

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS**

ANGELO FRANCISCO SIRTOLI DELAMARE

**EFEITOS DE CONGESTIONAMENTO EM UM MODELO DA NOVA GEOGRAFIA
ECONÔMICA**

**Porto Alegre
2021**

ANGELO FRANCISCO SIRTOLI DELAMARE

**EFEITOS DE CONGESTIONAMENTO EM UM MODELO DA NOVA GEOGRAFIA
ECONÔMICA**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto

**Porto Alegre
2021**

CIP - Catalogação na Publicação

Delamare, Angelo Francisco Sirtoli
Efeitos de Congestionamento em um Modelo da Nova
Geografia Econômica / Angelo Francisco Sirtoli
Delamare. -- 2021.
87 f.
Orientador: João Plínio Juchem Neto.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade
de Ciências Econômicas, Curso de Ciências Econômicas,
Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. Nova Geografia Econômica. 2. Efeitos de
congestionamento. 3. Economias de escala. 4.
Concentração espacial. 5. Lei de Zipf. I. Juchem Neto,
João Plínio, orient. II. Título.

ANGELO FRANCISCO SIRTOLI DELAMARE

**EFEITOS DE CONGESTIONAMENTO EM UM MODELO DA NOVA GEOGRAFIA
ECONÔMICA**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Aprovado em: Porto Alegre, 23 de novembro de 2021.

BANCA EXAMIDORA:

Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto – Orientador
UFRGS

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler
UFRGS

Prof. Dr. Sabino da Silva Porto Júnior
UFRGS

AGRADECIMENTOS

Gostaria de registrar meus agradecimentos:

Aos meus pais, pelo carinho, paciência e apoio.

Ao meu orientador, professor Plínio, pela oportunidade de ser seu bolsista, por estar sempre disposto a ajudar e por todos os conselhos.

Aos excelentes professores que tive no curso de Ciências Econômicas da UFRGS, os quais foram cruciais no meu desenvolvimento acadêmico e pessoal. Em especial, agradeço ao professor Horn, pela oportunidade de ser seu monitor e por todos os ensinamentos.

Aos meus amigos de turma, pelas experiências e companheirismo. Em especial, agradeço ao Guilherme, ao Pedro e à Rílari, pela parceria e apoio na caminhada acadêmica.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal a incorporação de efeitos de congestionamento no modelo da Nova Geografia Econômica proposto por Pflüger (2004), o qual, diferente do modelo Centro-Periferia, apresenta soluções analíticas para as variáveis endógenas no equilíbrio de curto prazo e equilíbrios estáveis de aglomeração parcial no longo prazo. Como objetivo secundário, o trabalho busca expandir o modelo com efeitos de congestionamento para $R \geq 2$ regiões e incorporar quatro topologias espaciais: (i) o círculo equidistante; (ii) o segmento de reta; (iii) o retângulo de Manhattan; e (iv) o círculo de Manhattan. Os efeitos de congestionamento são introduzidos por meio da modelagem proposta por Brakman et al. (1996), a qual transforma os custos de produção no setor de competição monopolística em uma função do número de firmas locais. Os resultados de uma economia com duas regiões mostram que, com o aumento da liberdade comercial inter-regional, a alocação espacial: (i) realiza uma transição suave da dispersão para a aglomeração total no cenário sem efeitos de congestionamento; (ii) sai da dispersão para a aglomeração parcial e novamente para a dispersão no cenário representativo de custos de congestionamento; e (iii) sai suavemente da dispersão para a aglomeração parcial, mas abruptamente da aglomeração parcial para a aglomeração total no cenário representativo de benefícios de congestionamento. Utilizando como exemplo uma economia com vinte e cinco regiões, as simulações numéricas mostram que o nível de concentração espacial depende tanto dos parâmetros do modelo quanto do balanceamento entre a facilidade de ligação inter-regional e a magnitude do benefício geográfico da topologia adotada. Por fim, o modelo proposto origina estados estacionários compatíveis com a lei de Zipf.

Palavras-chave: Nova Geografia Econômica. Efeitos de congestionamento. Economias de escala. Concentração espacial. Lei de Zipf.

ABSTRACT

The primary objective of this final paper is to include congestion effects in the New Economic Geography model proposed by Pflüger (2004), which, unlike the Core-Periphery model, presents analytical solutions for the endogenous variables in the short-run equilibrium and stable partial agglomeration equilibria in the long-run. As a secondary objective, the work seeks to expand the model with congestion effects to $R \geq 2$ regions and incorporate four spatial topologies: (i) the racetrack economy; (ii) the line segment; (iii) the Manhattan rectangle; and (iv) the Manhattan circle. Congestion effects are introduced through the modeling proposed by Brakman et al. (1996), which turns production costs in the monopolistic competition sector into a function of the number of local firms. The results of an economy with two regions show that, as freeness of trade increases, the spatial allocation: (i) makes a smooth transition from dispersion to full agglomeration in the scenario without congestion effects; (ii) moves from dispersion to partial agglomeration and again to dispersion in the representative scenario of congestion costs; (iii) moves smoothly from dispersion to partial agglomeration, but abruptly from partial agglomeration to full agglomeration in the representative scenario of congestion benefits. Using an economy with twenty five regions as an example, numerical simulations show that the degree of spatial concentration depends both on the model's parameters and on the balance between the inter-regional link facility and the magnitude of the geographic benefit of the adopted topology. Finally, the proposed model has steady states compatible with Zipf's law.

Keywords: New Economic Geography. Congestion effects. Economies of scale. Spatial concentration. Zipf's law.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – <i>Rank-size distribution</i> dos Países Baixos	20
Figura 2 – Simulações da <i>rank-size distribution</i>	21
Figura 3 – Diferença de utilidade indireta	32
Figura 4 – Diagrama de bifurcação do cenário original de Pflüger (2004)	38
Figura 5 – Diagrama de bifurcação do cenário representativo de custos de congestionamento	40
Figura 6 – Diagrama de bifurcação do cenário representativo de benefícios de congestionamento	42
Figura 7 – Dinâmica espacial com $\lambda_0 = 0.6$	44
Figura 8 – Dinâmica espacial com $\lambda_0 = 0.4$	45
Figura 9 – Círculo equidistante com vinte e cinco regiões	47
Figura 10 – Segmento de reta com vinte e cinco regiões.....	47
Figura 11 – Retângulo de Manhattan com vinte e cinco regiões	48
Figura 12 – Círculo de Manhattan com vinte e cinco regiões	49
Figura 13 – Diagramas de concentração espacial de uma economia com vinte e cinco regiões.....	59
Figura 14 – Lei de Zipf	62

LISTA DE SÍMBOLOS

R	Número de regiões
D_{ir}	Distância entre as regiões i e r
\bar{D}	Facilidade de ligação inter-regional
$Dp(D)$	Magnitude do benefício geográfico
τ	Tecnologia de transporte no modelo com $R \geq 2$ regiões Tecnologia e custos de transporte no modelo com duas regiões
τ_{ir}	Custos de transporte de uma unidade de qualquer variedade do bem manufaturado entre as regiões i e r
φ	Liberdade comercial inter-regional da economia
φ_{ir}	Liberdade comercial entre as regiões i e r
$C_{A_r}^b$	Demanda pela <i>commodity</i> do agente representativo do grupo b da região r
$C_{X_r}^b$	Demanda agregada pelas manufaturas do agente representativo do grupo b da região r
$x_{ir}^{v_i}$	Quantidade demandada da variedade v_i proveniente de i pelo agente representativo de cada grupo da região r
σ	Elasticidade de substituição entre as variedades do bem manufaturado
N_r	Número de variedades do bem manufaturado e de firmas da região r
Y_r^b	Renda do agente representativo do grupo b da região r
α	Valor total gasto no bem manufaturado pelo agente representativo de cada grupo
P_r	Índice de preço das variedades do bem manufaturado na região r
$p_{ir}^{v_i}$	Preço FOB da variedade v_i proveniente de i na região r
$\tau_{ir} p_{ir}^{v_i}$	Preço CIF da variedade v_i proveniente de i na região r
V_r^b	Utilidade indireta do agente representativo do grupo b na região r
$\Delta V(\lambda)$	Diferença de utilidade indireta dos trabalhadores qualificados entre as regiões 1 e 2 no modelo com duas regiões
A_r	Quantidade produzida da <i>commodity</i> na região r
CA_r	Custos de produção da <i>commodity</i> na região r
$X_r^{v_r}$	Quantidade ofertada da variedade v_r da região r
$CX_r^{v_r}$	Custos de produção da variedade v_r da região r

c	Variação marginal na quantidade de mão de obra não qualificada usada na produção do bem manufaturado na ausência de efeitos de congestionamento
L	Número de trabalhadores não qualificados em cada região
L_r^a	Número de trabalhadores não qualificados da região r empregados no setor agrícola
L_r^m	Número de trabalhadores não qualificados da região r empregados no setor manufatureiro
l_r^v	Número de trabalhadores não qualificados empregados na firma v_r da região r
K_{tot}	Número total de trabalhadores qualificados na economia
K_r	Número de trabalhadores qualificados na região r
k_r^v	Número de trabalhadores qualificados empregados na firma v_r da região r
w_r	Salário dos trabalhadores não qualificados na região r
H_r	Remuneração dos trabalhadores qualificados na região r
η	Intensidade dos efeitos de congestionamento
π_r^v	Lucro da firma v_r da região r
λ_r	Fração de trabalhadores qualificados na região r no modelo com $R \geq 2$ regiões
λ	Fração de trabalhadores qualificados na região 1 no modelo com duas regiões
$(1 - \lambda)$	Fração de trabalhadores qualificados na região 2 no modelo com duas regiões
ρ	Razão do número de trabalhadores não qualificados em cada região pelo número total de trabalhadores qualificados
φ^s	Pontos de sustentação
φ^r	Pontos de ruptura
EIP	Efeito índice de preço
ETM	Efeito tamanho do mercado
EEC	Efeito extensão da competição
EC	Efeitos de congestionamento
ΔF	Diferença entre as forças de aglomeração e dispersão
ΔH	<i>Trade-off</i> entre o efeito tamanho do mercado e o efeito extensão da competição
IH	Índice de Herfindahl

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3	MODELO COM DUAS REGIÕES	23
3.1	CUSTOS DE TRANSPORTE	23
3.2	DEMANDA	24
3.3	OFERTA.....	26
3.4	EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO	28
3.5	EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO	30
3.5.1	Diferença de Utilidade Indireta.....	31
3.5.2	Forças Econômicas	33
3.5.3	Diagramas de Bifurcação	36
3.5.4	Dinâmica Espacial	43
4	MODELO COM R REGIÕES.....	46
4.1	ESTRUTURAS ESPACIAIS E CUSTOS DE TRANSPORTE	46
4.2	DEMANDA	51
4.3	OFERTA.....	52
4.4	EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO	54
4.5	EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO	56
4.5.1	Concentração Espacial da Economia.....	57
4.5.2	Lei de Zipf.....	61
5	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DO MODELO COM DUAS REGIÕES	68
A.1	DEMANDA	68

A.2	OFERTA.....	70
A.3	EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO	72
A.4	EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO	74
	APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES	78

1 INTRODUÇÃO

A concentração da atividade econômica é um fato empírico do sistema produtivo mundial. No nível setorial, exemplos nacionais e internacionais são numerosos, tais como: a indústria automobilística no ABC Paulista, a financeira na Cidade de Londres e a de alta tecnologia no Vale do Silício. No nível agregado, o relatório *OECD Regions and Cities at a Glance 2018* (ORGANIZAÇÃO PARA A COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO – OCDE, 2018) detalha a disparidade regional dentro de cada nação participante da OCDE. Considerando as 10% regiões superiores (inferiores) como aquelas que agrupam o decil da populacional que mora nas localidades com maior (menor) PIB *per capita*, o relatório evidencia que, dentro de cada membro da OCDE, as 10% regiões superiores possuem em média um PIB *per capita* 2,67 vezes maior que as 10% regiões inferiores. O valor exato da razão varia consideravelmente entre as nações, sendo 1,60 na Austrália e 3,81 no Reino Unido. A explicação para a maior concentração espacial da riqueza britânica é a vasta importância econômica da Cidade de Londres, a qual possui um PIB *per capita* 23,39 vezes superior ao da região mais pobre da união política.

De maneira semelhante à situação dos países ricos, o Sistema de Contas Regionais de 2018 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE (2020) evidencia a concentração da produção econômica brasileira. De acordo com as informações da publicação, o PIB nacional é geograficamente dividido em três grupos de participação: (i) São Paulo com 31,6%; (ii) Rio de Janeiro, Minas Gerais, Rio Grande do Sul e Paraná com 32,4%; e (iii) as outras 22 Unidades da Federação com 36,0%. Ademais, ao calcular a razão entre o PIB *per capita* de cada estado e o PIB *per capita* do Brasil, o relatório sinaliza que somente Unidades da Federação localizadas nas regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste detêm uma renda *per capita* superior à nacional.

Uma vez que as informações anteriores indicam que as atividades produtivas não são distribuídas uniformemente no espaço, o estudo das variáveis e forças que afetam a alocação espacial se torna imprescindível para a compreensão do sistema econômico. Nesse contexto, Krugman (1991) busca remediar o papel marginal do estudo da localização espacial na ciência econômica através do desenvolvimento de um modelo que forneça uma explicação microfundamentada para a concentração produtiva. O modelo, que posteriormente se popularizou como modelo Centro-Periferia, originou a Nova Geografia Econômica. Essa área de pesquisa tem como foco estudar a distribuição espacial da produção por meio de sistemas de equilíbrio geral nos quais há interação entre concorrência imperfeita, migração dos fatores de produção, retornos crescentes de escala ao nível das firmas e custos de transporte inter-regionais.

Conforme exposto por Fujita, Krugman e Venables (1999) e Ottaviano, Tabuchi e Thisse (2002), a estrutura teórica do modelo Centro-Periferia arquitetou as quatro

características metodológicas básicas da Nova Geografia Econômica. A primeira característica é a aplicação do modelo de competição monopolística de Dixit e Stiglitz (1977). Nesse sistema, os consumidores possuem preferências com elasticidade de substituição constante (CES) para as variedades do bem diferenciado e as firmas não afetam individualmente as condições gerais do mercado. A segunda característica é a substituição da modelagem de um setor de transporte – e a enorme complexidade matemática envolvida na tarefa – pela utilização de custos de transporte do tipo iceberg (SAMUELSON, 1952). Assim, o valor desembolsado com o transporte inter-regional decorre de uma parte do produto ser perdida no caminho entre as regiões. Como consequência, para desfrutar de uma unidade do bem diferenciado, o consumidor estrangeiro precisa comprar mais que um item. A terceira característica é a decisão locacional míope por parte do fator de produção com mobilidade espacial, ou seja, em grande parte da literatura, o processo migratório é moldado por diferenças de salário ou de utilidade correntes. Por fim, a quarta característica é o emprego de métodos numéricos e simulações computacionais para visualizar a alocação da atividade econômica no longo prazo. Isso ocorre porque a equação diferencial ordinária que simula a dinâmica migratória não possui solução analítica.

Como sinalizado por Delamare e Juchem Neto (2020), a maioria dos trabalhos teóricos do campo da Nova Geografia Econômica intenciona remediar limitações de Krugman (1991). A primeira e mais citada limitação é a ausência de solução analítica para a equação do salário nominal dos trabalhadores com mobilidade espacial. Portanto, no modelo Centro-Periferia, a aplicação de algoritmos numéricos se faz necessária não só para encontrar o equilíbrio de longo prazo mas também para solucionar o sistema de equações que descreve o equilíbrio de curto prazo. Tecnicamente, a diferença entre os dois equilíbrios é que o de curto prazo descreve o valor das variáveis econômicas dada a atual distribuição espacial da produção, ao passo que o de longo prazo apresenta a alocação espacial da economia após o término do processo migratório. A segunda limitação provém da bifurcação resultante da relação entre a distribuição da produção do setor de competição monopolística e os custos de transporte no longo prazo. Apesar do diagrama de bifurcação não ser exposto em Krugman (1991), Fujita, Krugman e Venables (1999) mostraram que o modelo Centro-Periferia possui uma bifurcação tridente subcrítica¹, isto é, a alocação da economia sai abrupta e instantaneamente da divisão uniforme no espaço para a aglomeração total em uma região conforme os custos de transporte diminuem abaixo de um valor crítico. Dessa forma, no longo prazo, o modelo não apresenta aglomerações parciais – regiões com participação positiva na produção, mas em grau de importância diferente. A terceira limitação é a ausência de efeitos de congestionamento. Esses são externalidades negativas (custos) ou positivas

¹ Ver Strogatz (2015) para uma definição formal dos tipos de bifurcações apresentadas por sistemas dinâmicos.

(benefícios) que limitam ou incentivam a continuação do processo de concentração espacial. O primeiro grupo inclui, por exemplo, a saturação das redes de comunicação, o aumento do tempo de deslocamento entre a moradia e o trabalho, a poluição e a violência; enquanto o segundo grupo inclui, por exemplo, o acesso aos serviços de saúde e educação de alta qualificação, a infraestrutura apropriada para a realização da produção e o incremento na probabilidade de atrair talentos.

De modo a contribuir com a literatura, o presente trabalho possui como objetivo principal a incorporação de efeitos de congestionamento em um modelo da Nova Geografia Econômica. Para isso, utiliza-se como arcabouço teórico básico o modelo proposto por Pflüger (2004), o qual, além de ser matematicamente mais simples que o modelo Centro-Periferia, apresenta solução analítica para a remuneração dos trabalhadores com mobilidade espacial e equilíbrios estáveis de longo prazo na forma de aglomerações parciais. Portanto, a principal contribuição deste trabalho está na construção de uma estrutura teórica que supere as três limitações presentes no modelo proposto por Krugman (1991).

Neste contexto, diferente de Pflüger e Südekum (2008), que inclui o consumo de moradia como *proxy* para os custos de congestionamento, este trabalho utiliza a modelagem matemática proposta por Brakman et al. (1996) – aperfeiçoada em Van Marrewijk (2006) e Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012) – para o modelo Centro-Periferia. Essa, por meio da transformação dos custos de produção das firmas do setor de competição monopolística em uma função do nível de concentração regional, introduz os efeitos de congestionamento como uma nova força econômica no modelo, a qual, dependendo do sinal do parâmetro que governa sua intensidade, representa custos ou benefícios. Como consequência, há duas vantagens teóricas: (i) simplicidade matemática, dado que não é necessário incluir um mercado de habitação; e (ii) possibilidade de averiguar tanto os cenários com predomínio de externalidades negativas quanto os com predomínio de externalidades positivas.

Como objetivo secundário, o presente trabalho busca expandir para mais que duas regiões e incluir diferentes estruturas espaciais no modelo de Pflüger (2004) com efeitos de congestionamento aqui proposto. As quatro topologias consideradas são: (i) o círculo equidistante²; (ii) o segmento de reta³; (iii) o retângulo de Manhattan; e (iv) o círculo de Manhattan. Com exceção da primeira – que é comumente utilizada na Nova Geografia Econômica –, as demais estruturas apresentam regiões estrategicamente localizadas, isto é, o espaço não é neutro. Assim, procura-se investigar o impacto da incorporação de vantagens intrínsecas às regiões sobre o nível de concentração espacial da economia no equilíbrio de longo prazo. Além disso, o trabalho projeta analisar se, assim como o modelo Centro-Periferia com custos de congestionamento

² Na literatura, o círculo equidistante também é conhecido como economia espacial de pista de corrida.

³ Na literatura, as expressões segmento de reta e economia espacial de Hotelling são sinônimos.

em uma estrutura de círculo equidistante (BRAKMAN et al., 1999), o modelo proposto é capaz de originar uma alocação espacial semelhante à lei de Zipf. Essa é uma regularidade estatística observada empiricamente que prevê que a maior localidade é k vezes mais populosa que a k -ésima maior. Como destacado por Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012), a lei de Zipf possui um aspecto fractal, já que ela surge em diferentes níveis de escala da organização territorial, tais como: o continental, o nacional, o subnacional, o municipal e o submunicipal.

Além desta introdução, o trabalho possui mais quatro capítulos e dois apêndices. O Capítulo 2 expõe uma curta revisão bibliográfica sobre o modelo Centro-Periferia, os trabalhos que buscam superar as limitações desse modelo, a lei de Zipf e a não neutralidade espacial na Nova Geografia Econômica. O Capítulo 3 apresenta o modelo de Pflüger (2004) com efeitos de congestionamento para duas regiões com foco na diferença de utilidade indireta entre as localidades, nas forças econômicas, nos equilíbrios de longo prazo em três cenários representativos e no impacto de fatores históricos no estado estacionário da economia. O Capítulo 4 apresenta as quatro estruturas espaciais e o modelo aqui proposto para $R \geq 2$ regiões. Utilizando como exemplo uma economia com vinte e cinco regiões, mostra-se o impacto das topologias no nível de concentração espacial e a existência de conjuntos de parâmetros que possuam estados estacionários compatíveis com a lei de Zipf. Por fim, o Capítulo 5 sumariza os principais resultados da monografia. No que tange aos apêndices, o Apêndice A exhibe os principais passos para a derivação matemática do modelo com duas regiões e o Apêndice B demonstra as seis proposições matemáticas do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O modelo Centro-Periferia (KRUGMAN, 1991) apresenta uma economia composta por duas regiões, dois setores econômicos e dois fatores de produção. O setor agrícola produz um bem homogêneo em um mercado de competição perfeita. O único fator de produção utilizado na atividade é a mão de obra não qualificada (agrícola), a qual está fixa em sua região de origem. Por sua vez, o setor manufatureiro, que está inserido em um mercado de competição monopolística, comercializa um bem diferenciado com a incidência de custos de transporte inter-regionais. Nesse ramo, o único fator de produção utilizado é a mão de obra qualificada (industrial), a qual, dada a sua mobilidade espacial, acaba migrando para a localidade que oferta maior salário real.

Os consumidores do modelo são os próprios trabalhadores. Esses possuem uma função de utilidade Cobb-Douglas, que é maximizada ao desfrutarem da quantidade ótima de cada um dos produtos e do maior número possível de variedades do bem diferenciado. Como cada firma industrial produz uma única variedade em virtude das economias de escala internas, o amor pela variedade dos agentes econômicos induz o consumo do produto de cada uma delas. Isso significa que caso haja produção nas duas localidades, os agentes de uma região também importam as variedades fabricadas na outra. Por sua vez, as firmas manufatureiras indiretamente maximizam seus lucros escolhendo a região que oferta as melhores condições econômicas. Na prática, a escolha acompanha a decisão locacional dos trabalhadores qualificados, uma vez que esses são imprescindíveis para a produção e se movem para a região na qual desfrutam de maior salário real. Em outras palavras, a dinâmica migratória do modelo é estabelecida pelas decisões dos trabalhadores industriais.

As simulações computacionais e a análise matemática do modelo revelam que a distribuição espacial da atividade manufatureira depende da interação de três forças econômicas – efeito extensão da competição, efeito tamanho do mercado e efeito índice de preço. A disputa do primeiro efeito, que é uma força de dispersão, contra o segundo e o terceiro efeitos, que são forças de aglomeração, é definida por três parâmetros microeconômicos: (i) os custos de transporte; (ii) a fração do salário dos trabalhadores despendida no consumo do bem manufaturado; e (iii) a elasticidade de substituição entre as variedades do bem manufaturado, a qual é o inverso do grau de diferenciação entre as variedades. Portanto, ao avaliar matematicamente os parâmetros, Krugman (1991) conclui que, dado o arcabouço teórico, a concentração da produção surge da interação de três forças econômicas em um cenário com baixos custos de transporte, alta participação do gasto total no bem manufaturado e baixa elasticidade de substituição entre as variedades.

De acordo com Neary (2001) e Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012), as

três forças econômicas introduzidas por Krugman (1991) detêm grande destaque na literatura da Nova Geografia Econômica, posto que condensam diferentes fenômenos econômicos induzidos pela migração dos fatores de produção. O efeito índice de preço representa a redução no custo de vida em função do aumento da participação regional na produção. Como o preço de aquisição das variedades locais é inferior ao das estrangeiras em função dos custos de transporte, a expansão da aglomeração local retrai o índice de preços dos bens manufaturados para os residentes. Isso implica um aumento no salário real ofertado aos trabalhadores qualificados e, conseqüentemente, incentiva a migração para a região. Portanto, o efeito índice de preço é uma força de aglomeração espacial.

O efeito extensão da competição representa o acirramento da disputa por consumidores locais devido à expansão da participação regional na produção. Como a existência dos custos de transporte inter-regionais torna a demanda dos residentes pelas variedades locais superior a demanda dos não residentes, a retração na quantidade individual consumida de cada variedade pelos agentes do primeiro grupo induz, tudo mais constante, uma queda no lucro das firmas locais. Essa retração, por sua vez, leva a uma redução no salário ofertado aos trabalhadores industriais, o que encoraja a migração para a outra região. Logo, o efeito extensão da competição é uma força de dispersão espacial.

O efeito tamanho do mercado representa a expansão do mercado consumidor local em razão do acréscimo da participação regional na produção. Na medida que cada firma produz uma variedade e utiliza como único fator de produção os trabalhadores qualificados, a ampliação da quantidade de variedade locais é acompanhada por um incremento no número de residentes. Ao fortalecer a demanda agregada, o crescimento populacional provoca, tudo mais constante, um aumento no lucro das firmas locais. Esse, por seu lado, gera uma ampliação na remuneração ofertada aos trabalhadores industriais e, conseqüentemente, estimula a migração para a região. Dessarte, o efeito tamanho do mercado é uma força de aglomeração espacial.

Como aprofundado na Introdução, o modelo Centro-Periferia não é isento de limitações. Nesse contexto, o trabalho de Forslid e Ottaviano (2003) supera o primeiro gargalo ao realizar uma pequena alteração nos fatores de produção da economia. A mão de obra não qualificada passa a possuir mobilidade intersetorial, sendo usada como único fator de produção no setor agrícola e como fator variável no setor manufatureiro, enquanto a mão de obra qualificada continua com a sua mobilidade espacial, mas agora utilizada apenas como fator de produção fixo no setor manufatureiro. Como a concorrência perfeita implica que o preço iguala o custo marginal, ao fixarem o preço do bem agrícola como o numerário da economia, os autores conseguem determinar o salário dos trabalhadores agrícolas como unitário. Dado que a mão de obra não qualificada pode se mover entre os ramos econômicos, caso ocorresse uma diferença

setorial na remuneração, haveria uma migração até o desaparecimento de uma das atividades. Assim, o salário dos trabalhadores não qualificados do setor manufatureiro também é unitário. O conhecimento prévio dessa informação permite encontrar uma solução analítica para a remuneração dos trabalhadores qualificados por meio da maximização do lucro das firmas. Apesar de superar a primeira limitação, o modelo de Forslid e Ottaviano (2003) não introduz nenhuma forma de congestionamento e a alocação espacial de longo prazo é idêntica à distribuição do modelo Centro-Periferia, ou seja, não ostenta aglomerações parciais.

