

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CENTRO ESTADUAL DE PESQUISAS EM SENSORIAMENTO REMOTO  
E METEOROLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SENSORIAMENTO REMOTO

Vitor Hugo de Almeida Junior

**EFEITO DA CURVATURA TERRESTRE NA REFLETOMETRIA GNSS**

Porto Alegre, RS  
2021

**Vitor Hugo de Almeida Junior**

**EFEITO DA CURVATURA TERRESTRE NA REFLETOMETRIA GNSS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Sensoriamento Remoto e Geoprocessamento.

Área de concentração: Geodésia por satélite.

**Orientador:** Prof. Dr. Felipe Geremia Nievinski

Porto Alegre, RS  
2021

## CIP - Catalogação na Publicação

Almeida Junior, Vitor Hugo de  
Efeito da curvatura terrestre na Refletometria GNSS  
/ Vitor Hugo de Almeida Junior. -- 2021.  
150 f.  
Orientador: Felipe Geremia-Nievinski.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Centro Estadual de Pesquisas em  
Sensoriamento Remoto e Meteorologia, Programa de  
Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto, Porto Alegre,  
BR-RS, 2021.

1. Sensoriamento remoto. 2. GNSS-R. 3. Nível do  
mar. 4. Correção altimétrica. I. Geremia-Nievinski,  
Felipe, orient. II. Título.

**Vitor Hugo de Almeida Junior**

**EFEITO DA CURVATURA TERRESTRE NA REFLETOMETRIA GNSS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Sensoriamento Remoto e Geoprocessamento.

**Aprovado em 23 de junho de 2021:**

BANCA EXAMINADORA

---

**Felipe Geremia Nievinski, Dr. (UFRGS)**  
(Orientador/Presidente)

---

**Sergio Florêncio de Souza, Dr. (UFRGS)**

---

**Gilberto Gagg, Dr. (UFRGS)**

---

**Vinicius Rofatto, Dr. (UFU)**

Porto Alegre, RS  
2021

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Carla e Vitor, pelo apoio incondicional que me deram em todos os momentos e em todas as minhas escolhas.

À minha namorada Daiana que esteve em presente em todos os momentos para me apoiar de todas as formas possíveis e não poupou esforços para me auxiliar nesta caminhada até aqui.

À minha família e amigos, os quais considero minha família de outras famílias. me faltariam linhas para citar todos seus nomes e o quanto tenho a agradecer a cada um.

Ao meu orientador, Prof. Felipe, a quem agradeço imensamente pela amizade, pelos conhecimentos passados a mim e por todos os aconselhamentos acadêmicos, profissionais e pessoais, que me fizeram evoluir muito durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de laboratório, por toda a parceria, conversas e contribuições, tanto acadêmicas quanto pessoais.

Agradeço extremamente a todas essas pessoas que estiveram ao meu lado, pois foram imprescindíveis, principalmente nestes tempos de pandemia. Foram tempos que trouxeram medos, inseguranças, instabilidades e perdas inestimáveis. Neste momento todo apoio faz a diferença e oferece conforto para que, em breve, possamos voltar a vida normal com saúde e segurança.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, instituição pública e de excelência, que me proporcionou muitas oportunidades de crescimento acadêmico, profissional e pessoal ao longo destes anos.

À Capes pelo financiamento da minha bolsa de estudos, a qual foi essencial para que eu pudesse realizar este trabalho.

## RESUMO

Conforme relatório do Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC), o nível médio global dos mares está subindo a taxas cada vez maiores em decorrência das mudanças climáticas. Além dos marégrafos e altímetros orbitais, uma alternativa para a medição do nível do mar costeiro é a Refletometria GNSS (GNSS-R). Trata-se de uma técnica de sensoriamento remoto geodésico baseada nas ondas de rádio continuamente emitidas por satélites GNSS que refletem na superfície da água e chegam à antena receptora. A partir da comparação entre a onda refletida e a onda que chega diretamente à antena, obtém-se o atraso relativo ou interferométrico, pelo qual é estimada a altura da superfície refletora. Para isso, é necessário supor que a geometria da superfície seja conhecida. No caso de estações GNSS-R terrestres, o modelo de superfície plano é frequentemente adotado, por simplicidade. Contudo, dependendo da configuração de altura da antena receptora e do ângulo de elevação do satélite, o ponto de reflexão pode ocorrer a centenas ou milhares de metros da antena receptora. Então, o modelo plano pode deixar de representar adequadamente a superfície refletora devido à curvatura terrestre, causando eventuais erros sistemáticos na estimativa altimétrica por GNSS-R. Assim, o presente estudo buscou averiguar os limites para os quais o efeito da curvatura terrestre é significativo em estimativas altimétricas do nível do mar por GNSS-R. Para isso, a reflexão foi modelada nas superfícies plana e esférica, sendo a primeira tangente e a segunda osculante ao elipsoide de revolução. Foram desenvolvidos dois tipos de correções altimétricas baseadas nos respectivos métodos de estimação ou inversão altimétrica: a correção de tipo A é aplicada na inversão pelo pseudo-Doppler cruzado; e a de tipo B é aplicada na inversão pelo pseudo-Doppler na esfera. A correção altimétrica de tipo A é aplicável ao caso mais frequente, em que o usuário supõe o modelo plano, apesar das medições em campo seguirem o modelo esférico. Foram realizadas simulações considerando cenários da reflexão com variações no ângulo de elevação (desde zênite até o horizonte esférico, abaixo do horizonte plano) e variação de altura da antena receptora (de zero a 500 m). Foi verificado que o deslocamento do ponto de reflexão, na esfera em relação ao plano, implica em aproximação horizontal e rebaixamento vertical. Conseqüentemente, o atraso de propagação interferométrico é incrementado. Os erros altimétricos são maiores na direção de maior altura da antena receptora e menor elevação do satélite, com cenários críticos no horizonte esférico. Considerando um limiar de 1 cm, verificou-se que a correção altimétrica do tipo A é necessária para qualquer elevação de satélite quando a antena receptora tem altura maior que 200 m. Para satélites mais baixos, o limiar é atingido em alturas menores da antena receptora; por exemplo: 10 m e  $1,5^\circ$ , 30 m e  $4,8^\circ$ , 60 m e  $9,9^\circ$  e 120 m e  $21,3^\circ$ . Abaixo do horizonte plano (ângulos de elevação negativos), a correção é necessária para qualquer altura.

**Palavras-chave:** Sensoriamento remoto. GNSS-R. Nível do mar. Correção altimétrica.

## ABSTRACT

According to the Intergovernmental Panel on Climate Changes (IPCC) report, the global mean sea level is rising at increasing rates due to climate changes. Besides tide gauges and satellite altimeters, an alternative for coastal sea level measurements is the GNSS Reflectometry (GNSS-R). It is a geodetic remote sensing technique based on radio waves continuously emitted by GNSS satellites that reflects on the water surface and reach the receiving antenna. From the comparison between a reflected and a signal that reaches directly on the antenna, known as relative or interferometric delay, geophysical parameters of reflector surface can be estimated, such as sea level. The geometry of reflection is modeled by supposing a surface with known geometry. In the case of ground-based GNSS-R stations, the plane surface model is commonly adopted for its simplicity. However, the reflection point can occur at hundred or thousand meters from the receiving antenna, depending on the setup of receiving antenna height and satellite elevation angle. Then, the plane surface model cannot represent properly the reflector surface due to the Earth's curvature, and eventually, it will introduce a systematic bias in the GNSS-R altimetry estimate. The present work aims to investigate limits which the Earth's curvature effect is non-negligible for altimetric estimates of GNSS-R sea-level measurements. The reflection signal was modeled on both planar and spherical model, where the former is tangent and the latter is osculating to the ellipsoid of revolution. Was developed two types of altimetry correction based on the respective altimetric estimate or inversion: the type A is an altimetry correction applied in the crossed pseudo-Doppler inversion; and type B is applied in the spherical pseudo-Doppler inversion. The type A altimetric correction is applied to the most frequent case, in which the user assumes the flat model, despite field measurements following the spherical model. Were simulated scenarios of reflections for varying the elevation angle (from zenith down to the spherical horizon) and receiving antenna height (from zero to 500 m). Were verified that the reflection point displacement on the sphere regarding the plane, implies the horizontal approach and vertical downward. Consequently, the interferometric delay is increased. Were verified that the errors are bigger towards higher antenna heights and lower elevation angles, where the critical scenarios were seen on the spherical horizon. Considering a 1-cm threshold for altimetry correction was verified that the correction Type A is needed to any satellite elevation angle when the receiving antenna is 200 m height. For lower elevation angles, the threshold is reached on lower receiving antenna heights, e.g., 10 m and  $1,5^\circ$ , 30 m and  $4,8^\circ$ , 60 m and  $9,9^\circ$ , and 120 m and  $21,3^\circ$ . Down the planar horizon, the correction is needed to any simulated heights.

**Keywords:** Remote sensing. GNSS-R. Sea level. Altimetry correction.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema do sistema de medição do nível do mar geocêntrico por marégrafo apoiado por GNSS. ....	22
Figura 2 – Sistema de medição do nível do mar por radar altímetro orbital nadiral com relação ao elipsoide e ao geoide. ....	23
Figura 3 – Funcionamento da técnica de refletometria por GNSS. ....	26
Figura 4 – Estações GNSS-R utilizadas para medição do nível do mar encontradas na literatura com as respectivas alturas em relação a superfície refletora e as variações aproximadas da maré. As estações destacadas em amarelo estão localizadas a menos de 1 km de um marégrafo. ....	27
Figura 5 – Representação das componentes das ondas direta e refletida e do atraso interferométrico (linha vermelha tracejada) especializados para uma superfície plana. ....	30
Figura 6 – Exemplo de obtenção de atraso de propagação interferométrico, na qual a onda da esquerda é a direta (com potência maior e mais concentrada), e a onda da direita é a refletida (com potência menor e mais espalhada). ....	31
Figura 7 – Comportamento característico do SNR em função da variação do ângulo de elevação do satélite (à esquerda) e a obtenção da altura da superfície refletora por análise espectral (à direita) em dois dias diferentes. ....	33
Figura 8 – Geometrias de superfícies de reflexão utilizadas em GNSS-R. ....	38
Figura 9 – Modelo plano tangente ao elipsoide. (a) latitude equatorial; (b) latitude polar. ....	39
Figura 10 – Modelo esférico osculante ao elipsoide. (a) latitude equatorial; (b) latitude polar. ....	40
Figura 11 – Ângulo rasante da onda refletida na esfera. ....	42
Figura 12 – Geometria do ângulo de elevação da reflexão (a) no plano e (b) na esfera. ....	43
Figura 13 – Atraso de propagação atmosférico para uma superfície esférica e uma superfície plana. ....	44
Figura 14 – Sistema de coordenadas cartesianas local (laranja), quasigeocêntrico (verde) e geocêntrico global (preto). ....	46
Figura 15 – Convergência do valor mínimo do caminho percorrido pela onda refletida para uma altura de antena receptora de 500 m e ângulo de elevação de 10°. ....	58
Figura 16 – Geometria da reflexão de determinação do ângulo rasante a partir de um ponto de reflexão conhecido ou determinação do ponto de reflexão a partir de um ângulo rasante conhecido. ....	58
Figura 17 – Horizonte esférico traçado a partir do observador. ....	70
Figura 18 – Geometria da reflexão para uma determinada altura de antena receptora no horizonte esférico. ....	71
Figura 19 – Distância inclinada sobre a esfera do ponto de reflexão até a antena receptora e a derivação matemática pelo Teorema de Pitágoras. ....	73
Figura 20 – Ângulo de elevação mínimo referente ao horizonte esférico para antenas receptoras de zero a 500 m de altura. ....	76
Figura 21 – Coordenada $x$ do ponto de reflexão na esfera (linha sólida) e no plano (linha tracejada) nas alturas de antenas receptoras 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo $y$ truncado em $10^4$ m. ....	86
Figura 22 – Diferenças verificadas nas coordenadas $x$ do ponto de reflexão entre a esfera e o plano, $\Delta x$ , nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a	



	10°, com eixo y truncado em 1000 m; e (c) do horizonte esférico até zênite com escala logarítmica. ....	88
Figura 23	– Diferenças percentuais verificadas nas coordenadas $x$ do ponto de reflexão entre a esfera e o plano, $\Delta x/x_s$ , nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo y truncado em 100%. ....	89
Figura 24	– Diferenças verificadas nas coordenadas $y$ do ponto de reflexão entre a esfera e o plano, $\Delta y$ , nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica. ....	90
Figura 25	– Ângulo rasante, $g$ , na esfera (linha sólida) e ângulos de elevação (linha tracejada) nas alturas de antenas receptoras 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação do horizonte esférico a 10°. ....	92
Figura 26	– Diferenças verificadas no ângulo rasante, $\Delta g$ , em relação aos ângulos de elevação nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica e valores absolutos. ....	93
Figura 27	– Diferenças do ângulo rasante à direita com relação ao ângulo rasante à esquerda verificadas na altura de antena receptora de 500 m. ....	94
Figura 28	– Atraso de propagação interferométrico, $Di$ , na esfera (linha sólida) e no plano (linha tracejada) nas alturas de antenas receptoras 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°. ....	96
Figura 29	– Diferenças do atraso de propagação interferométrico na esfera em relação ao plano, $\Delta Di$ , verificadas nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico até zênite. ....	97
Figura 30	– Diferenças percentuais do atraso de propagação interferométrico na esfera em relação ao plano verificadas nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo y do gráfico truncado em 100%. ....	99
Figura 31	– Diferenças do atraso de propagação interferométrico esférico obtido pelas fórmulas vetoriais em relação às fórmulas trigonométricas, ambos seguindo a metodologia de Fujimura et al. (2019), verificadas nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação do horizonte esférico até zênite. ....	100
Figura 32	– Distância inclinada, $DL$ , na esfera (linha sólida) e no plano (linha tracejada) nas alturas de antena receptora 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo y truncado em $10^4$ m. ....	102
Figura 33	– Diferenças da distância inclinada na esfera em relação ao plano, $\Delta DL$ , verificadas nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo y truncado em $10^4$ m; (c) do horizonte esférico até zênite com escala logarítmica. ....	104
Figura 34	– Diferenças do ângulo de elevação refletido na esfera em relação ao plano, verificada nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica. ....	106

Figura 35 – Tamanho dos passos irregulares entre os ângulos de elevação do horizonte esférico até zênite (90°) calculado pela função <code>get_elev_regular_in_sine.m</code> .....	107
Figura 36 – Sensibilidades verticais, em m/m, numérica esférica, esférica analítica e plana analítica (gráfico superior). Diferenças das sensibilidades esférica analítica e a plana analítica com relação à sensibilidade vertical esférica numérica (gráfico inferior).....	108
Figura 37 – Estimativa da variação de altura de 10 m em torno da altura média de 500 m a partir das sensibilidades verticais, esférica analítica e plana analítica (gráfico superior) as diferenças das estimativas da variação de altura pelas sensibilidades esférica analítica e a plana analítica com relação as estimativas pela sensibilidade vertical esférica numérica (gráfico inferior).....	110
Figura 38 – Estimativas altimétricas obtidas pelas sensibilidades verticais esférica numérica, esférica analítica e plana analítica a partir do atraso de propagação esférico para a altura verdadeira de 500 m. ....	111
Figura 39 – Estimativas altimétricas pelo pseudo-Doppler cruzado (linha sólida) e as respectivas alturas verdadeiras (linha tracejada) (gráfico superior). Diferenças absolutas em escala logarítmica entre as estimativas altimétricas e as respectivas alturas verdadeiras (gráfico inferior) .....	112
Figura 40 – Correção altimétrica do tipo A para curvatura terrestre nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica e valores absolutos. ....	114
Figura 41 – Limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo A para a curvatura terrestre.....	116
Figura 42 – Correção altimétrica zenital do tipo A (numérica para distância finita bem como trigonométrica numérica e trigonométrica para distância infinita) para alturas de zero a 500 m e as respectivas diferenças entre a correções trigonométrica numérica e trigonométrica as correções numérica e trigonométrica. ....	119
Figura 43 – Diferenças entre as correções altimétricas do tipo A (numérica para distância finita e trigonométrica para distância infinita) nos ângulos de elevação do horizonte esférico a zênite para diversas alturas de antena receptora. ....	120
Figura 44 – Diferenças entre a correção do tipo A e a correção para o deslocamento vertical do ponto de reflexão nos ângulos de elevação do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica. ....	121
Figura 45 – Limiar de diferença de 1 cm entre o deslocamento vertical do ponto de reflexão, $\Delta y_s$ , e a correção altimétrica do tipo A, $\Delta H_x$ . ....	122
Figura 46 – Comparação entre a correção altimétrica do tipo A e a correção altimétrica de R&R para as alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m nos ângulos de elevação de (a) 5° a 90°; e (b) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica e valores absolutos. ....	124
Figura 47 – Limiar de 1 cm de diferença entre a correção do tipo A e a correção de R&R. .	125
Figura 48 – Estimativas altimétricas simples pelo pseudo-Doppler na esfera (linha sólida) e as respectivas alturas verdadeiras (linha tracejada) (gráfico superior). Diferenças absolutas em escala logarítmica entre as estimativas altimétricas e as respectivas alturas verdadeiras (gráfico inferior). ....	126
Figura 49 – Primeira componente $\Delta H_s'$ e segunda componente $\Delta H_s''$ da correção altimétrica do tipo B nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico a 10° em escala logarítmica e valores absolutos. ....	128

Figura 50 – Taxa de variação $\zeta$ do ângulo de elevação com relação ao ângulo rasante nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°. .....	129
Figura 51 – Correção altimétrica do tipo B para curvatura terrestre nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico a 10° em escala logarítmica e valores absolutos. ....	131
Figura 52 – Limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo B para a curvatura terrestre. ....	134

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estações GNSS-R acima de 20 m de altura encontradas na literatura. ....	28
Tabela 2 – Ângulo de elevação mínimo para as diferentes alturas de antenas receptoras. ....	76
Tabela 3 – Validação do ângulo rasante, $g$ , no horizonte esférico.....	77
Tabela 4 – Validação do atraso de propagação, $Di$ , no horizonte esférico. ....	77
Tabela 5 – Validação da coordenada $x$ do ponto de reflexão no horizonte esférico.....	78
Tabela 6 – Validação da coordenada $y$ do ponto de reflexão no horizonte esférico.....	78
Tabela 7 – Validação da distância inclinada, $DI$ , no horizonte esférico. ....	79
Tabela 8 – Validação do comprimento de arco, $S$ , no horizonte esférico. ....	80
Tabela 9 – Comparação do ângulo rasante, $g$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA et al., 2019). ....	81
Tabela 10 – Comparação da coordenada $x$ do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA et al., 2019).....	82
Tabela 11 – Comparação da coordenada $y$ do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA et al., 2019).....	82
Tabela 12 – Comparação do atraso de propagação interferométrico, $Di$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA et al., 2019). ....	83
Tabela 13 – Comparação da distância inclinada, $DI$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA et al., 2019). ....	84
Tabela 14 – Comparação do comprimento de arco, $S$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA et al., 2019). ....	84
Tabela 15 – Correção altimétrica do tipo A aos 90° de elevação (zênite). ....	115
Tabela 16 – Configurações de altura da antena receptora e ângulo de elevação para o limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo A. ....	117
Tabela 17 – Limites para aplicação da correção altimétrica do tipo A para transmissor a distância infinita. ....	120
Tabela 18 – Correção altimétrica do tipo B aos 90° de elevação (zênite).....	132
Tabela 19 – Configurações de altura da antena receptora e ângulo de elevação para o limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo B. ....	135
Tabela A-1 – Ângulo rasante obtido pelos modelos de reflexão na esfera. ....	145
Tabela A-2 – Coordenada $x$ do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera. ....	145
Tabela A-3 – Coordenada $y$ do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera. ....	146
Tabela A-4 – Atraso de propagação interferométrico obtido pelos modelos de reflexão na esfera. ....	146
Tabela A-5 – Distância inclinada obtido pelos modelos de reflexão na esfera.....	147
Tabela A-6 – Comprimento de arco obtido pelos modelos de reflexão na esfera.....	147
Tabela B-1 – Ângulo rasante obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera. ....	148
Tabela B-2 – Coordenada $X$ do ponto de reflexão obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.....	148
Tabela B-3 – Coordenada $Y$ do ponto de reflexão obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.....	149
Tabela B-4 – Atraso de propagação interferométrico obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera. ....	149
Tabela B-5 – Distância inclinada obtida no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera. ....	150

Tabela B-6 – Comprimento de arco obtida no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera. ....	150
---	-----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>1.1</b>	<b>Proposição</b> .....	19
1.1.1	<i>Objetivo geral</i> .....	19
1.1.2	<i>Objetivos específicos</i> .....	19
1.1.3	<i>Hipótese</i> .....	19
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	21
<b>2.1</b>	<b>Altimetria dos mares</b> .....	21
2.1.1	<i>Sistemas de medição do nível do mar</i> .....	22
<b>2.2</b>	<b>Refletometria GPS/GNSS (GNSS-R)</b> .....	24
2.2.1	<i>Formulação das observáveis altimétricas</i> .....	28
2.2.2	<i>Problema direto no plano</i> .....	34
2.2.3	<i>Problema inverso no plano</i> .....	36
<b>2.3</b>	<b>Geometria da superfície</b> .....	38
2.3.1	<i>Plano tangente ao elipsoide</i> .....	39
2.3.2	<i>Esfera osculante ao elipsoide</i> .....	39
2.3.3	<i>Outros modelos</i> .....	40
<b>2.4</b>	<b>Geometria da reflexão</b> .....	41
2.4.1	<i>Ponto de reflexão</i> .....	41
2.4.2	<i>Ângulo rasante</i> .....	42
2.4.3	<i>Ângulo de elevação da reflexão</i> .....	43
2.4.4	<i>Distância inclinada</i> .....	43
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	46
<b>3.1</b>	<b>Sistemas de coordenadas</b> .....	46
<b>3.2</b>	<b>Observáveis altimétricas na esfera</b> .....	48
<b>3.3</b>	<b>Problema direto na esfera</b> .....	51
3.3.1	<i>Modelo de Fujimura</i> .....	52
3.3.2	<i>Modelo de Martín-Neira e modelo de Helm</i> .....	53
3.3.3	<i>Modelo de Miller e Vegh</i> .....	55
3.3.4	<i>Modelo numérico pelo princípio de Fermat</i> .....	56
3.3.5	<i>Parâmetros derivados</i> .....	58
3.3.6	<i>Taxas e derivadas</i> .....	60
<b>3.4</b>	<b>Problema inverso na esfera</b> .....	61
3.4.1	<i>Inversão esférica pelo atraso de propagação interferométrico</i> .....	62
3.4.2	<i>Inversão esférica pelo Doppler interferométrico</i> .....	63
3.4.3	<i>Inversão esférica pelo pseudo-Doppler</i> .....	64
3.4.4	<i>Inversão esférica pelo pseudo-Doppler cruzado</i> .....	65
<b>3.5</b>	<b>Formas de impacto da curvatura terrestre</b> .....	66
3.5.1	<i>Deslocamento do ponto de reflexão</i> .....	66
3.5.2	<i>Alteração no atraso de propagação interferométrico</i> .....	67
3.5.3	<i>Correção altimétrica</i> .....	67
3.5.4	<i>Outras formas de avaliação do impacto da curvatura terrestre</i> .....	68
3.5.4.1	<i>Ângulo rasante e ângulo de elevação da reflexão</i> .....	68
3.5.4.2	<i>Distância inclinada</i> .....	69
<b>3.6</b>	<b>Formas de validação</b> .....	69
3.6.1	<i>Inter-comparação entre algoritmos</i> .....	69
3.6.2	<i>Horizonte esférico</i> .....	70
3.6.3	<i>Aproximações trigonométricas para transmissor a distância infinita</i> .....	72

<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	75
<b>4.1</b>	<b>Validações</b>	75
4.1.1	<i>Validação no horizonte esférico</i>	75
4.1.2	<i>Inter-validação entre algoritmos</i>	80
<b>4.2</b>	<b>Impacto da curvatura terrestre em grandezas auxiliares</b>	85
4.2.1	<i>Efeito posicional no ponto de reflexão</i>	85
4.2.2	<i>Efeito no ângulo rasante</i>	91
4.2.3	<i>Efeito no atraso de propagação interferométrico</i>	95
4.2.4	<i>Efeito na distância inclinada</i>	101
4.2.5	<i>Efeito no ângulo de elevação da reflexão</i>	105
<b>4.3</b>	<b>Correção altimétrica para a curvatura terrestre</b>	107
4.3.1	<i>Simulação de ponta-a-ponta</i>	108
4.3.2	<i>Correção altimétrica do tipo A</i>	111
4.3.2.1	<i>Avaliação das correções altimétricas do tipo A para distância infinita ao transmissor</i>	118
4.3.2.2	<i>Avaliação das correções altimétricas do tipo A aproximadas por outras abordagens</i>	121
4.3.3	<i>Correção altimétrica do tipo B</i>	125
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	136
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos futuros</b>	139
	<b>REFERÊNCIAS</b>	140
	<b>Apêndice A –DETALHES DA INTER-VALIDAÇÃO ENTRE ALGORITMOS</b>	145
	<b>Apêndice B –..... DETALHES DA VALIDAÇÃO NO HORIZONTE ESFÉRICO</b>	148

## 1 INTRODUÇÃO

Conforme o Relatório Técnico Especial sobre Mudanças Climáticas do Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC) de 2019, o nível médio global dos mares está aumentando a taxas cada vez maiores devido às mudanças climáticas. As expectativas, porém, são bastante incertas devido a fatores associados à emissão de gases de efeito estufa e as mudanças climáticas (OPPENHEIMER *et al.*, 2019).

A mudança gradual do nível médio dos mares pode ocasionar eventos extremos de grande impacto nas zonas costeiras no futuro que incluem, por exemplo, erosão das zonas costeiras, redução dos ecossistemas costeiros e inundações mais frequentes. As mudanças no nível médio do mar são, contudo, bastante variáveis em nível local – escala espacial maior que 10 km – e regional – em torno de 100 km – em virtude das variabilidades regionais dos processos climáticos e de outros fatores locais. Desta forma, o IPCC toma como um importante preparo para o futuro a melhoria de sistemas de monitoramento e, dentre estes, o uso de técnicas de sensoriamento remoto (OPPENHEIMER *et al.*, 2019).

Os principais sistemas utilizados para medição do nível do mar são os altímetros orbitais e os maregráfos. Porém, estes sistemas possuem deficiências no que tange a resolução espacial e temporal. Os altímetros orbitais possuem cobertura global com resolução espacial de até 10 km e resolução temporal de aproximadamente dez dias, como as missões Jason, além de baixa precisão altimétrica nas zonas costeiras devido a contaminação do sinal de radar por parte do solo, não sendo então adequados para o monitoramento contínuo do nível do mar local. Já os maregráfos possuem ótima resolução temporal, porém são desigualmente distribuídos em torno do globo terrestre (CIPOLLINI *et al.*, 2017; PENNA *et al.*, 2018; ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016; WU; MEEHAN; YOUNG, 1997).

Nesse sentido, a Refletometria GNSS (*Global Navigation Satellite System*) ou GNSS-R desponta como uma solução alternativa aos métodos convencionais, apresentando vantagens como medição a distância e independência de condições atmosféricas (CAMPS *et al.*, 2010; CARDELLACH *et al.*, 2014; ROUSSEL *et al.*, 2014; WU *et al.*, 2018). A refletometria GNSS, introduzida por Martín-Neira (1993) ao propor o PARIS (*Passive Reflectometry and Interferometric System*), é uma técnica de sensoriamento remoto geodésico que funciona como um tipo de radar, baseado na análise de ondas de rádio emitidas continuamente por satélites GNSS e detectadas por uma antena receptora após refletir na superfície terrestre. Ao comparar as ondas direta e refletida detectadas pela antena receptora, é possível estimar variáveis da



superfície, como altura, rugosidade, composição, etc. (ROUSSEL *et al.*, 2014; ROUSSEL *et al.*, 2015; ZAVOROTNY *et al.*, 2014).

A medição e monitoramento da altura da superfície dos mares é uma das principais aplicações da GNSS-R, podendo ser realizada por plataformas orbitais, aéreas ou terrestres, embora seus princípios e propósitos sejam diferentes (STRANDBERG; HOBIGER; HAAS, 2019). As plataformas orbitais e aéreas são utilizadas para medição da altimetria do mar em mesoescala, mas possuem alto custo (CARDELLACH *et al.*, 2014). Já plataformas terrestres GNSS-R possuem caráter de medição e monitoramento constante de dados da altimetria marítima. A utilização de GNSS-R em plataformas terrestres é uma alternativa para aprimorar a distribuição espaço-temporal de dados em tempo real de medições do nível dos mares, principalmente nas zonas costeiras (STRANDBERG; HOBIGER; HAAS, 2019). Atualmente, tem-se registro de mais de 50 estações ao redor do mundo com aplicação de refletometria em diversos trabalhos (GEREMIA-NIEVINSKI; MAKRAKIS; TABIBI, 2020).

A medição do nível do mar demanda acurácia centimétrica (PUGH; WOODWORTH, 2014). Nesse sentido, a modelagem e correção de erros em GNSS-R é essencial para a obtenção de medidas do nível do mar acuradas e confiáveis (STRANDBERG, 2020). Devido ao início relativamente recente da GNSS-R com estações terrestres (ANDERSON, 2000), ainda existem correções que não estão consolidadas ou não foram devidamente investigadas (NIKOLAIDOU *et al.*, 2020). Strandberg (2020) relata que a precisão das medições do nível do mar por GNSS-R têm sido aprimorada consideravelmente com o avanço de estudos relacionados a modelagens de erros em GNSS-R como, por exemplo, a refração atmosférica (NIKOLAIDOU *et al.*, 2020). Contudo, Strandberg (2020) ressalta que medições do nível do mar por GNSS-R ainda apresentam erro médio quadrático (RMS) com relação a marégrafos em decorrência de erros não modelados no atraso interferométrico. Dentre estes, o efeito da curvatura da Terra nas medição altimétricas por GNSS-R em plataformas terrestres deve ser considerado (NIKOLAIDOU, 2020).

A curvatura terrestre é, em geral, desconsiderada na maioria das medições do nível do mar por GNSS-R com estações terrestres, principalmente nos experimentos que empregam equipamentos comerciais (GEREMIA-NIEVINSKI; MAKRAKIS; TABIBI, 2020), com exceção de Roggenbuck e Reinking (2019), e experimentos que adotam instrumentação científica (CARDELLACH *et al.*, 2014; FABRA *et al.*, 2012). Comumente considera-se uma geometria plana horizontal para a modelagem geométrica da reflexão sob a suposição que as reflexões ocorram próximas a antena receptora (LARSON; LÖFGREN; HAAS, 2013; NIEVINSKI; LARSON, 2014b). Contudo, os pontos de reflexão podem ocorrer a centenas ou

milhares de metros da antena receptora, extrapolando os limites de tolerância para desconsideração da curvatura terrestre e introduzindo um viés posicional no ponto de reflexão, cuja magnitude é incrementada proporcionalmente ao distanciamento do ponto de reflexão. Tal distanciamento é maior quanto mais alta a antena receptora GNSS-R e menor o ângulo de elevação do satélite (ROUSSEL *et al.*, 2014). Nesse contexto, destaca-se que são bastante usuais em GNSS-R estações terrestres posicionadas sobre estruturas altas, a dezenas ou centenas de metros de altura, como em faróis (ROUSSEL *et al.*, 2015) e falésias (WILLIAMS; NIEVINSKI, 2017). Adicionalmente, satélites GNSS são frequentemente rastreados em ângulos de elevação baixos, como aos 5°, e até mesmo em ângulos de elevação negativos (COLLETT *et al.*, 2020; SEMMLING *et al.*, 2016).

Nesse sentido, o modelo de superfície esférico osculante é mais adequado para a modelagem da reflexão, pois considera a curvatura terrestre, se assemelha ao plano para pontos de reflexão próximos a antena receptora e se ajusta ao elipsoide (NIEVINSKI; SANTOS, 2010; ROUSSEL *et al.*, 2014). A esfera osculante, no entanto, possui complexidade matemática não-trivial, superior ao modelo plano, demandando a solução de um polinômio de quarta ordem para uma solução rigorosa da reflexão na esfera (ELKIN, 1965; HELM, 2008; SOUTHWELL; DEMPSTER, 2018).

Alguns autores levam em consideração o viés da curvatura terrestre nas estimativas altimétricas a partir de aproximações, tais como relações trigonométricas na esfera para corrigir o viés altimétrico (ROGGENBUCK; REINKING, 2019) ou em termos do deslocamento do ponto de reflexão, considerando o viés na estimativa altimétrica equivalente ao deslocamento vertical do ponto de reflexão entre o plano e a esfera (ROUSSEL *et al.*, 2014; ZAVOROTNY *et al.*, 2014). Ressalta-se que os erros posicionais do ponto de reflexão entre as superfícies plana e esférica são expressivos em certas configurações de altura da antena receptora e ângulo de elevação (ROUSSEL *et al.*, 2014), o que pode afetar significativamente a geometria da reflexão e, conseqüentemente, o atraso de propagação interferométrico. Entretanto, ainda não se tem conhecimento publicado abertamente sobre o efeito altimétrico da curvatura terrestre em medições do nível do mar por refletometria GNSS a partir do atraso de propagação interferométrico, o qual será abordado no presente trabalho.

## 1.1 Proposição

### 1.1.1 Objetivo geral

Com a realização deste trabalho busca-se entender, descrever e corrigir o efeito da curvatura terrestre nas medições altimétricas da superfície do mar por GNSS-R quando a altura é estimada a partir de um modelo de superfície plano, a fim de definir os limites de aplicação do modelo de superfície plano em termos da altura da antena receptora e do ângulo de elevação do satélite, além de proporcionar maior confiabilidade e qualidade na determinação do nível do mar pela refletometria GNSS.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Descrever o comportamento geométrico da reflexão de ondas sobre o modelo de superfície esférico;
- Descrever os erros da geometria da reflexão no modelo de superfície plano com relação ao modelo de superfície esférico e a propagação destes erros no atraso de propagação interferométrico e nas estimativas altimétricas obtidas por refletometria GNSS;
- Propor um modelo matemático teórico para correção do erro altimétrico causado pela curvatura terrestre no modelo de superfície plano.

### 1.1.3 Hipótese

O ponto de reflexão da onda GNSS sobre uma superfície se afasta da antena receptora GNSS proporcionalmente a redução do ângulo de elevação do satélite e ao aumento da altura da antena receptora. O distanciamento do ponto de reflexão em relação à antena receptora causa erros posicionais proporcionais ao incremento da distância, principalmente ao se utilizar um modelo de superfície plano, que desconsidera a curvatura terrestre (ROUSSEL *et al.*, 2014; ZAVOROTNY *et al.*, 2014). Assim, considerando-se a utilização de um modelo de superfície plano para a estimativa altimétrica por GNSS-R, o distanciamento do ponto de reflexão causará divergências na determinação do ponto de reflexão entre o modelo plano e um modelo de superfície esférica. O erro posicional do ponto de reflexão decorrerá em erros na determinação do atraso de propagação interferométrico devido às mudanças de geometria da reflexão. Conseqüentemente, ocorrerão erros na determinação altimétrica da superfície marítima. Então,

se o erro provocado pela curvatura terrestre na determinação da altimetria possuir comportamento sistemático, este pode ser modelado matematicamente para ser corrigido no modelo de superfície plano.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Altimetria dos mares

A altura da superfície do mar em um determinado local, ou nível instantâneo do mar, é medido em relação a uma superfície de referência (GREGORY *et al.*, 2019). Quando tal superfície de referência é fixa à crosta terrestre (Terra sólida), é chamado de nível relativo do mar (NRM). O nível do mar pode ser medido também em relação ao centro da Terra, a partir de um referencial como o elipsoide ou geoide, sendo então denominado nível geocêntrico do mar (NGM). A média temporal do nível do mar instantâneo de um dado local é conhecida como nível médio do mar (NMM). Adicionalmente, a média espacial do NMM em torno do planeta é chamado nível médio do mar global. A medição do NRM é realizada por marégrafos, enquanto o NGM exige adicionalmente o posicionamento GNSS do marégrafo; o NGM também é medido por altímetros orbitais (CHURCH *et al.*, 2013; ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016). Os sistemas de medição do nível do mar serão abordados com mais detalhes na próxima seção.

A variação, ou alterações, do nível do mar é um importante indicador das mudanças climáticas, devido aos fatores espaço-temporais associados a estas mudanças (CHURCH *et al.*, 2013). A observação do nível do mar está relacionada a três variáveis principais: nível médio do mar, nível da maré e nível residual (PUGH; WOODWORTH, 2014)

O NMM é integrado pelo período mínimo de um ano, mas, preferencialmente, por um período superior a 18,6 anos para que possa ser possível obter médias de ciclos e fases de amplitudes de maré (PUGH; WOODWORTH, 2014). Já as marés são definidas como o movimento oscilatório ou periódico com fase e amplitude relacionadas a forças geofísicas, principalmente ao campo gravitacional da lua e do sol que configura as chamadas marés astronômicas ou gravitacionais. Além disso, forças menores atuantes nas marés ocorrem devido a condições meteorológicas, em diferentes escalas de tempo (sazonais, diárias, etc.), formando as chamadas marés meteorológicas (PUGH; WOODWORTH, 2014).

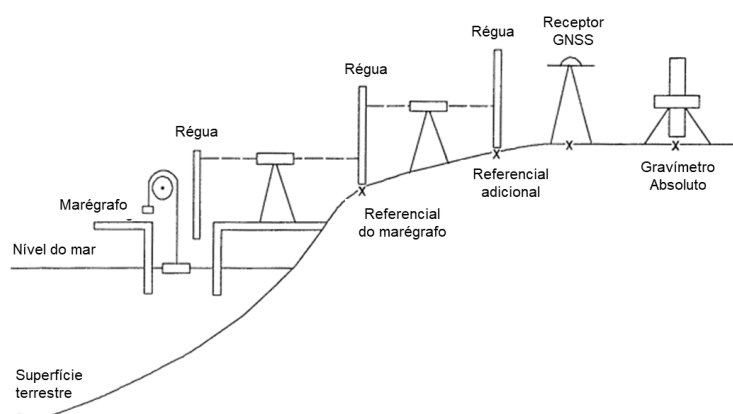
Além do nível médio dos mares e das marés, uma sequência de medições do nível do mar possuirá também dados resultantes da oscilação periódica da maré e variações residuais, associadas à ocorrência de eventuais tempestades (PUGH; WOODWORTH, 2014).

### 2.1.1 Sistemas de medição do nível do mar

O nível do mar pode ser medido *in situ*, como os marégrafos, ou por sensoriamento remoto, como o altímetro orbital e a refletometria GNSS. O principal requisito dos sistemas de medição das variações do nível do mar é a habilidade em resolver longos e curtos períodos de variação com acurácia melhor que um centímetro com relação a um referencial geodésico com nível de confiança de 95% para erros aleatórios (PUGH, 1987; PUGH; WOODWORTH, 2014). Para erros sistemáticos, contudo, não há uma probabilidade associada. Os sistemas de medição do nível do mar podem ser classificados em duas categorias: sistemas apropriados para medições do nível do mar costeiro, como os marégrafos, e sistemas apropriados para uso em alto mar (*off-shore*), como o altímetro orbital, boias GNSS e os planadores aquáticos GNSS (PENNA *et al.*, 2018; PUGH, 1987).

Quanto aos sistemas costeiros, destacam-se os marégrafos. Esses sistemas medem a variação do NRM. Opcionalmente, podem medir o NGM, com relação a um referencial geodésico conhecido dado por um ponto fixo com altura conhecida acima do elipsoide (Figura 1). Ocasionalmente, os marégrafos são acompanhados de uma estação GNSS para controlar as movimentações de terra, como a subsidência da fundação do marégrafo (ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016)

Figura 1 – Esquema do sistema de medição do nível do mar geocêntrico por marégrafo apoiado por GNSS.



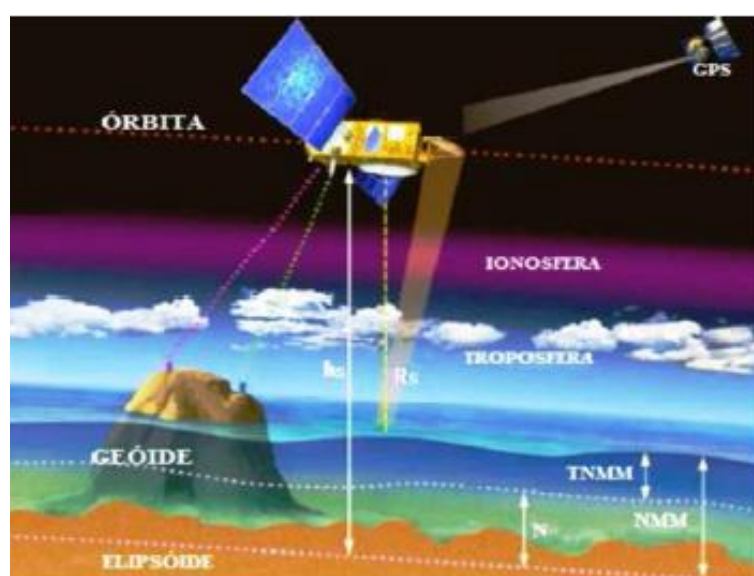
Fonte: adaptado de IOC (1994).

A Comissão Oceanográfica Intergovernamental (IOC) cita que existem quatro tipos principais de tecnologias maregráficas em uso (IOC, 2006):

- Poço de tranquilização (*Stilling Well*) e sistemas flutuantes (boia e contrapeso): a filtragem das ondas é realizada mecanicamente através de um tubo aberto inserido verticalmente na água;
- Sistemas de pressão: sistema em que a pressão abaixo do medidor é monitorada e convertida em altura, baseada no conhecimento da densidade da água e da aceleração local devido à gravidade;
- Sistemas acústicos: sistema no qual o tempo de um pulso sônico é utilizado para medir a altura;
- Sistemas de radar: o tempo de propagação da onda de radar é usado para medir a altura.

Já quanto aos sistemas em alto mar, destacam-se os radares altímetros orbitais nadirais, sendo os sistemas *off-shore* mais utilizados (IOC, 2006). Tais instrumentos medem duas vezes a distância vertical entre o mar e a antena transreceptora, a partir da emissão de ondas de radar que refletem na superfície e retornam à mesma antena. A diferença altimétrica entre essa distância vertical e a altitude elipsoidal do satélite permite a medição da altimetria da superfície do mar com relação ao elipsoide terrestre de referência (Figura 2). Posteriormente, as medições podem ser referenciadas ao geoide ou ao nível médio de referência. Devido a referência geocêntrica, as medições do nível do mar pelos altímetros orbitais referem-se ao NGM (ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016).

Figura 2 – Sistema de medição do nível do mar por radar altímetro orbital nadiral com relação ao elipsoide e ao geoide.



Fonte: Reis, Palmeiro e Barbosa (2018)

Os altímetros orbitais são importantes sistemas de medição do nível médio global, complementando as medições das redes de marégrafos existentes (CIPOLLINI *et al.*, 2017; ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016). Alguns exemplos destes sistemas são os satélites das missões Topex-Poseidon e Jason (ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016).

Contudo, deve-se destacar que os métodos convencionais de medição do nível do mar – marégrafos e altímetros orbitais – apresentam algumas lacunas. Os marégrafos possuem alta precisão nas medições do nível do mar e ótima resolução temporal, mas possuem limitação quanto a resolução espacial, devido a serem medições pontuais e a distribuição espacialmente desigual em torno do globo. Além disso, os marégrafos apresentam dificuldades em considerar mudanças na dinâmica do oceano e os movimentos verticais de terra sem dados oriundos de sistemas externos independentes, como receptores GNSS. Já os altímetros orbitais possuem ótima cobertura global dos oceanos, porém apresentam baixa resolução temporal para fins de monitoramento contínuo do nível do mar local. Ademais, nas medições do nível do mar nas zonas costeiras, os sinais emitidos pelos altímetros podem conter ruídos devido contaminação do sinal pela interação com o solo (CIPOLLINI *et al.*, 2017; IOC, 2016; PENNA *et al.*, 2018; ROVERE; STOCCHI; VACCHI, 2016)

Assim, o IOC destaca os recentes avanços em tecnologias alternativas de medição do nível do mar, dentre elas a técnica de sensoriamento remoto chamada Refletometria GNSS (IOC, 2006). A técnica oferece a possibilidade de medições do NRM – altura da superfície do mar com relação a antena GNSS – com acesso ao NGM a partir da integração das medidas do NRM com o posicionamento GNSS obtido pelo receptor. Em plataformas terrestres, o posicionamento GNSS contínuo, concomitante à refletometria, permite ainda o controle de movimentos de terra na base da antena receptora, destacando-se em relação aos marégrafos convencionais (GEREMIA-NIEVINSKI *et al.*, 2020). Ressaltam-se também outras vantagens da GNSS-R que podem auxiliar e suprir as lacunas dos métodos convencionais, como a medição à distância, uso de rede de estações GNSS existentes (PENG *et al.*, 2019) e a possibilidade de aplicação da técnica nas zonas costeiras com plataformas terrestres, bem como aplicações *off-shore*, utilizando-se de plataformas aéreas ou orbitais (IOC, 2016; STRANDBERG; HOBIGER; HAAS, 2019)

## **2.2 Refletometria GPS/GNSS (GNSS-R)**

O GNSS é o conjunto de sistemas de navegação por satélite como o estadunidense GPS (*Global Positioning System*) o russo GLONASS (*GLObal NAVigation Sattelite System*), o



européu Galileo e o chinês BeiDou/Compass (MONICO, 2008; SEEBER, 2003). Além das suas aplicações para posicionamento e navegação, pode ser destacado também o uso dos GNSS para o sensoriamento remoto geodésico, como a refletometria GNSS (GNSS-R) (NIEVINSKI; MONICO, 2016).

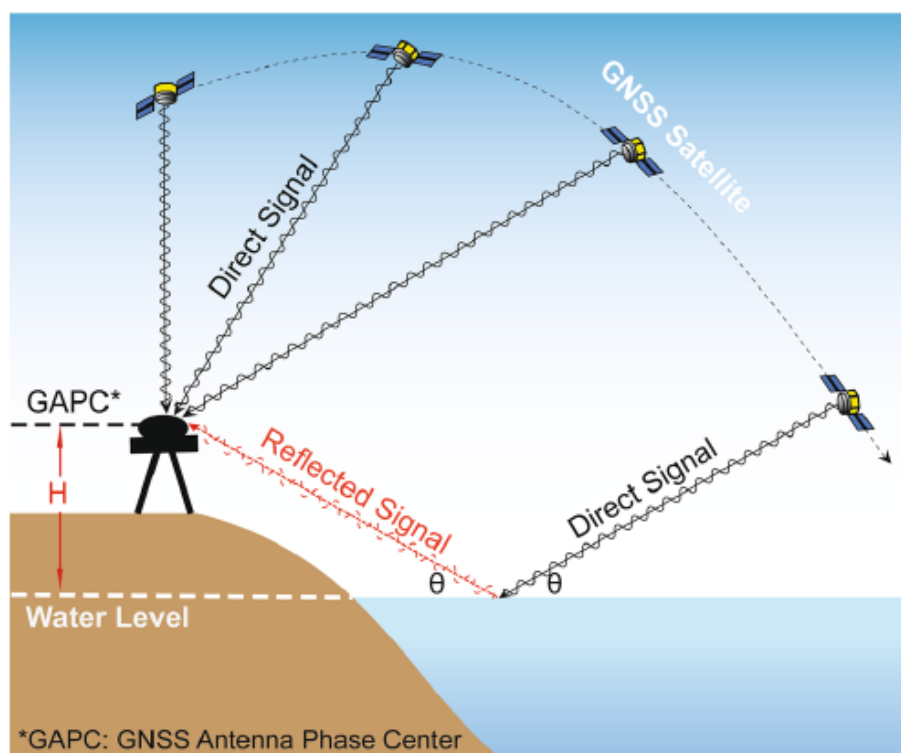
Para posicionamento e navegação, a recepção de ondas GNSS pela antena após serem refletidas pela superfície é considerada uma fonte de erro, denominada multicaminho (MONICO, 2008). Em refletometria GNSS, no entanto, as reflexões das ondas GNSS são utilizadas para obter parâmetros geofísicos da superfície refletora como altura, rugosidade e composição (ZAVOROTNY *et al.*, 2014). A GNSS-R pode ser aplicada em diferentes coberturas como oceanos, solo, gelo e vegetação devido a frequência das ondas GNSS estarem na banda L, a qual possui alta penetração de nuvens e sensibilidade a umidade e salinidade (ZAVOROTNY *et al.*, 2014).

A proposição de aplicação de ondas GNSS refletidas foi primeiramente discutida em Hall e Cordey (1988). Posteriormente, Martín-Neira (1993) propôs o PARIS (*Passive Reflectometry and Interferometry System*) para a medição altimétrica da superfície do mar a partir da reflexão de ondas GNSS no mar, consolidando a aplicação da GNSS-R.

A GNSS-R funciona como um radar, baseada nas ondas de rádio GNSS continuamente emitidas que refletem na superfície e chegam na antena receptora (Figura 3). A comparação da onda refletida em relação a onda que chega diretamente à antena receptora retorna o atraso de propagação interferométrico. Então, a partir do conhecimento do atraso interferométrico e da posição da antena receptora, é possível calcular a altura da superfície refletora em relação a antena receptora (Figura 3) (HELM, 2008; ROUSSEL *et al.*, 2014; ROUSSEL *et al.*, 2015; ZAVOROTNY *et al.*, 2014).

Conforme será detalhado posteriormente, a altura medida por GNSS-R pode ser retornada a partir de três tipos de observações. O primeiro tipo é o atraso interferométrico absoluto, dado pela distinção absoluta no tempo entre a onda direta e a refletida, obtido pelas observáveis fase da onda portadora ou pseudodistância. Os outros são relacionados à taxa de variação do atraso de propagação no tempo, verificado diretamente nas medidas de Doppler ou indiretamente no padrão de interferência construtiva e destrutiva exibido nas medidas de SNR (*Signal-to-Noise Ratio* ou razão sinal/ruído). A última metodologia pode ser denominada também como Refletometria de Multicaminho GNSS (GNSS-MR) ou Refletometria Interferométrica GNSS (GNSS-IR), a qual é mais comum em medições do nível do mar por estações terrestres, pois necessita de apenas um receptor e antena GNSS (NIEVINSKI; MONICO, 2016; ZAVOROTNY *et al.*, 2014).

