UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO

JOÃO CARLOS MOTTA DOS SANTOS

Porto Alegre

2021

JOÃO CARLOS MOTTA DOS SANTOS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

Porto Alegre
2021

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Motta dos Santos, João Carlos
Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória por Meio da Resolução de Problemas/ João Carlos Motta dos Santos. -- 2021.
100 f.
Orientador: Alvino Alves Sant'Ana.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. Ensino-aprendizagem de Matemática. 2. Resolução de Problemas. 3. Análise Combinatória. 4. Estudo de caso. 5. GTERP.
I. Alves Sant'Ana, Alvino, orient. II. Título.

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO

João Carlos Motta dos Santos

Banca examinadora:

Profa. Dr. Bárbara Seelig Pogorelsky
UFRGS / IME

Prof. Dr. Carlos Hoppen
UFRGS / IME

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
UFRGS / IME

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus, por me conceder a oportunidade de realizar um curso de graduação e também conceder os meios para a realização deste sonho. Agradeço a meus pais, por terem me dado educação, suporte e incentivo. Agradeço à minha esposa, por sempre estar ao meu lado me incentivando, mesmo quando as coisas não iam bem. Agradeço aos professores do curso de Matemática que me auxiliaram durante o curso e me motivaram a seguir em frente. Agradeço ao Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana, pela sua amizade, paciência e dedicação, que tornaram a produção deste trabalho um caminho mais fácil e agradável de ser trilhado.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, que me concedeu a alegria de concluir esta etapa; a meus pais, que fizeram todo o possível para que eu chegasse até aqui; e à minha esposa, que tanto me auxiliou nessa jornada.

Confia ao SENHOR as tuas obras, e os teus designios serão estabelecidos.

Provérbios 16:3

RESUMO

O presente trabalho analisa as principais mudanças na prática pedagógica e o processo de formação dos conceitos ao implementarmos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio. Realizamos uma série de cinco encontros presenciais com um grupo de dez alunos de uma turma de segundo ano do Ensino Médio do Colégio Adventista do Partenon, em Porto Alegre. Como referencial teórico, utilizamos a Resolução de Problemas fundamentada em Polya, Onuchic e Allevato, Pozo e Echeverria, e Vianna. Para nortear a aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem, seguimos o roteiro proposto pelo GTERP - Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, da UNESP – Rio Claro. A metodologia de pesquisa utilizada foi o estudo de caso de natureza qualitativa. Analisamos o papel do professor ao orientar os alunos na resolução dos problemas seguindo, além da própria experiência, os passos para a resolução de um problema propostos por Polya. Uma de nossas conclusões é que a Resolução de Problemas propicia um ambiente no qual os conceitos da Análise Combinatória se desenvolvem de maneira mais natural do que no método tradicional, favorecendo o desenvolvimento de estratégias para a solução de problemas, minimizando o "uso automático" de fórmulas.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Resolução de Problemas. Análise Combinatória. Estudo de caso. GTERP.

ABSTRACT

The present work analyzes the main changes in the pedagogical practice and the process of formation of the concepts when we implement the Problem Solving as teaching-learning methodology of Combinatorics in High School. We conducted a series of five face-to-face meetings with a group of ten students from a second-year high school class at Colégio Adventista do Partenon, in Porto Alegre. As a theoretical framework, we use Problem Solving based on Polya, Onuchic and Allevato, Pozo and Echeverria, and Vianna. To guide the application of the teaching-learning methodology, we follow the script proposed by GTERP - Problem Solving Work and Study Group, from UNESP - Rio Claro. The research methodology used was a qualitative case study. We also analyze the role of the teacher in guiding students in solving problems, following, in addition to their own experience, the steps to solve a problem proposed by Polya. One of our conclusions is that Problem Solving provides an environment in which the concepts of Combinatorics develop more naturally than in the traditional method, favoring the development of strategies for solving problems, minimizing the "automatic use" of formulas.

Keywords: Teaching-learning. Problem Solving. Combinatorics. Case study. GTERP.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Diariamente necessitamos resolver os mais variados tipos de problemas. A habilidade de raciocinar corretamente e resolver problemas é útil em todas as áreas da vida. Em todos os ramos do saber, um problema pode se tornar um propulsor para o desenvolvimento de novas teorias e também de novas tecnologias. A Matemática desempenha um papel fundamental nesse processo de formação de novos conhecimentos, seja diretamente nos cálculos, seja na medida em que desenvolve o raciocínio lógico e analítico.

A habilidade de resolver problemas é fundamental para o ensino-aprendizagem de matemática. Como professor de matemática e estudante dessa disciplina, sempre busquei respostas para as seguintes questões: “como desenvolver essa habilidade?”; e “como ensinar outros a desenvolverem essa habilidade?”. Durante o curso da graduação descobrimos, estudando algumas tendências em educação matemática, que, com o auxílio e orientação de um professor preparado, a habilidade de resolver problemas pode ser desenvolvida por meio da própria resolução de problemas bem selecionados.

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino de matemática se propõe a promover oportunidades para que tanto o aluno quanto o professor desenvolvam uma atitude investigativa em sala de aulas, abandonando esse último o “status” de único detentor do conhecimento. Antes de haver uma formalização do conteúdo, o professor propõe uma série de problemas a partir dos quais os alunos desenvolverão conceitos e estratégias a fim de resolvê-los. Apesar de os problemas serem escolhidos pelo próprio professor, ele também se torna um investigador no sentido de auxiliar no desenvolvimento das soluções idealizadas pelos alunos. Sob essa metodologia o professor tem uma grande oportunidade de compartilhar, além do conhecimento do conteúdo, sua experiência em resolver problemas. Além disso, os alunos se colocam em uma posição muito mais ativa na sala de aula, ao desenvolverem junto com o professor os métodos para a resolução dos problemas.

Para o presente trabalho, escolhemos utilizar essa metodologia no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. O primeiro motivo desta escolha é que esse conteúdo não exige pré-requisitos, o que nos permite explorarmos ao máximo as potencialidades da metodologia de ensino-aprendizagem escolhida. Além disso, os

Princípios de contagem podem ser motivados pelas próprias situações descritas nos problemas. O segundo motivo de nossa escolha é a relevância do tema na ciência atual. Talvez o principal exemplo da importância deste tema seja a Computação. O terceiro motivo para escolhermos a Análise Combinatória é o fato de que, tradicionalmente, o assunto não é tratado com a devida importância no Ensino Médio. Via de regra, outros temas são priorizados em detrimento desse tópico tão importante.

Ao estudarmos maneiras de implementarmos a Resolução de Problemas em sala de aula, encontramos um roteiro proposto pelo Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, GTERP, da UNESP – Rio Claro. Esse roteiro nos chamou a atenção, em primeiro lugar, por determinar parâmetros simples e bem definidos para a aplicação da metodologia. Em segundo lugar, em cada uma das etapas propostas no roteiro é incentivada a interação entre professor e alunos.