Ottaviano, Tabuchi e Thisse (2002) alcançam soluções analíticas para as variáveis endógenas no curto prazo mediante a utilização de um arcabouço conceitual distinto do adotado por Krugman (1991). A grande mudança é a substituição das preferências do tipo CES por uma função de utilidade quadrática para as variedades do bem manufaturado. Ademais, a inserção de custos urbanos, via escassez de terrenos para moradia e variação do custo de deslocamento, origina uma curva de sino como alocação espacial de longo prazo. Logo, ao passo que os custos de transporte diminuem, a atividade manufatureira sai da dispersão espacial para a aglomeração e novamente para a dispersão. Semelhante ao modelo Centro-Periferia, as transições dispersão/aglomeração e aglomeração/dispersão são abruptas e instantâneas. Portanto, o modelo de Ottaviano, Tabuchi e Thisse (2002) também não manifesta equilíbrios de longo prazo na forma de aglomerações parciais.

Estudos empíricos mostram que a distribuição espacial histórica da produção econômica de várias nações é semelhante à encontrada teoricamente por Ottaviano, Tabuchi e Thisse (2002). Computando o coeficiente de localização de vinte indústrias norte-americanas entre 1860 e 1987, Kim (1995) descobre que o setor manufatureiro norte-americano segue uma distribuição espacial na configuração de curva de sino. Assim, inicialmente, a integração do território induziu a aglomeração espacial, mas, a partir de certo ponto, a continuação do processo levou à re-dispersão espacial da atividade secundária. Utilizando dados fiscais – participação de cada região no montante de imposto industrial arrecadado – e os informes do valor adicionado bruto entre 1856 e 1995, Paluzie, Pons e Tirado (2004) confirmam que a alocação espacial da produção industrial espanhola também tem uma forma de curva de sino. Analogamente, ao investigarem as informações de valor adicionado e emprego dos departamentos franceses nos anos de 1860, 1896, 1930, 1982 e 2000, Combes et al. (2011) atestam que a economia francesa possui uma configuração espacial de curva de sino para os setores secundário e terciário.

Alicerçado na proposta de Forslid e Ottaviano (2003) – trabalho não qualificado com mobilidade intersetorial e o trabalho qualificado com mobilidade espacial –, Pflüger (2004) mantém a estrutura de preferências CES para as variedades do bem manufaturado, mas muda a utilidade Cobb-Douglas do modelo Centro-Periferia por

uma função quase-linear na forma logarítmica. Eliminando o efeito renda da procura das variedades manufatureiras, a nova modificação permite encontrar uma solução analítica para a remuneração da mão de obra qualificada mais simples que a obtida por Forslid e Ottaviano (2003). Além disso, os equilíbrios de longo prazo são expressos por uma bifurcação tridente supercrítica, ou seja, a economia sai da dispersão para a aglomeração parcial e posteriormente para a aglomeração total com a diminuição dos custos de transporte. Portanto, diferente dos trabalhos anteriores, o modelo de Pflüger (2004) apresenta uma transição suave entre a dispersão uniforme e a concentração total.

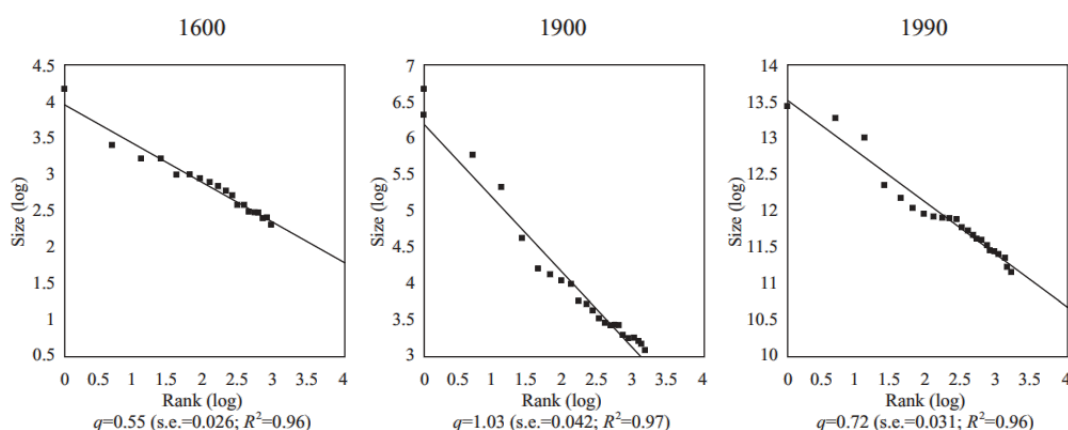
Pflüger e Südekum (2008) expandem o modelo de Pflüger (2004) por meio da inclusão do consumo habitacional como *proxy* para os custos de congestionamento. No novo sistema econômico, o incremento da participação de determinada localidade na produção eleva os seus custos de moradia, o que, por sua vez, incentiva a migração dos trabalhadores qualificados para a outra região. Consequentemente, a relação entre a distribuição espacial da produção industrial no longo prazo e os custos de transporte é no formato de uma curva de sino. Diferente do originado em Ottaviano, Tabuchi e Thisse (2002), as transições dispersão/aglomeração e aglomeração/dispersão são suaves. Portanto, com a retração dos custos de transporte, a configuração espacial é: dispersão, aglomeração parcial, aglomeração total, aglomeração parcial e dispersão. Auxiliados pelo referencial matemático, os autores mostram que a motivação para a dispersão não é a mesma nas situações com baixos e altos custos de transporte. Na primeira situação, dada a maior integração inter-regional, os trabalhadores qualificados se distribuem uniformemente em função do incremento do custo de moradia concomitante ao aparecimento da concentração espacial. Na segunda situação, caso surgisse um polo produtivo, haveria uma enorme dificuldade de atender os consumidores da região periférica e, conseqüentemente, a disputa pelos residentes do centro seria maior. Diante disso, as firmas e os trabalhadores qualificados escolhem a dispersão espacial para aproveitarem ao máximo a demanda potencial de todos os agentes econômicos.

Em vez de incluir a questão habitacional como nova força de dispersão, Brakman et al. (1996) modelam os custos de congestionamento como uma deseconomia de escala externa que depende do tamanho da aglomeração regional. Nesse contexto, mantendo intacta as demais características do modelo Centro-Periferia, os autores transformam os custos de produção das firmas manufatureiras em uma função crescente do número de firmas locais. O resultado é que a alocação espacial para uma economia com duas regiões passa a ser na forma de uma curva de sino no longo prazo. Ademais, ao estender o modelo para doze regiões em uma estrutura de círculo equidistante, os autores concluem que: (i) o cenário sem custos de congestionamento – modelo de Krugman (1991) com mais de dois territórios – resulta na aglomeração em poucas localidades ou na distribuição idêntica da produção entre todas, ao passo que

os cenários com custos de congestionamento originam regiões com diferentes participações produtivas; (ii) análogo ao que ocorre na economia com duas regiões, quanto maior a intensidade da deseconomia de escala externa, maior o grau de uniformidade na alocação entre as doze regiões. Não obstante a modelagem de congestionamento pioneira na literatura e a ampliação do sistema econômico para um número genérico de localidades, há continuidade do emprego de métodos numéricos para encontrar o equilíbrio de curto prazo. Vale destacar que os trabalhos de Van Marrewijk (2006) e Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012) tornaram a modelagem da economia de escala externa matematicamente mais consistente, mas também não conseguiram obter soluções analíticas para as variáveis do setor de competição monopolística.

Brakman et al. (1999) demonstram que a inclusão de custos de congestionamento no modelo Centro-Periferia (BRAKMAN et al., 1996) suscita uma explicação microeconômica para o aparecimento de leis de potência na *rank-size distribution*. Conforme representado para as principais cidades dos Países Baixos em três diferentes momentos na Figura 1, essas leis são regularidades empíricas que externam uma relação linear inversa entre o logaritmo do tamanho da localidade e o logaritmo da posição da localidade na ordenação populacional decrescente. Matematicamente, elas são expressas por: $\ln(M_r) = \ln(\beta) - q \ln(C_r)$, onde M_r é o tamanho da cidade r ; β é uma constante; e C_r é a posição da cidade r na ordenação. Quando $q = 1$, situação especial conhecida como lei de Zipf, a maior cidade é k vezes mais populosa que a k -ésima maior. Se $q > 1$ ($0 < q < 1$), então a concentração populacional é superior (inferior) à prevista pela lei de Zipf.

Figura 1 – Rank-size distribution dos Países Baixos

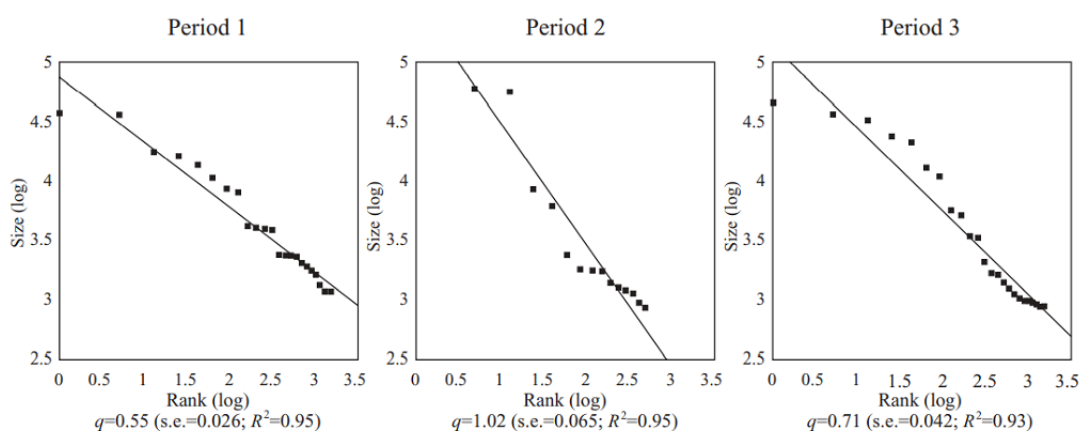


Fonte: Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2001).

A fim de mostrar que os quatro parâmetros microeconômicos do modelo – custos de transporte, fração de trabalhadores industriais em relação ao total, grandeza das

economias de escala internas do setor manufatureiro e intensidade dos custos de congestionamento – são capazes de explicar o surgimento de leis de potência na *rank-size distribution*, Brakman et al. (1999) investigam uma economia com vinte e quatro cidades¹ em uma estrutura espacial de círculo equidistante em três momentos históricos. O primeiro é o período de pré-industrialização no qual os custos de transporte são altos e a fração de trabalhadores industriais, as economias de escala internas e os custos de congestionamento são baixos. O segundo é o período de industrialização no qual há um incremento da fração dos trabalhadores industriais e das economias de escala internas, bem como uma retração dos custos de transporte. O terceiro é o período de pós-industrialização no qual há uma expansão considerável dos custos de congestionamento. Como apresentado na Figura 2, as regressões, que utilizam como dados o estado estacionário da simulação de cada momento histórico, mostram que pelo menos 93% da variação do tamanho das cidades na *rank-size distribution* é explicada pela lei de potência decorrente dos parâmetros do modelo. Além disso, no período industrial, o equilíbrio de longo prazo do modelo reproduz a lei de Zipf.

Figura 2 – Simulações da *rank-size distribution*



Fonte: Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2001).

Outra contribuição de Brakman et al. (1999) é a incorporação de uma estrutura espacial não neutra no modelo. A topologia escolhida é o círculo de Manhattan, na qual as regiões são posicionadas nas coordenadas dos números inteiros dentro de um losango. A distância entre quaisquer regiões i e j é dada pela norma $D_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$, onde x_r é a coordenada horizontal e y_r é a coordenada vertical da região r . Apesar da vantagem locacional da região central – menor distância média para as outras –, as simulações de uma economia com vinte e cinco regiões mostram que algumas

¹ Como a modelagem de regiões e cidades é idêntica na maioria dos trabalhos da Nova Geografia Econômica, os dois níveis geográficos são indiferenciáveis nesta monografia.

situações, isto é, configurações de parâmetros, possuem um estado estacionário espacialmente disperso ou com a região central não sendo o principal polo produtivo.

Entre outros temas, Stelder (2005) insere diferentes topologias espaciais no modelo de Krugman (1991). Inicialmente, as três estruturas consideradas são o círculo equidistante, o segmento de reta e a grade retangular. No caso do círculo equidistante, as regiões são posicionadas ao longo de uma circunferência. Como a primeira e última localidade são diretamente conectadas, a distância entre duas regiões quaisquer é o menor percurso na circunferência. A consequência prática é a neutralidade espacial da estrutura, pois a distância média de cada região para as outras é a mesma. No caso do segmento de reta, as localidades são posicionadas nos números naturais do eixo horizontal, de modo que a distância entre duas regiões quaisquer i e j é $D_{ij} = |i - j|$. Dado que a distância média é mínima na metade da linha, quanto mais próxima do centro geográfico, maior é a vantagem locacional da região. No caso da grade retangular, as regiões são dispostas equidistantemente no plano cartesiano e a distância inter-regional é dada pela norma euclidiana $D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, onde x_r é a coordenada horizontal e y_r é a coordenada vertical da região r . Novamente, a vantagem locacional varia positivamente com a proximidade do centro geográfico.

Além de mostrar por meio de simulações computacionais que as estruturas espaciais não neutras criam um viés para o nível e a localização da concentração econômica, Stelder (2005) conclui que elas possibilitam explicar o surgimento das cidades a partir de uma condição inicial de zero aglomeração, isto é, atividade industrial dispersa uniformemente entre as localidades. No caso do círculo equidistante, a distância média idêntica implica custos médios de transporte idênticos. Consequentemente, se as localidades detêm a mesma participação na produção, nenhuma ofertará maior salário real e o sistema econômico continuará no equilíbrio inicial de zero aglomeração. Nos casos do segmento de reta e da grade retangular, a economia sai do equilíbrio uniforme por causa da vantagem de custos médios de transporte das localidades centrais. Seguindo com a ideia de prever o tamanho e a localização das cidades a partir de uma condição inicial de zero aglomeração, Stelder (2005) modifica a grade para considerar uma terceira dimensão e barreiras físicas ao deslocamento. Considerando latitude, longitude e altitude, bem como buracos na grade que emulam os entraves terrestres e marítimos ao comércio, o autor aplica o modelo Centro-Periferia com espaço geográfico mais realista para prever o desenvolvimento urbano da Europa Ocidental.

3 MODELO COM DUAS REGIÕES

O sistema econômico consiste de dois setores produtivos – manufatureiro (X) e agrícola (A) –, dois fatores de produção – mão de obra não qualificada (L) e mão de obra qualificada (K) – e duas regiões simétricas, ou seja, que apresentam as mesmas estruturas de preferência e tecnologia. Além de estarem plenamente empregados no curto e no longo prazo, os trabalhadores são os únicos consumidores na economia. A diferença entre os dois grupos é que os não qualificados possuem mobilidade intersetorial, ao passo que os qualificados possuem mobilidade inter-regional. Visto que o primeiro grupo está fixo em sua localidade de origem, o modelo pressupõe que as duas regiões têm o mesmo número de trabalhadores não qualificados para impedir uma vantagem intrínseca de dotação.

Enquanto o setor agrícola está inserido em um mercado de competição perfeita com retornos constantes de escala, o setor manufatureiro trabalha em uma estrutura de competição monopolística com economias de escala internas e efeitos de congestionamento. Nesse contexto, o primeiro ramo emprega exclusivamente os trabalhadores não qualificados na produção de um bem homogêneo, ao passo que o segundo os não qualificados como fator variável e os qualificados como fator fixo na produção de um bem diferenciado. A *commodity* é considerada o numerário do sistema e o seu plantio transcorre nos dois territórios. Por seu turno, cada variedade do bem manufaturado é fabricada por uma única firma devido às economias de escala internas e é comercializada com a incidência de custos de transporte inter-regionais.

Posto que as regiões são simétricas, a derivação do modelo será realizada apenas para a região 1. Seguindo a mesma lógica, é possível encontrar expressões análogas para a região 2. O Apêndice A detalha os principais passos da derivação do modelo com duas regiões.

3.1 CUSTOS DE TRANSPORTE

Os custos de transporte sintetizam os vários entraves ao comércio inter-regional do bem manufaturado, tais como: o frete, as barreiras alfandegárias e as diferenças culturais (FUJITA; THISSE, 2002). De modo a evitar a complexidade matemática decorrente da incorporação de um setor de transporte, o modelo acompanha a tradição da Nova Geografia Econômica ao considerar custos de transporte do tipo iceberg. Assim, como proposto por Samuelson (1952), o valor gasto na importação surge de uma parte do bem manufaturado ser perdida no caminho entre as regiões.

Dada a tecnologia de transporte, $1 \leq \tau < \infty$, o número de unidades do bem manufaturado proveniente da região 1 que são enviadas para garantir que uma unidade chegue na região 2 é $\tau_{12} = \tau^{D_{12}}$, onde $D_{12} = D_{21}$ é a distância entre as regiões. Como

a extensão do percurso independe do sentido, o custo de transportar uma unidade da região 1 para a região 2 é igual ao de transportar de 2 para 1, ou seja, $\tau_{12} = \tau_{21}$. Ademais, normalizando a distância inter-regional para $D_{12} = 1$, tem-se que $\tau_{12} = \tau = \tau_{21}$. Portanto, a tecnologia de transporte e os custos de transporte são idênticos em uma economia com duas regiões.

A existência dos custos de transporte inter-regionais, τ , leva à necessidade de distinguir entre o preço FOB e o preço CIF das variedades importadas do bem diferenciado. O preço FOB (*Free on Board*) é o valor da variedade na porta da fábrica, ou seja, é o preço que maximiza o lucro da firma, enquanto o preço CIF (*Cost, Insurance and Freight*) é o valor da variedade na entrega, ou seja, é o preço somado às taxas inter-regionais necessárias para o consumidor desfrutar do item adquirido.

3.2 DEMANDA

A região 1 tem $L_1 = L$ trabalhadores não qualificados e K_1 trabalhadores qualificados, os quais possuem a seguinte função de utilidade quase-linear:

$$U_1^b = \alpha \ln(C_{X_1}^b) + C_{A_1}^b, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

onde $b \in \{L, K_1\}$ é o índice que diferencia entre os agentes representativos de cada grupo de consumidores/trabalhadores da região 1; $C_{A_1}^b$ é a demanda pela *commodity* do agente representativo de cada grupo; e $C_{X_1}^b$ é a demanda agregada pelas manufaturas. Tecnicamente, $C_{X_1}^b$ é uma função com elasticidade de substituição constante que agrega as quantidades demandadas de cada variedade do bem manufaturado:

$$C_{X_1}^b = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{11}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{21}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \sigma > 1, \quad (2)$$

onde N_1 (N_2) é o número de variedades fabricadas na região 1 (2); $x_{11}^{v_1}$ ($x_{21}^{v_2}$) é a quantidade da variedade v_1 (v_2) da região 1 (2) que é consumida pelo agente representativo de cada grupo da região 1; e σ é a elasticidade de substituição entre as variedades do bem diferenciado. As variedades são substitutas perfeitas se $\sigma \rightarrow \infty$ e imperfeitas se $1 < \sigma < \infty$. Quanto menor o valor de σ , maior o grau de diferenciação entre as variedades.

Dado que o bem agrícola é o numerário do sistema econômico, a restrição

orçamentária do agente representativo de cada grupo é:

$$P_1 C_{X_1}^b + C_{A_1}^b = Y_1^b, \quad P_1 = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (p_{11}^{v_1})^{1-\sigma} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (\tau p_{21}^{v_2})^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (3)$$

onde Y_1^b é a renda do agente representativo de cada grupo da região 1; P_1 é o índice de preço das variedades do bem manufaturado na região 1; $p_{11}^{v_1}$ ($p_{21}^{v_2}$) é o preço FOB da variedade v_1 (v_2) proveniente da região 1 (2) na região 1; e τ é o custo de transportar uma unidade de qualquer variedade entre as regiões.

Se $\tau = 1$, então não há entraves e as regiões comercializam livremente, isto é, sem custos de transporte, a produção manufatureira. Logo, há igualdade dos preços FOB e CIF tanto para os consumidores locais quanto para os estrangeiros. Se $1 < \tau < \infty$, então uma parte do produto é perdida no percurso inter-regional. Como resultado, para desfrutar de uma unidade, os consumidores da região 1 necessitam adquirir mais que um item da variedade v_2 , ou seja, eles pagam mais que o preço que maximiza o lucro. Quanto maior o valor de τ , maior a diferença entre o preço FOB, $p_{21}^{v_2}$, e o preço CIF, $\tau p_{21}^{v_2}$, enfrentados pelos consumidores estrangeiros.

Como detalhado na seção A.1 do Apêndice A, as demandas são obtidas solucionando o problema de maximização do consumidor representativo (1)-(3):

$$C_{X_1}^b = \alpha P_1^{-1}, \quad C_{A_1}^b = Y_1^b - \alpha, \quad (4)$$

$$x_{11}^{v_1} = \alpha (p_{11}^{v_1})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \quad \text{para } v_1 = 1, \dots, N_1, \quad (5)$$

$$x_{21}^{v_2} = \alpha (\tau p_{21}^{v_2})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \quad \text{para } v_2 = 1, \dots, N_2, \quad (6)$$

onde a equação (4) apresenta a função demanda pela *commodity* e a função demanda agregada pelo bem diferenciado, sendo que α é o valor total gasto em manufaturas; a equação (5), a função demanda individual de cada variedade da região 1; e a equação (6), a função demanda individual de cada variedade da região 2.

A solução do problema do consumidor evidencia que a demanda de cada variedade independe do nível de renda. Como a única diferença entre os grupos é a remuneração, conclui-se que os agentes da região 1 apresentam a mesma estrutura de demanda pelas variedades, isto é, todos consomem a mesma quantidade $x_{11}^{v_1}$ ou $x_{21}^{v_2}$ da variedade v_1 ou v_2 . Assim, o presente Capítulo considera daqui para a frente apenas um consumidor representativo ao tratar do setor manufatureiro.

A utilidade indireta do agente representativo de cada grupo da região 1 é encon-

trada incorporando a equação (4) na (2):

$$V_1^b = -\alpha \ln(P_1) + Y_1^b + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (7)$$

3.3 OFERTA

As funções de produção e de custo do bem agrícola na região 1 são, respectivamente:

$$A_1 = f(L_1^a) = L_1^a \quad \text{e} \quad CA_1 = g(A_1) = w_1^a L_1^a,$$

onde A_1 é a quantidade produzida da *commodity*; L_1^a é o número de trabalhadores não qualificados da região 1 empregados no setor agrícola; e w_1^a é o salário dos trabalhadores não qualificados agrícolas na região 1. Visto que o preço da *commodity* é unitário por ser o numerário da economia, a competição perfeita implica que o salário dos trabalhadores não qualificados agrícolas também é unitário, isto é, $w_1^a = 1$.

No setor manufatureiro, a condição de equilíbrio do mercado para uma variedade v_1 da região 1 é:

$$X_1^{v_1} = (L + K_1)x_{11}^{v_1} + (L + K_2)\tau x_{12}^{v_1}, \quad v_1 = 1, \dots, N_1, \quad (8)$$

onde $X_1^{v_1}$ é a quantidade ofertada da variedade v_1 ; $x_{11}^{v_1}$ ($x_{12}^{v_1}$) é a quantidade demandada da variedade v_1 pelo agente representativo da região 1 (2); τ é a demanda indireta decorrente de uma parte do produto ser perdida no percurso entre as regiões; L é o número de trabalhadores não qualificados em cada região; e K_1 (K_2) é o número de trabalhadores qualificados na região 1 (2).

Como as economias de escala internas do setor de competição monopolística implicam que cada firma produz uma variedade exclusiva, o número de variedades fabricadas na região 1, N_1 , equivale ao número de firmas na região 1. A modelagem matemática das economias de escala internas ocorre por meio de um componente variável de custos, $l_1^{v_1} = N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} c X_1^{v_1}$ trabalhadores não qualificados, e um componente fixo, $k_1^{v_1} = N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ trabalhadores qualificados. Dado o salário unitário dos trabalhadores agrícolas, a remuneração do fator variável da atividade manufatureira também é $w_1^m = 1$, pois, caso contrário, haveria um processo inter-setorial de migração dos trabalhadores não qualificados até a extinção de um dos ramos econômicos na região 1. Por seu turno, a remuneração dos trabalhadores qualificados é H_1 .

Posto as informações produtivas acima, a firma que produz a variedade v_1

enfrenta a seguinte função de custo:

$$cX_1^{v_1} = N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} (cX_1^{v_1} + H_1), \quad -1 < \eta < 1 \quad \text{e} \quad v_1 = 1, \dots, N_1. \quad (9)$$

O termo $cX_1^{v_1} + H_1$ reproduz a estrutura de custos de produção do modelo original de Pflüger (2004), no qual a variação marginal na quantidade de mão de obra não qualificada é c e somente uma unidade de mão de obra qualificada é usada na fabricação de cada variedade. Seguindo o aperfeiçoamento de Van Marrewijk (2006) e Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012) para modelagem de Brakman et al. (1996), o termo $N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ introduz os efeitos de congestionamento como uma nova força econômica na forma de uma economia ou deseconomia de escala externa. Assim, os efeitos de congestionamento transformam os custos de produção da variedade v_1 em uma função do número de firmas manufatureiras na região 1.

O parâmetro η representa a intensidade dos efeitos de congestionamento. Quando maior o seu módulo, maior o impacto da nova força econômica. A grande vantagem dessa modelagem é que através do sinal de η se consegue considerar tanto os cenários com predomínio de externalidades negativas quanto os com predomínio de externalidades positivas. Se $0 < \eta < 1$, então os custos de produção aumentam com o crescimento de N_1 e, conseqüentemente, os custos de congestionamento surgem como nova força de dispersão; se $-1 < \eta < 0$, então os custos de produção diminuem com o crescimento de N_1 e, conseqüentemente, os benefícios de congestionamento surgem como nova força de aglomeração; e se $\eta = 0$, então os custos de produção independem de N_1 , recuperando o modelo original de Pflüger (2004).