Figura 3 – Funcionamento da técnica de refletometria por GNSS.

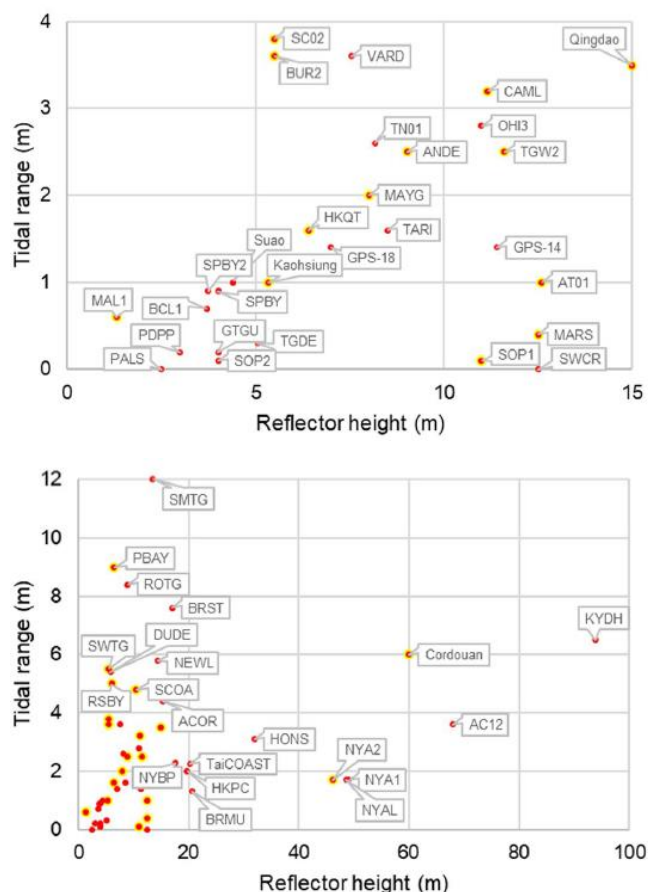


Fonte: Peng *et al.* (2019).

A altimetria da superfície dos mares é uma das principais aplicações da GNSS-R, embora a altimetria possa ser realizada sobre outras superfícies também como o gelo (ZAVOROTNY *et al.*, 2014). As medições podem ser realizadas a partir de plataformas orbitais, aéreas e terrestres; mas, para realizar o monitoramento contínuo do nível do mar nas zonas costeiras, a plataforma terrestre é mais apropriada, devido à sua estabilidade (GEREMIA-NIEVINSKI *et al.*, 2020; STRANDBERG; HOBIGER; HAAS, 2019).

A refletometria GNSS em plataformas terrestres para fins de monitoramento e medição do nível do mar costeiro é relativamente recente, com a primeira demonstração em Anderson (2000). Desde então, tem-se registro de diversas publicações com aplicações da GNSS-R para medição do nível do mar, com o uso de mais de 50 estações terrestres ao redor do mundo (GEREMIA-NIEVINSKI; MAKRAKIS; TABIBI, 2020). Na Figura 4 são apresentadas as estações GNSS-R encontradas na literatura com aplicações de medição do nível do mar realizadas a partir da observável SNR, com exceção da estação NOMI, a qual foi removida do gráfico devido a sua elevada altura em relação a superfície refletora (275,7 m) e para que, então, o eixo x do gráfico não fosse comprimido (GEREMIA-NIEVINSKI *et al.*, 2020).

Figura 4 – Estações GNSS-R utilizadas para medição do nível do mar encontradas na literatura com as respectivas alturas em relação a superfície refletora e as variações aproximadas da maré. As estações destacadas em amarelo estão localizadas a menos de 1 km de um marégrafo.



Fonte: Geremia-Nievinski *et al.* (2020).

Dentre as principais vantagens da refletometria GNSS, destaca-se a medição inclinada, a qual possibilita a obtenção de pontos de reflexão a longas distâncias da antena receptora. O ponto de reflexão ocorre mais longe da antena receptora quanto maior a altura da antena receptora e menor o ângulo de elevação visado (ROUSSEL *et al.*, 2014). Verifica-se na Figura 4 que a maior parte das estações GNSS-R utilizadas para medição do nível do mar estão posicionadas abaixo de 20 m. Porém, ressalta-se que não é incomum estações GNSS-R terrestres mais altas (Tabela 1), com destaque para as estações NOMI e KYDH com alturas médias de 275,7 m e 93,9 m, respectivamente. Nesse sentido, estações altas como NOMI e KYDH possibilitam a recepção de reflexões oriundas de locais a centenas ou a milhares de metros da antena receptora, viabilizando um longo alcance das medições e permitindo até mesmo que essas estações se localizem longe da costa do mar.

Tabela 1 – Estações GNSS-R acima de 20 m de altura encontradas na literatura.

Estação GNSS-R	Altura média em relação a superfície refletora (m)
NOMI	275,7
KYDH	93,9
AC12	68,0
Cordouan	60,0
NYA1	49,1
NYAL	48,6
NYA2	46,2
HONS	31,9
BRMU	20,7
TaiCOAST	20,3

Fonte: Adaptado de Geremia-Nievinski, Makrakis e Tabibi (2020).

### 2.2.1 Formulação das observáveis altimétricas

A partir da análise de certas observáveis ou tipos de observação em GNSS-R, é possível estimar a altura da superfície refletora (ZAVOROTNY *et al.*, 2014). Para a altimetria por GNSS-R, a observável fundamental é o *atraso de propagação interferométrico* da onda refletida com relação à onda direta (ZAVOROTNY *et al.*, 2014):

$$\tau_i = \tau_r - \tau_d \quad (1)$$

Ele consiste no caminho adicional percorrido pela onda refletida na superfície,  $\tau_r$ , em relação à onda que chega diretamente a antena receptora,  $\tau_d$  (LARSON *et al.*, 2013). Ele costuma ser expresso em metros, pressupondo que o tempo de propagação seja multiplicado pela velocidade da luz.

Em geral, para uma superfície refletora e um meio de propagação quaisquer, temos:

$$\tau_i = D_i + d_i \quad (2)$$

Os termos principais do atraso interferométrico  $\tau_i$  são a componente geométrica,  $D_i$ , e a componente atmosférica,  $d_i$ . Neste trabalho, será considerada a propagação no vácuo  $\tau_i \approx D_i$ , desprezando  $d_i$ , para se investigar isoladamente a contribuição de  $D_i$ .

A componente geométrica do atraso de propagação interferométrico ou simplesmente a *distância interferométrica*  $D_i$  é definida de forma análoga à Equação (1):

$$D_i = D_r - D_d \quad (3)$$

onde a distância percorrida pela onda refletida e pela onda direta são, respectivamente:

$$D_r = \|\vec{r}_s - \vec{r}_t\| + \|\vec{r}_a - \vec{r}_s\| \quad (4)$$

$$D_d = \|\vec{r}_a - \vec{r}_t\| \quad (5)$$

Tais expressões vetoriais envolvem a antena receptora  $\vec{r}_a$ , o satélite transmissor  $\vec{r}_t$  e o ponto de reflexão na superfície  $\vec{r}_s$ . A formulação genérica da Equação (4) será especializada posteriormente para os modelos de superfície plano e esférico. Já a distância percorrida pela onda direta é independente do modelo de superfície:

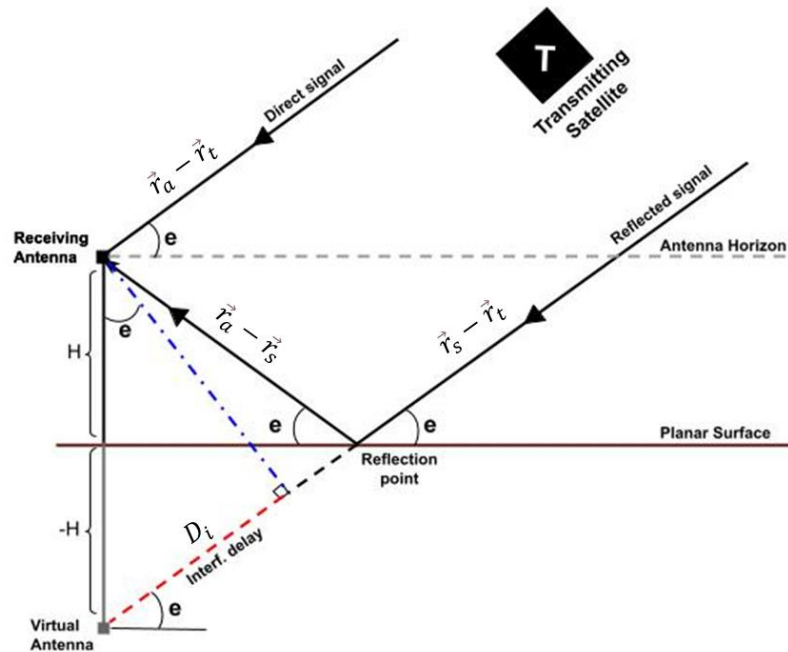
$$D_d = D_d^s = D_d^p = \|\vec{r}_a - \vec{r}_t\|. \quad (6)$$

Para um satélite a zênite,  $e = 90^\circ$ , o atraso interferométrico é simplesmente  $D_i|_{e=90^\circ} = 2H$ , correspondente simplesmente ao caminho vertical de ida e volta da onda desde a antena receptor até a superfície, ou seja, o caminho adicional da onda refletida com relação à onda direta é duas vezes a altura da antena. Isso pode ser pressuposto para os modelos de superfície azimutalmente simétricos, como os modelos plano e esférico.

As componentes das ondas direta e refletida e o atraso de propagação interferométrico, apresentados nas equações acima, estão representados graficamente na Figura 5. Embora as formulações acima sejam genéricas, na ilustração considerou-se o modelo de superfície plano, que é o caso mais simples e usual (LARSON *et al.*, 2013; NIEVINSKI, 2013). Neste caso, a onda refletida pode ser definida como uma reta entre o transmissor e uma antena virtual. Essa, por sua vez, consiste na imagem da antena real cuja suposição é válida apenas para uma superfície plana. Nesse contexto, a parte espalhada da onda refletida ( $\vec{r}_a - \vec{r}_s$ ) pode ser dada como o segmento de reta entre a antena virtual e o ponto de reflexão, sendo então uma continuidade da parte incidente da onda refletida ( $\vec{r}_s - \vec{r}_t$ ). O caminho adicional da onda refletida com relação à onda direta, ou atraso de propagação interferométrico (linha vermelha

tracejada), pode ser definido como a distância entre a antena virtual e a projeção ortogonal da antena real na onda refletida (linha azul de pontos e traços) (ROUSSEL *et al.*, 2015). A especialização das formulações genéricas para uma superfície plana será abordada com mais detalhes nas próximas seções.

Figura 5 – Representação das componentes das ondas direta e refletida e do atraso interferométrico (linha vermelha tracejada) especializados para uma superfície plana.



Fonte: o autor.

O atraso interferométrico (em metros) está relacionado com a chamada *fase interferométrica* (em radianos) (NIEVINSKI; LARSON, 2014b):

$$\phi_i = k\tau_i + \varphi_i \approx kD_i + \varphi_i \quad (7)$$

onde a constante  $k = 2\pi/\lambda$  é o *número-de-onda ordinário*, dependente do comprimento da onda portadora  $\lambda$  (em GPS, aproximadamente 19 cm ou 24 cm nas portadoras L1 e L2, respectivamente). Já o termo  $\varphi_i$  é a *fase inicial* ou *deslocamento da fase*, a qual depende tanto de efeitos geométricos, como a forma da superfície, quanto não-geométricos, como composição da superfície, bem como componentes atmosféricas, instrumentais, dentre outras fontes de erro.

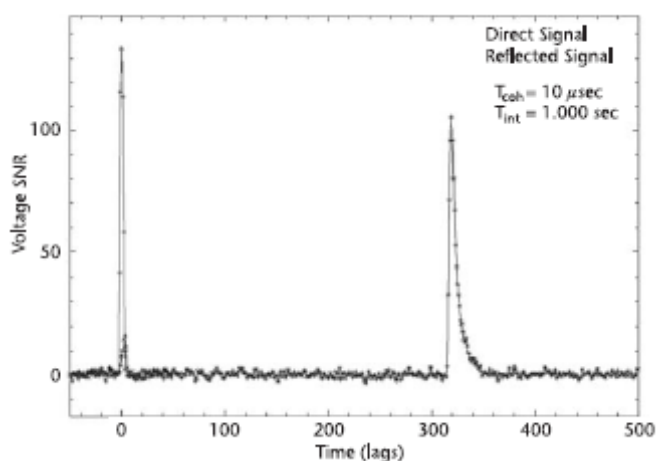
Para antenas receptoras próximas à superfície, tais componentes não-geométricas costumam ser desprezadas e modelos mais simples podem ser aplicados para se determinar o

atraso ou a fase (JIN; CARDELLACH; XIE, 2013). A modelagem puramente geométrica da reflexão é suficiente quando o atraso geométrico da onda refletida é o principal efeito observado, como na altimetria da superfície do mar. Modelos não geométricos se tornam importantes em aplicações de GNSS-R como medição da umidade do solo.

O atraso de propagação interferométrico é medido em campo pela distinção temporal entre as pseudodistâncias das ondas direta e refletida na chegada a antena receptora (ZAVOROTNY *et al.*, 2014). Já a fase interferométrica pode ser obtida pelas observáveis GNSS de fase da portadora. Para a recepção do sinal, geralmente se utiliza de equipamento especializado que consiste no uso de duas antenas receptoras GNSS: uma a nadir para a recepção da onda refletida; e a outra a zênite para a onda direta.

O atraso interferométrico e a fase interferométrica exigem uma configuração que permita a distinção entre as duas ondas, de forma que as recepções destas ondas não se sobreponham temporalmente, como na Figura 6. Desta forma, é necessário que se disponha de uma antena alta e visada de satélites com ângulos elevados. Logo, este tipo de atraso é obtido preferencialmente por receptores em plataformas aéreas ou orbitais (GLEASON; LOWE; ZAVOROTNY, 2009).

Figura 6 – Exemplo de obtenção de atraso de propagação interferométrico, na qual a onda da esquerda é a direta (com potência maior e mais concentrada), e a onda da direita é a refletida (com potência menor e mais espalhada).



Fonte: Gleason, Lowe e Zavorotny (2009).

Entretanto, certos cenários apresentam atraso relativo entre as duas ondas insuficiente para sua distinção, como em plataformas terrestres ou para satélites próximos do horizonte. Neste caso, tem-se como observáveis altimétricas alternativas a *taxa de variação temporal do atraso interferométrico* (em m/s) (NIEVINSKI, 2013):

$$\dot{D}_i = \partial D_i / \partial t \quad (8)$$

bem como a *taxa de variação da fase interferométrica* (em rad/s):

$$\dot{\phi}_i = \partial \phi_i / \partial t \quad (9)$$

Ambas as taxas estão relacionadas com a *frequência interferométrica* ou *Doppler interferométrico* (em Hz):

$$f_i = \frac{\dot{\phi}_i}{2\pi} = \frac{\dot{D}_i}{\lambda} \quad (10)$$

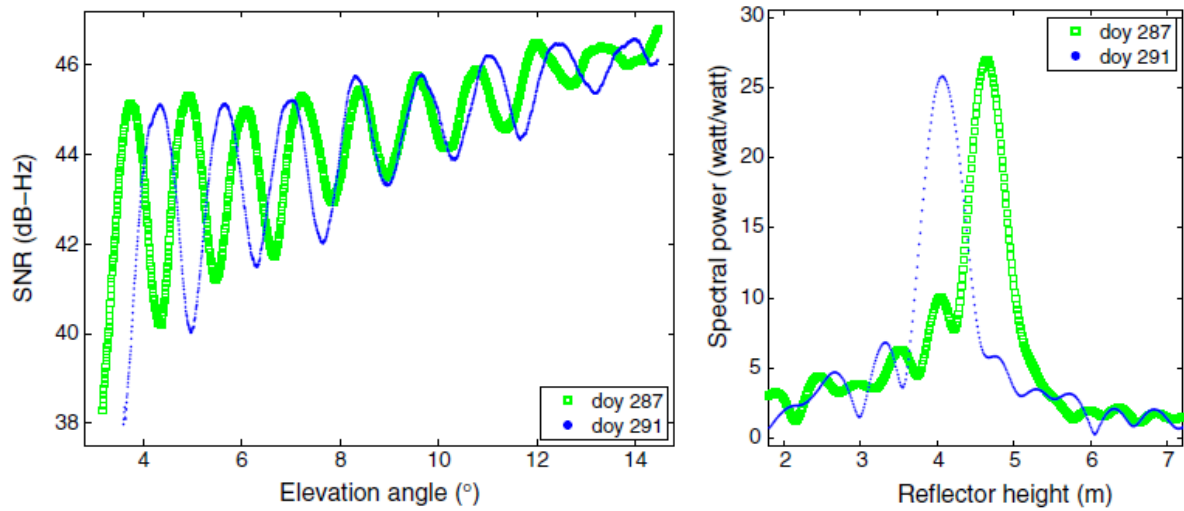
Tal observável de frequência Doppler pode ser medida em campo diretamente com duas antenas e supondo boa separação entre os dois caminhos de propagação. Também pode ser inferida indiretamente utilizando uma única antena a partir de padrões de interferência da potência onda portadora, registrados através de uma sequência de observações do tipo *razão sinal ruído* (SNR) (NIEVINSKI; LARSON, 2014c):

$$SNR = P_s / P_n = P_n^{-1} (P_d + P_r + 2\sqrt{P_d P_r} \cos(2\pi f_i + \phi_i)) \quad (11)$$

onde  $P$  indica potência:  $P_s, P_n, P_d, P_r$  são, respectivamente, a potência do sinal, do ruído (*noise*), da onda direta e da onda refletida. A frequência pode então ser obtida através da análise espectral de  $SNR$  em janelas de tempo. Os padrões de interferência são originados pela sobreposição coerente entre as ondas direta e refletida, que apresenta interferências construtivas ( $\cos \phi_i = 1$ ) e destrutivas ( $\cos \phi_i = -1$ ) à medida que estas duas ondas entram e saem de fase ao longo do tempo, formando ciclos de oscilações. Os padrões de interferência podem ser verificados também ao longo dos ângulos de elevação, com o movimento do satélite GNSS no céu (Figura 7) (FAGUNDES *et al.*, 2021; LÖFGREN; HAAS, 2014; NIEVINSKI; LARSON, 2014b; ZAVOROTNY *et al.*, 2014).



Figura 7 – Comportamento característico do SNR em função da variação do ângulo de elevação do satélite (à esquerda) e a obtenção da altura da superfície refletora por análise espectral (à direita) em dois dias diferentes.



Fonte: Löfgren e Haas (2014).

A observável SNR é composta, dentre outros termos, pelo efeito do multicaminho. O multicaminho, por sua vez, é atenuado com o aumento do ângulo de elevação. Dessa forma, a amplitude das oscilações do SNR sofre um amortecimento na direção do incremento do ângulo de elevação, produzindo o comportamento verificado na Figura 7. Para isolar o efeito do multicaminho nas observações SNR, as demais contribuições devem ser removidas, permanecendo apenas o SNR residual ( $s$ ) (LÖFGREN; HAAS, 2014).

$$s = 2P_n^{-1} \sqrt{P_d P_r} \cos(2\pi f_i + \phi_i) = A \cos \phi_i \quad (12)$$

onde  $A$  é a amplitude da oscilação e  $\phi_i$  é a fase interferométrica, definida na Equação (7).

Por fim, uma observável análoga ao Doppler interferométrico muito útil para altimetria pode ser definida pela taxa de variação do atraso ou da fase interferométricos com relação às respectivas sensibilidades verticais. Assim, a *frequência interferométrica modificada* ou o *pseudo-Doppler interferométrico*  $f'_i$  é definido por:

$$f'_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial k_z} = \frac{\partial D_i}{\partial K_z} = H_a \quad (13)$$

onde  $k_z$  é a sensibilidade vertical da fase interferométrica e  $K_z$  é a sensibilidade vertical do atraso interferométrico, ambas dependentes do ângulo de elevação do satélite (NIEVINSKI, 2013), definidas respectivamente por:

$$k_z = \partial\phi_i/\partial H \quad (14)$$

$$K_z = \partial D_i/\partial H \quad (15)$$

Por exemplo, para um satélite a zênite,  $e = 90^\circ$ , a sensibilidade vertical do atraso interferométrico é simplesmente igual a dois,  $K_z |_{e=90^\circ} = 2$ , correspondente ao caminho vertical de ida e volta da onda, desde a antena até a superfície. O pseudo-Doppler  $f_i'$  tem unidade de medida em metros e pode ser interpretado como uma "altura aparente",  $H_a$ . É uma observável dependente da suposição de um modelo de superfície (NIEVINSKI, 2013). Mais abaixo será detalhada a forma destas expressões para cada modelo de superfície.

### 2.2.2 Problema direto no plano

O problema direto da refletometria consiste na modelagem de reflexões na superfície como réplicas aproximadas do sinal direto. (NIEVINSKI; LARSON, 2014b). O atraso de propagação interferométrico é calculado baseado em um superfície geométrica e com as posições conhecidas de satélite e receptor (LARSON *et al.*, 2013; NIEVINSKI; LARSON, 2014b).

A obtenção do atraso interferométrico, dada a altura da antena receptora, é o chamado *problema direto*,  $D_i = F(H)$ . Na modelagem geométrica da reflexão de estações terrestres para medição do nível do mar, o caso geral pode ser especializado para uma superfície plana horizontal (Figura 5), a qual é a mais simples e usual (LARSON *et al.*, 2013; NIEVINSKI, 2013). A princípio, o atraso interferométrico no plano se dá por especialização da Equação (3):

$$D_i^p = D_r^p - D_d \quad (16)$$

onde a distância percorrida pela onda refletida é dada por:

$$D_r^p = \|\vec{r}_s^p - \vec{r}_t\| + \|\vec{r}_a - \vec{r}_s^p\| \approx \|\vec{r}_v^p - \vec{r}_t\| \quad (17)$$

A equação acima pode ser aproximada pela distância entre o satélite transmissor e uma *antena virtual* ( $\vec{r}_v^p$ ), definida pela imagem da antena real (Figura 5), da seguinte forma:

$$\vec{r}_v^p = \begin{bmatrix} x_v^p \\ y_v^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -H \end{bmatrix} \quad (18)$$

em que  $H$  é a altura da antena. Nessa aproximação, o atraso interferométrico em vácuo no plano  $D_i^p$  pode ser simplificado por trigonometria, conforme pode ser visualizado na Figura 5 (NIEVINSKI; LARSON, 2014b):

$$D_i^p \approx \|\vec{r}_v^p - \vec{r}_t\| - \|\vec{r}_a - \vec{r}_t\| = 2H \sin e = H \cdot K_z^p \quad (19)$$

em que  $e$  é o ângulo de elevação do satélite e a variável  $K_z^p = 2 \sin e$  é a sensibilidade vertical do atraso interferométrico no plano  $K_z^p = \partial D_i^p / \partial H$ .

A fase interferométrica na superfície plana  $\phi_i^p$  é dada por:

$$\phi_i^p = D_i^p \cdot k + \varphi_i = H \cdot k_z^p + \varphi_i \quad (20)$$

em que  $k_z^p = k K_z^p = 2 k \sin e$  é o número-de-onda vertical, em termos do número-de-onda ordinário,  $k = 2\pi\lambda^{-1}$ . De forma análoga à  $K_z^p$ ,  $k_z^p$  pode ser interpretada como a sensibilidade vertical da fase interferométrica no plano,  $k_z^p = \partial \phi_i^p / \partial H$ .

No plano, e para uma superfície estacionária ( $\partial H / \partial t = 0$ ), a frequência interferométrica ou Doppler interferométrico,  $f_i^p$  (NIEVINSKI; LARSON, 2014), dado em hertz (Hz), é obtido pela Equação (21):

$$f_i^p = \frac{\dot{\phi}_i^p}{2\pi} = \frac{\dot{\tau}_i^p}{\lambda} = H \cdot \frac{\dot{k}_z^p}{2\pi} = H \cdot \frac{\dot{K}_z^p}{\lambda} = H \cdot \frac{2k \dot{e} \cos e}{2\pi} = H \cdot \frac{2 \dot{e} \cos e}{\lambda} \quad (21)$$

onde  $\dot{e} = \partial e / \partial t$  é a taxa de variação temporal do ângulo de elevação e  $\dot{k}_z^p = \partial k_z^p / \partial t = 2 k \dot{e} \cos e$  é a taxa de variação temporal do número-de-onda vertical no plano.

Por fim, a frequência interferométrica modificada ou pseudo-Doppler interferométrico  $f_i'^p$  no plano é dado por (NIEVINSKI, 2013):

$$f_i'^p = \frac{\partial \phi_i^p}{\partial k_z^p} = \frac{\partial D_i^p}{\partial K_z^p} = H_a^p \quad (22)$$

Um fato notável para o pseudo-Doppler no plano é que a altura aparente é igual à altura geométrica,  $H = H_a^p$ , sendo esta a principal vantagem desta observável. Entretanto, em uma superfície esférica, a relação entre entres dois tipos de altura, verdadeira e aparente, não é trivial, como será demonstrado mais adiante.

### 2.2.3 Problema inverso no plano

A obtenção da estimativa altimétrica da superfície refletora por GNSS-R se dá pela função inversa do problema direto,  $H = F^{-1}(D_i)$ , denominado então como *problema inverso* ou simplesmente *inversão* (ZAVOROTNY *et al.*, 2014). A estimativa altimétrica obtida por GNSS-R consiste na altura vertical da antena receptora com relação a superfície refletora, ou seja, é a diferença altimétrica entre o ponto de reflexão na superfície e a antena receptora. A altura estimada é dada em termos relativos, em relação ao centro de fase da antena (GEREMIA-NIEVINSKI *et al.*, 2020; HELM, 2008).

Genericamente, a estimativa altimétrica  $H$  retornada pela inversão é aquela que apresenta diferença mínima entre o atraso de propagação empírico  $D_i^m$ , medido em campo, e o atraso de propagação nominal modelado  $D_i^0$ , dado a partir de uma aproximação altimétrica inicial  $H_0$  (ZAVOROTNY *et al.*, 2014):

$$H = F^{-1}(D_i^m) = \operatorname{argmin}_H(\delta D_i) = H_0 + \delta H \quad (23)$$

onde  $\delta D_i = D_i^m - D_i^0$  é a diferença entre o atraso interferométrico medido e nominal, e  $\delta H$  é a atualização altimétrica decorrente de  $\delta D_i$ . A atualização altimétrica é dada em função da sensibilidade vertical  $K_z$ , que corresponde à amplificação do atraso de propagação em função da altura e do ângulo de elevação, e é dependente da superfície de reflexão de referência e do método de inversão utilizado (NIEVINSKI, 2013; ZAVOROTNY *et al.*, 2014).

$$\delta H_D = \frac{\delta D_i}{K_z} \quad (24)$$

Posteriormente, a atualização é aplicada à aproximação inicial da seguinte forma:

$$H_D = H_0 + \delta H_D \quad (25)$$

No modelo de superfície plana, em que o problema direto é uma fórmula fechada, o problema inverso é igual a:

$$H_D^p = H_0 + \delta H_D^p = H_0 + \frac{D_i^{pm} - 2H_0 \operatorname{sen} e}{2 \operatorname{sen} e} = H_0 + \frac{D_i^{pm}}{2 \operatorname{sen} e} - H_0 \quad (26)$$

Assim, o plano dispensa aproximação inicial e a inversão plana pode ser simplificada pela seguinte expressão:

$$H_D^p = \frac{D_i^{pm}}{K_z^p} \quad (27)$$

Caso sejam utilizadas medições de fase  $\phi_i^{pm}$ , seria necessário conhecer a fase inicial  $\phi_i^p$  (NIEVINSKI, 2013):

$$H_\phi^p = \frac{\phi_i^{pm} - \phi_i^p}{k_z^p} \quad (28)$$

De forma análoga, podemos definir um modelo inverso para medições de frequência:

$$H_f^p = \lambda \frac{f_i^{pm}}{K_z^p} = 2\pi \frac{f_i^{pm}}{k_z^p} \quad (29)$$

Por último, considerando uma superfície plana de reflexão, a inversão pode ser dada trivialmente pelo pseudo-Doppler interferométrico  $f_i'^p$ , sendo o fato apresentado na Equação (30) a maior vantagem desta observável:

$$H_{f'}^p = f_i'^{pm} \quad (30)$$

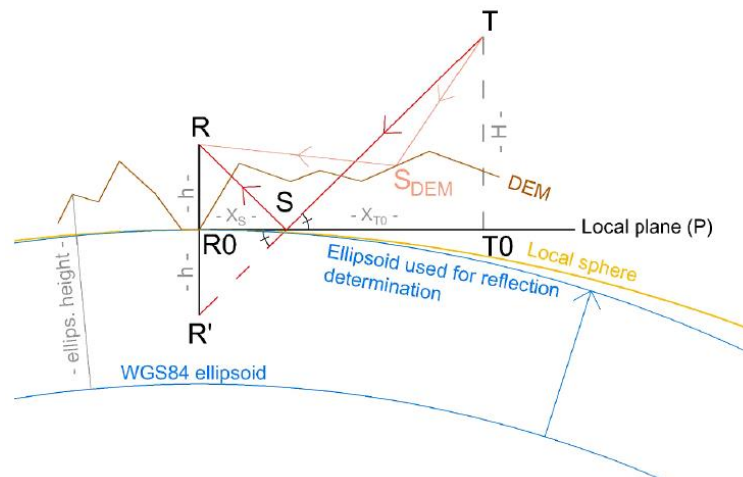
Neste trabalho, serão generalizadas tais expressões, mudando o modelo de superfície plano para o modelo esférico.

### 2.3 Geometria da superfície

Nievinski e Larson (2014b) apontam três métodos principais de modelagem da reflexão: de rastreo, polarimétrica e geométrica. A modelagem por rastreo busca a correspondência da réplica do sinal GNSS, empregada internamente pelo receptor; a polarimétrica procura pela combinação entre as respostas da superfície e da antena; já na modelagem geométrica calcula-se o atraso de propagação da onda sobre uma geometria pressuposta para a superfície. A modelagem geométrica é a mais adequada quando o atraso de propagação da onda refletida em relação à direta representa a principal componente da variável de medição, como na altimetria dos mares (LARSON *et al.*, 2013; NIEVINSKI; LARSON, 2014b).

Diferentes formas geométricas podem ser utilizadas para representar a superfície de reflexão como plano, esfera e elipsoide (Figura 8). A mais simples e usual é a geometria plana, pois é uma boa aproximação local a superfícies não muito onduladas, como superfície do mar (NIEVINSKI, 2013). Para antenas receptoras posicionadas em plataformas altas, entretanto, Nievinski e Larson (2014b) apontam que é necessária uma geometria de superfície mais especializada, como a geometria esférica. Superfícies como o geoide e modelos digitais também podem ser agregadas para refinar os resultados (ROUSSEL *et al.*, 2014; WU *et al.*, 2018)

Figura 8 – Geometrias de superfícies de reflexão utilizadas em GNSS-R.

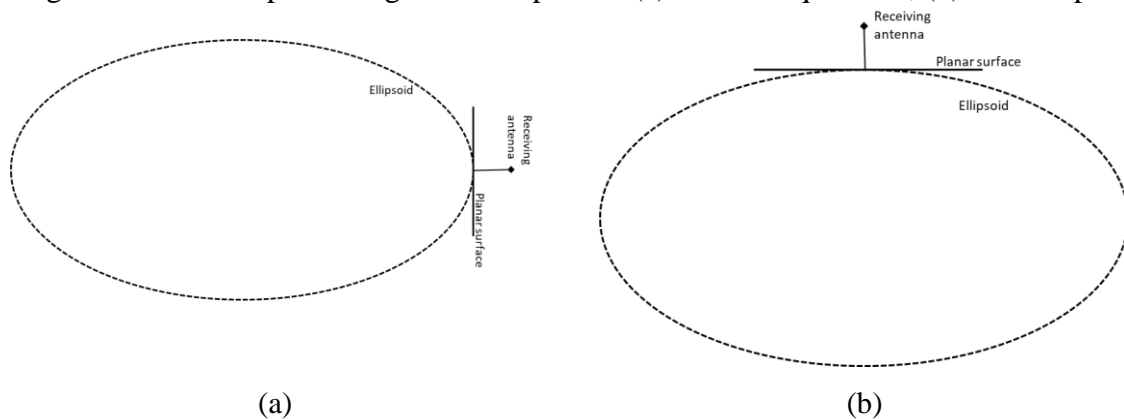


Fonte: Roussel *et al.* (2014).

### 2.3.1 Plano tangente ao elipsoide

O modelo de superfície plano tangente ao elipsoide é adequado para situações em que a antena receptora GNSS possui altura baixa com relação a superfície refletora como, por exemplo, a 10 m de altura, e está localizado em áreas abertas, sobre superfícies planas ou levemente onduladas, como é a maioria dos caso de antenas receptoras em plataformas terrestres para medição do nível do mar (LARSON; NIEVINSKI, 2013; NIEVINSKI; LARSON, 2014b; ZAVOROTNY *et al.*, 2014). O modelo é uma aproximação local de uma superfície plana horizontal que tangencia o elipsoide na base da antena GNSS (Figura 9), onde também está a origem do sistema de coordenadas local do ponto de reflexão (LARSON; LÖFGREN; HAAS, 2013). O uso de um plano local horizontal ao redor da antena é muito útil devido à facilidade da determinação do ponto de reflexão nesta superfície (LARSON; NIEVINSKI, 2013).

Figura 9 – Modelo plano tangente ao elipsoide. (a) latitude equatorial; (b) latitude polar.

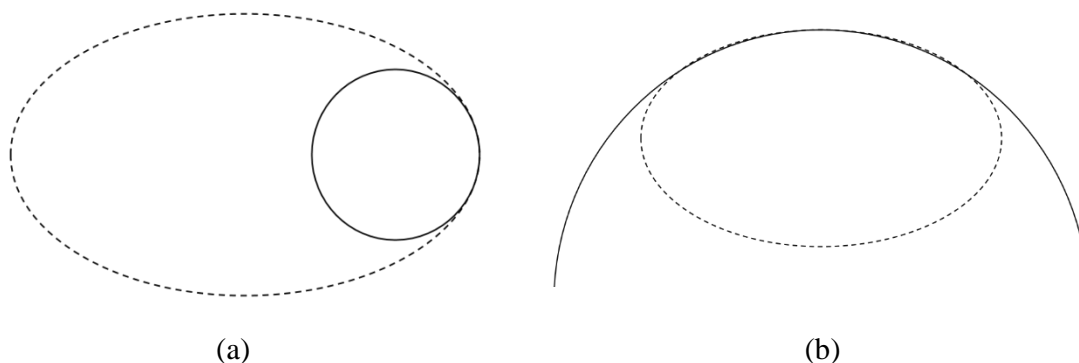


Fonte: o autor.

### 2.3.2 Esfera osculante ao elipsoide

A esfera osculante gaussiana consiste na esfera que melhor se ajusta ao elipsoide terrestre de referência (Figura 10) (HELM, 2008). Conforme Nievinski e Santos (2010), a esfera toca o elipsoide terrestre de referência sob um ponto base, utilizando a direção vertical como sua direção radial. A esfera ajusta-se ao elipsoide, aumentando seu raio quanto mais próximo estiver dos polos terrestres (Figura 10b), e menor quanto mais próximo da linha do Equador (Figura 10a). Assim, o raio da esfera osculante consiste no raio de curvatura gaussiano com definição dependente da latitude do ponto base.

Figura 10 – Modelo esférico osculante ao elipsoide. (a) latitude equatorial; (b) latitude polar.



Fonte: o autor.

A utilização de uma superfície esférica na refletometria por GNSS para modelagem geométrica é recomendada para estações altas (NIEVINSKI; LARSON, 2014b), mas que sejam mais baixas que plataformas orbitais (JALES, 2012). Além disso, possui resultados que se assemelham ao modelo de superfície plano e ao modelo elipsoidal (ROUSSEL *et al.*, 2014), sendo menos complexo que o último (NIEVINSKI; SANTOS, 2010), apresentando resultados piores que o modelo elipsoidal apenas para plataformas em LEO (*Low Earth Orbit*) ou mais altas (JALES, 2012).

### 2.3.3 Outros modelos

Outros modelos de superfície geométricos são utilizados a fim de refinar a localização do ponto de reflexão, como o geoide, o MDS (Modelo Digital de Superfície) e a topografia da superfície média dos mares. Neste sentido, Wu, Meehan e Young (1997) calcularam a localização do ponto de reflexão primeiramente assumindo a superfície como um elipsoide e então a localização do ponto de reflexão é refinada utilizando-se de mapas da superfície média dos mares e modelos de marés. Já Roussel *et al.* (2014) desenvolveram um simulador para localização do ponto de reflexão que, entre outras superfícies de reflexão, utilizam uma extensão do modelo elipsoidal combinado com MDE para modelar a localização do ponto de reflexão com mais precisão em superfícies irregulares, como as reflexões provenientes da superfície terrestre. Wu *et al.* (2018) aprimora a metodologia de Wu, Meehan e Young (1997) para determinação do ponto de reflexão e propõe uma metodologia de correção da projeção normal da reflexão sobre a superfície, corrigindo a superfície de reflexão de referência do elipsoide para o geoide.



## 2.4 Geometria da reflexão

Nesta seção, definimos algumas grandezas e apresentamos seus cálculos no plano. As fórmulas na esfera serão fornecidas posteriormente.

### 2.4.1 Ponto de reflexão

A localização do ponto de reflexão é de suma importância dentro da técnica de refletometria visto que é um importante parâmetro na determinação do caminho percorrido pela onda refletida e, portanto, está diretamente relacionado ao atraso de propagação interferométrico (SOUTHWELL; DEMPSTER, 2018; WU *et al.*, 2018). Wu *et al.* (2018) alertam para o fato de que erros na localização do ponto de reflexão são uma das principais fontes de erros na refletometria, devido aos parâmetros geofísicos dependentes da sua localização. Dois dos principais motivos de erro referem-se aos modelos de superfície utilizados para sua determinação geométrica e a refração atmosférica (ROUSSEL *et al.*, 2014; WU *et al.*, 2018)

O ponto de reflexão está localizado em um plano formado pelo transmissor, a antena receptora e o centro da Terra (HELM, 2008). É definido como ponto refletido em uma dada superfície que suprirá a Lei de Snell, que determina que o ângulo de incidência da onda deve ser igual ao ângulo de reflexão, e que estabelecerá o caminho percorrido pela onda refletida como a distância geométrica mínima de propagação no meio, satisfazendo o Princípio de Fermat (JALES, 2012; SEMMLING *et al.*, 2016; ZAVOROTNY *et al.*, 2014).

A posição espacial do ponto de reflexão pode ser determinada sobre diferentes sistemas de coordenadas. Para um modelo de superfície plano, o ponto de reflexão pode ser obtido mais facilmente utilizando-se de coordenadas cartesianas locais,  $\vec{r}_s = [x, y]^T$ , com origem na base da antena e tangente à superfície refletora (LARSON; LÖFGREN; HAAS, 2013). Se a superfície refletora ao redor da antena for considerada homogênea, a posição espacial do ponto de reflexão  $\vec{r}_s^p$  pode ser obtido simplesmente em  $x_s^p$  e  $y_s^p$ , ou seja, eixos horizontal e vertical, respectivamente, dados por:

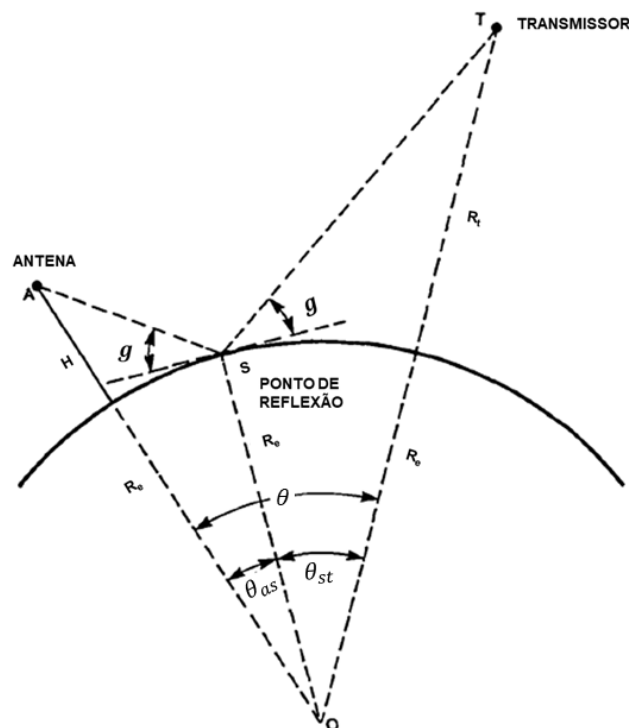
$$\vec{r}_s^p = \begin{bmatrix} x_s^p \\ y_s^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H / \tan e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

em que  $H$  é a altura da antena e  $e$  é o ângulo de elevação do satélite. Cabe salientar que no plano a única variação ocorre na coordenada  $x_s^p$ , enquanto a coordenada  $y_s^p$  mantém-se sempre zerada, já que a superfície é um plano horizontal (Figura 5).

#### 2.4.2 Ângulo rasante

O ângulo rasante consiste no ângulo que satisfaz a lei de Snell, ou seja, para uma onda refletida na superfície, o ângulo de incidência deve ser igual ao ângulo da reflexão (MILLER; VEGH, 1993). No contexto da refletometria, o ângulo rasante na superfície plana é igual ao ângulo de elevação do satélite, pois o horizonte da antena receptora é igual ao horizonte da superfície de reflexão. Por outro lado, na superfície esférica o ângulo rasante pode diferenciar-se do ângulo de elevação, visto que o plano tangente é variável. Na esfera, o ângulo rasante é calculado a partir de um plano tangente ao ponto de reflexão, o qual é perpendicular à normal radial da esfera osculante (Figura 11) (MILLER; VEGH, 1993).

Figura 11 – Ângulo rasante da onda refletida na esfera.

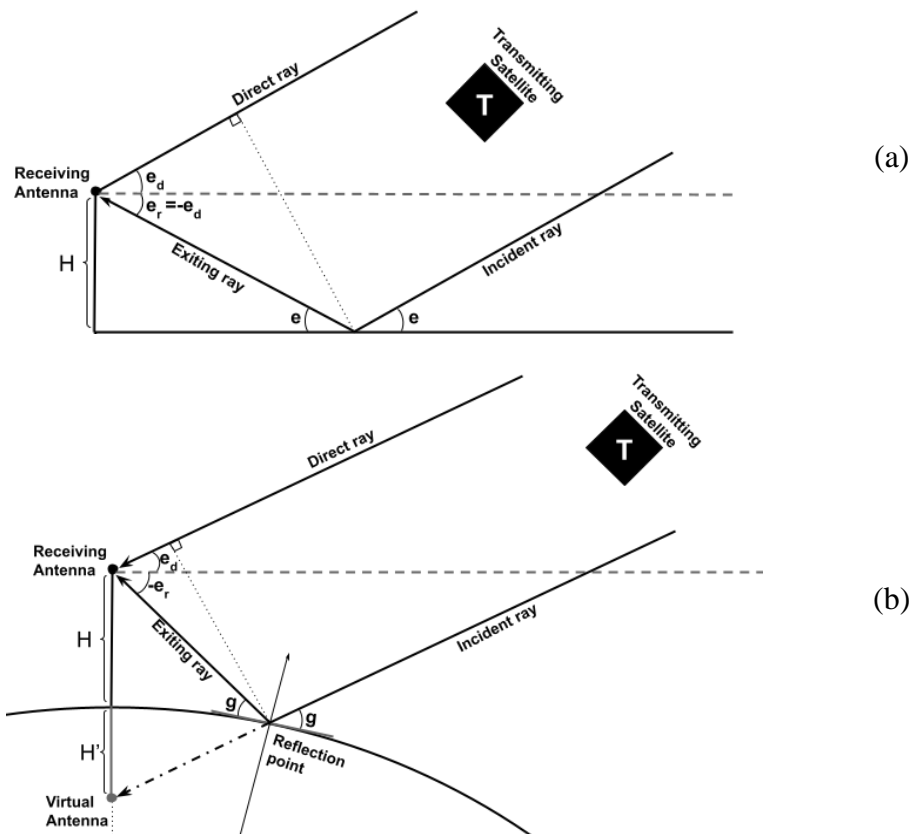


Fonte: Adaptado de Miller e Vegh (1990).

### 2.4.3 Ângulo de elevação da reflexão

O ângulo de elevação da reflexão  $e_r$  é o ângulo formado entre o horizonte da antena até a reflexão (Figura 12). No plano, o ângulo de elevação da reflexão  $e_r^p$  consiste na imagem do ângulo de elevação direto  $e_d$ , ou simplesmente  $e_r^p = -e_d$ , negativo (Figura 12a) (NIEVINSKI; LARSON, 2014). Na esfera, o ângulo de elevação da reflexão  $e_r^s$ , no entanto, não possui relação trivial com o ângulo de elevação direto devido a mudança na geometria da reflexão causada pela curvatura terrestre (Figura 12b).

Figura 12 – Geometria do ângulo de elevação da reflexão (a) no plano e (b) na esfera.



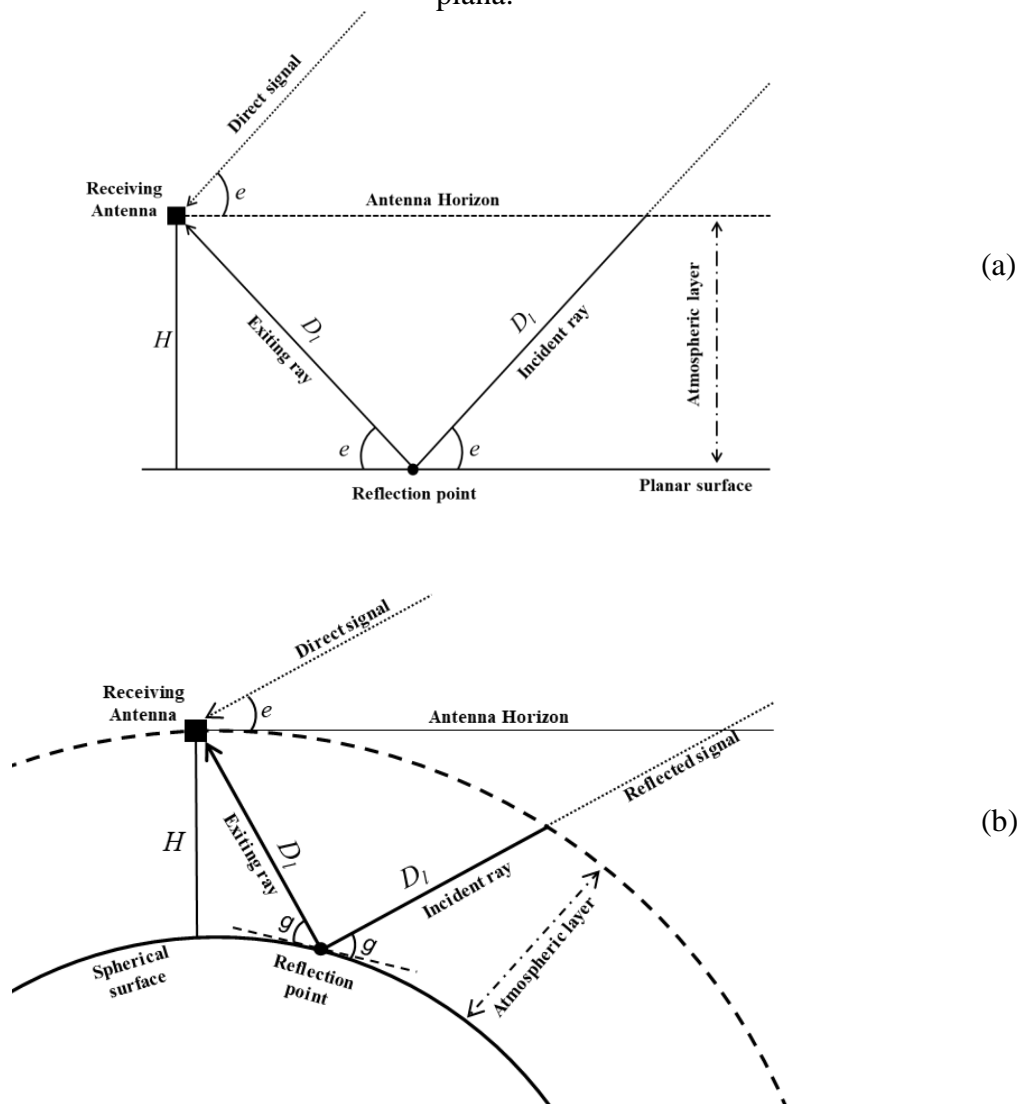
Fonte: o autor.

### 2.4.4 Distância inclinada

A distância inclinada  $D_l$ , no contexto do presente trabalho, consiste na distância entre a antena receptora e o ponto de reflexão (Figura 13). A distância inclinada terá o cunho de validação dos algoritmos de modelagem da reflexão. Além disso, a distância inclinada é uma importante variável também para a modelagem do efeito da atmosfera neutra na refletometria.

Pela distância inclinada é possível definir o trajeto adicional realizado pela onda refletida em relação a direta na camada atmosférica abaixo da antena receptora. O trajeto adicional da onda refletida é dado por  $2D_l$  (Figura 13), devido à distância inclinada da onda espalhada somada à distância inclinada da onda incidente. A partir da modelagem do trajeto adicional da onda refletida é possível então definir o efeito adicional da atmosfera neutra na onda refletida (NIKOLAIDOU *et al.*, 2020).

Figura 13 – Atraso de propagação atmosférico para uma superfície esférica e uma superfície plana.