Nossos principais objetivos ao realizarmos esta pesquisa foram analisar as principais mudanças na prática pedagógica, em relação ao método tradicional, ao utilizarmos a Resolução de Problemas para abordarmos alguns tópicos de análise combinatória; e analisar o processo de formação dos conceitos sob essa metodologia. Também estávamos interessados em observar a eficácia dessa metodologia em relação ao desenvolvimento da habilidade de resolver problemas.

A coleta de dados de nossa pesquisa se deu durante uma prática, no formato de oficinas de matemática, realizada com alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Adventista do Partenon, na cidade de Porto Alegre, em 2018. Foram cinco encontros presenciais no turno inverso das aulas regulares da turma. Os tópicos de análise Combinatória abordados nas oficinas foram: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutações sem Repetição e Combinações Simples. Para abordar esses tópicos, utilizamos problemas de livros-texto específicos sobre o assunto, problemas retirados de provas da OBMEP, e problemas elaborados por nós mesmos.

Nosso Trabalho está dividido em sete capítulos, sendo o primeiro esta introdução. No segundo capítulo, apresentamos o referencial teórico que fundamenta nosso Trabalho. Na primeira seção, apresentamos um breve histórico do desenvolvimento da Resolução de Problemas, principalmente nos Estados Unidos e no Brasil. Na segunda seção, apresentamos alguns conceitos de problema que adotamos em nosso Trabalho, e apresentamos as diferenças fundamentais entre problema e exercício. Na terceira seção, discorremos sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, destacando a importância dessa metodologia no ensino-aprendizagem de Matemática; apresentamos e comentamos os passos para a resolução de um problema propostos por Polya; abordamos o papel do professor ao aplicar essa metodologia; e apresentamos detalhadamente o roteiro sugerido pelo GTERP mencionado acima.

No terceiro capítulo apresentamos uma revisão bibliográfica, descrevendo os quatro principais trabalhos que contribuíram para a realização da nossa pesquisa. O primeiro deles foi a dissertação de mestrado de Rossano Ewaldt Steinmetz Ribeiro, intitulada "Uma Proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio". O segundo trabalho foi a dissertação de mestrado de Marcelio Adriano Diogo, cujo título é "Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio". O terceiro foi o Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de Alessandro Bagatini, intitulado "Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas". O último trabalho descrito em nossa revisão foi o Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de Anelise Pereira Baur, intitulado "O Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas".

No quarto capítulo, abordamos a metodologia de pesquisa adotada em nosso Trabalho: o estudo de caso de natureza qualitativa. Na primeira seção apresentamos uma descrição do estudo de caso e a importância da abordagem qualitativa na pesquisa em educação matemática. Na segunda seção apresentamos a escola, o contexto social em que estavam inseridos os participantes da pesquisa, e detalhes do funcionamento da nossa prática.

No quinto capítulo, fizemos a descrição de nossa prática. Descrevemos cada um dos cinco encontros separadamente, narrando os acontecimentos em cada etapa do roteiro. Apresentamos as discussões dos problemas de maneira detalhada, a fim de mostrar o desenvolvimento dos conceitos e os resultados obtidos.

No sexto capítulo, analisamos os dados obtidos na prática à luz de nosso referencial teórico. Analisamos os dados de cada aula separadamente, tomando o cuidado de não ser repetitivo nas observações. Observamos, de maneira geral, em que aspectos aquilo que ocorreu na prática se aproximou do que foi posto em nosso referencial teórico. Analisamos o papel do professor durante a resolução dos problemas. Observamos o quanto os alunos colocavam em prática os passos apresentados por Polya durante a resolução dos problemas, e também o quanto o professor auxiliou os alunos a colocarem em prática esses passos. Também observamos o impacto da participação dos alunos, em cada etapa da aula (determinada pelo roteiro), no desenvolvimento das técnicas de resolução e dos conceitos abordados.

No sétimo e último capítulo, fizemos nossas considerações finais, retomando nossos objetivos e colocando até que ponto eles foram atingidos. Também fizemos considerações a respeito de aspectos específicos da aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem, e a respeito do roteiro utilizado na realização das aulas.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Fundamentamos nossa prática de sala de aula na metodologia de ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas, a qual será descrita na primeira seção, e nos passos para a resolução de problemas apresentados por Polya. Utilizamos o conceito de problema adotado pelos autores consultados e tomamos por referência os objetivos estabelecidos nos PCN. As atividades em sala de aula foram desenvolvidas de acordo com as orientações do Segundo Roteiro desenvolvido pelo Grupo de Estudos em Resolução de Problemas da UNESP.

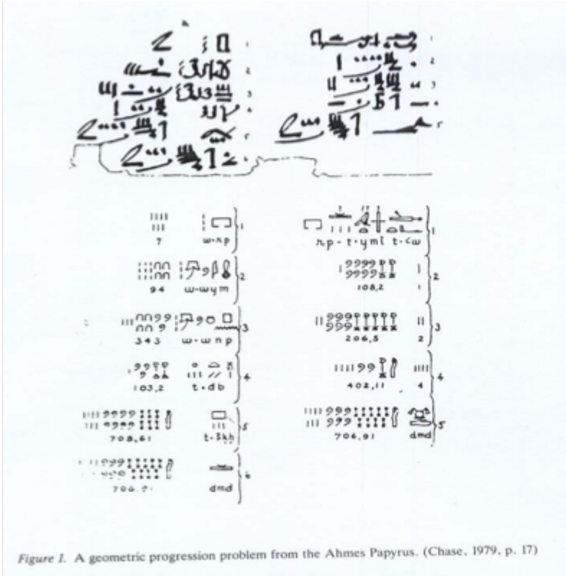
2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em nossa abordagem sobre Resolução de Problemas como metodologia de ensino, desenvolvemos os tópicos que consideramos essenciais para sua implementação em sala de aula. Na primeira seção, apresentamos um breve relato a respeito do uso de problemas matemáticos em civilizações antigas, seguido de um breve histórico da Resolução de Problemas como metodologia de ensino na América, em especial nos Estados Unidos e no Brasil. Na seção seguinte, destacamos as diferenças entre problemas e exercícios. Finalizamos esse capítulo com uma abordagem para a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, sua importância para o ensino de Matemática, sua relação com os objetivos presente nos PCN, os passos propostos por Polya (2006) para a resolução de um problema e o Roteiro de Atividades para as aulas proposto por Onuchic e Allevato (2011).

2.1.1 - Um breve histórico sobre a Resolução de Problemas

Existem registros de problemas matemáticos datados de períodos que “remontam [...] tão longe como os antigos egípcios, chineses e gregos.” (STANIC; KILPATRICK, 1990, p. 2). Um desses registros, chamado de Papiro de Ahmés, que foi copiado de um documento mais antigo pelo escriba egípcio Ahmés, consiste numa lista de problemas. Na figura 1 podemos ver um problema contido no papiro. O problema consiste em encontrar a soma de cinco elementos de uma progressão geométrica com razão e primeiro termo iguais a sete.