Substituindo (8) em (9) e multiplicando a parcela de (8) referente à demanda local, $(L + K_1)x_{11}^{v_1}$, pelo preço FOB na região 1, $p_{11}^{v_1}$, e a parcela referente à demanda estrangeira, $(L + K_2)\tau x_{12}^{v_1}$, pelo preço FOB na região 2, $p_{12}^{v_1}$, obtém-se a seguinte função de lucro da firma produtora da variedade v_1 :

$$\pi_1^{v_1} = (p_{11}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_1)x_{11}^{v_1} + (p_{12}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_2)\tau x_{12}^{v_1} - H_1 N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}, \quad v_1 = 1, \dots, N_1. \quad (10)$$

Visto que as empresas na competição monopolística não afetam individualmente as condições gerais do mercado, a firma v_1 desconsidera o seu impacto sobre os índices de preço das regiões 1 e 2 ao determinar seu preço de equilíbrio local e estrangeiro. Substituindo (5) e a análoga de (6) para a região 2 em (10), a maximização do lucro – detalhada na seção A.2 do Apêndice A – demonstra que o preço FOB independe da origem do comprador:

$$p_{11}^{v_1} = p_{12}^{v_1} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} = p_{12} = p_{11}, \quad v_1 = 1, \dots, N_1. \quad (11)$$

Dado que os parâmetros que determinam o preço FOB são comuns a todas as empresas da região 1, a equação (11) também evidencia que o preço que maximiza o lucro de cada variedade da região 1 é idêntico. Desse modo, incorporando $p_{11}^{V_1} = p_{11}, \forall V_1$, em (5) e $p_{12}^{V_1} = p_{12}, \forall V_1$, na função análoga de (6) para a região 2, descobre-se que o agente representativo de cada região consome quantidades idênticas de cada variedade fabricada na região 1. Portanto, pode-se utilizar $x_{11}^{V_1} = x_{11}$, $x_{12}^{V_1} = x_{12}$ e $X_1^{V_1} = X_1, \forall V_1$.

A incorporação das equações (8) e (11) na equação (10) em conjunto com a condição de lucro zero origina a seguinte relação entre a quantidade produzida de cada variedade, X_1 , e os seus custos fixos, H_1 :

$$X_1 = \left(\frac{\sigma - 1}{c} \right) H_1, \quad \forall V_1. \quad (12)$$

3.4 EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO

No presente trabalho, a diferença entre os períodos temporais é em relação à possibilidade da mão de obra qualificada se mover entre as regiões. O curto prazo é o momento no qual a mão de obra qualificada não tem a oportunidade de migrar, enquanto o longo prazo é quando a mão de obra qualificada apresenta mobilidade inter-regional. Na teoria, a condição de lucro zero é sempre válida, pois o setor manufatureiro não apresenta nenhuma barreira à entrada e saída das empresas, isto é, o ingresso ou o egresso das firmas manufatureiras até a estabilização do lucro transcorre integralmente durante a vigência do curto prazo. Na prática, devido ao pleno emprego dos fatores produtivos, a quantidade de firmas no equilíbrio é aquela que assegura a utilização de todos os trabalhadores qualificados da região. Como a mão de obra não qualificada possui um salário fixo unitário, a condição de lucro zero será assegurada ajustando a remuneração ofertada à mão de obra qualificada.

Para encontrar o valor das variáveis endógenas no equilíbrio de curto prazo, define-se:

$$\lambda = \frac{K_1}{K_{tot}}, \quad (1 - \lambda) = \frac{K_2}{K_{tot}} \quad e \quad \rho = \frac{L}{K_{tot}},$$

onde $K_{tot} = K_1 + K_2$ é a quantidade total de mão de obra qualificada no sistema econômico; λ ($1 - \lambda$) é a fração da mão de obra qualificada na região 1 (2); e ρ é a razão da quantidade de mão de obra não qualificada em cada região pela quantidade total de mão de obra qualificada.

Uma vez que K_1 é fixo no curto prazo e que cada firma emprega $k_1 = N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ trabalhadores qualificados, o pleno emprego dos fatores produtivos implica que o

número de firmas na região 1 no equilíbrio de curto prazo é:

$$K_1 = N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} N_1 = N_1^{\frac{1}{1-\eta}} \Leftrightarrow N_1 = K_1^{1-\eta} = (\lambda K_{tot})^{1-\eta}. \quad (13)$$

Através da incorporação da equação (13) na (11), encontra-se uma nova formulação para o preço FOB de qualquer variedade da região 1 com base nos parâmetros do modelo:

$$p_{11} = \frac{\sigma C}{\sigma - 1} (\lambda K_{tot})^\eta = p_{12}, \quad \forall v_1. \quad (14)$$

Como detalhado na seção A.3 do Apêndice A, ao utilizar (13), (14) e as suas análogas para a região 2 em (3), obtém-se a seguinte formulação para o índice de preço do bem diferenciado na região 1:

$$P_1 = \frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (15)$$

onde $0 \leq \varphi = \tau^{1-\sigma} \leq 1$ é a liberdade comercial inter-regional, a qual aumenta à medida que os custos de transporte inter-regionais diminuem. Incorporando as equações (5), (11), (14), (15) e as análogas de (6) e (15) para a região 2 na equação (10), a condição de lucro zero produz:

$$H_1 = \frac{\alpha}{\sigma \lambda^{\sigma\eta}} \left[\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{\varphi((1-\lambda) + \rho)}{\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right], \quad (16)$$

onde H_1 é a remuneração da mão de obra qualificada da região 1 no equilíbrio de curto prazo, a qual se ajusta para garantir a manutenção da condição de lucro zero. Para encontrar a quantidade produzida, X_1 , com base nos parâmetros do modelo e, conseqüentemente, finalizar a derivação do valor de equilíbrio das variáveis endógenas no curto prazo, basta substituir (16) em (12):

$$X_1 = \frac{\alpha(\sigma - 1)}{\sigma C \lambda^{\sigma\eta}} \left[\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{\varphi((1-\lambda) + \rho)}{\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right]. \quad (17)$$

É importante ressaltar que os resultados derivados a partir da equação (10) são válidos somente se o setor agrícola estiver ativo nas duas regiões. Do contrário, a remuneração dos trabalhadores não qualificados não estará definida, o que, por sua vez, impossibilitará encontrar soluções analíticas para as variáveis no equilíbrio de curto prazo através da maximização do lucro das firmas manufatureiras. Portanto, a Proposição 1 – demonstrada no Apêndice B – apresenta a condição que os parâmetros

devem satisfazer para garantir a consistência dos resultados analíticos.

Proposição 1 – Em uma economia na qual as duas regiões possuam a mesma quantidade de mão de obra não qualificada, o setor agrícola continua ativo nas duas regiões se a seguinte condição é válida:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(2\rho + 1)(\sigma - 1)}.$$

3.5 EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO

Como destacado na seção anterior, os trabalhadores qualificados apresentam mobilidade inter-regional no longo prazo. Nesse contexto, eles migram para a região na qual auferem maior utilidade indireta. Na região 1, o valor dessa em cada instante temporal¹ é encontrado por meio da inclusão das equações (15) e (16) na (7):

$$V_1(\lambda) = -\alpha \ln \left(\frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma\lambda^{\sigma\eta}} \left[\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{\varphi((1-\lambda) + \rho)}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right] + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (18)$$

Dada a utilidade indireta na região 1, $V_1(\lambda)$, e a sua análoga para a região 2, $V_2(\lambda)$, a dinâmica migratória da mão de obra qualificada é representada pela seguinte equação diferencial ordinária autônoma:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \gamma\lambda(1-\lambda)\Delta V(\lambda), \quad (19)$$

onde $\lambda(1-\lambda)$ é a fração da mão de obra qualificada na região 1 (2); $\gamma > 0$ é o fator de ajuste exponencial, o qual, dependendo de seu valor, acelera ou freia o processo migratório; e $\Delta V(\lambda) = V_1(\lambda) - V_2(\lambda)$ é a diferença de utilidade indireta dos trabalhadores qualificados entre as regiões 1 e 2. Como derivado na seção A.4 do Apêndice A,

$$\Delta V(\lambda) = \frac{\alpha}{1-\sigma} \ln \left(\frac{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma} \left[\frac{(\lambda + \rho)(\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1-\lambda)^{-\sigma\eta})}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{((1-\lambda) + \rho)(\varphi\lambda^{-\sigma\eta} - (1-\lambda)^{-\sigma\eta})}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right]. \quad (20)$$

A equação (19) sinaliza que a taxa de mudança na fração de trabalhadores

¹ Dado que apenas a mão de obra qualificada migra, pode-se eliminar o índice b da utilidade indireta.

qualificados na região 1 ao longo do tempo é proporcional à diferença de utilidade indireta entre as regiões 1 e 2. Se $\Delta V(\lambda) > 0 \Leftrightarrow V_1(\lambda) > V_2(\lambda)$, então a região 1 atrairá a mão de obra qualificada; se $\Delta V(\lambda) < 0 \Leftrightarrow V_1(\lambda) < V_2(\lambda)$, então a região 1 afugentará a mão de obra qualificada; e se $\Delta V(\lambda) = 0 \Leftrightarrow V_1(\lambda) = V_2(\lambda)$, então a região 1 continuará com a mesma quantidade de mão de obra qualificada.

Os equilíbrios de longo prazo do sistema são os valores de λ que fazem o lado direito da equação (19) igual a zero. Nesse contexto, os extremos do intervalo, $\lambda = 1$ e $\lambda = 0$, são sempre equilíbrios. Se $\Delta V(1) > 0$ ($\Delta V(0) < 0$), então $\lambda = 1$ ($\lambda = 0$) é um equilíbrio estável, pois caso um trabalhador qualificado migre para a outra região, a diferença de utilidade favorável à região de origem induz o seu retorno. Se $\Delta V(1) < 0$ ($\Delta V(0) > 0$), então $\lambda = 1$ ($\lambda = 0$) é um equilíbrio instável, pois caso um trabalhador qualificado migre, a diferença de utilidade favorável à região de destino induz outros a fazer o mesmo percurso. Os resultados $\lambda = 1$ e $\lambda = 0$ são denotados como equilíbrio centro-periferia (ou de aglomeração total), uma vez que ocorre a concentração espacial total do setor manufatureiro em uma das regiões.

Ademais, os valores de λ pertencentes ao intervalo $0 < \lambda < 1$ são equilíbrios se $\Delta V(\lambda) = 0$. Se $\frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} < 0$, então λ é um equilíbrio estável, pois caso um trabalhador qualificado migre para a outra região, a diferença de utilidade se torna favorável à origem, induzindo outro a fazer o percurso oposto. Se $\frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} > 0$, então λ é um equilíbrio instável, pois caso um trabalhador qualificado migre para a outra região, a diferença de utilidade se torna favorável ao destino, induzindo outros a fazer o mesmo percurso. Os resultados $0 < \lambda < 1/2$ e $1/2 < \lambda < 1$ são denotados como equilíbrio de aglomeração parcial (ou assimétrico), uma vez que as regiões mantêm participações não nulas diferentes na produção manufatureira; enquanto $\lambda = 1/2$ é denotado como equilíbrio de dispersão (ou simétrico), uma vez que atividade manufatureira é distribuída uniformemente entre as regiões.

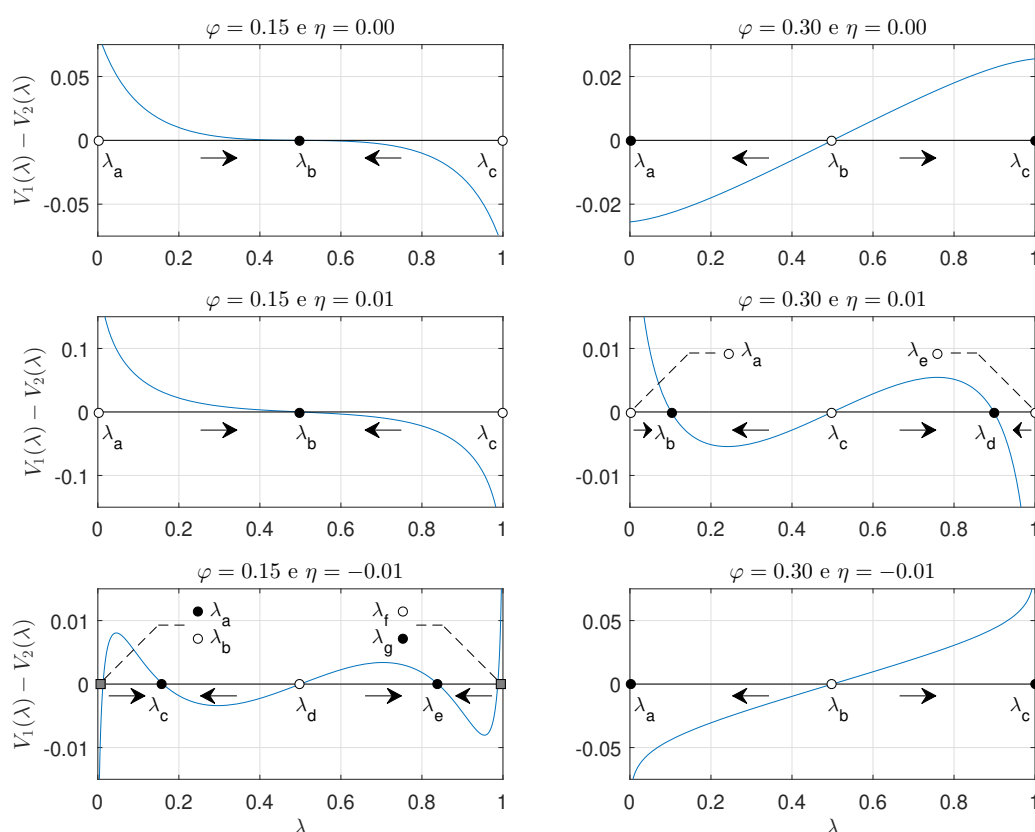
3.5.1 Diferença de Utilidade Indireta

Visto a importância da diferença de utilidade indireta entre as regiões 1 e 2 para o equilíbrio de longo prazo do modelo, a Figura 3 mostra a diferença de utilidade indireta, $\Delta V(\lambda)$, como função da fração da mão de obra qualificada na região 1, λ , para dois valores de liberdade comercial inter-regional – $\varphi = 0.15$ e $\varphi = 0.30$ – e três valores representativos de efeitos de congestionamento – $\eta = 0.00$, $\eta = 0.01$ e $\eta = -0.01$. Além de evidenciar o impacto das externalidades no equilíbrio de longo prazo, a Figura 3 ajuda a compreender a dinâmica espacial dos trabalhadores qualificados através das flechas pretas, as quais representam a movimentação de um equilíbrio instável para um equilíbrio estável. Nesse contexto, os pontos pretos simbolizam os equilíbrios estáveis

e os brancos os instáveis.

Na Figura 3, a coluna da esquerda considera $\varphi = 0.15$ e a coluna da direita $\varphi = 0.30$. A primeira linha apresenta o cenário original de Pflüger (2004), $\eta = 0.00$; a segunda, o cenário representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.01$; e a terceira, o cenário representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.01$. Tanto as simulações expostas na Figura 3 como as restantes do Capítulo 3 foram realizadas no ambiente computacional MATLAB[®], considerando os seguintes parâmetros²: $\sigma = 6$; $\rho = 1$, $\alpha = 0.3$, $c = 1$ e $K_{tot} = 100$. Seguindo a Proposição 1, o valor de α foi escolhido para assegurar que o setor agrícola continue ativo nas duas regiões.

Figura 3 – Diferença de utilidade indireta



Fonte: Elaboração própria (2021).

No caso com menor liberdade comercial inter-regional, $\varphi = 0.15$, a distribuição espacial dos trabalhadores qualificados e, conseqüentemente, da produção manufatureira é caracterizada por um equilíbrio estável simétrico, λ_b , no cenário original de Pflüger (2004), $\eta = 0.00$, e no cenário representativo de custos de congestionamento,

² Como c e K_{tot} não afetam $\Delta V(\lambda)$, a distribuição espacial de longo prazo independe dos valores fixados para esses parâmetros. Em outras palavras, c e K_{tot} impactam apenas no valor de equilíbrio das variáveis endógenas no curto prazo.

$\eta = 0.01$. Por sua vez, no cenário representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.01$, a alocação espacial é caracterizada por dois equilíbrios estáveis de aglomeração parcial, λ_c e λ_e , e dois equilíbrios estáveis centro-periferia, λ_a e λ_g . Portanto, no caso com menor liberdade comercial, a economia não converge para a dispersão uniforme da produção entre as localidades somente se existirem suficientes externalidades positivas que incentivem a concentração.

No caso com maior liberdade comercial inter-regional, $\varphi = 0.30$, a distribuição espacial dos trabalhadores qualificados e, conseqüentemente, da produção econômica é caracterizada por dois equilíbrios estáveis centro-periferia, λ_a e λ_c , no cenário original de Pflüger (2004), $\eta = 0.00$, e no cenário representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.01$. Por sua vez, no cenário representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.01$, a alocação espacial é caracterizada por dois equilíbrios estáveis de aglomeração parcial, λ_b e λ_d . Portanto, no caso com maior liberdade comercial, o setor manufatureiro não se concentra totalmente em uma das localidades somente se existirem suficientes externalidades negativas contrárias a tal trajetória.

Dado que quatro das seis situações da Figura 3 possuem mais que um possível equilíbrio no longo prazo, fatores históricos determinarão para qual equilíbrio espacial específico a economia convergirá. Em outras palavras, dependendo da distribuição inicial da economia, a mão de obra qualificada migrará, seguindo o processo sinalizado pelas flechas pretas, até alcançar o equilíbrio estável mais próximo. A importância da condição inicial no estado estacionário da economia será aprofundada na seção 3.5.4.

3.5.2 Forças Econômicas

No modelo aqui proposto, a alocação espacial da economia depende da interação de quatro forças econômicas, sendo que cada uma condensa um diferente fenômeno induzido pela migração dos trabalhadores qualificados.

A primeira força é o efeito índice de preço (EIP), o qual é identificado na equação (15). Essa evidencia que o aumento da fração de trabalhadores qualificados na região 1, λ , diminui o índice de preço do bem diferenciado na localidade. Isso ocorre porque o crescimento de λ induz um aumento no número de empresas em 1 devido à condição de pleno emprego. Como cada firma produz uma única variedade, há um incremento na quantidade de variedades locais, o qual, em função dos custos de transporte inter-regionais, τ (inverso da liberdade comercial inter-regional, φ), reduz o custo de vida na região 1. Portanto, há um aumento da utilidade indireta alcançada pelos trabalhadores qualificados, o que incentiva a continuação do processo migratório.

Nesse contexto, o efeito índice de preço é uma força de aglomeração espacial, que é representada no logaritmo do primeiro termo de $V_1(\lambda)$ e de $\Delta V(\lambda)$. Como

detalhado na seção A.4 do Apêndice A, a formulação analítica desse efeito é:

$$EIP = \frac{\alpha(1 - \sigma\eta)(1 - \varphi^2)}{(\sigma - 1)} \left[\frac{\lambda^{-\sigma\eta}(1 - \lambda)^{-\sigma\eta}}{(\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})(\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})} \right] \geq 0, \quad (21)$$

pois $\alpha > 0$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\sigma > 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ e $(1 - \sigma\eta) > 0$. Essa última inequação implica que a seguinte condição deve ser verificada nos cenários com custos de congestionamento: $\eta < 1/\sigma$.

A segunda força é o efeito tamanho do mercado (ETM), o qual é identificado pelas expressões $(L + K_1)$ e $(L + K_2)$ da equação (8). Devido aos custos de transporte inter-regionais, a demanda dos residentes por cada variedade local é maior que a dos não residentes. Assim, o crescimento populacional na região 1 fortalece a demanda agregada da sociedade pelas variedades fabricadas em 1, o que, tudo mais constante, incrementa o lucro das firmas locais. Dada a condição de lucro zero, a remuneração dos trabalhadores qualificados absorve esse incremento. Dessarte, há um aumento da utilidade indireta dos trabalhadores qualificados, o que incentiva a continuação do processo migratório.

Nesse contexto, o efeito tamanho do mercado é uma força de aglomeração espacial, que é representada nas expressões $(\lambda + \rho)$ e $((1 - \lambda) + \rho)$ dos numeradores das frações internas do segundo termo de $V_1(\lambda)$ e de $\Delta V(\lambda)$. Como detalhado na seção A.4 do Apêndice A, a formulação analítica desse efeito é:

$$ETM = \frac{\alpha\lambda^{-\sigma\eta}(1 - \lambda)^{-\sigma\eta}(1 - \varphi^2)}{\sigma(\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})(\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})} \geq 0. \quad (22)$$

A terceira força é o efeito extensão da competição (EEC), o qual é identificado nas equações (5) e (6). A averiguação dessas equações mostra que a redução no índice de preço do bem diferenciado por causa da maior competição local, isto é, maior oferta de variedades locais, resulta em uma queda na quantidade demandada de cada variedade por cada morador da região 1. Visto que a demanda dos residentes pelas variedades locais supera a dos não residentes devido aos custos de transporte, a queda nas demandas individuais dos primeiros produz, tudo mais constante, uma retração no lucro das firmas locais. Dada a condição de lucro zero, a remuneração dos trabalhadores qualificados absorve essa retração. Logo, há uma diminuição da utilidade indireta dos trabalhadores qualificados, o que incentiva a reversão do processo migratório.

Nesse contexto, o efeito extensão da competição é uma força de dispersão espacial, que é representada nos denominadores das frações internas do segundo termo de $V_1(\lambda)$ e de $\Delta V(\lambda)$. Como detalhado na seção A.4 do Apêndice A, a formulação

analítica desse efeito é:

$$EEC = -\frac{\alpha(1-\sigma\eta)}{\sigma} \left\{ \frac{(\lambda+\rho)[\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1-\lambda)^{-\sigma\eta}]^2}{[\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}]^2} + \frac{((1-\lambda)+\rho)[\varphi\lambda^{-\sigma\eta} - (1-\lambda)^{-\sigma\eta}]^2}{[\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}]^2} \right\} \leq 0. \quad (23)$$

Note que a segunda e a terceira força evidenciam um *trade-off* em relação ao impacto da demanda sobre o lucro. Quando o efeito tamanho do mercado domina o efeito extensão da competição, o aumento da quantidade de trabalhadores qualificados na região 1 expande a demanda por cada variedade local e, conseqüentemente, a remuneração do fator fixo na localidade. Quando o efeito tamanho do mercado é dominado pelo efeito extensão da competição, o aumento da quantidade de trabalhadores qualificados na região 1 retrai a demanda por cada variedade local e, conseqüentemente, a remuneração do fator fixo na localidade.

A quarta e nova força introduzida por este trabalho são os efeitos de congestionamento (EC), os quais são identificados no termo $N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ da equação (9). Esse termo introduz os efeitos de congestionamento como uma economia ou deseconomia de escala externa que transforma os custos de produção das firmas manufatureiras em uma função do número de firmas na localidade. Por um lado, se $0 < \eta < 1$, então há o predomínio de externalidades negativas, tais como: a saturação das redes de comunicação, o aumento do tempo de deslocamento entre a moradia e o trabalho, a poluição e a violência. Nesse contexto, a expansão da participação da região 1 – medida pelo número de firmas, N_1 – no setor de competição monopolística resulta em um incremento dos custos de produção na localidade e, conseqüentemente, em uma retração do lucro. Dada a condição de lucro zero, a remuneração dos trabalhadores qualificados absorve essa retração. Portanto, há uma diminuição da utilidade indireta alcançada na região, o que, por sua vez, incentiva a reversão do processo migratório. Por outro lado, se $-1 < \eta < 0$, então há o predomínio de externalidades positivas, tais como: o acesso aos serviços de saúde e educação de alta qualificação, a infraestrutura apropriada para a realização da produção e o incremento na probabilidade de atrair talentos. Nesse contexto, a expansão da participação da região 1 no setor de competição monopolística resulta em um decaimento dos custos de produção na localidade e, conseqüentemente, em um incremento do lucro. Dada a condição de lucro zero, a remuneração dos trabalhadores qualificados absorve esse incremento. Portanto, há um aumento da utilidade indireta alcançada na região, o que, por sua vez, incentiva a continuação do processo migratório.

Nesse contexto, os efeitos de congestionamento são uma força de dispersão se

$\eta > 0$ (custos de congestionamento) e uma força de aglomeração se $\eta < 0$ (benefícios de congestionamento), que é representada na expressão $\lambda^{\sigma\eta}$ da fração externa do segundo termo de $V_1(\lambda)$ e nas expressões $(\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1 - \lambda)^{-\sigma\eta})$ e $(\varphi\lambda^{-\sigma\eta} - (1 - \lambda)^{-\sigma\eta})$ dos numeradores das frações internas do segundo termo de $\Delta V(\lambda)$. Como detalhado na seção A.4 do Apêndice A, a formulação analítica desses efeitos é:

$$EC = -\alpha\eta \left[\frac{(\lambda + \rho)(\lambda^{-\sigma\eta-1} + \varphi(1 - \lambda)^{-\sigma\eta-1})}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{((1 - \lambda) + \rho)(\varphi\lambda^{-\sigma\eta-1} + (1 - \lambda)^{-\sigma\eta-1})}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} \right], \quad (24)$$

onde $EC < 0$ nos cenários com custos de congestionamento; $EC > 0$ nos cenários com benefícios de congestionamento; e $EC = 0$ no cenário original de Pflüger (2004). É importante notar que, além do seu impacto direto no sistema econômico, a nova força indiretamente afeta as demais através do parâmetro η nas equações (21), (22) e (23).

3.5.3 Diagramas de Bifurcação

Uma vez que a liberdade comercial inter-regional assume qualquer valor no intervalo $0 \leq \varphi \leq 1$, as Figuras 4, 5 e 6 mostram o diagrama de bifurcação e a interação das forças econômicas no ponto $\lambda = 1/2$ para os cenários original de Pflüger (2004), $\eta = 0.00$, representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.01$, e representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.01$, respectivamente. O diagrama de bifurcação, coluna da esquerda das Figuras 4, 5 e 6, expõe os equilíbrios de longo prazo por meio da relação entre a distribuição espacial da mão de obra qualificada – eixo vertical – e a liberdade comercial inter-regional – eixo horizontal. As linhas pretas expressam os equilíbrios estáveis de longo prazo, ao passo que as linhas tracejadas os instáveis. Os φ^s são os pontos de sustentação nos quais um equilíbrio centro-periferia ou de aglomeração parcial deixa de ser estável, enquanto os φ^r são os pontos de ruptura nos quais um equilíbrio estável de dispersão se torna instável.