Fonte: o autor.

A modelagem da distância inclinada é realizada, em geral, utilizando o modelo de superfície plano em que se considera a camada atmosférica entre a superfície e a antena receptora também plana, conforme a Figura 13a. Neste caso, temos:

$$D_l = H / \text{sen } e \quad (32)$$

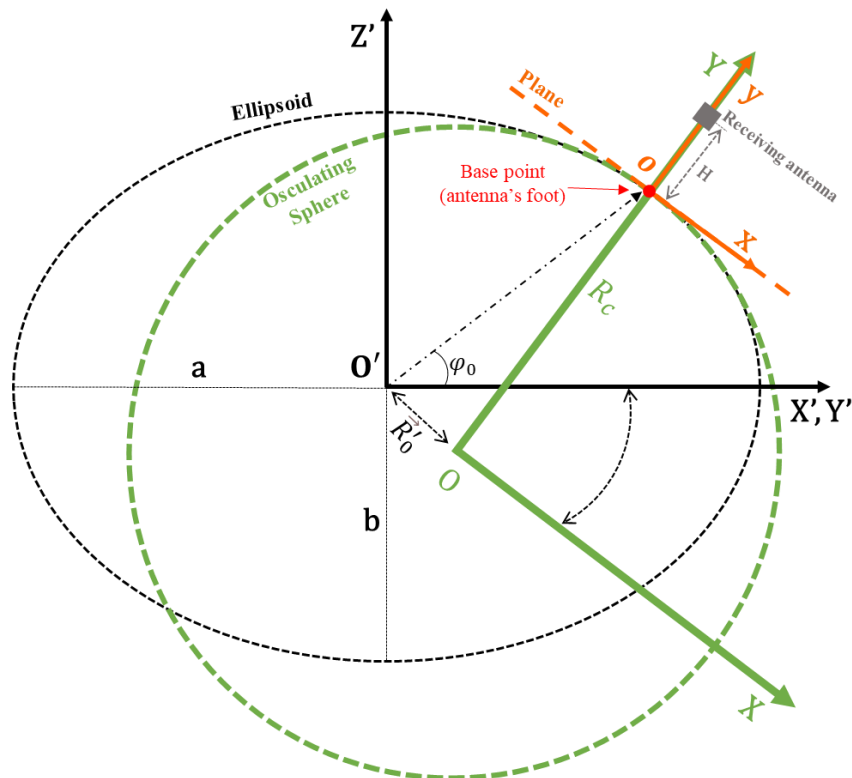
A determinação da distância inclinada considerando uma superfície esférica, entretanto, apresenta maior complexidade, pois tanto a superfície de reflexão quanto a camada atmosférica são consideradas esféricas. A camada atmosférica é dada pelo mesmo raio relativo à altura da antena receptora (Figura 13b).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Sistemas de coordenadas

Anteriormente, foi apresentado que o cálculo da reflexão no plano é mais fácil no sistema cartesiano geodésico local,  $\vec{r} = [x, y]^T$ , com origem na base da antena receptora e orientação passando pela direção vertical da antena receptora. Já o ponto de reflexão na esfera osculante é obtido mais facilmente em um referencial quasigeocêntrico vertical,  $\vec{R} = [X, Y, Z]^T$ , com origem no centro da esfera e orientado também com a vertical. Ressalta-se que, no presente trabalho, os sistemas de coordenadas cartesianas local e quasigeocêntrico serão dados apenas nos eixos horizontal ( $x$ ) e vertical ( $y$ ); quando necessário, a terceira coordenada ortogonal (normal à página), pode ser suposta nula,  $z = 0$  (Figura 14).

Figura 14 – Sistema de coordenadas cartesianas local (laranja), quasigeocêntrico (verde) e geocêntrico global (preto).



Fonte: o autor.

Nesse sentido, para facilitar comparações com a modelagem no plano, ao final dos cálculos na esfera o ponto de reflexão será expresso também no referencial local. A

transformação entre os dois referenciais é dada simplesmente pela translação ao longo do eixo vertical, dada pelo valor do raio da esfera  $R_c$ :

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0 \quad (33)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_c \quad (34)$$

onde  $\vec{R}_0 = [0 \ R_c]^T$  é a base ou pé da antena no sistema quasigeocêntrico e  $\vec{r}_c = [0 \ -R_c]^T$  é o centro da esfera no sistema local, ambos em termos do raio da esfera,  $R_c$ . Ou seja, a coordenada horizontal permanece inalterada,  $x = X$ , e a coordenada vertical é subtraída pelo raio da esfera,  $y = Y - R_c$ .

Normalmente, a relação com os sistemas verticais, local  $\vec{r}$  ou quasigeocêntrico  $\vec{R}$ , é feita implicitamente através do ângulo de elevação do satélite,  $e$ , que é o complemento do ângulo zenital, calculado com relação à direção normal ao elipsoide (NIEVINSKI; SANTOS, 2010), conforme explicado mais abaixo.

Um terceiro referencial relevante é o sistema cartesiano global terrestre  $\vec{R}' = [X', Y', Z']^T$ , exatamente geocêntrico e orientado com o plano equatorial da Terra e  $Z'$  alinhado com o eixo de rotação da Terra (Figura 14). Então, se necessário, a relação entre os referenciais verticais e equatorial (ou quasigeocêntrico e geocêntrico) pode ser obtida por uma rotação e uma translação:

$$\vec{R} = \bar{\bar{R}} \vec{R}'' \quad (35)$$

$$\vec{R}'' = \vec{R}' - \vec{R}'_c \quad (36)$$

em que  $\bar{\bar{R}}$  é uma matriz de rotação, definida pela direção normal ao elipsoide, e  $\vec{R}'_c$  é o centro da esfera osculante expresso no sistema cartesiano global, é definido em termos da posição do ponto base  $\vec{R}'_0$  e da direção normal ao elipsoide  $\hat{n}'_0$ :

$$\vec{R}'_c = \vec{R}'_0 - R_c \cdot \hat{n}'_0 \quad (37)$$

$$\vec{R}'_0 = \begin{bmatrix} N_0 + h_0 \\ N_0 + h_0 \\ \left(\frac{b^2}{a^2}\right) N_0 + h_0 \end{bmatrix} \odot \hat{n}'_0 \quad (38)$$

$$\hat{n}'_0 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0)\cos(\lambda_0) \\ \cos(\varphi_0)\text{sen}(\lambda_0) \\ \text{sen}(\varphi_0) \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde  $\odot$  indica o produto de Hadamard (vetorial, elemento por elemento),  $\varphi_0, \lambda_0, h_0 = 0$  são a latitude geodésica, longitude e altitude (ou altura elipsoidal) do ponto base. As constantes  $a$  e  $b$  são os raios equatorial e polar do elipsoide. Ou seja, o centro da esfera osculante tem coordenadas geodésicas dadas por:  $\varphi_c = \varphi_0, \lambda_c = \lambda_0, h_c = -R_c$ . Nota-se que latitude e longitude do centro da esfera são tomadas iguais às coordenadas do ponto base e que o valor de altitude é negativo, indicando que o centro da esfera se localiza abaixo da superfície do elipsoide de referência. O raio da esfera osculante idealmente é igual ao raio de curvatura gaussiana,  $R_c = \sqrt{M_0 N_0}$ , em termos dos raios de curvatura nas direções norte-sul  $M_0$  e leste-oeste  $N_0$  (NIEVINSKI; SANTOS, 2010). No presente trabalho, a esfera osculante é simplificada por uma esfera normal ao elipsoide, mas com raio constante e aproximadamente igual ao raio terrestre nominal,  $R_c \approx R_e = 6.370$  km, ou seja, foram ignoradas variações com latitude. O valor de  $R_e = 6.370$  km é definido como um valor intermediário entre o raio terrestre equatorial, de aproximadamente 6.378 km, e o raio terrestre polar, de aproximadamente 6.357 km.

### 3.2 Observáveis altimétricas na esfera

O atraso interferométrico na esfera se dá por especialização da Equação (3):

$$D_i^s = D_r^s - D_d \quad (40)$$

onde a distância percorrida pela onda refletida é independente do sistema de coordenadas:



$$\begin{aligned}
D_r^s &= \|\vec{r}_s^s - \vec{r}_t\| + \|\vec{r}_a - \vec{r}_s^s\| \\
&= \|\vec{R}_s^s - \vec{R}_t\| + \|\vec{R}_a - \vec{R}_s^s\| \\
&= \|\vec{R}_s'^s - \vec{R}_t'\| + \|\vec{R}_a' - \vec{R}_s'^s\|
\end{aligned} \tag{41}$$

O atraso interferométrico esférico, ainda que seja não-linear, pode ser linearizado em torno de um valor aproximado  $D_i^{s0}$  para pequenas variações de altura,  $\delta H$ :

$$D_i^s \approx D_i^{s0} + \delta D \tag{42}$$

$$\delta D = \delta H \cdot K_z^s \tag{43}$$

onde a sensibilidade vertical do atraso na esfera é definida em termos do ângulo rasante,  $g$ :

$$K_z^s = \frac{\partial D_i^s}{\partial H} = 2 \operatorname{sen} g \tag{44}$$

Analogamente, a sensibilidade vertical da fase na esfera, ou número-de-onda vertical na esfera, é dado por:

$$k_z^s = \frac{\partial \phi_i^s}{\partial H} = k K_z^s = 2k \operatorname{sen} g \tag{45}$$

Continuando com as demais observáveis na esfera, o Doppler interferométrico  $f_i^s$ , ou taxa temporal do atraso de propagação, é dada por:

$$\begin{aligned}
f_i^s &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial D_i^s}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi_i^s}{\partial t} \\
f_i^s &= f_i^{s0} + \delta f_i^s
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\delta f_i^s = \delta H \cdot \frac{\partial f_i^s}{\partial H} = \delta H \cdot \frac{\dot{k}_z^s}{2\pi} = \delta H \cdot \frac{\dot{K}_z^s}{\lambda} = \delta H \cdot \frac{2k \dot{g} \cos g}{2\pi} = \delta H \cdot \frac{2 \dot{g} \cos g}{\lambda}$$

em que  $\dot{k}_z^s = \partial k_z^s / \partial t = 2k \dot{g} \cos g$  é a taxa de variação temporal do número-de-onda vertical na esfera e  $\dot{g} = \partial g / \partial t$  é a taxa de variação temporal do ângulo rasante.

De forma análoga, na esfera a frequência modificada ou o *pseudo-Doppler interferométrico esférico*  $f_i'^s$  consiste na taxa de variação do atraso de propagação interferométrico com relação à sensibilidade vertical esférica:

$$f_i'^s = \frac{\partial \phi_i^s}{\partial k_z^s} = \frac{\partial D_i^s}{\partial K_z^s} = H_a^s$$

$$f_i'^s = f_i'^{s0} + \delta f_i'^s \quad (47)$$

$$\delta f_i'^s = \delta H \cdot \frac{\partial f_i'^s}{\partial H} = \delta H \cdot \frac{\partial D_i^s}{\partial K_z^s} = \delta H \cdot 0.5 \frac{\partial D_i^s}{\partial \sin g} = \delta H$$

em que  $H_a^s$  é a altura aparente na esfera.

Por último, é necessário definir o *pseudo-Doppler interferométrico cruzado*, assim chamado pois envolve o atraso interferométrico esférico ( $D_i^s$ ) combinado com a sensibilidade vertical plana ( $K_z^p$ ):

$$f_i'^x = \frac{\partial \phi_i^s}{\partial k_z^p} = \frac{\partial D_i^s}{\partial K_z^p} = H_a^x$$

$$f_i'^x = f_i'^{x0} + \delta f_i'^x \quad (48)$$

$$\delta f_i'^x = \delta H \cdot \frac{\partial D_i^s}{\partial K_z^p} = \delta H \cdot 0.5 \frac{\partial D_i^s}{\partial \sin e} = \delta H \cdot \frac{\partial \sin g}{\partial \sin e} = \delta H / \zeta$$

Onde  $\zeta = \partial \sin e / \partial \sin g$ . O pseudo-Doppler cruzado  $f_i'^x$ , ou altura aparente cruzada  $H_a^x$ , consiste na estimativa altimétrica pela taxa de variação do atraso de propagação na esfera  $D_i^s$  em relação à sensibilidade vertical no plano  $K_z^p = 2 \sin e$ . Tal observável, ainda que possa parecer improvável, na prática é a mais comum de todas. Isto porque corresponde a atrasos medidos em campo, decorrentes de uma Terra aproximadamente esférica, porém analisados por usuários que supõem um modelo plano. Ou seja, o pseudo-Doppler cruzado é realizado em casos que o atraso de propagação é esférico, decorrente de uma superfície não-plana, mas não há conhecimento do ângulo rasante, somente o ângulo de elevação; esse é o caso mais comum, utilizado quando o usuário realiza a estimativa altimétrica preliminar considerando a superfície terrestre como um plano.

### 3.3 Problema direto na esfera

A modelagem geométrica da reflexão em uma superfície esférica possui complexidade matemática não trivial devido à dificuldade de determinação do ponto de reflexão que satisfaça a Lei de Snell (ELKIN, 1965). De forma equivalente, as equações seguem o princípio de Fermat, que estabelece que o caminho percorrido pela onda refletida será aquele com tempo de propagação mínimo (SEMMLING *et al.*, 2016).

A reflexão de uma onda eletromagnética em uma superfície esférica é um problema antigo, resolvido pela primeira vez por Ibn al-Haytham, no século XI (SMITH, 1992; WEISSTEIN, 2008). Este problema é amplamente conhecido por matemáticos como Problema de Alhazen (nome latinizado de al-Haytham). A resolução proposta por al-Haytham foi uma solução geométrica pelo método de seções cônicas. Uma solução algébrica foi finalmente proposta em 1965 por Jack M. Elkin, o qual demonstrou que a solução algébrica para o problema só é possível pela solução de um polinômio de quarta ordem (equação quártica) (ELKIN, 1965; SMITH, 1992); WEISSTEIN, 2008). Posteriormente, outros autores apresentaram soluções semelhantes ou equivalentes sob diferentes abordagens, como Miller e Vegh (1990, 1993), Waldvogel (1992), Drexler e Gander (1998), e Fujimura *et al.* (2019).

Neste trabalho serão exploradas as soluções da reflexão na esfera de Martín-Neira (1993), Helm (2008), Miller e Vegh (1993), Fujimura *et al.* (2019) e uma solução numérica baseada no Princípio de Fermat por relações vetoriais. Cabe salientar que, dentre as soluções supracitadas, a metodologia de Fujimura *et al.* (2019) será utilizada como metodologia principal. Pelo Modelo de Fujimura, Modelo numérico pelo princípio de Fermat, Modelo de Martín-Neira e modelo de Helm é apresentada a modelagem da reflexão a partir da determinação do vetor posição do ponto de reflexão na esfera  $\vec{r}_s^S$ . Pelo Modelo de Miller e Vegh, a reflexão é modelada baseada na solução do ângulo rasante  $g$ . Posteriormente, na seção Parâmetros derivados, são apresentadas metodologias para solução do ângulo rasante  $g$ , ponto de reflexão  $\vec{r}_s^S$  e ângulo de elevação da reflexão  $e_r^S$  derivados outros parâmetros já conhecidos.

Todos os modelos abaixo retornam o ponto de reflexão em uma esfera considerando o meio de propagação como vácuo. Para solucionar as raízes das quárticas, foi utilizada a função *roots.m* do software Matlab (MATHWORKS, 2021d). Das quatro raízes do polinômio, deve-se adotar aquela com atraso interferométrico mínimo, sendo as demais causadas por reflexões internas.

### 3.3.1 Modelo de Fujimura

As equações do modelo matemático de Fujimura *et al.* (2019) estabelecem o menor caminho entre o ponto  $z_1 \in \mathbb{C}$  (antena), o ponto de reflexão  $u$  e o ponto  $z_2 \in \mathbb{C}$  (satélite) no disco unitário no plano complexo, satisfazendo  $|z_1 - u| + |z_2 - u| = \min$ . Desta forma, o polinômio de quarta ordem será:

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 u^4 - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) u^3 + (z_1 + z_2) u - z_1 z_2 = au^4 + bu^3 + cu + d = 0 \quad (49)$$

onde  $\bar{z}$  denota o conjugado do número complexo  $z$ .

Os vetores de entrada, referentes à posição da antena e do satélite, devem ser normalizados no disco unitário:

$$z_1 = z_a = R_a/R_e \quad (50)$$

$$z_2 = z_t = (R_t/R_e) \exp(-i\theta) \quad (51)$$

onde  $R_a = R_e + H$  é o raio do centro da esfera até a antena,  $R_e$  é o raio terrestre,  $R_t = R_e + H_t$  é o raio orbital do satélite,  $H_t$  é a altura orbital do satélite,  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária e  $\theta$  é o ângulo quasigeocêntrico formado entre a antena receptora e o satélite, dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{D^2 - R_a^2 - R_t^2}{-2R_a R_t}\right) \quad (52)$$

onde  $D$  é a maior raiz da quadrática  $D^2 - (2R_a \cos(90^\circ + e))D + (R_a^2 - R_t^2) = 0$ , resolvida pela fórmula de Bháskara.

Finalmente, o ponto de reflexão na superfície esférica é dado pelas componentes real e imaginária do número complexo  $u$  no disco unitário:

$$\vec{R}_s^s = R_e \begin{bmatrix} \Im(u) \\ \Re(u) \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\vec{r}_s^s = \vec{R}_s^s - \vec{R}_0 \quad (54)$$

O atraso de propagação interferométrico na esfera será então dado pela relação vetorial entre a antena receptora  $\vec{r}_a$ , o satélite  $\vec{r}_t$  e o ponto de reflexão  $\vec{r}_s^s$  :

$$D_i^s = D_r^s - D_d \quad (55)$$

onde a distância percorrida pela onda refletida e a distância percorrida pela onda direta são, respectivamente:

$$D_r^s = R_e(|z_1 - u| + |z_2 - u|) \quad (56)$$

$$D_d = R_e(|z_1 - z_2|) \quad (57)$$

### 3.3.2 Modelo de Martín-Neira e modelo de Helm

Baseado nos trabalhos de Martín-Neira (1993) e Helm (2008), o ponto de reflexão especular é calculado a partir das posições do satélite e da antena receptora. Tais posições devem ter origem no centro da esfera osculante e posteriormente podem ser transformadas para um referencial local. Originalmente, o vetor posição da antena receptora  $\vec{R}_a$  é dado pela Equação (58):

$$\vec{R}_a = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_a \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde  $R_a = R_e + H$  é o raio do centro da esfera até a antena e  $R_e$  é o raio da Terra.

Já o vetor posição do transmissor  $\vec{R}_t$  é dado pela equação abaixo:

$$\vec{R}_t = R_t \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{bmatrix} \quad (59)$$

onde  $R_t = R_e + H_t$  é o raio orbital do satélite e  $H_t$  é a altura orbital do satélite. O ângulo quasigeocêntrico entre antena e transmissor  $\theta$  é dado conforme a Equação (52). Então, para o cálculo do ponto de reflexão especular na esfera, temos que:

$$c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 = 0 \quad (60)$$

onde  $t$  é uma variável auxiliar. Os coeficientes da equação polinomial acima são dados pelas equações (61) a (65):

$$c_0 = (X_t Y_a + Y_t X_a) - R_t (Y_t + Y_a) \quad (61)$$

$$c_1 = -4(X_t X_a - Y_t Y_a) + 2R_t (X_t + X_a) \quad (62)$$

$$c_2 = -6(X_t Y_a + Y_t X_a) \quad (63)$$

$$c_3 = 4(X_t X_a - Y_t Y_a) + 2R_t (X_t + X_a) \quad (64)$$

$$c_4 = (X_t Y_a + Y_t X_a) + R_t (Y_t + Y_a) \quad (65)$$

As raízes do polinômio de quarta ordem (quártica) dão soluções para  $t$  e, conseqüentemente, para o ângulo quasigeocêntrico entre a antena receptora e o ponto de reflexão  $\theta_{as} = 2 \operatorname{atan} t$ .

O modelo matemático de Helm (2008) apresenta algumas adaptações em relação a Martín-Neira (1993) no que tange a resolução da raiz do polinômio, mas em grande parte ambos são iguais. Mais especificamente, pelo modelo de Helm a solução da raiz é obtida iterativamente baseada no método modificado de Newton. Neste caso, a Equação (60) é avaliada para valores de teste para  $t$  a partir de uma estimativa inicial  $\theta_{as} = 90^\circ - \theta/3$ , onde o ângulo quasigeocêntrico entre a direção antena e transmissor é dado pela Equação (66):

$$\theta = \operatorname{acos} \left( \frac{\vec{R}_a}{R_a} \cdot \frac{\vec{R}_t}{R_t} \right) \quad (66)$$

Iteram-se múltiplas vezes, até alcançar um valor limiar de mudança definido pelo usuário, indicado por Helm (2008) como  $10^{-8}$  rad.

Finalmente, com uma solução para  $\theta_{as}$ , o vetor posição da reflexão  $\vec{R}_s^s$  é definido da seguinte forma:

$$\vec{R}_s^s = \begin{bmatrix} X_s^s \\ Y_s^s \end{bmatrix} = R_e \begin{bmatrix} \cos \theta_{as} \\ \operatorname{sen} \theta_{as} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\vec{r}_s^s = \vec{R}_s^s - \vec{R}_0 \quad (68)$$

Com a solução para a localização do ponto de reflexão na superfície esférica, é possível obter o atraso de propagação por relação vetorial, conforme Equação (55), em que a distância percorrida pela onda refletida é dada por:

$$D_r^s = \|\vec{r}_s^s - \vec{r}_t\| + \|\vec{r}_a - \vec{r}_s^s\| \quad (69)$$

E a distância percorrida pela onda direta pode ser obtida pela Equação (6).

### 3.3.3 Modelo de Miller e Vegh

O modelo matemático de Miller e Vegh (1993) retorna o ângulo rasante da reflexão em uma esfera no vácuo de forma rigorosa. O ângulo rasante  $g$  é obtido a partir de uma das raízes do seguinte polinômio:

$$\alpha z^4 + \beta z^3 + \gamma z^2 + \bar{\beta} z + \bar{\alpha} = 0 \quad (70)$$

em que  $\bar{\beta}$  e  $\bar{\alpha}$  denotam o conjugado complexo de  $\beta$  e  $\alpha$ , tal que os coeficientes do polinômio são dados por:

$$\alpha = \exp(i\theta) (\exp(i\theta) - k_1 k_2) \quad (71)$$

$$\beta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \exp(i\theta) \quad (72)$$

$$\gamma = 2(k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2 \cos \theta - 1) \quad (73)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\theta$  é o ângulo quasigeocêntrico formado entre a antena receptora e o satélite, obtido pela Equação (52),  $k_1 = R_e/R_a$  e  $k_2 = R_e/R_t$  são as recíprocas dos raios quasigeocêntricos normalizados para a antena receptora e o satélite transmissor.

O ângulo rasante é então dado pela raiz  $z$  da seguinte forma:

$$g = 0.5 \operatorname{acos} \Re(z) \quad (74)$$

Com isso, a raiz correta  $z$  é aquela que retorna o ângulo rasante que satisfaz a seguinte expressão:

$$\theta + 2g = \text{acos}(k_1 \cos g) + \text{acos}(k_2 \cos g) \quad (75)$$

O vetor posição do ponto de reflexão pode ser obtido então pela Equação (76):

$$\vec{R}_s^s = R_e \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_{as} \\ \text{cos } \theta_{as} \end{bmatrix} \quad (76)$$

em que o ângulo quasigeocêntrico  $\theta_{as}$  formado entre a antena receptora e o ponto de reflexão é dado por:

$$\theta_{as} = \text{acos}\left(\frac{R_e}{R_a} \cos g\right) - g \quad (77)$$

A transformação para o sistema de coordenadas cartesiano local  $\vec{R}_s^s \rightarrow \vec{r}_s^s$  é dada conforme a Equação (33).

A partir da solução do ponto de reflexão da Equação (76), o atraso de propagação interferométrico pode ser obtido pela Equação (55), em que o caminho percorrido pela onda refletida é dado pela Equação (69) e o caminho da onda direta é dado pela Equação (6). Dessa forma, tem-se que  $D_i^s = \|\vec{r}_s^s - \vec{r}_t\| + \|\vec{r}_a - \vec{r}_s^s\| - \|\vec{r}_a - \vec{r}_t\|$ .

### 3.3.4 Modelo numérico pelo princípio de Fermat

O Princípio de Fermat é satisfeito pelo caminho mínimo percorrido entre dois pontos pela onda propagada (SEMMLING *et al.*, 2016). No caso da onda refletida, o caminho percorrido deve ser mínimo entre o satélite  $\vec{r}_t$ , o ponto de reflexão  $\vec{r}_s^s$  e a antena receptora  $\vec{r}_a$ . Neste caso, as posições do satélite e da antena receptora são conhecidas e a posição do ponto de reflexão é a incógnita a ser resolvida de forma numérica tal que retorne o atraso de propagação mínimo, ou seja, a diferença entre a onda direta e a refletida deve ser mínima.

No modelo numérico pelo Princípio de Fermat, o ponto de reflexão é calculado por meio de iterações computacionais tal que o atraso de propagação interferométrico seja mínimo, ou seja,  $\vec{r}_s^s = \text{argmin } D_i^s$ . Para cada iteração, uma distância ou atraso interferométrico de teste  $D_{i^*}^s$  é definido com base em um ponto de reflexão de teste  $\vec{r}_{s^*}$  conforme as equações abaixo:

$$D_{i^*}^s = D_{r^*}^s - D_d \quad (78)$$



$$D_{r^*}^s = \|\vec{r}_a - \vec{r}_{s^*}^s\| + \|\vec{r}_{s^*}^s - \vec{r}_t\| \quad (79)$$

onde  $D_a = \|\vec{r}_a - \vec{r}_t\|$  é a distância direta entre satélite e antena receptora.

A posição de teste é definida por:

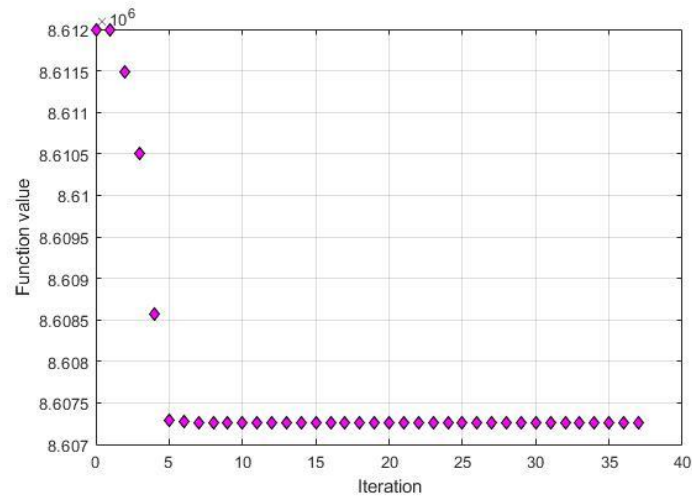
$$\vec{r}_{s^*}^s = [x_{s^*}^s \quad y_{s^*}^s]^T, \quad (80)$$

onde  $y_{s^*}^s = \sqrt{(R_c^2 - (x_{s^*}^s)^2)} - R_c$  é uma variável dependente que advém da equação de inversão no círculo (ALTSCHILLER-COURT, 1980). A única variável independente é a coordenada  $x_{s^*}^s$ , portanto a minimização numérica é univariada.

Como parâmetro de entrada do modelo numérico, uma estimativa inicial do ponto de reflexão é fornecida como  $x_{s_0}^s \approx x_s^p = H / \tan e$ , em termos do ponto de reflexão no plano, dado pela Equação (31). São fornecidas também a posição da antena receptora, dada simplesmente por  $\vec{r}_a = [0 \quad H_a]^T$ , e a posição do satélite  $\vec{r}_t$ , obtida pela Equação (59). A cada iteração,  $x_{s^*}^s$  é atualizado até que ocorra a convergência e a condição  $\vec{r}_{s^*}^s = \text{argmin } D_{i^*}^s$  seja satisfeita. Por fim, o atraso ou distância interferométrica correto  $D_i^s$  será definido pelo atraso de teste mínimo, ou seja,  $D_i^s = \min D_{i^*}^s$ .

O modelo numérico pelo Princípio de Fermat foi implementado em ambiente computacional no software Matlab a partir da rotina *fminsearch.m*. A rotina é baseada no trabalho de Lagarias *et al.* (1998), no qual o valor mínimo da função é definido por meio do método numérico de Nelder-Mead (MATHWORKS, 2021b). Neste caso, a rotina busca pelo valor mínimo da Equação (78) até convergir, como é exemplificado na Figura 15, na qual se verificam os diferentes valores da função ao longo das iterações até a convergência.

Figura 15 – Convergência do valor mínimo do caminho percorrido pela onda refletida para uma altura de antena receptora de 500 m e ângulo de elevação de  $10^\circ$ .

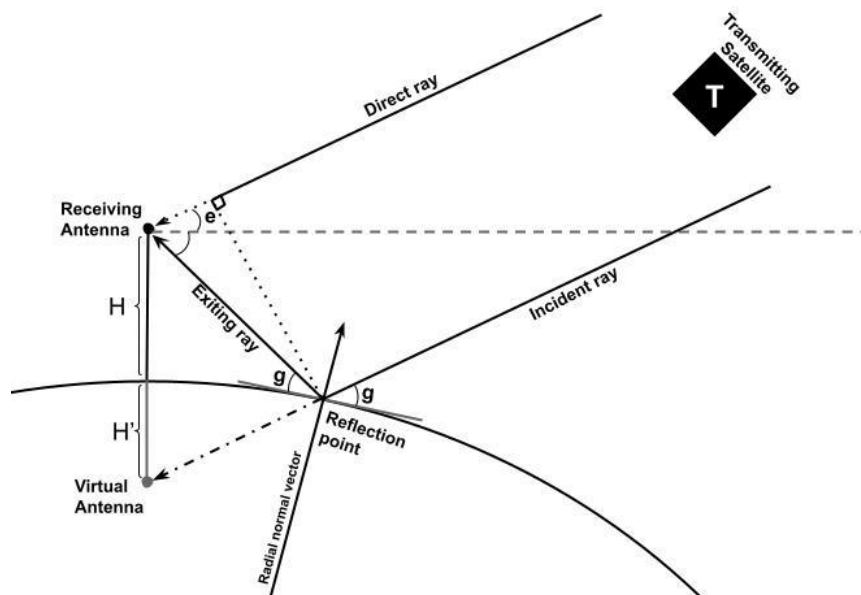


Fonte: o autor.

### 3.3.5 Parâmetros derivados

A posição do ponto de reflexão calculada de forma rigorosa permite a determinação correta do ângulo rasante por relação vetorial, visto que o ângulo é calculado sobre um plano perpendicular à normal da esfera no ponto de reflexão (Figura 16) (MILLER; VEGH, 1990).

Figura 16 – Geometria da reflexão de determinação do ângulo rasante a partir de um ponto de reflexão conhecido ou determinação do ponto de reflexão a partir de um ângulo rasante conhecido.



Fonte: o autor.

Dessa forma é necessário que sejam determinados os vetores unitários direcionais entre o ponto de reflexão e o transmissor  $\vec{u}_{st}$ :

$$\vec{u}_{st} = \frac{\vec{r}_t - \vec{r}_s^s}{\|\vec{r}_t - \vec{r}_s^s\|} \quad (81)$$

e entre o ponto de reflexão e a antena receptora  $\vec{u}_{sa}$ :

$$\vec{u}_{sa} = \frac{\vec{r}_s^s - \vec{r}_a}{\|\vec{r}_s^s - \vec{r}_a\|} \quad (82)$$

E então, o ângulo rasante – em graus – é retornado pela seguinte equação:

$$g = 90^\circ - 0.5(\vec{u}_{st} \cdot \vec{u}_{sa}) \quad (83)$$

Para fins de verificação da Lei de Snell, o ângulo rasante pode ser verificado na incidência e no espalhamento da onda refletida. O ângulo rasante incidente  $g'$ , ou à direita, consiste no ângulo rasante formado entre a onda incidente e o plano perpendicular à normal ou radial da esfera (Figura 16). Assim, o ângulo rasante à direita pode ser calculado como:

$$g' = 90^\circ - \cos^{-1}(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_{st}) \quad (84)$$

em que  $\vec{u}_z = [0 \ 1]$  é o vetor unitário da direção vertical no ponto de reflexão e  $\vec{u}_{st}$  é o vetor unitário da direção incidente, ou seja, a direção do ponto de reflexão para o satélite.

O ângulo rasante espalhado  $g''$ , ou à esquerda, consiste na imagem do ângulo rasante à direita, sendo formado entre a onda espalhada e o plano perpendicular a normal radial da esfera (Figura 16):

$$g'' = 90^\circ - \text{acos}(\vec{u}_{sa} \cdot \vec{u}_z) \quad (85)$$

onde  $\vec{u}_{sa}$  é o vetor unitário da direção espalhada, ou seja, a direção do ponto de reflexão para a antena receptora.

Através do ponto de reflexão é possível derivar também o ângulo de elevação da reflexão na esfera  $e_r^s$  (Figura 12b), o qual é dado pela seguinte relação vetorial:

$$e_r^s = -90^\circ + \text{acos}(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_{sa}) \quad (86)$$

O comprimento de arco esférico entre a origem local e o ponto de reflexão é a distância entre estes dois pontos sobre a superfície esférica, dado simplesmente por:

$$S = R_e \theta_{as} \quad (87)$$

em que  $\theta_{as}$  é o ângulo quasigeocêntrico formado entre a antena receptora e o ponto de reflexão dado pela Equação (77).

O comprimento de arco é indefinido para a superfície plana, portanto essa variável foi utilizada para apenas comparação entre os modelos de reflexão na esfera.

A distância inclinada  $D_l$  para qualquer superfície pode ser calculada pela seguinte relação vetorial entre a posição da antena receptora  $\vec{r}_a$  e a posição do ponto de reflexão  $\vec{r}_s$ :

$$D_l = \|\vec{r}_a - \vec{r}_s\| \quad (88)$$

### 3.3.6 Taxas e derivadas

Para qualquer método de resolução do problema direto, o Doppler interferométrico na esfera  $f_i^s$  pode ser aproximado numericamente através do método de diferenças finitas, conforme implementado pela função *gradient* do MATLAB (MATHWORKS, 2021c):

$$f_i^s \lambda = \frac{\partial D_i^s}{\partial t} \approx \frac{\Delta D_i^s}{\Delta t} = \frac{D_i^s|_{j+1} - D_i^s|_{j-1}}{t_{j+1} - t_{j-1}} \quad (89)$$

Dado um vetor de atrasos e de tempos, indexados por  $j = 1, 2, \dots$ , são formadas diferenças centrais em torno do ponto de interesse  $j$ , tomando os pontos adjacentes,  $j + 1$  e  $j - 1$ . Já os pontos extremos do domínio foram excluídos do cálculo para evitar que fossem utilizados dois pontos assimétricos no cálculo de suas derivadas.

Da mesma forma, o pseudo-Doppler interferométrico na esfera, na Equação (47), pode ser aproximado por:

$$f_i'^s = \frac{\partial D_i^s}{\partial K_z^s} \approx \frac{\Delta D_i^s}{\Delta K_z^s} = \frac{D_i^s|_{j+1} - D_i^s|_{j-1}}{K_z^s|_{j+1} - K_z^s|_{j-1}} = 0.5 \frac{D_i^s|_{j+1} - D_i^s|_{j-1}}{\sin g_{j+1} - \sin g_{j-1}} \quad (90)$$

No denominador da fração, há diferenças de sensibilidade vertical, definidas na esfera em termos do ângulo rasante,  $g$ ,  $K_z^s = 2 \sin g$ .

Por último, o pseudo-Doppler interferométrico cruzado, obtido pela Equação (48), é aproximado por:

$$f_i'^x = \frac{\partial D_i^s}{\partial K_z^p} \approx \frac{\Delta D_i^s}{\Delta K_z^p} = \frac{D_i^s|_{j+1} - D_i^s|_{j-1}}{K_z^p|_{j+1} - K_z^p|_{j-1}} = 0.5 \frac{D_i^s|_{j+1} - D_i^s|_{j-1}}{\sin e_{j+1} - \sin e_{j-1}} \quad (91)$$

No denominador da fração, há diferenças de sensibilidade vertical plana  $K_z^p = 2 \sin e$ , definidas em termos do ângulo de elevação  $e$ .

Adicionalmente, a própria sensibilidade vertical na esfera, na Equação (44) pode ser aproximada numericamente através de uma simulação de ponta-a-ponta. Tal forma é livre de suposições e serve para validar a fórmula derivada analiticamente. Para isso, uma sensibilidade vertical esférica numérica  $K_z^{sn}$  foi obtida a partir da diferença no atraso de propagação  $\Delta D_i^s$  em função de uma diferença de altura  $\Delta H$  conhecida, conforme a seguinte equação:

$$K_z^s = \frac{\partial D_i^s}{\partial H} \approx \frac{F(H_0 + \Delta H/2) - F(H_0 - \Delta H/2)}{\Delta H} \equiv K_z^{sn} \quad (92)$$

onde  $H_0$  é uma altura de referência e  $D_i^s = F(H)$  é obtido pela solução do modelo direto na Equação (55). O símbolo  $K_z^{sn}$  é introduzido para indicar a aproximação numérica; posteriormente, será verificado a discrepância com relação à fórmula analítica,  $K_z^{sn} - K_z^s$ .

### 3.4 Problema inverso na esfera

A inversão na esfera segue o modelo geral  $H^s = H_0^s + \delta H^s$ , em que a estimativa altimétrica  $H^s$  final é resultado de uma altura aproximada  $H_0^s$  somada a uma atualização altimétrica  $\delta H^s$ , dada em função da diferença entre o problema direto aproximado  $D_i^{s0}$  e o problema direto empírico  $D_i^{sm}$  obtido em campo.

O modelo esférico apresenta maior complexidade de solução da inversão do que o modelo plano. A inversão na esfera não é linear e, portanto, a estimativa inicial  $H_0$  é inevitável,

ao contrário do caso plano. A estimativa altimétrica é obtida a partir de iterações de atualização da estimativa inicial, que é realizada até que ocorra a convergência da estimativa altimétrica.

Abaixo são apresentadas as metodologias de inversão na esfera pelas observáveis de pseudo-Doppler ou frequência modificada ( $H_f^s$ ), pelo pseudo-Doppler cruzado ( $H_{f'}^x$ ), pelo Doppler ordinário ou taxa temporal do atraso ( $H_f^s$ ) e pelo atraso de propagação interferométrico ( $H_D^s$ ).

### 3.4.1 Inversão esférica pelo atraso de propagação interferométrico

No caso esférico, o atraso de propagação interferométrico aproximado  $D_i^{s0}$  não tem fórmula trigonométrica fechada e precisa ser obtido via normas vetoriais, pela Equação (55). O atraso de propagação pode ser obtido a partir das posições conhecidas da antena receptora, do satélite e do ponto de reflexão, em que o último é obtido a partir da solução do problema direto, conforme apresentado na Seção 3.3.

Para a inversão na esfera, uma altura geométrica nominal inicial  $H_0$  deve ser fornecida inevitavelmente como estimativa inicial como, por exemplo, a altura média da antena com relação a superfície refletora quando essa não é estática, como no caso do mar. O problema direto nominal é calculado a partir de  $H_0$ , obtendo-se o atraso de propagação nominal  $D_i^{s0}$  e o ângulo rasante nominal  $g_0$ .

O princípio da inversão na esfera pelo atraso de propagação interferométrico consiste na conversão das discrepâncias de atraso  $\delta D_i^s = D_i^{sm} - D_i^{s0}$  (entre atraso empírico e aproximado) em atualizações de altura  $\delta H_D^s$ , conforme é expresso na Equação (93).

$$\delta H_D^s = \frac{\delta D_i^s}{K_z^{s0}} = 0.5 \frac{\delta D_i^s}{\sin g_0} \quad (93)$$

em que  $K_z^{s0} = 2 \sin g_0$  é a sensibilidade vertical na esfera para uma altura aproximada.

A altura verdadeira  $H$  não é conhecida, somente a altura aproximada  $H_0$ . Dessa forma, a altura aproximada é atualizada conforme a equação abaixo:

$$H_D^s = H_0 + \delta H_D^s \quad (94)$$

Posteriormente, a estimativa inicial  $H_0$  deve ser substituída pela estimativa altimétrica atualizada,  $H_0^1 = H_D^s$ , para que seja realizada uma nova iteração do processo de atualização da

estimativa altimétrica. Logo, o problema direto nominal  $D_i^{s0}$  e as Equações (93) e (94) devem ser novamente calculadas considerando a estimativa aproximada atualizada. Esse processo deve ser repetido até que ocorra a convergência de  $\delta H_D^s$  a zero (dentro de uma certa tolerância, como por exemplo  $|\delta H_D^s| < 1 \text{ mm}$ ) e a estimativa altimétrica final de  $H_D^s$  seja então obtida.

Destaca-se que este método só se aplica a sensores capazes de fornecer o atraso de propagação interferométrico empírico  $D_i^{sm}$ . O atraso empírico é medido ou estimado em campo, conforme Seção 2.2.1, livre de suposições e não envolve o ângulo de elevação do satélite ou a taxa de variação temporal.

### 3.4.2 Inversão esférica pelo Doppler interferométrico

A inversão na esfera pelo Doppler interferométrico  $f_i^s$ , ou taxa temporal do atraso de propagação, é similar ao processo de inversão pelo atraso de propagação interferométrico  $D_i^s$ . Neste caso, as discrepâncias em Doppler  $\delta f_i^s = f_i^{sm} - f_i^{s0}$  devem ser convertidas em atualizações para a altura  $\delta H_f^s$ . As diferenças em Doppler se dão entre um Doppler empírico  $f_i^{sm}$  e um Doppler aproximado  $f_i^{s0}$ , obtido pela solução do problema direto a partir de uma altura aproximada  $H_0$  fornecida pelo usuário.

A atualização para a altura aproximada  $H_0$  dada pela discrepância no Doppler interferométrico, é obtida da seguinte forma:

$$\delta H_f^s = 2\pi \frac{\delta f_i^s}{k_z^s} = \lambda \frac{\delta f_i^s}{K_z^s} \quad (95)$$

A altura aproximada atualizada pelo Doppler interferométrico  $H_f^s$  é:

$$H_f^s = H_0 + \delta H_f^s \quad (96)$$

Então, o problema direto nominal  $D_i^{s0}$  e as Equações (95) e (96) devem ser novamente calculadas considerando a estimativa aproximada atualizada,  $H_0^1 = H_f^s$ , repetindo esse processo até a convergência de  $\delta H_f^s$ . Dessa forma, a estimativa altimétrica final de  $H_f^s$  pode ser obtida.

Cabe salientar que o Doppler interferométrico empírico obtido em campo (Seção 2.2.1) é livre de suposições e não envolve o ângulo de elevação do satélite ou sua taxa de variação temporal.

### 3.4.3 Inversão esférica pelo pseudo-Doppler

O pseudo-Doppler  $f_i'^S$  consiste na taxa de variação não-temporal do atraso de propagação interferométrico. Na esfera osculante, o pseudo-Doppler é obtido pela seguinte equação:

$$f_i'^S = \frac{\partial D_i^S}{\partial K_z^S} = H_a^S \quad (97)$$

em que  $H_a^S$  é a altura aparente na esfera.

Ressalta-se que o pseudo-Doppler é dado em unidades métricas e pode ser entendido como uma altura aparente, pois deriva de uma sensibilidade vertical definida pelo modelo de superfície. No caso esférico, a altura aparente  $H_a^S$  pode diferir da altura geométrica verdadeira  $H$ , já que esta relação não é trivial como no caso plano.

A altura aparente empírica  $H_a^{sm}$  é medida em campo baseada no ângulo rasante esférico, bem como nas medidas de SNR, fase interferométrica ou Doppler interferométrico, considerando a superfície terrestre atual. Dessa forma, a altura aparente empírica na esfera é dada como metade da taxa de variação do atraso interferométrico empírico  $D_i^m$  em relação ao seno do ângulo rasante nominal  $g_0$ , ou seja, da taxa de variação de  $D_i^m$  com relação à sensibilidade vertical na esfera  $K_z^{s0}$ :

$$f_i'^{sm} = \frac{\partial D_i^m}{\partial K_z^{s0}} = 0.5 \frac{\partial D_i^m}{\partial \text{sen } g_0} = H_a^{sm} \quad (98)$$

O ângulo rasante aproximado  $g_0$  é calculado a partir de uma altura aproximada  $H_0$ , fornecida pelo usuário. Além do ângulo rasante, é calculado também o atraso de propagação aproximado  $D_i^{s0}$ . A altura aparente aproximada então é dada por:

$$f_i'^{s0} = \frac{\partial D_i^{s0}}{\partial K_z^{s0}} = 0.5 \frac{\partial D_i^{s0}}{\partial \text{sen } g_0} = H_a^{s0} \quad (99)$$

Calcula-se a correção altimétrica pela diferença entre a altura aparente aproximada  $H_a^{s0}$  e a altura aproximada  $H_0$ :



$$\Delta H^S = H_a^{S0} - H_0 \quad (100)$$

A altura geométrica empírica atualizada na esfera pelo pseudo-Doppler  $H_{f'}^S$  pode ser então obtida pela seguinte relação:

$$H_{f'}^S = H_a^{Sm} - \Delta H^S \quad (101)$$

O processo mostrado acima deve ser iterado, considerando-se agora a altura geométrica empírica atualizada como estimativa inicial, sendo  $H_0^1 = H_{f'}^S$ . Primeiramente, o problema direto deve ser recalculado, a fim de atualizar o atraso interferométrico nominal  $D_i^{S0}$  e o ângulo rasante nominal  $g_0$ , assim como as equações (98) a (101). Este processo deve ser repetido até a convergência de  $\Delta H^S$  e a estimativa altimétrica final pelo pseudo-Doppler  $H_{f'}^S$  possa então ser obtida.

#### 3.4.4 Inversão esférica pelo pseudo-Doppler cruzado

A inversão pelo pseudo-Doppler cruzado  $f_i'^x$ , ou altura aparente cruzada  $H_a^x$ , consiste na estimativa altimétrica pela taxa de variação do atraso de propagação na esfera  $D_i^S$  em relação a sensibilidade vertical no plano  $K_z^p = 2\text{sen } e$ . Dessa forma, o pseudo-Doppler cruzado empírico na esfera é dado por:

$$f_i'^{xm} = \frac{\partial D_i^m}{\partial K_z^p} = 0.5 \frac{\partial D_i^m}{\partial \text{sen } e} = H_a^{xm} \quad (102)$$

A partir de uma altura geométrica aproximada  $H_0$ , o atraso de propagação esférico aproximado  $D_i^{S0}$  é calculado para obter o pseudo-Doppler cruzado aproximado:

$$f_i'^{x0} = \frac{\partial D_i^{S0}}{\partial K_z^p} = 0.5 \frac{\partial D_i^{S0}}{\partial \text{sen } e} = H_a^{x0} \quad (103)$$

Calcula-se então a correção  $\Delta H^x$  para a diferença altimétrica entre a altura aparente aproximada  $H_a^{x0}$  e a altura geométrica aproximada  $H_0$ :

$$\Delta H^x = H_a^{x0} - H_0 \quad (104)$$

A estimativa da altura geométrica empírica atualizada pelo pseudo-Doppler cruzado  $H_{f'}^{xm}$  é realizada então como:

$$H_{f'}^x = H_a^{xm} - \Delta H^x. \quad (105)$$

Posteriormente, a estimativa inicial é substituída pela altura geométrica empírica corrigida  $H_0^1 = H_{f'}^x$ . Assim, o problema direto deve ser recalculado com a estimativa inicial atualizada, a fim de atualizar também o atraso interferométrico  $D_i^{s0}$  e o ângulo rasante  $g_0$ , assim como as equações (102) a (105) também devem ser novamente calculadas. Este processo deve ser repetido até que ocorra a convergência de  $\Delta H^x$  e a estimativa altimétrica final pelo pseudo-Doppler cruzado  $H_{f'}^x$  possa então ser obtida.

Destaca-se que a inversão pelo pseudo-Doppler cruzado é realizada em casos que o atraso de propagação é esférico, mas não há conhecimento do ângulo rasante *a priori*, somente o ângulo de elevação. Ressalta-se também que esse é o caso mais comum de inversão, utilizado quando o usuário realiza a estimativa altimétrica preliminar considerando a superfície terrestre como um plano.

### 3.5 Formas de impacto da curvatura terrestre

#### 3.5.1 Deslocamento do ponto de reflexão

A posição do ponto de reflexão foi determinada pela sua localização espacial em duas dimensões,  $\vec{r}_s = [x_s \ y_s]^T$ . A coordenada  $x_s$  corresponde à distância do ponto em relação à base da antena GNSS; e a coordenada  $y_s$  corresponde à altura do ponto de reflexão em relação a base da antena receptora.

O ponto de reflexão no presente trabalho está localizado sobre um sistema de coordenadas cartesianas locais, com origem na base da antena receptora que tangencia a superfície refletora. As coordenadas obtidas sobre este sistema serão  $x_s$  e  $y_s$ , ou seja, eixo horizontal e vertical, respectivamente, pois a superfície ao redor da antena será considerada homogênea, ignorando variações de latitude da antena receptora no globo terrestre, bem como o azimute da reflexão.

No modelo de superfície plano, o ponto de reflexão é calculado diretamente sobre o sistema cartesiano local. No modelo esférico osculante, o ponto de reflexão é calculado primordialmente considerando-se um sistema de coordenadas cartesiano quasigeocêntrico, mas para fins de comparação, são transportados para o mesmo sistema cartesiano local da superfície plana pela Equação (33).

