\alpha_N} - 1 \right); a_5 = \frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t}; a_6 = \frac{\delta_N}{\alpha_N} - 1; a_7 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta_N}{\alpha_N} - 2 \right) \quad (7)$$

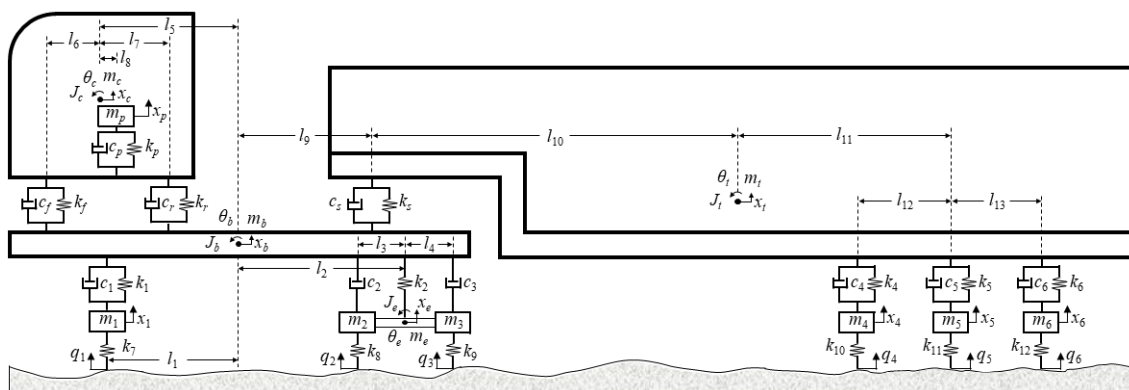
### 3. METODOLOGIA

Nesta seção do trabalho são apresentados os dois modelos de veículos propostos para análise da dinâmica veicular, ambos do tipo meio veículo. O primeiro modelo, apresentado na seção 3.1, considera forças não lineares em componentes da suspensão. O segundo modelo, apresentado na seção 3.2, considera todas as forças nos componentes como sendo lineares. No final do capítulo são exibidos o perfil de irregularidades e a característica da lombada a qual o veículo é submetido.

#### 3.1. MODELO MULTICORPO DO VEÍCULO COM FORÇAS DE AMORTECIMENTO NÃO LINEARES EM COMPONENTES DAS SUSPENSÕES

O veículo de carga selecionado é um modelo proposto por Chen et al. (2020). A Figura 2 designa os treze graus de liberdade, sendo nove deles tratando-se dos deslocamentos verticais e quatro de arfagens. Os valores para os dados inerciais, geométricos, elásticos e de amortecimento encontram-se na Tabela A1 do anexo.

Figura 2 – Modelo multicorpo do veículo com não linearidades nos componentes das suspensões.



Fonte: Adaptado de Chen (2020).



Através da utilização da 2ª Lei de Newton aplicado para cada massa do modelo proposto chega-se nas equações de movimento para cada grau de liberdade. A Eq. (8) vetorial traz os graus de liberdade do sistema.

$$\mathbf{X} = (x_p, x_c, \theta_c, x_b, \theta_b, x_1, x_e, \theta_e, x_t, \theta_t, x_4, x_5, x_6)^T \quad (8)$$

O primeiro grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do assento da cabine, Eq. (9):

$$m_p \ddot{x}_p = -k_p x_p + k_p x_c + k_p l_8 \theta_c - c_p \dot{x}_p + c_p \dot{x}_c + c_p l_8 \dot{\theta}_c \quad (9)$$

O segundo grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do centro de massa da cabine, a equação de movimento é dada por:

$$\begin{aligned} m_c \ddot{x}_c = & k_p x_p - k_p x_c - k_p l_8 \theta_c + c_p \dot{x}_p - c_p \dot{x}_c - c_p l_8 \dot{\theta}_c - k_f x_c + k_f x_b + k_f l_6 \theta_c \\ & - k_f l_5 \theta_b - k_f l_6 \theta_b - c_f \dot{x}_c + c_f \dot{x}_b + c_f l_6 \dot{\theta}_c - c_f l_5 \dot{\theta}_b - c_f l_6 \dot{\theta}_b - k_r x_c + k_r x_b \\ & - k_r l_7 \theta_c - k_r l_5 \theta_b + k_r l_7 \theta_b - F_{rci} \end{aligned} \quad (10)$$

O terceiro grau de liberdade corresponde a arfagem do centro de massa da cabine, expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J_c \ddot{\theta}_c = & k_f x_c l_6 - k_f x_b l_6 - k_f l_6^2 \theta_c + k_f l_5 l_6 \theta_b + k_f l_6^2 \theta_b + c_f \dot{x}_c l_6 - c_f \dot{x}_b l_6 - c_f l_6^2 \dot{\theta}_c \\ & + c_f l_5 l_6 \dot{\theta}_b + c_f l_6^2 \dot{\theta}_b + k_p x_p l_8 - k_p x_c l_8 - k_p l_8^2 \theta_c + c_p \dot{x}_p l_8 - c_p \dot{x}_c l_8 - c_p l_8^2 \dot{\theta}_c \\ & - k_r x_c l_7 + k_r x_b l_7 - k_r l_7^2 \theta_c - k_r l_5 l_7 \theta_b + k_r l_7^2 \theta_b - F_{rci} l_7 \end{aligned} \quad (11)$$

O quarto grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do chassi do cavalo mecânico, Eq. (12):

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_b = & k_f x_c - k_f x_b - k_f l_6 \theta_c + k_f l_5 \theta_b + k_f l_6 \theta_b + c_f \dot{x}_c - c_f \dot{x}_b - c_f l_6 \dot{\theta}_c + c_f l_5 \dot{\theta}_b \\ & + c_f l_6 \dot{\theta}_b + k_r x_c - k_r x_b + k_r l_7 \theta_c + k_r l_5 \theta_b - k_r l_7 \theta_b + k_s x_t - k_s x_b - k_s l_{10} \theta_t \\ & - k_s l_9 \theta_b + c_s \dot{x}_t - c_s \dot{x}_b - c_s l_{10} \dot{\theta}_t - c_s l_9 \dot{\theta}_b - k_1 x_b + k_1 x_1 + k_1 l_1 \theta_b - c_1 \dot{x}_b + c_1 \dot{x}_1 \\ & + c_1 l_1 \dot{\theta}_b - k_2 x_b + k_2 x_e - k_2 l_2 \theta_b + F_{rci} - F_{c2} - F_{c3} \end{aligned} \quad (12)$$

O quinto grau de liberdade corresponde a arfagem do chassi do cavalo mecânico, tendo como equação de movimento:

$$\begin{aligned} J_b \ddot{\theta}_b = & k_1 x_b l_1 - k_1 x_1 l_1 - k_1 l_1^2 \theta_b + c_1 \dot{x}_b l_1 - c_1 \dot{x}_1 l_1 - c_1 l_1^2 \dot{\theta}_b + k_s x_t l_9 - k_s x_b l_9 \\ & - k_s l_9 l_{10} \theta_t - k_s l_9^2 \theta_b + c_s \dot{x}_t l_9 - c_s \dot{x}_b l_9 - c_s l_9 l_{10} \dot{\theta}_t - c_s l_9^2 \dot{\theta}_b - k_f x_c l_5 - k_f x_c l_6 \\ & + k_f x_b l_5 + k_f x_b l_6 + k_f l_5 l_6 \theta_c + k_f l_6^2 \theta_c - k_f l_5^2 \theta_b - 2k_f l_5 l_6 \theta_b - k_f l_6^2 \theta_b \\ & - c_f \dot{x}_c l_5 - c_f \dot{x}_c l_6 + c_f \dot{x}_b l_5 + c_f \dot{x}_b l_6 + c_f l_5 l_6 \dot{\theta}_c + c_f l_6^2 \dot{\theta}_c - c_f l_5^2 \dot{\theta}_b - 2c_f l_5 l_6 \dot{\theta}_b \\ & - c_f l_6^2 \dot{\theta}_b - k_r x_c l_5 + k_r x_c l_7 + k_r x_b l_5 - k_r x_b l_7 - k_r l_5 l_7 \theta_c + k_r l_7^2 \theta_c - k_r l_5^2 \theta_b \\ & + 2k_r l_5 l_7 \theta_b - k_r l_7^2 \theta_b - F_{rci} l_5 + F_{rci} l_7 - k_2 x_b l_2 + k_2 x_e l_2 - k_2 l_2^2 \theta_b - F_{c2} l_2 \\ & + F_{c2} l_3 - F_{c3} l_2 - F_{c3} l_4 \end{aligned} \quad (13)$$