Na coluna da direita das Figuras 4, 5 e 6, há dois gráficos que sintetizam a interação das forças econômicas no ponto $\lambda = 1/2$. Por um lado, o gráfico inferior exhibe o comportamento isolado das quatro forças econômicas: efeito índice de preço (EIP); efeito tamanho do mercado (ETM); efeito extensão da competição (EEC); e efeitos de congestionamento (EC). Por outro lado, o gráfico superior expõe as curvas ΔF e ΔH . A primeira curva representa a diferença entre as forças de aglomeração e dispersão; a segunda, o *trade-off* entre o efeito tamanho do mercado e o efeito extensão da

competição. Em termos matemáticos:

$$\Delta F = |\text{forças de aglomeração}| - |\text{forças de dispersão}|, \quad (25)$$

$$\Delta H = |\text{efeito tamanho do mercado}| - |\text{efeito extensão da competição}|. \quad (26)$$

Na equação (25), se $\Delta F > 0$, então os equilíbrios estáveis de longo prazo são do tipo centro-periferia ou de aglomeração parcial; se $\Delta F < 0$, então os equilíbrios estáveis de longo prazo são do tipo dispersivo; e se $\Delta F = 0$, então a liberdade comercial inter-regional correspondente é um ponto de ruptura, φ^r . Na equação (26), se $\Delta H > 0$ então o processo migratório induz um aumento da demanda por cada variedade local e, conseqüentemente, da remuneração dos trabalhadores qualificados; se $\Delta H < 0$, ocorre oposto; e se $\Delta H = 0$, então a liberdade comercial inter-regional correspondente é o ponto de transição da disputa. É importante ressaltar que ΔH não sinaliza o valor exato da mudança da remuneração da mão de obra qualificada, mas sim a diferença de intensidade entre os dois efeitos, ou seja, qual deles predomina.

Retornando aos pontos de sustentação, φ^s , e de ruptura, φ^r . Por diferentes razões, que serão expostas ao tratar de cada cenário, não é possível encontrar uma formulação analítica para os primeiros. Logo, eles são aproximados numericamente no MATLAB[®]. Por seu turno, visto que os segundos são aqueles nos quais um equilíbrio estável de dispersão se torna instável e, pela discussão ao final da introdução da seção 3.5, $\lambda = 1/2$ é estável se $\left. \frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1/2} < 0$ e instável se $\left. \frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1/2} > 0$, então os possíveis pontos de ruptura são descobertos igualando $\left. \frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1/2}$ a zero. Assim, como detalhado na seção A.4 do Apêndice A, obtém-se a seguinte formulação analítica para os possíveis pontos de ruptura:

$$\varphi^r = \frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) \pm \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} \quad (27)$$

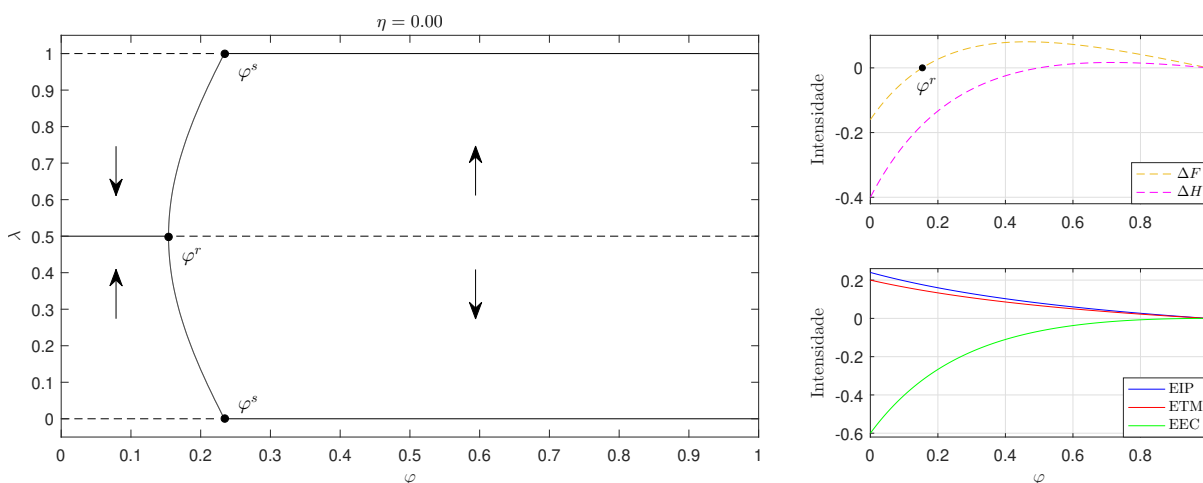
A nomenclatura possível é utilizada porque φ^r só existirá efetivamente como ponto de ruptura se $0 < \varphi^r < 1$. Dependendo do conjunto de parâmetros, o sistema econômico pode convergir sempre para um único tipo de equilíbrio estável. Nesse contexto, Fujita, Krugman e Venables (1999) propõem a condição de não buraco negro para o modelo Centro-Periferia (KRUGMAN, 1991). Essa assegura que as forças de aglomeração espacial não alcancem uma magnitude que leve a economia para a concentração total independente do valor da liberdade comercial inter-regional. No presente trabalho, dado que a distribuição espacial uniforme entre as duas regiões é o único equilíbrio estável nos cenários com grande predomínio de externalidades negativas, a condição de não buraco negro é modificada para garantir a existência dos

pontos de ruptura, $0 < \varphi^r < 1$. Assim, caso seja válida, haverá intervalos de φ com equilíbrios estáveis de aglomeração e outros com equilíbrios estáveis de dispersão.

Iniciando a análise pelo cenário original de Pflüger (2004), Figura 4, não é possível encontrar uma formulação analítica para o ponto de sustentação, pois, igualando $\Delta V(0)$ ou $\Delta V(1)$ a zero, obtém-se uma equação sem solução analítica. A Proposição 2 – demonstrada no Apêndice B – apresenta a condição de não buraco negro para que o modelo possua um ponto de ruptura no cenário sem efeitos de congestionamento, $\eta = 0.00$. Nesse contexto, além de assegurarem que o setor agrícola continue ativo nas duas regiões, Proposição 1, os parâmetros expostos no segundo parágrafo da seção 3.5.1 satisfazem a condição da Proposição 2.

Proposição 2 – No cenário sem efeitos de congestionamento, a condição de não buraco negro para a existência do ponto de ruptura é $\rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}$.

Figura 4 – Diagrama de bifurcação do cenário original de Pflüger (2004)



Fonte: Elaboração própria (2021).

Investigando o diagrama de bifurcação do cenário sem efeitos de congestionamento, $\eta = 0.00$, a Figura 4 mostra que o único equilíbrio estável é o de dispersão para $\varphi \in [0, \varphi^r]$, onde $\varphi^r = 0.1538$ pela equação (27). Os gráficos na coluna da direita evidenciam o predomínio da força de dispersão espacial – efeito extensão da competição – sobre as forças de aglomeração espacial – efeito índice de preço e efeito tamanho do mercado – no intervalo $[0, \varphi^r]$. A explicação para esse comportamento está na equação (6). Essa sinaliza que a demanda pelas variedades estrangeiras é inversamente relacionada ao valor dos custos de transporte. Assim, para altos custos de transporte (baixos valores de liberdade comercial), cada região consome basicamente a sua produção manufatureira. Visto que a mão de obra não qualificada não

pode migrar, uma potencial aglomeração dos trabalhadores qualificados engendraria em uma forte disputa pela demanda dos residentes do centro e em um subaproveito da demanda dos não residentes. Devido à estrutura da função de utilidade indireta, a retração da remuneração da mão de obra qualificada no centro, $\Delta H < 0$, teria um impacto maior que a redução do índice de preço, incentivando a distribuição uniforme no espaço. Portanto, o equilíbrio estável de dispersão para $\varphi \in [0, \varphi^r]$ surge para as firmas desfrutarem ao máximo da demanda dos trabalhadores não qualificados.

O sistema econômico possui dois equilíbrios estáveis de aglomeração parcial para $\varphi \in (\varphi^r, \varphi^s)$, onde $\varphi^s = 0.2340$ por aproximação numérica. Apesar de ΔH ainda ser negativo, o aumento de φ retrai o efeito extensão da competição, o que, por sua vez, faz com que ele perca potência relativa na disputa com o efeito tamanho do mercado. Isso decorre do aumento da liberdade comercial inter-regional diminuir a diferença entre a demanda pelas variedades locais e importadas. Nesse contexto, o estímulo à concentração proveniente do efeito índice de preço conduz as regiões a deterem participações diferentes na atividade manufatureira. Para $\varphi \in [\varphi^s, 1)$, a economia passa a dispor de dois equilíbrios estáveis centro-periferia. Conforme o aumento de φ , o vigor do efeito tamanho do mercado em relação ao efeito extensão da competição é cada vez maior, conseqüentemente, ΔH torna-se positivo a partir de $\varphi = 0.50$. Esse mecanismo, somado ao efeito índice de preço, induz a aglomeração total da produção do bem diferenciado. Por fim, vale destacar que para o valor limite $\varphi = 1$, como aprofundado na demonstração da Proposição 2, os trabalhadores qualificados são indiferentes à região de moradia, uma vez que não há qualquer barreira às trocas mercantis e nenhuma externalidade.

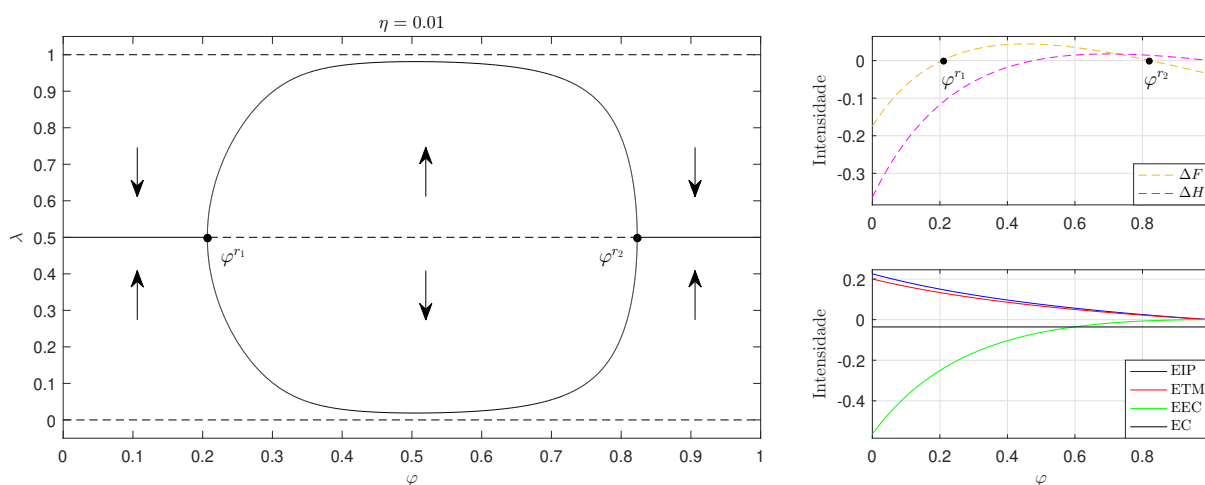
Passando à análise do cenário representativo de custos de congestionamento, Figura 5, não é possível encontrar uma formulação analítica para o ponto de sustentação, pois $\Delta V(0) \rightarrow \infty$ e $\Delta V(1) \rightarrow -\infty$. Isso também significa que, quando há predomínio de externalidades negativas, $0 < \eta < 1$, o modelo tende aos equilíbrios centro-periferia, mas nunca realmente os alcança. Dado que nas simulações numéricas que originam os diagramas de bifurcação é necessário empregar um passo entre os valores de λ , considera-se o valor de λ imediatamente posterior a 0 ou anterior a 1 como equilíbrio centro-periferia. Como o passo utilizado foi de 10^{-3} para λ no presente trabalho, os valores de $\lambda = 0.001$ e $\lambda = 0.999$ são conceituados como equilíbrios centro-periferia nos cenários com custos de congestionamento.

A Proposição 3 – demonstrada no Apêndice B – apresenta a condição de não buraco negro para que o modelo possua dois pontos de ruptura nos cenários com custos de congestionamento, $0 < \eta < 1$. Nesse contexto, além de assegurarem que o setor agrícola continue ativo nas duas regiões, $\eta = 0.01$ e os demais parâmetros expostos no segundo parágrafo da seção 3.5.1 satisfazem a condição da Proposição 3.

Proposição 3 – Nos cenários com custos de congestionamento, a condição de não buraco negro para a existência dos dois pontos de ruptura é $0 < \eta < \eta^c < 1$ em conjunto com $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)}$, onde

$$\eta^c = \frac{2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}}{[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma}.$$

Figura 5 – Diagrama de bifurcação do cenário representativo de custos de congestionamento



Fonte: Elaboração própria (2021).

Enquanto o cenário original de Pflüger (2004), Figura 4, apresenta uma bifurcação tridente supercrítica, na qual há uma transição suave da dispersão para a concentração total, o cenário representativo de custos de congestionamento, Figura 5, apresenta uma bifurcação no formato de curva de sino. Dessarte, a inclusão dos efeitos de congestionamento como uma nova força de dispersão espacial modifica a inter-relação das forças econômicas, ΔF , e origina uma configuração espacial em que os equilíbrios estáveis de longo prazo saem da dispersão para a aglomeração parcial e novamente para a dispersão com o aumento da liberdade comercial inter-regional.

Como sinalizado pelos gráficos da coluna da direita, a principal motivação para a distribuição uniforme do setor manufatureiro é diferente para $\varphi \in [0, \varphi^{r1}]$ e $\varphi \in [\varphi^{r2}, 1]$, onde $\varphi^{r1} = 0.2066$ e $\varphi^{r2} = 0.8230$ pela equação (27). Para o primeiro intervalo de φ , semelhante ao cenário original, os trabalhadores qualificados e as firmas buscam a dispersão da atividade manufatureira para aproveitarem ao máximo a demanda da mão de obra não qualificada. Para o segundo intervalo, a distribuição espacial uniforme surge do predomínio de externalidades negativas no sistema econômico. A equação (10) mostra que um potencial aumento do número de firmas em uma das localidades induz uma expansão dos custos de produção e, conseqüentemente, uma retração da

remuneração da mão de obra qualificada nos cenários com $0 < \eta < 1$. Portanto, para altos valores de liberdade comercial inter-regional, os trabalhadores qualificados e as firmas ganham mais evitando os custos de congestionamento do que usufruindo das forças de aglomeração.

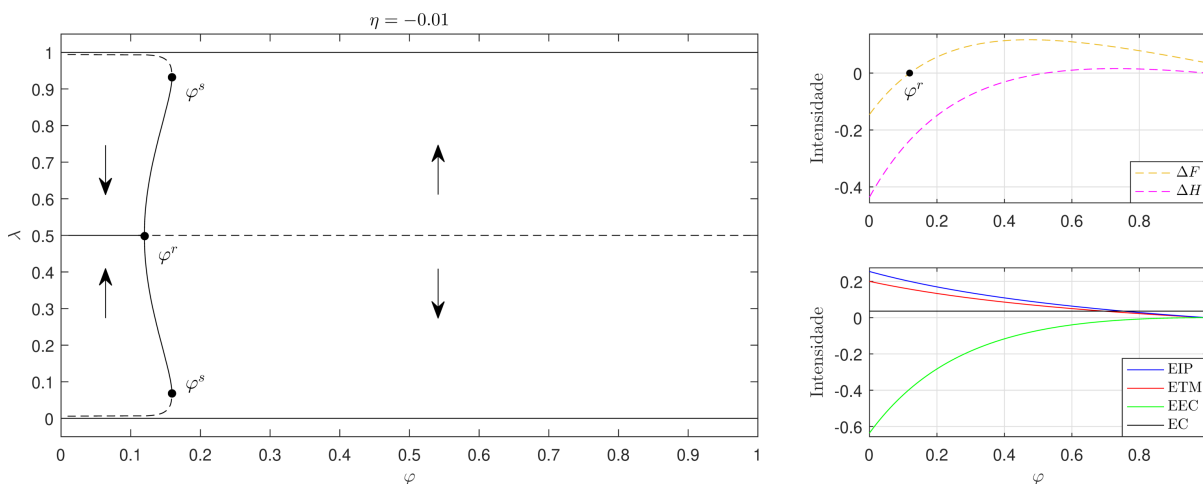
Note que o diagrama anterior não ostenta equilíbrios estáveis centro-periferia. Isso ocorre porque $\eta = 0.01$ é considerado um valor alto de custos de congestionamento dentro do contexto do modelo. Dado os demais parâmetros utilizados no Capítulo 3, as simulações no MATLAB[®] mostram que existem apenas equilíbrios estáveis simétricos e assimétricos para $0.006 \leq \eta \leq 0.022$, ao passo que, além das aglomerações parciais, surgem equilíbrios estáveis de aglomeração total entre φ^{r1} e φ^{r2} para $0 < \eta < 0.006$. Esse resultado está de acordo com a Proposição 3, uma vez que, para o presente conjunto de parâmetros, a condição que limita a intensidade dos custos de congestionamento é $\eta^c = 0.0222$.

No cenário representativo de benefícios de congestionamento, Figura 6, não é possível encontrar uma formulação analítica para o ponto de sustentação, pois esse é o valor de φ no qual um equilíbrio estável de aglomeração parcial se torna instável. Logo, diferente dos cenários anteriores, o ponto de sustentação não ocorre em $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, mas em um λ que varia com o conjunto de parâmetros. A Proposição 4 – demonstrada no Apêndice B – apresenta a condição de não buraco negro para que o modelo possua um ponto de ruptura nos cenários com benefícios de congestionamento, $-1 < \eta < 0$. Nesse contexto, além de assegurarem que o setor agrícola continue ativo nas duas regiões, $\eta = -0.01$ e os demais parâmetros expostos no segundo parágrafo da seção 3.5.1 satisfazem a condição da Proposição 4.

Proposição 4 – Nos cenários com benefícios de congestionamento, a condição de não buraco negro para a existência do ponto de ruptura é $-1 < \eta^b < \eta < 0$ em conjunto com $\frac{\sigma}{2(\sigma - 1)} < \rho < \frac{\sigma^2 + \sigma}{2(\sigma - 1)}$, onde $\eta^b = \frac{\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho}{\sigma^2}$.

A Figura 6 evidencia que a inclusão dos efeitos de congestionamento como uma nova força de aglomeração espacial modifica a inter-relação das forças econômicas, ΔF , e origina uma transição espacial do sistema econômico distinta entre a situação com baixa liberdade comercial, mas apresentando uma tendência de alta, e a situação com alta liberdade comercial, mas apresentando uma tendência de baixa. Na primeira situação, a qual é a representada pelos gráficos da coluna da direita, os trabalhadores qualificados e, conseqüentemente, o setor de competição monopolística realizam uma passagem amena do equilíbrio de dispersão para o de aglomeração parcial em $\varphi^r = 0.1195$, pela equação (27). No intervalo $\varphi \in (\varphi^r, \varphi^s)$, onde $\varphi^s = 0.1588$ por aproximação numérica, a diferença entre a participação das regiões na atividade manufatureira cresce suavemente conforme o aumento da liberdade comercial inter-regional. A partir

Figura 6 – Diagrama de bifurcação do cenário representativo de benefícios de congestionamento



Fonte: Elaboração própria (2021).

do ponto φ^S , um novo acréscimo de φ possibilita que qualquer perturbação – migração de um único trabalho qualificado – transfira a economia abruptamente para o equilíbrio estável centro-periferia.

Em princípio, na segunda situação, o predomínio de externalidades positivas faz com que a economia não saia do equilíbrio estável centro-periferia com o decréscimo da liberdade comercial. Na prática, como surge um equilíbrio instável paulatinamente mais próximo de cada um dos dois equilíbrios centro-periferia a partir de φ^S , o sistema econômico pode convergir, dependendo do valor de φ , para um equilíbrio estável de aglomeração parcial ou de dispersão se ocorrer uma perturbação significativa – migração de alguns poucos trabalhadores qualificados. O tamanho da perturbação que translete o sistema para outra bacia de atração – aqui definida como o intervalo de λ entre o equilíbrio estável e os seus equilíbrios instáveis vizinhos – diminui à medida que liberdade comercial inter-regional tende a zero.

Um exemplo claro do possível impacto de uma perturbação pode ser observado na situação $\varphi = 0.15$ e $\eta = -0.01$ da Figura 3. Suponha que a economia esteja em algum ponto entre $0 < \lambda < \lambda_b$. Em teoria, a economia convergiria para o equilíbrio estável centro-periferia, λ_a , pela diferença de utilidade indireta. Na prática, caso ocorra, por algum motivo externo ao modelo, uma migração suficiente de trabalhadores qualificados que transfira o sistema para a bacia de atração de λ_c , isto é, algum ponto entre $\lambda_b < \lambda < \lambda_d$, a economia acabará convergindo para o equilíbrio estável de aglomeração parcial.

Por fim, a Proposição 5 – demonstrada no Apêndice B – expõe a condição geral de não buraco negro, a qual garante a existência concomitante de intervalos de φ com equilíbrios estáveis de dispersão e com equilíbrios estáveis de aglomeração para

qualquer tipo de cenário de efeitos de congestionamento.

Proposição 5 – A condição geral de não buraco negro é $\eta^b < \eta < \eta^c$ em conjunto com $\frac{\sigma}{2(\sigma - 1)} < \rho < \frac{\sigma^2 + \sigma}{2(\sigma - 1)}$.

3.5.4 Dinâmica Espacial

De maneira a entender o impacto da contingência histórica sobre o estado estacionário da economia, esta seção trata do problema de valor inicial da migração dos trabalhadores qualificados:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \gamma\lambda(1 - \lambda)\Delta V(\lambda) \\ \lambda(0) = \lambda_0 \end{cases} \quad (28)$$

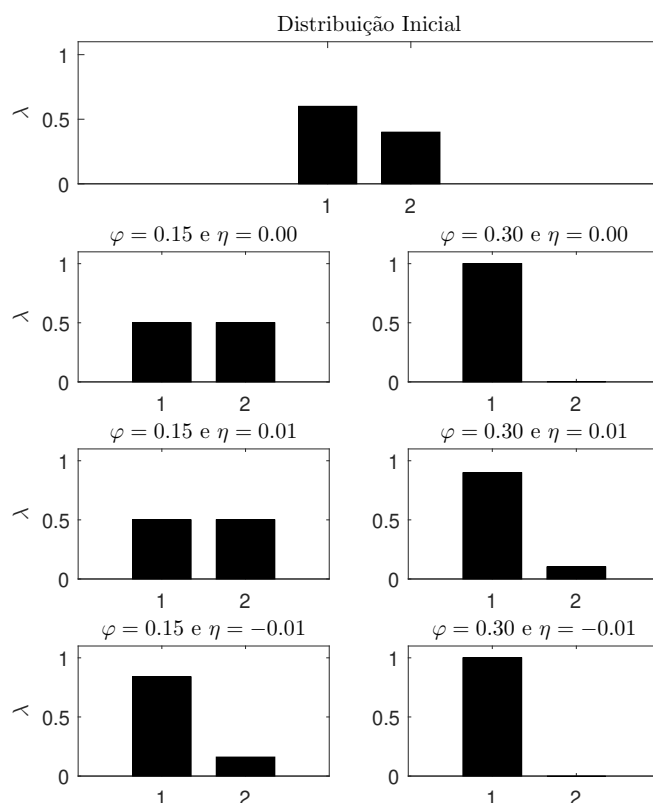
onde $\frac{d\lambda}{dt}$ é a equação (19); e λ_0 é a fração da mão de obra qualificada na região 1 no instante inicial. Dada a impossibilidade de solucionar analiticamente o problema de valor inicial, emprega-se o método de Euler. De acordo com Chapra (2017), esse método prevê iterativamente o valor de λ em $t + 1$ através da extrapolação linear da equação diferencial ordinária em t sobre o tamanho do passo temporal, h :

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \gamma\lambda_t(1 - \lambda_t)\Delta V(\lambda_t)h, \quad (29)$$

onde $0 < h \ll 1$, ou seja, o intervalo temporal entre as iterações deve ser pequeno. No presente trabalho, as iterações são cessadas quando o seguinte critério de parada é satisfeito: $|\varepsilon| \leq 10^{-7}$, onde $\varepsilon = \frac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_t}$ é o erro relativo estimado. Em outras palavras, o estado estacionário da economia é alcançado quando a migração origina uma diferença relativa entre λ_{t+1} e λ_t inferior a 0.0000001. A aplicação computacional do método de Euler no MATLAB® seguiu o algoritmo 22.3 de Chapra (2017).

A Figura 7 mostra a fração de trabalhadores qualificados nas regiões 1 e 2 no estado inicial e no estado estacionário de cada uma das seis situações expostas na seção 3.5.1. Seguindo a organização gráfica introduzida na Figura 3, a coluna da esquerda considera $\varphi = 0.15$; e a coluna da direita, $\varphi = 0.30$. A primeira linha da Figura 7 apresenta a condição inicial $\lambda_0 = 0.6$; a segunda, o equilíbrio de longo prazo no cenário original de Pflüger (2004), $\eta = 0.00$; a terceira, o equilíbrio de longo prazo no cenário representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.01$; e a quarta, o equilíbrio de longo prazo no cenário representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.01$.

Figura 7 – Dinâmica espacial com $\lambda_0 = 0.6$



Fonte: Elaboração própria (2021).

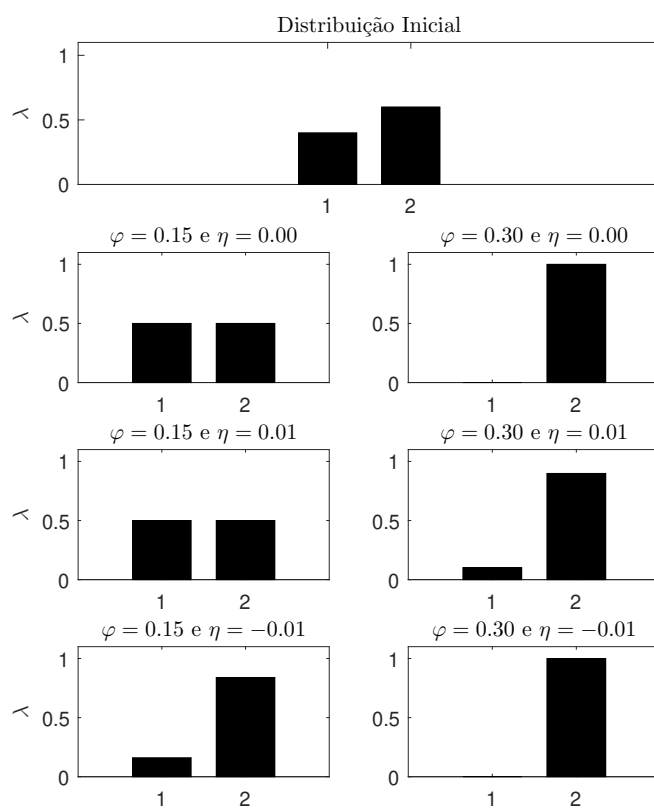
Com $\varphi = 0.15$ e a condição inicial $\lambda_0 = 0.6$, a migração dos trabalhadores qualificados conduz a economia para um estado estacionário de distribuição uniforme nos cenários $\eta = 0.00$ e $\eta = 0.01$ e um estado estacionário de aglomeração parcial, com grande predomínio da região 1, no cenário $\eta = -0.01$. Esses resultados estão de acordo com o que foi exposto na Figura 3, já que $\lambda_0 = 0.6$ está na bacia de atração do equilíbrio estável $\lambda_b - \lambda_a < \lambda < \lambda_c$ – nos dois primeiros cenários e na bacia de atração do equilíbrio estável $\lambda_e - \lambda_d < \lambda < \lambda_f$ – no último cenário.