A comparação do ponto de reflexão foi realizada analisando individualmente as coordenadas  $x_s$  e  $y_s$ , sendo realizada a diferença posicional  $(\Delta x_s, \Delta y_s)$  entre o ponto de reflexão no plano  $\vec{r}_s^p = [x_s^p \quad y_s^p]^T$  e na esfera  $\vec{r}_s^s = [x_s^s \quad y_s^s]^T$  da seguinte forma:

$$\Delta x_s = x_s^p - x_s^s \quad (106)$$

$$\Delta y_s = y_s^p - y_s^s \quad (107)$$

### 3.5.2 Alteração no atraso de propagação interferométrico

O deslocamento do ponto de reflexão devido à curvatura terrestre afeta a geometria da reflexão e conseqüentemente o atraso de propagação da onda refletida. Assim, o atraso de propagação interferométrico no plano  $D_i^p$  foi comparado ao atraso calculado na esfera  $D_i^s$  a fim de se obter o efeito da curvatura terrestre no atraso propagação. A comparação foi realizada a partir da diferença  $\Delta D_i$  entre os atrasos plano e esférico:

$$\Delta D_i = D_i^p - D_i^s \quad (108)$$

### 3.5.3 Correção altimétrica

O impacto da curvatura terrestre na estimativa altimétrica é um viés altimétrico dado exatamente pelas correções altimétricas  $\Delta H^x$  e  $\Delta H^s$ , para pseudo-Doppler cruzado (Seção 3.4.4) e pseudo-Doppler (Seção 3.4.3). Tais correções, propostas no presente trabalho, serão doravante denominadas de tipo A e de tipo B, respectivamente.

As correções altimétricas do tipo A ( $\Delta H^x$ ) e do tipo B ( $\Delta H^s$ ) podem ser reescritas em termos do efeito da curvatura terrestre no atraso interferométrico  $\Delta D_i$  e de suas derivadas com relação à sensibilidade vertical, conforme as equações abaixo:

$$\text{Tipo A: } \Delta H^x = 0.5 \frac{\partial D_i^{s0}}{\partial \text{sen } e} - H_0 = 0.5 \frac{\partial (D_i^{p0} - D_i^{s0})}{\partial \text{sen } e} = - \frac{\partial \Delta D_i}{\partial K_z^p} \quad (109)$$

$$\text{Tipo B: } \Delta H^s = 0.5 \frac{\partial D_i^{s0}}{\partial \text{sen } g} - H_0 = 0.5 \frac{\partial D_i^{p0}}{\partial \text{sen } e} - 0.5 \frac{\partial D_i^{s0}}{\partial \text{sen } g} \quad (110)$$

A correção do tipo B pode ser reescrita em termos da correção do tipo A da seguinte forma:

$$\Delta H^s = \Delta H^x \cdot \zeta + H_0 \cdot (\zeta - 1) = \Delta H^{s'} + \Delta H^{s''} = - \frac{\partial \Delta D_i}{\partial K_z^s} + H_0 \cdot (\zeta - 1) \quad (111)$$

em que  $\zeta$  é a taxa de variação do seno do ângulo de elevação com relação ao seno do ângulo rasante dada por:

$$\zeta = \frac{\partial \text{sen } e}{\partial \text{sen } g} \quad (112)$$

Destaca-se que o tipo B de correção altimétrica envolve um termo adicional além da derivada  $\partial \Delta D_i / \partial K_z^s$ .

Cabe relembrar o leitor que a correção do tipo A,  $\Delta H^x$ , é a mais relevante, pois afeta a maioria dos usuários, que costumam supor modelo plano apesar de empregar medições de campo decorrentes de uma Terra não plana. Já a correção do tipo B,  $\Delta H^s$ , se aplica a usuários que tentam corrigir o efeito da curvatura terrestre simplesmente trocando o ângulo de elevação pelo ângulo rasante. Posteriormente, serão apresentados os resultados quantificando a magnitude das correções.

### 3.5.4 Outras formas de avaliação do impacto da curvatura terrestre

#### 3.5.4.1 Ângulo rasante e ângulo de elevação da reflexão

Devido a curvatura terrestre, o ângulo rasante visualizado na esfera pode não ser igual ao ângulo de elevação do plano (Figura 11). Assim, foram comparados o ângulo rasante no

plano  $g^p$ , que consiste no ângulo de elevação  $e$ , e o ângulo rasante na esfera  $g^s$ , que neste trabalho é tratado simplesmente como  $g$ . A comparação  $\Delta g$  se deu da seguinte forma:

$$\Delta g = g^p - g^s = e - g \quad (113)$$

No mesmo sentido, o ângulo de elevação da reflexão também pode ser afetado devido a mudança de geometria na esfera em relação ao plano (Figura 12). O ângulo de elevação da reflexão no plano  $e_r^p$  é simplesmente a imagem do ângulo de elevação direto  $e$ , ou seja,  $e_r^p = -e$ . Enquanto na esfera, o ângulo de elevação da reflexão  $e_r^s$ , obtido pela Equação (86), pode diferir do ângulo de elevação direto. Assim, a comparação entre os modelos é dada por:

$$\Delta e_r = e_r^p - e_r^s = -e - e_r^s \quad (114)$$

#### 3.5.4.2 Distância inclinada

As distâncias inclinadas, obtidas a partir dos modelos esférico, pela Equação (115), e plano, pela Equação (32), foram comparadas da seguinte forma:

$$\Delta D_l = D_l^p - D_l^s \quad (115)$$

### 3.6 Formas de validação

#### 3.6.1 Inter-comparação entre algoritmos

Esta forma de validação consiste na comparação entre as variáveis obtidas pelos modelos da Seção 3.3, que são os modelos de Fujimura *et al.* (2019), Martín-Neira (1993), Helm (2008), Miller e Vegh (1993) e o método numérico pelo Princípio de Fermat. Serão comparadas as variáveis que são retornadas diretamente pelos modelos, que são o ponto de reflexão e o ângulo rasante, e as variáveis derivadas, que são atraso de propagação, distância inclinada e comprimento de arco.

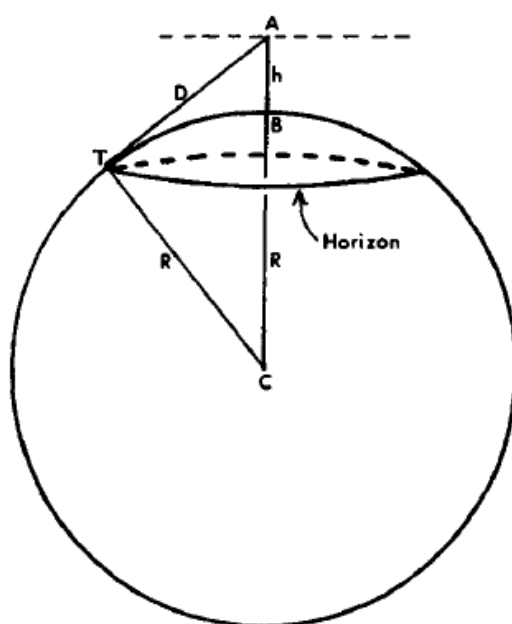
Para que seja verificada se há diferenças entre as soluções, foi elencado como referência os resultados obtidos pelo modelo de Fujimura *et al.* (2019). Este modelo foi selecionado pela

atualidade da publicação, pela maior simplicidade algébrica e os ótimos resultados no horizonte esférico utilizando este modelo.

### 3.6.2 Horizonte esférico

O horizonte esférico consiste em um círculo no entorno e abaixo do observador com os pontos de tangência de linhas retas traçadas a partir do observador com a esfera que representa a superfície terrestre (Figura 17) (BOHREN; FRASER, 1986; FRENCH, 1982). No contexto da refletometria, o horizonte esférico da antena receptora é aquele que a onda refletida tangencia a esfera terrestre. Ressalta-se também que o horizonte esférico difere do horizonte verdadeiro, pois o meio de propagação será considerado como vácuo, enquanto no horizonte verdadeiro são levados em consideração os efeitos atmosféricos na refração da onda (FRENCH, 1982).

Figura 17 – Horizonte esférico traçado a partir do observador.

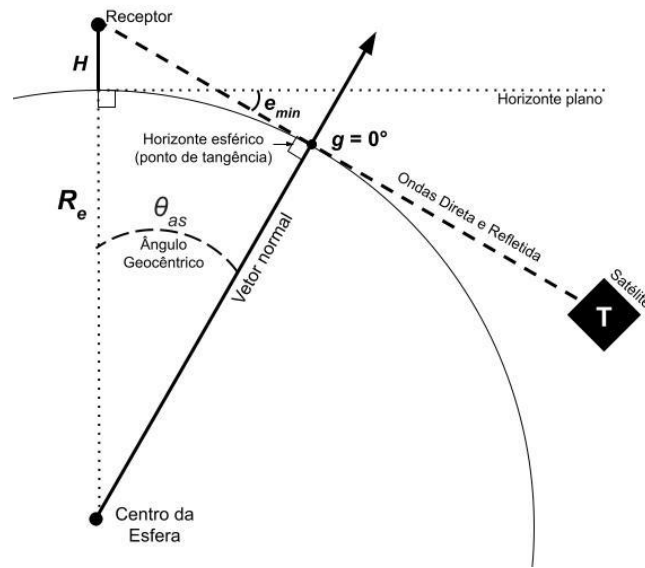


Fonte: French (1982).

O ponto de tangência da visada localiza-se abaixo do observador, denotando um ângulo de visada negativo, e a distância que este ponto ocorre em relação ao observador é dependente da altura deste observador (FRENCH, 1982). No caso da refletometria, quanto mais alto for a antena receptora mais longe ocorrerá o ponto de tangência e, conseqüentemente, menor será o ângulo de elevação abaixo do horizonte plano da antena receptora, ou seja, o ângulo de elevação será negativo.

No horizonte esférico, devido a geometria da reflexão (Figura 18), grandezas do problema direto podem ser obtidas de forma simples e exatas por relações trigonométricas sendo essas grandezas o atraso interferométrico, o ângulo rasante, as coordenadas  $x_s$  e  $y_s$  do ponto de reflexão, distância inclinada e o comprimento de arco. Tais resultados no horizonte esférico serão utilizados para validar os resultados das modelagens da Seção 3.3.

Figura 18 – Geometria da reflexão para uma determinada altura de antena receptora no horizonte esférico.



Fonte: o autor.

O horizonte esférico é denotado pelo fato de o ângulo rasante da reflexão ser igual a zero, ou seja,  $g_{hor}^s = 0$ , que por sua vez corresponde ao ângulo de elevação mínimo visível no vácuo  $e_{hor}$ , obtido pela Equação (116):

$$e_{hor} = e_r^s|_{g=0} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{R_e}{R_a}\right) - 90^\circ \quad (116)$$

A coordenada  $y_{hor}^s$  do ponto de reflexão no horizonte é derivada da metodologia da inversão no círculo (ALTSILLER-COURT, 1980), conforme a equação abaixo:

$$y_{hor}^s = y_s^s|_{g=0} = R_e \left( \left(1 + \frac{H}{R_e}\right)^{-1} - 1 \right) = -\frac{H}{\left(1 + \frac{H}{R_e}\right)} \quad (117)$$

E a coordenada  $x_{hor}^s$  é dada pela equação do círculo, por:

$$x_{hor}^s = x_s^s|_{g=0} = \sqrt{R_e^2 - (R_e + y_{hor}^s)^2} \quad (118)$$

O atraso de propagação no horizonte esférico  $D_{i_{hor}}^s$ , assim como o ângulo rasante, deve ser igual a zero:  $D_{i_{hor}}^s = D_i^s|_{g=0} = 0$ . Já a distância inclinada no horizonte esférico  $D_{l_{hor}}^s$  consiste na linha de visada do observador até o ponto de tangência e é obtida pela seguinte equação (FRENCH, 1982):

$$D_{l_{hor}}^s = D_l^s|_{g=0} = \sqrt{2R_e H + H^2} \quad (119)$$

Por fim, o comprimento de arco entre a antena receptor e o ponto de reflexão no horizonte esférico  $S_{hor}$  é dado por:

$$S_{hor} = S|_{g=0} = R_e \operatorname{asen}\left(\frac{y_{hor}^s}{R_e}\right) \quad (120)$$

### 3.6.3 Aproximações trigonométricas para transmissor a distância infinita

Os satélites GNSS estão dispostos em órbita MEO (*Medium Earth Orbit*). Os satélites da constelação GPS, por exemplo, estão a cerca de 20.200 km de altura da superfície terrestre (SEEBER, 2003). Nesse sentido, devido à elevada altura do satélite GNSS, pode-se considerar que a distância entre o transmissor e a antena receptora é quase infinita. Sob essa suposição é possível realizar aproximações trigonométricas para variáveis como a distância inclinada e o atraso de propagação interferométrico no modelo de superfície esférico (COLLETT *et al.*, 2020).

A distância inclinada na esfera pode ser obtida pela relação trigonométrica da Equação (121), derivada do Teorema de Pitágoras aplicada ao triângulo com hipotenusa  $R_a = R_e + H$ , cuja relação pode ser visualizada Figura 19:

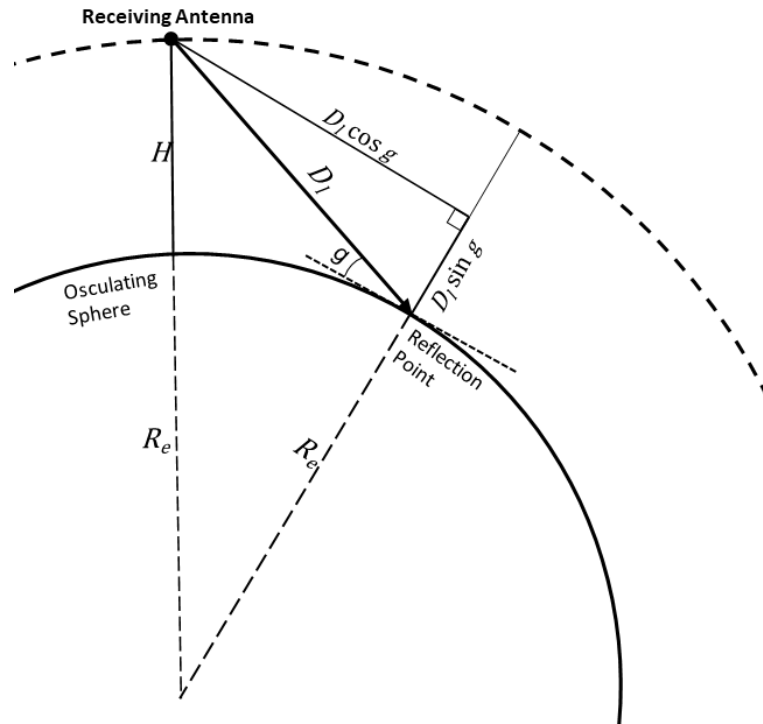
$$D_{l_{\infty}}^s = R_e(\sqrt{\gamma} - \operatorname{sen} g) \quad (121)$$

em que  $\gamma$  é dado pela seguinte equação:



$$\gamma = \frac{R_a^2}{R_e^2} - \cos^2 g \quad (122)$$

Figura 19 – Distância inclinada sobre a esfera do ponto de reflexão até a antena receptora e a derivação matemática pelo Teorema de Pitágoras.



Fonte: o autor.

O atraso de propagação interferométrico pode ser formulado a partir da seguinte equação:

$$D_{i\infty}^s = D_i^s (1 - \cos(e - e_r^s)) = D_i^s (1 - \cos(2e + \Delta e_r)) \quad (123)$$

onde  $e_r^s$  é o ângulo de elevação da onda refletida, obtido pela Equação (86).

Dados o atraso interferométrico e a distância inclinada acima, a estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler cruzado considerando um transmissor a distância infinita pode ser calculado de forma genérica, análoga à Equação (103):

$$H_{af'}^{x\infty} = \frac{\partial D_i^{s\infty}}{\partial K_z^p} \quad (124)$$

A partir da formulação genérica da Equação (124),  $H_{af'}^{x\infty}$  pode ser obtida de forma numérica:

$$H_{af'}^{x\infty} \approx \frac{\Delta D_i^{s\infty}}{\Delta K_z^p} = \frac{D_i^{s\infty}|_{j+1} - D_i^{s\infty}|_{j-1}}{K_z^p|_{j+1} - K_z^p|_{j-1}} = 0.5 \frac{D_i^{s\infty}|_{j+1} - D_i^{s\infty}|_{j-1}}{\text{sen } e_{j+1} - \text{sen } e_{j-1}} = H_{af'}^{x\infty n} \quad (125)$$

ou então pela seguinte formulação trigonométrica:

$$H_{af'}^{x\infty} = -0.5 D_i^{s\infty} \sqrt{\gamma} \zeta^{-1} + D_i^{s\infty} \sin(2e + \Delta e_r) \sec e \left( 1 + 0.5 \frac{\partial \Delta e_r}{\partial e} \right) = H_{af'}^{x\infty t} \quad (126)$$

em que  $\zeta$  é definido na Equação (112). Salienta-se que a Equação (126) não é puramente trigonométrica já que é dependente de  $\zeta$  e também do termo  $\partial \Delta e_r / \partial e$ .

Dessa forma, a correção altimétrica do tipo A para um transmissor a distância infinita pode ser dada de forma análoga à Equação (100):

$$\Delta H_{f'}^{x\infty} = H_{af'}^{x\infty} - H \quad (127)$$

tal que  $H_{af'}^{x\infty}$  pode ser dado pela Equação (125) ou pela Equação (126). Quando se quiser enfatizar o tipo da fórmula, numérica ou trigonométrica, será incluído um sobrescrito extra  $n$  ou  $t$  em  $H_{af'}^{x\infty}$ .

Ressalta-se que as simplificações acima são aplicadas após a solução do problema direto na esfera, feita sem suposição de distância infinita. Conjetura-se que o polinômio de quarta ordem, necessário para as soluções rigorosas da reflexão na esfera apresentadas nos algoritmos da Seção 3.3, também poderia vir a ser simplificado com a suposição de transmissor a distância infinita.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, são apresentados os resultados de validação, por comparação com as fórmulas fechadas no horizonte esférico, bem como por comparação interna entre algoritmos de cálculo da reflexão na esfera. Posteriormente, são apresentados os resultados de avaliações do impacto da curvatura terrestre, com relação à suposição do plano tangente.

Cabe ressaltar dois parâmetros das simulações, que são o raio terrestre e o raio orbital do satélite. O raio terrestre utilizado foi de 6.370 km, conforme explicado anteriormente. Já o raio orbital do satélite utilizado foi de 6.370 km acrescido da altura orbital de 20.200 km.

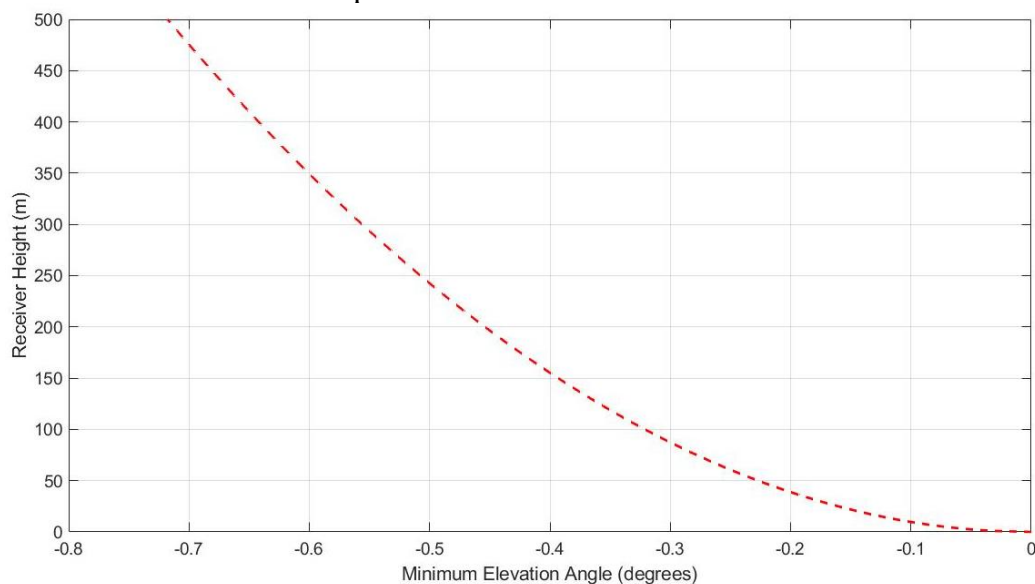
### 4.1 Validações

#### 4.1.1 Validação no horizonte esférico

Nessa seção serão apresentadas as validações no horizonte esférico em que foram comparados os resultados de grandezas do problema direto obtidas pelos algoritmos de cálculo da reflexão na esfera, apresentadas na Seção 3.3, em relação aos resultados esperados pelas fórmulas fechadas (Seção 3.6.2). Os resultados apresentados aqui serão referentes apenas as diferenças resultantes das comparações. Os resultados calculados para cada algoritmo no horizonte esférico podem ser verificados no Apêndice A.

Serão apresentados os resultados referentes aos ângulos de elevações mínimos das alturas de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m (Tabela 2), obtidos a partir da Equação (116). Na Figura 20 são apresentados os ângulos de elevação mínimos visados por antenas receptoras a diferentes alturas entre 0 m e 500 m de altura, correspondentes ao horizonte esférico das respectivas alturas, denotando que quanto maior a altura, menor o ângulo mínimo. Assim, por exemplo, considerando o meio de propagação como vácuo, uma antena receptora a 50 m de altura pode visar um satélite em um ângulo de elevação de  $-0,2^\circ$ . Enquanto que para uma antena receptora a 500 m de altura, o ângulo mínimo de visada pode chegar a  $-0,7^\circ$  de elevação.

Figura 20 – Ângulo de elevação mínimo referente ao horizonte esférico para antenas receptoras de zero a 500 m de altura.



Fonte: o autor.

Tabela 2 – Ângulo de elevação mínimo para as diferentes alturas de antenas receptoras.

Altura da antena receptora (metros)	Ângulo de elevação mínimo (graus)
10	-0,10152
50	-0,22701
100	-0,32104
300	-0,45402
200	-0,55606
500	-0,71786
1000	-1,01517

Fonte: o autor.

Primeiramente serão apresentadas as diferenças do ângulo rasante,  $g$ , calculado no horizonte esférico na Tabela 3. Neste caso, o resultado esperado é zero. Assim, observa-se que todos modelos apresentaram bons resultados, com boa acurácia para o resultado esperado. As maiores diferenças, verificadas no modelo numérico e em Miller e Vegh, são da ordem de  $10^{-6}$  graus, sendo então diferenças desprezíveis no ângulo rasante.

Cabe ressaltar que os modelos matemáticos raramente terão diferenças exatamente iguais a zero devido as distintas metodologias de obtenção das grandezas. Sabe-se que o software Matlab apresenta precisão computacional de  $2,2204 \times 10^{-16}$  para valores próximos de zero (MATHWORKS, 2021a). Dessa forma, é possível afirmar que as diferenças entre os pares de algoritmos comparados que resultaram diferenças iguais a zero possuem diferenças, pelo

menos, menores que a precisão computacional supracitada. Isso é aplicado não somente ao ângulo rasante na Tabela 3, mas também às demais grandezas comparadas na seção.

Tabela 3 – Validação do ângulo rasante,  $g$ , no horizonte esférico.

Altura (metros)	Resultado Esperado (graus)	Diferenças em relação ao resultado esperado (graus)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	0	1,1e-11	1,8e-12	0	0	0
50	0	-1,1e-12	1,3e-12	1,9e-06	2,3e-06	0
100	0	2,4e-12	4,8e-10	0	0	0
200	0	-2,1e-12	-3,7e-13	0	4,3e-06	2,4e-12
300	0	1,1e-12	1,4e-08	0	4,3e-07	8,1e-13
500	0	3,4e-13	1,0e-10	6,0e-07	1,9e-06	-8,1e-13
1000	0	6,1e-13	-2,8e-14	0	7,4e-07	0

Fonte: o autor.

A Tabela 4 apresenta os resultados para o atraso de propagação interferométrico,  $D_i$ , onde verifica-se que todos os modelos apresentaram boa concordância em relação ao resultado esperado, já que, em geral, as diferenças são ínfimas, na ordem de  $10^{-9}$  metros. Ressalta-se que o resultado esperado neste caso é zero.

Tabela 4 – Validação do atraso de propagação,  $D_i$ , no horizonte esférico.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Diferenças em relação ao resultado esperado (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	0	0	0	0	-7,5e-09	0
50	0	0	0	3,7e-09	0	0
100	0	3,7e-09	3,7e-09	0	-3,7e-09	0
200	0	0	0	0	-3,7e-09	0
300	0	-3,7e-09	-3,7e-09	0	-3,7e-09	-3,73e-09
500	0	3,7e-09	0	0	-3,7e-09	0
1000	0	0	-3,7e-09	0	0	0

Fonte: o autor.

Na Tabela 5 e Tabela 6 são apresentadas as validações da posição do ponto de reflexão, na coordenada  $x$  e na coordenada  $y$ , respectivamente. Em ambos os casos percebe-se que todas as soluções analíticas apresentam boa acurácia em relação ao resultado esperado, com diferenças desprezíveis. O modelo numérico pelo Princípio de Fermat, no entanto, não

apresentou bons resultados, visto que todas as diferenças são métricas, chegando até a 252,541 m na altura de 500 m.

Tabela 5 – Validação da coordenada  $x$  do ponto de reflexão no horizonte esférico.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Diferenças em relação ao resultado esperado (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	11287,1476	1,1e-06	6,7e-08	-1,4e-07	35,281	4,8e-07
50	25238,7103	4,0e-10	2,6e-07	-2,1e-01	-157,644	1,6e-07
100	35692,7164	2,9e-07	5,4e-05	-2,8e-01	3,766	7,4e-09
200	50476,5292	-2,7e-07	-7,6e-08	-1,6e-01	158,534	-2,7e-07
300	61820,1425	2,0e-07	1,5e-03	7,8e-08	1,456	-1,2e-08
500	79807,5816	1,4e-08	1,2e-05	-6,7e-02	252,541	-9,0e-09
1000	112858,3210	7,6e-08	5,0e-09	8,0e-09	185,213	6,3e-08

Fonte: o autor.

Tabela 6 – Validação da coordenada  $y$  do ponto de reflexão no horizonte esférico.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Diferenças em relação ao resultado esperado (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	-10,0000	-1,6e-09	2,3e-10	1,2e-09	-0,0626	1,7e-07
50	-49,9996	3,7e-10	-5,6e-10	8,2e-04	0,6227	-1,6e-07
100	-99,9984	-1,5e-09	-3,0e-07	1,6e-03	-0,0211	-7,1e-09
200	-199,9937	2,4e-09	-3,9e-10	1,2e-03	-1,2583	1,4e-07
300	-299,9859	-1,7e-09	-1,5e-05	-7,6e-10	-0,0141	4,5e-08
500	-499,9608	-1,1e-09	-1,5e-07	8,4e-04	-3,1693	-3,6e-08
1000	-999,8430	-1,7e-09	1,2e-10	1,2e-10	-3,2847	1,2e-10

Fonte: o autor.

Conforme fora verificado também na Seção 4.1.2, o modelo numérico não apresenta a mesma acurácia que os modelos analíticos devido a limitação computacional de *software* e *hardware*. No entanto, percentualmente, as diferenças são pequenas. A diferença percentual para o resultado esperado na coordenada  $x$  aos 500 m, por exemplo, é de 0,32%; aos 50 m, o erro é de 0,62%. Já no eixo  $y$ , a diferença percentual é um pouco maior, sendo de 0,63% e 1,25% para 500 m e 50 m, respectivamente.

Além disso, o modelo numérico pelo Princípio de Fermat (Seção 3.3.4) foi implementado para convergir com base no atraso interferométrico. Portanto, os deslocamentos verificados no ponto de reflexão obtidos pelo modelo numérico decorrem na convergência do atraso, conforme é verificado na Tabela 4.

Na Tabela 5, além do modelo numérico, observa-se que o modelo de Miller e Vegh também apresentou valores que destoaram dos resultados esperados. Para as alturas de 50 m, 100 m, 200 m e 500 m, as diferenças atingem valores -20,7 cm, -28,5 cm, -15,7 cm e 6,7 cm, respectivamente. Ressalta-se, contudo, que os erros centimétricos no horizonte esférico são percentualmente pequenos.

A validação da distância inclinada,  $D_l$ , é apresentada na Tabela 7. A distância inclinada tem resultados muito próximos aos da coordenada  $x$  do ponto de reflexão, que ocorre devido a geometria da reflexão no horizonte esférico, como é possível ser visualizado na Figura 18. Dessa forma, as diferenças verificadas na distância inclinada também são muito similares as diferenças na coordenada  $x$  (Tabela 5).

Tabela 7 – Validação da distância inclinada,  $D_l$ , no horizonte esférico.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Diferenças em relação ao resultado esperado (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	11287,1653	1,0e-06	4,0e-08	-1,6e-07	35,281	4,5e-07
50	25238,9085	-1,6e-07	9,9e-08	-2,1e-01	-157,645	-6,0e-09
100	35693,2767	2,5e-07	5,4e-05	-2,8e-01	3,766	-3,4e-08
200	50478,1141	-2,7e-07	-7,5e-08	-1,6e-01	158,539	-2,7e-07
300	61823,0540	1,3e-07	1,5e-03	1,2e-08	1,456	-7,8e-08
500	79813,8459	5,8e-08	1,2e-05	-6,7e-02	252,560	3,5e-08
1000	112876,0382	7,7e-08	6,0e-09	8,0e-09	185,242	6,3e-08

Fonte: o autor.

Da mesma forma que a distância inclinada, devido à geometria da reflexão no horizonte, o comprimento de arco,  $S$  (Tabela 8), também apresenta valores muito próximos a coordenada  $x$  do ponto de reflexão, e conseqüentemente, da distância inclinada. Porém, ressalta-se que não são iguais. As diferenças no comprimento de arco também são pequenas sendo, em geral, ínfimas. Mas, assim como verificado na validação da distância inclinada, as metodologias de Miller e Vegh e o método numérico pelo princípio de Fermat apresentaram os piores desempenhos no horizonte esférico, visto que as diferenças chegaram a valores centimétricos, mas que são percentualmente quase desprezíveis.

Tabela 8 – Validação do comprimento de arco,  $S$ , no horizonte esférico.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Diferenças em relação ao resultado esperado (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	11287,1535	-1,3e-06	-3,4e-07	-1,4e-07	-1,4e-07	4,7e-07
50	25238,7764	2,4e-07	-1,9e-08	-2,1e-01	-2,5e-01	1,6e-07
100	35692,9031	-2,4e-07	-5,4e-05	-2,8e-01	2,7e-08	7,5e-09
200	50477,0575	2,0e-07	7,2e-09	-1,6e-01	-1,3e-01	-2,8e-07
300	61821,1129	-4,1e-08	-1,5e-03	7,8e-08	7,8e-08	-1,2e-08
500	79809,6696	-6,0e-08	-1,2e-05	-6,7e-02	-2,0e-01	-8,5e-09
1000	112864,2262	-6,1e-08	1,1e-08	7,0e-09	-6,7e-02	6,3e-08

Fonte: o autor.

Assim, verifica-se que todos os modelos apresentaram alta concordância em relação aos resultados esperados para todas as variáveis testadas. Nos casos em que as diferenças ultrapassaram o nível métrico e centimétrico, as diferenças foram percentuais quase irrisórias.

Destaca-se o modelo de Fujimura (Seção 3.3.1) nessa etapa de validação no horizonte esférico, cujos resultados em todas as variáveis da reflexão suprimam a expectativa, apresentando diferenças irrisórias de forma regular em relação aos resultados esperados no horizonte esférico. Então, devido ao desempenho nessa etapa de validação, o modelo de Fujimura *et al.* (2019) foi utilizado no restante do trabalho como referência para o cálculo do problema direto, conforme segue.

#### 4.1.2 Inter-validação entre algoritmos

Nessa etapa de validação, foram realizadas simulações conforme a metodologia apresentada na Seção 3.6.1, a fim de validar os algoritmos de modelagem da reflexão, definidos na Seção 3.3. Para as simulações, utilizou-se uma altura de antena receptora de 500 m, na qual as grandezas modeladas apresentam valores grandes, possibilitando que possíveis erros e diferenças nas modelagens dos algoritmos sejam melhor evidenciados. Para que os resultados fossem tabelados, foram utilizados ângulos de elevação no intervalo de  $90^\circ$  até  $-0,7179^\circ$ , que corresponde ao horizonte esférico para a altura de 500 m com passos de  $10^\circ$ .

Nas tabelas abaixo serão mostradas apenas os valores de diferença entre os modelos, a fim de demonstrar a similaridade entre os resultados dos diferentes modelos. Os resultados de cada modelo estão disponíveis no Apêndice B.



Primeiramente, são apresentados os valores de diferença do ângulo rasante entre os diferentes modelos na Tabela 9. É possível verificar que os algoritmos estão de acordo com os valores de referência. As maiores diferenças são da ordem de  $10^{-3}$  graus, principalmente nos resultados de Martín-Neira e Helm. Verifica-se também uma alta similaridade entre todos os modelos principalmente no ângulo de elevação mínimo e no ângulo de  $90^\circ$ , à zênite.

Tabela 9 – Comparação do ângulo rasante,  $g$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA *et al.*, 2019).

Ângulo de elevação (graus)	Diferenças no ângulo rasante (graus)				Resultado Fujimura <i>et al.</i> (2019)
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	
90	0	0	-4,3e-07	0	90,0000
80	-5,0e-04	-5,0e-04	5,7e-11	-7,8e-05	80,0013
70	-9,7e-04	-9,7e-04	1,5e-10	3,6e-05	70,0026
60	-1,4e-03	-1,4e-03	-4,7e-11	-2,2e-05	60,0040
50	-1,7e-03	-1,7e-03	-1,2e-10	-3,3e-05	50,0055
40	-2,0e-03	-2,0e-03	-1,3e-12	-4,4e-05	40,0074
30	-2,2e-03	-2,2e-03	-8,9e-12	4,8e-06	30,0100
20	-2,3e-03	-2,3e-03	1,4e-11	-1,5e-05	20,0146
10	-2,3e-03	-2,3e-03	-3,3e-11	2,2e-05	10,0277
0	-1,5e-03	-1,5e-03	-4,2e-12	1,7e-06	0,4154
-0,7179	1,2e-12	1,0e-10	6,0e-07	1,8e-06	0,0000

Fonte: o autor.

Conforme mencionado na seção anterior, os pares de metodologias comparadas dificilmente resultam em diferenças exatamente iguais a zero. No entanto, afirma-se que as diferenças iguais a zero apresentadas nas tabelas são, no mínimo, menores que a precisão computacional do software Matlab (para números com ponto flutuante de precisão dupla), no qual as comparações foram realizadas (MATHWORKS, 2021a).

A Tabela 10 e a Tabela 11 referem-se, respectivamente, à diferenças encontradas na coordenada  $x$  e na coordenada  $y$  do vetor posição do ponto de reflexão, obtidos pelos diferentes modelos matemáticos. Percebe-se, a partir das duas tabelas, que a posição do ponto de reflexão é bastante similar entre as metodologias, já que as diferenças entre os modelos são ínfimas, exceto as diferenças na coordenada  $x$  pelo modelo numérico. Neste caso, há algumas diferenças da ordem de centímetros, aos  $10^\circ$  e  $0^\circ$ , e até metros, destoando dos demais algoritmos. As diferenças nos baixos ângulos de elevação são atribuídas ao limite numérico da precisão computacional de *hardware* e de *software*. No Matlab, a precisão decimal é de  $2,2204 \times 10^{-16}$  para valores próximos de a zero e reduz gradativamente para valores maiores, podendo ser consultada pela função *eps.m* (MATHWORKS, 2021a).

Tabela 10 – Comparação da coordenada  $x$  do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA *et al.*, 2019).

Ângulo de elevação (graus)	Diferenças na coordenada $x$ do ponto de reflexão (metros)				Resultado Fujimura <i>et al.</i> (2019)
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	
90	0	0	3,7e-06	0	0,0000
80	-4,1e-09	-6,2e-04	6,4e-10	1,4e-03	88,1449
70	-8,1e-11	-3,2e-09	-1,7e-09	-7,1e-04	181,9442
60	-4,2e-10	-4,2e-10	-4,2e-10	5,2e-04	288,6024
50	8,9e-09	9,9e-10	2,6e-09	9,9e-04	419,4233
40	1,5e-09	4,7e-09	7,0e-10	1,9e-03	595,6412
30	1,1e-08	1,2e-07	3,5e-10	-3,3e-04	865,5074
20	7,5e-09	6,1e-08	3,9e-09	2,2e-03	1372,1345
10	3,5e-08	1,0e-04	8,7e-09	-1,3e-02	2823,8848
0	2,3e-07	1,9e-04	1,6e-07	-3,8e-01	46021,9791
-0,7179	2,3e-08	1,2e-05	-6,7e-02	252,5405	79807,5816

Fonte: o autor.

Tabela 11 – Comparação da coordenada  $y$  do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA *et al.*, 2019).

Ângulo de elevação (graus)	Diferenças na coordenada $y$ do ponto de reflexão (metros)				Resultado Fujimura <i>et al.</i> (2019)
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	
90	1,9e-09	1,9e-09	1,9e-09	1,9e-09	0,0000
80	-3,7e-09	4,7e-09	-3,7e-09	-2,3e-08	-0,0006
70	9,3e-10	9,3e-10	9,3e-10	2,1e-08	-0,0026
60	-4,7e-09	-4,7e-09	-4,7e-09	-2,8e-08	-0,0065
50	2,8e-09	2,8e-09	2,8e-09	-6,3e-08	-0,0138
40	-1,9e-09	-1,9e-09	-1,9e-09	-1,8e-07	-0,0278
30	-1,9e-09	-1,9e-09	-1,9e-09	4,4e-08	-0,0588
20	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	-4,8e-07	-0,1478
10	-9,3e-10	-4,7e-08	-9,3e-10	5,7e-06	-0,6259
0	1,0e-08	-1,4e-06	1,1e-08	2,7e-03	-166,2520
-0,7179	3,4e-08	-1,1e-07	8,4e-04	-3,2	-499,9608

Fonte: o autor.

Assim, devido as iterações com números de alta grandeza no cálculo da coordenada  $x$  do ponto de reflexão nos baixos ângulos de elevação, a precisão pode não ser suficiente para o cálculo acurado da coordenada  $x$  nessas configurações extremas da reflexão. Contudo, isso não é verificado na coordenada  $y$  do ponto de reflexão, por exemplo, que possui magnitude menor em relação a coordenada  $x$ , visto que as diferenças são desprezíveis.

No entanto, note que as maiores diferenças verificadas na coordenada  $x$  do ponto de reflexão pelo modelo numérico correspondem apenas a uma porcentagem baixa do valor daquela coordenada. Em relação aos valores de referência, dado pelo modelo de Fujimura *et al.*

(2019), a diferença na coordenada  $x$  calculado pelo modelo numérico aos  $10^\circ$  é de apenas 0,0008%; no horizonte, a diferença percentual é de 0,32% apenas.

Ressalta-se que os erros envolvidos na localização do ponto de reflexão não decorreram em erros no atraso de propagação (Tabela 12). Isso se deve ao fato de que o modelo numérico pelo Princípio de Fermat (Seção 3.3.4) foi implementado para convergir pelo atraso interferométrico. O critério de parada do método numérico se aplica exclusivamente a convergência do atraso interferométrico. Logo, os deslocamentos verificados no ponto de reflexão obtidos pelo modelo numérico em relação aos demais modelos decorrem na convergência do atraso.

Tabela 12 – Comparação do atraso de propagação interferométrico,  $D_i$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA *et al.*, 2019).

Ângulo de elevação (graus)	Diferenças no Atraso de Propagação Interferométrico (metros)				Resultado Fujimura <i>et al.</i> (2019)
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	
90	0	0	0	0	1000,0000
80	7,4e-09	7,4e-09	7,4e-09	7,4e-09	984,8097
70	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	-7,5e-09	939,7004
60	7,5e-09	7,5e-09	7,5e-09	7,5e-09	866,0428
50	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	766,0754
40	0	3,7e-09	3,7e-09	0	642,8369
30	0	3,7e-09	3,7e-09	0	500,0754
20	0	3,7e-09	3,7e-09	0	342,1402
10	0	-3,7e-09	0	-3,7e-09	173,8865
0	3,7e-09	3,7e-09	3,7e-09	-3,7e-09	4,8310
-0,7179	3,7e-09	0	3,7e-09	-3,7e-09	0,0000

Fonte: o autor.

Na Tabela 12 observa-se que todos os modelos apresentam diferenças desprezíveis para o atraso interferométrico, na ordem de  $10^{-9}$  metros e, em alguns casos, a diferença é zero, ou seja, menor que a precisão do computador. Dessa forma, embora tenha sido verificadas algumas diferenças na posição do ponto de reflexão, o atraso de propagação não foi afetado.

Por fim, na Tabela 13 e Tabela 14 são apresentadas as comparações das variáveis distância inclinada e comprimento de arco.

Tabela 13 – Comparação da distância inclinada,  $D_l$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA *et al.*, 2019).

Ângulo de elevação (graus)	Diferenças na Distância Inclinada (metros)				Resultado Fujimura <i>et al.</i> (2019)
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	
90	-1,9e-09	-1,9e-09	-1,9e-09	-1,9e-09	500,0000
80	3,0e-09	-1,1e-04	3,8e-09	2,4e-04	507,7107
70	-9,0e-10	-2,0e-09	-1,4e-09	-2,4e-04	532,0773
60	3,8e-09	3,8e-09	3,8e-09	2,6e-04	577,3196
50	3,6e-09	-1,5e-09	-4,9e-10	6,4e-04	652,6329
40	2,3e-09	4,8e-09	1,7e-09	1,4e-03	777,6994
30	1,0e-08	1,1e-07	1,2e-09	-2,9e-04	999,5808
20	8,3e-09	5,9e-08	4,9e-09	2,1e-03	1460,4454
10	3,5e-08	1,0e-04	8,7e-09	-1,3e-02	2867,9176
0	2,3e-07	1,9e-04	1,6e-07	-3,8e-01	46026,8015
-0,7179	2,3e-08	1,2e-05	-6,7e-02	252,560	79813,8459

Fonte: o autor.

Tabela 14 – Comparação do comprimento de arco,  $S$ , obtido pelos modelos de reflexão na esfera em relação à referência (FUJIMURA *et al.*, 2019).

Ângulo de elevação (graus)	Diferenças no Comprimento de Arco (metros)				Resultado Fujimura <i>et al.</i> (2019)
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	
90	0	0	3,7e-06	0	0,0000
80	4,5e-03	4,5e-03	6,4e-10	7,0e-04	88,1449
70	9,5e-03	9,5e-03	-1,7e-09	-3,6e-04	181,9442
60	1,6e-02	1,6e-02	-4,2e-10	2,6e-04	288,6024
50	2,6e-02	2,6e-02	2,6e-09	5,0e-04	419,4233
40	4,2e-02	4,2e-02	7,0e-10	9,4e-04	595,6412
30	7,7e-02	7,7e-02	3,5e-10	-1,7e-04	865,5074
20	1,7e-01	1,7e-01	3,9e-09	1,1e-03	1372,1345
10	6,6e-01	6,6e-01	8,7e-09	-6,4e-03	2823,8849
0	83,043	83,043	1,6e-07	-9,5e-02	46022,3795
-0,7179	-5,1e-08	-1,2e-05	-6,7e-02	-2,0e-01	79809,6696

Fonte: o autor.

Na distância inclinada, as diferenças são ínfimas para a maioria dos modelos matemáticos, com diferenças na ordem de  $10^{-9}$  metros, com exceção do modelo numérico, que novamente apresentou diferenças centimétricas nos menores ângulo de elevação, assim como foi visto na coordenada  $x$  do ponto de reflexão.

No comprimento de arco, no entanto, a similaridade entre os modelos foi um pouco menor do que as demais variáveis vistas anteriormente. As diferenças em Helm, Martín-Neira e no modelo numérico foram de ordem métrica e centimétrica em alguns ângulos de elevação. No entanto, salienta-se que percentualmente as diferenças no comprimento de arco são

desprezíveis comparando com o valor total da variável, como pode ser visto na Tabela A-6 do Apêndice A. Já as diferenças em relação a Miller e Vegh foram desprezíveis.

Portanto, averiguou-se que as diferentes metodologias apresentam alta concordância entre si na modelagem das diferentes variáveis da reflexão. Embora o modelo numérico não tenha apresentado resultados satisfatórios no cálculo da coordenada  $x$  do ponto de reflexão, não decorreram em erros sistemáticos no atraso de propagação. Dessa forma, as soluções da reflexão na esfera podem ser validadas devido à alta similaridade entre os resultados.

## 4.2 Impacto da curvatura terrestre em grandezas auxiliares

O impacto da curvatura terrestre nas variáveis do problema direto foi verificado a partir de simulações computacionais realizadas no software Matlab. Para a modelagem da reflexão na esfera utilizou-se o algoritmo de Fujimura *et al.* (2019) (Seção 3.3.1) e variáveis derivadas (Seção 3.3.5). As variáveis modeladas na esfera foram então comparadas as variáveis no plano, conforme definido na Seção 3.5.

As simulações foram realizadas considerando a variação do ângulo de elevação do satélite e da altura da antena receptora. Utilizou-se ângulos de elevação de  $90^\circ$ , a zênite da antena receptora, até o horizonte esférico para a referente altura da antena receptora. O tamanho dos passos de iteração do ângulo de elevação foi de  $0,01^\circ$ . As alturas da antena receptora simuladas foram de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m. As alturas foram selecionadas a fim de verificar o efeito da curvatura terrestre desde pequenas alturas, como 10 m, até grandes alturas, como 500 m, por exemplo.

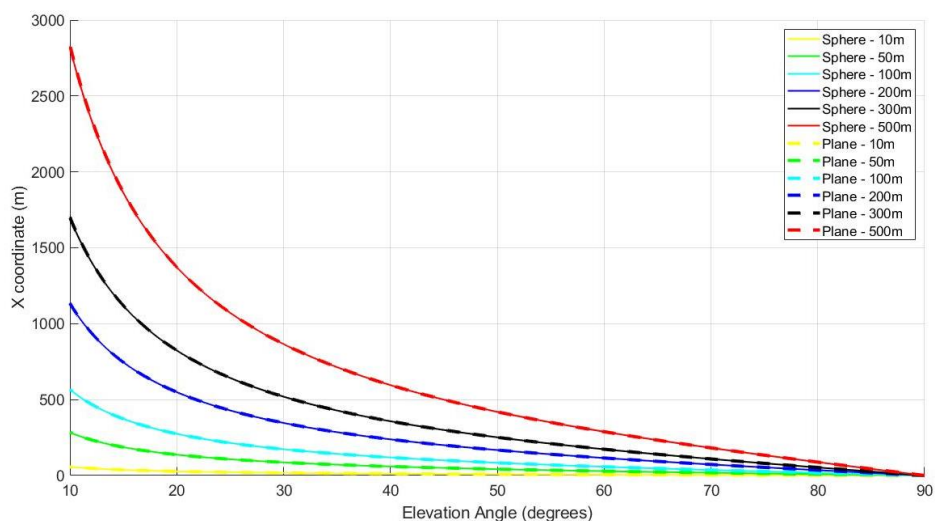
### 4.2.1 Efeito posicional no ponto de reflexão

O ponto de reflexão é um importante parâmetro da reflexão, pois define o caminho percorrido pela onda refletida. Nesse sentido, investigou-se o efeito posicional da curvatura terrestre no ponto de reflexão a partir da diferença entre o ponto de reflexão modelado na superfície plana pela Equação (31), e na superfície esférica, pela Equação (54), conforme apresentado na Seção 3.5.1.

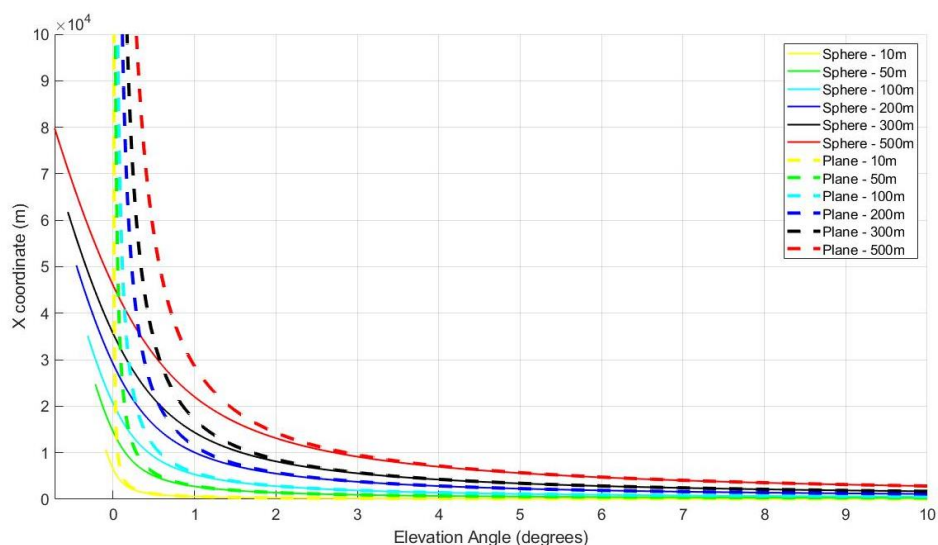
Dessa forma, observa-se que, em pontos de reflexão próximos a antena receptora, os modelos plano e esférico apresentam alta similaridade entre si, pois apresentam resultados muito semelhantes na coordenada  $x$  (Figura 21a). No entanto, à medida que aumenta o distanciamento do ponto de reflexão, esse sofre um efeito posicional na coordenada  $x$  cada vez

mais acentuado de forma sistemática em função da altura da antena receptora e do ângulo de elevação do satélite. Na Figura 21b, nota-se que as diferenças crescem exponencialmente em direção aos menores ângulos de elevação, principalmente próximo ao horizonte da antena receptora. A  $0^\circ$  de elevação ocorre uma singularidade na coordenada  $x$  na superfície plana, devido à relação trigonométrica pela qual é definida,  $x_s^p = H/\tan e$ . Assim, no horizonte plano, o resultado é infinito devido à divisão por zero. Verifica-se também que em ângulos de elevação negativos, o modelo de superfície plano retorna valores negativos na coordenada  $x$  (Figura 21b). A rigor, o modelo plano é inválido ou não se aplica para  $e \leq 0$ .