Figura 1 - Problema de progressões contido no Papiro de Ahmés



Fonte: CHASE, 1979, p. 17[1] apud STANIC; KILPATRICK, 1990, p.3

Referindo-se à América, Stanic e Kilpatrick (1990, p. 4) afirmam que "até muito recentemente, ensinar a resolução de problemas significava apresentar problemas e talvez, incluir um exemplo de uma solução técnica específica". Concordando com esses autores, Onuchic (1999, p. 201) afirma que "no início do século XX o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante".

Um dos primeiros esforços no sentido de considerar a Resolução de Problemas como uma forma de ensinar Matemática foi feito pelo matemático húngaro George Polya, com a publicação de *How to solve it*[2] em 1944[3]. Seu principal objetivo era ensinar técnicas que conduzissem à solução dos mais variados tipos de problemas. Ele considerava a Resolução de Problemas uma ciência, que poderia ser ensinada, como, por exemplo, se ensina a cozinhar.

Em relação ao Brasil, Onuchic (1999, p. 202) afirma que "em 1964 [...] o Professor Luis Alberto S. Brasil defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos".

---

[1] Chase, A. B. *The Rhind mathematical papyrus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1979.

[2] Livro traduzido para o português com o título: *A Arte de Resolver Problemas*.

[3] No presente trabalho utilizamos a versão traduzida de seu livro publicada em 2006.

Entre as décadas de 1960 e 1970 houve uma mudança gradual na metodologia de pesquisa em Educação Matemática, que passou a ter um caráter qualitativo, em detrimento da natureza quantitativa que vinha tendo até então. O principal reflexo dessa mudança foi que a preocupação dos pesquisadores deixou de ser tanto a performance dos alunos em obter as respostas corretas dos problemas, e se tornou analisar os processos envolvidos durante as resoluções.

Onuchic (1999, p. 204) afirma que no final dos anos 70 "a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas". No ano de 1980 o *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM – publicou um documento intitulado "*An agenda for action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's"*. Segundo Stanic e Kilpatrick (1990, p. 1), na primeira página do documento está a afirmação de que "a Resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar". Algumas recomendações desse documento ressaltam, conforme Onuchic (1999, p. 205), que "o currículo matemático deveria ser organizado ao redor de resolução de problemas", e que "os professores de matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar".

A partir de então foram desenvolvidos muitos materiais, tais como coleções de problemas, listas de estratégias e sugestões de atividades. Boa parte desse material contribuiu para transformar a resolução de problemas no ponto central do trabalho dos professores de Matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Mesmo assim o resultado não foi satisfatório, pois não havia um esclarecimento adequado sobre o que é resolução de problemas, por quê devia-se fazê-la ou sobre que posição ela assumia no contexto histórico (STANIC; KILPATRICK, 1990, p. 1).

Ainda na década de 1980, Schroeder e Lester (1989, p. 31-34) apresentaram três maneiras de se entender e abordar a Resolução de Problemas: ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar *para* resolver problemas e ensinar *por meio* ou *via* resolução de problemas. O trabalho de Polya (2006), listando técnicas e sugestões para a resolução de problemas, apresenta o ensino de matemática baseado na primeira abordagem acima. Ao ensinar Matemática *para* resolver problemas, o objetivo é desenvolver conteúdos matemáticos que capacitem o indivíduo a resolver problemas. Schroeder e Lester (1989, p. 32) afirmam: "Um forte adepto dessa abordagem pode afirmar que a única razão para aprender matemática é ser capaz de usar o conhecimento para resolver problemas". Em relação à terceira abordagem, ensinar *por meio* da resolução de problemas, Schroeder e Lester (1989, p. 33) afirmam que resolver problemas deixa de ser somente o motivo de se aprender Matemática, e se torna um meio de fazê-lo. O trabalho começa com uma situação-problema que incorpora aspectos-chave do tópico a ser ensinado. Como resposta ao problema proposto, são desenvolvidas técnicas matemáticas que podem transformar problemas não-rotineiros em rotineiros.

Durante os anos de 1980 a 2000 o NCTM publicou outros trabalhos visando auxiliar a prática dos educadores destacando os aspectos essenciais para o ensino de Matemática, como por exemplo: *Assessment Standards for School Mathematics*, publicado em 1995 e *Principles and Standards for School Mathematics*, publicado no ano 2000 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Foi a partir do *Standards 2000*, segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 79), "que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática *através* da resolução de problemas".

No Brasil, podemos destacar a tese de livre docência do professor Luiz Roberto Dante (1988), publicada em 1988, e outros trabalhos acadêmicos orientados por ele, que prestam importante contribuição para a Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999, p. 213). Também destacamos a iniciativa da professora Lourdes de la Rosa Onuchic, ao se tornar uma das fundadoras do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, GTERP, em 1997 na UNESP – Rio Claro. Desde então o grupo participa "em Congressos Nacionais e Internacionais, Encontros de Educação Matemática regionais, estaduais e nacionais" (ONUCHIC, 1999, p. 213).

2.1.2 - O que é um Problema

Antes de falarmos sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, precisamos esclarecer o que se entende por problema e qual a diferença entre problema e exercício. Abaixo listamos algumas definições, ou "aproximações" (VIANNA, 2002, p. 402), do que seria um problema:

- Problema "é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução" (DANTE, 1988 apud FERREIRA, p. 8).

- “Um sujeito está diante de um problema quando:

  a) tem uma questão para resolver;

  b) quer ter uma resposta para essa questão;

  c) não tem, previamente, uma resposta para essa questão.” (VIANNA, 2002, p. 402).

- “Um sujeito está diante de um problema quando se confronta com uma questão à qual não sabe dar resposta ou quando está diante de uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos de que já dispõe.” (VIANNA, 2002, p. 402).

- “Um problema se define como uma situação em que o indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho da ação necessária para conseguir o que quer” (NEWELL; SIMON, 1972 apud POGGIOLI, 2001).

Podemos dizer que uma situação ou questionamento podem ser chamados de problema quando desejamos, ou necessitamos, encontrar uma solução e não dispomos, a priori, de técnicas ou recursos para encontrá-la. Assim o que é um problema para um certo indivíduo ou grupo pode não ser para outro, seja pela quantidade de recursos que o indivíduo ou grupo possua, seja pelo desinteresse na questão (POZO; ECHEVERRIA, 1998).

Mas afinal, o que seria um exercício? Segundo Pozo e Echeverria,

> De forma sintética, podemos dizer que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas sobreaprendidas (ou seja, transformadas em rotinas automatizadas como consequência de uma prática contínua). Limitamo-nos a exercitar uma técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, podem ser resolvidas pelos caminhos ou meios habituais. (POZO; ECHEVERRIA, 1998, p.16).