Com $\varphi = 0.30$ e a condição inicial $\lambda_0 = 0.6$, a economia converge para um estado estacionário de concentração total na região 1 nos cenários $\eta = 0.00$ e $\eta = -0.01$ e um estado estacionário de aglomeração parcial, com grande predomínio da região 1, no cenário $\eta = 0.01$. Novamente, os resultados estão de acordo com o que foi exposto na Figura 3, já que $\lambda_0 = 0.6$ está na bacia de atração do equilíbrio estável $\lambda_c - \lambda_b < \lambda < 1$ – no primeiro e no terceiro cenário e na bacia de atração do equilíbrio estável $\lambda_d - \lambda_c < \lambda < \lambda_e$ – no segundo cenário.

A Figura 8, que tem uma organização gráfica idêntica à da Figura 7, mostra que quatro das seis situações ostentariam outro estado estacionário se a condição inicial fosse $\lambda = 0.4$. Como indicado pelas flechas pretas da Figura 3: (i) $\varphi = 0.15$ e $\eta = -0.01$

convergiria para λ_c ; (ii) $\varphi = 0.30$ e $\eta = 0.00$, para λ_a ; (iii) $\varphi = 0.30$ e $\eta = 0.01$, para λ_b ; e (iv) $\varphi = 0.30$ e $\eta = -0.01$, para λ_a . Portanto, quando há mais que um equilíbrio estável, a distribuição espacial da economia no longo prazo depende de fatores históricos.

Figura 8 – Dinâmica espacial com $\lambda_0 = 0.4$



Fonte: Elaboração própria (2021).

4 MODELO COM R REGIÕES

O sistema econômico continua sendo composto de dois setores produtivos – manufatureiro (X) e agrícola (A) – e dois fatores de produção – mão de obra não qualificada (L) e mão de obra qualificada (K). A diferença é que agora existem $R \geq 2$ regiões, as quais aqui serão dispostas em quatro topologias espaciais exógenas à economia. Como as regiões seguem apresentando estruturas idênticas de preferência e tecnologia, elas são simétricas. Nesse contexto, todas as hipóteses da introdução do Capítulo 3 permanecem válidas e a derivação do modelo será realizada para uma região arbitrária $r = 1, \dots, R$. O passo a passo da derivação é análogo ao do modelo com duas regiões, envolvendo apenas um pouco mais de álgebra – leia-se maior número de somatórios. Portanto, para evitar a repetição das informações, o Capítulo 4 referencia os principais detalhes do Apêndice A em vez de incluir um novo apêndice.

4.1 ESTRUTURAS ESPACIAIS E CUSTOS DE TRANSPORTE

Dado que o modelo emprega custos de transporte inter-regionais do tipo iceberg (SAMUELSON, 1952), o valor desembolsado com a importação do bem diferenciado surge de uma parte do produto ser perdida no caminho entre as regiões. Assim, os custos de transporte de uma unidade de qualquer variedade entre as regiões r e i são:

$$\tau_{ri} = \tau_{ir} = \begin{cases} \tau^{D_{ri}} & \text{se } r \neq i \\ 1 & \text{se } r = i \end{cases} \quad (30)$$

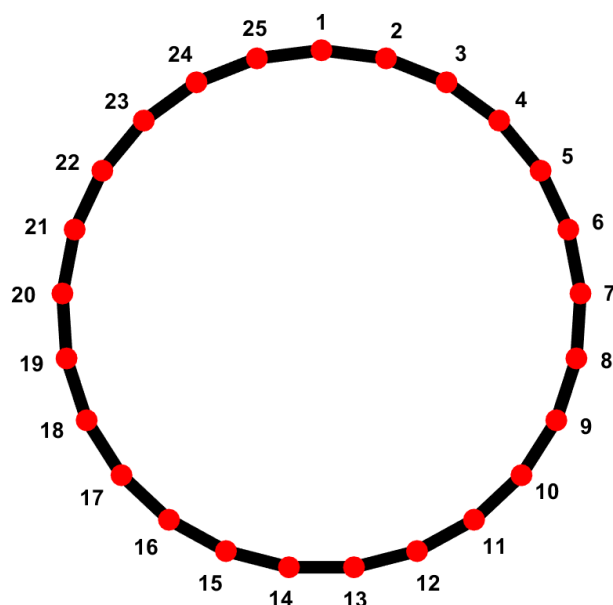
onde o parâmetro $1 \leq \tau < \infty$ é a tecnologia de transporte da economia; D_{ri} é a distância entre as regiões r e i ; e τ_{ri} é o número de unidades do bem manufaturado proveniente da região r que são enviadas para garantir que uma unidade chegue na região i .

A equação (30) mostra o porquê da estrutura espacial ser considerada exógena ao modelo. O impacto de qualquer topologia no equilíbrio de longo prazo ocorre através da disposição relativa das localidades no espaço. Como a distância inter-regional afeta apenas os valores dos custos de transporte, τ_{ri} , a derivação teórica do modelo independe da estrutura espacial adotada. Dada a flexibilidade de incorporação de diferentes disposições locais, o presente capítulo analisará o impacto de quatro topologias sobre a concentração espacial de uma economia com vinte e cinco regiões.

A primeira estrutura espacial é o círculo equidistante. Como mostrado na Figura 9 para uma economia com vinte e cinco regiões, as localidades, pontos vermelhos, são igualmente espaçadas ao longo de uma circunferência em que a distância entre regiões adjacentes é um. Como a primeira e a última localidade estão diretamente conectadas,

a distância entre duas regiões quaisquer é o menor percurso na circunferência.

Figura 9 – Círculo equidistante com vinte e cinco regiões

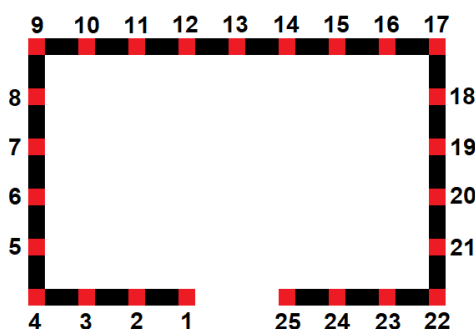


Fonte: Elaboração própria (2021).

A segunda estrutura é o segmento de reta. Conforme exposto na Figura 10 para uma economia com vinte e cinco regiões, as localidades, pontos vermelhos, são posicionadas nos números naturais do eixo horizontal. Assim, a distância entre as regiões r e i é:

$$D_{ri} = |r - i|. \quad (31)$$

Figura 10 – Segmento de reta com vinte e cinco regiões



Fonte: Elaboração própria (2021).

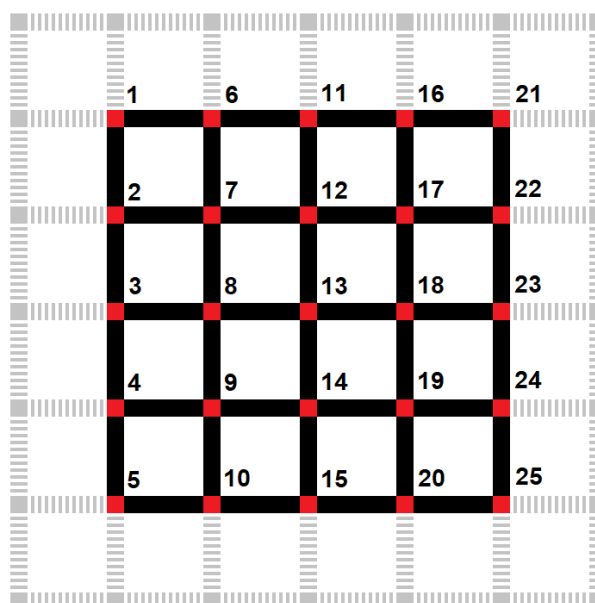
A terceira estrutura é o retângulo de Manhattan, na qual as regiões são dispostas equidistantemente nas coordenadas dos números inteiros do plano cartesiano dentro de um retângulo $I \times J$, onde I (J) é o número de coordenadas horizontais (verticais) consideradas. Como as coordenadas são interceptadas por segmentos de retas horizontais e verticais que conectam um extremo da estrutura ao seu extremo paralelo, a distância entre as regiões r e i é dada pela norma:

$$D_{ri} = |x_r - x_i| + |y_r - y_i|, \quad (32)$$

onde x_r (x_i) é a coordenada horizontal e y_r (y_i) é a coordenada vertical da região r (i).

A Figura 11 mostra o retângulo de Manhattan 5×5 para uma economia com vinte e cinco regiões. Os pontos vermelhos representam as localidades e as linhas pretas os segmentos de retas que as conectam. Considerando a região 1 na coordenada (0,0), a região 18 estará na coordenada (3,-2) e a distância entre as duas é 5.

Figura 11 – Retângulo de Manhattan com vinte e cinco regiões

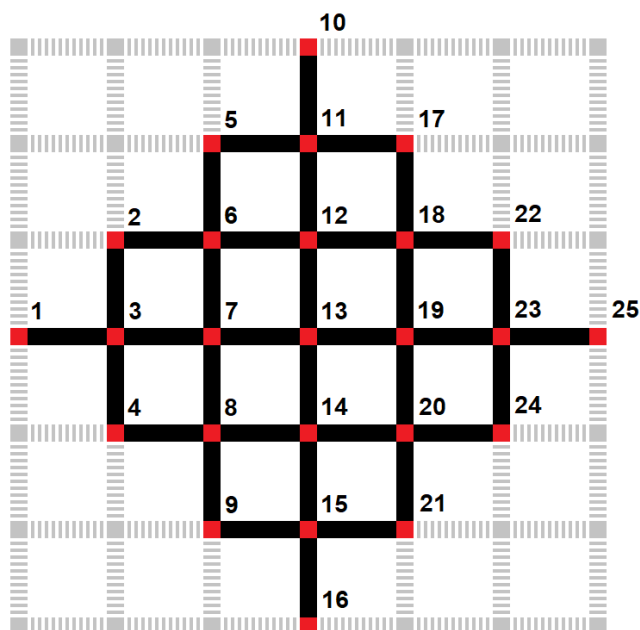


Fonte: Elaboração própria (2021).

A quarta estrutura é o círculo de Manhattan de raio $Q \in \mathbb{N}$, na qual as regiões são posicionadas nas coordenadas dos números inteiros dentro de um losango. Como as coordenadas são interceptadas por segmentos de retas horizontais e verticais que conectam um extremo da estrutura ao seu correspondente do outro lado, a distância entre as regiões r e i também é calculada pela equação (32). De acordo com Brakman et al. (1999), dado o raio, Q , o número total de regiões na topologia é $R = 2Q(Q+1) + 1$.

A Figura 12 expõe o círculo de Manhattan de raio 3 para uma economia com vinte e cinco regiões. Os pontos vermelhos representam as localidades e as linhas pretas os segmentos de retas que as conectam. Considerando a região 1 na coordenada (0,0), a região 18 estará na coordenada (4,1) e a distância entre as duas é 5.

Figura 12 – Círculo de Manhattan com vinte e cinco regiões



Fonte: Elaboração própria (2021).

A Tabela 1 compara a distância média de cada região para as outras em cada uma das quatro estruturas espaciais, sendo que a penúltima e a última linha apresentam, respectivamente, a média da distância média, \bar{D} , e o desvio padrão da distância média, $Dp(D)$. A primeira medida estatística representa a facilidade de ligação inter-regional. Quanto menor o valor da média, mais acessível é a comunicação de qualquer região com as demais. A segunda medida é a magnitude do benefício geográfico. Quanto maior o desvio padrão, maior a vantagem locacional das regiões próximas ao centro geográfico da topologia.

No círculo equidistante, segunda coluna da Tabela 1: (i) as vinte e cinco regiões possuem a mesma distância média para as outras; (ii) a facilidade de ligação inter-regional é $\bar{D} = 6.2400$; (iii) e a magnitude do benefício geográfico é $Dp(D) = 0.0000$. Esses dados implicam que o círculo equidistante é espacialmente neutro, isto é, não apresenta regiões estrategicamente localizadas.

No segmento de reta, terceira coluna da Tabela 1: (i) quanto mais próxima do centro geográfico, região 13, menor a distância média da região para as outras; (ii) a facilidade de ligação inter-regional é $\bar{D} = 8.3200$; (iii) e a magnitude do benefício geo-

Tabela 1 – Distância média de cada região para as outras

Região	Círculo Equidistante	Segmento de Reta	Retângulo de Manhattan	Círculo de Manhattan
1	6.2400	12.0000	4.0000	4.1200
2	6.2400	11.0800	3.4000	3.4800
3	6.2400	10.2400	3.2000	3.2000
4	6.2400	9.4800	3.4000	3.4800
5	6.2400	8.8000	4.0000	3.4800
6	6.2400	8.2000	3.4000	2.8000
7	6.2400	7.6800	2.8000	2.5200
8	6.2400	7.2400	2.6000	2.8000
9	6.2400	6.8800	2.8000	3.4800
10	6.2400	6.6000	3.4000	4.1200
11	6.2400	6.4000	3.2000	3.2000
12	6.2400	6.2800	2.6000	2.5200
13	6.2400	6.2400	2.4000	2.2400
14	6.2400	6.2800	2.6000	2.5200
15	6.2400	6.4000	3.2000	3.2000
16	6.2400	6.6000	3.4000	4.1200
17	6.2400	6.8800	2.8000	3.4800
18	6.2400	7.2400	2.6000	2.8000
19	6.2400	7.6800	2.8000	2.5200
20	6.2400	8.2000	3.4000	2.8000
21	6.2400	8.8000	4.0000	3.4800
22	6.2400	9.4800	3.4000	3.4800
23	6.2400	10.2400	3.2000	3.2000
24	6.2400	11.0800	3.4000	3.4800
25	6.2400	12.0000	4.0000	4.1200
Média	6.2400	8.3200	3.2000	3.2256
Desvio Padrão	0.0000	1.8942	0.4830	0.5556

Fonte: Elaboração própria (2021).

gráfico é $Dp(D) = 1.8942$. Uma vez que é necessário passar por todas as localidades para ir de um extremo ao outro da topologia, o segmento de reta dispõe da menor facilidade de ligação inter-regional e da maior magnitude do benefício geográfico.

No retângulo de Manhattan, quarta coluna da Tabela 1: (i) quanto mais próxima do centro geográfico, região 13, menor a distância média da região para as outras; (ii) a facilidade de ligação inter-regional é $\bar{D} = 3.2000$; (iii) e a magnitude do benefício geográfico é $Dp(D) = 0.4830$. Essa topologia possui a maior facilidade de ligação inter-regional e a terceira maior magnitude do benefício geográfico. Comparado ao segmento de reta, esses resultados decorrem da maior compactação da disposição das localidades ao redor do centro geográfico.

No círculo de Manhattan, quinta coluna da Tabela 1: (i) quanto mais próxima do centro geográfico, região 13, menor a distância média da região para as outras; (ii) a facilidade de ligação inter-regional é $\bar{D} = 3.2256$; (iii) e a magnitude do benefício geográfico é $Dp(D) = 0.5556$. A principal diferença em relação às medidas estatísticas do retângulo de Manhattan está no desvio padrão, o qual é maior no círculo por causa da vantagem locacional do centro geográfico ser mais proeminente.

4.2 DEMANDA

A região r tem $L_r = L$ trabalhadores não qualificados e K_r trabalhadores qualificados, os quais possuem a seguinte função de utilidade quase-linear:

$$U_r^b = \alpha \ln(C_{X_r}^b) + C_{A_r}^b, \quad \alpha > 0, \quad (33)$$

onde $b \in \{L, K_r\}$ é o índice que diferencia entre os agentes representativos de cada grupo de consumidores/trabalhadores da região r ; $C_{A_r}^b$ é a demanda pela *commodity* do agente representativo de cada grupo; e $C_{X_r}^b$ é a demanda agregada pelas manufaturas. Tecnicamente, $C_{X_r}^b$ é uma função com elasticidade de substituição constante que agrega as quantidades demandadas de cada variedade do bem manufaturado:

$$C_{X_r}^b = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{1r}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{2r}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \dots + \sum_{v_R=1}^{N_R} (x_{Rr}^{v_R})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \sigma > 1, \quad (34)$$

onde N_i é o número de variedades fabricadas na região i , $i = 1, \dots, R$; $x_{ir}^{v_i}$ é a quantidade da variedade v_i da região i que é consumida pelo agente representativo de cada grupo da região r ; e σ é a elasticidade de substituição entre as variedades do bem diferenciado. Como já exposto no Capítulo 3, as variedades são substitutas perfeitas se $\sigma \rightarrow \infty$ e imperfeitas se $1 < \sigma < \infty$. Quanto menor o valor de σ , maior o grau de diferenciação entre as variedades.

Dado que o bem agrícola é o numerário do sistema econômico, a restrição orçamentária do agente representativo de cada grupo é:

$$P_r C_{X_r}^b + C_{A_r}^b = Y_r^b, \quad (35)$$

$$P_r = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (\tau_{1r} p_{1r}^{v_1})^{1-\sigma} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (\tau_{2r} p_{2r}^{v_2})^{1-\sigma} + \dots + \sum_{v_R=1}^{N_R} (\tau_{Rr} p_{Rr}^{v_R})^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

onde Y_r^b é a renda do agente representativo de cada grupo da região r ; P_r é o índice de preço das variedades do bem manufaturado na região r ; $p_{ir}^{v_i}$ é o preço FOB da variedade v_i proveniente da região i na região r ; e τ_{ir} são os custos de transporte de uma unidade de qualquer variedade entre as regiões i e r , os quais provêm da equação (30). Se $\tau_{ir} = 1$, então há igualdade dos preços FOB, $p_{ir}^{v_i}$, e CIF, $\tau_{ir} p_{ir}^{v_i}$, da variedade v_i proveniente de i na região r ; e se $1 < \tau_{ir} < \infty$, então surge uma diferença entre os preços FOB e CIF enfrentados pelos consumidores da região r .

Seguindo a mesma lógica expressa na seção A.1 do Apêndice A para o modelo

com duas regiões, as demandas são obtidas solucionando o problema do consumidor representativo (33)-(35):

$$C_{X_r}^b = \alpha P_r^{-1}, \quad C_{A_r}^b = Y_r^b - \alpha, \quad (36)$$

$$x_{rr}^{v_r} = \alpha (p_{rr}^{v_r})^{-\sigma} P_r^{\sigma-1} \quad \text{para } v_r = 1, \dots, N_r, \quad (37)$$

$$x_{ir}^{v_i} = \alpha (\tau_{ir} p_{ir}^{v_i})^{-\sigma} P_r^{\sigma-1} \quad \text{para } v_i = 1, \dots, N_i, \quad (38)$$

onde a equação (36) apresenta a função demanda pela *commodity* e a função demanda agregada pelo bem diferenciado, sendo α o valor total gasto em manufaturas; a equação (37), a função demanda individual de cada variedade da região r ; e a equação (38), a função demanda individual de cada variedade da região i , $i = 1, \dots, R$ e $i \neq r$. Como discutido no Capítulo 3, considera-se daqui para a frente apenas um consumidor representativo ao tratar do setor manufatureiro. Isso é possível porque o nível de renda, que é a única diferença entre os dois grupos, não afeta a demanda do bem diferenciado.

A utilidade indireta do agente representativo de cada grupo da região r é encontrada incorporando a equação (36) na (33):

$$V_r^b = -\alpha \ln(P_r) + Y_r^b + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (39)$$

4.3 OFERTA

As funções de produção e de custo do bem agrícola na região r são, respectivamente:

$$A_r = f(L_r^a) = L_r^a \quad \text{e} \quad CA_r = g(A_r) = w_r^a L_r^a,$$

onde A_r é a quantidade produzida da *commodity*; L_r^a é o número de trabalhadores não qualificados da região r empregados no setor agrícola; e w_r^a é o salário dos trabalhadores não qualificados agrícolas na região r . Visto que o preço da *commodity* é unitário por ser o numerário da economia, a competição perfeita implica que o salário dos trabalhadores não qualificados agrícolas também é unitário, isto é, $w_r^a = 1$.

No setor manufatureiro, a condição de equilíbrio do mercado para uma variedade v_r da região r é:

$$X_r^{v_r} = \sum_{i=1}^R (L + K_i) \tau_{ri} x_{ri}^{v_r}, \quad v_r = 1, \dots, N_r, \quad (40)$$

onde $X_r^{v_r}$ é a quantidade ofertada da variedade v_r ; $x_{ri}^{v_r}$ é a quantidade demandada da variedade v_r pelo agente representativo da região i ; τ_{ri} é a demanda indireta decorrente de uma parte do produto ser perdida no percurso entre as regiões r e i ; L é o número de trabalhadores não qualificados em cada região; e K_i é o número de trabalhadores qualificados na região i .

O número de firmas do setor de competição monopolística na região r equivale ao número de variedades, N_r , em razão das economias de escala internas, as quais são modeladas por meio de um componente variável de custos, $l_r^{v_r} = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} c X_r^{v_r}$ trabalhadores não qualificados, e um componente fixo, $k_r^{v_r} = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ trabalhadores qualificados. Como a remuneração da mão de obra não qualificada é $w_r^m = 1$, para garantir a existência de ambos os setores na localidade, e a da mão de obra qualificada é H_r , a função de custo da firma produtora da variedade v_r é:

$$cX_r^{v_r} = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} (cX_r^{v_r} + H_r), \quad -1 < \eta < 1 \quad \text{e} \quad v_r = 1, \dots, N_r. \quad (41)$$

O termo $N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ introduz os efeitos de congestionamento através da transformação dos custos de produção em uma função do número de firmas manufatureiras na localidade. Como aprofundado no Capítulo 3, se $0 < \eta < 1$, então os custos de congestionamento surgem como uma nova força de dispersão espacial; se $-1 < \eta < 0$, então os benefícios de congestionamento surgem como uma nova força de aglomeração espacial; e se $\eta = 0$, então recupera-se o modelo original de Pflüger (2004), sem efeitos de congestionamento.

Substituindo (40) em (41) e multiplicando a parcela de (40) referente à demanda de cada região, $(L + K_i)\tau_{ri}x_{ri}^{v_r}$, pelo respectivo preço FOB, $p_{ri}^{v_r}$, obtém-se a seguinte função de lucro da firma produtora da variedade v_r :

$$\pi_r^{v_r} = \sum_{i=1}^R \left[(p_{ri}^{v_r} - cN_r^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_i)\tau_{ri}x_{ri}^{v_r} \right] - H_r N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}, \quad v_r = 1, \dots, N_r. \quad (42)$$

Visto que as empresas não afetam individualmente as condições gerais do mercado, a firma v_r desconsidera o seu impacto sobre os índices de preço regionais ao determinar seu preço de equilíbrio em cada região. Substituindo (37) e as análogas de (38) para as regiões $i = 1, \dots, R$, $i \neq r$, em (42), a maximização do lucro – semelhante à realizada para o modelo com duas regiões na seção A.2 do Apêndice A – demonstra que o preço FOB independe da origem do comprador:

$$p_{ri}^{v_r} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} = p_{ri}, \quad i = 1, \dots, R \quad \text{e} \quad v_r = 1, \dots, N_r. \quad (43)$$

Dado que os parâmetros que determinam o preço FOB são comuns a todas as empresas da região r , a equação (43) também evidencia que o preço que maximiza o lucro de cada variedade da região r é idêntico. Nesse contexto, como examinado no Capítulo 3, o agente representativo de cada região consome quantidades idênticas de cada variedade fabricada em r . Consequentemente, pode-se utilizar as notações $x_{rr}^{v_r} = x_{rr}$, $x_{ri}^{v_r} = x_{ri}$ e $X_r^{v_r} = X_r, \forall v_r$.

A incorporação das equações (40) e (43) na equação (42) em conjunto com a condição de lucro zero origina a seguinte relação entre a quantidade produzida de cada variedade, X_r , e os seus custos fixos, H_r :

$$X_r = \left(\frac{\sigma - 1}{c} \right) H_r, \quad \forall v_r. \quad (44)$$

4.4 EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO

Como a mão de obra qualificada não tem oportunidade de migrar no curto prazo, o valor das variáveis endógenas no equilíbrio de curto prazo é encontrado por intermédio das seguintes definições:

$$\lambda_r = \frac{K_r}{K_{tot}} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{L}{K_{tot}},$$

onde $K_{tot} = \sum_{i=1}^R K_i$ é a quantidade total de mão de obra qualificada na economia; λ_r é a fração da mão de obra qualificada na região r ; e ρ é a razão da quantidade de mão de obra não qualificada em cada região pela quantidade total de mão de obra qualificada.

Uma vez que K_r é fixo no curto prazo e que cada firma emprega $k_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ trabalhadores qualificados, o pleno emprego dos fatores produtivos implica que o número de firmas na região r no equilíbrio de curto prazo é:

$$K_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} N_r = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} \quad \Leftrightarrow \quad N_r = K_r^{1-\eta} = (\lambda_r K_{tot})^{1-\eta}. \quad (45)$$

Incorporando a equação (45) na (43), encontra-se uma nova formulação para o preço FOB de qualquer variedade da região r com base nos parâmetros do modelo:

$$p_{ri} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} (\lambda_r K_{tot})^\eta, \quad i = 1, \dots, R \quad \text{e} \quad \forall v_r. \quad (46)$$

Seguindo os passos adotados na seção A.3 do Apêndice A para o modelo com duas regiões, ao utilizar (45), (46) e as suas análogas para as regiões $i = 1, \dots, R, i \neq r$, em (35), obtém-se a seguinte formulação para o índice de preço do bem diferenciado

na região r :

$$P_r = \frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\sum_{i=1}^R \lambda_i^{1-\sigma\eta} \varphi_{ir} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (47)$$

onde $0 \leq \varphi_{ir} = \tau_{ir}^{1-\sigma} \leq 1$ é a liberdade comercial entre as regiões i e r , a qual aumenta à medida que os custos de transporte diminuem. Partindo da equação (30), é possível expressar φ_{ir} de diferentes formas:

$$\varphi_{ir} = \varphi_{ri} = \begin{cases} \tau_{ri}^{1-\sigma} = (\tau^{D_{ri}})^{1-\sigma} = \varphi^{D_{ri}} & \text{se } r \neq i \\ 1 & \text{se } r = i \end{cases} \quad (48)$$

onde D_{ri} é a distância entre as regiões r e i ; τ é a tecnologia de transporte da economia; e $0 \leq \varphi = \tau^{1-\sigma} \leq 1$ representa a liberdade comercial inter-regional da economia. De acordo com a equação (48), quanto maior a distância entre i e r , menor a liberdade comercial entre as duas regiões.