Figura 21 – Coordenada  $x$  do ponto de reflexão na esfera (linha sólida) e no plano (linha tracejada) nas alturas de antenas receptoras 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de  $10^\circ$  a  $90^\circ$ ; e (b) do horizonte esférico a  $10^\circ$ , com eixo  $y$  truncado em  $10^4$  m.



(a)



(b)

Fonte: o autor.

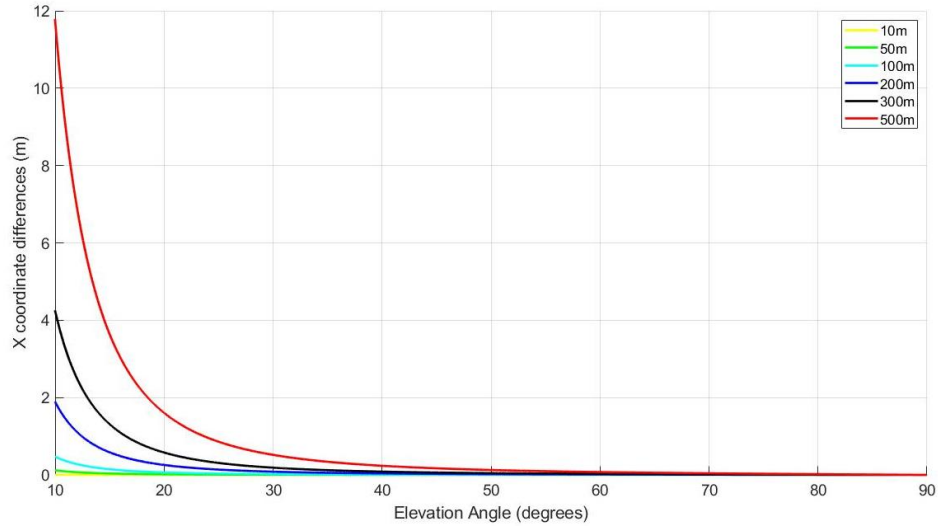
Embora na Figura 21a as respostas de ambos os modelos pareçam coincidentes, ocorrem diferenças que alcançam níveis métricos próximo dos  $10^\circ$  e para alturas acima de 100 m (Figura 22a). Aos 300 m e  $10^\circ$ , por exemplo, as diferenças chegam a mais de 4 m; aos 500 m e  $10^\circ$ , a diferença é de quase 12 m.

No entanto, a diferença percentual entre o plano e a esfera chega apenas a pouco mais de 0,4% para a altura de 500 m e  $10^\circ$  de elevação em relação ao valor total da coordenada  $x$  na esfera (Figura 23b). Para as alturas menores que 500 m, o percentual é ainda mais baixo até  $10^\circ$  de elevação. Ressalta-se também para o fato de que as diferenças são positivas, determinando que a coordenada  $x$  calculada no modelo plano é maior que a calculada no modelo esférico. Logo, a distância horizontal do ponto de reflexão na esfera é menor que no plano.

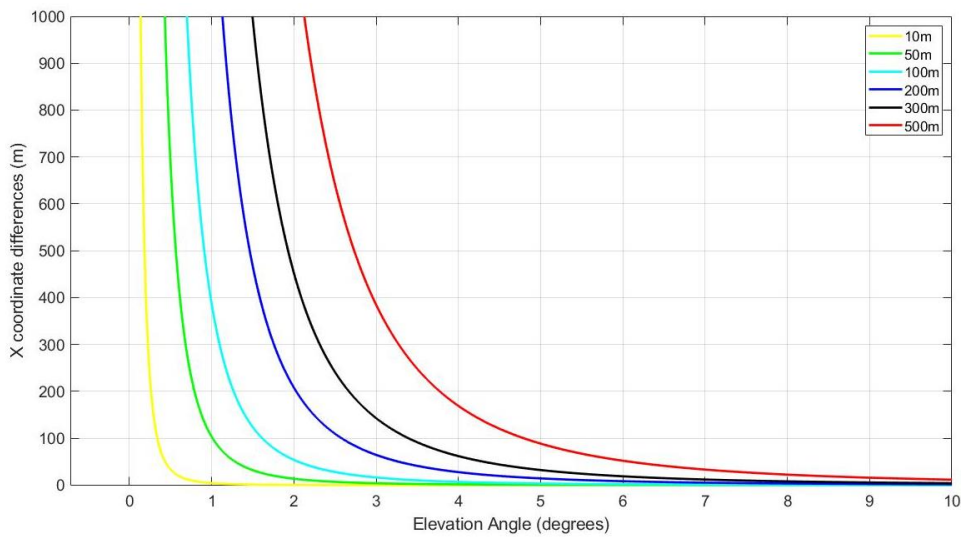
Nos ângulos de elevação mais baixos (Figura 22b), menores que  $5^\circ$ , verifica-se o cenário mais crítico de diferenças entre plano e esfera, principalmente próximo do horizonte plano. Abaixo de  $5^\circ$  de elevação e 500 m de altura, as diferenças chegam a 100 m e, abaixo dos  $3^\circ$ , as diferenças ultrapassam os 1000 m. Inclusive, aos 10 m de altura, as diferenças também ultrapassam os 1000 m próximo do  $0^\circ$  de elevação. O eixo vertical do gráfico da Figura 22b está propositalmente truncado a 1000 m, mas as diferenças atingem valores muito maiores no horizonte plano, como é visto na Figura 22c, atingindo valores de ordem maior que  $10^7$  metros.

Além disso, as diferenças percentuais chegam a 10% aos  $2^\circ$  de elevação e 500 m de altura. Próximo de  $0^\circ$  de elevação, as diferenças chegam a mais de 100%, demonstrando que o deslocamento horizontal é maior e mais crítico quanto mais próximo do horizonte plano (Figura 23b). Inclusive, na Figura 22c visualiza-se melhor este comportamento das diferenças em que o incremento é acentuado na direção dos ângulos de elevação próximo ao horizonte plano.

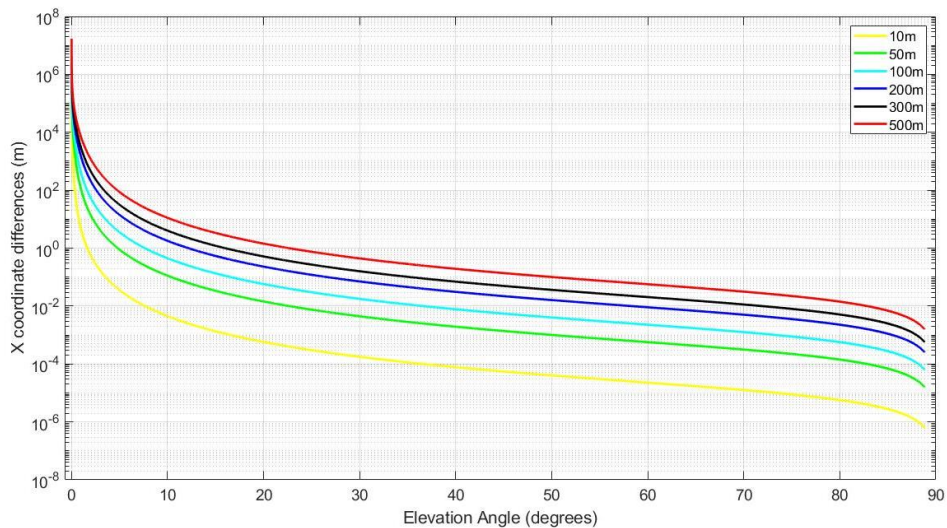
Figura 22 – Diferenças verificadas nas coordenadas  $x$  do ponto de reflexão entre a esfera e o plano,  $\Delta x$ , nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de  $10^\circ$  a  $90^\circ$ ; (b) do horizonte esférico a  $10^\circ$ , com eixo  $x$  truncado em 1000 m; e (c) do horizonte esférico até zênite com escala logarítmica.



(a)



(b)

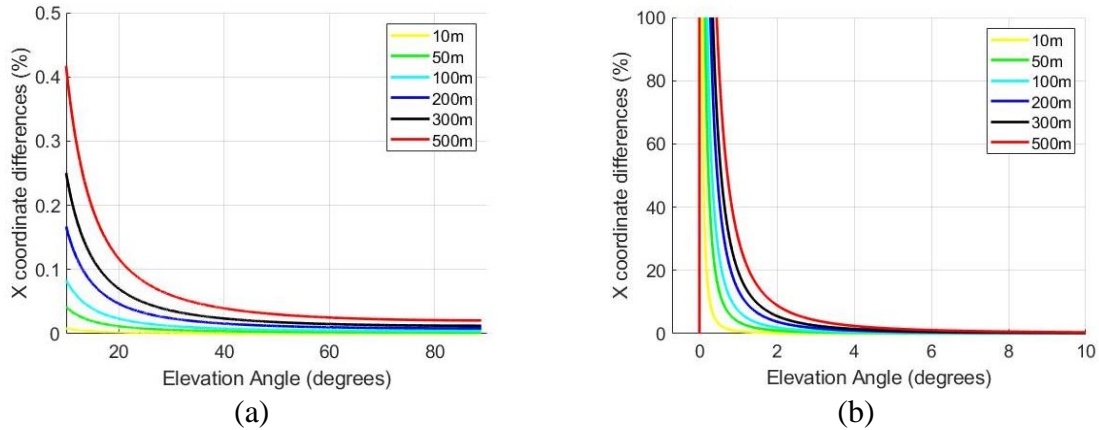


(c)

Fonte: o autor.



Figura 23 – Diferenças percentuais verificadas nas coordenadas  $x$  do ponto de reflexão entre a esfera e o plano,  $\Delta x/x^s$ , nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo  $y$  truncado em 100%.

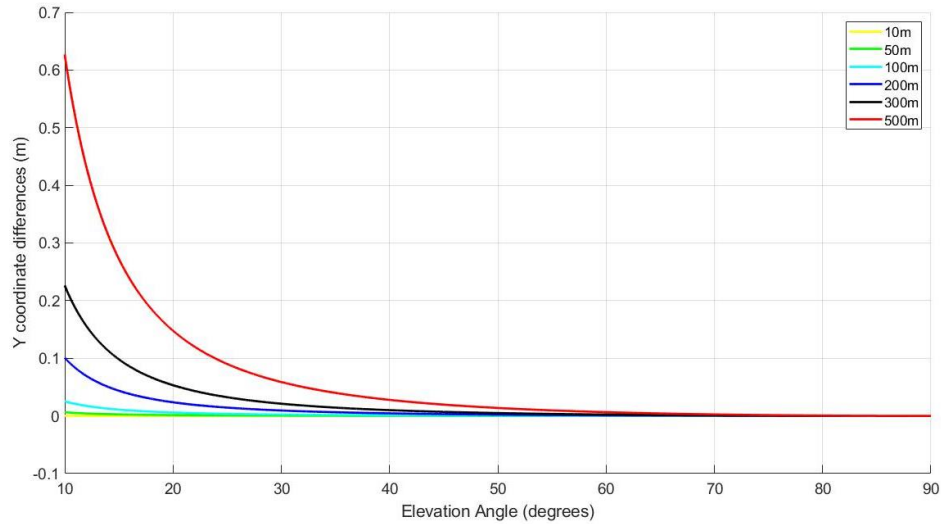


Fonte: o autor.

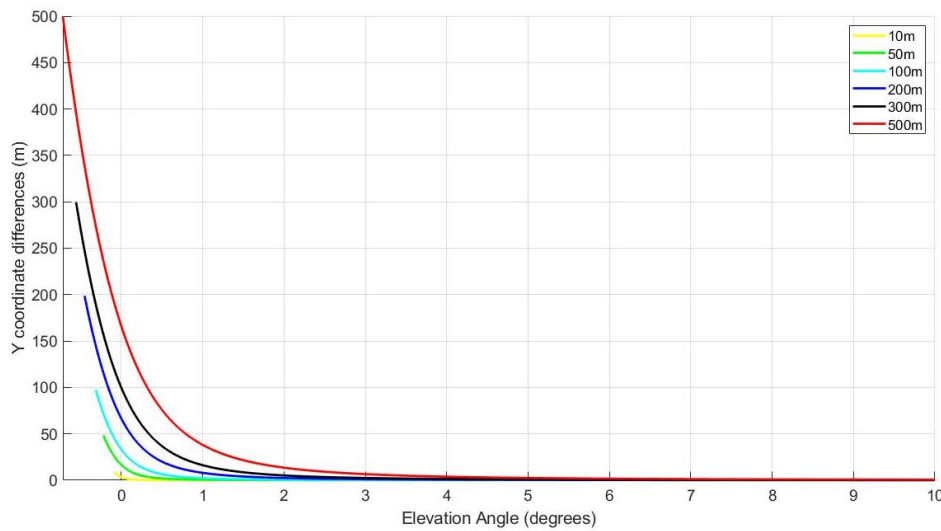
Na coordenada  $y$  ocorre um deslocamento posicional do ponto de reflexão ainda mais perceptível, pois no plano esta é constante, ou seja,  $y_s^p = 0$ . A coordenada  $y$  do ponto de reflexão na esfera então irá ser deslocada em relação ao plano devido ao rebaixamento vertical causado pela curvatura terrestre, com magnitude dependente do ângulo de elevação e da altura da antena receptora (ZAVOROTNY *et al.*, 2014). As diferenças entre plano e esfera na coordenada  $y$  podem ser verificadas na Figura 24. Serão apresentadas apenas as diferenças entre os dois modelos, pois a variação na coordenada  $y$  ocorre somente na variável calculada na esfera.

As diferenças  $\Delta y = y^p - y^s$  apresentadas na Figura 24 são positivas, denotando então que o resultado da coordenada  $y$  na esfera é negativa, ocorrendo um rebaixamento do ponto de reflexão em relação a base da antena, que serve como origem do sistema de coordenadas local. O rebaixamento do ponto de reflexão é maior quanto mais longe ele ocorrer, ou seja, quanto menor o ângulo de elevação e maior a altura da antena receptora, denotando um efeito sistemático em decorrência da curvatura terrestre. Para os ângulos de elevação maiores, acima de 10° (Figura 24a), o deslocamento é pequeno, de ordem milimétrica ou centimétrica, dependendo da altura da antena receptora. Aos 10° e 200 m, por exemplo, a diferença chega somente a 10 cm, enquanto aos 10° e 500 m, a diferença chega a 60 cm.

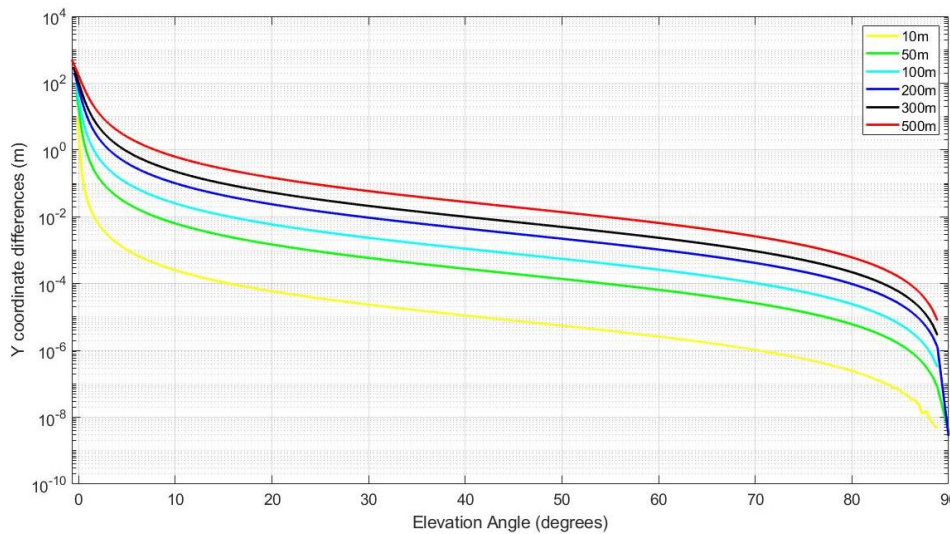
Figura 24 – Diferenças verificadas nas coordenadas  $y$  do ponto de reflexão entre a esfera e o plano,  $\Delta y$ , nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica.



(a)



(b)



(c)

Fonte: o autor.

Diferenças mais críticas podem ser verificadas nos ângulos baixos (Figura 24b), em que as diferenças passam a ser métricas para determinadas configurações de ângulo de elevação e altura da antena receptora, principalmente abaixo dos  $2^\circ$  de elevação, onde o aumento das diferenças é mais acentuado para a maioria das alturas (Figura 24c). Um fato interessante é que a coordenada  $y$  calculada no horizonte esférico tende aproximadamente ao valor negativo da respectiva altura. Por exemplo, a coordenada  $y$  no horizonte esférico para uma altura de 500 m tende a -500 m; para a altura de 10 m, a coordenada  $y$  no horizonte esférico tende a -10 m. O padrão se repete para as outras alturas, conforme pode ser visto na Figura 24b.

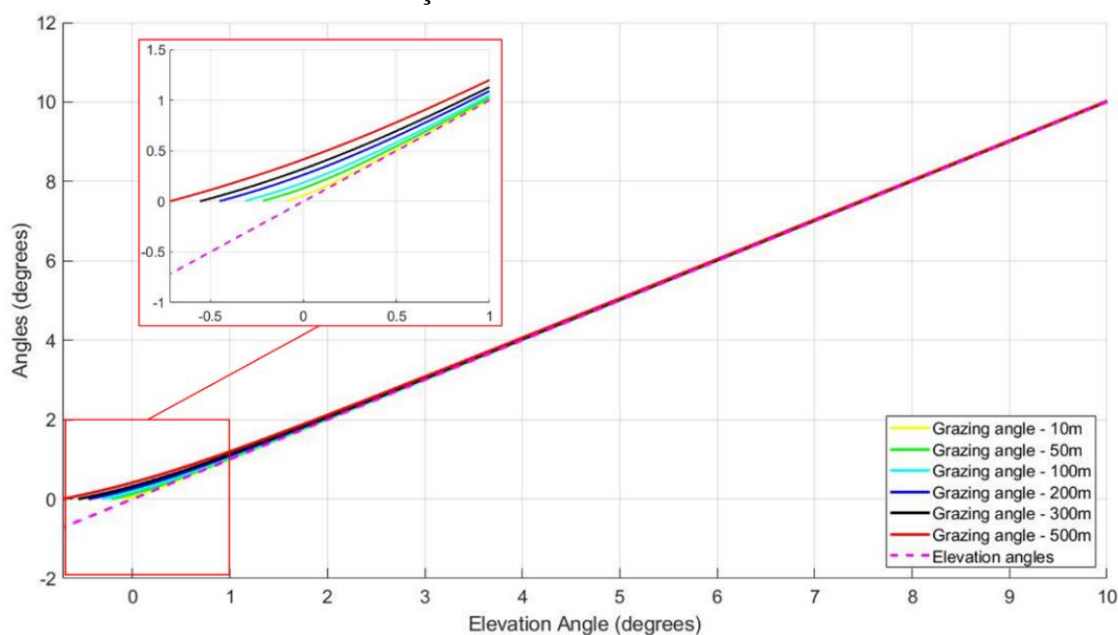
Portanto, verifica-se que o ponto de reflexão é deslocado na esfera em relação ao plano de forma sistemática, com deslocamento posicional maior quanto mais distante ocorrer a reflexão, ou seja, quanto menor o ângulo de elevação e maior a altura da antena receptora. Na coordenada  $x$ , o ponto de reflexão ocorre mais próximo da antena receptora na esfera do que no plano. Por outro lado, o ponto de reflexão sofre um rebaixamento na esfera em relação ao plano, devido à altura constante da coordenada  $y$  no plano.

#### 4.2.2 Efeito no ângulo rasante

O ângulo rasante na esfera,  $g^s$ , difere do ângulo rasante no plano,  $g^p = e$ , onde  $e$  é igual ao ângulo de elevação,  $e$ . A diferença entre ambos os ângulos,  $\Delta g$ , dada pela Equação (113), ocorre de forma sistemática, sendo dependente da altura da antena receptora e do próprio ângulo de elevação. Conforme pode ser visto na Figura 25, diferentes ângulos rasantes são obtidos na reflexão para cada ângulo de elevação visado na onda direta e para cada altura de antena receptora. No entanto, as diferenças entre ambos os ângulos são sutis ao longo de grande parte do intervalo de ângulos de elevação. Na Figura 25 observa-se que mesmo abaixo de  $10^\circ$  é difícil distinguir visualmente os ângulos rasante e de elevação.

A diferenciação entre ambos os ângulos só é mais explícita abaixo de  $2^\circ$  de elevação, devido as diferenças verificadas entre o horizonte plano e o horizonte esférico das respectivas alturas. Como o eixo  $x$  do gráfico refere-se ao ângulo de elevação, os ângulos rasantes são levemente curvados nos ângulos baixos, pois, enquanto o ângulo de elevação segue linearmente para valores negativos, os ângulos rasantes vão em direção a zero.

Figura 25 – Ângulo rasante,  $g$ , na esfera (linha sólida) e ângulos de elevação (linha tracejada) nas alturas de antenas receptoras 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação do horizonte esférico a  $10^\circ$ .

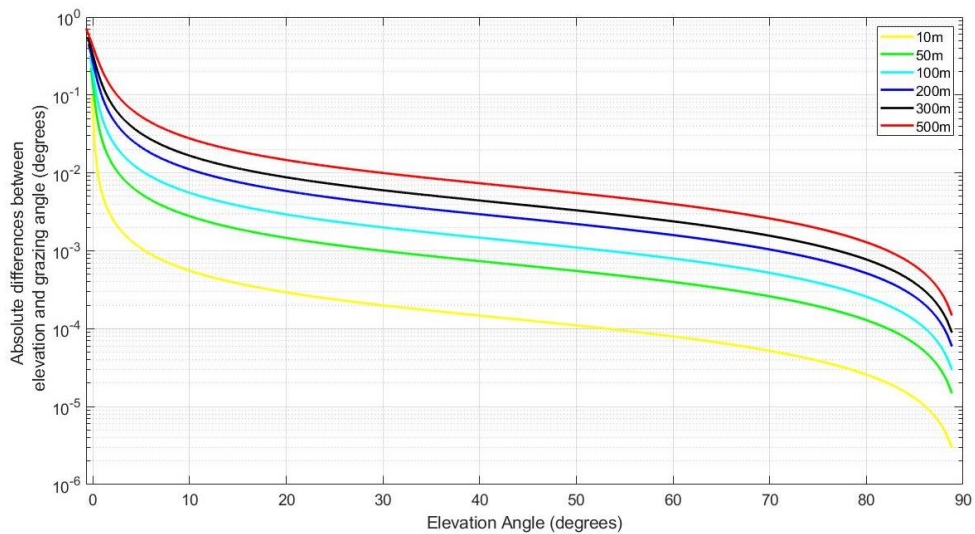
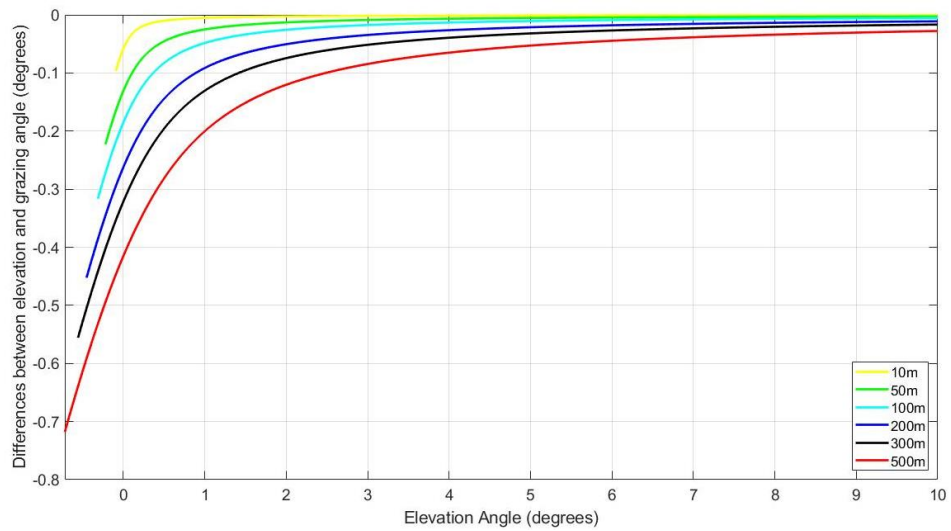
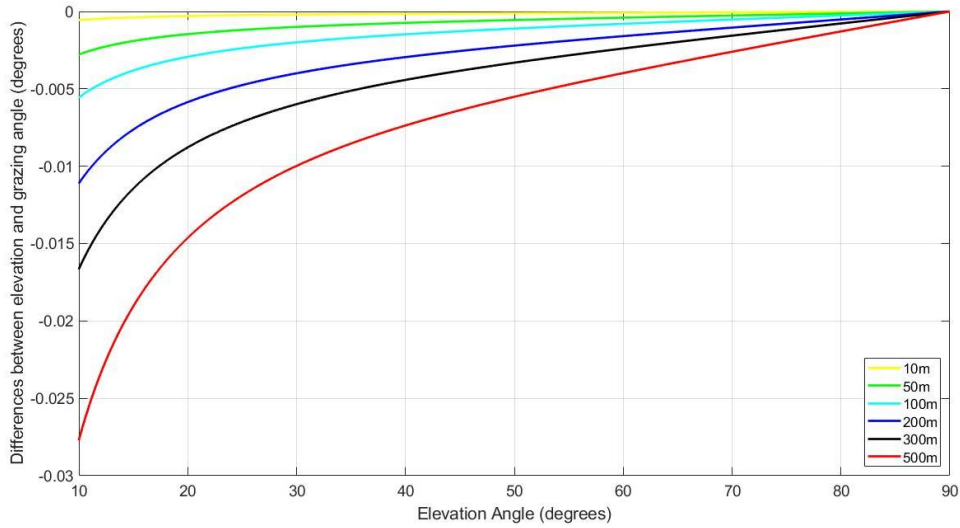


Fonte: o autor.

Ressalta-se que o horizonte esférico é verificado em ângulos de elevação negativos. Quanto maior a altura da antena receptora, menor será o ângulo de elevação visado no horizonte esférico (Figura 20). Dessa forma, na Figura 25 os ângulos verificados para altura de 10 m são muito próximos aos ângulos de elevação, enquanto que aos 500 m há uma diferenciação maior entre os ângulos rasante e de elevação. Isso se deve ao fato de que aos 10 m de altura, o horizonte esférico ocorre aos  $-0,10152^\circ$ , enquanto que aos 500 m de altura, o horizonte esférico é aos  $-0,71786^\circ$  (Tabela 2).

As diferenças entre os ângulos rasantes,  $\Delta g$ , podem ser verificadas na Figura 26. Destaca-se que as diferenças, obtidas pela Equação (113), são negativas, o que denota que o ângulo rasante na esfera é maior do que no plano (ângulo de elevação). Na Figura 26a verifica-se que as diferenças são pequenas, chegando apenas a cerca de  $-0,03^\circ$  aos 500 m de altura e  $10^\circ$  de elevação. Aos 100 m e  $10^\circ$ , a diferença atinge  $-0,005^\circ$ . Na Figura 26b observam-se diferenças mais acentuadas, chegando, pelo menos, a  $-0,1^\circ$  para todas as alturas até o horizonte esférico. A diferença absoluta máxima verificada foi aos 500 m de altura no horizonte esférico, onde se verifica diferenças menores que  $0,7^\circ$ . Obviamente, as diferenças verificadas no horizonte esférico são equivalentes ao ângulo de elevação mínimo visível correspondente ao horizonte esférico de cada altura.

Figura 26 – Diferenças verificadas no ângulo rasante,  $\Delta g$ , em relação aos ângulos de elevação nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica e valores absolutos.

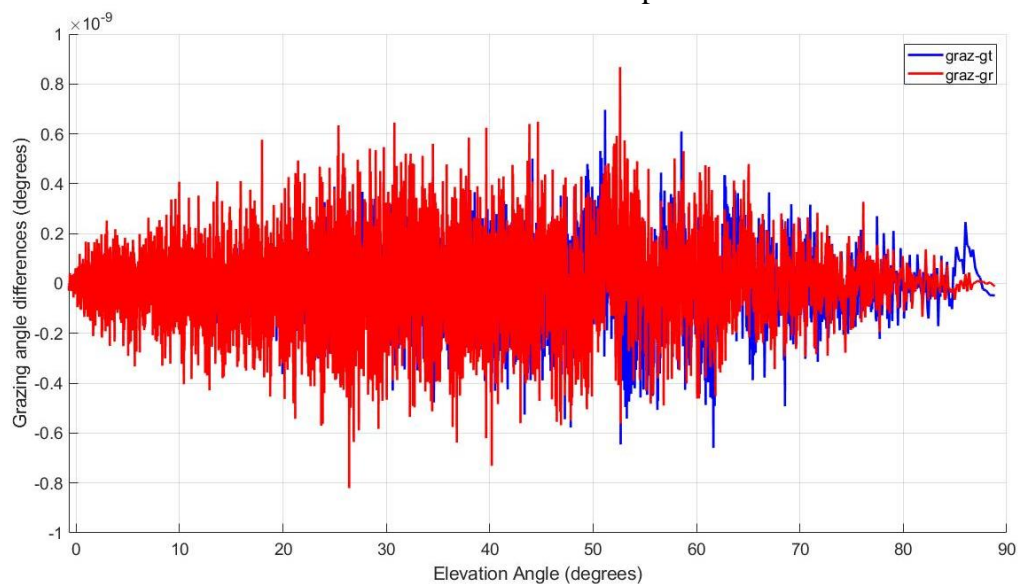


Fonte: o autor.

Na Figura 26c são mostradas as diferenças absolutas entre os ângulos, na qual visualiza-se que as diferenças são maiores quanto maior a altura da antena receptora. No horizonte plano, o crescimento das diferenças é exponencial e, no horizonte esférico, as diferenças chegam pelo menos a  $0,1^\circ$  para todas as alturas simuladas.

A fim de validar o cálculo do ângulo rasante, foram modelados por relações vetoriais o ângulo rasante à direita ou da direção de incidência ( $g'$ ), do ponto de reflexão para o satélite; e o ângulo rasante à esquerda ou da direção de espalhamento ( $g''$ ), calculado na direção do ponto de reflexão para a antena receptora. Ambos os ângulos rasantes,  $g'$  e  $g''$ , foram então comparados ao ângulo rasante  $g$  obtido no problema direto para validar a Lei de Snell. Na Figura 27 verificam-se que as diferenças são ínfimas, na ordem de  $10^{-9}$  graus, e aleatórias o que indica ruído numérico.

Figura 27 – Diferenças do ângulo rasante à direita com relação ao ângulo rasante à esquerda verificadas na altura de antena receptora de 500 m.



Fonte: o autor.

Portanto, o ângulo rasante foi corretamente modelado, podendo-se então verificar que o ângulo rasante se diferencia em relação ao ângulo de elevação. Cabe ressaltar, porém, que ambos os ângulos são muito próximos, exceto nos ângulos de elevação próximos a  $0^\circ$  de elevação. As diferenças aumentam quanto maior a altura da antena receptora e menor o ângulo de elevação do satélite, devido aos diferentes horizontes esféricos para as diferentes alturas.

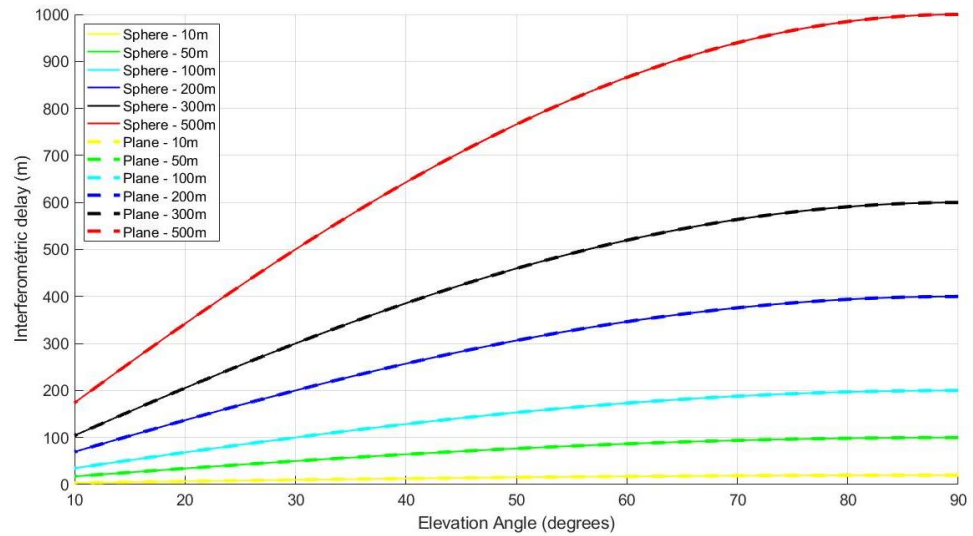
### 4.2.3 Efeito no atraso de propagação interferométrico

O atraso de propagação interferométrico,  $D_i$ , é obtido pelo problema direto em GNSS-R. Considerando uma superfície plana, o atraso interferométrico pode ser obtido simplesmente pela Equação (19). Já na esfera, o atraso é obtido pela relação vetorial entre a onda direta e a refletida, apresentada na Equação (55), em que a última é dependente do ponto de reflexão que, nesse caso, foi obtido pela Equação (54). Nesse sentido, o efeito causado pela curvatura terrestre no atraso interferométrico foi obtido conforme a Seção 3.5.2.

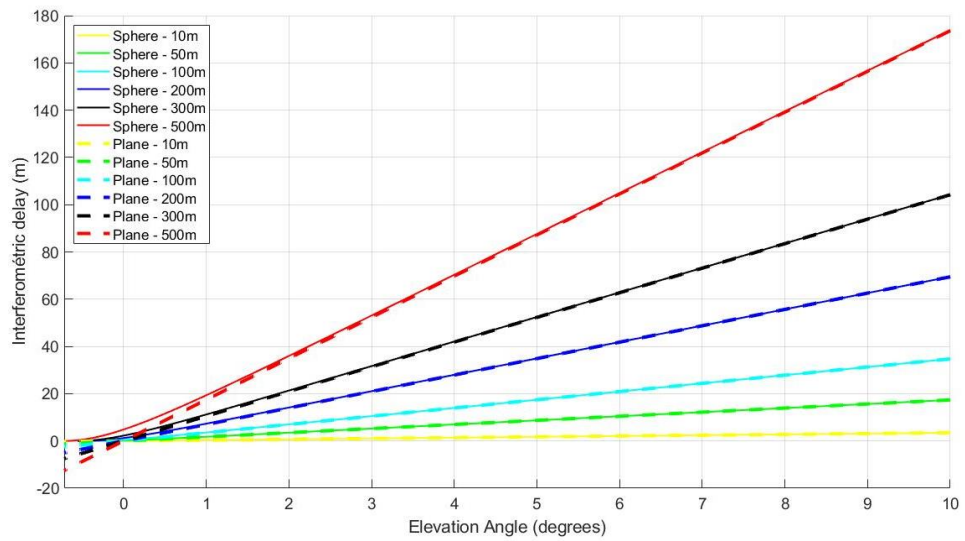
Na Figura 28 são mostrados os valores de atraso interferométrico obtidos pelos modelos de superfície plano e esférico. Ressalta-se para o comportamento do atraso interferométrico, tendo em vista que os valores para o atraso decrescem com a redução do ângulo de elevação do satélite. O maior valor de atraso é verificado a zênite, o qual pode ser dado simplesmente por  $D_{i|90^\circ} = 2H$  no plano e na esfera. O atraso então decresce até zero no horizonte esférico, onde se observa que as ondas direta e refletida percorrem exatamente a mesma trajetória.

Na Figura 28a verifica-se que os resultados dos dois modelos são muito similares nos ângulos de elevações acima de  $10^\circ$ , o que dificulta a distinção no gráfico. Nos ângulos de elevação abaixo de  $10^\circ$  (Figura 28b), percebe-se a diferenciação entre ambos os modelos, principalmente abaixo dos  $5^\circ$  de elevação. As diferenças entre o modelo plano e o modelo esférico são apresentadas Figura 29.

Figura 28 – Atraso de propagação interferométrico,  $D_i$ , na esfera (linha sólida) e no plano (linha tracejada) nas alturas de antenas receptoras 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°.



(a)

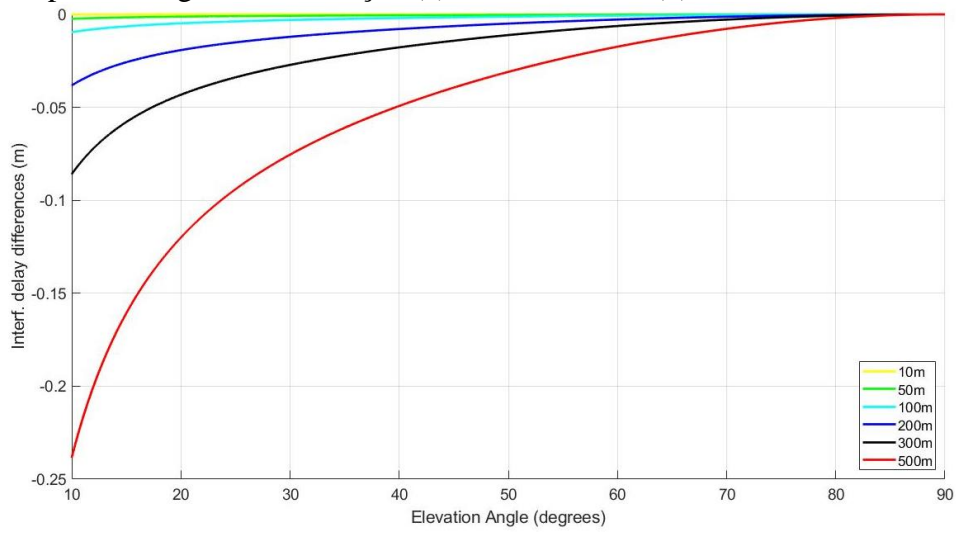


(b)

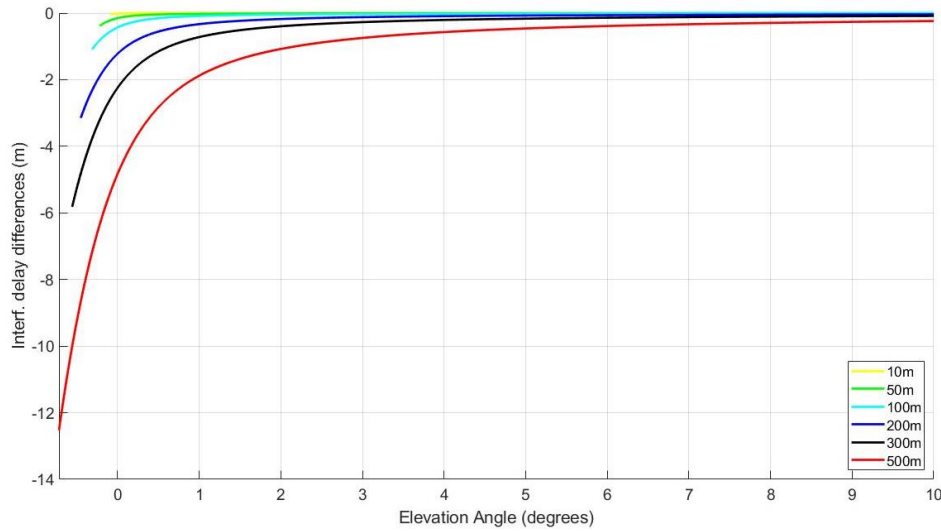
Fonte: o autor.



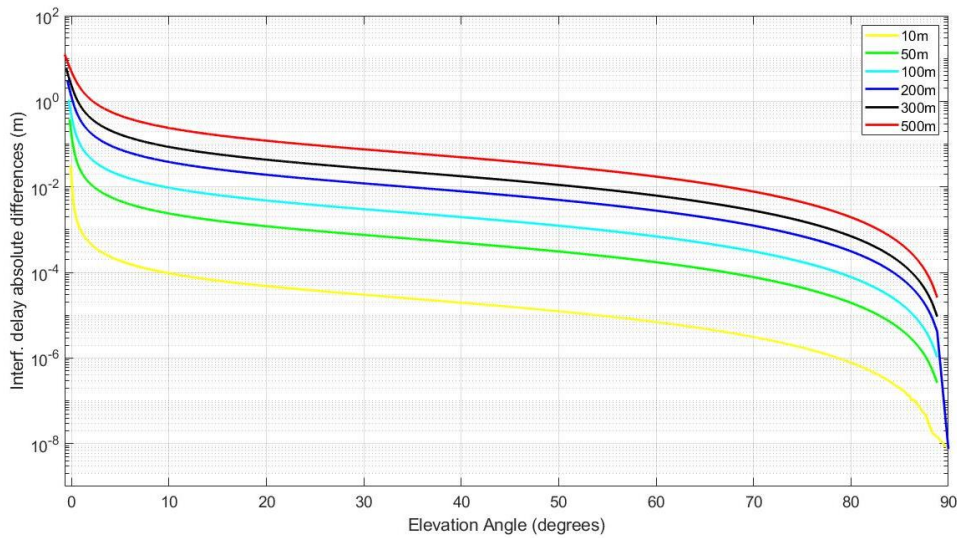
Figura 29 – Diferenças do atraso de propagação interferométrico na esfera em relação ao plano,  $\Delta D_i$ , verificadas nas alturas de antenas receptoras de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico até zênite.



(a)



(b)



(c)

Fonte: o autor.

Nota-se a partir da Figura 29 que as diferenças são negativas, denotando que o atraso interferométrico na esfera é maior que no plano, devido ao deslocamento do ponto de reflexão, verificado na Seção 4.2.1, tendo em vista que as diferenças entre ambos os modelos são crescentes na mesma direção que as diferenças verificadas no ponto de reflexão. Logo, denota-se também no atraso interferométrico o erro sistemático verificado no ponto de reflexão em que as diferenças no atraso interferométrico aumentam no sentido dos menores ângulos de elevação e das maiores alturas de antena receptora, configuração essa em que ocorre o distanciamento do ponto de reflexão. Além disso, ressalta-se que as diferenças entre os modelos aumentam justamente na direção em que os valores do atraso diminuem, ou seja, na direção dos menores ângulos de elevação.

Na Figura 29a observa-se que as diferenças nos ângulos de elevação acima de  $10^\circ$  são centimétricas e, para algumas configurações, até mesmo milimétricas. Para as alturas simuladas, as diferenças até  $10^\circ$  chegam a quase 25 cm apenas para uma antena receptora a 500 m de altura e  $10^\circ$  de elevação; a 300 m e  $10^\circ$ , as diferenças não chegam a 10 cm; e para alturas de 200 m ou menos, as diferenças não chegam 5 cm aos  $10^\circ$  de elevação. No entanto, salienta-se que mesmo diferenças centimétricas no atraso podem afetar a estimativa altimétrica.

Nos ângulos de elevação abaixo de  $10^\circ$  (Figura 29b) ainda são centimétricas na maioria dos ângulos. Aliás, para uma antena receptora a 10 m, as diferenças não passam de 3,5 cm de diferença. Nas alturas simuladas maiores que 10 m, as diferenças são maiores, atingindo níveis métricos para determinadas configurações de ângulo de elevação e altura de antena receptora. No horizonte esférico de uma antena receptora a 500 m de altura, a diferença chega a mais de 12 metros, por exemplo.

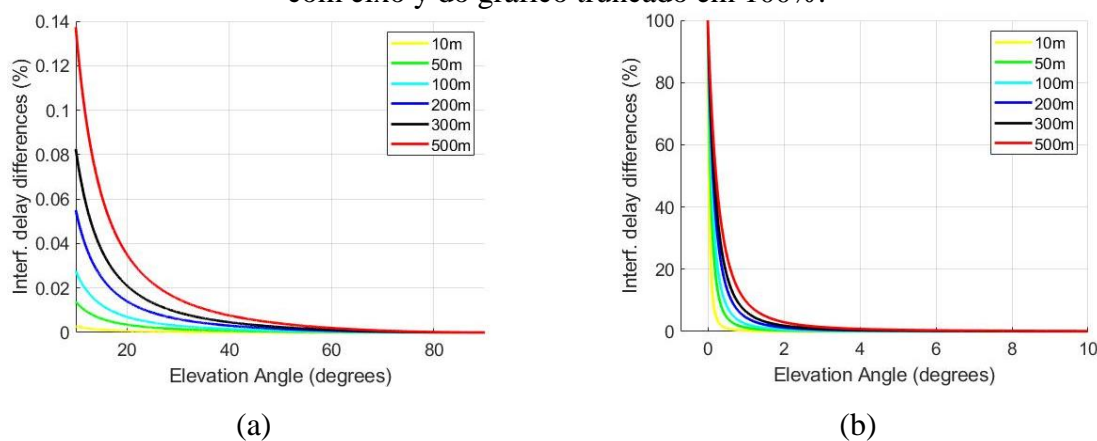
Verifica-se na Figura 29c que as diferenças crescem exponencialmente com taxas cada vez maiores, principalmente próximo do horizonte plano. Abaixo de  $2^\circ$  de elevação verifica-se o incremento mais acentuado da curva de diferenças para a maioria das alturas. Logo, em elevações baixas como essa, a modelagem da reflexão é ainda mais sensível e pequenas variações no ângulo de elevação acarretam em diferenças acentuadas. Aos 500 m, por exemplo, as diferenças vão de 2 m a  $1^\circ$  de elevação, para mais de 12 m no horizonte esférico ( $-0,7179^\circ$ ), conforme é apresentado na Figura 29b. No extremo oposto, as diferenças na região próxima a zênite são desprezíveis e exibem ruído numérico aleatório, devido à precisão limitada do computador.

Em termos percentuais (Figura 30), verifica-se que acima de  $10^\circ$ , as diferenças são menores que 0,15% do valor total do atraso esférico, mesmo para uma antena receptora a 500 m de altura. Abaixo de  $10^\circ$  até aproximadamente  $2^\circ$ , as diferenças mantêm-se abaixo de 3%,

mesmo para uma antena receptora a 500 m. Para alturas menores que 500 m, a porcentagem é ainda menor que 3% até os 2°.

Abaixo dos 2° de elevação (Figura 30b), a curva é incrementada vertiginosamente, atingindo 100% até o grau zero de elevação. Ressalta-se que o gráfico da Figura 30b está truncado em 100%, então, abaixo de 0° as diferenças ultrapassam 100%. Dessa forma, verifica-se que mesmo para uma antena receptora a 10 m de altura as diferenças entre plano e esfera são percentualmente grandes, bem como o incremento das diferenças é exponencial no horizonte plano até o horizonte esférico.

Figura 30 – Diferenças percentuais do atraso de propagação interferométrico na esfera em relação ao plano verificadas nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo y do gráfico truncado em 100%.



Fonte: o autor.

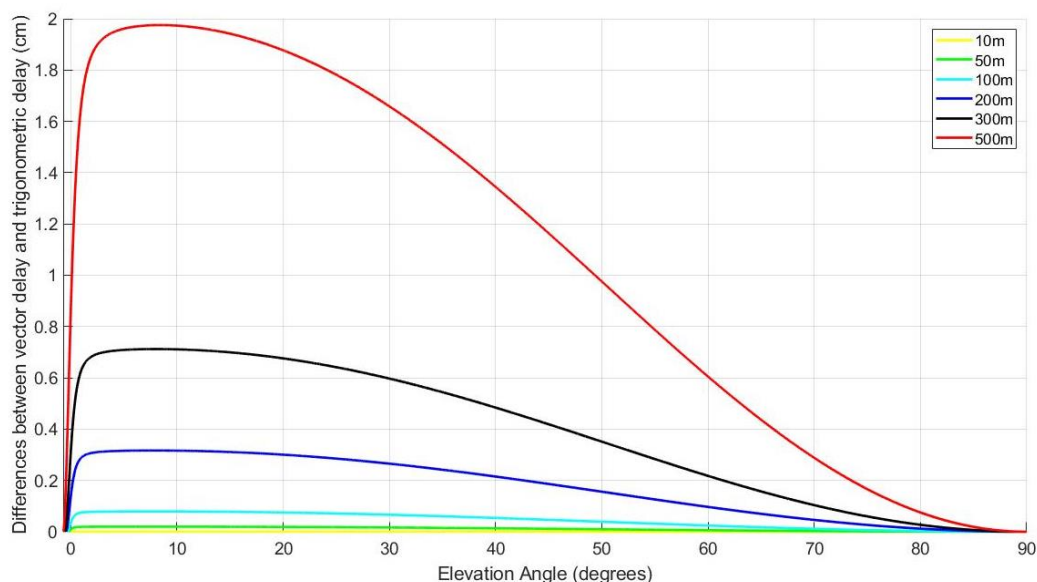
Então, observou-se que existem diferenças entre o atraso interferométrico obtido no plano e na esfera em decorrência do deslocamento posicional no ponto de reflexão causado pela curvatura terrestre. Isso é corroborado pelo fato de que as diferenças no atraso de propagação aumentam na mesma direção e proporção que as diferenças posicionais do ponto de reflexão. Muito embora o valor total do atraso de propagação seja menor no sentido dos menores ângulos de elevação.

As diferenças verificadas, em muitas configurações, são de ordem centimétrica, chegando até mesmo à ordem métrica. Ressalta-se que o crescimento de diferenças, mesmo que centimétricas, podem afetar significativamente a estimativa altimétrica principalmente quando obtida pelo pseudo-Doppler, pois este método considera a taxa de variação dos atrasos interferométricos ao longo dos ângulos de elevação. Além disso, as diferenças seguem uma taxa exponencial de variação devido ao efeito da curvatura terrestre, sobretudo nos ângulos de

elevação próximos ao horizonte plano e ao esférico, onde as variações do atraso são mais críticas e acentuadas.

O atraso de propagação interferométrico também pode ser obtido por meio de relações trigonométricas, de forma mais simples que o atraso obtido por relações vetoriais, por meio da Equação (123). Para validar o atraso interferométrico trigonométrico, realizou-se a comparação entre o atraso interferométrico trigonométrico e o atraso obtido por relações vetoriais, conforme a Equação (55), a partir do ponto de reflexão obtido pelo modelo de Fujimura *et al.* (2019). Na Figura 31 verifica-se a diferença entre as duas formas de obtenção do atraso interferométrico.