Concluímos que quando realizamos procedimentos tais como aplicar fórmulas já estudadas e compreendidas, repetir argumentos de demonstração em situações análogas a outras já conhecidas, ou quando realizamos um procedimento sobre cujo algoritmo tenhamos compreensão, estamos assim fazendo um exercício. Vemos também que os exercícios são parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, na medida em que aumentam a perícia na aplicação de novos conhecimentos.

2.1.3 - Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

A importância atual da Resolução de Problemas para o ensino de Matemática se revela na medida em que

> […] vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (BRASIL, 2018, p. 40).

A Resolução de Problemas em sala de aula se torna parte integrante desse processo de inserção consciente dos alunos, e também de professores e escola, na sociedade atual.

O ensino de Matemática em nosso país se dá muito mais valendo-se da resolução de exercícios do que da resolução de problemas. Nesse contexto “o aluno habitua-se a ficar mais preocupado com as operações que terá que usar para resolver o problema do que com a interpretação da situação e com os processos envolvidos na sua solução” (FERREIRA, 2009, p. 5).

Segundo Onuchic,

> […] o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver a própria compreensão. (ONUCHIC, 1999, P. 208).

O aluno cria, mediante o próprio esforço, um caminho em sua mente, o que é muito mais natural do que a captação de uma ideia tirada de algum livro ou colocada por outrem, mesmo que durante esse esforço necessite da ajuda do professor ou de algum colega. Além disso os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – listam como objetivos do ensino de Matemática no nível médio:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
>
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
>
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
>
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
>
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
>
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
>
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
>
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
>
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 2018, p. 42).

Com esses objetivos em mente, percebemos que os alunos devem frequentemente ser colocados diante de situações-problema nas quais precisem se valer de conhecimentos de diversas áreas, não só de conhecimentos matemáticos; nas quais o conhecimento já adquirido seja insuficiente para resolvê-la; em que sejam levados a questionar e validar os próprios procedimentos e conclusões (ONUCHIC, 1999); nas quais tenham oportunidade de extrair lições dos próprios erros (ONUCHIC, 1999); em que possam fazer conjecturas, descobrir padrões e estabelecer conexões (ONUCHIC, 1999). Também devem ser propostas situações-problema em que o trabalho em equipe seja indispensável.

É notável o fato de que a resolução de problemas em sala de aula pode se tornar um fator decisivo no desenvolvimento da autonomia e senso crítico dos alunos, auxiliando-os a avaliar as situações sob diversos pontos de vista, e estimulando-os a ponderar as consequências de suas decisões.

Em relação aos dados oficiais a respeito do desempenho dos alunos ao fazerem uso de seus conhecimentos matemáticos, Sousa (2005, p. 2) afirma que, "os programas que realizam avaliações para conhecer o nível de conhecimento matemático da população, organizam seus testes contemplando a resolução de problemas como prioritária na avaliação". Entre esses programas está o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA. Sousa afirma que

> Este programa é desenvolvido e coordenado internacionalmente pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), sendo no Brasil coordenado pelo INEP. De acordo com o PISA, o aluno apresenta dificuldade em recuperar e transformar um dado matemático e a origem desta dificuldade pode estar na leitura e transformação da linguagem matemática, portanto, a leitura ultrapassa a aprendizagem em língua materna e requer uma sistematização por todos os envolvidos no processo de ensino, considerando fundamental trabalhar em sala de aula a resolução de problemas para um "resgate" da linguagem matemática. (SOUSA, 2005, p. 2)

Podemos observar que, conforme descrito acima, a dificuldade em recuperar e transformar dados se manifesta de maneira acentuada não só em alunos brasileiros. Esse quadro apresentado pelo PISA reforça a necessidade da construção da linguagem matemática dentro do contexto dos problemas e da interdisciplinaridade para que o ensino-aprendizagem seja efetivo. Podemos ver também que o PISA coloca a resolução de problemas como meio de se alcançar alguns dos objetivos dos PCN, como o segundo, o quinto e o sexto, dentre os listados acima.

A fim de se resolver um problema, é necessário que o indivíduo coloque em uso uma série de habilidades e funcionalidades do intelecto, de maneira planejada, tudo dependendo das exigências do caso em questão. Mas também "é verdade que existe uma série de procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas e que todas as pessoas colocam em ação com maior ou menor competência" (POZO; ECHEVERRIA, 1998, p. 22).

A respeito dessas habilidades comuns à resolução de todos os problemas, Ramos (et. al., 2002, p. 9) comenta que "as primeiras ideias um pouco mais positivas e razoáveis no sentido da heurística de resolução de problemas vêm com o filósofo e matemático francês René Descartes (1596 – 1650)". O autor explica que Descartes, ao escrever a obra *Regulae ad directionem ingenii*, que em uma tradução livre pode ser escrito como “Regras para a direção da inteligência”, procurou descrever um método que, segundo ele, levaria à solução de qualquer problema. Ramos mostra que, de maneira resumida, esse método se aplicaria em três fases:

> - Reduzir todo problema algébrico a um problema contendo apenas equação(ões);
> - Reduzir todo problema matemático a um problema algébrico; e
> - Reduzir qualquer problema a um problema matemático. (RAMOS et. al., 2002, p. 9).

Ressaltamos que, mesmo nos casos em que é possível reduzir o problema a uma equação, às vezes fica difícil determinar até se ela possui alguma solução, como no caso de algumas equações diferenciais.

Além da Matemática, a Resolução de Problemas também é um assunto de interesse da Psicologia. Ramos (2002) cita o trabalho do psicólogo inglês Graham Wallas (1858 – 1932), que criou um modelo no qual ordena o pensamento criativo em quatro fases:

> 1. <u>Saturação</u>: você trabalha no problema até ter feito tudo o que podia com ele.
> 2. <u>Incubação</u>: você tira o problema do seu consciente e deixa o subconsciente tomar conta dele. Ou seja, você “dorme” sobre ele. Esta é a parte fácil.
> 3. <u>Inspiração</u>: a resposta chega subitamente, sem que você esteja pensando no problema.
> 4. <u>Verificação</u>: você checa a solução apenas para ter certeza de sua correção. (RAMOS et. al., 2002, p. 10)

Esse modelo, apesar de abrangente, não apresenta nenhum detalhamento em relação aos procedimentos que se poderia adotar ao se resolver um problema. Apenas escreve o que possivelmente acontece na mente de alguém que de fato busca resolver uma questão, mas não diz explicitamente *como* realizar essa busca.

A publicação, em 1944, de *How to Solve* It, por George Polya, se torna um marco para a Resolução de Problemas, pois, segundo Ramos (et. al., 2002, p. 11), “suas ideias representam uma grande inovação em relação às ideias de resolução de problemas existentes até então”. No livro, Polya apresenta uma lista sistemática de procedimentos e indagações que podem conduzir à solução de um problema. Essa lista pode ser lida na figura 2.