Utilizando as equações (37), (43), (46), (47) e as análogas de (38) e (47) para as regiões $i = 1, \dots, R, i \neq r$, na equação (42) em conjunto com a condição de lucro zero, obtém-se:

$$H_r = \frac{\alpha}{\sigma \lambda_r^{\sigma\eta}} \sum_{a=1}^R \left[\frac{(\lambda_a + \rho) \varphi_{ra}}{\sum_{j=1}^R \lambda_j^{1-\sigma\eta} \varphi_{ja}} \right], \quad (49)$$

onde H_r é a remuneração da mão de obra qualificada da região r no equilíbrio de curto prazo, a qual se ajusta para garantir a manutenção da condição de lucro zero. Para encontrar a quantidade produzida, X_r , com base nos parâmetros do modelo e, conseqüentemente, finalizar a derivação do valor de equilíbrio das variáveis endógenas no curto prazo, basta substituir (49) em (44):

$$X_r = \frac{\alpha(\sigma - 1)}{\sigma C \lambda_r^{\sigma\eta}} \sum_{a=1}^R \left[\frac{(\lambda_a + \rho) \varphi_{ra}}{\sum_{j=1}^R \lambda_j^{1-\sigma\eta} \varphi_{ja}} \right]. \quad (50)$$

Como explicado ao final da seção análoga do Capítulo 3, a derivação é válida somente se o setor agrícola estiver ativo em todas as regiões. Dessarte, a Proposição 6 – demonstrada no Apêndice B – apresenta a condição que os parâmetros devem satisfazer para garantir a consistência dos resultados analíticos em uma economia com $R \geq 2$ regiões.

Proposição 6 – Em uma economia na qual todas as regiões possuam a mesma quantidade de mão de obra não qualificada, o setor agrícola continua ativo em todas as regiões se a seguinte condição é válida:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(R\rho + 1)(\sigma - 1)}.$$

4.5 EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO

Como os trabalhadores qualificados apresentam mobilidade inter-regional no longo prazo, eles migram para a região na qual auferem maior utilidade indireta. Incorporando as equações (47) e (49) na (39), obtém-se a utilidade indireta da mão de obra qualificada¹ na região r :

$$V_r(\vec{\lambda}) = -\alpha \ln \left(\frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\sum_{i=1}^R \lambda_i^{1-\sigma\eta} \varphi_{ir} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma \lambda_r^{\sigma\eta}} \sum_{a=1}^R \left[\frac{(\lambda_a + \rho) \varphi_{ra}}{\sum_{j=1}^R \lambda_j^{1-\sigma\eta} \varphi_{ja}} \right] + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)], \quad r = 1, \dots, R. \quad (51)$$

A dinâmica migratória da mão de obra qualificada é representada pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas:

$$\frac{d\lambda_r}{dt} = \gamma \lambda_r \left[V_r(\vec{\lambda}) - \sum_{z=1}^R \lambda_z V_z(\vec{\lambda}) \right], \quad r = 1, \dots, R, \quad (52)$$

onde $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R]$ é o vetor com as frações da mão de obra qualificada em cada região; e $\gamma > 0$ é o fator de ajuste exponencial, o qual, dependendo de seu valor, acelera ou freia o processo migratório.

A equação (52) sinaliza que a taxa de mudança na fração de trabalhadores qualificados na região r ao longo do tempo é proporcional à diferença entre a utilidade indireta em r e a média aritmética ponderada das utilidades indiretas em todas as regiões. Se $V_r(\vec{\lambda})$ é maior que a média ponderada, então a região r atrairá a mão de obra qualificada; se $V_r(\vec{\lambda})$ é menor que a média ponderada, então a região r afugentará a mão de obra qualificada; e se $V_r(\vec{\lambda})$ é igual à média ponderada, então a região r continuará com a mesma quantidade de mão de obra qualificada.

Independente da topologia espacial adotada, o modelo com $R \geq 2$ regiões também possui quatro forças econômicas. Dada a inexistência de uma equação que

¹ Dado que apenas a mão de obra qualificada migra, pode-se eliminar o índice b da utilidade indireta.

sintetize os incentivos e desincentivos para a migração dos trabalhadores qualificados, como $\Delta V(\lambda)$ no modelo com duas regiões, não foi possível encontrar expressões analíticas para as forças econômicas quando há mais que duas regiões.

Não obstante, a explicação de cada força e a sua representação na utilidade indireta, $V_r(\vec{\lambda})$, seguem o exposto na seção 3.5.2. Assim, resumidamente, o efeito índice de preço, que é representado no logaritmo do primeiro termo de $V_r(\vec{\lambda})$, reflete a redução do custo de vida na região r por causa do aumento de λ_r . O efeito tamanho do mercado, que é representado no numerador do somatório do segundo termo de $V_r(\vec{\lambda})$, reflete a expansão do mercado consumidor da região r em razão do aumento de λ_r . O efeito extensão da competição, que é representado no denominador do somatório do segundo termo de $V_r(\vec{\lambda})$, reflete o acirramento da disputa por consumidores da região r devido ao aumento de λ_r . Os efeitos de congestionamento, que são representados no denominador da fração que multiplica o somatório do segundo termo de $V_r(\vec{\lambda})$, refletem as externalidades positivas ou negativas decorrentes do aumento de λ_r .

4.5.1 Concentração Espacial da Economia

A ausência de uma equação que sintetize o comportamento migratório dos trabalhadores qualificados também impede que se obtenha um diagrama de bifurcação com todos os equilíbrios de longo prazo. Nesse contexto, a construção de um diagrama que mostre o nível de concentração espacial ocorre em duas etapas no modelo com $R \geq 2$ regiões. Para cada valor de liberdade comercial inter-regional, $0 \leq \varphi \leq 1$, a primeira etapa soluciona o problema de valor inicial da migração dos trabalhadores qualificados até que o sistema atinja o estado estacionário:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_r}{dt} = \gamma \lambda_r \left[V_r(\vec{\lambda}) - \sum_{z=1}^R \lambda_z V_z(\vec{\lambda}) \right], & r = 1, \dots, R \\ \vec{\lambda}(0) = \vec{\lambda}_0 \end{cases} \quad (53)$$

onde $\frac{d\lambda_r}{dt}$ é a equação (52); e $\vec{\lambda}_0 = [\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{R,0}]$ é o vetor com as frações da mão de obra qualificada em cada região no instante inicial. Semelhante ao realizado na seção 3.5.4, emprega-se o método de Euler para solucionar iterativamente o sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas:

$$\lambda_{r,t+1} = \lambda_{r,t} + \gamma \lambda_{r,t} \left[V_r(\vec{\lambda}_t) - \sum_{z=1}^R \lambda_{z,t} V_z(\vec{\lambda}_t) \right] h, \quad r = 1, \dots, R, \quad (54)$$

onde $\vec{\lambda}_t = [\lambda_{1,t}, \dots, \lambda_{R,t}]$; $\lambda_{r,t}$ é a fração de trabalhadores qualificados na região r no

instante t ; e $0 < h \ll 1$ é o pequeno passo temporal entre as iterações. No presente trabalho, as iterações são cessadas quando o seguinte critério é satisfeito: $|\varepsilon| \leq 10^{-7}$, onde $\varepsilon = \frac{\|\vec{\lambda}_{t+1} - \vec{\lambda}_t\|}{\|\vec{\lambda}_t\|}$ é o erro relativo estimado. Mais uma vez, a implementação do método de Euler no MATLAB[®] se baseou no algoritmo 22.3 de Chapra (2017).

Encontrado o estado estacionário da economia, $\vec{\lambda}_\infty$, a segunda etapa emprega a ideia de Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012) de utilizar o Índice de Herfindahl² (IH) para medir o nível de concentração espacial em uma economia com mais que duas regiões:

$$IH = \sum_{r=1}^R (\lambda_{r,\infty})^2, \quad (55)$$

onde $\lambda_{r,\infty}$ é a fração de trabalhadores qualificados na região r no estado estacionário. O nível de concentração é diretamente proporcional ao valor de IH . Se $IH = 1/R$, então todas as regiões possuem a mesma participação no setor manufatureiro; se $1/R < IH < 1$, então existem regiões com diferentes participações positivas no setor; e se $IH = 1$, então uma única região é responsável por todo o setor.

Dois importantes observações decorrem da metodologia acima. A primeira é que o mesmo valor de IH pode surgir em diferentes distribuições espaciais dos trabalhadores qualificados entre as localidades. A segunda é que diferente do modelo com duas regiões, no qual o diagrama de bifurcação expõe todos os equilíbrios de longo prazo, o diagrama aqui proposto sintetiza o nível de concentração espacial no estado estacionário de cada valor de φ relacionado a uma condição inicial específica. Em outras palavras, o diagrama não evidencia a participação de cada região na produção manufatureira, mas sim o nível de concentração geral da economia.

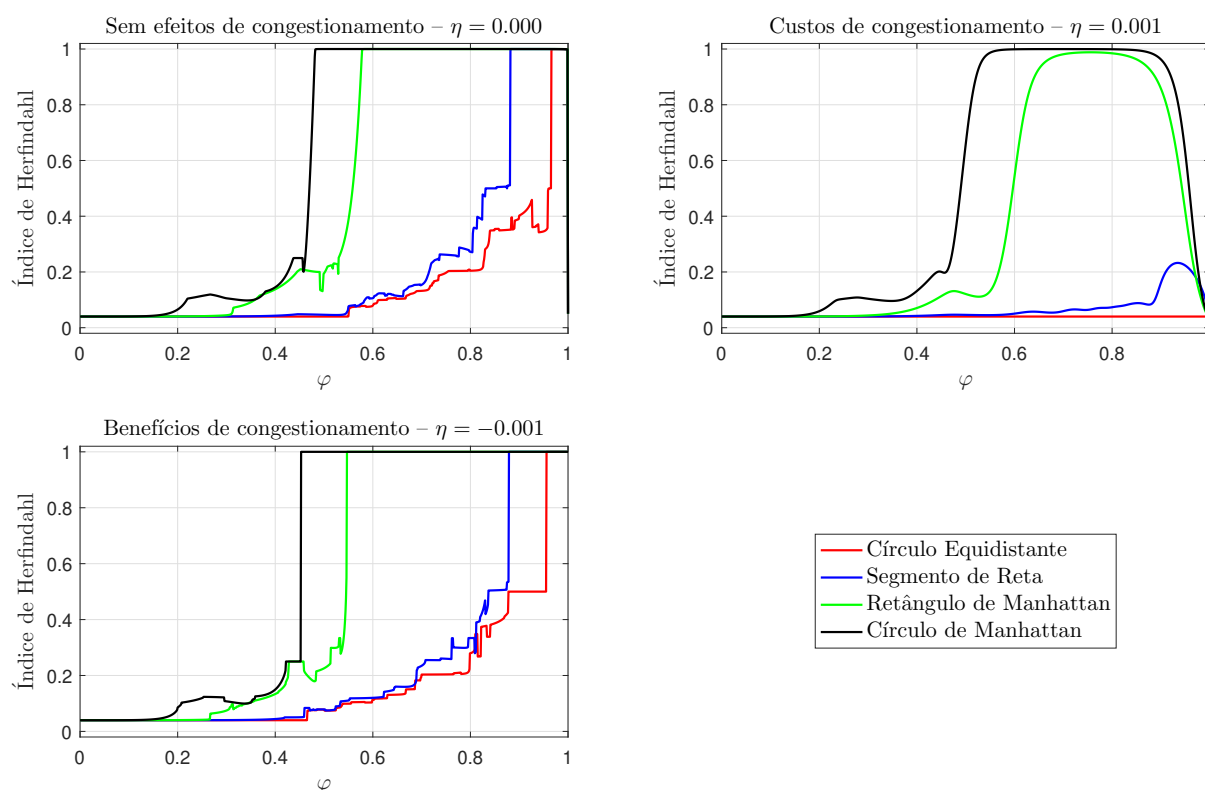
A Figura 13 mostra a concentração espacial para uma economia com vinte e cinco regiões em três cenários: (i) sem efeitos de congestionamento, $\eta = 0.000$; (ii) representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.001$; e (iii) representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.001$. Os três diagramas expõem a relação entre o Índice de Herfindahl – eixo vertical – e a liberdade comercial inter-regional da economia – eixo horizontal – para cada uma das quatro topologias espaciais, onde a linha vermelha representa o círculo equidistante; a azul, o segmento de reta; a verde, o retângulo de Manhattan; e a preta, o círculo de Manhattan. Na construção de cada diagrama, utilizou-se um passo de 10^{-3} para φ , isto é, a metodologia acima foi aplicada para $\varphi = 0.000, 0.001, \dots, 0.999, 1.000$. A condição inicial³, comum à simulação de cada

² Esse é normalmente usado para medir o nível de competição entre as firmas de uma indústria.

³ $\vec{\lambda}_0 = [0.0509, 0.0566, 0.0079, 0.0571, 0.0395, 0.0061, 0.0174, 0.0342, 0.0599, 0.0603, 0.0099, 0.0607, 0.0598, 0.0303, 0.0500, 0.0089, 0.0264, 0.0573, 0.0495, 0.0600, 0.0410, 0.0022, 0.0531, 0.0584, 0.0424]$.

valor de φ , foi sorteada aleatoriamente da distribuição uniforme contínua. Os demais parâmetros considerados são: $\sigma = 6$; $\rho = 1$, $\alpha = 0.03$, $c = 1$ e $K_{tot} = 10000$. Seguindo a Proposição 6, o valor de α garante que o setor agrícola continue ativo em todas regiões.

Figura 13 – Diagramas de concentração espacial de uma economia com vinte e cinco regiões



Fonte: Elaboração própria (2021).

No diagrama do cenário sem efeitos de congestionamento, $\eta = 0.000$, da Figura 13, a tendência da variação do nível de concentração espacial, Índice de Herfindahl, em função da variação da liberdade comercial inter-regional da economia, φ , nas quatro topologias espaciais é semelhante à verificada no cenário original de Pflüger (2004) com duas regiões, Figura 4. Em outras palavras, conforme o aumento de φ , a economia sai da dispersão idêntica da produção, $IH = 1/25$, para aglomerações parciais, $0 < IH < 1$, e posteriormente para a aglomeração total em uma localidade, $IH = 1$. Ademais, como no modelo com duas regiões, na ausência de externalidades positivas ou negativas, os trabalhadores qualificados são indiferentes sobre o seu local de moradia para o valor limite $\varphi = 1$.

Com exceção do círculo equidistante, o nível de concentração espacial segue um formato de curva de sino no cenário representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.001$. Dessarte, como no diagrama de bifurcação com duas regiões exposto na

Figura 5, o processo de integração, simbolizado pelo aumento de φ , induz inicialmente a aglomeração espacial, mas a sua continuação leva à re-dispersão a partir de certo ponto.

O círculo equidistante, única estrutura espacialmente neutra, possui apenas a distribuição uniforme como equilíbrio de longo prazo porque $\eta = 0.001$ é considerado um valor alto de predomínio de externalidades negativas para o modelo com vinte e cinco regiões. Dado os demais parâmetros utilizados nesta seção, as simulações no MATLAB[®] mostram que o formato de curva de sino para o Índice de Herfindahl surge somente se $\eta \leq 0.0003$. Portanto, a interação entre as quatro forças econômicas exposta no Capítulo 3 continua válida para o modelo com $R \geq 2$ regiões, mas, mantida a neutralidade espacial, a expansão do número de localidades aumenta a sensibilidade da economia em relação às externalidades.

Por fim, vale destacar que, nas quatro estruturas espaciais, o cenário representativo de benefícios de congestionamento apresenta maior concentração espacial em termos de intensidade e intervalo de φ com $IH > 1/25$ quando comparado ao cenário sem efeitos de congestionamento. Logo, assim como em uma economia com duas regiões, o predomínio de externalidades positivas expande a concentração geral do sistema econômico.

Passando à comparação das quatro topologias espaciais nos três diagramas da Figura 13, a ordenação pela concentração espacial em termos de intensidade e intervalo de φ com $IH > 1/25$ é a seguinte: (i) círculo de Manhattan; (ii) retângulo de Manhattan; (iii) segmento de reta; e (iv) círculo equidistante. Duas importantes conclusões surgem dessa ordenação. A primeira é que, como esperado, a topologia espacialmente neutra apresenta o menor nível de concentração espacial. Em outras palavras, a inclusão de regiões estrategicamente localizadas incentiva a aglomeração dos trabalhadores qualificados e, conseqüentemente, do setor manufatureiro.

A segunda conclusão está relacionada com as duas medidas estatísticas expostas na Tabela 1. Apesar do segmento de reta dispor da maior magnitude do benefício geográfico, $Dp(D) = 1.8942$, ele é apenas a terceira estrutura na ordenação pela concentração espacial por causa da sua baixa facilidade de ligação inter-regional, $\bar{D} = 8.3200$. Dada a pequena diferença entre a facilidade de ligação inter-regional do retângulo, $\bar{D} = 3.2000$, e do círculo de Manhattan, $\bar{D} = 3.2256$, a maior magnitude do benefício geográfico da última topologia, $Dp(D) = 0.5556$ contra $Dp(D) = 0.4830$, explica a sua posição favorável na ordenação. Portanto, no modelo com $R \geq 2$ regiões, o nível de concentração espacial do estado estacionário depende tanto dos parâmetros da economia quanto do balanceamento entre a acessibilidade de comunicação das regiões, \bar{D} , e a vantagem locacional do centro geográfico, $Dp(D)$, da topologia adotada.

4.5.2 Lei de Zipf

De acordo com Brakman et al. (1999), a *rank-size distribution* – distribuição das localidades pelo tamanho de suas populações – é normalmente descrita por leis de potência que externam uma relação linear inversa entre o logaritmo do tamanho da região e o logaritmo da posição da região na ordenação populacional decrescente:

$$\ln(M_r) = \ln(\beta) - q \ln(C_r), \quad (56)$$

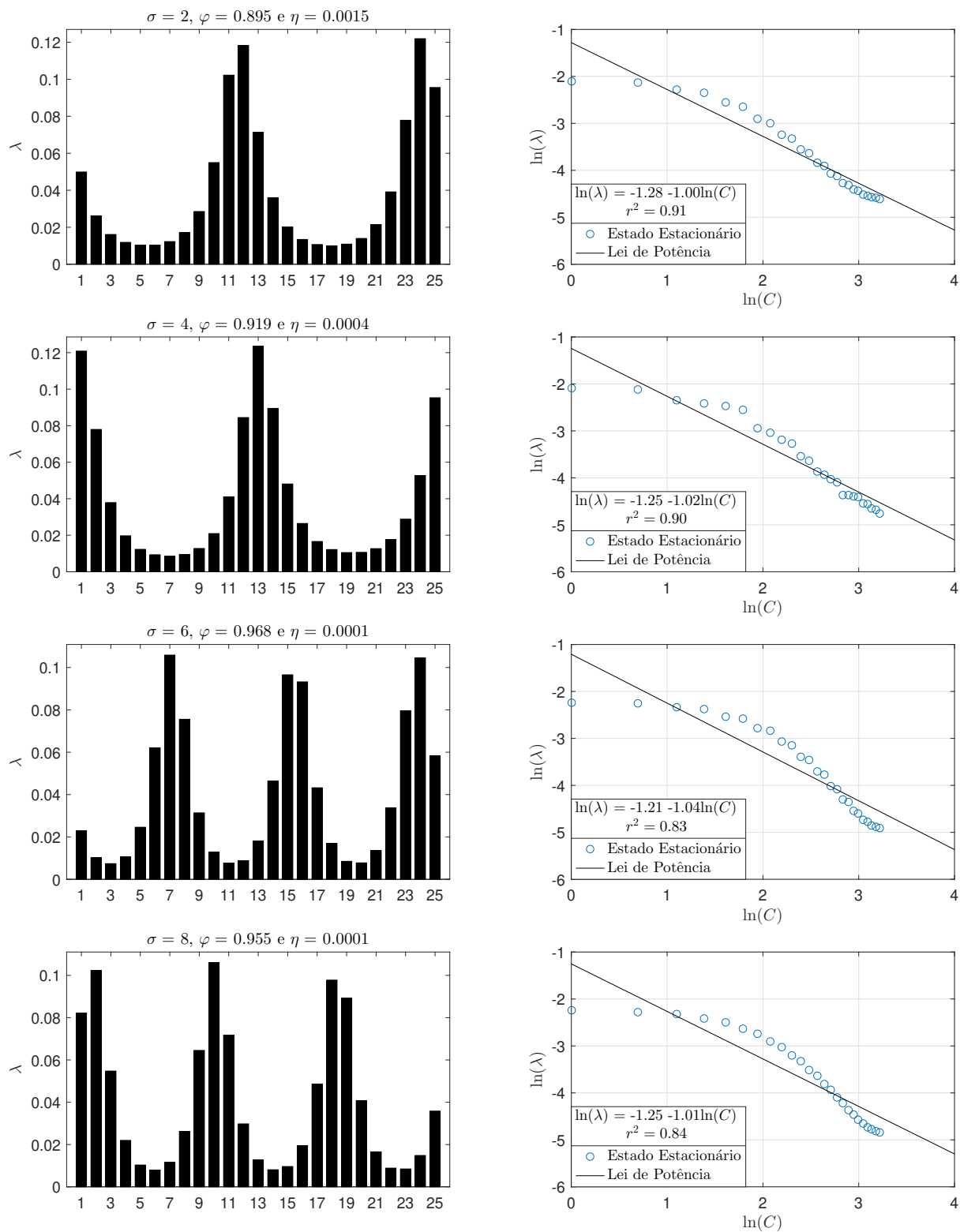
onde M_r é o tamanho da região r ; β é uma constante; e C_r é a posição da região r na ordenação decrescente. Se $q = 1$, então a lei de Zipf, que prevê que a maior região é k vezes mais populosa que a k -ésima maior, é válida; se $q > 1$, então a concentração é maior que a prevista pela lei de Zipf; se $0 < q < 1$, então a concentração é menor que a prevista pela lei de Zipf; e se $q = 0$, então ocorre a distribuição uniforme no espaço.

A metodologia para descobrir se o modelo aqui proposto é capaz de originar a lei de Zipf tem duas etapas. Selecionados os parâmetros, a primeira etapa resolve o problema de valor inicial da equação (53). Como, por hipótese, todas as localidades possuem o mesmo contingente de trabalhadores não qualificados, pode-se considerar que $M_r = \lambda_r$. Logo, a segunda etapa ordena de forma decrescente as regiões pela fração de trabalhadores qualificados no estado estacionário e realiza a estimativa da lei de potência conforme a equação (56).

A Figura 14 mostra que distribuição espacial de longo prazo de uma economia com vinte e cinco regiões dispostas em um círculo equidistante segue o previsto pela lei de Zipf para pelo menos quatro combinações de parâmetros: (i) $\sigma = 2$, $\varphi = 0.895$ e $\eta = 0.0015$; (ii) $\sigma = 4$, $\varphi = 0.919$ e $\eta = 0.0004$; (iii) $\sigma = 6$, $\varphi = 0.968$ e $\eta = 0.0001$; e (iv) $\sigma = 8$, $\varphi = 0.955$ e $\eta = 0.0001$. A coluna da esquerda expõe a distribuição estacionária, onde as barras representam a fração da mão de obra qualificada em cada região; e a coluna da direita, a lei de Zipf, onde os pontos azuis representam o estado estacionário real e a linha preta o estimado pela lei de potência. Os demais parâmetros considerados nas simulações são os mesmos da Figura 13, isto é, $\rho = 1$, $\alpha = 0.03$, $c = 1$ e $K_{tot} = 10000$.

De modo geral, a Figura 14 evidencia que para pelo menos quatro valores de elasticidade de substituição entre as variedades do bem diferenciado, σ , existe um cenário com custos de congestionamento, $0 < \eta < 1$, no qual um valor de liberdade comercial inter-regional, φ , possui uma alocação espacial compatível com a lei de Zipf como equilíbrio de longo prazo. Portanto, assim como o modelo Centro-Periferia com custos de congestionamento em uma estrutura de círculo equidistante (BRAKMAN et al., 1999), o modelo aqui proposto foi capaz de originar distribuições estacionárias que são descritas pela lei de Zipf.

Figura 14 – Lei de Zipf



Fonte: Elaboração própria (2021).

Uma observação interessante é que, além de serem compatíveis com a lei de Zipf, as hierarquias regionais das distribuições espaciais de equilíbrio são geometricamente semelhantes às consideradas nos modelos de Christaller e Lösch da Economia Regional. Conforme Capello (2016), esses modelos têm como característica possuir um sistema de centros e sub-centros alternados, o qual é reproduzido com certo grau de imperfeição no estado estacionário das situações expostas na Figura 14.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentou-se uma generalização do modelo da Nova Geografia Econômica proposto por Pflüger (2004) através da incorporação de efeitos de congestionamento e da expansão do sistema econômico para $R \geq 2$ regiões. De maneira geral, esses efeitos são externalidades negativas (custos) ou positivas (benefícios) que desincentivam ou incentivam a continuação do processo de aglomeração espacial da economia. Dado que o modelo de Pflüger (2004) apresenta soluções analíticas para as variáveis endógenas no curto prazo e equilíbrios estáveis de aglomeração parcial no longo prazo, o trabalho procurou construir um modelo que supere três limitações do modelo Centro-Periferia (KRUGMAN, 1991): (i) ausência de expressão analítica para a remuneração da mão de obra qualificada; (ii) inexistência de situações nas quais as regiões têm participação positiva na produção, mas em grau de importância diverso; e (iii) ausência de custos ou benefícios de congestionamento.

Seguindo o aperfeiçoamento de Van Marrewijk (2006) e Brakman, Garretsen e van Marrewijk (2012) para a modelagem de Brakman et al. (1996), a monografia incorporou os efeitos de congestionamento como uma nova força econômica que transforma os custos de produção do bem diferenciado na região r em uma função do número de firmas manufatureiras em r . Dependendo do valor do parâmetro que governa a intensidade da nova força, η , tem-se três grupos de cenários. No primeiro, $0 < \eta < 1$, os custos de produção na região r crescem com o aumento do número de firmas em r e, conseqüentemente, os custos de congestionamento surgem como nova força de dispersão espacial. No segundo, $-1 < \eta < 0$, os custos de produção na região r diminuem com o aumento do número de firmas em r e, conseqüentemente, os benefícios de congestionamento surgem como nova força de aglomeração espacial. No terceiro, $\eta = 0$, os custos de produção em r independem do número de firmas em r , recuperando o modelo original de Pflüger (2004).