Figura 31 – Diferenças do atraso de propagação interferométrico esférico obtido pelas fórmulas vetoriais em relação às fórmulas trigonométricas, ambos seguindo a metodologia de Fujimura *et al.* (2019), verificadas nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação do horizonte esférico até zênite.



Fonte: o autor.

Nota-se na Figura 31 que há alta concordância entre ambos os atrasos de propagação, visto que as diferenças chegam a no máximo 2 cm para uma altura de antena receptora de 500 m. Para uma altura de 300 m, as diferenças máximas chegam a 8 mm. Um fato interessante é o comportamento das diferenças, as quais aumentam no sentido dos menores ângulos de elevação e são maiores quanto maior for a altura da antena receptora. Contudo, as diferenças decaem drasticamente próximo aos zero graus de elevação, tornando a ficarem zeradas nos ângulos de elevação negativos.

Apesar da diferença sistemática observada no atraso interferométrico trigonométrico, as magnitudes das diferenças são pequenas, visto que mesmo para uma altura de antena receptora

de 500 m as diferenças não atingem 2 cm. As diferenças são causadas pela suposição de total paralelismo entre as ondas direta e refletida e a distância finita do transmissor. O atraso vetorial é derivado pela suposição de distância finita do transmissor, enquanto o atraso trigonométrico supõe distância infinita do satélite. Teoricamente, aumentando a distância do transmissor, o atraso vetorial e o trigonométrico tendem a ser mais semelhantes. Para corroborar essa afirmação, verificou-se, a partir de simulações, que as diferenças entre o atraso vetorial e o trigonométrico decaem para níveis sub-milimétricos ( $10^{-4}$  m) quando a altura orbital do satélite é aumentada em 10.000 vezes (resultados não mostrados).

#### 4.2.4 Efeito na distância inclinada

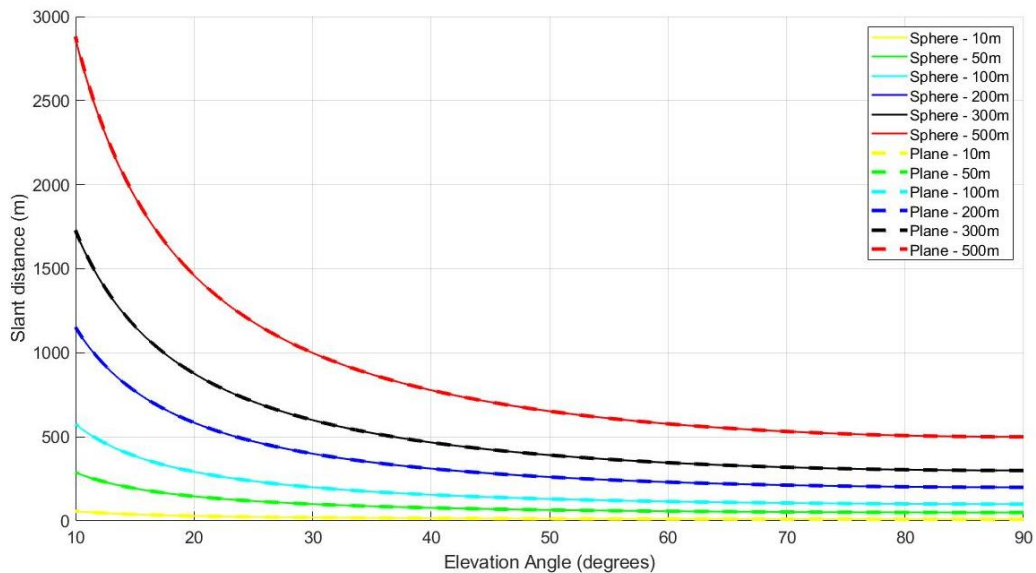
A distância inclinada,  $D_l$ , é dependente da posição do ponto de reflexão, já que consiste na distância entre a antena receptora e o ponto de reflexão, conforme apresentado na Seção 2.4.4. O deslocamento posicional do ponto de reflexão na esfera em relação ao plano causado pela curvatura da Terra pode acarretar erros na modelagem da distância inclinada. Na Figura 32 observa-se os resultados da distância inclinada para as diferentes alturas simuladas no modelo plano e no esférico.

Assim como nas variáveis analisadas anteriormente, a distância inclinada nos altos ângulos de elevação (Figura 32a) também apresenta resultados muito semelhantes entre ambos os modelos de superfície, pois as curvas de resultados de ambos os modelos se sobrepõem. No entanto, na Figura 33a observa-se que existem diferenças consideráveis entre os modelos, atingindo níveis métricos. Para uma antena receptora a 500 m e  $10^\circ$  de elevação, a diferença chega a mais de 11 m. Além disso, verifica-se na Figura 33 que as diferenças são positivas, ou seja, a distância inclinada no plano é maior que na esfera. Isso significa que a curvatura da Terra aproxima o ponto de reflexão, comparado com o plano: apesar do ponto ser distanciado (rebaixado) no eixo  $y$ , ele é aproximado no eixo  $x$ .

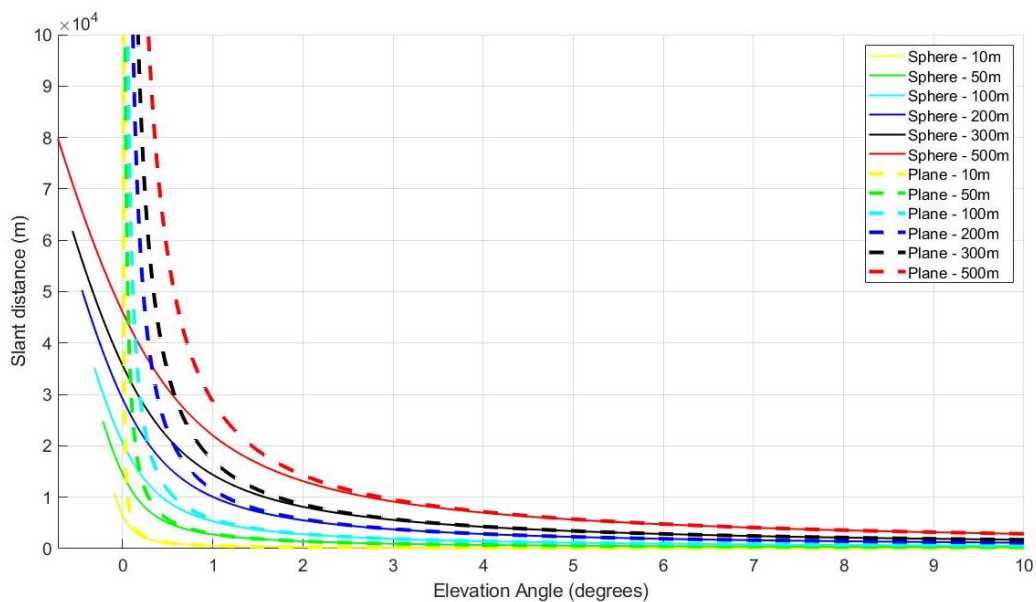
Nos ângulos de elevação abaixo de  $10^\circ$ , as diferenças entre os resultados de ambos os modelos podem ser melhor distinguidas visualmente na Figura 32b, em que se verificam comportamentos diferentes próximo do horizonte plano. Abaixo de  $3^\circ$ , verifica-se um incremento vertiginoso nos valores de distância inclinada no plano até próximo de  $0^\circ$ , atingindo valores que chegam à ordem de  $10^8$  m para uma antena receptora a 500 m de altura (Figura 33b). No horizonte plano, a distância inclinada sofre um decremento causado pela divisão por zero na Equação (32). Conforme mencionado anteriormente, na seção sobre o efeito posicional

no ponto de reflexão, o modelo plano é inválido ou não se aplica para elevação negativas, ou seja, quando  $e \leq 0$ .

Figura 32 – Distância inclinada,  $D_l$ , na esfera (linha sólida) e no plano (linha tracejada) nas alturas de antena receptora 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°, com eixo y truncado em  $10^4$  m.



(a)



(b)

Fonte: o autor.

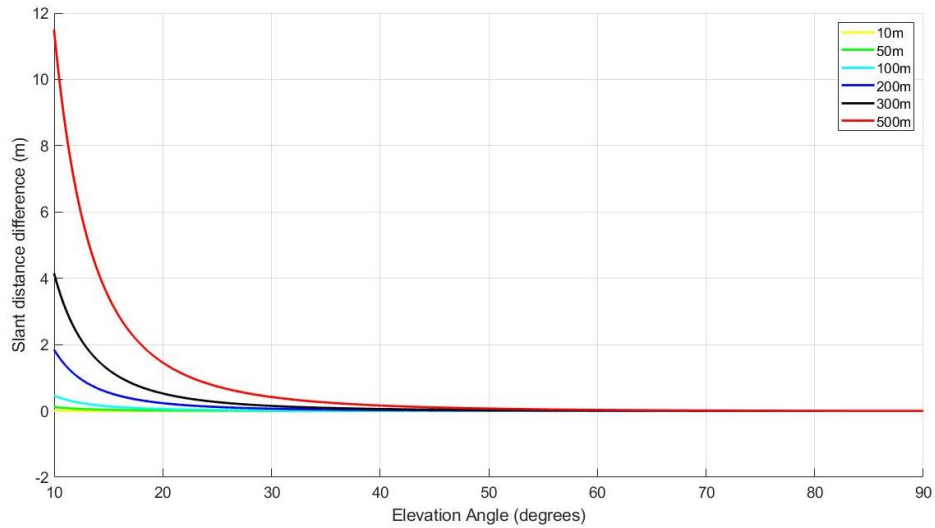
Por outro lado, a distância inclinada obtida no modelo esférico segue um comportamento mais regular que o modelo plano até o horizonte esférico, atingindo o máximo de 80.000 m no horizonte de uma antena receptora a 500 m de altura (Figura 32). Então, as

diferenças nos baixos ângulo de elevação (Figura 33b) atingem mais de 1000 m facilmente abaixo dos 3° de elevação, apresentando cenário crítico no horizonte plano (Figura 33b).

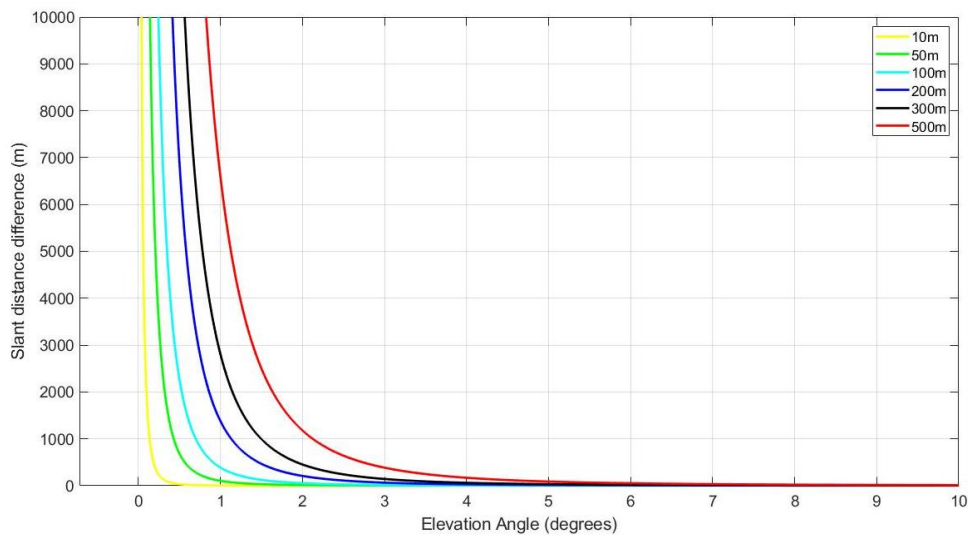
Dessa forma, verifica-se que a curvatura terrestre pode causar erros significativos na modelagem da distância inclinada quando desconsiderada. Observou-se que as diferenças entre plano e esfera atingem facilmente o nível métrico. Nos baixos ângulos de elevação as diferenças são ainda mais críticas principalmente próximo do horizonte plano, onde a distância inclinada no plano sofre um aumento acentuado enquanto na esfera a distância inclinada mantém um padrão. Além disso, abaixo do 0° de elevação os resultados no plano não são realistas.

Ressalta-se que os erros verificados na distância inclinada são sistemáticos e possuem mesmo comportamento do deslocamento do ponto de reflexão, ou seja, aumentam na direção dos menores ângulos de elevação e maiores alturas da antena receptora. Assim, verifica-se que a curvatura terrestre é um importante fator a ser considerado no cálculo da distância inclinada, por exemplo, na modelagem do erro atmosférico em refletometria.

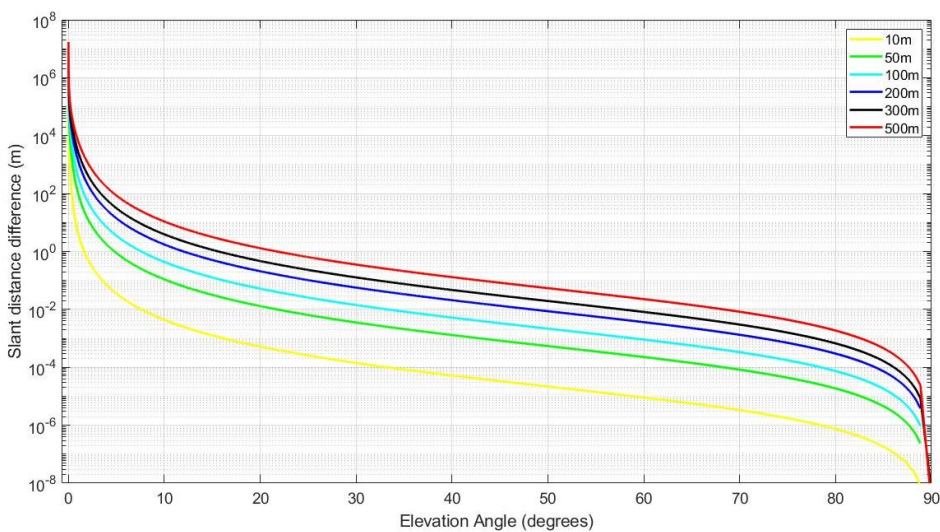
Figura 33 – Diferenças da distância inclinada na esfera em relação ao plano,  $\Delta D_l$ , verificadas nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de  $10^\circ$  a  $90^\circ$ ; (b) do horizonte esférico a  $10^\circ$ , com eixo y truncado em  $10^4$  m; (c) do horizonte esférico até zênite com escala logarítmica.



(a)



(b)



(c)

Fonte: o autor.



#### 4.2.5 Efeito no ângulo de elevação da reflexão

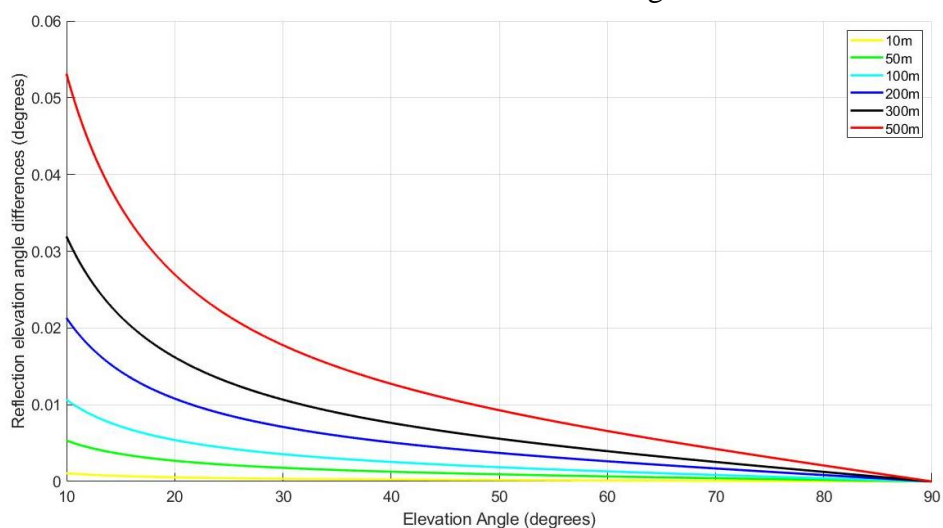
Devido a mudança da geometria da reflexão causada pelo deslocamento posicional do ponto de reflexão, o ângulo de elevação da reflexão na esfera pode ser diferente no plano (negativo do ângulo de elevação direto) (Figura 12). Na Figura 34 são mostradas as diferenças entre o ângulo de elevação da reflexão no plano e na esfera que corroboram a afirmação acima, denotando o mesmo efeito sistemático verificado no deslocamento do ponto de reflexão devido à curvatura terrestre. Salienta-se que as diferenças entre o ângulo de elevação da reflexão na esfera e no plano foram obtidas pela Equação (114). Nesse sentido, destaca-se que as diferenças são positivas, evidenciando que o ângulo de elevação da reflexão na esfera é maior que no plano.

Nos ângulos acima de  $10^\circ$  (Figura 34a), as diferenças entre os ângulos chegam a mais de  $0,05^\circ$  apenas para uma antena receptora a 500 m de altura. Para uma antena receptora a 100 m, as diferenças chegam a valores menores que  $0,01^\circ$ . Abaixo de  $10^\circ$  as diferenças atingem diferenças que atingem a ordem de  $10^{-2}$  graus (Figura 34c). Mesmo para uma antena receptora a 10 m de altura, a diferença atinge  $0,1^\circ$  a  $0^\circ$  de elevação (Figura 34b). Para alturas maiores, as diferenças aumentam, como aos 500 m que as diferenças chegam a mais de  $0,8^\circ$  no horizonte plano.

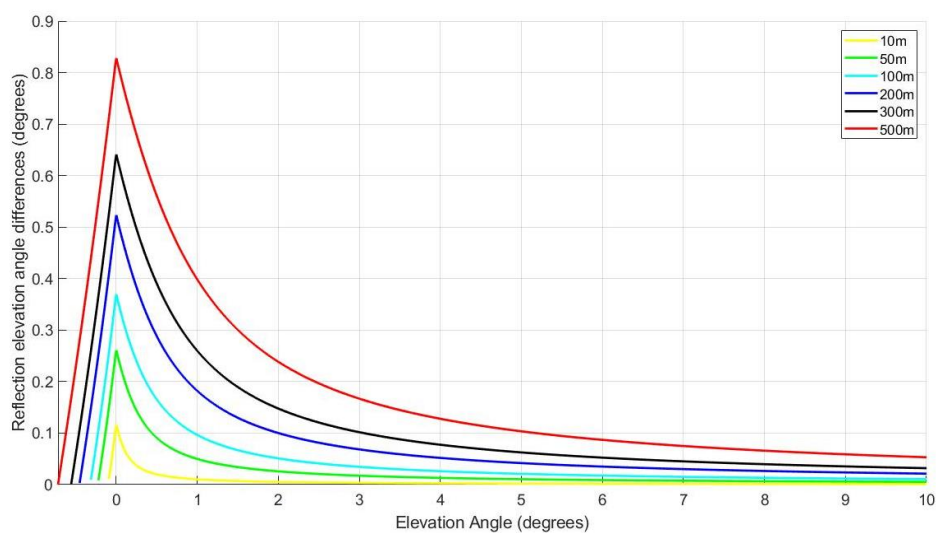
No entanto, abaixo de  $0^\circ$  ocorre uma inversão do sentido das diferenças. Observa-se na Figura 34b e Figura 34c que até  $0^\circ$  de elevação, as diferenças somente aumentam. Abaixo de  $0^\circ$ , nos ângulos de elevação negativos, as diferenças tornam a reduzir e tendem a zero no horizonte esférico. Logo, abaixo de  $0^\circ$ , o ângulo de elevação da reflexão no plano tende a ser novamente igual ao ângulo de elevação da reflexão na esfera, em que a igualdade ocorre no horizonte esférico.

Portanto, a curvatura terrestre afeta o ângulo de elevação da reflexão. Considerando-se que o ângulo de elevação da reflexão no plano é igual a imagem do ângulo de elevação direto, pode-se afirmar também que o ângulo de elevação da reflexão na esfera não possui uma relação trivial com o ângulo de elevação direto como ocorre no plano, apresentando diferenças não desprezíveis entre ambos os ângulos.

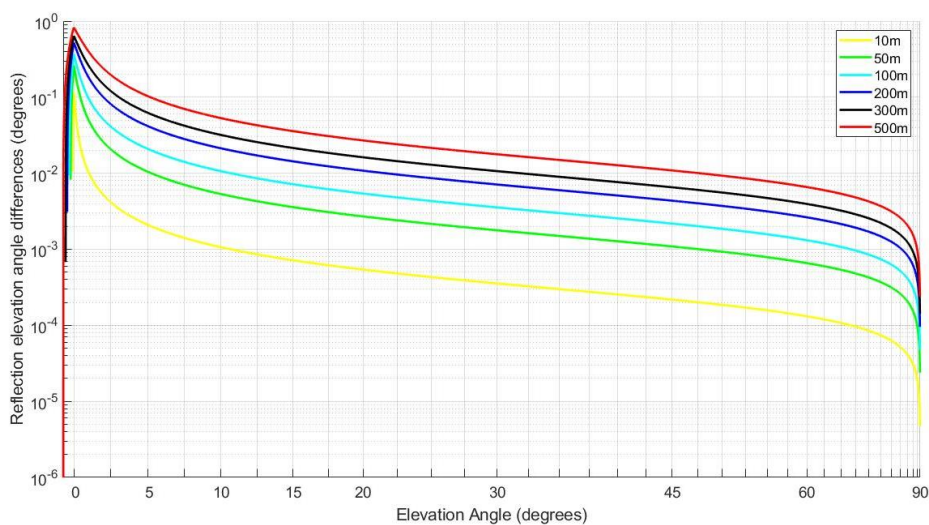
Figura 34 – Diferenças do ângulo de elevação refletido na esfera em relação ao plano, verificada nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica.



(a)



(b)

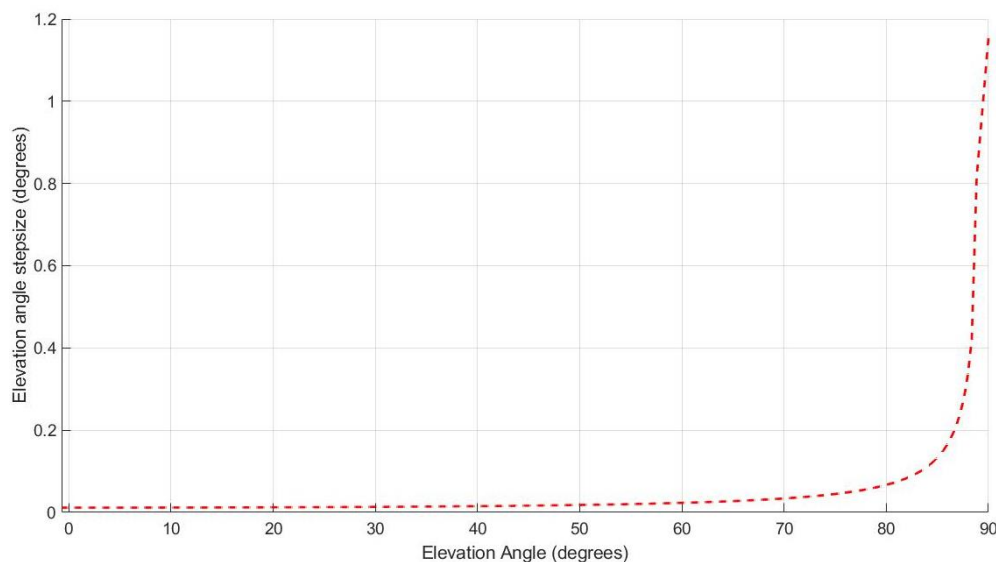


(c)

### 4.3 Correção altimétrica para a curvatura terrestre

Nessa seção serão apresentados os resultados referentes as simulações para as correções altimétricas teóricas para a curvatura terrestre de tipo A e tipo B (Seção 3.5.3). As correções, apresentadas nas seções abaixo, foram simuladas para as alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m. Já os ângulos de elevação utilizados para as simulações foram contidos no intervalo de  $90^\circ$  (zênite) até o horizonte esférico de cada altura. Foram utilizadas um total de 5000 elevações distribuídas ao longo deste intervalo, com passos irregulares entre os ângulos. Os passos foram calculados pela função *get\_elev\_regular\_in\_sine.m*, disponibilizada em Nievinski e Larson (2014a), que calcula os ângulos de elevação baseado na recíproca do seno destes ângulos, ou seja, o tamanho dos passos entre as elevações variam de acordo com o seno do ângulo. Então, quanto menor o ângulo de elevação, menor será o passo (Figura 35). A função foi utilizada devido à sensibilidade das variações pelo efeito da curvatura terrestre, que é maior quanto menor o ângulo de elevação. Os passos entre os ângulos de elevação são de suma importância, pois definem o espaçamento entre cada ponto no cálculo da correção altimétrica pela derivada numérica.

Figura 35 – Tamanho dos passos irregulares entre os ângulos de elevação do horizonte esférico até zênite ( $90^\circ$ ) calculado pela função *get\_elev\_regular\_in\_sine.m*.



Fonte: o autor.

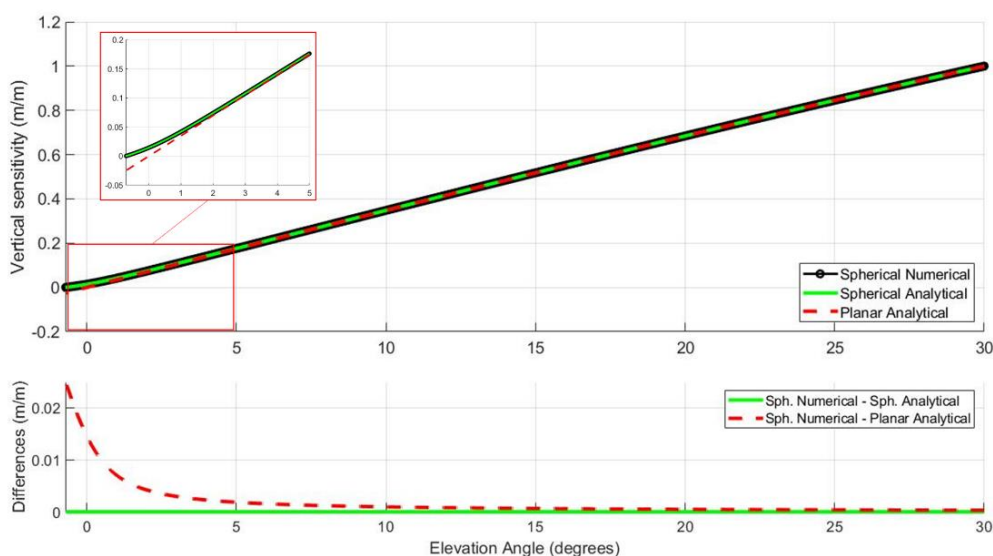
### 4.3.1 Simulação de ponta-a-ponta

As sensibilidades verticais esférica analítica  $K_Z^S$  e esférica numérica  $K_Z^{Sn}$  foram comparadas a fim de averiguar a concordância entre as duas. Investigou-se também a capacidade das sensibilidades verticais em estimar a variações de altura dadas variações do atraso de propagação, ou seja, realizar o caminho inverso da Equação (92), sendo então  $\Delta H = \Delta D_i^S / K_Z^S$ .

As simulações foram realizadas considerando um cenário de variação constante de altura  $\Delta H$  de 10 m para uma altura de referência  $H$  de 500 m. Ressalta-se que, para validar a sensibilidade vertical no cenário esférico, o problema direto da Equação (92) é o atraso de propagação calculado na esfera pelo modelo de Fujimura *et al.* (2019), apresentado na Seção 3.3.1.

Abaixo são apresentados então os resultados, em unidade m/m, da sensibilidade vertical esférica numérica  $K_Z^{Sn}$ , a sensibilidade vertical esférica analítica ( $K_Z^S = 2 \sin g$ ) e também a sensibilidade vertical plana analítica ( $K_Z^P = 2 \sin e$ ) (Figura 36). Salienta-se que no gráfico da Figura 36 foram mostrados apenas os resultados abaixo do  $30^\circ$ , ou seja, do horizonte esférico da altura de referência até  $30^\circ$ . Utilizou-se este intervalo de ângulos de elevação porque acima de  $30^\circ$  as diferenças são pequenas e não possibilita a distinção visual entre as três sensibilidades verticais.

Figura 36 – Sensibilidades verticais, em m/m, numérica esférica, esférica analítica e plana analítica (gráfico superior). Diferenças das sensibilidades esférica analítica e a plana analítica com relação à sensibilidade vertical esférica numérica (gráfico inferior).



Fonte: o autor.

As três sensibilidades verticais são bastante similares e a distinção visual só ocorre nos ângulos de elevação abaixo dos  $3^\circ$ , conforme o gráfico superior da Figura 36. É possível notar que a sensibilidade vertical plana analítica destoa das demais, enquanto a sensibilidade esférica numérica e a esférica analítica mantêm-se com o mesmo comportamento. Ressalta-se que a sensibilidade vertical é total a zênite ( $K_z = 1$ ) e reduz a zero no horizonte da respectiva superfície e, por isso, na superfície esférica a altura da antena receptora também decresce a zero. Devido as diferenças de horizonte entre as superfícies, a sensibilidade plana e esférica diferenciam-se mais quanto mais próximo do horizonte esférico, o qual localiza-se abaixo do horizonte plano.

Além disso, cabe salientar que a sensibilidade vertical esférica analítica pode ser também denominada como sensibilidade radial, devido à sua natureza quasigeocêntrica. Nesse sentido, a sensibilidade vertical na esfera tem como complemento a sensibilidade do atraso interferométrico com relação ao comprimento de arco entre a antena e o ponto de reflexão, pois tal coordenada é ortogonal a direção radial da esfera osculante.

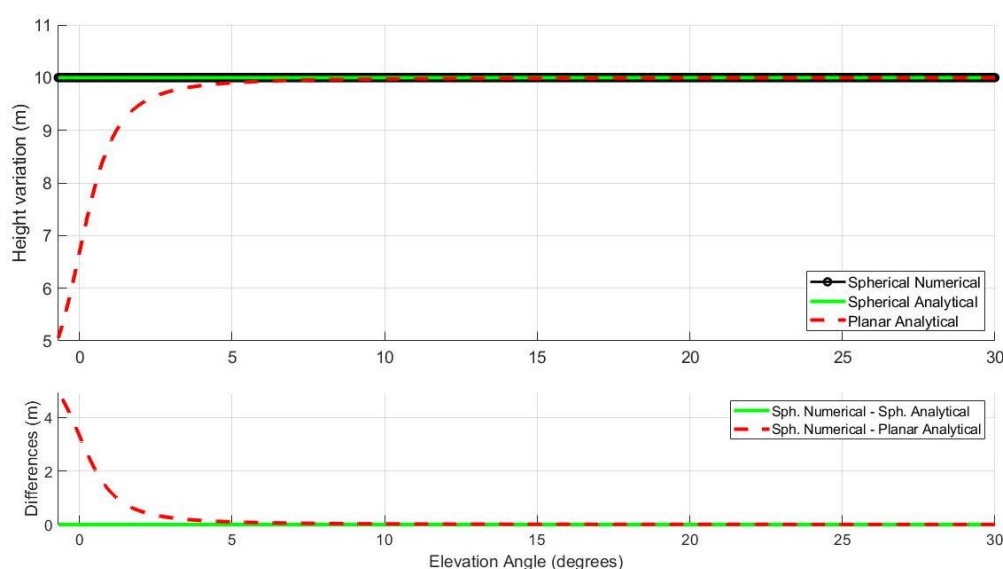
A semelhança entre as três sensibilidades nos altos ângulos de elevação pode ser verificada nas diferenças apresentadas no gráfico inferior da Figura 36, em que as diferenças entre a sensibilidade esférica numérica e a plana é pequena acima de  $10^\circ$  e o incremento das diferenças é lento. Abaixo de  $10^\circ$  ocorre uma diferenciação acentuada entre as duas sensibilidades. A diferença aumenta a taxas cada vez maiores quanto mais próximo do horizonte esférico, onde ocorre o pico das diferenças. Além disso, nota-se que as sensibilidades esféricas numérica e analítica tendem a zero, enquanto a sensibilidade plana tende a valores negativos, devido aos ângulos negativos em que ocorre o horizonte esférico. Por outro lado, verifica-se que as diferenças entre a sensibilidade vertical esférica numérica e a sensibilidade vertical esférica analítica mantêm-se zero ao longo de todo o gráfico, denotando que ambas as sensibilidades verticais são iguais.

Além disso, a validação é corroborada pela estimativa da variação de altura  $\Delta H$  de 10 m imposta nas simulações, que é mostrada na Figura 37. Observa-se que a estimativa da variação obtida pela sensibilidade esférica analítica é praticamente igual à obtida pela esférica numérica, em que ambas estimam corretamente a variação constante de 10 m ao longo dos ângulos de elevação. Esta é a correção altimétrica de tipo I, aplicável apenas quando o sensor consegue fornecer medidas de atraso interferométrico.

Por outro lado, a variação estimada pela sensibilidade plana não é constante, apresentando valores abaixo da variação constante imposta inicialmente, ou seja, a sensibilidade vertical plana analítica subestima a estimativa altimétrica. A  $0^\circ$  de elevação, a

estimativa da variação pela sensibilidade plana analítica é de quase 5 metros, ou seja, metade da variação inicial de 10 m. Logo, a inversão da variação altimétrica destoou consideravelmente da variação de altura definida inicialmente, principalmente nos ângulos de elevação muito baixos.

Figura 37 – Estimativa da variação de altura de 10 m em torno da altura média de 500 m a partir das sensibilidades verticais, esférica analítica e plana analítica (gráfico superior) as diferenças das estimativas da variação de altura pelas sensibilidades esférica analítica e a plana analítica com relação as estimativas pela sensibilidade vertical esférica numérica (gráfico inferior).



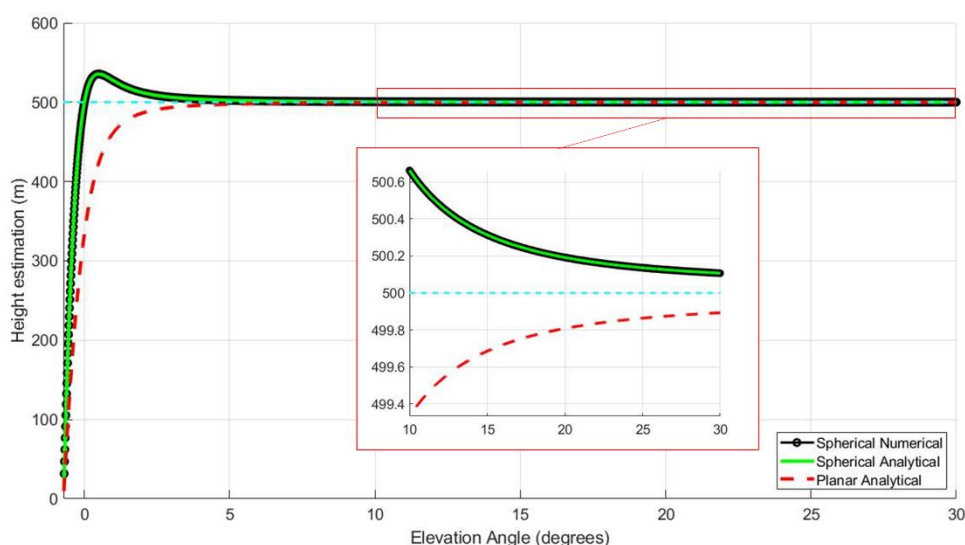
Fonte: o autor

As estimativas altimétricas obtidas via pseudo-Doppler a partir das sensibilidades verticais esférica numérica e esférica analítica também concordam entre si, conforme pode ser visto na Figura 38. No entanto, destaca-se o fato de que as estimativas altimétricas obtidas pelo pseudo-Doppler não concordam com a altura verdadeira de 500 m ao longo dos ângulos de elevação. Observa-se que a altimetria aparente desvia da altura verdadeira, chegando a diferenças métricas e apresentando um comportamento anômalo entre horizonte plano e o horizonte esférico. No horizonte plano, porém, o desvio é nulo.

Da mesma forma, a estimativa obtida pelo pseudo-Doppler cruzado também desvia da altura verdadeira. O erro altimétrico neste caso tem sempre o mesmo sinal negativo, portanto a altura aparente pelo pseudo-Doppler cruzado sempre subestima a altura verdadeira.

Todas as alturas aparentes diferenciam-se da altura verdadeira já aos 90° de elevação, com diferenças maiores que 1 cm, denotando que a relação entre a altura aparente obtida nas inversões pelo pseudo-Doppler não possuem relação trivial com a altura geométrica verdadeira.

Figura 38 – Estimativas altimétricas obtidas pelas sensibilidades verticais esférica numérica, esférica analítica e plana analítica a partir do atraso de propagação esférico para a altura verdadeira de 500 m.



Fonte: o autor.

Dessa forma, verifica-se que a sensibilidade vertical esférica é capaz de estimar variações de altura a partir das variações no atraso de propagação. Por outro lado, a estimativa altimétrica total, obtida pela altura aparente, não retorna a altura verdadeira, principalmente para configurações de ângulos de elevação baixos, próximos ao horizonte esférico. Portanto, a estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler na esfera deve ser corrigida, conforme demonstrado nas próximas seções.

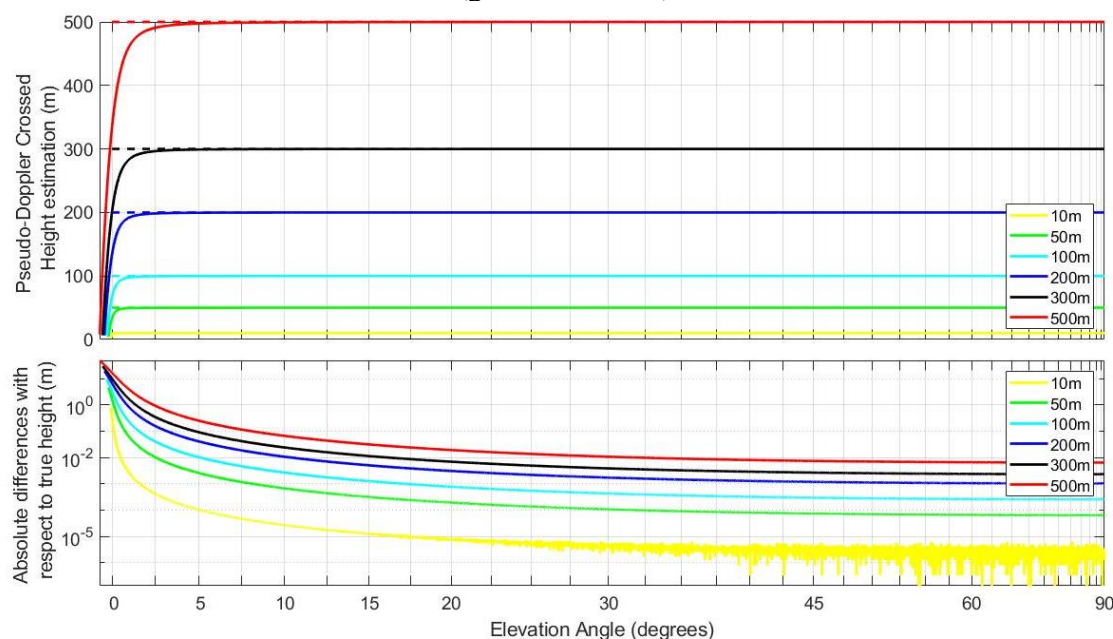
#### 4.3.2 Correção altimétrica do tipo A

Conforme apresentado na Seção 3.5.3, a correção altimétrica do tipo A para a curvatura terrestre é utilizada para as inversões realizadas pelo pseudo-Doppler cruzado (Seção 3.4.4). Este é o método mais comum de inversão, utilizado quando não há conhecimento do ângulo rasante *a priori*, somente o ângulo de elevação. A estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler cruzado, sem quaisquer correções, retorna uma altura aparente no plano, já que considera a sensibilidade vertical plana,  $K_Z^P$ , e atraso interferométrico esférico,  $D_i^S$ , para estimar tanto a altura aparente empírica quanto a nominal.

Sabendo-se que ocorrem diferenciações relevantes entre as variáveis da reflexão obtidas nos modelos de superfície plano e esférico, a estimativa altimétrica realizada a partir do pseudo-Doppler cruzado,  $H_{fi}^x$ , poderá estar enviesada em relação à altura verdadeira. Conforme pode

ser visualizado no gráfico superior da Figura 39, a altura aparente  $H_{af'}^x$  (linha sólida) subestima a altura verdadeira  $H$  (linha pontilhada contínua). Embora a distinção visual entre  $H_{af'}^x$  e  $H$  no gráfico superior da Figura 39 se dê somente nos baixos ângulos de elevação, as diferenças ocorrem desde o zênite. A partir do gráfico inferior da Figura 39, observa-se que as diferenças aumentam quanto menor o ângulo de elevação e maior a altura da antena receptora, com cenários mais críticos nos horizontes esféricos de cada altura. Nesse sentido, nota-se que nos ângulos baixos, próximo do horizonte plano, as diferenças são acentuadas, explicando a razão pela qual a distinção visual entre  $H_{af'}^x$  e  $H$  só se dá nos baixos ângulos do gráfico superior da Figura 39. Já nos ângulos de elevação altos, as diferenças entre a altura estimada e a altura real são menores, mas não sendo necessariamente desprezíveis. Para alguns casos, o viés altimétrico chega níveis centimétricos desde os  $90^\circ$  e aumenta na direção dos menores ângulos.

Figura 39 – Estimativas altimétricas pelo pseudo-Doppler cruzado (linha sólida) e as respectivas alturas verdadeiras (linha tracejada) (gráfico superior). Diferenças absolutas em escala logarítmica entre as estimativas altimétricas e as respectivas alturas verdadeiras (gráfico inferior)



Fonte: o autor.

Dessa forma, o efeito sistemático da curvatura terrestre verificado no deslocamento posicional no ponto de reflexão (Seção 4.2.1) propaga erros na estimativa altimétrica de forma que a altimetria é subestimada com relação à altura real. As diferenças entre a estimativa e altura real aumentam no mesmo sentido do distanciamento do ponto de reflexão, ou seja, com o aumento da altura da antena receptora e da redução do ângulo de elevação do satélite.

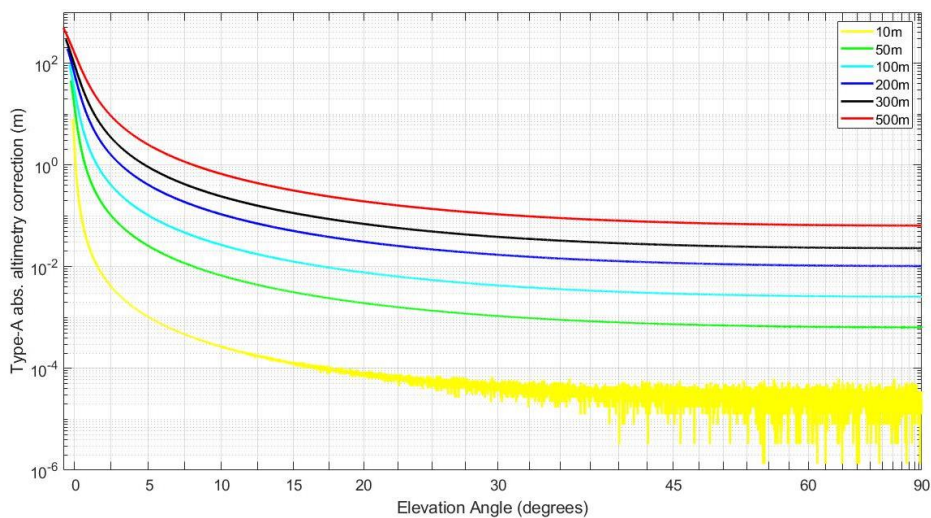
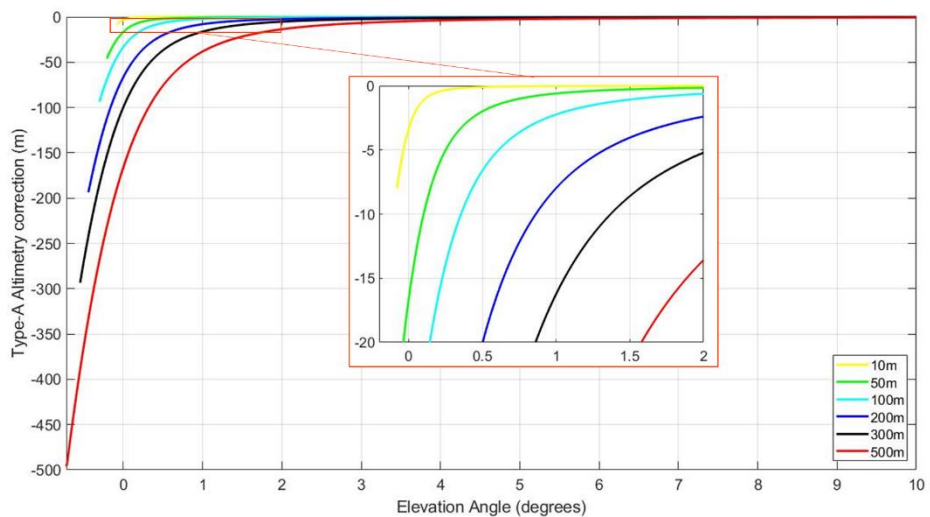
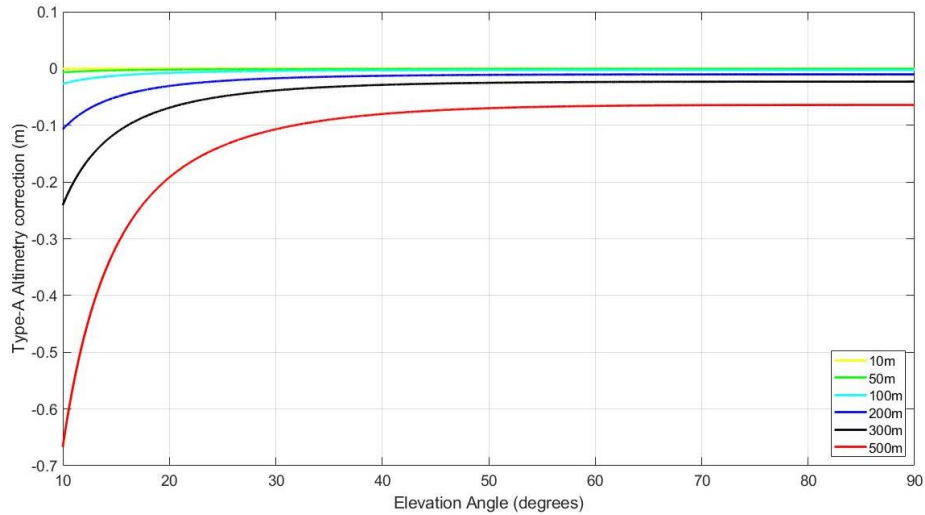


Assim, em decorrência dos desvios altimétricos sistemáticos dados pelo efeito da curvatura terrestre na estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler cruzado (Figura 39), foram calculadas as correções altimétricas do tipo A, dada pela Equação (109), de forma a ser subtraída da altura aparente na Equação (105) para recuperar a altura verdadeira. Então, tem-se que a correção do tipo A é negativa (Figura 40), tendo em vista que a altura estimada pelo pseudo-Doppler cruzado é subestimada.

Conforme Pugh e Woodworth (2014), é desejável que medições do nível do mar apresentem acurácia melhor que 1 cm. Portanto, serão consideradas significativas as correções altimétricas maiores que 1 cm em termos absolutos. Nesse sentido, ressalta-se que, embora a correção do tipo A seja negativa, os valores na discussão serão tratados em termos absolutos. Assim, verifica-se na Figura 40a que nos altos ângulos de elevação, as correções para alturas de até 50 m são desprezíveis, pois não ultrapassam 1 cm de correção altimétrica até os 10° de elevação. Para 100 m de altura, as correções são desprezíveis também nos ângulos altos, mas ultrapassam 1 cm já aos 17° de elevação, chegando a 2,6 cm de correção aos 10°.

Já aos 200 m de altura, mesmo aos 90° de elevação (zênite) as correções ultrapassam 1 cm. Este é um fato interessante, pois a zênite o ponto de reflexão ocorre totalmente alinhado à antena receptora e, portanto, é onde ocorre o menor impacto da curvatura terrestre na geometria da reflexão. Exatamente no zênite, o atraso é simplesmente o dobro da altura ( $D_i = 2H$ ), tanto para a superfície plana quanto para a esférica. Desta forma, embora à zênite a correção do atraso interferométrico  $\Delta D_i$  seja zero, destaca-se que a correção altimétrica do tipo A à zênite não é. Isso é devido à definição altimétrica pela taxa de variação do atraso com relação à sensibilidade vertical, consoante a Equação (109).

Figura 40 – Correção altimétrica do tipo A para curvatura terrestre nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica e valores absolutos.



Fonte: o autor.

Nas alturas de antena receptora simuladas acima de 200 m, verificam-se correções altimétricas ainda maiores aos 90° de elevação. Aos 300 m, a correção necessária é de 2,3 cm e, aos 500 m, é de -6,4 cm (Tabela 15). Já aos 300 m e 10° de elevação, a correção altimétrica chega aos 24 cm e, aos 500 m e 10°, a correção atinge quase 65 cm. Logo, verifica-se que acima de 200 m para qualquer ângulo de elevação a correção torna-se ainda mais necessária e, quanto menor o ângulo de elevação, maiores serão as correções.

Tabela 15 – Correção altimétrica do tipo A aos 90° de elevação (zênite).