No primeiro passo, a compreensão do problema, o autor diz que, em primeiro lugar, “o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido” (POLYA, 2006, p. 5). Também explica que é nesse momento em que se deve identificar as partes principais do problema, como incógnita e os dados. Para auxiliar na execução de cada passo ele sugere algumas perguntas que o próprio aluno pode se fazer ou que o professor pode sugerir ao aluno, como vemos na figura 2.

Figura 2 - Passos para resolução de um problema

Como Resolver Um Problema

Primeiro

É preciso *compreender* o problema.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separa as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

Segundo

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.

É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não poderes encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução

ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu resultado? ? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Terceiro

Execute o seu plano

EXECUÇÃO DO PLANO

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto

Quarto

Examine a solução obtida

RETROSPECTO

É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Interciência, Rio de Janeiro, 2º edição, 1995, p.XII e XIII.

A respeito do segundo passo, o autor afirma que “o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano” (p. 7). Essa concepção normalmente estará atrelada a experiências anteriores, por isso sua recomendação é começar o trabalho com a seguinte pergunta: *conhece um problema correlato?* Dentre todos os problemas que poderão vir à mente nesse momento, aquele que mais poderá ser útil será o que tiver a mesma incógnita ou uma semelhante. Outras recomendações e estratégias discutidas em detalhes na obra são mencionadas brevemente na figura 2.

Ao aplicar o terceiro passo, a execução do plano, deve-se examinar cada um dos passos a fim de que “não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro” (p. 10). O autor observa que o maior risco nessa fase é que o estudante esqueça do plano. Isso pode acontecer mais facilmente quando o aluno recebe a ideia pronta de algum colega ou do próprio professor.

O último passo, que Polya chama de retrospecto, é o momento em que se verifica todo o trabalho feito até aqui. Também é o momento em que se pode tentar descobrir se não existem outras maneiras de solucionar o problema. Além disso, estudante e professor podem procurar relações entre o resultado encontrado e outros problemas, estabelecendo conexões. Polya (2006, p. 12) afirma: “um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado”.

Polya destaca o papel do professor ao acompanhar os alunos durante a resolução dos problemas. Ele afirma que o professor, ao se dirigir ao aluno com uma das indagações contidas na figura 2, deve ter dois objetivos em mente: o primeiro é auxiliar o aluno a resolver o problema, e o segundo é desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas por si. Ao ajudar o aluno a resolver um problema ele deve sugerir, sempre que possível, “um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante*” (p. 1). Também afirma que

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais, nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável de trabalho*. (POLYA, 2006, p. 1)

Entendemos que essa atitude descrita acima não só é compatível com os objetivos colocados pelos PCN como também é parte essencial do trabalho do professor que deseja o desenvolvimento pleno e harmônico das habilidades de seus alunos.

Em relação às três maneiras de se abordar a Resolução de Problemas elencadas por Schroeder e Lester (1989, p. 31-34) (ensinar *sobre*, ensinar *para* ou ensinar *via*), Onuchic (1999, p. 207) observa que “embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas matemáticos possam ser separadas, na prática elas se superpõem e acontecem em várias combinações e sequencias”.

De acordo com os autores, quando abordamos um tópico de Matemática *por meio* da Resolução de Problemas, solucionar os problemas selecionados deixa de ser apenas o fim da aprendizagem e passa a ser um *meio* pelo qual ela se dá. O aluno tem a oportunidade de, ao buscar uma solução para o seu problema, desenvolver conceitos e construir estratégias que posteriormente poderão ser formalizadas pelo professor. O desenvolvimento e implementação dessas estratégias, mesmo as que não chegarem a ser formalizadas, trazem motivação e segurança para o aluno.

O professor começa selecionando situações-problema que envolvam, em diversos níveis, o conceito ou temática que deseja abordar. Antes de haver qualquer explicação ou detalhamento do conteúdo específico, o mestre propõe uma, ou uma lista, dessas situações e os alunos são “desafiados” a buscarem por si uma solução. Enquanto os alunos armam estratégias e fazem conjecturas, o professor participa discutindo e ajudando a analisar aquilo que está sendo feito *pelos próprios alunos*, em vez de ficar dando respostas prontas. O professor participa ativamente orientando os alunos a desenvolverem suas ideias e a formar os conceitos abordados pelos problemas.

Segundo Onuchic e Allevato

> Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82)

Essa mudança de atitudes e de postura traz benefícios tanto para o professor quanto para o aluno, como destacam Onuchic e Allevato:

> • Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
>
> • Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
>
> • Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
>
> • Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
>
> • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
>
> • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82)

Relacionando o ensino de Matemática *por meio* da Resolução de Problemas com os objetivos propostos pelo NCTM e pelos PCN, Onuchic afirma:

> Sem dúvida, ensinar matemática através da resolução de problemas é a abordagem mais consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidas no contexto de resolução de problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em resolução de problemas, e o trabalho de ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. (ONUCHIC, 1999, p. 207)

Não existe um programa ou plano definitivo para a implementação da Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática, entretanto o GTERP - Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, no intuito de auxiliar os educadores a adotarem essa metodologia, desenvolveu, um Roteiro de

Atividades para as aulas, constituído das seguintes etapas[4]: formar grupos e entregar uma atividade; redefinir o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização. (ONUCHIC, 1999, p. 216-217).

Posteriormente, em função de estudos realizados pelo Grupo e também pelo retorno dado pelos professores, foi elaborado um “Segundo Roteiro” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83):

> \- *Preparação do problema* - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
>
> \- *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
>
> \- *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
>
> > • Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
> >
> > • Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
>
> \- *Resolução do problema* - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
>
> \- *Observar e incentivar* – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
>
> > • O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da

---

[4] O funcionamento de cada uma dessas etapas está descrito logo a seguir, na segunda versão do roteiro elaborado pelo GTERP.

> resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
>
> - *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
>
> - *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
>
> - *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
>
> - Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85)

Merece destaque a fase de preparação e escolha dos problemas. O tópico a ser estudado será motivado e desenvolvido por meio da resolução desses problemas, e os conteúdos envolvidos serão claramente expostos somente em um momento posterior, na “Formalização”. Resolver o problema se torna essencial à assimilação do tópico estudado, e não o contrário, como no método tradicional de ensino. Isso exige do professor um trabalho minucioso de elaboração e seleção de situações-problema nas quais o aluno se sinta desafiado e motivado a procurar uma solução e a discutir com os colegas e com professor.