Após derivar o modelo aqui proposto com duas regiões, encontrou-se formulações analíticas tanto para a nova força como para as três forças padrões da Nova Geografia Econômica – efeito índice de preço, efeito tamanho do mercado e efeito extensão da competição –, bem como elaborou-se as condições de não buraco negro geral e individual para cada um dos três grupos de cenário. Essas informações foram utilizadas para explicar a relação entre a distribuição espacial da mão de obra qualificada, λ , e a liberdade comercial inter-regional, φ , no longo prazo para três cenários representativos. Resumidamente, conforme o aumento da liberdade comercial, a alocação espacial da produção manufatureira: (i) realiza uma transição suave da dispersão para a aglomeração total em uma região no cenário original de Pflüger (2004), $\eta = 0.00$; (ii) sai da dispersão para a aglomeração parcial e novamente para a dispersão no cenário representativo de custos de congestionamento, $\eta = 0.01$; e (iii) sai suavemente

da dispersão para a aglomeração parcial, mas abruptamente da aglomeração parcial para a aglomeração total no cenário representativo de benefícios de congestionamento, $\eta = -0.01$.

Diferente dos demais, o último cenário apresenta uma transição espacial distinta quando a análise considera a redução ao invés do aumento da liberdade comercial. Nesse caso, em teoria, a economia não sai do equilíbrio estável centro-periferia, mas, na prática, para $\varphi < \varphi^S$, a economia pode convergir para outro tipo de equilíbrio estável se ocorrer uma migração de alguns poucos trabalhadores qualificados. Por fim, vale destacar que, quando a condição de não buraco negro geral não é satisfeita, o único equilíbrio estável é o de dispersão nos cenários com custos de congestionamento e o de aglomeração total nos cenários com benefícios de congestionamento.

Derivado o modelo geral com $R \geq 2$ regiões, o trabalho buscou entender o impacto da incorporação de regiões estrategicamente localizadas no equilíbrio de longo prazo. Para isso, quatro topologias espaciais foram consideradas: (i) o círculo equidistante; (ii) o segmento de reta; (iii) o retângulo de Manhattan; e (iv) o círculo de Manhattan. Utilizando como exemplo uma economia com vinte e cinco regiões, as simulações numéricas mostram que a tendência da variação do nível de concentração espacial, IH , em função da variação da liberdade comercial inter-regional, φ , nas quatro estruturas é semelhante à verificada nos diagramas de bifurcação para uma economia com duas regiões.

Comparando os resultados das simulações de cada topologia espacial em três cenários representativos de efeitos de congestionamento, $\eta = 0.000$, $\eta = 0.001$ e $\eta = -0.001$, conclui-se que o nível de concentração espacial em uma economia com $R \geq 2$ regiões depende tanto dos parâmetros do modelo quanto do balanceamento entre a facilidade de ligação inter-regional e a magnitude do benefício geográfico da topologia adotada. Ademais, assim como o modelo Centro-Periferia em uma estrutura de círculo equidistante (BRAKMAN et al., 1999), o modelo aqui proposto possui situações com custos de congestionamento em que a economia converge para um estado estacionário semelhante à lei de Zipf.

Equivalente ao realizado por Stelder (2005) para a Europa Ocidental, as perspectivas futuras de pesquisa passam pela utilização de uma topologia espacial mais realista para visualizar se o modelo aqui proposto é capaz de explicar a distribuição espacial da atividade econômica brasileira. Para isso, uma primeira aproximação pode ser feita por meio da topologia de grade com três dimensões e barreiras físicas ao deslocamento proposta por Stelder (2005). Posteriormente, uma pesquisa aprofundada sobre as coordenadas geográficas das principais localidades e a malha logística de cada modal de transporte pode embasar a construção de uma topologia com as principais características geográficas do Brasil.

REFERÊNCIAS

BRAKMAN, S.; GARRETSEN, H.; VAN MARREWIJK, C. **An introduction to geographical economics**. 1. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.

BRAKMAN, S.; GARRETSEN, H.; VAN MARREWIJK, C. **The new introduction to geographical economics**. 2. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012.

BRAKMAN, S. et al. Negative feedbacks in the economy and industrial location. **Journal of Regional Science**, v. 36, n. 4, p. 631–651, 1996.

BRAKMAN, S. et al. The return of Zipf: towards a further understanding of the rank-size curve. **Journal of Regional Science**, v. 39, n. 1, p. 183–213, 1999.

CAPELLO, R. **Regional economics**. 2. ed. New York, US: Routledge, 2016.

CHAPRA, S. C. **Applied numerical methods: with MATLAB for engineers and scientists**. 4. ed. New York, US: McGraw-Hill Education, 2017.

COMBES, P-P. et al. The rise and fall of spatial inequalities in France: a long-run perspective. **Explorations in Economic History**, v. 48, n. 2, p. 243–271, 2011.

DELAMARE, A. F. S.; JUCHEM NETO, J. P. Modelo de aglomeração espacial com custos ou benefícios de congestionamento. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 48., 2020, Online. **Anais eletrônicos** [...]. ANPEC, 2020. Disponível em: https://anpec.org.br/encontro/2020/submissao/files_/i10-4c4b56a412abea750997bc3570166d42.pdf. Acesso em: 3 set. 2021.

DIXIT, A. K.; STIGLITZ, J. E. Monopolistic competition and optimum product diversity. **The American Economic Review**, v. 67, n. 3, p. 297–308, 1977.

FORSLID, R.; OTTAVIANO, G. I. P. An analytically solvable core-periphery model. **Journal of Economic Geography**, v. 3, n. 3, p. 229–240, 2003.

FUJITA, M.; KRUGMAN, P.; VENABLES, A. J. **The spatial economy**. MIT Press, 1999.

FUJITA, M.; THISSE, J-F. **Economics of agglomeration: cities, industrial location and, regional growth**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. **Sistema de contas regionais: Brasil 2018**. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2020. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101765>. Acesso em: 6 abr. 2021.

KIM, S. Expansion of markets and the geographic distribution of economic activities: the trends in U. S. regional manufacturing structure, 1860–1987. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 110, n. 4, p. 881–908, 1995.

KRUGMAN, P. Increasing returns and economic geography. **Journal of Political Economy**, v. 99, n. 3, p. 483–499, 1991.

NEARY, J. P. Of Hype and hyperbolas: introducing the new conomic geography. **Journal of Economic Literature**, v. 39, n. 2, p. 536–561, 2001.

ORGANIZAÇÃO PARA A COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO – OCDE. **OECD regions and cities at a glance 2018**. Paris: OECD Publishing, 2018. Disponível em: https://oecd-ilibrary.org/content/publication/reg_cit_glance-2018-en. Acesso em: 7 abr. 2021.

OTTAVIANO, G.; TABUCHI, T.; THISSE, J-F. Agglomeration and trade revisited. **International Economic Review**, v. 43, n. 2, p. 409–435, 2002.

PALUZIE, E.; PONS, J.; TIRADO, D. A. The geographical concentration of industry across Spanish regions, 1856–1995. **Review of Regional Research**, v. 24, n. 2, p. 143–160, 2004.

PFLÜGER, M. A simple, analytically solvable, Chamberlinian agglomeration model. **Regional Science and Urban Economics**, v. 34, n. 5, p. 565–573, 2004.

PFLÜGER, M.; SÜDEKUM, J. Integration, agglomeration and welfare. **Journal of Urban Economics**, v. 63, n. 2, p. 544–566, 2008.

SAMUELSON, P. A. The transfer problem and transport costs: the terms of trade when impediments are absent. **The Economic Journal**, Royal Economic Society, Wiley, v. 62, n. 246, p. 278–304, 1952.

STELDER, D. **Regions and cities**: five essays on interregional and spatial agglomeration modelling. 2005. Tese (Doutorado em Ciências Econômicas) – Universidade de Groningen, Groningen.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. 2. ed. Boca Raton, US: CRC Press, 2015.

VAN MARREWIJK, C. Geographical economics model with congestion. In: SCHUH, N.; SCHUSTER, P. (Ed.). **New regional economics in Central European economies**: the future of CENTROPE. Vienna, AT: Oesterreichische Nationalbank, 2006. P. 17–35.

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DO MODELO COM DUAS REGIÕES

Neste apêndice são expostos os principais passos para a derivação do modelo com duas regiões. Para facilitar a leitura, o título de cada seção do apêndice corresponde ao de sua análoga do Capítulo 3.

A.1 DEMANDA

O problema do agente representativo de cada grupo da região 1, equações (1)-(3), é solucionado em duas partes. A primeira consiste encontrar as quantidades ótimas da *commodity*, $C_{X_1}^b$, e agregada do bem manufaturado, $C_{A_1}^b$, sujeitas à restrição orçamentária:

$$\begin{aligned} \max_{C_{X_1}^b, C_{A_1}^b} \quad & \alpha \ln(C_{X_1}^b) + C_{A_1}^b \\ \text{s.a.} \quad & P_1 C_{X_1}^b + C_{A_1}^b = Y_1^b \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A solução do problema (A.1) passa pela construção do Lagrangiano e pela posterior obtenção das condições de primeira ordem:

$$\mathcal{L}_1 = \alpha \ln(C_{X_1}^b) + C_{A_1}^b + \lambda_1 (Y_1^b - P_1 C_{X_1}^b - C_{A_1}^b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial C_{A_1}^b} = 1 - \lambda_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial C_{X_1}^b} = \frac{\alpha}{C_{X_1}^b} - \lambda_1 P_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_{X_1}^b = \frac{\alpha}{\lambda_1 P_1} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \lambda_1} = Y_1^b - P_1 C_{X_1}^b - C_{A_1}^b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 C_{X_1}^b + C_{A_1}^b = Y_1^b \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.2) em (A.3) e o resultado dessa incorporação em (A.4), encontra-se a demanda pela *commodity* e demanda agregada pelo bem manufaturado:

$$C_{X_1}^b = \alpha P_1^{-1}, \quad C_{A_1}^b = Y_1^b - \alpha. \quad (\text{A.5})$$

A equação (A.5) mostra que o gasto total nas manufaturas é α , pois essa é a parcela da renda do agente representativo de cada grupo que não é despendida no bem agrícola.

A segunda parte da solução do problema do consumidor representativo de cada

grupo da região 1 consiste em descobrir a demanda ótima por cada variedade do bem diferenciado. Para isso, maximiza-se a função com elasticidade de substituição constante, $C_{X_1}^b$, sujeita à restrição do gasto total, a qual iguala a soma do valor despendido em cada variedade ao parâmetro α :

$$\begin{aligned} \max_{x_{11}^{v_1}, x_{21}^{v_2}} & \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{11}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{21}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ \text{s.a.} & \sum_{v_1=1}^{N_1} p_{11}^{v_1} x_{11}^{v_1} + \sum_{v_2=1}^{N_2} \tau p_{21}^{v_2} x_{21}^{v_2} = \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O Lagrangiano do problema (A.6) é:

$$\mathcal{L}_2 = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{11}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{21}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + \lambda_2 \left[\alpha - \sum_{v_1=1}^{N_1} p_{11}^{v_1} x_{11}^{v_1} + \sum_{v_2=1}^{N_2} \tau p_{21}^{v_2} x_{21}^{v_2} \right]$$

Para resolver o problema de maximização restrita, além das condições de primeira ordem genéricas para as variedades $v_1 = 1, \dots, N_1$ e $v_2 = 2, \dots, N_2$, é necessário derivar a condição para uma variedade específica, por exemplo, $v_1 = 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_{11}^1} = \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right) \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{11}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{21}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right) (x_{11}^1)^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda_2 p_{11}^1 = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_{11}^{v_1}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right) \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{11}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{21}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right) (x_{11}^{v_1})^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda_2 p_{11}^{v_1} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_{21}^{v_2}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} \right) \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{11}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (x_{21}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right) (x_{21}^{v_2})^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda_2 \tau p_{21}^{v_2} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda_2} = \alpha - \sum_{v_1=1}^{N_1} p_{11}^{v_1} x_{11}^{v_1} + \sum_{v_2=1}^{N_2} \tau p_{21}^{v_2} x_{21}^{v_2} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Dividindo (A.7) por (A.8) e (A.9), tem-se:

$$\frac{(x_{11}^1)^{-\frac{1}{\sigma}}}{(x_{11}^{v_1})^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\lambda_2 p_{11}^1}{\lambda_2 p_{11}^{v_1}} \Leftrightarrow x_{11}^{v_1} = \left(\frac{p_{11}^1}{p_{11}^{v_1}} \right)^{\sigma} x_{11}^1 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{(x_{11}^1)^{-\frac{1}{\sigma}}}{(x_{21}^{v_2})^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\lambda_2 p_{11}^1}{\lambda_2 \tau p_{21}^{v_2}} \Leftrightarrow x_{21}^{v_2} = \left(\frac{p_{11}^1}{\tau p_{21}^{v_2}} \right)^{\sigma} x_{11}^1 \quad (\text{A.12})$$

Incorporando (A.11) e (A.12) em (A.10), encontra-se a demanda pela variedade $v_1 = 1$ da região 1:

$$\sum_{v_1=1}^{N_1} p_{11}^{v_1} \left(\frac{p_{11}^1}{p_{11}^{v_1}} \right)^\sigma x_{11}^1 + \sum_{v_2=1}^{N_2} \tau p_{21}^{v_2} \left(\frac{p_{11}^1}{\tau p_{21}^{v_2}} \right)^\sigma x_{11}^1 = \alpha$$

$$(p_{11}^1)^\sigma x_{11}^1 \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (p_{11}^{v_1})^{1-\sigma} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (\tau p_{21}^{v_2})^{1-\sigma} \right] = \alpha$$

Como $P_1 = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (p_{11}^{v_1})^{1-\sigma} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (\tau p_{21}^{v_2})^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$, então:

$$(p_{11}^1)^\sigma x_{11}^1 P_1^{1-\sigma} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x_{11}^1 = \alpha (p_{11}^1)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1}. \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.13) em (A.11) e (A.12), obtém-se, respectivamente, a demanda por cada variedade da região 1, v_1 , e da região 2, v_2 :

$$x_{11}^{v_1} = \alpha (p_{11}^{v_1})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \quad \text{para } v_1 = 1, \dots, N_1, \quad (\text{A.14})$$

$$x_{21}^{v_2} = \alpha (\tau p_{21}^{v_2})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \quad \text{para } v_2 = 1, \dots, N_2. \quad (\text{A.15})$$

A última etapa da derivação das preferências consiste em incorporar (A.5) na função de utilidade quase-linear para determinar a utilidade indireta do agente representativo de cada grupo da região 1:

$$V_1^b = \alpha \ln(\alpha P_1^{-1}) + Y_1^b - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad V_1^b = -\alpha \ln(P_1) + Y_1^b + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (\text{A.16})$$

A.2 OFERTA

Dado o preço unitário da *commodity*, a estrutura de produção, $A_1 = L_1^a$, e de custos, $CA_1 = w_1^a L_1^a$, a maximização do lucro mostra que o salário dos trabalhadores não qualificados agrícolas é $w_1^a = 1$. Uma vez que os trabalhadores não qualificados possuem mobilidade inter-setorial, $w_1^a = 1$ implica que a remuneração do fator variável do setor manufatureiro também é unitária, ou seja, $w_1^a = w_1^m = w_1 = 1$.

No setor manufatureiro, como expresso na equação (10), a função lucro da firma

produtora da variedade v_1 da região 1 é:

$$\pi_1^{v_1} = (p_{11}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_1)x_{11}^{v_1} + (p_{12}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_2)\tau x_{12}^{v_1} - H_1 N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}. \quad (\text{A.17})$$

Substituindo (A.14) e a análoga de (A.15) para a região 2 em (A.17), o problema da firma produtora da variedade v_1 fica:

$$\begin{aligned} \max_{p_{11}^{v_1}, p_{12}^{v_1}} \quad & \pi_1^{v_1} = (p_{11}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_1)\alpha(p_{11}^{v_1})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} + \\ & + (p_{12}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_2)\alpha\tau^{1-\sigma}(p_{12}^{v_1})^{-\sigma} P_2^{\sigma-1} - H_1 N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} \end{aligned}$$

Visto que a firma desconsidera o seu impacto nos índices de preço do bem manufaturado, P_1 e P_2 , as condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \pi_1^{v_1}}{\partial p_{11}^{v_1}} = (L + K_1)\alpha(p_{11}^{v_1})^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} - \sigma(p_{11}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_1)\alpha(p_{11}^{v_1})^{-\sigma-1} P_1^{\sigma-1} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1^{v_1}}{\partial p_{12}^{v_1}} &= (L + K_2)\alpha\tau^{1-\sigma}(p_{12}^{v_1})^{-\sigma} P_2^{\sigma-1} - \\ & - \sigma(p_{12}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_2)\alpha\tau^{1-\sigma}(p_{12}^{v_1})^{-\sigma-1} P_2^{\sigma-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Simplificando (A.18) e (A.19), descobre-se que:

$$p_{11}^{v_1} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} = p_{11} \quad \text{e} \quad p_{12}^{v_1} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} = p_{12}, \quad (\text{A.20})$$

ou seja, o preço FOB das variedades fabricadas na região é idêntico e independente da naturalidade do consumidor.

Utilizando a condição de lucro zero e o fato de que $p_{11} = p_{12}$ na equação (A.17), encontra-se a quantidade produzida por cada firma da região 1:

$$\begin{aligned} (p_{11}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_1)x_{11}^{v_1} + (p_{12}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L + K_2)\tau x_{12}^{v_1} - H_1 N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} &= 0 \\ (p_{11}^{v_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})[(L + K_1)x_{11}^{v_1} + (L + K_2)\tau x_{12}^{v_1}] - H_1 N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} &= 0 \end{aligned}$$

Como $p_{11} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$ e $X_1 = (L + K_1)x_{11}^{v_1} + (L + K_2)\tau x_{12}^{v_1}$, então:

$$\left(\frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} \right) X_1 - H_1 N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = \left(\frac{\sigma - 1}{c} \right) H_1. \quad (\text{A.21})$$

A.3 EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO

As definições $\lambda = K_1/K_{tot}$, $(1 - \lambda) = K_2/K_{tot}$ e $\rho = L/K_{tot}$ podem ser reescritas como:

$$K_1 = \lambda K_{tot}, \quad K_2 = (1 - \lambda)K_{tot} \quad e \quad L = \rho K_{tot}. \quad (A.22)$$

Aplicando $N_1 = K_1^{1-\eta} = (\lambda K_{tot})^{1-\eta}$ – onde a última igualdade provém de (A.22) – em (A.20), tem-se que:

$$p_{11} = \frac{\sigma C}{\sigma - 1} (\lambda K_{tot})^\eta = p_{12}. \quad (A.23)$$

Para determinar o índice de preço do bem manufaturado na região 1 como uma função dos parâmetros do modelo, a primeira etapa é notar que como $p_{11}^{v_1} = p_{11}$, $\forall v_1$, e $p_{21}^{v_2} = p_{21}$, $\forall v_2$, então:

$$P_1 = \left[\sum_{v_1=1}^{N_1} (p_{11}^{v_1})^{1-\sigma} + \sum_{v_2=1}^{N_2} (\tau p_{21}^{v_2})^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \Leftrightarrow P_1 = [N_1 (p_{11})^{1-\sigma} + N_2 (\tau p_{21})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (A.24)$$

A segunda etapa é incorporar $N_1 = K_1^{1-\eta} = (\lambda K_{tot})^{1-\eta}$ e (A.23), bem como suas análogas para a região 2, em (A.24):

$$P_1 = \left\{ (\lambda K_{tot})^{1-\eta} \left[\frac{\sigma C}{\sigma - 1} (\lambda K_{tot})^\eta \right]^{1-\sigma} + ((1 - \lambda) K_{tot})^{1-\eta} \left[\tau \frac{\sigma C}{\sigma - 1} ((1 - \lambda) K_{tot})^\eta \right]^{1-\sigma} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$P_1 = \left\{ \left(\frac{\sigma C}{\sigma - 1} \right)^{1-\sigma} K_{tot}^{1-\sigma\eta} [\lambda^{1-\sigma\eta} + \tau^{1-\sigma} (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}] \right\}^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Como $\tau^{1-\sigma} = \varphi$, então:

$$P_1 = \frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} [\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}]^{\frac{1}{1-\sigma}}. \quad (A.25)$$

No caso da remuneração dos trabalhadores qualificados, a derivação será realizada passo a passo para sinalizar os termos que representam cada uma das três forças que atuam sobre essa variável. O primeiro passo é substituir as demandas por cada variedade, equações (A.14) e análoga de (A.15) para a região 2, na função lucro,

equação (A.17), e aplicar a condição de lucro zero:

$$(p_{11}^{V_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L+K_1)\alpha(p_{11}^{V_1})^{-\sigma}P_1^{\sigma-1} + (p_{12}^{V_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}})(L+K_2)\alpha\tau^{1-\sigma}(p_{12}^{V_1})^{-\sigma}P_2^{\sigma-1} - H_1N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} = 0$$

Conforme exposto na seção 3.5.2: (i) o efeito tamanho do mercado é representado pelos termos $(L + K_1)$ e $(L + K_2)$; (ii) o efeito extensão da competição, pelo impacto de $P_1^{\sigma-1}$ em $\alpha(p_{11}^{V_1})^{-\sigma}P_1^{\sigma-1}$ e de $P_2^{\sigma-1}$ em $\alpha(\tau p_{12}^{V_1})^{-\sigma}P_2^{\sigma-1}$; e (iii) os efeitos de congestionamento, pelos termos $N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$.

O segundo passo consiste em utilizar as definições reescritas em (A.22) e o fato de que $p_{11} = p_{12}$:

$$\left[K_{tot}(\lambda + \rho)\alpha(p_{11}^{V_1})^{-\sigma}P_1^{\sigma-1} + K_{tot}((1 - \lambda) + \rho)\alpha\tau^{1-\sigma}(p_{12}^{V_1})^{-\sigma}P_2^{\sigma-1} \right] = \frac{H_1N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}}{p_{11}^{V_1} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}}$$

A única mudança em relação às forças está no efeito tamanho do mercado, o qual agora é sintetizado pelos termos $K_{tot}(\lambda + \rho)$ e $K_{tot}((1 - \lambda) + \rho)$.

O terceiro passo corresponde à incorporação das equações (A.20), (A.23), (A.25) e da análoga de (A.25) para a região 2:

$$\left[\frac{K_{tot}(\lambda + \rho)\alpha\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}(\lambda K_{tot})^\eta\right)^{-\sigma}}{K_{tot}^{1-\sigma\eta}\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)^{1-\sigma}\left(\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}\right)} + \frac{K_{tot}((1 - \lambda) + \rho)\alpha\tau^{1-\sigma}\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}(\lambda K_{tot})^\eta\right)^{-\sigma}}{K_{tot}^{1-\sigma\eta}\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)^{1-\sigma}\left(\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}\right)} \right] = \frac{H_1N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}}{\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} - cN_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}\right)}$$

Na nova etapa, (i) o efeito tamanho do mercado continua representado pelos termos $K_{tot}(\lambda + \rho)$ e $K_{tot}((1 - \lambda) + \rho)$; (ii) com a inclusão da equação (A.25) e de sua análoga para a região 2, o efeito extensão da competição passa a ser representado pelos denominadores das frações do lado esquerdo do sinal de igualdade; e (iii) os efeitos de congestionamento, além dos termos $N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}}$, passam também a ser representados pelos termos $(\lambda K_{tot})^\eta$, os quais surgem da repercussão direta da nova força econômica, $N_1^{\frac{\eta}{1-\eta}} = (\lambda K_{tot})^\eta$, no preço FOB das variedades da região 1.

Utilizando $\tau^{1-\sigma} = \varphi$ e simplificando, tem-se que:

$$\left[\frac{(\lambda + \rho)\alpha\lambda^{-\sigma\eta}}{\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)\left(\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}\right)} + \frac{((1 - \lambda) + \rho)\alpha\varphi\lambda^{-\sigma\eta}}{\left(\frac{\sigma c}{\sigma-1}\right)\left(\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}\right)} \right] = \frac{H_1}{\left(\frac{c}{\sigma-1}\right)}$$

Agora, (i) o efeito tamanho do mercado é simbolizado por $(\lambda + \rho)$ e $((1 - \lambda) + \rho)$; (ii) o efeito extensão da competição continua sendo simbolizado pelos denominadores das frações do lado esquerdo do sinal de igualdade; e (iii) os efeitos de congestionamento passam a ser simbolizados pelos termos $\lambda^{-\sigma\eta}$.

O último passo consiste na simplificação final da expressão:

$$H_1 = \frac{\alpha}{\sigma\lambda^{\sigma\eta}} \left[\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{\varphi((1 - \lambda) + \rho)}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} \right], \quad (\text{A.26})$$

onde H_1 é a remuneração da mão de obra qualificada no equilíbrio de curto prazo. A estrutura final das forças que atuam em H_1 é a seguinte: (i) o efeito tamanho do mercado é sintetizado pelos numeradores das duas frações internas; (ii) o efeito extensão da competição, pelos denominadores das duas frações internas; e (iii) os efeitos de congestionamento, pelo termo $\lambda^{\sigma\eta}$ da fração externa.

A.4 EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO

Incorporando (A.25) e (A.26) em (A.16), obtém-se a utilidade indireta alcançada pelos trabalhadores qualificados na região 1:

$$V_1(\lambda) = -\alpha \ln \left(\frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma\lambda^{\sigma\eta}} \left[\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{\varphi((1 - \lambda) + \rho)}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} \right] + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (\text{A.27})$$

Seguindo o mesmo procedimento para as equações análogas da região 2, tem-se a utilidade indireta alcançada em 2:

$$V_2(\lambda) = -\alpha \ln \left(\frac{\sigma C}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma(1 - \lambda)^{\sigma\eta}} \left[\frac{\varphi(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{((1 - \lambda) + \rho)}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} \right] + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (\text{A.28})$$

Posto que a utilidade indireta consiste do índice de preço, o qual representa um dos quatro efeitos econômicos que interagem na sociedade, e da remuneração da mão de obra qualificada, na qual atuam os outros três efeitos econômicos de acordo com a discussão da seção anterior, conclui-se que a utilidade indireta contém as forças econômicas do modelo na seguinte forma: (i) o efeito índice de preço no logaritmo do primeiro termo; (ii) o efeito tamanho do mercado no numerador das duas frações internas do segundo termo; (iii) o efeito extensão da competição no denominador das

duas frações internas do segundo termo; e (iv) os efeitos de congestionamento na expressão $\lambda^{\sigma\eta}$ para a região 1 e na expressão $(1 - \lambda)^{\sigma\eta}$ para a região 2 da fração externa do segundo termo.