<b>Altura da antena receptora (m)</b>	<b>Correção altimétrica do tipo A no zênite (cm)</b>
10	-0,00171
50	-0,06555
100	-0,25708
200	-1,02915
300	-2,30885
500	-6,42514

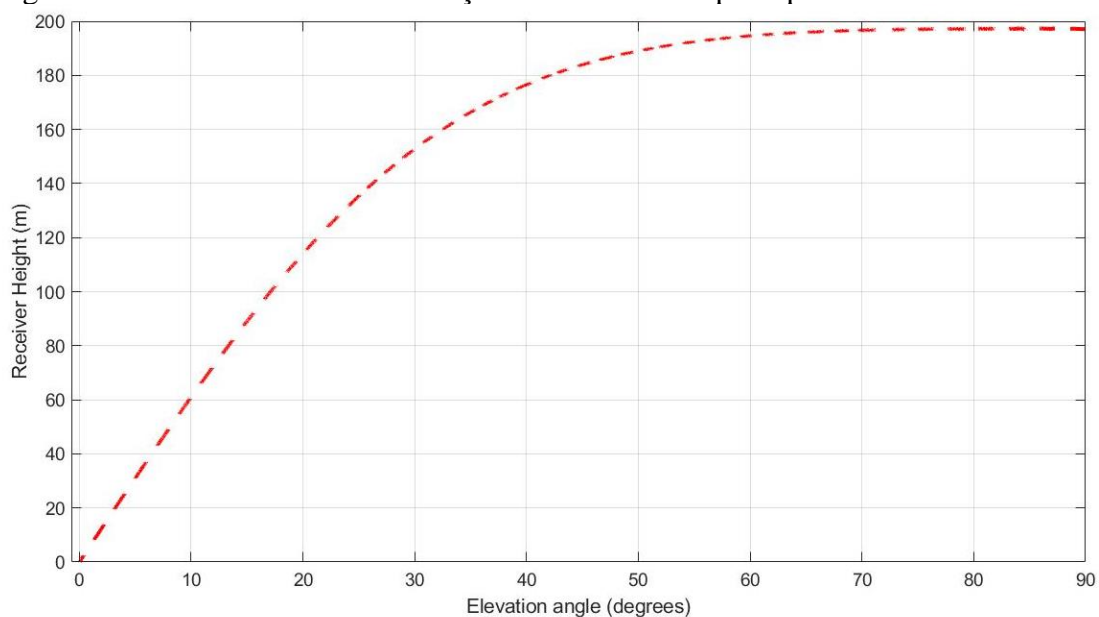
Fonte: o autor.

As correções aumentam exponencialmente no sentido negativo conforme ocorre a redução do ângulo de elevação em direção ao horizonte esférico. Na Figura 40b observa-se que o cenário para as correções é ainda mais crítico, principalmente próximo do horizonte plano, pois a correção aumenta exponencialmente e torna-se necessária até mesmo para baixas alturas de antena receptora (Figura 40c). Para uma antena receptora a 50 m, a correção é necessária a partir de 8° de elevação; para 10 m, a correção é necessária a 1,5° de elevação.

Além disso, nota-se na Figura 40b que as correções aumentam rapidamente, no sentido de valores negativos, próximo do horizonte plano, atingindo níveis métricos para todas as alturas simuladas. É interessante notar que as correções máximas, no horizonte esférico, tendem ao valor da altura da antena receptora, ou seja, para uma antena receptora a 500 m de altura, a correção tende ao valor de -500 m no horizonte esférico desta altura. Esse comportamento é esperado, conforme observa-se na Figura 39 em que a altura aparente estimada pela inversão tende a zero no horizonte esférico da respectiva altura.

Na Figura 41 são evidenciados os limiares de ângulos de elevação e altura da antena receptora para os quais a correção altimétrica do tipo A é de 1 cm. Neste caso, foram simuladas alturas de antena receptora de 1 m a 500 m, com passos de 1 m. No entanto, o eixo y do gráfico está truncado na altura de 200 m, pois acima dessa altura, as correções altimétricas são maiores que 1 cm independente do ângulo de elevação.

Figura 41 – Limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo A para a curvatura terrestre.



Fonte: o autor.

Verifica-se então, a partir da Figura 41, que a correção altimétrica é necessária mesmo para menor altura simulada quando a reflexão ocorre próximo ao horizonte plano. Logo, nos ângulos abaixo do horizonte plano, todas as alturas simuladas necessitam de correções maiores que 1 cm. Salienta-se que abaixo da linha vermelha, as correções são menores que 1 cm, onde a correção não é necessária.

Além disso, nota-se que quanto maior a altura da antena receptora, maior será o ângulo de elevação em que se necessitará de correção e, portanto, maior será o espectro de elevações para a correção altimétrica. Essa relação pode ser verificada também na tabela abaixo, na qual são destacadas algumas configurações de altura de antena receptora e ângulo de elevação para o limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo A.

Nesse sentido, verifica-se na Tabela 16 que para uma antena receptora a 10 m de altura, será necessário corrigir o efeito altimétrico em ângulos de elevação abaixo de  $1,6^\circ$ . Já para uma antena receptora a 30 m, correções são necessárias em elevações abaixo  $4,8^\circ$ . E para uma antena receptora a 120 m, a correção é necessária abaixo dos  $21,3^\circ$  de elevação.

Tabela 16 – Configurações de altura da antena receptora e ângulo de elevação para o limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo A.

Altura da antena receptora (m)	Ângulo de elevação (graus)
05	0,8
10	1,6
20	3,2
30	4,8
60	9,9
90	15,0
100	17,1
120	21,3
160	32,6
180	42,1
190	51,7

Fonte: o autor

Deve-se notar também que, nas baixas alturas de antena receptora, a variação de ângulo mínimo para a correção de 1 cm não é tão acentuada entre as diferentes alturas, mas a variação aumenta conforme o incremento da altura da antena receptora. Por exemplo, observa-se que entre 20 m e 60 m, o ângulo de elevação mínimo para a correção altimétrica difere em apenas 6,7° em 40 m. Entre 120 m e 160 m, a diferença entre as elevações mínimas já é de 11,3° entre os mesmos 40 m de diferença de altura de antena receptora. Já entre 190 m e 200 m, a diferença entre as elevações mínimas é de 38,3° em apenas 10 m. Então, denota-se que a variação do ângulo mínimo para o limiar de correção de 1 cm entre as diferentes alturas será maior quanto mais próximo de 200 m for a altura da antena receptora.

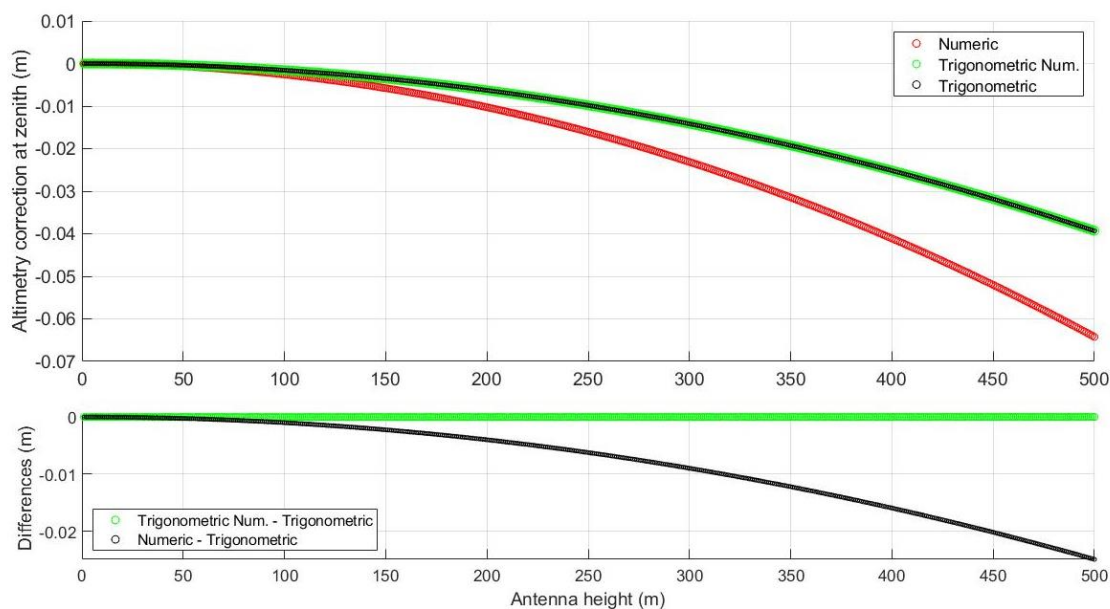
Ressalta-se que em GNSS-R o rastreamento de satélites em ângulos de elevação baixos, abaixo de 30°, ocorre com mais frequência que ângulos altos (SEMMLING *et al.*, 2016), inclusive com eventual rastreamento de ângulos negativos (COLLETT *et al.*, 2020). Isto é válido principalmente para estimativas altimétricas pela observável SNR, em que ângulos baixos são priorizados devido a redução do efeito do multicaminho com o aumento do ângulo de elevação (LÖFGREN; HAAS, 2014), conforme detalhado na Seção 2.2.1. Além disso, não é incomum plataformas terrestres GNSS-R localizarem-se em estruturas a dezenas ou centenas de metros de altura em relação à superfície refletora (GEREMIA-NIEVINSKI *et al.*, 2020), como em faróis (ROUSSEL *et al.*, 2015) e falésias (WILLIAMS; NIEVINSKI, 2017). Geremia-Nievinski, Makrakis e Tabibi (2020) mostram que, em trabalhos de medição do nível do mar por GNSS-R, comumente utilizam-se ângulos de elevação de 1° e 0,5°, assim como antenas receptoras a alturas maiores de 60 m. Portanto, constata-se que a correção para a curvatura

terrestre do tipo A não é desprezível na refletometria GNSS e deve ser considerada na estimativa altimétrica realizada pelo pseudo-Doppler cruzado.

#### 4.3.2.1 Avaliação das correções altimétricas do tipo A para distância infinita ao transmissor

Cabe aqui alertar ao leitor acerca das implementações da correção altimétrica do tipo A para a curvatura terrestre supondo transmissor a distância infinita,  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  (Seção 3.6.3). As implementações de  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  trigonométrica ( $\Delta H_{f'}^{x\infty t}$ ) e numérica trigonométrica ( $\Delta H_{f'}^{x\infty n}$ ) apresentam diferenças entre si com média zero, sendo, portanto, equivalentes (Figura 42). A correção  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  foi modelada a fim de simplificar a correção altimétrica do tipo A,  $\Delta H^x$ , demonstrada na seção anterior, cuja implementação é completamente numérica. No entanto, a correção altimétrica do tipo A para distância infinita,  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  não equivale totalmente a correção do tipo A para distância finita. Na Figura 42 são mostradas as três correções altimétricas no zênite ( $90^\circ$ ), em que se observa que as correções  $\Delta H_{f'}^{x\infty n}$  (círculos verdes) e  $\Delta H_{f'}^{x\infty t}$  (círculos pretos) apresentam valores praticamente idênticos. Ambas as implementações de  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  são próximas a correção do tipo A para distância finita (círculos vermelhos) para as alturas baixas, principalmente abaixo de 50 m. Porém, as correções  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  e  $\Delta H^x$  diferenciam-se mais quanto maior a altura da antena receptora. À zênite, a diferença  $\Delta H^x - \Delta H_{f'}^{x\infty t}$  é menor que 1 cm até altura de 315 m, enquanto que a diferença  $\Delta H_{f'}^{x\infty n} - \Delta H_{f'}^{x\infty t}$  permanece menor que  $10^{-5}$  m até mesmo à altura de 500 m.

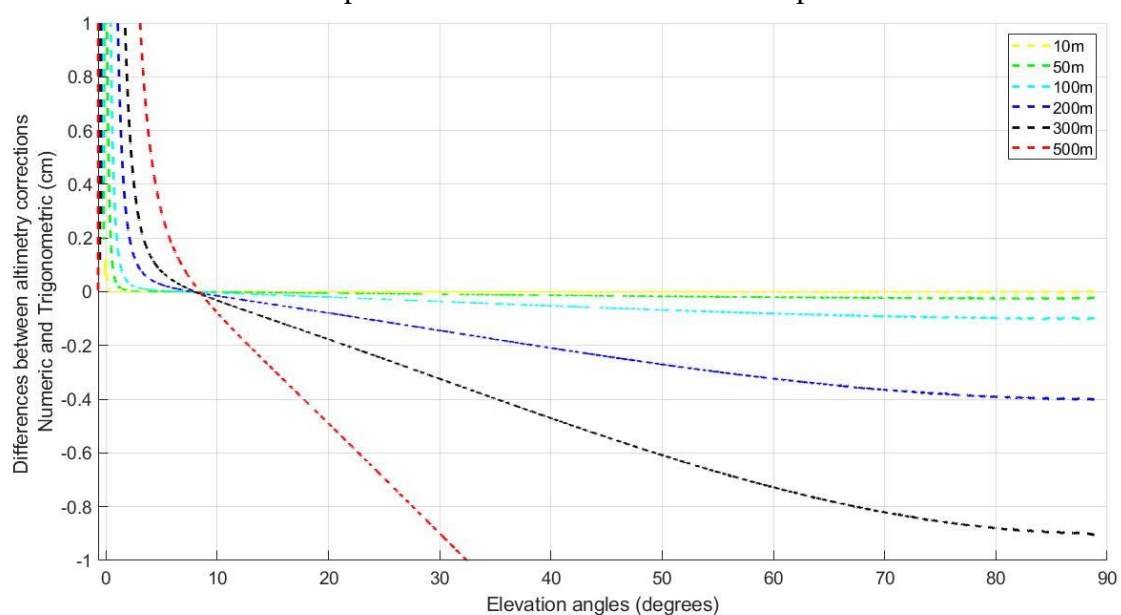
Figura 42 – Correção altimétrica zenital do tipo A (numérica para distância finita bem como trigonométrica numérica e trigonométrica para distância infinita) para alturas de zero a 500 m e as respectivas diferenças entre a correções trigonométrica numérica e trigonométrica as correções numérica e trigonométrica.



Fonte: o autor.

Na Figura 43 verifica-se que nos ângulos de elevação entre  $10^\circ$  e  $90^\circ$  as diferenças entre a correção trigonométrica e a correção do tipo A são menores que 1 cm para as antenas receptoras até 300 m. Porém, as diferenças ultrapassam 1 cm para todas as alturas simuladas acima de 10 m quando a correção é próxima do horizonte plano, conforme pode ser verificado na Tabela 17 em que o limiar de 1 cm é atingido somente em elevações muito próximas a zero. A exceção, na Tabela 17, é a altura de 500 m na qual se verifica que o limiar é atingido já aos  $90^\circ$  de elevação. Cabe salientar que a as diferenças  $\Delta H^x - \Delta H_{f'}^{x^{oot}}$  apresentam comportamento peculiar tal que as diferenças são maiores no zênite e tendem a reduzir na direção de ângulos menores e, próximo do horizonte plano, as diferenças tornam a aumentar, conforme é apresentado na Figura 43. Nesse sentido, considerando-se alturas maiores que 315 m, em que as diferenças são maiores que 1 cm já no zênite, tem-se que alguns intervalos de elevação entre o zênite o horizonte plano apresentam diferenças entre as correções menores que 1 cm e que a correção trigonométrica poderia ser aplicada.

Figura 43 – Diferenças entre as correções altimétricas do tipo A (numérica para distância finita e trigonométrica para distância infinita) nos ângulos de elevação do horizonte esférico a zênite para diversas alturas de antena receptora.



Fonte: o autor.

Tabela 17 – Limites para aplicação da correção altimétrica do tipo A para transmissor a distância infinita.

Altura da antena receptora (m)	Ângulo de elevação (graus)
10	--
50	0,06
100	0,4
200	1,0
300	1,7
500	90

Fonte: o autor.

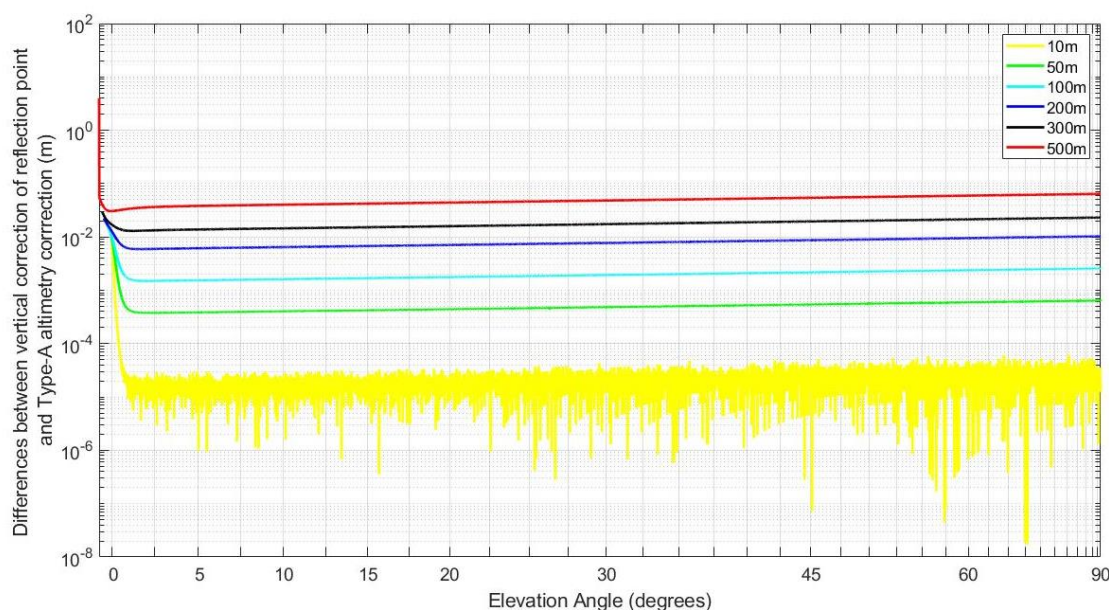
Dessa forma, salienta-se que a correção altimétrica supondo o transmissor a distância infinita  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  apresenta bons resultados, excetuando-se algumas condições de altura da antena receptora e ângulo de elevação do satélite. Logo, a correção altimétrica do tipo A aproximada para distância infinita  $\Delta H_{f'}^{x\infty}$  não é equivalente à correção numérica do tipo A definida para distância finita ao transmissor  $\Delta H^x$ .



#### 4.3.2.2 Avaliação das correções altimétricas do tipo A aproximadas por outras abordagens

Outro ponto a ser destacado refere-se as correções altimétricas aproximadas por outras abordagens, as quais não são dadas em termos do atraso interferométrico, como é o caso da correção altimétrica pela correção vertical do ponto de reflexão (ROUSSEL *et al.*, 2014; ZAVOROTNY *et al.*, 2014) e a correção altimétrica trigonométrica apresentada em Roggenbuck e Reinking (2019). Essas correções não apresentam concordância satisfatória em todas as configurações de altura da antena e ângulo de elevação com a correção do tipo A. Para demonstrar isso, serão apresentadas logo abaixo as comparações entre a correção do tipo A e a correção do deslocamento vertical do ponto de reflexão (Figura 44). Posteriormente, serão mostrados os resultados das comparações entre a correção do tipo A e a correção de Roggenbuck e Reinking (2019).

Figura 44 – Diferenças entre a correção do tipo A e a correção para o deslocamento vertical do ponto de reflexão nos ângulos de elevação do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica.



Fonte: o autor.

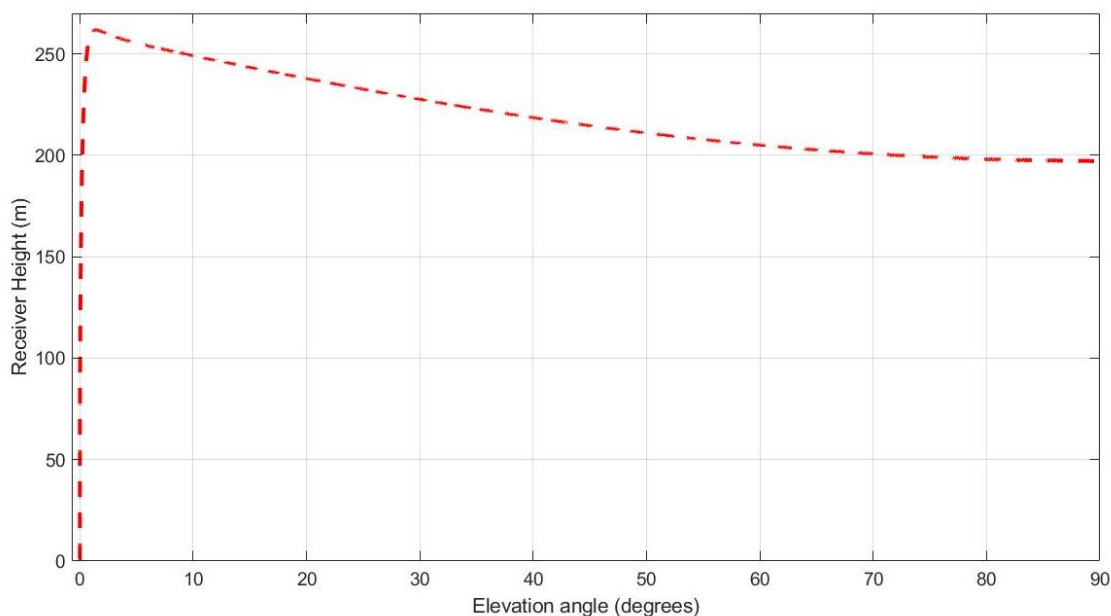
Embora a correção altimétrica do tipo A e a correção do deslocamento vertical do ponto de reflexão apresentem comportamento semelhante em algumas configurações, as duas correções são distintas de forma significativa. Nas baixas alturas de antena receptora, as diferenças são baixas, menores que 1 cm em alguns casos, porém as diferenças ultrapassam 1 cm próximo do horizonte plano, como no caso das estações com alturas simuladas de 10 m,

50 m e 100 m. Nas alturas acima de 200 m, as diferenças ultrapassam 1 cm em grande parte dos ângulos de elevação.

Outro fato importante a ser ressaltado é que a correção do tipo A é dada pela taxa de variação das correções do atraso interferométrico em relação à sensibilidade vertical planar, enquanto a correção do deslocamento do ponto de reflexão consiste na simples coordenada vertical entre o plano e a esfera. Isso pode ser verificado pelos valores das correções a zênite, onde a correção vertical do ponto de reflexão converge a zero, enquanto a correção altimétrica do tipo A converge a valores diferentes de zero, inclusive maiores que 1 cm para alturas de antena receptora maiores que 200 m, como é observado na Tabela 15.

Para explicitar as diferenças significativas entre a correção vertical do ponto de reflexão e a correção do tipo A, são apresentados na Figura 45 os limiares de altura de antena receptora e ângulo de elevação para os quais a diferença é maior que 1 cm. Na figura, verifica-se que as diferenças são maiores que 1 cm para uma antena receptora acima de 260 m em qualquer ângulo de elevação.

Figura 45 – Limiar de diferença de 1 cm entre o deslocamento vertical do ponto de reflexão,  $\Delta y_s$ , e a correção altimétrica do tipo A,  $\Delta H^x$ .



Fonte: o autor.

É interessante notar que as diferenças são maiores próximo do zênite e decrescem até próximo do horizonte plano, onde as diferenças aumentam rapidamente, como pode ser visto também na Figura 44. Dessa forma, a zênite, a diferença é maior que 1 cm para uma antena receptora a 200 m e, na direção dos menores ângulos de elevação, a curva do limiar direciona-

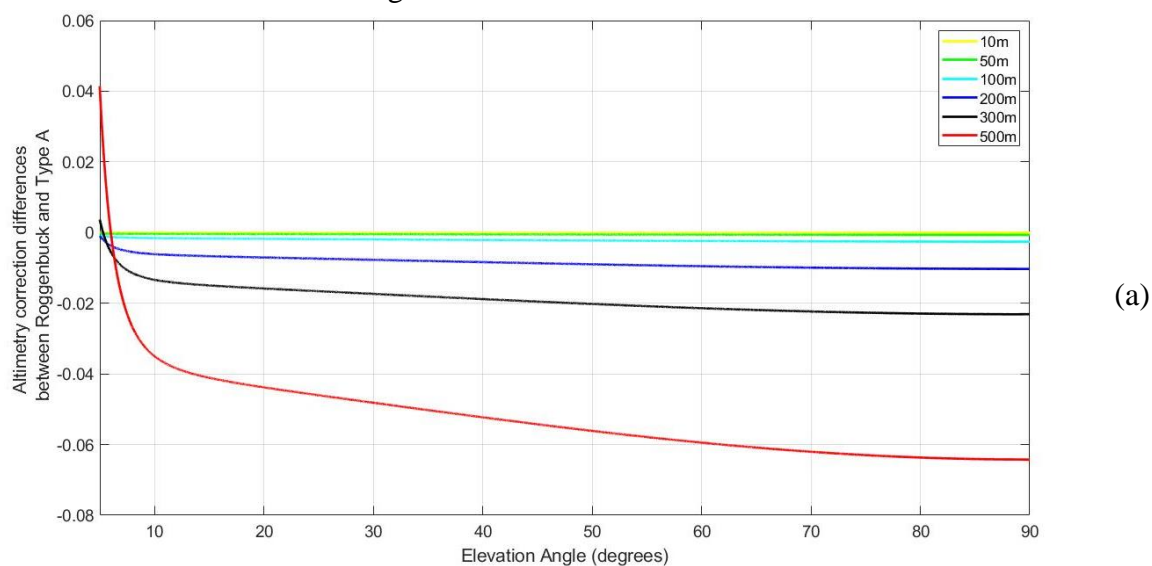
se para alturas maiores até 260 m. Abaixo do horizonte plano, então, as diferenças crescem rapidamente e as diferenças são significativas para todas as alturas de antena receptora.

Da mesma forma, a correção aproximada de Roggenbuck e Reinking (2019) também apresentou resultados que não equivalem a correção do tipo A. Os autores apresentam uma correção altimétrica aproximada para a curvatura terrestre na equação 4 do trabalho, utilizando-se de relações trigonométricas na esfera. A correção altimétrica de Roggenbuck e Reinking (2019), doravante denominada correção de R&R, assemelha-se a correção do tipo A. A fim de verificar a concordância entre ambas as correções, foi realizada a comparação entre as correções. Conforme é mostrado na Figura 46, as diferenças são menores quanto menor a altura, porém verifica-se que nos baixos ângulos de elevação, próximo do horizonte plano, a correção de R&R apresenta um comportamento anômalo em relação a correção do tipo A, tal que ocorre uma inversão do sinal e o aumento exponencial da diferença (Figura 46a). Quanto maior a altura, maior será o ângulo de elevação em que ocorre este comportamento (Figura 46b). Conforme é explicitado na Figura 47, mesmo para a menor altura simulada, a diferença ultrapassa 1 cm no horizonte plano. Acima de 200 m aproximadamente, a diferença ultrapassa 1 cm em qualquer ângulo de elevação, como pode ser visualizado também na Figura 46b.

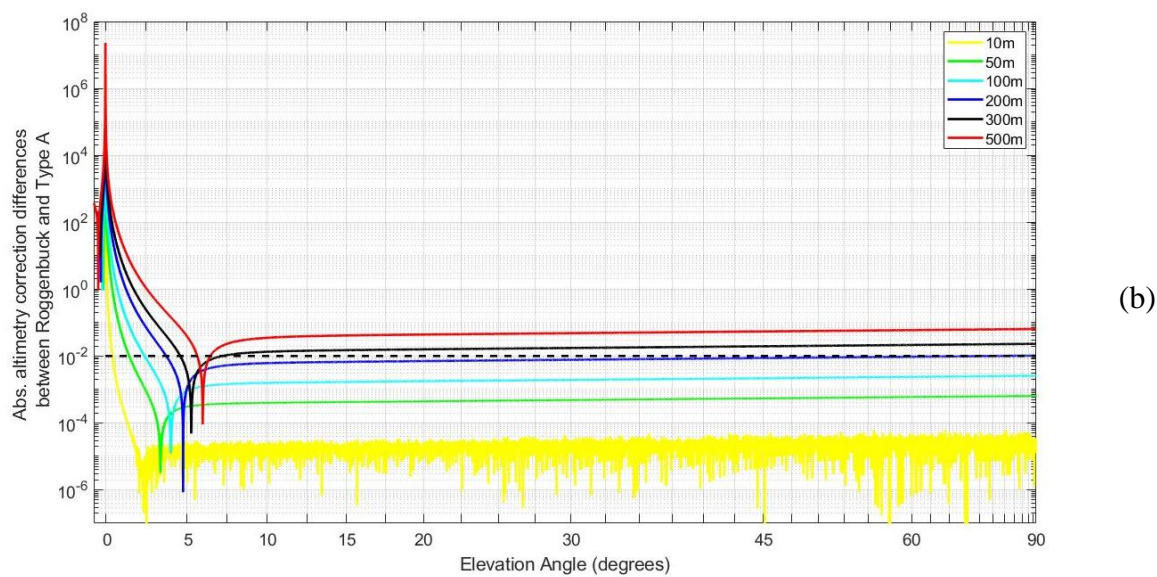
Dessa forma, a correção de R&R apresenta bons resultados, dada a simplicidade da formulação, sendo uma aproximação interessante em casos em que a antena receptora é baixa e os ângulos de elevação são altos. Porém, assim como a correção altimétrica pelo deslocamento vertical do ponto de reflexão, esta aproximação trigonométrica apresenta limitações, principalmente para baixos ângulos de elevação e altas alturas de antena receptora. Portanto, a correção de R&R não é equivalente a correção do tipo A.

Nesse sentido, cabe ressaltar que as correções aproximadas apresentaram bons resultados, mas sempre limitados a algumas condições da altura da antena e do ângulo de elevação quando comparados com a correção do tipo A. Porém, à rigor, e dadas as limitações das correções aproximadas, recomenda-se ao leitor o uso da correção altimétrica do tipo A ( $\Delta H^x$ ), dada pela Equação (109).

Figura 46 – Comparação entre a correção altimétrica do tipo A e a correção altimétrica de R&R para as alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m nos ângulos de elevação de (a) 5° a 90°; e (b) do horizonte esférico até zênite em escala logarítmica e valores absolutos.



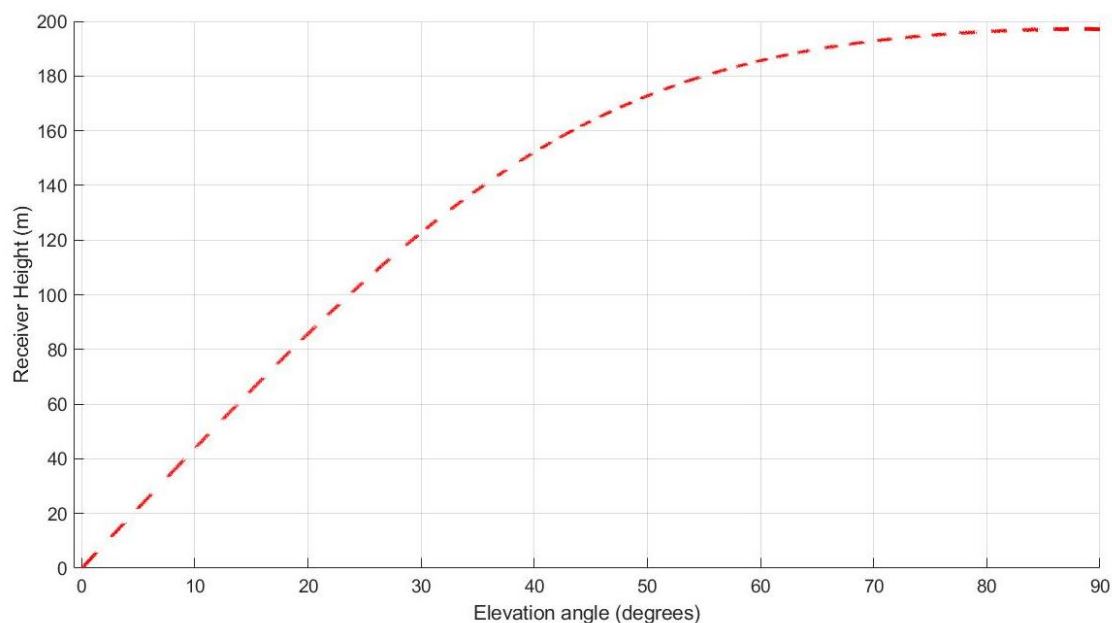
(a)



(b)

Fonte: o autor.

Figura 47 – Limiar de 1 cm de diferença entre a correção do tipo A e a correção de R&R.



Fonte: o autor.

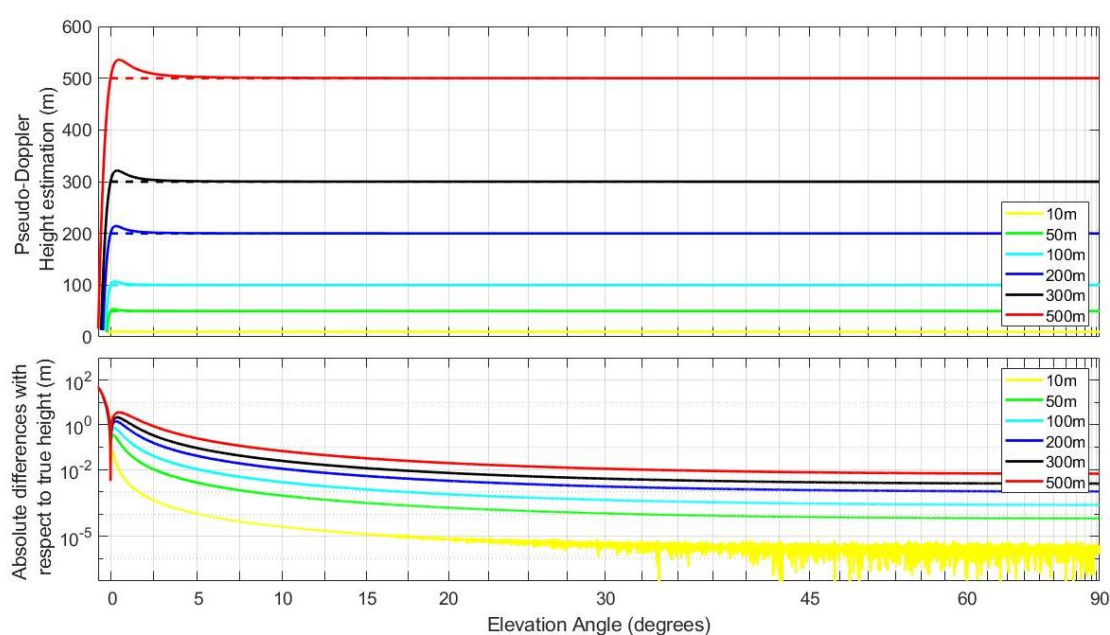
#### 4.3.3 Correção altimétrica do tipo B

A relação entre a altura geométrica verdadeira  $H$  e a altura aparente na esfera  $H_f^S$ , obtida a partir do pseudo-Doppler (Seção 3.4.3) não é trivial. Conforme apresentado Seção 3.3.6, a sensibilidade vertical esférica  $K_z^S$  se aplica a variações no atraso de propagação, mas é falha quando se considera o atraso total. Dessa forma, a estimativa altimétrica aparente, sem correções, pelo pseudo-Doppler na esfera apresenta erros sistemáticos que são significativos em certas configurações de ângulo de elevação e altura da antena receptora. Então, a correção do tipo B corresponde à correção altimétrica para as inversões pelo pseudo-Doppler na esfera, conforme apresentado na Seção 3.5.3.

No quadro superior da Figura 48 são apresentadas as estimativas altimétricas aparentes, sem correções, dadas pelas simulações da inversão com o pseudo-Doppler na esfera. Nas linhas sólidas são apresentadas as estimativas altimétricas aparentes  $H_f^S$ , enquanto que nas linhas tracejadas são apresentadas as alturas verdadeiras  $H$ . Verifica-se que as estimativas altimétricas aparentes obtidas pela inversão com o pseudo-Doppler são superestimadas na maior parte dos ângulos de elevação entre o horizonte esférico e o zênite, até próximo do  $0^\circ$  de elevação. Nesta zona, a estimativa altimétrica apresenta um comportamento anômalo onde se visualiza que a altimetria é superestimada com um incremento acentuado até atingir um pico próximo de  $0^\circ$  de elevação. Entre a elevação em que ocorre este pico e  $0^\circ$  de elevação, a altimetria ainda é

superestimada, porém sofre um rápido decréscimo até atingir a altura verdadeira aproximadamente no horizonte plano. Então, abaixo desse ponto, a estimativa passa a ser subestimada, pois a altura aparente passa a ser menor que a altura real. É interessante notar que a subestimação é aumentada quanto menor o ângulo de elevação e, no horizonte esférico, a estimativa altimétrica tende a zero.

Figura 48 – Estimativas altimétricas simples pelo pseudo-Doppler na esfera (linha sólida) e as respectivas alturas verdadeiras (linha tracejada) (gráfico superior). Diferenças absolutas em escala logarítmica entre as estimativas altimétricas e as respectivas alturas verdadeiras (gráfico inferior).



Fonte: o autor.

A estimativa altimétrica é superestimada desde os 90° de elevação, como pode ser verificado no gráfico inferior da Figura 48. A magnitude das diferenças é dependente da altura e do ângulo de elevação, aumentando na direção das maiores alturas de antena receptora e menores ângulos de elevação, salvo a zona próxima do horizonte plano, onde ocorre rapidamente uma redução da diferença devido a inversão de superestimativa para subestimativa. Nesse sentido, verifica-se que nos ângulos de elevação altos, as diferenças não são necessariamente desprezíveis, sendo inclusive maiores que 1 cm já no zênite para algumas alturas de receptor. Por outro lado, nos baixos ângulos de elevação, as diferenças aumentam de forma acentuada, principalmente abaixo de 0° de elevação, atingindo até mesmo diferenças de ordem métrica. Por esse motivo, a distinção visual entre  $H_f^S$  e  $H$  no gráfico superior da Figura 48 só é possível nos baixos ângulos de elevação.

Assim, percebe-se que mesmo para a estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler na esfera são necessárias correções altimétricas para compensar a altura aparente esférica em relação à altura verdadeira. O viés altimétrico apresenta comportamento sistemático e, para a correção de tal viés, foi calculada a correção do tipo B pela Equação (110).

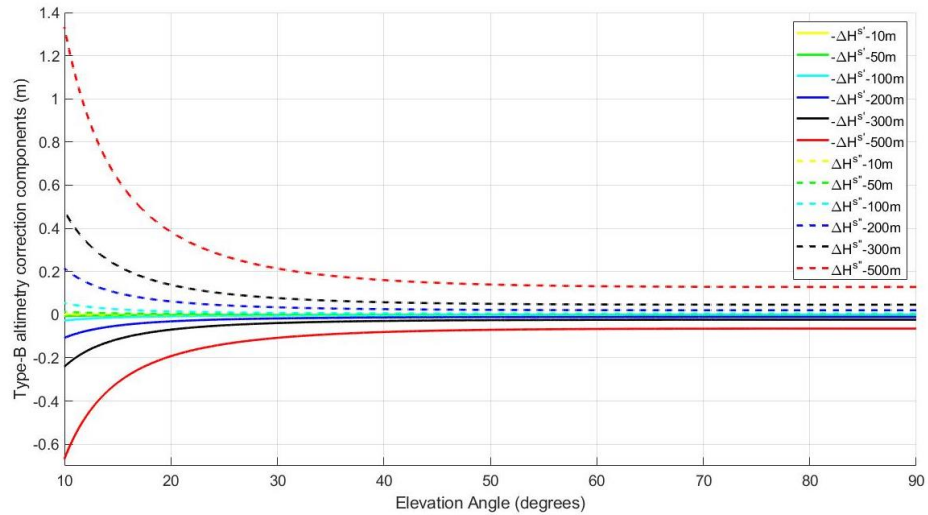
A correção do tipo B é resultante de duas componentes:  $\Delta H^{s'}$  e  $\Delta H^{s''}$ , conforme é mostrado na Equação (111). A primeira componente  $\Delta H^{s'} = -\partial \Delta D_i / \partial K_z^s$  corresponde a variação de atraso no plano e na esfera com relação a sensibilidade esférica, enquanto a segunda  $\Delta H^{s''} = H_0 \cdot (\zeta - 1)$  está relacionada com a variação da altura nominal com relação a taxa de variação  $\zeta = \partial \text{sen } e / \partial \text{sen } g$ . Ambas as componentes da correção altimétrica do tipo B são apresentadas na Figura 49.

Verifica-se que as componentes apresentam comportamentos que distintos entre si. A primeira componente  $\Delta H^{s'}$  apresenta valores negativos, em que sua magnitude aumenta no sentido dos menores ângulos de elevação. Além disso, os valores absolutos da primeira componente são maiores quanto maior a altura da antena receptor, inclusive no zênite. Nesse sentido, é possível verificar que mesmo no zênite o valor de  $\Delta H^{s'}$  não é zero, mesmo a diferença entre os atrasos a zênite sendo zero, devido ao gradiente das diferenças.

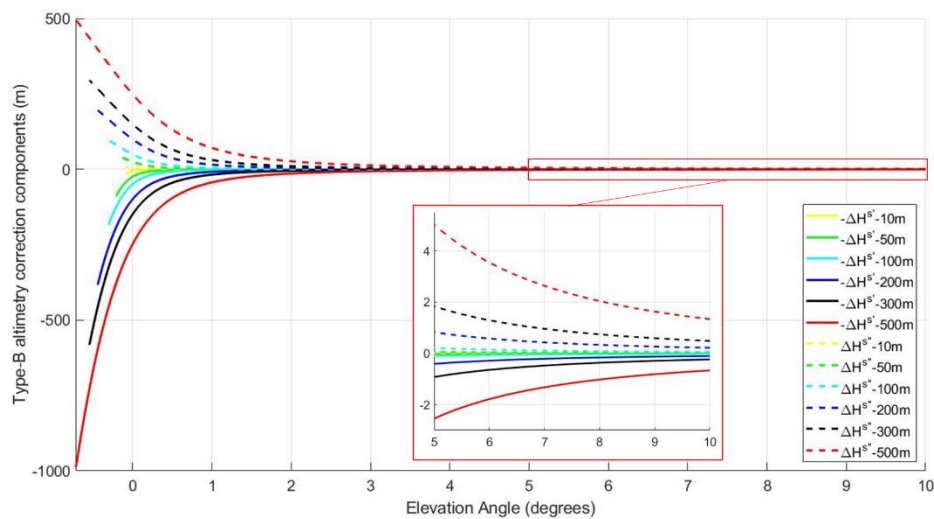
A segunda componente  $\Delta H^{s''}$  apresenta comportamento semelhante a primeira componente, porém com sinal inverso. A segunda componente apresenta valores positivos que também aumentam no sentido dos menores ângulos de elevação e das maiores alturas da antena receptora, apresentando valores que também não são iguais a zero no zênite, já que é dependente do gradiente  $\zeta$ .

Na Figura 49a observa-se que, embora  $\Delta H^{s'}$  e  $\Delta H^{s''}$  aumentem com proporção semelhantes e sinais inversos, sendo que a segunda componente apresenta magnitude maior que a primeira componente. Inclusive,  $\Delta H^{s''}$  apresenta valores que chegam a aproximadamente ao dobro da primeira componente. A segunda componente mantém-se maior que a primeira componente em grande parte do intervalo de elevação entre o horizonte plano e o zênite, conforme a Figura 49b e a Figura 49c. Contudo, verifica-se que próximo do horizonte plano, a primeira componente aumenta com taxa maior que a segunda componente. Então, abaixo de  $0^\circ$  de elevação, a primeira componente apresenta valores absolutos que ultrapassam a segunda componente. Dessa forma, aproximadamente entre o horizonte plano e o horizonte esférico,  $\Delta H^{s'}$  terá valores absolutos maiores que  $\Delta H^{s''}$ , invertendo o comportamento verificado nos ângulos acima do horizonte plano.

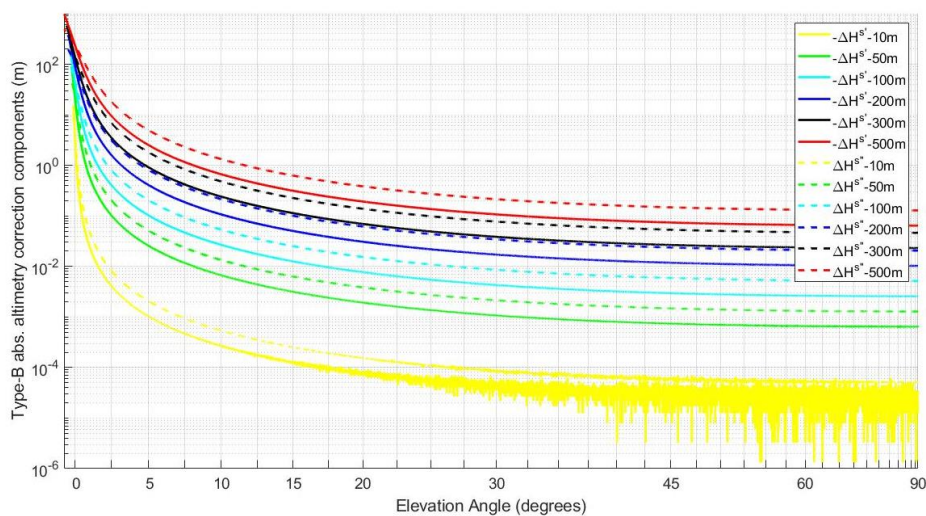
Figura 49 – Primeira componente  $\Delta H^{S'}$  e segunda componente  $\Delta H^{S''}$  da correção altimétrica do tipo B nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico a 10° em escala logarítmica e valores absolutos.



(a)



(b)



(c)

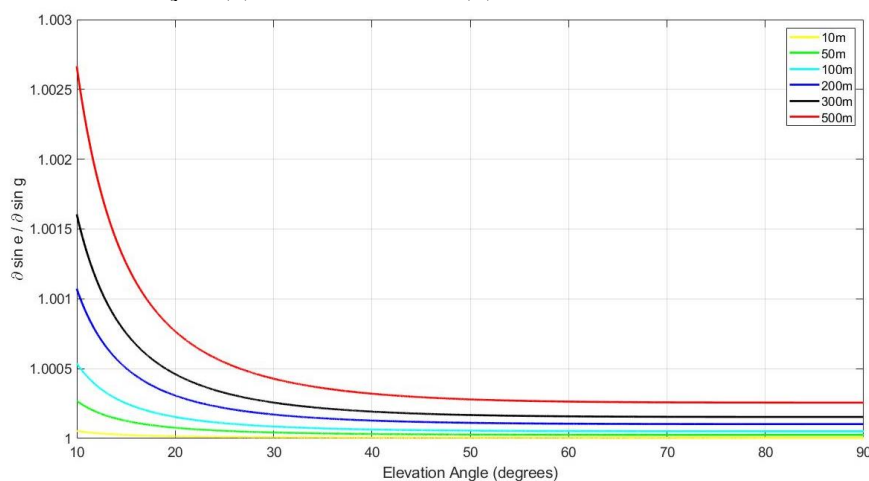


Um fato interessante é que no horizonte esférico  $\Delta H^{s'}$  tende ao valor absoluto próximo do dobro da altura real da antena como, por exemplo, o valor de  $\Delta H^{s'}$  tende a -1000 m para uma antena receptora de 500 m de altura. Por outro lado,  $\Delta H^{s''}$  no horizonte esférico tende ao valor absoluto igual a antena real, tendendo então a 500 m para uma antena receptora a 500 m de altura no horizonte esférico.

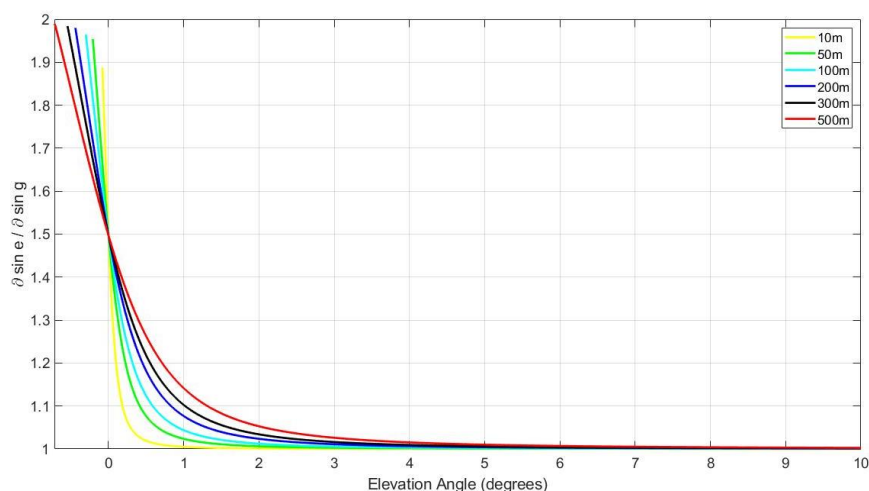
Um importante fator no comportamento das componentes da correção altimétrica do tipo B é a taxa de variação  $\zeta$ , correspondente a variação do ângulo de elevação com relação ao ângulo rasante, dado pela Equação (112) (

Figura 50). Ambas as componentes da correção do tipo B estão relacionadas com a taxa de variação  $\zeta$ , tendo em vista que a primeira componente pode ser dada também como  $\Delta H^{s'} = \Delta H^x \cdot \zeta$ , conforme apresentado na Equação (111).

Figura 50 – Taxa de variação  $\zeta$  do ângulo de elevação com relação ao ângulo rasante nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; e (b) do horizonte esférico a 10°.



(a)



(b)

Fonte: o autor.