O sexto grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do primeiro eixo do cavalo mecânico, a seguir é expressa sua equação de movimento:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_1 x_b - k_1 x_1 - k_1 l_1 \theta_b + c_1 \dot{x}_b - c_1 \dot{x}_1 - c_1 l_1 \dot{\theta}_b - k_7 x_1 + k_7 q_1 \quad (14)$$

O sétimo grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do eixo da suspensão equivalente do cavalo mecânico, a equação de movimento é expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_e \ddot{x}_e = & k_2 x_b - k_2 x_e + k_2 l_2 \theta_b + F_{c2} + F_{c3} - k_8 x_e + k_8 q_2 + k_8 l_3 \theta_e - k_9 x_e + k_9 q_3 \\ & - k_9 l_4 \theta_e \end{aligned} \quad (15)$$

O oitavo grau de liberdade corresponde a arfagem do eixo da suspensão equivalente do cavalo mecânico, Eq. (16):

$$J_e \ddot{\theta}_e = k_8 x_e l_3 - k_8 q_2 l_3 - k_8 l_3^2 \theta_e + F_{c_3} l_4 - k_9 x_e l_4 + k_9 q_3 l_4 - k_9 l_4^2 \theta_e - F_{c_2} l_3 \quad (16)$$

O nono grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical da massa suspensa do semirreboque, tendo como equação de movimento:

$$\begin{aligned} m_t \ddot{x}_t = & -k_s x_t + k_s x_b + k_s l_{10} \dot{\theta}_t + k_s l_9 \dot{\theta}_b - c_s \dot{x}_t + c_s \dot{x}_b + c_s l_{10} \dot{\theta}_t + c_s l_9 \dot{\theta}_b - k_4 x_t \\ & + k_4 x_4 - k_4 l_{11} \dot{\theta}_t + k_4 l_{12} \dot{\theta}_t - c_4 \dot{x}_t + c_4 \dot{x}_4 - c_4 l_{11} \dot{\theta}_t + c_4 l_{12} \dot{\theta}_t - k_5 x_t + k_5 x_5 \\ & - k_5 l_{11} \dot{\theta}_t - c_5 \dot{x}_t + c_5 \dot{x}_5 - c_5 l_{11} \dot{\theta}_t - k_6 x_t + k_6 x_6 - k_6 l_{11} \dot{\theta}_t - k_6 l_{13} \dot{\theta}_t - c_6 \dot{x}_t \\ & + c_6 \dot{x}_6 - c_6 l_{11} \dot{\theta}_t - c_6 l_{13} \dot{\theta}_t \end{aligned} \quad (17)$$

O 10º grau de liberdade corresponde a arfagem da massa suspensa do semirreboque, a equação de movimento é dada por:

$$\begin{aligned} J_t \ddot{\theta}_t = & k_s x_t l_{10} - k_s x_b l_{10} - k_s l_{10}^2 \dot{\theta}_t - k_s l_9 l_{10} \dot{\theta}_b + c_s \dot{x}_t l_{10} - c_s \dot{x}_b l_{10} - c_s l_{10}^2 \dot{\theta}_t - c_s l_9 l_{10} \dot{\theta}_b \\ & - k_6 x_t l_{11} - k_6 x_6 l_{13} + k_6 x_6 l_{11} + k_6 x_6 l_{13} - k_6 l_{11}^2 \dot{\theta}_t - 2k_6 l_{11} l_{13} \dot{\theta}_t - k_6 l_{13}^2 \dot{\theta}_t - c_6 \dot{x}_t l_{11} \\ & - c_6 \dot{x}_t l_{13} + c_6 \dot{x}_6 l_{11} + c_6 \dot{x}_6 l_{13} - c_6 l_{11}^2 \dot{\theta}_t - 2c_6 l_{11} l_{13} \dot{\theta}_t - c_6 l_{13}^2 \dot{\theta}_t - k_4 x_t l_{11} + k_4 x_t l_{12} \\ & + k_4 x_4 l_{11} - k_4 x_4 l_{12} - k_4 l_{11}^2 \dot{\theta}_t + 2k_4 l_{11} l_{12} \dot{\theta}_t - k_4 l_{12}^2 \dot{\theta}_t - c_4 \dot{x}_t l_{11} + c_4 \dot{x}_t l_{12} + c_4 \dot{x}_4 l_{11} \\ & - c_4 \dot{x}_4 l_{12} - c_4 l_{11}^2 \dot{\theta}_t + 2c_4 l_{11} l_{12} \dot{\theta}_t - k_5 x_t l_{11} + k_5 x_5 l_{11} - k_5 l_{11}^2 \dot{\theta}_t - c_5 \dot{x}_t l_{11} + c_5 \dot{x}_5 l_{11} \\ & - c_5 l_{11}^2 \dot{\theta}_t \end{aligned} \quad (18)$$

O 11º grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do quarto eixo do modelo proposto, Eq. (19):

$$\begin{aligned} m_4 \ddot{x}_4 = & k_4 x_t - k_4 x_4 + k_4 l_{11} \dot{\theta}_t - k_4 l_{12} \dot{\theta}_t + c_4 \dot{x}_t - c_4 \dot{x}_4 + c_4 l_{11} \dot{\theta}_t - c_4 l_{12} \dot{\theta}_t - k_{10} x_4 \\ & + k_{10} q_4 \end{aligned} \quad (19)$$

O 12º grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do quinto eixo do modelo proposto, expressa da seguinte maneira:

$$m_5 \ddot{x}_5 = k_5 x_t - k_5 x_5 + k_5 l_{11} \dot{\theta}_t + c_5 \dot{x}_t - c_5 \dot{x}_5 + c_5 l_{11} \dot{\theta}_t - k_{11} x_5 + k_{11} q_5 \quad (20)$$

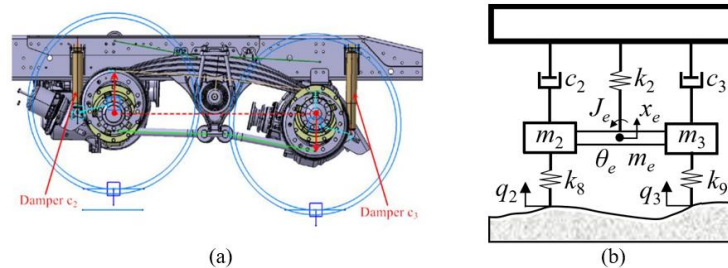
O 13º grau de liberdade corresponde ao deslocamento vertical do sexto eixo do modelo proposto, sua equação é definida a seguir:

$$m_6 \ddot{x}_6 = k_6 x_t - k_6 x_6 + k_6 l_{11} \dot{\theta}_t + k_6 l_{13} \dot{\theta}_t + c_6 \dot{x}_t - c_6 \dot{x}_6 + c_6 l_{11} \dot{\theta}_t + c_6 l_{13} \dot{\theta}_t - k_{12} x_6 + k_{12} q_6 \quad (21)$$

### 3.1.1. MODELO DE SUSPENSÃO EQUIVALENTE

A Figura 3 ilustra a suspensão traseira equivalente do cavalo mecânico utilizada no modelo de vibração proposto.

Figura 3 – (a) Sistema de suspensão utilizada em veículos pesados comerciais; (b) Modelo de suspensão equivalente.



Fonte: Adaptado de Chen et al. (2020).