Durante a etapa denominada “Observar e incentivar”, o professor deve ter em mente que “a habilidade de resolver problemas não é inata, muito pelo contrário, pode e deve ser desenvolvida” (DIOGO, 2007, p. 16). Segundo Soares e Pinto (2001, p. 7), o professor “deve criar um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final”. Utilizando a própria experiência e também os procedimentos descritos por Polya (2006), o professor fará questionamentos e dará orientações, em grande parte genéricas, propiciando que os alunos, frente a outras situações-problema, sigam essas orientações e façam os mesmos questionamentos (ou adaptados). Polya afirma:

> Se a mesma indagação for proveitosamente repetida, dificilmente o estudante deixará de notá-la e será induzido a formular, ele próprio, essa indagação em situação semelhante. Pela repetição da indagação poderá chegar à resposta certa. Com tal sucesso, ele descobrirá a maneira correta de utilizar a indagação e assim a terá realmente assimilado. (POLYA, 2006, p. 3)

Entendemos que dessa maneira o aluno desenvolve sua capacidade de resolver problemas, alcançando não só os objetivos do conteúdo específico, mas da Matemática como disciplina.

Por fim destacamos a etapa denominada Plenária, pois nesse momento da aula cada aluno poderá descobrir novos caminhos e ideias, apresentados por seus colegas, que talvez sejam úteis em outras situações. Ao defender sua estratégia diante da turma e do professor, o aluno reforça a confiança em si mesmo. O foco da discussão estará naquilo que foi produzido pelos alunos e não exclusivamente no conteúdo ou na resposta final.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ao elaborarmos a presente pesquisa, fizemos a leitura de outros trabalhos que abordam o ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas, a fim de obter suporte teórico e inspiração. Nesse capítulo, destacamos quatro trabalhos que contribuíram mais diretamente na elaboração da nossa pesquisa.

Iniciamos com a dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática de Rossano Ewaldt Steinmetz Ribeiro, intitulada "Uma Proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio". Uma de suas questões norteadoras foi sobre a "forma de desenvolver um ensino interessante e contextualizado dos conceitos de Probabilidade" (Ribeiro, 2012, p. 87). Um dos principais objetivos de sua pesquisa era analisar a "possibilidade de desenvolver o Ensino de Probabilidade através da resolução de problemas em um cenário para investigação com referências à realidade" (RIBEIRO, 2012, p. 87).

Em seu referencial teórico, o autor começa introduzindo os conceitos de "Ambientes de Aprendizagem" e "Cenários para Investigação", de Skovsmose. Em relação a esse último, o autor usa as próprias palavras de Skovsmose: "Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações" (SKOVSMOSE, 2008, p. 21 apud RIBEIRO, 2012, p. 12). Além disso, utiliza a expressão "paradigma do exercício" para se referir ao ensino de Matemática baseado apenas na resolução de exercícios repetitivos. Quanto aos Ambientes de Aprendizagem, o autor apresenta os seis tipos classificados por Skovsmose, divididos entre o paradigma do exercício e os Cenários para Investigação, conforme quadro apresentado pelo autor e reproduzida abaixo:

Quadro 1: Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenário para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Bolema, nº 14, pp. 66 a 91. Disponível em

<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022 >

Ribeiro segue descrevendo, primeiramente, os ambientes (1), (3) e (5), e depois os ambientes (2), (4) e (6), contrastando os ambientes de aprendizagem dentro do paradigma do exercício com os ambientes que motivam o desenvolvimento de um cenário para investigação em sala de aulas. Seguindo a ideia de Skovsmose, o autor apresenta exemplos de problemas em cada um dos seis ambientes.

Em seguida, o autor discorre sobre a Resolução de Problemas, iniciando com a definição de problema proposta por Lester (apud POZO, 1998, p. 15): "uma situação em que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução". Apresenta a visão dos PCN em relação ao papel da Matemática no desenvolvimento de habilidades em resolução de problemas. Também enfatiza a importância do professor nesse processo de desenvolvimento, orientando e se valendo da sequência de passos para resolução de problemas proposta por Polya (2006).

Como metodologia de pesquisa o autor utilizou o estudo de caso de caráter qualitativo. Em sua sequência didática, o autor aborda os conceitos de Probabilidade, com uma turma do 3º ano do Ensino Médio. Em suas aulas utiliza, inicialmente, um questionário "com o objetivo de sondar concepções e conceitos que os alunos têm acerca do conteúdo Probabilidade" (RIBEIRO, 2012, p. 31), além de verificar algumas expectativas que o próprio autor tinha. Após uma sequência de 4 aulas, finaliza aplicando uma avaliação final. Dentre as análises feitas pelo autor, vale destacar

> […] que num cenário para investigação, diferentemente do paradigma do exercício, a participação dos alunos também interfere na preparação da sequência didática, pois como já colocamos, é papel do professor orientar os alunos, e uma das formas de realizar esta orientação é propondo atividades no decorrer das aulas. Consequentemente, a participação dos alunos irá influenciar na escolha das atividades e em sua abordagem. (RIBEIRO, 2012, p. 52)

Em suas considerações finais, sobre o objetivo de se analisar a possibilidade de desenvolver o Ensino de Probabilidade através da resolução de problemas em um cenário para investigação com referências à realidade, o autor afirma que

> Nossa sequência didática propiciou a construção de um Ambiente de Aprendizagem de cenários para investigação e abriu espaço para movimentos dentro da matriz proposta por Skovsmose, apresentada no quadro 1. Também possibilitou o ensino dos conceitos de Probabilidade de forma envolvente, com a participação ativa dos alunos; e não passiva, muito comum em ambientes sob o paradigma do exercício. (RIBEIRO, 2012, p. 87)

Ribeiro, portanto, conclui ter atingido seus objetivos em relação à pesquisa.

A segunda pesquisa que contribuiu para a elaboração da nossa é a dissertação de mestrado em Ensino de Matemática de Marcelio Adriano Diogo, cujo título é “Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio”. Seu principal objetivo é “verificar se o uso de problemas geradores é um procedimento eficiente para justificar o estudo de um conteúdo novo de novo em Matemática” (DIOGO, 2007, p. 6). O autor começa observando que as atividades descritas em sua dissertação se constituem em práticas rotineiras de sua atuação, que foram utilizadas em anos anteriores e serão utilizadas nos anos seguintes, com o intuito de estimular os leitores a se permitirem implantar algumas ideias com a finalidade de produzir seus próprios resultados nos seus segmentos de atuação (DIOGO, 2007, p. 12).

No capítulo sobre Resolução de Problemas, autor apresenta alguns conceitos de problema semelhantes e diferencia problema de exercício. Também apresenta parte do conteúdo dos PCN e das Orientações Curriculares para o Ensino Médio a respeito do tema. Além disso, ressaltamos a lista com alguns critérios que, de acordo com o autor, permitem transformar as tarefas em problemas ao invés de exercícios (DIOGO, 2007, p. 17).