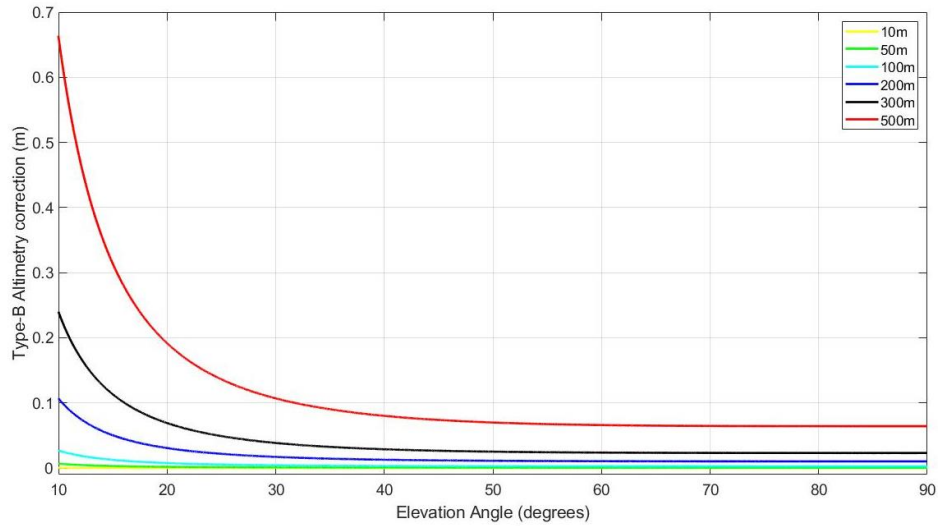
Observa-se que nos altos ângulos de elevação (Figura 50a) a taxa de variação entre os ângulos de elevação e rasante é muito próximo de 1, ou seja, nessa região os ângulos são muito próximos entre si e diferenciam-se gradualmente na direção de ângulos mais baixos. (Figura 50a). Já nos ângulos próximos ao horizonte plano ocorre uma taxa acentuada de diferenciação entre os ângulos de elevação e rasante, a qual é verificada em ângulos cada vez mais próximos ao horizonte plano quanto menor a altura da antena receptora. Um fato interessante é que muito próximo da elevação zero a taxa de variação tende a convergir para 1,5 em todas as alturas. E no horizonte esférico  $\zeta$  tende a convergir para 2 para todas as alturas, ocorrendo essa brusca variação em um pequeno intervalo de elevação entre os horizontes plano e esférico (Figura 50b).

Dessa forma, nos ângulos de elevação acima de  $0^\circ$  tem-se que a componente  $\Delta H^{s''}$ , impulsionada pela taxa de variação  $\zeta$ , tende a ter valor absoluto maior que  $\Delta H^{s'}$ , embora a última esteja também relacionada a  $\zeta$ . Abaixo do horizonte plano, devido ao aumento vertiginoso da componente  $\Delta H^{s'}$  e da taxa de variação  $\zeta$ ,  $\Delta H^{s'}$  passa então a ter magnitude maior que a componente  $\Delta H^{s''}$ .

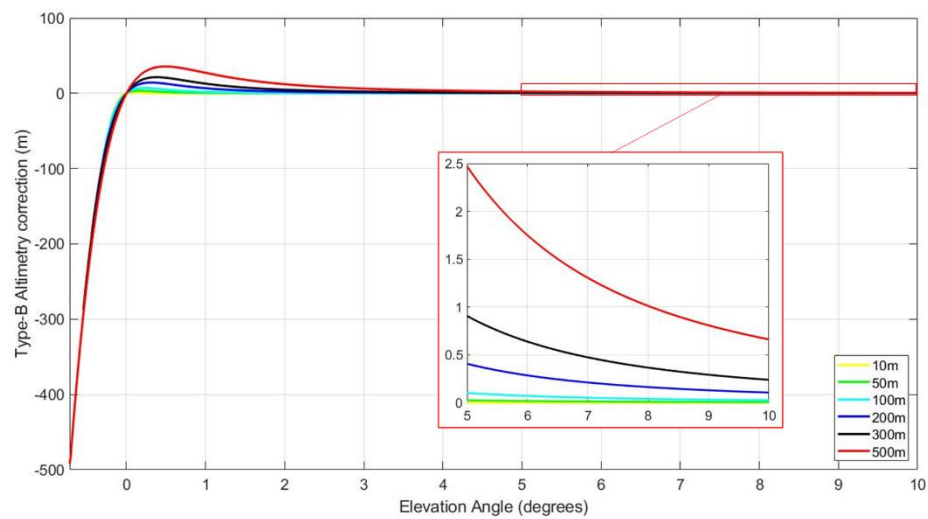
Portanto, ressalta-se novamente que as componentes  $\Delta H^{s'}$  e  $\Delta H^{s''}$  possuem sinais inversos, em que a primeira é negativa e a última é positiva. No cálculo da correção altimétrica do tipo B ambas competem entre si. Nesse sentido, em praticamente todo o intervalo de ângulos de elevação acima de zero, a segunda componente  $\Delta H^{s''}$  é predominante e a correção do tipo B será então positiva (Figura 51a, Figura 51b). Já nos ângulos de elevação abaixo do horizonte plano tem-se a predominância da primeira componente  $\Delta H^{s'}$ , definindo valores negativos na correção altimétrica (Figura 51b). E, aproximadamente no horizonte plano, ambas as componentes tendem a possuir a mesma magnitude, uma positiva e outra negativa, anulando a correção do tipo B na elevação zero (Figura 51b, Figura 51c).

Então, verifica-se na Figura 51 que, nos ângulos de elevação altos, os valores positivos da correção altimétrica do tipo B compensam a superestimativa altimétrica realizada pelo pseudo-Doppler nesse intervalo de elevação (Figura 48), satisfazendo a Equação (101). Considerando-se o valor absoluto de 1 cm para o limiar de significância para a correção altimétrica para medições do nível do mar (PUGH; WOODWORTH, 2014), observa-se que até  $10^\circ$  de elevação (Figura 51a), a correção não é necessária apenas para as alturas simuladas de 10 m e 50 m. Para uma antena receptora a 100 m, abaixo de  $17^\circ$  a correção já é necessária.

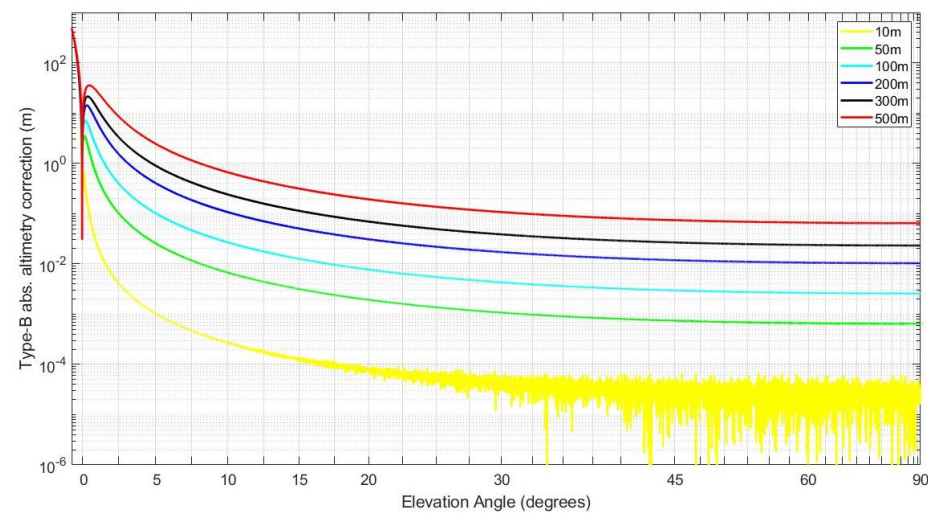
Figura 51 – Correção altimétrica do tipo B para curvatura terrestre nas alturas de antena receptora de 10 m, 50 m, 100 m, 200 m, 300 m e 500 m para os ângulos de elevação (a) de 10° a 90°; (b) do horizonte esférico a 10°; e (c) do horizonte esférico a 10° em escala logarítmica e valores absolutos.



(a)



(b)



(c)

Fonte: o autor.

Para as alturas simuladas maiores que 100 m, o cenário é ainda mais crítico (Figura 51a). Para uma antena receptora a 200 m de altura, a correção ultrapassa 1 cm aos 90° de elevação, chegando a mais de 10 cm aos 10°. A correção aos 90° de elevação é necessária para algumas alturas de antena receptora, visto que a correção altimétrica é calculada considerando não somente a correção do atraso aos 90°, mas também a correção do atraso nos pontos anterior e posterior. Dessa forma, a correção do tipo B aos 90° não é exatamente a zero e tende a ser maior quanto maior for a altura da antena receptora. Aliás, para todas alturas de antena receptora maiores que 200 m a correção a zênite é maior que 1 cm (Tabela 18). É interessante notar que os valores são muito próximos aos da Tabela 15, mas com sinal algébrico invertido.

Tabela 18 – Correção altimétrica do tipo B aos 90° de elevação (zênite).

<b>Altura da antena receptora (m)</b>	<b>Correção altimétrica do tipo B a zênite (cm)</b>
10	0,003426
50	0,062938
100	0,256875
200	1,026655
300	2,316626
500	6,422872

Fonte: o autor.

Aos 300 m de altura, a correção é de cerca de 2,3 cm aos 90°, aumentando para os ângulos de elevação menores e chegando a quase 24 cm aos 10°. E para uma antena receptora a 500 m de altura, a correção é de aproximadamente 6,5 cm aos 90° e chegando a mais de 65 cm de correção aos 10°.

Na Figura 51b são mostradas as correções para os ângulos abaixo de 10° de elevação até o horizonte esférico. Na Figura 51c são apresentadas as correções para o intervalo completo de elevações entre o horizonte esférico e o zênite, em escala logarítmica e correção em valores absolutos para melhor distinção entre as diferentes alturas, principalmente das antenas receptoras baixas. Verifica-se assim que, nos ângulos de elevação abaixo de 10°, as correções são ainda maiores, já que essas aumentam com a redução do ângulo de elevação. Para as alturas de antena receptora que apresentam correção significativa já acima de 10° de elevação, as correções aumentam ainda mais nos ângulos de elevação menores. Para a altura de antena receptora de 10 m, menor altura apresentada no gráfico, torna-se necessária a correção altimétrica para satélites visados a partir de 1,6° de elevação, aproximadamente. E para uma antena receptora a 50 m, a correção é necessária já aos 8,3° de elevação.

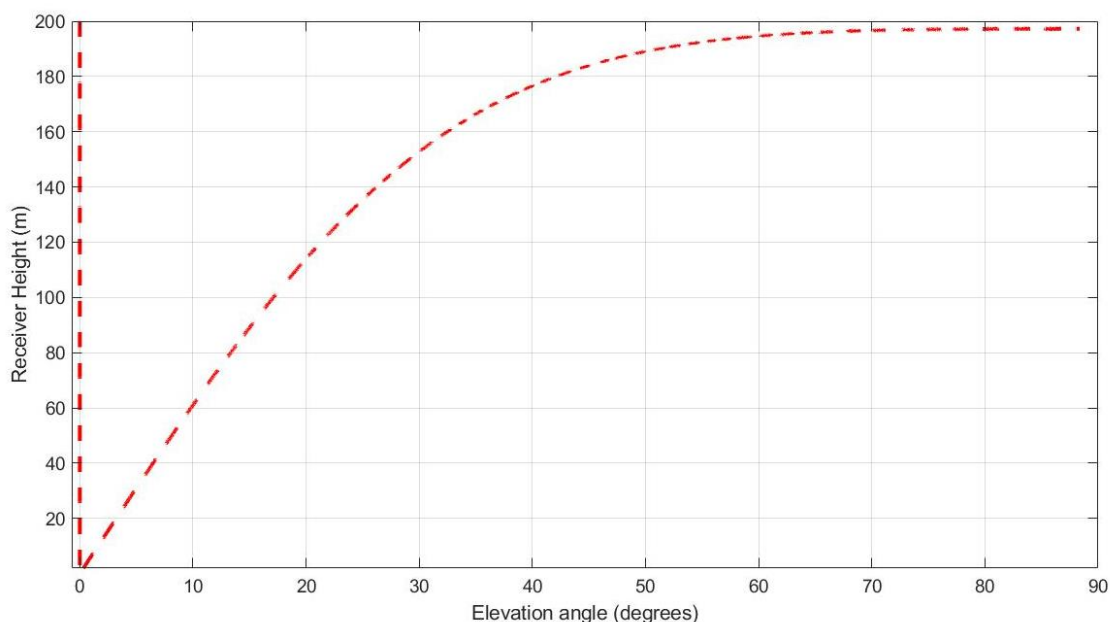
Para algumas configurações de altura e elevação, as correções chegam a atingir níveis métricos como, por exemplo, uma antena receptora a 500 m de altura aos  $0,5^\circ$  de elevação que atinge mais de 35 m de correção altimétrica. Já uma antena receptora a 10 m de altura, atinge mais de 7 cm de correção altimétrica aos  $0,05^\circ$  de elevação.

Contudo, as correções altimétricas positivas atingem um pico em ângulos de elevação próximos ao horizonte plano, sendo que tal elevação é dependente da altura do receptor, conforme pode ser visto na Figura 51b. Quanto maior a altura da antena receptora, maior será o ângulo de elevação em que ocorrerá esse pico. Nos ângulos de elevação abaixo deste pico ocorre uma inversão acelerada da correção altimétrica, pois até este ponto as correções aumentam exponencialmente para valores positivos e, abaixo este ponto, as correções tendem a zero. É interessante salientar que a correção igual a zero ocorre aproximadamente a  $0^\circ$  de elevação para todas as alturas avaliadas.

Abaixo de  $0^\circ$  de elevação, a correção volta a aumentar, mas no sentido negativo, com incremento exponencial da correção altimétrica. A correção no sentido negativo tende ao valor da altura real. Por exemplo, para uma antena receptora de 500 m a correção no horizonte esférico tende a -500 m; para uma antena receptora a 10 m, a correção tende a -10 m. Destaca-se que estes valores são atingidos entre a elevação zero e o horizonte esférico, ou seja, em menos de  $1^\circ$  de elevação a correção vai de zero a centenas de metros em alguns casos, demonstrando que a correção nesta zona abaixo é extremamente sensível, de forma que a variação de décimos de grau decorre em correções métricas. Este comportamento da correção nos baixos ângulos de elevação até o horizonte esférico é esperado dado o comportamento da estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler nessa mesma zona de elevação, visualizada na Figura 48.

Para sintetizar os limiares de ângulo de elevação e altura da antena receptora para os quais a correção altimétrica do tipo B é significativa, foram calculadas as correções altimétricas para alturas de 1 m a 500 m de altura, com passos de 1 m entre cada altura. Os limiares para a correção altimétrica de 1 cm são apresentados na Figura 52.

Figura 52 – Limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo B para a curvatura terrestre.



Fonte: o autor.

Nota-se que o comportamento dos limiares de correção altimétrica de 1 cm é muito similar ao que é visto na correção do tipo A, apresentada na Figura 41. No entanto, salienta-se que a correção altimétrica do tipo A e tipo B são diferentes, principalmente no que tange ao sinal da correção e na correção total e, portanto, não devem ser tratadas igualmente, mesmo que em termos absolutos.

Assim, verifica-se que a correção altimétrica do tipo B é necessária para todas as alturas simuladas. Para alturas acima de 200 m, a correção é necessária independente do ângulo de elevação. E para ângulos de elevação abaixo do horizonte plano, a correção é necessária independente da altura da antena receptora, pois a correção foi necessária inclusive para a menor altura testada.

Além disso, observa-se na Figura 52 que na elevação zero ocorre uma singularidade, a qual ocorre devido ao comportamento da estimativa altimétrica verificado também nessa região do horizonte plano (Figura 48). Na elevação zero, a estimativa altimétrica converge para a altura verdadeira, mas nas elevações abaixo, a estimativa altimétrica torna a destoar da altura verdadeira e a diferença aumenta acentuadamente até o horizonte esférico. Dessa forma, ocorre uma segunda linha de limiar de 1 cm de correção abaixo da singularidade verificada a  $0^\circ$  de elevação.

Nota-se que quanto maior a altura, maior será o ângulo de elevação em que será necessária a correção. Por outro lado, quanto menor o ângulo de elevação, menor será a altura que necessitará de correção altimétrica. Na Tabela 19 são apresentadas algumas configurações

de altura de antena receptora e ângulo de elevação para o limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo B para a curvatura terrestre.

Tabela 19 – Configurações de altura da antena receptora e ângulo de elevação para o limiar de 1 cm de correção altimétrica do tipo B.

<b>Altura da antena receptora (m)</b>	<b>Ângulo de elevação (graus)</b>
05	0,7
10	1,6
20	3,2
30	4,8
60	9,8
90	15,1
100	17,2
120	21,3
160	32,4
180	42,1
190	51,0

Fonte: o autor

Assim, para uma antena receptora a 10 m de altura, a correção altimétrica do tipo B deve ser aplicada para ângulos de elevação abaixo de  $1,6^\circ$ . Para uma antena receptora a 60 m de altura, o ângulo de elevação mínimo é de  $9,8^\circ$ . E uma antena receptora a 120 m, a correção é necessária a partir de  $21,3^\circ$ . Nota-se que as configurações são muito próximas das que foram apresentadas na Tabela 16 e, embora as correções do tipo A e tipo B tenham limiares de 1 cm muito parecidos, ambas não devem ser consideradas similares.

Conforme destacado anteriormente na Seção 4.3.2, satélites em ângulos de elevação baixos, menores que  $30^\circ$  ou até mesmo negativos, são rastreados com frequência para a realização da refletometria, principalmente para GNSS-MR. Assim como, plataformas terrestres a dezenas centenas de metros de altura em relação à superfície refletora não são incomuns, como em faróis e falésias. Nesse sentido, evidencia-se que a correção altimétrica é necessária mesmo para estimativas altimétricas obtidas por inversões pelo pseudo-Doppler na esfera, devido a falha da sensibilidade vertical esférica em estimar a altura a partir do atraso de propagação total. Por outro lado, a sensibilidade vertical esférica é capaz de estimar a variação altimétrica a partir das variações no atraso de propagação, conforme mostrado na Simulação de ponta-a-ponta, compensando a estimativa altimétrica inicial. Assim, a correção altimétrica do tipo B efetua a concordância entre a altura geométrica verdadeira e a altura aparente na esfera.

## 5 CONCLUSÃO

A medição do nível do mar exige acurácia centimétrica. A previsão e modelagem de possíveis erros nessas medições são essenciais para atingir acurácia desejada e obter medidas confiáveis. Nesse sentido, demonstrou-se que a curvatura terrestre não é necessariamente desprezível em medições do nível do mar por Refletometria GNSS (GNSS-R) em plataformas terrestres. Considerando-se o meio de propagação como vácuo, averiguou-se que a modelagem da reflexão pode ser enviesada quando utilizado o modelo de superfície plano para representar a superfície refletora. O viés verificado na geometria da reflexão possui natureza sistemática e aumenta no sentido dos menores ângulos de elevação do satélite e maiores alturas da antena receptora, ou seja, o viés aumenta no sentido do distanciamento do ponto de reflexão.

Foi demonstrado que as estimativas altimétricas pelo pseudo-Doppler cruzado e o pseudo-Doppler na esfera apresentaram erros de natureza sistemática com o mesmo comportamento verificado na geometria da reflexão, denotando que os erros na geometria da reflexão afetam a estimativa altimétrica. Assim, a altimetria obtida por GNSS-R pode ser afetada de forma significativa, dependendo da configuração de altura da antena receptora e ângulo de elevação. Ressalta-se para o fato de que o viés altimétrico não é zero nem à zênite. Além disso, foram definidas as principais observáveis empregadas para altimetria em GNSS-R: distância interferométrica, fase interferométrica, Doppler interferométrico, pseudo-Doppler interferométrico e pseudo-Doppler interferométrico cruzado.

Devido à curvatura terrestre, verificou-se que ocorre um deslocamento posicional do ponto de reflexão na esfera em relação ao plano de forma sistemática. O deslocamento é equivalente ao incremento da distância do ponto de reflexão em relação à antena receptora, ou seja, quanto maior a altura da antena receptora e menor o ângulo de elevação. Na esfera, em relação ao plano, o ponto de reflexão é deslocado para uma posição horizontalmente mais próxima da antena receptora e é rebaixado verticalmente em relação à antena receptora. Portanto, a coordenada  $x$  é maior no plano que na esfera. Já a coordenada  $y$  na esfera varia de acordo com a curvatura da superfície e ocorre abaixo da base da antena receptora, enquanto no plano é constante.

O ângulo rasante também é afetado pela curvatura terrestre. No modelo plano, o ângulo rasante é igual ao ângulo de elevação. Na esfera, o plano da reflexão é perpendicular à direção normal ou radial da esfera e, portanto, não é sempre igual ao plano horizontal na antena receptora. Verificou-se que nos ângulos de elevação altos, as diferenças são sutis e são dependentes da altura da antena receptora. Porém, o ângulo rasante pode diferenciar-se do



ângulo de elevação em mais de  $0,7^\circ$  no horizonte esférico de uma antena receptora a 500 m de altura, por exemplo.

Foi verificado também que a distância inclinada é afetada significativamente pela curvatura terrestre. As diferenças entre plano e esfera na distância inclinada atingem facilmente níveis métricos. Além disso, no horizonte plano ocorre uma singularidade na distância inclinada no plano. Dessa forma, as diferenças são críticas nessa zona de elevação próxima a zero.

Devido a alterações da geometria da reflexão na esfera, verificou-se que o ângulo de elevação da reflexão é diferente na esfera em relação ao plano. Com isso, foi evidenciado que o ângulo de elevação da reflexão na esfera não apresenta relação trivial com o ângulo de elevação direto, como ocorre no plano.

Os efeitos da curvatura terrestre observados na geometria da reflexão afetam o atraso de propagação interferométrico positivamente, ou seja, o atraso é maior na esfera em relação plano. A diferença no atraso interferométrico pode atingir níveis centimétricos para antenas receptoras baixas, como 10 m, nos ângulos de elevação próximos ao horizonte plano, e até mesmo níveis métricos para antenas receptoras mais altas como 100 m e 200 m. Ademais, foi possível obter o atraso interferométrico por meio de relações trigonométricas utilizando a suposição do transmissor a distância infinita. O atraso trigonométrico apresentou boa concordância com o atraso obtido por relações vetoriais, com diferenças máximas de 2 cm para uma antena receptora a 500 m de altura. No entanto, essas diferenças são ainda menores quando se considera uma antena receptora mais distante, pois o atraso por relações vetoriais considera o transmissor a uma distância finita.

Foi demonstrado que as correções altimétricas do tipo A para a curvatura terrestre não são desprezíveis. A correção do tipo A é positiva, denotando que a estimativa altimétrica pelo pseudo-Doppler cruzado subestima a altura verdadeira. Assim, a correção é necessária já a partir de  $90^\circ$  de elevação para antenas receptoras acima de 200 m de altura. Cabe ressaltar que isso ocorre porque a correção do tipo A considera não somente a correção do atraso aos  $90^\circ$ , mas a taxa de variação do atraso com relação ao seno do ângulo de elevação. A correção é necessária também para todas as alturas de antenas receptoras simuladas, inclusive 1 m de altura, quando os ângulos de elevação visados estão próximos ao horizonte plano.

Além disso, verificou-se que a correção do tipo A é incrementada constantemente na direção dos menores ângulos de elevação e maiores alturas de antena receptora. Dessa forma, os cenários mais críticos são observados no horizonte esférico de cada altura, atingindo níveis métricos de correção altimétrica. Inclusive, é interessante notar que no horizonte esférico, a correção tende a ser muito próxima do valor da altura da antena receptora como, por exemplo,

uma antena receptora a 500 m de altura tende a uma correção próxima de 500 m no seu horizonte esférico. Portanto, denota-se que a correção altimétrica do tipo A não é desprezível, principalmente para alturas de antena receptora próximas a 200 m ou superiores e é crítica nos ângulos de elevação próximos de  $0^\circ$  de elevação.

Demonstrou-se também que correção do tipo A não é equivalente a correções aproximadas para a curvatura terrestre como o deslocamento vertical do ponto de reflexão entre o plano e a esfera. Embora existam algumas semelhanças, as duas correções possuem diferenças significativas em determinadas configurações de ângulo de elevação e altura da antena receptora, principalmente em antenas receptoras altas, acima de 270 m aproximadamente, e ângulos de elevação baixos, abaixo do horizonte plano.

Por fim, demonstrou-se que a correção do tipo B também é significativa. Embora a inversão pelo pseudo-Doppler seja realizada diretamente na esfera, foi mostrado que a sensibilidade vertical esférica, não é suficiente para a estimativa altimétrica pelo atraso interferométrico total em algumas configurações de altura da antena receptora e ângulo de elevação. Por outro lado, a sensibilidade vertical esférica é capaz de estimar variações de altura a partir das correções do atraso de propagação. Logo, a correção do tipo B ajusta a altura estimada pelo pseudo-Doppler em relação à altura geométrica verdadeira.

A correção do tipo B apresentou comportamento com valores negativos para todas as alturas até aproximadamente  $0^\circ$  de elevação, onde ocorre uma troca de sinal na correção, e rapidamente passa a ser positiva entre o horizonte plano e o horizonte esférico. A correção positiva, abaixo de  $0^\circ$  de elevação, aumenta exponencialmente, tendendo a valores muito próximos a altura total da antena no horizonte esférico. Entre o horizonte plano e o horizonte esférico, a variação da correção é acentuada, podendo variar centenas de metros em menos de  $1^\circ$ , demonstrando a alta sensibilidade da correção nessa região. Por outro lado, esse comportamento da correção do tipo B é esperado devido ao mesmo comportamento observado na inversão pelo pseudo-Doppler na esfera que superestima a altura em relação a altura verdadeira e, próximo do horizonte plano, a altura passa a ser subestimada.

A correção do tipo B é necessária acima de 200 m, mesmo a zênite, e também para todas as alturas testadas, inclusive 1 m, quando o satélite estiver a  $0^\circ$  de elevação ou mais baixo. Os limiares para 1 cm de correção do tipo B são muito semelhantes a correção tipo A, mas ressalta-se que as correções totais apresentam comportamentos distintos. A correção do tipo B aumenta na direção dos menores ângulos de elevação e maiores alturas de antena receptora, atingindo até níveis métricos. Para uma antena receptora a 500 m de altura, a correção negativa chega até a -35 m próximo do horizonte plano e a correção positiva atinge quase 500 m no horizonte

esférico. Denota-se também a maior complexidade da correção do tipo B devido ao seu comportamento.

Portanto, deve-se enfatizar que as correções altimétricas para a curvatura terrestre não são desprezíveis, principalmente no contexto da refletometria visto que o rastreamento de satélites é realizado com frequência nos baixos ângulos de elevação, principalmente para estimativas altimétricas obtidas a partir da observável SNR, bem como antenas receptoras altas, a dezenas ou centenas de metros de altura em relação à superfície refletora, não são incomuns.

### 5.1 Trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, é necessário que as correções sejam avaliadas e validadas em dados experimentais medidos em campo (WILLIAMS; NIEVINSKI, 2017). É necessário investigar também a modelagem da reflexão na esfera considerando-se o meio de propagação atmosférico e os possíveis efeitos combinados como a refração (NIKOLAIDOU, 2020)

Seria útil fornecer um modelo substituto de correção altimétrica para o usuário final, utilizando-se uma abordagem menos complexa, sendo algumas possibilidades:

- derivação de uma fórmula trigonométrica;
- coeficientes de um polinômio ajustado às curvas teóricas;
- grade de interpolação com relação à altura da antena receptora e ângulo de elevação;
- simplificação da equação de quarta ordem (quártica) pela suposição de satélite à distância infinita.

Em trabalhos futuros, espera-se realizar a integração dos algoritmos desenvolvidos neste trabalho com outros *softwares*, como simulador de SNR (NIEVINSKI; LARSON, 2014b) e inversor de SNR (NIEVINSKI; LARSON, 2014c). Além disso, sugere-se considerar modelos de superfície mais complexos para aprimorar a modelagem geométrica da reflexão como, por exemplo, o geóide, a topografia da superfície do mar bem como a topografia do solo.

Recomenda-se investigar a modelagem geométrica da reflexão considerando-se a variação do raio de curvatura Gaussiano da esfera osculante de acordo com a variação da latitude, visto que neste trabalho foi considerado apenas o raio terrestre médio. Sugere-se investigar a viabilidade do modelo esférico alternativo pela interseção linha-esfera pela abordagem da profundidade efetiva da antena virtual. Além disso, sugere-se investigar também a suposição do paralelismo entre as ondas direta e refletida em relação à distância finita do transmissor, o que pode decorrer em simplificações na modelagem da reflexão.

## REFERÊNCIAS

ALTSHILLER-COURT, N. Inversion. *In: College Geometry: an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*. 2. ed. Nova York: Dover, 1980. p. 12.

ANDERSON, K. D. Determination of Water Level and Tides Using Interferometric Observations of GPS Signals. **Journal of Atmospheric and Oceanic Technology**, v. 17, p. 10, 2000.

BOHREN, C. F.; FRASER, A. B. At what altitude does the horizon cease to be visible? **American Journal of Physics**, v. 54, n. 3, p. 222–227, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1119/1.14659>

CAMPS, A. *et al.* El uso de señales de oportunidad GPS para observación de la Tierra. **Buran**, 2010.

CARDELLACH, E. *et al.* Consolidating the Precision of Interferometric GNSS-R Ocean Altimetry Using Airborne Experimental Data. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 52, n. 8, p. 4992–5004, 2014.

CHURCH, J. A. *et al.* Sea level change. *In: Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to The Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2013.

CIPOLLINI, P. *et al.* Monitoring Sea Level in the Coastal Zone with Satellite Altimetry and Tide Gauges. **Surveys in Geophysics**, v. 38, n. 1, p. 33–57, 2017.

COLLETT, I. *et al.* Characterization and mitigation of interference between GNSS radio occultation and reflectometry signals for low-altitude occultations. **Navigation**, 10 p., 2020.

DREXLER, M.; GANDER, M. J. Circular Billiard. **SIAM Review**, v. 40, n. 2, p. 315–323, 1998.

ELKIN, J. M. A deceptively easy problem. **The Mathematics Teacher**, v. 58, p. 7, 1965.

FABRA, F. *et al.* Phase Altimetry With Dual Polarization GNSS-R Over Sea Ice. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 50, n. 6, p. 2112–2121, 2012.

FAGUNDES, M. A. R. *et al.* An open-source low-cost sensor for SNR-based GNSS reflectometry: design and long-term validation towards sea-level altimetry. **GPS Solutions**, v. 25, n. 2, p. 73, 2021.

FRENCH, A. P. How far away is the horizon? **American Journal of Physics**, v. 50, n. 9, p. 795–799, 1982.

FUJIMURA, M. *et al.* The Ptolemy–Alhazen Problem and Spherical Mirror Reflection. **Computational Methods and Function Theory**, v. 19, n. 1, p. 135–155, 2019.

GEREMIA-NIEVINSKI, F. *et al.* SNR-based GNSS reflectometry for coastal sea-level altimetry: results from the first IAG inter-comparison campaign. **Journal of Geodesy**, v. 94, n. 8, p. 70, 2020.

GEREMIA-NIEVINSKI, F.; MAKRAKIS, M.; TABIBI, S. Inventory of published GNSS-R stations, with focus on ocean as target and SNR as observable. **Zenodo**, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3668360>. Acesso em: 24 mar. 2020.

GLEASON, S.; LOWE, S.; ZAVOROTNY, V. U. Remote sensing using bistatic GNSS reflections. *In: GNSS: applications and methods*. Norwood: Artech House, 2009.

GREGORY, J. M. *et al.* Concepts and Terminology for Sea Level: Mean, Variability and Change, Both Local and Global. **Surveys in Geophysics**, v. 40, n. 6, p. 1251–1289, 2019.

HALL, C. D.; CORDEY, R. A. Multistatic Scatterometry. *In: International Geoscience And Remote Sensing Symposium, “Remote Sensing: Moving Toward The 21st Century”*, 1988. **International Geoscience and Remote Sensing Symposium, “Remote Sensing: Moving Toward the 21st Century”**. 1988, p. 561–562.

HELM, A. **Ground-based GPS altimetry with the L1 OpenGPS receiver using carrier phase-delay observations of reflected GPS signals**. 2008. Tese de Doutorado - Deutsches GeoForschungsZentrum, Berlim, 2008. Disponível em: <http://ebooks.gfz-potsdam.de/pubman/item/escidoc:8772>. Acesso em: 11 maio 2019.

IOC. **Manual on Sea Level - Measurement and Interpretation: Volume II - Emerging Tecnology. Manuals and Guides**. Paris: UNESCO, 1994, v. 2.

IOC. **Manual on sea level measurement and interpretation, Volume IV: An update to 2006**. Paris: UNESCO, 2006. v. 4

IOC. **Manual on sea-level measurements and Interpretation, Volume V: Radar gauges**. Paris: UNESCO, 2016. v. 5

JALES, P. **Spaceborne receiver design for scatterometric GNSS reflectometry**. 243 f. 2012. Tese de Doutorado - University of Surrey, Guildford, 2012.

JIN, S.; CARDELLACH, E.; XIE, F. **GNSS remote sensing: theory, methods and applications**. New York: Springer, 2013.

LAGARIAS, J. C. *et al.* Convergence Properties of the Nelder--Mead Simplex Method in Low Dimensions. **SIAM Journal on Optimization**, v. 9, n. 1, p. 112–147, 1998.

LARSON, K. M. *et al.* The Accidental Tide Gauge: A GPS Reflection Case Study From Kachemak Bay, Alaska. **IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters**, v. 10, n. 5, p. 1200–1204, 2013.

LARSON, K. M.; LÖFGREN, J. S.; HAAS, R. Coastal sea level measurements using a single geodetic GPS receiver. **Advances in Space Research**, v. 51, n. 8, p. 1301–1310, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.04.017>

LARSON, K. M.; NIEVINSKI, F. G. GPS snow sensing: results from the EarthScope Plate Boundary Observatory. **GPS Solutions**, v. 17, n. 1, p. 41–52, 2013.

LÖFGREN, J. S.; HAAS, R. Sea level measurements using multi-frequency GPS and GLONASS observations. **EURASIP Journal on Advances in Signal Processing**, v. 50, n. 1, 2014.

MARTÍN-NEIRA, M. A Passive Reflectometry and Interferometry System (PARIS): application to ocean altimetry. **ESA Journal**, [s. l.], v. 17, p. 25, 1993.

MATHWORKS. **Eps**. [S. l.], 2021a. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/eps.html>. Acesso em: 29 maio 2021.

MATHWORKS. **Fminsearch**. 2021b. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html>. Acesso em: 22 maio 2021.

MATHWORKS. **Gradient**. 2021c. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/gradient.html>. Acesso em: 29 maio 2021.

MATHWORKS. **Roots**. [S. l.], 2021d. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/roots.html>. Acesso em: 29 maio 2021.

MILLER, A. R.; VEGH, E. Exact Result for the Grazing Angle of Specular Reflection from a Sphere. **SIAM Review**, v. 35, p. 10, 1993.

MILLER, A. R.; VEGH, E. Computing the grazing angle of specular reflection. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 21, n. 2, p. 271–274, 1990.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: Descrição, fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: UNESP, 2008.

NIEVINSKI, F. G.; MONICO, J. F. G. GPS como sensor remoto. *In*: **Geotecnologias em Aplicações Ambientais**. Campo Grande: Editora UFMS, 2016.

NIEVINSKI, F. G.; LARSON, K. M. An open-source GPS multipath simulator in Matlab/Octave. **GPS Solutions**, v. 18, n. 3, p. 473–481, 2014a.

NIEVINSKI, F. G.; LARSON, K. M. Forward modeling of GPS multipath for near-surface reflectometry and positioning applications. **GPS Solutions**, v. 18, n. 2, p. 309–322, 2014b.

NIEVINSKI, F. G.; LARSON, K. M. Inverse Modeling of GPS Multipath for Snow Depth Estimation—Part I: Formulation and Simulations. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 52, n. 10, p. 6555–6563, 2014c.

NIEVINSKI, F. G.; SANTOS, M. C. Ray-tracing options to mitigate the neutral atmosphere delay in GPS. **Geomatica**, p. 18, 2010.

NIEVINSKI, F. G. **Forward and Inverse Modeling of GPS Multipath for Snow Monitoring**. 2013. Tese de Doutorado - University of Colorado, Boulder, 2013.

- NIKOLAIDOU, T. *et al.* Raytracing atmospheric delays in ground-based GNSS reflectometry. **Journal of Geodesy**, v. 94, n. 8, p. 68, 2020.
- NIKOLAIDOU, T. **Atmospheric delay modelling for ground-based GNSS reflectometry**. 137 f. 2020. Tese de Doutorado - University of New Brunswick, New Brunswick, 2020.
- OPPENHEIMER, M. *et al.* Sea level rise and implications for low-lying islands, coasts and communities. *In: IPCC Special Report On The Ocean And Cryosphere in a Changing Climate*. [S. l.]: IPCC, 2019.
- PENG, D. *et al.* Application of GNSS interferometric reflectometry for detecting storm surges. **GPS Solutions**, v. 23, n. 2, p. 47, 2019.
- PENNA, N. T. *et al.* Sea Surface Height Measurement Using a GNSS Wave Glider. **Geophysical Research Letters**, v. 45, n. 11, p. 5609–5616, 2018.
- PUGH, D. **Tides, surges, and mean sea-level**. Chichester; New York: J. Wiley, 1987.
- PUGH, D.; WOODWORTH, P. **Sea-level science: understanding tides, surges, tsunamis and mean sea level changes**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- REIS, V. P.; PALMEIRO, A. S.; BARBOSA, L. G. Estudo da obtenção do nível médio do mar com altimetria por satélites. **Revista Brasileira de Geomática**, v. 6, n. 1, p. 3, 2018.
- ROGGENBUCK, O.; REINKING, J. Sea Surface Heights Retrieval from Ship-Based Measurements Assisted by GNSS Signal Reflections. **Marine Geodesy**, v. 42, n. 1, p. 1–24, 2019.
- ROUSSEL, N. *et al.* Simulations of direct and reflected wave trajectories for ground-based GNSS-R experiments. **Geoscientific Model Development**, v. 7, n. 5, p. 2261–2279, 2014.
- ROUSSEL, N. *et al.* Sea level monitoring and sea state estimate using a single geodetic receiver. **Remote Sensing of Environment**, v. 171, p. 261–277, 2015.
- ROVERE, A.; STOCCHI, P.; VACCHI, M. Eustatic and Relative Sea Level Changes. **Current Climate Change Reports**, v. 2, n. 4, p. 221–231, 2016.
- SEEBER, G. **Satellite geodesy**. 2nd completely rev. and extended ed. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2003.
- SEMMLING, A. M. *et al.* A Phase-Altmetric Simulator: Studying the Sensitivity of Earth-Reflected GNSS Signals to Ocean Topography. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 54, n. 11, p. 6791–6802, 2016.
- SMITH, J. D. The Remarkable Ibn al-Haytham. **The Mathematical Gazette**, v. 76, n. 475, p. 189, 1992.
- SOUTHWELL, B. J.; DEMPSTER, A. G. A New Approach to Determine the Specular Point of Forward Reflected GNSS Signals. **IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing**, v. 11, n. 2, p. 639–646, 2018.

STRANDBERG, J.; HOBIGER, T.; HAAS, R. Real-time sea-level monitoring using Kalman filtering of GNSS-R data. **GPS Solutions**, v. 23, n. 3, 2019.

STRANDBERG, J. **New methods and applications for interferometric GNSS reflectometry**. 2020. Tese de Doutorado - Chalmers University of Technology, Gothenburg, Suécia, 2020.

WALDVOGEL, J. The Problem of the Circular Billiard. **Elemente der Mathematik**, v. 47, p. 5, 1992.

WEISSTEIN, E. W. **Alhazen's Billiard Problem**. 2008. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/AlhazensBilliardProblem.html>. Acesso em: 29 maio 2021.

WILLIAMS, S. D. P.; NIEVINSKI, F. G. Tropospheric delays in ground-based GNSS multipath reflectometry-Experimental evidence from coastal sites: Tropospheric Delays in GNSS-MR. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, v. 122, n. 3, p. 2310–2327, 2017.

WU, F. *et al.* Improving the GNSS-R Specular Reflection Point Positioning Accuracy Using the Gravity Field Normal Projection Reflection Reference Surface Combination Correction Method. **Remote Sensing**, v. 11, n. 1, p. 33, 2018.

WU, S.-C.; MEEHAN, T.; YOUNG, L. The potential use of GPS signals as ocean altimetry observable. *In*: National Technical Meeting, 1997, Santa Monica. **Proceedings of the National Technical Meeting**. Santa Monica: The Institute of Navigation, 1997.

ZAVOROTNY, V. U. *et al.* Tutorial on Remote Sensing Using GNSS Bistatic Radar of Opportunity. **IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine**, v. 2, n. 4, p. 8–45, 2014.



## APÊNDICE A – DETALHES DA INTER-VALIDAÇÃO ENTRE ALGORITMOS

Tabela A-1 – Ângulo rasante obtido pelos modelos de reflexão na esfera.

Ângulo de elevação (graus)	Ângulo Rasante (graus)				
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
90	90,0000	90,0000	90,0000	90,0000	90,0000
80	80,0008	80,0008	80,0013	80,0012	80,0013
70	70,0016	70,0016	70,0026	70,0026	70,0026
60	60,0026	60,0026	60,0040	60,0040	60,0040
50	50,0038	50,0038	50,0055	50,0055	50,0055
40	40,0054	40,0054	40,0074	40,0073	40,0074
30	30,0078	30,0078	30,0100	30,0100	30,0100
20	20,0123	20,0123	20,0146	20,0146	20,0146
10	10,0254	10,0254	10,0277	10,0277	10,0277
0	0,4140	0,4140	0,4154	0,4155	0,4154
-0,7179	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Fonte: o autor.

Tabela A-2 – Coordenada x do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera.

Ângulo de elevação (graus)	Coordenada x do ponto de reflexão (metros)				
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
90	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
80	88,1449	88,1442	88,1449	88,1463	88,1449
70	181,9442	181,9442	181,9442	181,9435	181,9442
60	288,6024	288,6024	288,6024	288,6029	288,6024
50	419,4233	419,4233	419,4233	419,4243	419,4233
40	595,6412	595,6412	595,6412	595,6431	595,6412
30	865,5074	865,5074	865,5074	865,5071	865,5074
20	1372,1345	1372,1345	1372,1345	1372,1367	1372,1345
10	2823,8848	2823,8849	2823,8848	2823,8719	2823,8848
0	46021,9791	46021,9793	46021,9791	46021,5998	46021,9791
-0,7179	79807,5816	79807,5816	79807,5145	80060,1221	79807,5816

Fonte: o autor.

Tabela A-3 – Coordenada y do ponto de reflexão obtido pelos modelos de reflexão na esfera.

Ângulo de elevação (graus)	Coordenada y do ponto de reflexão (metros)				
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
90	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
80	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006
70	-0,0026	-0,0026	-0,0026	-0,0026	-0,0026
60	-0,0065	-0,0065	-0,0065	-0,0065	-0,0065
50	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0138	-0,0138
40	-0,0278	-0,0278	-0,0278	-0,0278	-0,0278
30	-0,0588	-0,0588	-0,0588	-0,0588	-0,0588
20	-0,1478	-0,1478	-0,1478	-0,1478	-0,1478
10	-0,6259	-0,6259	-0,6259	-0,6259	-0,6259
0	-166,2520	-166,2520	-166,2520	-166,2492	-166,2520
-0,7179	-499,9608	-499,9608	-499,9599	-503,1300	-499,9608

Fonte: o autor.

Tabela A-4 – Atraso de propagação interferométrico obtido pelos modelos de reflexão na esfera.

Ângulo de elevação (graus)	Atraso de Propagação Interferométrico (metros)				
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
90	1000,0000	1000,0000	1000,0000	1000,0000	1000,0000
80	984,8097	984,8097	984,8097	984,8097	984,8097
70	939,7004	939,7004	939,7004	939,7004	939,7004
60	866,0428	866,0428	866,0428	866,0428	866,0428
50	766,0754	766,0754	766,0754	766,0754	766,0754
40	642,8369	642,8369	642,8369	642,8369	642,8369
30	500,0754	500,0754	500,0754	500,0754	500,0754
20	342,1402	342,1402	342,1402	342,1402	342,1402
10	173,8865	173,8865	173,8865	173,8865	173,8865
0	4,8310	4,8310	4,8310	4,8310	4,8310
-0,7179	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Fonte: o autor.

Tabela A-5 – Distância inclinada obtido pelos modelos de reflexão na esfera.

Ângulo de elevação (graus)	Distância Inclinada (metros)				
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
90	500,0000	500,0000	500,0000	500,0000	500,0000
80	507,7107	507,7106	507,7107	507,7109	507,7107
70	532,0773	532,0773	532,0773	532,0771	532,0773
60	577,3196	577,3196	577,3196	577,3198	577,3196
50	652,6329	652,6329	652,6329	652,6336	652,6329
40	777,6994	777,6994	777,6994	777,7008	777,6994
30	999,5808	999,5808	999,5808	999,5806	999,5808
20	1460,4454	1460,4454	1460,4454	1460,4475	1460,4454
10	2867,9176	2867,9178	2867,9176	2867,9049	2867,9176
0	46026,8015	46026,8016	46026,8015	46026,4221	46026,8015
-0,7179	79813,8459	79813,8459	79813,7788	80066,4063	79813,8459

Fonte: o autor.

Tabela A-6 – Comprimento de arco obtido pelos modelos de reflexão na esfera.

Ângulo de elevação (graus)	Comprimento de arco (metros)				
	Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller & Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
90	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
80	88,1493	88,1493	88,1449	88,1456	88,1449
70	181,9537	181,9537	181,9442	181,9438	181,9442
60	288,6185	288,6185	288,6024	288,6026	288,6024
50	419,4492	419,4492	419,4233	419,4238	419,4233
40	595,6837	595,6837	595,6412	595,6422	595,6412
30	865,5839	865,5839	865,5074	865,5072	865,5074
20	1372,3049	1372,3049	1372,1345	1372,1356	1372,1345
10	2824,5443	2824,5443	2823,8849	2823,8785	2823,8849
0	46105,4228	46105,4227	46022,3795	46022,2847	46022,3795
-0,7179	79809,6696	79809,6696	79809,6025	79809,4682	79809,6696

Fonte: o autor.

## APÊNDICE B – DETALHES DA VALIDAÇÃO NO HORIZONTE ESFÉRICO

Tabela B-1 – Ângulo rasante obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.

Altura (metros)	Resultado Esperado (graus)	Ângulo Rasante (graus)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	0	1,1e-11	1,8e-12	0	0	0
50	0	-1,1e-12	1,3e-12	1,9e-06	2,2e-06	0
100	0	2,4e-12	4,8e-10	0	0,0e+00	0
200	0	-2,1e-12	-3,7e-13	0	1,1e-06	2,4e-12
300	0	1,1e-12	1,4e-08	0	0,00e+00	8,1e-13
500	0	3,4e-13	1,0e-10	6,0e-07	1,8e-06	-8,1e-13
1000	0	6,1e-13	-2,8e-14	0	6,0e-07	0

Fonte: o autor.

Tabela B-2 – Coordenada X do ponto de reflexão obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Coordenada $x$ do Ponto de Reflexão (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	11287,1476	11287,1476	11287,1476	11287,1476	11322,4288	11287,1476
50	25238,7103	25238,7103	25238,7103	25238,5035	25081,0668	25238,7103
100	35692,7164	35692,7164	35692,7164	35692,4316	35696,4822	35692,7164
200	50476,5292	50476,5292	50476,5292	50476,3718	50635,0633	50476,5292
300	61820,1425	61820,1425	61820,1440	61820,1425	61821,5982	61820,1425
500	79807,5816	79807,5816	79807,5816	79807,5145	80060,1221	79807,5816
1000	112858,3210	112858,3210	112858,3210	112858,3210	113043,5339	112858,3210

Fonte: o autor.

Tabela B-3 – Coordenada Y do ponto de reflexão obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Coordenada y do Ponto de Reflexão (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0000	-10,0626	-10,0000
50	-49,9996	-49,9996	-49,9996	-49,9988	-49,3770	-49,9996
100	-99,9984	-99,9984	-99,9984	-99,9968	-100,0195	-99,9984
200	-199,9937	-199,9937	-199,9937	-199,9925	-201,2520	-199,9937
300	-299,9859	-299,9859	-299,9859	-299,9859	-300,0000	-299,9859
500	-499,9608	-499,9608	-499,9608	-499,9599	-503,1300	-499,9608
1000	-999,8430	-999,8430	-999,8430	-999,8430	-1003,1277	-999,8430

Fonte: o autor.

Tabela B-4 – Atraso de propagação interferométrico obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Atraso de Propagação Interferométrico (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	0	0	0	-3,7e-09	-7,5e-09	0
50	0	0	3,7e-09	3,7e-09	0	3,7e-09
100	0	3,7e-09	3,7e-09	0	-3,7e-09	0
200	0	0	0	0	-3,7e-09	0
300	0	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09
500	0	3,7e-09	0	3,7e-09	-3,7e-09	0
1000	0	0	-3,7e-09	-3,7e-09	-3,7e-09	3,7e-09

Fonte: o autor.

Tabela B-5 – Distância inclinada obtida no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Distância Inclinada (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	11287,1653	11287,16528	11287,16528	11287,16528	11322,44655	11287,1653
50	25238,9085	25238,90845	25238,90846	25238,70158	25081,26372	25238,9085
100	35693,2767	35693,27668	35693,27673	35692,99192	35697,04254	35693,2767
200	50478,1141	50478,11407	50478,11407	50477,95666	50636,65309	50478,1141
300	61823,0540	61823,05395	61823,05549	61823,05395	61824,50972	61823,0540
500	79813,8459	79813,84592	79813,84593	79813,77880	80066,40632	79813,8459
1000	112876,0382	112876,03820	112876,03820	112876,03820	113061,2802	112876,0382

Fonte: o autor.

Tabela B-6 – Comprimento de arco obtido no horizonte esférico pelos modelos de reflexão na esfera.

Altura (metros)	Resultado Esperado (metros)	Comprimento de Arco (metros)				
		Martín-Neira (1993)	Helm (2008)	Miller e Vegh (1993)	Numérico (Fermat)	Fujimura <i>et al.</i> (2019)
10	11287,1535	11287,15346	11287,15346	11287,15346	11287,15346	11287,1535
50	25238,7764	25238,77638	25238,77638	25238,56951	25238,52977	25238,7764
100	35692,9031	35692,90313	35692,90307	35692,61837	35692,90313	35692,9031
200	50477,0575	50477,05751	50477,05751	50476,90011	50476,93194	50477,0575
300	61821,1129	61821,11295	61821,11141	61821,11295	61821,11295	61821,1129
500	79809,6696	79809,66960	79809,66959	79809,60248	79809,46824	79809,6696
1000	112864,2262	112864,22620	112864,22620	112864,22620	112864,1591	112864,2262

Fonte: o autor.