Para o cálculo da força de amortecimento no chassi pelos amortecedores  $c_2$  e  $c_3$ , as seguintes expressões são utilizadas, propostas por Chen et al. (2020):

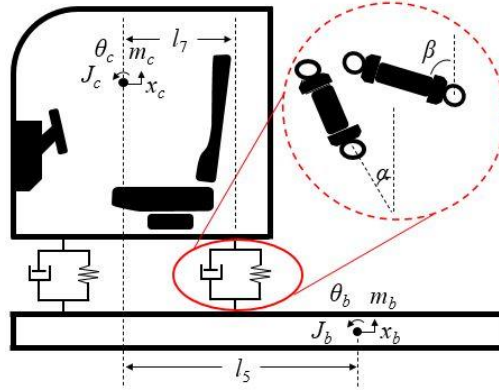
$$F_{c_2} = \lambda_{c_2} \left[ 1 + \eta_{c_2} \cdot \text{sgn} \left( \dot{x}_b - \dot{x}_e + l_2 \dot{\theta}_b + l_3 \dot{\theta}_e \right) \right] \left| \dot{x}_b - \dot{x}_e + l_2 \dot{\theta}_b + l_3 \dot{\theta}_e \right|^{n_{c_2}} \quad (22)$$

$$F_{c_3} = \lambda_{c_3} \left[ 1 + \eta_{c_3} \cdot \text{sgn} \left( \dot{x}_b - \dot{x}_e + l_2 \dot{\theta}_b - l_4 \dot{\theta}_e \right) \right] \left| \dot{x}_b - \dot{x}_e + l_2 \dot{\theta}_b - l_4 \dot{\theta}_e \right|^{n_{c_3}} \quad (23)$$

### 3.1.2. SUSPENSÃO TRASEIRA DA CABINE

Visando obter maior acurácia para as forças de amortecimento atuantes na suspensão traseira da cabine, a Eq. (24) é utilizada na determinação das mesmas, baseada no ângulo de instalação como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Disposição dos amortecedores da suspensão traseira da cabine.



$$F_{rci} = \lambda_{r_1} \left[ 1 + \eta_{r_1} \cdot \text{sgn} \left( \frac{\dot{x}_c - \dot{x}_b + l_7 \dot{\theta}_c - (l_5 - l_7) \dot{\theta}_b}{\cos \alpha} \right) \right] \left| \frac{\dot{x}_c - \dot{x}_b + l_7 \dot{\theta}_c - (l_5 - l_7) \dot{\theta}_b}{\cos \alpha} \right|^{n_{r_1}} \cos \alpha \quad (24)$$

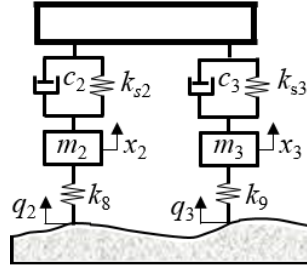
$$+ \lambda_{r_2} \left[ 1 + \eta_{r_2} \cdot \text{sgn} \left( \frac{\dot{x}_c - \dot{x}_b + l_7 \dot{\theta}_c - (l_5 - l_7) \dot{\theta}_b}{\cos \beta} \right) \right] \left| \frac{\dot{x}_c - \dot{x}_b + l_7 \dot{\theta}_c - (l_5 - l_7) \dot{\theta}_b}{\cos \beta} \right|^{n_{r_2}} \cos \beta$$

### 3.2. MODELO MULTICORPO DO VEÍCULO CONSIDERANDO TODAS AS FORÇAS DE AMORTECIMENTO LINEARES

Para modelagem do veículo de carga proposto nessa seção, a fundamentação se deu na forma em que todas as forças de amortecimento são proporcionais à velocidade do corpo vibratório, de modo que,  $F = c\dot{x}$ . Os ângulos de instalação da suspensão traseira da cabine,  $\alpha$  e  $\beta$ , assim como o fator de escala  $\lambda$ , coeficiente de assimetria  $\eta$  e o índice característico de amortecimento são desconsiderados.

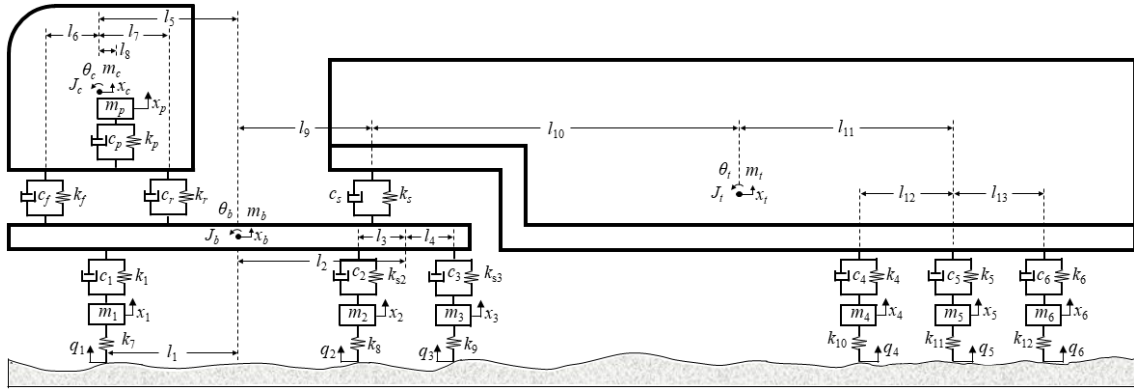
O modelo vibracional da suspensão traseira do cavalo mecânico apresenta diferenças em relação ao visto na seção anterior, nesse modelo não é considerada a inércia rotacional da suspensão e é apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Modelo de vibração da suspensão traseira do cavalo mecânico.



O esquema completo do modelo de corpo rígido para o veículo é ilustrado na Figura 6 indicando os graus de liberdade e as dimensões geométricas definidos. A Tabela A1 do anexo informa os dados inerciais, geométricos, elásticos e de amortecimento.

Figura 6 – Modelo vibratório do veículo com linearidade em todas as forças dos componentes da suspensão.



Assim como na metodologia de determinação das equações de movimento para o modelo da seção 3.1, aqui essas equações também são obtidas através da 2ª Lei de Newton aplicada a cada massa do modelo proposto. Antes da apresentação das equações de movimento, a Eq. (25) traz os graus de liberdade do sistema, sendo dez deles referindo-se aos deslocamentos verticais e três deles de arfagens.

$$\mathbf{X} = (x_p, x_c, \theta_c, x_b, \theta_b, x_1, x_2, x_3, x_t, \theta_t, x_4, x_5, x_6)^T \quad (25)$$

As equações para os graus de liberdade correspondentes ao deslocamento vertical do assento ( $x_p$ ), deslocamento vertical do primeiro eixo do cavalo mecânico ( $x_1$ ), deslocamento vertical da massa suspensa do semirreboque ( $x_t$ ), arfagem da massa suspensa do semirreboque ( $\theta_t$ ), deslocamento vertical do quarto eixo ( $x_4$ ), deslocamento vertical do quinto eixo ( $x_5$ ) e deslocamento vertical do sexto eixo ( $x_6$ ) permanecem as mesmas expressas nas Eq. (9), Eq. (14), Eq. (17), Eq. (18), Eq. (19), Eq. (20), Eq. (21), respectivamente.

A equação de movimento para o grau de liberdade correspondente ao deslocamento vertical da cabine é definida na Eq. (26).

$$\begin{aligned} m_c \ddot{x}_c = & c_p \dot{x}_p - c_p \dot{x}_c - c_p l_8 \dot{\theta}_c - c_f \dot{x}_c + c_f \dot{x}_b + c_f l_6 \dot{\theta}_c - c_f l_5 \dot{\theta}_b - c_f l_6 \dot{\theta}_b - c_r \dot{x}_c \\ & + c_r \dot{x}_b - c_r l_7 \dot{\theta}_c - c_r l_5 \dot{\theta}_b + c_r l_7 \dot{\theta}_b + k_p x_p - k_p x_c - k_p l_8 \theta_c - k_f x_c + k_f x_b \\ & + k_f l_6 \theta_c - k_f l_5 \theta_b - k_f l_6 \theta_b - k_r x_c + k_r x_b - k_r l_7 \theta_c - k_r l_5 \theta_b + k_r l_7 \theta_b \end{aligned} \quad (26)$$

Para o grau de liberdade correspondente a arfagem do centro de massa da cabine a equação de movimento é dada por:

$$\begin{aligned}
J_c \ddot{\theta}_c = & c_f \dot{x}_c l_6 - c_f \dot{x}_b l_6 - c_f l_6^2 \dot{\theta}_c + c_f l_5 l_6 \dot{\theta}_b + c_f l_6^2 \dot{\theta}_b + c_p \dot{x}_p l_8 - c_p \dot{x}_c l_8 - c_r \dot{x}_c l_7 \\
& + c_r \dot{x}_b l_7 - c_r l_7^2 \dot{\theta}_c - c_r l_5 l_7 \dot{\theta}_b + c_r l_7^2 \dot{\theta}_b - c_p l_8^2 \dot{\theta}_c + k_f x_c l_6 - k_f x_b l_6 - k_f l_6^2 \theta_c \\
& + k_f l_5 l_6 \theta_b + k_f l_6^2 \theta_b + k_p x_p l_8 - k_p x_c l_8 - k_p l_8^2 \theta_c - k_r x_c l_7 + k_r x_b l_7 - k_r l_7^2 \theta_c \\
& - k_r l_5 l_7 \theta_b + k_r l_7^2 \theta_b
\end{aligned} \tag{27}$$

O grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do chassi do cavalo mecânico, tem como equação de movimento:

$$\begin{aligned}
m_b \ddot{x}_b = & c_f \dot{x}_c - c_f \dot{x}_b - c_f l_6 \dot{\theta}_c + c_f l_5 \dot{\theta}_b + c_f l_6 \dot{\theta}_b + c_s \dot{x}_t - c_s \dot{x}_b - c_s l_{10} \dot{\theta}_t - c_s l_9 \dot{\theta}_b \\
& - c_1 \dot{x}_b + c_1 \dot{x}_1 + c_1 l_1 \dot{\theta}_b + c_r \dot{x}_c - c_r \dot{x}_b + c_r l_5 \dot{\theta}_b - c_r l_7 \dot{\theta}_b + c_r l_7 \dot{\theta}_c - c_2 \dot{x}_b + c_2 \dot{x}_2 \\
& - c_2 l_2 \dot{\theta}_b + c_2 l_3 \dot{\theta}_b - c_3 \dot{x}_b + c_3 \dot{x}_3 - c_3 l_2 \dot{\theta}_b - c_3 l_4 \dot{\theta}_b - k_{s2} x_b + k_{s2} x_2 - k_{s2} l_2 \theta_b \\
& + k_{s2} l_3 \theta_b - k_{s3} x_b + k_{s3} x_3 - k_{s3} l_2 \theta_b - k_{s3} l_4 \theta_b + k_f x_c - k_f x_b - k_f l_6 \theta_c + k_f l_5 \theta_b \\
& + k_f l_6 \theta_b + k_r x_c - k_r x_b + k_r l_5 \theta_b - k_r l_7 \theta_b + k_r l_7 \theta_c + k_s x_t - k_s x_b - k_s l_{10} \theta_t \\
& - k_s l_9 \theta_b - k_1 x_b + k_1 x_1 + k_1 l_1 \theta_b
\end{aligned} \tag{28}$$

A equação de movimento para o grau de liberdade que corresponde a arfagem do chassi do cavalo mecânico é dada pela Eq. (29).

$$\begin{aligned}
J_b \ddot{\theta}_b = & c_1 \dot{x}_b l_1 - c_1 \dot{x}_1 l_1 - c_1 l_1^2 \dot{\theta}_b + c_s \dot{x}_t l_9 - c_s \dot{x}_b l_9 - c_s l_9 l_{10} \dot{\theta}_t - c_s l_9^2 \dot{\theta}_b - c_f \dot{x}_c l_5 \\
& - c_f \dot{x}_c l_6 + c_f \dot{x}_b l_5 + c_f \dot{x}_b l_6 + c_f l_5 l_6 \dot{\theta}_c + c_f l_6^2 \dot{\theta}_c - c_f l_5^2 \dot{\theta}_b - 2c_f l_5 l_6 \dot{\theta}_b \\
& - c_f l_6^2 \dot{\theta}_b - c_r \dot{x}_c l_5 + c_r \dot{x}_c l_7 + c_r \dot{x}_b l_5 - c_r \dot{x}_b l_7 - c_r l_5 l_7 \dot{\theta}_c + c_r l_7^2 \dot{\theta}_c - c_r l_5^2 \dot{\theta}_b \\
& + 2c_r l_5 l_7 \dot{\theta}_b - c_r l_7^2 \dot{\theta}_b - c_2 l_2 \dot{x}_b + c_2 l_3 \dot{x}_b + c_2 l_2 \dot{x}_2 - c_2 l_3 \dot{x}_2 - c_2 l_2^2 \dot{\theta}_b + 2c_2 l_2 l_3 \dot{\theta}_b \\
& - c_2 l_3^2 \dot{\theta}_b - c_3 l_2 \dot{x}_b - c_3 l_4 \dot{x}_b + c_3 l_2 \dot{x}_3 + c_3 l_4 \dot{x}_3 - c_3 l_2^2 \dot{\theta}_b - 2c_3 l_2 l_4 \dot{\theta}_b - c_3 l_4^2 \dot{\theta}_b \\
& + k_1 x_b l_1 - k_1 x_1 l_1 - k_1 l_1^2 \theta_b + k_s x_t l_9 - k_s x_b l_9 - k_s l_9 l_{10} \theta_t - k_s l_9^2 \theta_b - k_f x_c l_5 \\
& - k_f x_c l_6 + k_f x_b l_5 + k_f x_b l_6 + k_f l_5 l_6 \theta_c + k_f l_6^2 \theta_c - k_f l_5^2 \theta_b - 2k_f l_5 l_6 \theta_b \\
& - k_f l_6^2 \theta_b - k_r x_c l_5 + k_r x_c l_7 + k_r x_b l_5 - k_r x_b l_7 - k_r l_5 l_7 \theta_c + k_r l_7^2 \theta_c - k_r l_5^2 \theta_b \\
& + 2k_r l_5 l_7 \theta_b - k_r l_7^2 \theta_b - k_{s2} l_2 x_b + k_{s2} l_3 x_b + k_{s2} l_2 x_2 - k_{s2} l_3 x_2 - k_{s2} l_2^2 \theta_b + 2k_{s2} l_2 l_3 \theta_b \\
& - k_{s2} l_3^2 \theta_b - k_{s3} l_2 x_b - k_{s3} l_4 x_b + k_{s3} l_2 x_3 + k_{s3} l_4 x_3 - k_{s3} l_2^2 \theta_b - 2k_{s3} l_2 l_4 \theta_b - k_{s3} l_4^2 \theta_b
\end{aligned} \tag{29}$$

Para o grau de liberdade do deslocamento vertical do segundo eixo do modelo proposto, o equacionamento do movimento fica:

$$\begin{aligned}
m_2 \ddot{x}_2 = & c_2 \dot{x}_b - c_2 \dot{x}_2 + c_2 l_2 \dot{\theta}_b - c_2 l_3 \dot{\theta}_b + k_{s2} x_b - k_{s2} x_2 + k_{s2} l_2 \theta_b - k_{s2} l_3 \theta_b - k_8 x_2 \\
& - k_8 q_2
\end{aligned} \tag{30}$$

O grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do terceiro eixo do modelo proposto, tem como equação de movimento:

$$\begin{aligned}
m_3 \ddot{x}_3 = & c_3 \dot{x}_b - c_3 \dot{x}_3 + c_3 l_2 \dot{\theta}_b + c_3 l_4 \dot{\theta}_b + k_{s3} x_b - k_{s3} x_3 + k_{s3} l_2 \theta_b + k_{s3} l_4 \theta_b - k_9 x_3 \\
& - k_9 q_3
\end{aligned} \tag{31}$$

### 3.3. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Após definidas todas as equações de movimento para os dois modelos propostos, vistos nas seções 3.1 e 3.2, é possível montar a equação geral de movimento, Eq. (32), com os termos de massa, amortecimento e rigidez escritos na forma matricial.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}} + \mathbf{C}\dot{\vec{x}} + \mathbf{K}\vec{x} = \vec{F} \quad (32)$$

Visto que os modelos vibratórios dispõem de 13 graus de liberdade cada, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez serão de dimensões 13×13. Os termos das matrizes de amortecimentos e rigidezes estão presentes na seção de anexos.

### 3.4. PERFIL DE IRREGULARIDADES DA PISTA

A modelagem numérica do perfil de irregularidades da pista é realizada mediante a utilização da norma ISO 8608/2016 que caracteriza diferentes classes de estradas de acordo com a rugosidade presente no asfalto. As classificações das estradas variam, em ordem crescente do alfabeto, da classe A até a classe H conforme a severidade da estrada. A Eq. (33) traz a definição da densidade espectral de potência (PSD) de deslocamento para reprodução da rugosidade.

$$G_d(n) = G_d(n_0) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{-w} \quad (33)$$

A ISO 8608 define que  $n_0$  é igual a 0,1 ciclos/m e  $w$  é igual a 2 assumindo velocidade constante. A Tabela 1 apresenta os valores de  $G_d(n_0)$  para a estimativa do grau de rugosidade da estrada. No presente trabalho escolheu-se a classe A.