Para encontrar a diferença de utilidade indireta dos trabalhadores qualificados entre as regiões 1 e 2, $\Delta V(\lambda)$, basta subtrair a equação (A.28) da (A.27):

$$\Delta V(\lambda) = \alpha \ln \left(\frac{\frac{\sigma c}{\sigma-1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}}{\frac{\sigma c}{\sigma-1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma \lambda^{\sigma\eta}} \left[\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{\varphi((1-\lambda) + \rho)}{\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right] - \frac{\alpha}{\sigma(1-\lambda)^{\sigma\eta}} \left[\frac{\varphi(\lambda + \rho)}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{((1-\lambda) + \rho)}{\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right].$$

Simplificando, encontra-se:

$$\Delta V(\lambda) = \frac{\alpha}{1-\sigma} \ln \left(\frac{\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma} \left[\frac{(\lambda + \rho)(\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1-\lambda)^{-\sigma\eta})}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{((1-\lambda) + \rho)(\varphi \lambda^{-\sigma\eta} - (1-\lambda)^{-\sigma\eta})}{\varphi \lambda^{1-\sigma\eta} + (1-\lambda)^{1-\sigma\eta}} \right]. \quad (A.29)$$

Com base no que foi exposto para $V_1(\lambda)$ e $V_2(\lambda)$, a estrutura final das forças econômicas em $\Delta V(\lambda) = V_1(\lambda) - V_2(\lambda)$ é a seguinte: (i) o efeito índice de preço no logaritmo do primeiro termo; (ii) o efeito tamanho do mercado nas expressões $(\lambda + \rho)$ e $((1 - \lambda) + \rho)$ dos numeradores das frações internas do segundo termo; (iii) o efeito extensão da competição nos denominadores das frações internas do segundo termo; e (iv) os efeitos de congestionamento nas expressões $(\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1 - \lambda)^{-\sigma\eta})$ e $(\varphi \lambda^{-\sigma\eta} - (1 - \lambda)^{-\sigma\eta})$ dos numeradores das frações internas do segundo termo.

Forças Econômicas

Visto que as forças econômicas condensam diferentes fenômenos induzidos pela migração dos trabalhadores qualificados, a diferença de utilidade indireta é derivada em relação à lambda para encontrar a formulação matemática de cada uma das forças. Dada a necessidade de usar a regra do produto para obter $\frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda}$, o resultado da derivação consiste em uma expressão para o termo logaritmo e mais três expressões para cada fração interna do segundo termo de ΔV . De acordo com a discussão acima, o logaritmo representa o efeito índice de preço e cada uma das três expressões das duas frações internas representa um dos demais efeitos. Portanto, cada termo da

derivada corresponde à formulação analítica de uma das forças econômicas.

A expressão referente à derivada do logaritmo sintetiza a formulação do efeito índice de preço:

$$EIP = \frac{\alpha(1 - \sigma\eta)(1 - \varphi^2)}{(\sigma - 1)} \left[\frac{\lambda^{-\sigma\eta}(1 - \lambda)^{-\sigma\eta}}{(\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})(\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})} \right] \geq 0, \quad (A.30)$$

pois $\alpha > 0$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\sigma > 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ e $(1 - \sigma\eta) > 0$. Essa última inequação implica a seguinte condição para os cenários com custos de congestionamento: $\eta < 1/\sigma$.

A expressão referente à derivada dos termos $(\lambda + \rho)$ e $((1 - \lambda) + \rho)$, mantendo constantes os demais λ das frações internas de $\Delta V(\lambda)$, sintetiza o efeito tamanho do mercado:

$$ETM = \frac{\alpha\lambda^{-\sigma\eta}(1 - \lambda)^{-\sigma\eta}(1 - \varphi^2)}{\sigma(\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})(\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta})} \geq 0. \quad (A.31)$$

A expressão referente à derivada dos termos $\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}$ e $\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}$, mantendo constantes os demais λ das frações internas de $\Delta V(\lambda)$, sintetiza o efeito extensão da competição:

$$EEC = -\frac{\alpha(1 - \sigma\eta)}{\sigma} \left\{ \frac{(\lambda + \rho)[\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1 - \lambda)^{-\sigma\eta}]^2}{[\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}]^2} + \frac{((1 - \lambda) + \rho)[\varphi\lambda^{-\sigma\eta} - (1 - \lambda)^{-\sigma\eta}]^2}{[\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}]^2} \right\} \leq 0. \quad (A.32)$$

A expressão referente à derivada dos termos $(\lambda^{-\sigma\eta} - \varphi(1 - \lambda)^{-\sigma\eta})$ e $(\varphi\lambda^{-\sigma\eta} - (1 - \lambda)^{-\sigma\eta})$, mantendo constantes os demais λ das frações internas de $\Delta V(\lambda)$, sintetiza os efeitos de congestionamento:

$$EC = -\alpha\eta \left[\frac{(\lambda + \rho)(\lambda^{-\sigma\eta-1} + \varphi(1 - \lambda)^{-\sigma\eta-1})}{\lambda^{1-\sigma\eta} + \varphi(1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} + \frac{((1 - \lambda) + \rho)(\varphi\lambda^{-\sigma\eta-1} + (1 - \lambda)^{-\sigma\eta-1})}{\varphi\lambda^{1-\sigma\eta} + (1 - \lambda)^{1-\sigma\eta}} \right], \quad (A.33)$$

onde $EC < 0$ se $\eta > 0$, isto é, se há predomínio de externalidades negativas; $EC > 0$ se $\eta < 0$, isto é, se há predomínio de externalidades positivas; e $EC = 0$ se $\eta = 0$.

Diagramas de Bifurcação

Os possíveis pontos de ruptura são descobertos igualando $\left. \frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1/2}$ a zero.

Uma vez que cada força é uma das expressões que formam $\frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda}$, basta substituir $\lambda = 1/2$ nas equações (A.30), (A.31), (A.32) e (A.33), somar as expressões resultantes e igualar a zero:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\Delta V)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1/2} &= \frac{4\alpha(1-\sigma\eta)(1-\varphi)}{(\sigma-1)(1+\varphi)} + \frac{4\alpha(1-\varphi)}{\sigma(1+\varphi)} - \\ &\quad - \frac{4\alpha(1-\sigma\eta)(2\rho+1)(1-\varphi)^2}{\sigma(1+\varphi)^2} - 4\alpha\eta(2\rho+1) = 0 \quad (\text{A.34}) \end{aligned}$$

Simplificando a equação (A.34), encontra-se a seguinte formulação para os possíveis pontos de ruptura:

$$\varphi^r = \frac{(1-2\sigma\eta)(2\rho+1)(\sigma-1) \pm \sqrt{4\sigma\eta(2\rho+1)^2(\sigma-1)^2(\sigma\eta-1) + (\sigma^2\eta-2\sigma+1)^2}}{(1-\sigma\eta)\sigma + 2(\rho+1)(\sigma-1)} \quad (\text{A.35})$$

APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

Neste apêndice são demonstradas as seis proposições expostas ao longo do trabalho.

Proposição 1 – Em uma economia na qual as duas regiões possuam a mesma quantidade de mão de obra não qualificada, o setor agrícola continua ativo nas duas regiões se a seguinte condição é válida:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(2\rho + 1)(\sigma - 1)}.$$

Demonstração da Proposição 1:

Uma vez que existem N_r firmas na região $r \in \{1, 2\}$ e cada uma delas emprega $l_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} cX_r$ trabalhadores não qualificados, o setor manufatureiro na região r necessita de $L_r^m = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} cX_r$ trabalhadores não qualificados. Utilizando as equações análogas de (12) e (13) para a região r , L_r^m pode ser expresso como:

$$L_r^m = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} cX_r = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} H_r(\sigma - 1) = \lambda_r K_{tot} H_r(\sigma - 1),$$

onde $\lambda_1 = \lambda$ ($\lambda_2 = (1 - \lambda)$) para a região 1 (2). Para garantir que o setor agrícola continue ativo na região r , a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$L_r^m = \lambda_r K_{tot} H_r(\sigma - 1) < L,$$

onde L é o total de trabalhadores não qualificados em cada região. No pior cenário $\lambda_r = 1$ – todo o setor manufatureiro concentrado na região r –, o valor de equilíbrio da equação análoga de (16) é $H_r = \frac{\alpha(2\rho + 1)}{\sigma}$ e, conseqüentemente, $K_{tot} \frac{\alpha(2\rho + 1)}{\sigma} (\sigma - 1) < L$. Como $\rho = L/K_{tot}$, encontra-se a condição desejada:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(2\rho + 1)(\sigma - 1)}.$$

Proposição 2 – No cenário sem efeitos de congestionamento, a condição de não buraco negro para a existência do ponto de ruptura é $\rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}$.

Demonstração da Proposição 2:

Dado os possíveis pontos de ruptura com $\eta = 0$,

$$\varphi^{r_1} = \frac{(2\rho + 1)(\sigma - 1) - (2\sigma - 1)}{\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} \quad \text{e} \quad \varphi^{r_2} = \frac{(2\rho + 1)(\sigma - 1) + (2\sigma - 1)}{\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)},$$

a demonstração é dividida em duas etapas. A primeira consiste em mostrar que $\varphi^{r_2} = 1$; e a segunda, em encontrar a condição para que $0 < \varphi^{r_1} < 1$.

Primeira etapa: simplificando os possíveis pontos de ruptura, encontra-se:

$$\varphi^{r_1} = \frac{2\rho\sigma - 2\rho - \sigma}{2\rho\sigma - 2\rho + 3\sigma - 2} \quad \text{e} \quad \varphi^{r_2} = \frac{2\rho\sigma - 2\rho + 3\sigma - 2}{2\rho\sigma - 2\rho + 3\sigma - 2} = 1.$$

Na ausência de efeitos de congestionamento, $\eta = 0$, e de barreiras ao comércio inter-regional, $\varphi = 1$, os trabalhadores qualificados alcançam a mesma utilidade indireta nas duas regiões. Nesse contexto, não há incentivo para a migração, mas uma vez que um único trabalhador migre também não há incentivo para o retorno. Dada a definição de ponto de ruptura como aquele em que um equilíbrio estável simétrico se torna instável, não faz sentido econômico considerar $\varphi^{r_2} = 1$ como tal.

Segunda etapa: como $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ por definição, então: (i) $\varphi^{r_1} < \varphi^{r_2} = 1$; e (ii) o denominador de φ^{r_1} é positivo. Dada essas informações, é necessário que o numerador de φ^{r_1} seja positivo para garantir a existência do ponto de ruptura. Assim, $0 < \varphi^{r_1} < 1$ se e somente se

$$2\rho\sigma - 2\rho - \sigma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}.$$

Portanto, a condição de não buraco negro para a existência do ponto de ruptura é $\rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}$.

Proposição 3 – Nos cenários com custos de congestionamento, a condição de não buraco negro para a existência dos dois pontos de ruptura é $0 < \eta < \eta^c < 1$ em conjunto com $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)}$, onde

$$\eta^c = \frac{2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}}{[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma}.$$

Demonstração da Proposição 3:

Dado os possíveis pontos de ruptura,

$$\varphi^{r_1} = \frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) - \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} \text{ e}$$

$$\varphi^{r_2} = \frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) + \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)},$$

a demonstração é dividida em cinco etapas. A primeira consiste em encontrar a condição para que φ^{r_1} e φ^{r_2} sejam números reais distintos; a segunda, em encontrar a condição que garante que a condição da primeira etapa é um número real positivo; a terceira, em encontrar uma única condição que limite a intensidade dos custos de congestionamento; a quarta, em encontrar a condição para que $0 < \varphi^{r_1}$; e a quinta, em encontrar a condição para que $\varphi^{r_2} < 1$.

Primeira etapa: a condição para que φ^{r_1} e φ^{r_2} sejam números reais distintos provém de seus discriminantes serem positivos, isto é,

$$4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2 > 0.$$

Simplificando a expressão, obtém-se a seguinte inequação de segundo grau para a variável η :

$$[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma^2\eta^2 - 2[2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1)]\sigma\eta + (2\sigma - 1)^2 > 0,$$

onde $a = [4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma^2 > 0$; $b = -2[2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1)]\sigma < 0$; e $c = (2\sigma - 1)^2 > 0$, já que $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ por definição. De maneira a encontrar a condição que garante que o discriminante de φ^{r_1} e φ^{r_2} é positivo, resolve-se a equação análoga à inequação acima através da aplicação da fórmula de Bhaskara. Nesse contexto, encontra-se as seguintes raízes:

$$\eta^{c_1} = \frac{2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}}{[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma},$$

$$\eta^{c_2} = \frac{2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) + 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}}{[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma}$$

Como $a > 0$, a parábola é convexa. Assim, a equação de segundo grau não assume valores não positivos – os quais levam φ^{r_1} e φ^{r_2} a não serem dois números reais distintos – quando $\eta < \eta^{c_1}$ e $\eta > \eta^{c_2}$. Dado que também busca-se uma condição que limite a intensidade dos custos de congestionamento, $0 < \eta < 1$, o restante da

demonstração considera apenas a condição $\eta < \eta^c$, onde

$$\eta^c = \frac{2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}}{[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma}.$$

Segunda etapa: visto que a Proposição 3 trata dos cenários com custos de congestionamento, $0 < \eta < 1$, a segunda etapa da demonstração busca encontrar a condição para que η^c seja um número real positivo. Para isso, inicialmente, mostra-se a condição que η^c deve seguir para ser um número real:

$$\Delta_{\eta^c} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma) \geq 0.$$

Simplificando a inequação, encontra-se:

$$4\rho^2 + 4\rho \geq \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

Como $\rho > 0$ por definição, então a inequação acima será satisfeita se a seguinte condição suficiente é satisfeita:

$$4\rho \geq \frac{\sigma}{\sigma - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)}.$$

Portanto, η^c é um número real quando $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)}$. Dada essa condição, falta mostrar que η^c é um número positivo. Como o denominador de η^c é positivo devido $\sigma > 1$ por definição, então $\eta^c > 0$ se e somente se o seu numerador é positivo, isto é,

$$2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)} > 0.$$

Como $\sigma > 1$, então $\sigma(2\sigma - 1) > 0$ e, conseqüentemente, a inequação acima será satisfeita se a seguinte inequação é satisfeita:

$$2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 > 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}.$$

Simplificando a expressão, obtém-se:

$$0 > (2\sigma - 1)(1 - \sigma).$$

Como $\sigma > 1$, então $0 > (2\sigma - 1)(1 - \sigma)$ e, conseqüentemente, $\eta^c > 0$. Portanto,

a condição $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)}$ é suficiente para η^c ser um número real positivo.

Terceira etapa: Uma vez que também existe a condição $\eta < 1/\sigma < 1$ em função dos termos $(1 - \sigma\eta) > 0$ nas forças econômicas, a terceira etapa objetiva a redução para apenas uma condição que limite a intensidade dos custos de congestionamento. Para isso, mostra-se a condição para que $0 < \eta^c < 1/\sigma < 1$, isto é,

$$\frac{2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(2\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)}}{[4(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma^2]\sigma} < \frac{1}{\sigma}.$$

Simplificando a inequação, tem-se:

$$-2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(\sigma - 1) - 2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)} < 0.$$

Como $-2(2\rho + 1)(\sigma - 1)\sqrt{(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + (2\sigma - 1)(1 - \sigma)} < 0$ para $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)}$, então a inequação acima será satisfeita se a seguinte inequação é satisfeita:

$$-2(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 + \sigma(\sigma - 1) < 0.$$

Simplificando a expressão, encontra-se:

$$8(1 - \sigma)\rho^2 + 8(1 - \sigma)\rho + (2 - \sigma) < 0.$$

Como $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ por definição, então $8(1 - \sigma)\rho^2 < 0$ e, conseqüentemente, as inequações anteriores serão satisfeitas se a seguinte condição suficiente é satisfeita:

$$8(1 - \sigma)\rho + (2 - \sigma) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(\sigma - 1)\rho < \frac{\sigma - 2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \rho > \frac{2 - \sigma}{8(\sigma - 1)}.$$

Dado que $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma - 1)} > \frac{2 - \sigma}{8(\sigma - 1)}$ devido à primeira fração apresentar um numerador maior e um denominador menor que a segunda, a condição para ρ derivada na segunda etapa é suficiente para que $0 < \eta < \eta^c < 1$ seja a condição que limite a intensidade dos custos de congestionamento.

Quarta etapa: além de assegurar que φ^{r1} e φ^{r2} sejam números reais distintos, é necessário que $0 < \varphi^{r1} < \varphi^{r2} < 1$ para garantir a existência dos dois pontos de ruptura.

Assim, a quarta etapa expressa a condição para que $\varphi^{r_1} > 0$, isto é,

$$\frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) - \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} > 0.$$

Simplificando a inequação, obtém-se:

$$(2\rho + 1)^2(\sigma^2 - 2\sigma + 1) > (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2.$$

Como nos cenários com custos de congestionamento $0 < \eta < 1$ por definição, então $(\sigma^2 - 2\sigma + 1) > (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)$ e, conseqüentemente, a inequação acima será satisfeita se a seguinte inequação é satisfeita:

$$(2\rho + 1)^2(\sigma^2 - 2\sigma + 1) > (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)(\sigma^2 - 2\sigma + 1).$$

Simplificando a expressão, encontra-se:

$$4\rho^2 + 4\rho - \sigma^2\eta + 2\sigma > 0.$$

Como $\rho > 0$ por definição, então $4\rho^2 + 4\rho > 0$ e, conseqüentemente, as inequações anteriores serão satisfeitas se a seguinte condição suficiente é satisfeita:

$$-\sigma^2\eta + 2\sigma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta < \frac{2}{\sigma}.$$

Visto que a terceira etapa fixou $0 < \eta < \eta^c < 1/\sigma < 1$, não há necessidade de incluir a condição $\eta < 2/\sigma$ para que $\varphi^{r_1} > 0$.

Quinta Etapa: expressa a condição para que $\varphi^{r_2} < 1$, isto é,

$$\frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) + \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} < 1.$$

Após alguns passos de simplificação da inequação, encontra-se a seguinte condição:

$$\rho > \frac{\sigma^2\eta - 3\sigma + 2}{2(\sigma - 1)}.$$

Note que:

$$\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma-1)} > \frac{\sigma^2\eta - 3\sigma + 2}{2(\sigma-1)} \Leftrightarrow \sigma > 2\sigma^2\eta - 6\sigma + 4 \Leftrightarrow \eta < \frac{7\sigma - 4}{2\sigma^2}.$$

Entretanto, como $\sigma > 1$ por definição, então $\eta^c < \frac{1}{\sigma} < \frac{7\sigma - 4}{2\sigma^2}$. Logo, a condição $\eta < \eta^c$ em conjunto com $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma-1)}$ é suficiente para que $\varphi^{r2} < 1$.

Baseado no que foi mostrado nas cinco etapas, conclui-se que a condição de não buraco negro nos cenários com custos de congestionamento é $0 < \eta < \eta^c < 1$ em conjunto com $\rho \geq \frac{\sigma}{4(\sigma-1)}$, onde

$$\eta^c = \frac{2(2\rho+1)^2(\sigma-1)^2 + \sigma(2\sigma-1) - 2(2\rho+1)(\sigma-1)\sqrt{(2\rho+1)^2(\sigma-1)^2 + (2\sigma-1)(1-\sigma)}}{[4(2\rho+1)^2(\sigma-1)^2 + \sigma^2]\sigma}.$$

Proposição 4 – Nos cenários com benefícios de congestionamento, a condição de não buraco negro para a existência do ponto de ruptura é $-1 < \eta^b < \eta < 0$ em conjunto com $\frac{\sigma}{2(\sigma-1)} < \rho < \frac{\sigma^2 + \sigma}{2(\sigma-1)}$, onde $\eta^b = \frac{\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho}{\sigma^2}$.

Demonstração da Proposição 4:

Dado os possíveis pontos de ruptura,

$$\varphi^{r1} = \frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) - \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} \text{ e}$$

$$\varphi^{r2} = \frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) + \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)},$$

a demonstração é dividida em quatro etapas. A primeira consiste em mostrar que $\varphi^{r2} > 1$; a segunda, em encontrar a condição para que $0 < \varphi^{r1}$; a terceira, em mostrar que $\varphi^{r1} < 1$; e a quarta, em encontrar a condição que limite a intensidade dos benefícios de congestionamento.

Primeira etapa: corresponde a garantir que $\varphi^{r2} > 1$, isto é,

$$\frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) + \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} > 1.$$

Após alguns passos de simplificação, a inequação fica:

$$-4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2 > 4\sigma\eta(2\rho + 1)(\sigma - 1)(-\sigma^2\eta + 2\sigma - 1).$$

Como $-1 < \eta < 0$, então $4\sigma\eta(2\rho + 1)(\sigma - 1) < 0$ e, conseqüentemente:

$$-(2\rho + 1)(\sigma - 1) < (-\sigma^2\eta + 2\sigma - 1).$$

Simplificando a inequação, encontra-se a seguinte condição:

$$\rho > \frac{\sigma^2\eta - 3\sigma + 2}{2(\sigma - 1)}.$$

Como $\sigma > 1$ e $-1 < \eta < 0$, então a condição acima fica $\rho > -k$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Dado que $\rho > 0$ por definição, $\varphi^{r_2} > 1$ para qualquer conjunto de parâmetros. Logo, ele não é um ponto de ruptura.

Segunda etapa: uma vez que $\varphi^{r_2} > 1$, é necessário que $0 < \varphi^{r_1} < 1$ para garantir a existência de um ponto de ruptura. Nesse contexto, a segunda etapa encontra a condição para que $0 < \varphi^{r_1}$.

Como $\sigma > 1$, $\rho > 0$ e $-1 < \eta < 0$ por definição, então o denominador de φ^{r_1} é sempre positivo. Assim, $\varphi^{r_1} > 0$ se e somente se o seu numerador é positivo, isto é,

$$(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) > \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}.$$

Como $\sigma > 1$ e $\rho > 0$, através da simplificação da inequação, encontra-se a seguinte condição:

$$\frac{\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho}{\sigma^2} < \eta < \frac{(3\sigma - 2) + (2\rho\sigma - 2\rho)}{\sigma^2}.$$

Como $\sigma > 1$ e $\rho > 0$, então $\frac{(3\sigma - 2) + (2\rho\sigma - 2\rho)}{\sigma^2} > 0$. Dado que a Proposição 4 trata dos cenários com benefícios de congestionamento, $-1 < \eta < 0$, a única possível condição para que $\varphi^{r_1} > 0$ é:

$$\eta^b = \frac{\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho}{\sigma^2} < \eta.$$

Como o denominador de η^b é positivo, então $\eta^b < 0$ se e somente se o seu numerador é negativo, isto é,

$$\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}.$$

Assim, a condição para que $\varphi^{r_1} > 0$ é $\eta^b < \eta < 0$ em conjunto com $\rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}$.

Terceira etapa: corresponde a garantir que $\varphi^{r_1} < 1$, isto é,

$$\frac{(1 - 2\sigma\eta)(2\rho + 1)(\sigma - 1) - \sqrt{4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2(\sigma\eta - 1) + (\sigma^2\eta - 2\sigma + 1)^2}}{(1 - \sigma\eta)\sigma + 2(\rho + 1)(\sigma - 1)} < 1.$$

Após alguns passos de simplificação, a inequação fica:

$$-4\sigma\eta(2\rho + 1)(\sigma - 1)(\sigma^2\eta - 2\sigma + 1) < -4\sigma\eta(2\rho + 1)^2(\sigma - 1)^2.$$

Como $-1 < \eta < 0$, então $4\sigma\eta(2\rho + 1)(\sigma - 1) < 0$ e, conseqüentemente:

$$-(\sigma^2\eta - 2\sigma + 1) > -(2\rho + 1)(\sigma - 1).$$

Simplificando a inequação, encontra-se a seguinte condição:

$$\rho > \frac{\sigma^2\eta - 3\sigma + 2}{2(\sigma - 1)}.$$

Como $\sigma > 1$ e $-1 < \eta < 0$, então a condição acima fica $\rho > -k$, onde $k \in \mathbb{R}_+^*$. Dado que $\rho > 0$ por definição, não há necessidade dessa e nenhuma outra condição para que $\varphi^{r_1} < 1$.

Quarta etapa: para que η^b , além de assegurar $\varphi^{r_1} > 0$, seja a condição que limite a intensidade dos benefícios de congestionamento, é preciso que $-1 < \eta^b < \eta < 0$. Por um lado, como exposto na segunda etapa da demonstração, sabe-se que $\eta^b < 0$ se e somente se $\rho > \frac{\sigma}{2(\sigma - 1)}$. Por outro lado, $-1 < \eta^b$ se e somente se:

$$-1 < \frac{\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho}{\sigma^2} \Leftrightarrow \rho < \frac{\sigma^2 + \sigma}{2(\sigma - 1)}.$$

Portanto, alicerçado nas quatro etapas, a condição de não buraco negro nos cenários com benefícios de congestionamento é $-1 < \eta^b < \eta < 0$ em conjunto com $\frac{\sigma}{2(\sigma - 1)} < \rho < \frac{\sigma^2 + \sigma}{2(\sigma - 1)}$, onde $\eta^b = \frac{\sigma - 2\rho\sigma + 2\rho}{\sigma^2}$.

Proposição 5 – A condição geral de não buraco negro é $\eta^b < \eta < \eta^c$ em conjunto com $\frac{\sigma}{2(\sigma - 1)} < \rho < \frac{\sigma^2 + \sigma}{2(\sigma - 1)}$.

Demonstração da Proposição 5:

O intervalo $\eta^b < \eta < \eta^c$ unifica as condições encontradas nas Proposições 3 e 4 para o parâmetro η . Por seu turno, o limite superior de ρ provém da Proposição 4, enquanto o limite inferior deve-se ao fato de que $\frac{\sigma}{2(\sigma-1)} > \frac{\sigma}{4(\sigma-1)}$, onde a primeira fração provém das Proposições 2 e 4 e a segunda da Proposição 3.

Proposição 6 – Em uma economia na qual todas as regiões possuam a mesma quantidade de mão de obra não qualificada, o setor agrícola continua ativo em todas as regiões se a seguinte condição é válida:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(R\rho+1)(\sigma-1)}.$$

Demonstração da Proposição 6:

Uma vez que existem N_r firmas na região $r = 1, \dots, R$ e cada uma delas emprega $l_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} cX_r$ trabalhadores não qualificados, o setor manufatureiro na região r necessita de $L_r^m = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} cX_r$ trabalhadores não qualificados. Utilizando as equações (44) e (45), L_r^m pode ser expresso como:

$$L_r^m = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} cX_r = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} H_r(\sigma-1) = \lambda_r K_{tot} H_r(\sigma-1).$$

Para garantir que o setor agrícola continue ativo na região r , a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$L_r^m = \lambda_r K_{tot} H_r(\sigma-1) < L,$$

onde L é o total de trabalhadores não qualificados em cada região. No pior cenário $\lambda_r = 1$ – todo o setor manufatureiro concentrado na região r –, o valor de equilíbrio da equação (49) é $H_r = \frac{\alpha(R\rho+1)}{\sigma}$ e, conseqüentemente, $K_{tot} \frac{\alpha(R\rho+1)}{\sigma} (\sigma-1) < L$. Como $\rho = L/K_{tot}$, encontra-se a condição desejada:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(R\rho+1)(\sigma-1)}.$$