O autor segue descrevendo o conceito de “situação didática” como sendo “formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para a aprendizagem de um conteúdo específico” (PAIS, 2002, p. 65 apud DIOGO, 2007, p. 20). Já as “situações adidáticas” são aquelas, segundo Brousseau (1966, apud DIOGO, 2007, p. 9), que vão além dos objetivos traçados inicialmente pelo professor, proveniente da ação dos próprios estudantes, e que deve ser explorada, uma vez que produz abordagens que vão ao encontro das expectativas dos alunos.

A utilização, por parte do professor, de problemas geradores é uma maneira de promover essas situações em sala de aulas. Isso porque “o problema inicialmente proposto sempre terá a finalidade de desenvolver ao máximo as habilidades de autonomia e busca de pontes entre o que já é sabido e aquilo que se deseja saber” (DIOGO, 2007, p. 21). O autor também qualifica os problemas geradores, dentro da teoria de Aprendizagem Significativa, de Ausubel, como “material potencialmente significativo” (DIOGO, 2007, p. 24).

A metodologia utilizada por Diogo é o estudo de caso de natureza qualitativa. Os conteúdos abordados na sequência de atividades propostas na pesquisa foram “Trigonometria, Matemática Financeira, Sequências e Probabilidade, na 2ª série do Ensino Médio, e Geometria Analítica, na 3ª série do Ensino Médio” (DIOGO, 2007, p. 35). As atividades eram realizadas em duplas ou individualmente.

Dentre as análises feitas pelo autor, podemos destacar a seguinte: “Muitas vezes as situações didáticas planejadas pelo professor evoluíam para situações adidáticas, pois os alunos relacionavam as atividades com situações vividas por eles ou seus pais. Assim transpunham a investigação da sala de aula para outros ambientes.” (DIOGO, 2007, p. 57).

Na Conclusão da pesquisa, o autor coloca que, de fato, a utilização de problemas geradores permitiu que aspectos importantes relacionados aos conteúdos fossem descobertos pelos próprios alunos antes que fossem expostos formalmente em sala de aula, e que o aluno se torna sujeito de seu desenvolvimento (DIOGO, 2007, p. 87). Afirma ter verificado evidências de aprendizagem significativa, na medida em que a realização dos problemas geradores em duplas ou pequenos grupos permitiu a troca de ideias e estratégias, e auxiliava os alunos a produzirem avanços, podendo observar que a nova informação se relacionava com aspectos da estrutura de conhecimento já existente no aprendiz, tal como Asubel estabelece (DIOGO, 2007, p. 87). Também conclui que o uso de problemas geradores antecedendo o conteúdo a ser apresentado, bem como a utilização de problemas que exigem transformação do conhecimento, evita a simulação da aprendizagem, e oferece uma alternativa para a apresentação do tópico de Análise Combinatória e Probabilidade (DIOGO, 2007, p. 88).

O terceiro trabalho que destacamos dentre aqueles que influenciaram nossa pesquisa foi o Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de Alessandro Bagatini, intitulado “Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas”. Seu principal objetivo era “ver como pessoas, que possuem reconhecimento na matemática, organizam o pensamento e raciocinam para a obtenção da solução de problemas” (BAGATINI, 2010, p. 11), e também “observar relações entre os métodos de resolução por eles apresentados com os sugeridos por George Polya [...]” (Idem).

O autor começa discorrendo a respeito das olimpíadas de Matemática, apresentando um breve histórico dessas competições ao redor do mundo, em especial no Brasil. Também descreve o funcionamento e as etapas dessas competições em nosso país. Em seguida, Bagatini aborda questões pertinentes ao que chama de “altas habilidades”, termo que se refere ao alto nível de competência ao resolver problemas e aprender Matemática. Também escreve sobre potencial da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) para descobrir novos talentos em Matemática, e sobre seu Programa da Iniciação Científica (PIC).

No capítulo seguinte, o autor trata da Resolução de Problemas. Inicialmente, apresenta um breve histórico dessa metodologia de ensino. Em seguida propõe que nos currículos de Matemática das escolas seja inserida tal metodologia, isso podendo ocorrer “de vários modos: como ferramenta para introdução de determinado conteúdo, desenvolvimento ou até mesmo para verificar em que o que fora aprendido em teoria possa ser aplicado na prática” (BAGATINI, 2010, p. 35). Apresenta a classificação de Alsina, Fortuny e Perez dos tipos problemas, e também a classificação de Polya. Encerra esse capítulo descrevendo os passos para resolução de problemas apresentados por Polya.

Em sua prática, Bagatini contou com a participação de 12 alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e com sete participantes do Programa de Iniciação Científica Jr. da OBMEP. Foi aplicado um questionário para os alunos da Universidade, e outro para os alunos do Programa de Iniciação Científica. Ali constavam perguntas como: “Os conteúdos cobrados nas provas desta Olimpíada se relacionam (são coerentes) com a matemática ensinada no colégio?”, “Antes de resolver um problema, você estabelece algum pano (roteiro)?”, “Se lhe fosse dado um problema qualquer, descreva, de modo genérico, qual a sequência que utiliza para resolver, caso tenha”, “Tendo em vista que você será professor, como podemos utilizar os problemas da OBMEP em sala de aula, e estimular os alunos pela aprendizagem da matemática?” (BAGATINI, 2010, p. 77, 78). Além dos questionários, foram aplicadas listas com problemas retirados de edições anteriores da OBMEP, a fim de analisar o processo de resolução e as estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa. Também foram propostos problemas extras, derivados dos que foram utilizados na prática.

Em suas análises, sobre as resoluções dos problemas, o autor relata, mais de uma vez, os alunos afirmando que nunca tinham se deparado com problemas semelhantes na escola. Também relata a opinião dos alunos em relação à dificuldade da questão e compara as estratégias utilizadas na resolução dos problemas.

Nas considerações finais, o autor ressalta que

> [...] os alunos não usam sempre a mesma sequência para resolver um problema. Eles costumam adaptá-la conforme o problema, mas sempre iniciam observando o que realmente o problema pede e organizando todos os dados e equações implícitas. Conforme as resoluções analisadas e de acordo com os depoimentos dos questionários, foi possível ver que a maior dificuldade que os alunos tiveram para resolver um problema, tinha relação com a obtenção da "boa ideia" que encaminhe ao resultado. (BAGATINI, 2010, p. 70)

Assim, o autor conclui que, de fato, o sucesso daqueles que possuem competência em resolução de problemas se deve, em grande parte, à elaboração de estratégias e à adaptação de métodos de resolução utilizados em outras situações. Ele encerra o capítulo afirmando que há necessidade de que seja dado suporte adequado para que problemas como os da OBMEP sejam trabalhados em sala de aula, a fim de reverter a falta de contextualização entre o ensino e a vida real (BAGATINI, 2010, p. 71).