Tabela 1 – Classificação da estrada segundo a ISO 8608.

Classe da Estrada	Grau de Irregularidade		
	$G_d(n_0) \times 10^{-6} \text{ m}^3$		
	Limite Inferior	Média Geométrica	Limite Superior
A	-	16	32
B	32	64	128
C	128	256	512
D	512	1024	2048
E	2048	4096	8192
F	8192	16384	32768
G	32768	65536	131072
H	131072	262144	-
$n_0 = 0,1 \text{ ciclos/m}$			

Fonte: Adaptado de ISO 8608/2016.

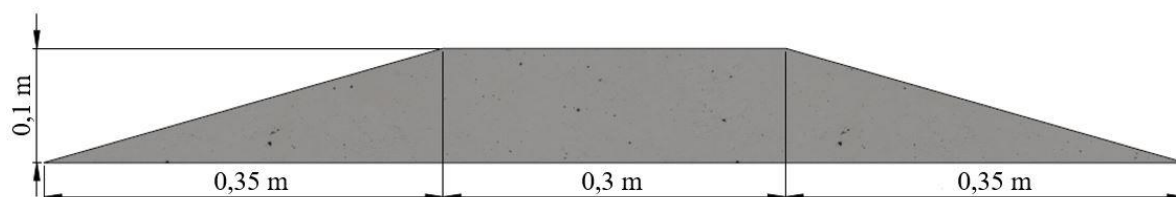
Para geração dos valores de deslocamento da estrada no tempo, utilizou-se o método proposto por Shinozuka e Jan (1972), correlacionando com as amplitudes das irregularidades da ISO 8608, expressa da seguinte maneira:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2G_d(f_k) \Delta f_k} \cos(2\pi f_k t + \psi_k) \quad (34)$$

onde  $\psi_k$  é o ângulo de fase aleatório no intervalo de 0 a  $2\pi$ ,  $N$  é o número de linhas espectrais,  $f_k$  são as frequências da densidade espectral e  $\Delta f_k$  é o intervalo da variação das frequências da densidade espectral.

Para simulação de uma manobra associada a dinâmica vertical que reproduzisse defeitos presentes na superfície do pavimento e, com objetivo de transmitir acelerações verticais ao veículo, foi utilizada uma lombada com dimensões apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Esboço da lombada.



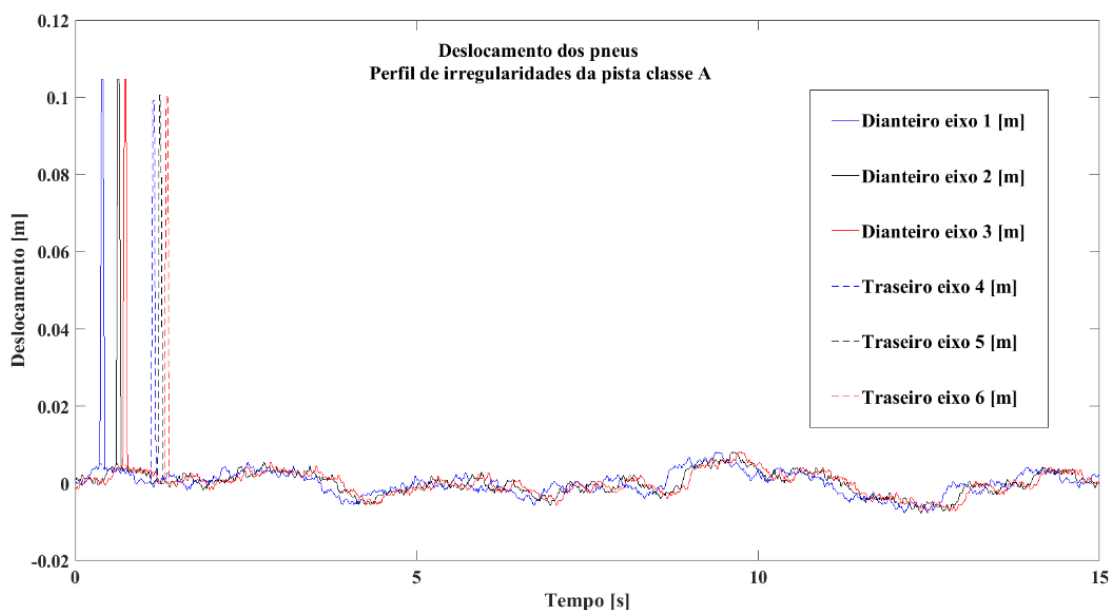
## 4. RESULTADOS

Neste capítulo do trabalho serão apresentados os resultados adquiridos com a utilização de rotinas computacionais realizadas em MATLAB, exibindo o perfil de pista gerado assim como a comparação dos valores obtidos para acelerações em pontos significativos do veículo para os dois modelos dinâmicos propostos para análise.

### 4.1. GERAÇÃO DO PERFIL DA PISTA E VERIFICAÇÃO DO MODELO MULTICORPO

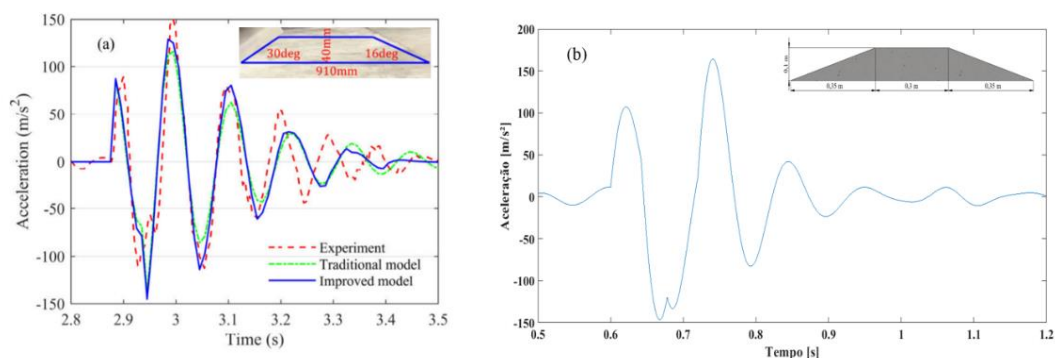
Os deslocamentos obtidos dos pneus mediante as irregularidades da pista para a classe A oriundos da Norma ISO 8608/2016 com o veículo trafegando a uma velocidade de 50 km/h são apresentados na Figura 8 em função do tempo. De acordo com a classificação das pistas, a classe A é a que apresenta níveis de rugosidades mais suaves.

Figura 8 – Deslocamento dos pneus para pista de classe A.



A Figura 9 ilustra uma comparação entre o resultado obtido por Chen et al. (2020) e o resultado obtido para o modelo multicorpo apresentado na seção 3.1 deste trabalho para as acelerações no eixo frontal do cavalo mecânico. O perfil de pista utilizado nesta simulação foi a classe C da Norma ISO 8608/2016 com os veículos trafegando a 50 km/h. Pode-se observar que os gráficos apresentaram resultados próximos qualitativamente, contudo diferenças são visíveis por conta de as lombadas apresentarem alturas distintas.

Figura 9 - Aceleração no eixo frontal do veículo. (a) Chen et al. (2020); (b) Modelo multicorpo da seção 3.1.



## 4.2. ACELERAÇÕES VERTICAIS NO ASSENTO DO MOTORISTA E NO CG DA CABINE

As Figuras 10 e 11 apresentam as acelerações no assento do motorista obtidas para o modelo que considera forças não lineares nos componentes das suspensões e as acelerações no assento do motorista para o modelo em que todas as forças de amortecimento são lineares, respectivamente. Na Tabela 2 tem-se os valores de acelerações máximas, mínimas e RMS, bem como as diferenças encontradas para um tempo de simulação de 15 segundos.

Figura 10 – Acelerações verticais no assento do motorista para o modelo com forças de amortecimento não lineares em componentes das suspensões.

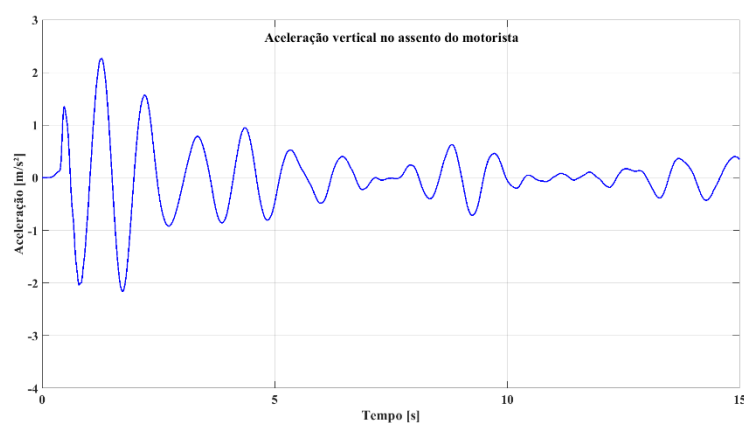




Figura 11 – Acelerações verticais no assento do motorista para o modelo com forças de amortecimento lineares em componentes das suspensões.

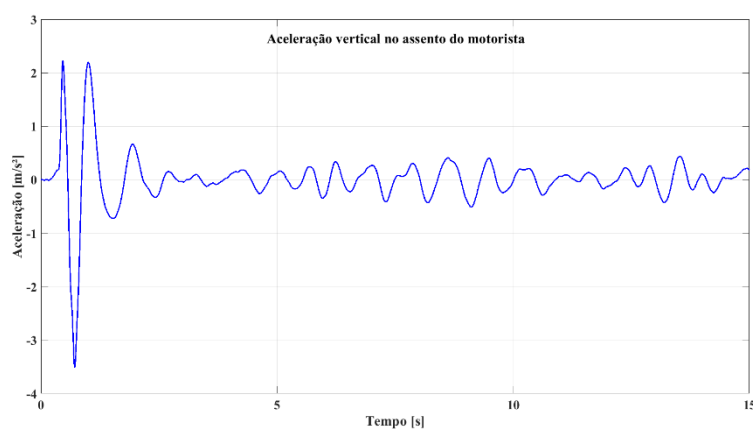


Tabela 2 – Valores de aceleração no assento do motorista.

Aceleração	Mínima [m/s <sup>2</sup> ]	Máxima [m/s <sup>2</sup> ]	RMS [m/s <sup>2</sup> ]
Modelo com forças não lineares	-2,16	2,22	0,61
Modelo com forças lineares	-3,51	2,26	0,48
Diferença [%]	62,50	1,80	-21,31

Os valores obtidos no centro de gravidade da cabine do veículo para as acelerações verticais são mostrados nas Figuras 12 e 13 para o modelo com força não lineares e para o modelo com forças lineares, respectivamente. A Tabela 3 evidencia os valores obtidos para acelerações máximas, mínimas e RMS, como também as diferenças auferidas no mesmo intervalo de 15 segundos.

Figura 12 – Acelerações verticais no CG da cabine para o modelo com forças de amortecimento não lineares em componentes das suspensões.

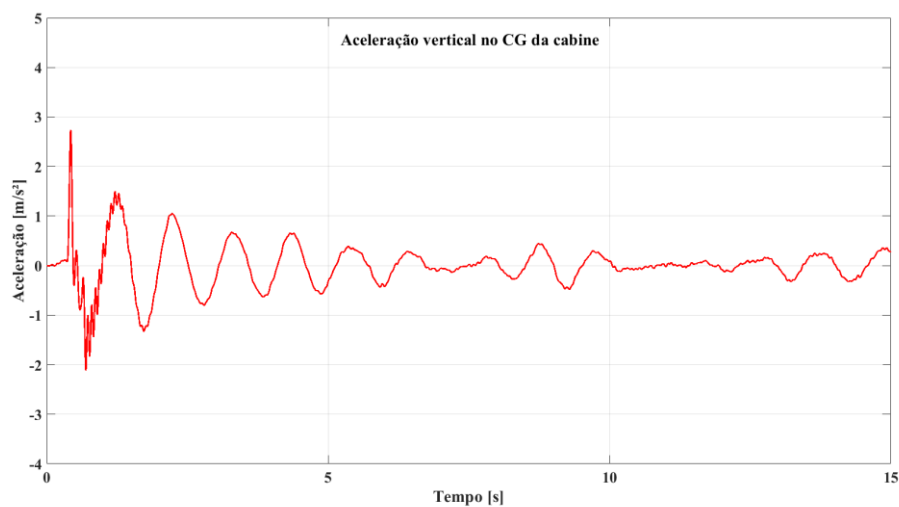


Figura 13 – Acelerações verticais no CG da cabine para o modelo com forças de amortecimento lineares em componentes das suspensões.

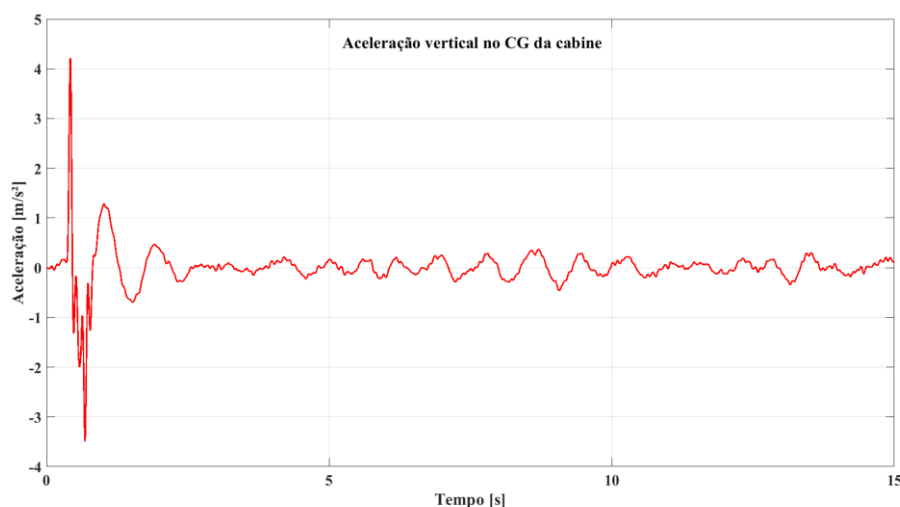


Tabela 3 – Valores de aceleração no CG da Cabine.

Aceleração	Mínima [m/s <sup>2</sup> ]	Máxima [m/s <sup>2</sup> ]	RMS [m/s <sup>2</sup> ]
Modelo com forças não lineares	-2,11	2,73	0,43
Modelo com forças lineares	-3,48	4,21	0,39
Diferença [%]	64,93	54,21	-9,30

Como se pode observar através dos gráficos e tabelas das respostas dinâmicas no assento do motorista e no centro de gravidade da cabine, os valores de conforto vibracional mensurados pelo valor de RMS no assento ou na cabine são maiores detectados pelo modelo com forças de amortecimento não lineares se comparado com o modelo linear. Destaca-se ainda que o modelo linear captura valores maiores se comparados com o modelo não linear. Por fim, como era de se esperar os maiores valores de acelerações verticais foram encontrados nos instantes em que o veículo é submetido a lombada.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho o objetivo principal foi avaliar numericamente a resposta dinâmica de um veículo de carga do tipo caminhão trator com semirreboque comparando duas modelagens vibracionais distintas. O primeiro modelo de veículo considerou-se forças de amortecimento não lineares em componentes da suspensão traseira da cabine e da suspensão traseira do cavalo mecânico e o segundo modelo de veículo todas as forças de amortecimento foram consideradas como lineares.

A construção do perfil de pista classe A da Norma ISO 8608 e os procedimentos numéricos através do método de Newmark de integração das equações de movimento, para os sistemas de 13 GDL propostos, se deram de forma exitosa e se alcançou os valores para as acelerações no assento do motorista e no centro de gravidade da cabine, sendo esses, locais fundamentais no que diz respeito a conforto vibracional. Constatou-se que o modelo de veículo com forças de amortecimento linear atinge valores superiores de acelerações, na passagem pela lombada, quando comparado com o modelo de veículo com forças não lineares. Observa-se que

o modelo não linear apresenta um valor RMS maior no intervalo da simulação, relativo a uma suavização do sinal de aceleração em um tempo maior.

Em trabalhos futuros, visando dar sequência ao estudo discutido, propõe-se analisar numericamente o comportamento na dinâmica vertical para um modelo de veículo completo, ou seja, considerando rigidezes e amortecimentos de todas as suspensões e pneus. Outra sugestão diz respeito a procedimentos experimentais de validação de resultados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACUÑA, M. A. **Comportamento dinâmico de um caminhão 6x6 com suspensão tipo bogie**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2020.
- BOARETTO, J. **Comportamento estrutural de um chassi de semirreboque submetido a manobras relacionadas às dinâmicas lateral e vertical**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- CHEN, K. *et al.* Ride Comfort Analysis and Multivariable Co-Optimization of the Commercial Vehicle Based on an Improved Nonlinear Model. **Institute of Electrical and Electronics Engineers**, v.8, p. 2732-2749, 2020. DOI: <https://10.1109/ACCESS.2019.2962522>. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8943399>. Acesso em: 06 de set. de 2021.
- CNT. **Pesquisa CNT de rodovias**, 2019. Disponível em: <https://pesquisarodovias.cnt.org.br/relatorio-gerencial>. Acesso em: 19 de set. de 2021.
- DREHMER, L. R. C. **Otimização robusta multiobjetivo por análise de intervalo não probabilística: uma aplicação em conforto e segurança veicular sob dinâmica lateral e vertical acoplada**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO-8608: Mechanical vibration – road surface profiles – reported of measured data**. Europe, 2016.
- LI, B. **3-D dynamic modeling and simulation of a multi-degree of freedom 3-axle rigid truck with trailing arm bogie suspension**. Master of Engineering Research. University of Wollongong, 2006.
- MIGUEL, L. F. F. **Introdução ao estudo de vibrações**. Notas de aula, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1ª ed., Porto Alegre, 2006.
- RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 5th Edition, Pearson Ed, pp. 553-560, 2011.
- SHINOZUKA, M.; JAN, C. M. **Digital simulation of random process and its applications**. Journal of sound and vibration, vol. 25, p. 111-128, 1972.

## APENDICE

Equações dos termos que formam as matrizes **K** e **C** para o modelo visto na seção 3.1.

$$k_{1,1} = k_p$$

$$k_{1,2} = k_{2,1} = -k_p$$

$$k_{1,3} = k_{3,1} = -k_p l_8$$

$$k_{2,2} = k_p + k_f + k_r$$

$$k_{2,3} = k_{3,2} = k_p l_8 - k_f l_6 + k_r l_7$$

$$k_{2,4} = k_{4,2} = -k_f - k_r$$

$$k_{2,5} = k_{5,2} = k_f l_5 + k_f l_6 + k_r l_5 - k_r l_7$$

$$k_{3,3} = k_p l_8^2 + k_f l_6^2 + k_r l_7^2$$

$$k_{3,4} = k_{4,3} = k_f l_6 - k_r l_7$$

$$k_{3,5} = k_{5,3} = k_r l_5 l_7 - k_r l_7^2 - k_f l_5 l_6 - k_f l_6^2$$

$$k_{4,4} = k_f + k_s + k_r + k_1 + k_2$$

$$k_{4,5} = k_{5,4} = -k_f l_5 - k_f l_6 - k_r l_5 + k_r l_7 + k_s l_9 - k_1 l_1 + k_2 l_2$$

$$k_{4,6} = k_{6,4} = -k_1$$

$$k_{4,7} = k_{7,4} = -k_2$$

$$k_{4,9} = k_{9,4} = -k_s$$

$$k_{4,10} = k_{10,4} = k_s l_{10}$$

$$k_{5,5} = k_1 l_1^2 + k_s l_9^2 + k_f l_5^2 + 2k_f l_5 l_6 + k_f l_6^2 + k_r l_5^2 - 2k_r l_5 l_7 + k_r l_7^2 + k_2 l_2^2$$

$$k_{5,6} = k_{6,5} = k_1 l_1$$

$$k_{5,7} = k_{7,5} = -k_2 l_2$$

$$k_{5,9} = k_{9,5} = -k_s l_9$$

$$k_{5,10} = k_{10,5} = k_s l_9 l_{10}$$

$$k_{6,6} = k_1 + k_7$$

$$k_{7,7} = k_2 + k_8 + k_9$$

$$k_{7,8} = k_{8,7} = -k_8 l_3 + k_9 l_4$$

$$k_{8,8} = k_8 l_3^2 + k_9 l_4^2$$

$$k_{9,9} = k_s + k_4 + k_5 + k_6$$

$$k_{9,10} = k_{10,9} = -k_s l_{10} + k_4 l_{11} - k_4 l_{12} + k_5 l_{11} + k_6 l_{11} + k_6 l_{13}$$

$$k_{9,11} = k_{11,9} = -k_4$$

$$k_{9,12} = k_{12,9} = -k_5$$

$$k_{9,13} = k_{13,9} = -k_6$$

$$k_{10,10} = k_s l_{10}^2 + k_6 l_{11}^2 + 2k_6 l_{11} l_{13} + k_6 l_{13}^2 + k_4 l_{11}^2 - 2k_4 l_{11} l_{12} + k_4 l_{12}^2 + k_5 l_{11}^2$$

$$k_{10,11} = k_{11,10} = -k_4 l_{11} + k_4 l_{12}$$

$$k_{10,12} = k_{12,10} = -k_5 l_{11}$$

$$k_{10,13} = k_{13,10} = -k_6 l_{11} - k_6 l_{13}$$

$$k_{11,11} = k_4 + k_{10}$$

$$k_{12,12} = k_5 + k_{11}$$

$$k_{13,13} = k_6 + k_{12}$$

$$c_{1,1} = c_p$$

$$c_{1,2} = c_{2,1} = -c_p$$

$$c_{1,3} = c_{3,1} = -c_p l_8$$

$$c_{2,2} = c_p + c_f$$

$$c_{2,3} = c_{3,2} = c_p l_8 - c_f l_6$$

$$c_{2,4} = c_{4,2} = -c_f$$

$$c_{2,5} = c_{5,2} = c_f l_5 + c_f l_6$$

$$c_{3,3} = c_p l_8^2 + c_f l_6^2$$

$$c_{3,4} = c_{4,3} = c_f l_6$$

$$c_{3,5} = c_{5,3} = -c_f l_5 l_6 - c_f l_6^2$$

$$c_{4,4} = c_f + c_s + c_1$$

$$c_{4,5} = c_{5,4} = -c_f l_5 - c_f l_6 + c_s l_9 - c_1 l_1$$

$$c_{4,6} = c_{6,4} = -c_1$$

$$c_{4,9} = c_{9,4} = -c_s$$

$$c_{4,10} = c_{10,4} = c_s l_{10}$$

$$c_{5,5} = c_1 l_1^2 + c_s l_9^2 + c_f l_5^2 + 2c_f l_5 l_6 + c_f l_6^2$$

$$c_{5,6} = c_{6,5} = c_1 l_1$$

$$c_{5,9} = c_{9,5} = -c_s l_9$$

$$c_{5,10} = c_{10,5} = c_s l_9 l_{10}$$

$$c_{6,6} = c_1$$

$$c_{9,9} = c_s + c_4 + c_5 + c_6$$

$$c_{9,10} = c_{10,9} = -c_s l_{10} + c_4 l_{11} - c_4 l_{12} + c_5 l_{11} + c_6 l_{11} + c_6 l_{13}$$

$$c_{9,11} = c_{11,9} = -c_4$$

$$c_{9,12} = c_{12,9} = -c_5$$

$$c_{9,13} = c_{13,9} = -c_6$$

$$c_{10,10} = c_s l_{10}^2 + c_6 l_{11}^2 + 2c_6 l_{11} l_{13} + c_6 l_{13}^2 + c_4 l_{11}^2 - 2c_4 l_{11} l_{12} + c_5 l_{11}^2$$

$$c_{10,11} = c_{11,10} = -c_4 l_{11} + c_4 l_{12}$$

$$c_{10,12} = c_{12,10} = -c_5 l_{11}$$

$$c_{10,13} = c_{13,10} = -c_6 l_{11} - c_6 l_{13}$$

$$c_{11,11} = c_4$$

$$c_{12,12} = c_5$$

$$c_{13,13} = c_6$$

Equações dos termos que formam as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{C}$  para o modelo visto na seção 3.2.

$$k_{1,1} = k_p$$

$$k_{1,2} = k_{2,1} = -k_p$$

$$k_{1,3} = k_{3,1} = -k_p l_8$$

$$k_{2,2} = k_p + k_f + k_r$$

$$k_{2,3} = k_{3,2} = k_p l_8 - k_f l_6 + k_r l_7$$

$$k_{2,4} = k_{4,2} = -k_f - k_r$$

$$k_{2,5} = k_{5,2} = k_f l_5 + k_f l_6 + k_r l_5 - k_r l_7$$

$$k_{3,3} = k_p l_8^2 + k_f l_6^2 + k_r l_7^2$$

$$k_{3,4} = k_{4,3} = k_f l_6 - k_r l_7$$

$$k_{3,5} = k_{5,3} = k_r l_5 l_7 - k_r l_7^2 - k_f l_5 l_6 - k_f l_6^2$$

$$k_{4,4} = k_f + k_s + k_r + k_1 + k_{s2} + k_{s3}$$

$$k_{4,5} = k_{5,4} = -k_f l_5 - k_f l_6 - k_r l_5 + k_r l_7 + k_s l_9 - k_1 l_1 + k_{s2} l_2 - k_{s2} l_3 + k_{s3} l_2 + k_{s3} l_4$$

$$k_{4,6} = k_{6,4} = -k_1$$

$$k_{4,7} = k_{7,4} = -k_{s2}$$

$$k_{4,8} = k_{8,4} = -k_{s,3}$$

$$k_{4,9} = k_{9,4} = -k_s$$

$$k_{4,10} = k_{10,4} = k_s l_{10}$$

$$k_{5,5} = k_1 l_1^2 + k_s l_9^2 + k_f l_5^2 + 2k_f l_3 l_6 + k_f l_6^2 + k_r l_5^2 - 2k_r l_3 l_7 + k_r l_7^2 + k_{s2} l_2^2 - 2k_{s2} l_2 l_3 + k_{s2} l_3^2 + k_{s3} l_2^2 + 2k_{s3} l_2 l_4 + k_{s3} l_4^2$$

$$k_{5,6} = k_{6,5} = k_1 l_1$$

$$k_{5,7} = k_{7,5} = -k_{s2} l_2 + k_{s2} l_3$$

$$k_{5,8} = k_{8,5} = -k_{s3} l_2 + k_{s3} l_4$$

$$k_{5,9} = k_{9,5} = -k_s l_9$$

$$k_{5,10} = k_{10,5} = k_s l_9 l_{10}$$

$$k_{6,6} = k_1 + k_7$$

$$k_{7,7} = k_2 + k_8$$

$$k_{8,8} = k_{s3} + k_9$$

$$k_{9,9} = k_s + k_4 + k_5 + k_6$$

$$k_{9,10} = k_{10,9} = -k_s l_{10} + k_4 l_{11} - k_4 l_{12} + k_5 l_{11} + k_6 l_{11} + k_6 l_{13}$$

$$k_{9,11} = k_{11,9} = -k_4$$

$$k_{9,12} = k_{12,9} = -k_5$$

$$k_{9,13} = k_{13,9} = -k_6$$

$$k_{10,10} = k_s l_{10}^2 + k_6 l_{11}^2 + 2k_6 l_{11} l_{13} + k_6 l_{13}^2 + k_4 l_{11}^2 - 2k_4 l_{11} l_{12} + k_4 l_{12}^2 + k_5 l_{11}^2$$

$$k_{10,11} = k_{11,10} = -k_4 l_{11} + k_4 l_{12}$$

$$k_{10,12} = k_{12,10} = -k_5 l_{11}$$

$$k_{10,13} = k_{13,10} = -k_6 l_{11} - k_6 l_{13}$$

$$k_{11,11} = k_4 + k_{10}$$

$$k_{12,12} = k_5 + k_{11}$$

$$k_{13,13} = k_6 + k_{12}$$

$$c_{1,1} = c_p$$

$$c_{1,2} = c_{2,1} = -c_p$$

$$c_{1,3} = c_{3,1} = -c_p l_8$$

$$c_{2,2} = c_p + c_f + c_r$$

$$c_{2,3} = c_{3,2} = c_p l_8 - c_f l_6 + c_r l_7$$

$$c_{2,4} = c_{4,2} = -c_f - c_r$$

$$c_{2,5} = c_{5,2} = c_f l_5 + c_f l_6 + c_r l_5 - c_r l_7$$

$$c_{3,3} = c_p l_8^2 + c_f l_6^2 + c_r l_7^2$$

$$c_{3,4} = c_{4,3} = c_f l_6 - c_r l_7$$

$$c_{3,5} = c_{5,3} = c_r l_5 l_7 - c_r l_7^2 - c_f l_5 l_6 - c_f l_6^2$$

$$c_{4,4} = c_f + c_s + c_r + c_1 + c_2 + c_3$$

$$c_{4,5} = c_{5,4} = -c_f l_5 - c_f l_6 - c_r l_5 + c_r l_7 + c_s l_9 - c_1 l_1 + c_2 l_2 - c_2 l_3 + c_3 l_2 + c_3 l_4$$

$$c_{4,6} = c_{6,4} = -c_1$$

$$c_{4,7} = c_{7,4} = -c_2$$

$$c_{4,8} = c_{8,4} = -c_3$$

$$c_{4,9} = c_{9,4} = -c_s$$

$$\begin{aligned}
c_{4,10} &= c_{10,4} = c_s l_{10} \\
c_{5,5} &= c_1 l_1^2 + c_s l_9^2 + c_f l_5^2 + 2c_f l_5 l_6 + c_f l_6^2 + c_r l_5^2 - 2c_r l_5 l_7 + c_r l_7^2 + c_2 l_2^2 - 2c_2 l_2 l_3 + c_2 l_3^2 + c_3 l_2^2 + 2c_3 l_2 l_4 + c_3 l_4^2 \\
c_{5,6} &= c_{6,5} = c_1 l_1 \\
c_{5,7} &= c_{7,5} = -c_2 l_2 + c_2 l_3 \\
c_{5,8} &= c_{8,5} = -c_3 l_2 + c_3 l_4 \\
c_{5,9} &= c_{9,5} = -c_s l_9 \\
c_{5,10} &= c_{10,5} = c_s l_9 l_{10} \\
c_{6,6} &= c_1 \\
c_{7,7} &= c_2 \\
c_{8,8} &= c_3 \\
c_{9,9} &= c_s + c_4 + c_5 + c_6 \\
c_{9,10} &= c_{10,9} = -c_s l_{10} + c_4 l_{11} - c_4 l_{12} + c_5 l_{11} + c_6 l_{11} + c_6 l_{13} \\
c_{9,11} &= c_{11,9} = -c_4 \\
c_{9,12} &= c_{12,9} = -c_5 \\
c_{9,13} &= c_{13,9} = -c_6 \\
c_{10,10} &= c_s l_{10}^2 + c_6 l_{11}^2 + 2c_6 l_{11} l_{13} + c_6 l_{13}^2 + c_4 l_{11}^2 - 2c_4 l_{11} l_{12} + c_4 l_{12}^2 + c_5 l_{11}^2 \\
c_{10,11} &= c_{11,10} = -c_4 l_{11} + c_4 l_{12} \\
c_{10,12} &= c_{12,10} = -c_5 l_{11} \\
c_{10,13} &= c_{13,10} = -c_6 l_{11} - c_6 l_{13} \\
c_{11,11} &= c_4 \\
c_{12,12} &= c_5 \\
c_{13,13} &= c_6
\end{aligned}$$

**ANEXO - Tabela A1 – Dados do veículo, proposto por Chen et al. (2020).**

$m_p$	100 kg	$k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}$	3600000 N/m
$m_c$	1150 kg	$c_p$	800 N.s/m
$m_b$	4700 kg	$c_f, c_r$	5000 N.s/m
$m_1$	600 kg	$c_s$	200000 N.s/m
$m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$	775 kg	$c_1$	15000 N.s/m
$m_t$	34000 kg	$c_2, c_3$	20000 N.s/m
$J_c$	800 kg.m <sup>2</sup>	$c_4, c_5, c_6$	70000 N.s/m
$J_b$	50000 kg.m <sup>2</sup>	$l_1$	1,0 m
$J_e$	615 kg.m <sup>2</sup>	$l_2$	2,975 m
$J_t$	450000 kg.m <sup>2</sup>	$l_3, l_4$	0,675 m
$k_p$	20000 N/m	$l_5$	1,152 m
$k_f$	24000 N/m	$l_6$	1,015 m
$k_r$	20000 N/m	$l_7$	1,073 m
$k_s$	2000000 N/m	$l_8$	0,165 m
$k_1$	540000 N/m	$l_9$	2,725 m
$k_2$	5000000 N/m	$l_{10}$	5,295 m
$k_4, k_5, k_6$	1200000 N/m	$l_{11}$	2,755 m
$k_7$	1800000 N/m	$l_{12}, l_{13}$	1,36 m