Finalizamos nossos destaques com o Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de Anelise Pereira Baur, intitulado "O Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas". O principal objetivo da pesquisa foi "discutir e analisar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e através da resolução de desafios de lógica" (BAUR, 2009, p. 10). Segundo Baur "a questão norteadora deste trabalho: **"A resolução de problemas contribui para a aprendizagem de matemática? Quais são as estratégias que o professor pode utilizar para auxiliar os alunos na resolução de problemas?"**" (BAUR, 2009, p. 11).

Logo após a Introdução, a autora descreve a proposta de sua prática, na qual foi realizada uma série de oficinas de matemática com alunos da quinta série da Escola Estadual Porto Alegre. Como o professor da turma relatou à autora que "dentre as principais dificuldades dos seus alunos, se encontrava a resolução e a interpretação de problemas matemáticos e de desafios de lógica" (BAUR, 2009, p. 11) se encontravam as maiores dificuldades da turma, os tópicos abordados nas oficinas foram, prioritariamente, a resolução de problemas e de desafios de lógica.

No capítulo seguinte, autora apresenta sua fundamentação teórica discorrendo sobre a Resolução de Problemas. Começa argumentando sobre a importância dessa metodologia no ensino-aprendizagem de Matemática. Segue apresentando algumas classificações de problemas, dentre as quais destacamos a de Alsina, Fortuny & Perez (1997, apud Baur, 2009, p. 16)

> - Exercícios de estruturação: são aqueles que preparam o estudante para o aprendizado de um conceito. Podem ser compostos por materiais manipulativos.
> - Exercícios de reconhecimento: são atividades que possuem a função de fazer o reconhecimento dos aspectos apresentados pelo professor.
> - Exercícios algorítmicos: são atividades nas quais uma lei pronta pode ser aplicada.
> - Problemas de enunciado aberto: São problemas nas quais a resolução não é necessariamente única, e onde a resolução depende do modo como o tal problema foi solucionado.
> - Problemas tema: são problemas com o enunciado em aberto, nas quais podem ser feitas generalizações, e onde a situação proposta é nova.

Acreditamos que classificações como essa ajudam o professor a selecionar os problemas a serem propostos e a explorar os tópicos de Matemática de maneira progressiva em dificuldade. Também o ajudam a abordar esses tópicos de maneira mais significativa para os alunos, na medida em que os problemas a serem propostos envolverão as mais diversas situações e exigirão, por parte do aluno, uma postura ativa desde o início do processo. O capítulo segue descrevendo algumas fases da resolução de problemas, como aquelas apresentadas por Polya (2006), e apresenta o papel do professor ao utilizar a metodologia de Resolução de Problemas.

A metodologia de pesquisa utilizada no Trabalho foi o estudo de caso de natureza qualitativa. Como descrito acima, foram realizadas oficinas de matemática com alunos da quinta série de uma escola estadual da cidade de Porto Alegre. Para fins de análise dos dados, a autora coloca que, durante os encontros, foram observados os seguintes aspectos (BAUR, 2009, p. 25): (1) de que forma o aluno interpretou o problema; (2) quais as estratégias utilizadas na resolução; (3) qual raciocínio matemático foi utilizado durante a resolução; (4) as dificuldades encontradas na resolução.

Entre as análises feitas, destacamos a observação de que provavelmente os alunos se valeram das relações estabelecidas na atividade 1, envolvendo o completamento de uma sequência numérica, para resolver a atividade 2, envolvendo o completamento de um quadro com números. Baur coloca que

> [...] as ideias de Polya estão em concordância com as estratégias usadas pelos alunos, uma vez que, segundo o autor, o aluno pode compreender as estratégias utilizadas em problemas já conhecidos para solucionar outros

> problemas, criando assim uma espécie de pensamento metódico para a resolução de problemas. Também aqui é possível perceber a presença da etapa *estabelecimento do plano*, proposta pelo autor, onde é realizada a busca por ideias para a resolução, através de problemas semelhantes já semelhantes [resolvidos]. (BAUR, 2009, p. 31)

A autora comprova, assim, em um caso concreto, que conceitos desenvolvidos em sua fundamentação teórica, nesse caso as etapas para a resolução de problemas apresentada por Polya, foram utilizados, mesmo que inconscientemente, pelos alunos que obtiveram sucesso na resolução das atividades.

Em suas considerações finais, Baur conclui que seus procedimentos docentes, de fato, favoreceram a resolução dos problemas propostos, além de encontrarem respaldo na teoria de George Polya. Também identifica dois modelos de ensino-aprendizagem de Matemática, com objetivos distintos: um primeiro, no qual se define o conceito matemático, seguido de exemplos e exercícios, e em seguida se propõe problemas de aplicação; e um segundo, no qual a resolução dos problemas é o meio pelo qual se explora o conceito matemático, seguida da formalização dos conceitos. No primeiro modelo, o aluno aprende matemática para resolver problemas; no segundo, o aluno aprende matemática por meio da resolução de problemas. A autora encerra a pesquisa confirmando o segundo modelo de ensino-aprendizagem como aquele em que o conteúdo se torna mais interessante e significativo para os alunos.

4. METODOLOGIA DE PESQUISA

Na primeira seção deste capítulo apresentamos uma breve descrição dos métodos qualitativos utilizados na pesquisa em ensino de Matemática e ressaltamos suas vantagens em relação aos métodos quantitativos. Abordamos, especificamente, o estudo de caso de caráter qualitativo. Na segunda seção, descrevemos o ambiente no qual foi realizado o trabalho prático e a coleta de dados, bem como os participantes de nossa pesquisa.

4.1 A ABORDAGEM QUALITATIVA E O ESTUDO DE CASO

Segundo Lüdke e André (2017), por muito tempo os fenômenos educacionais foram estudados seguindo-se modelos adotados nos estudos de ciências exatas como Física e Química. As autoras firmam que

> [...] tal como naquelas ciências, o fenômeno educacional foi estudado por muito tempo como se pudesse ser isolado, como se faz com um fenômeno físico, para uma análise acurada, se possível feita em laboratório, onde as variáveis que o compõem pudessem também ser isoladas, a fim de se constatar a influência que cada uma delas exercia sobre o fenômeno em questão. [...] Durante muito tempo se acreditou na possibilidade de decompor os fenômenos educacionais em suas variáveis básicas, cujo estudo analítico, e se possível quantitativo, levaria ao conhecimento total desses fenômenos. (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 3-4)

Kilpatrick (1996, p.102) afirma que, até os anos 70, “muitas pesquisas em educação matemática, especialmente as feitas na América do Norte, tentaram especificar o comportamento dos alunos ou professores e analisar aqueles comportamentos através de seus componentes.”.

Com os avanços nas pesquisas em educação, notou-se que poucos fenômenos nessa área poderiam ser isolados e devidamente quantificados, pois nesse campo existe uma relação íntima entre os acontecimentos, o que dificulta a separação de variáveis e a determinação clara dos responsáveis por determinado efeito (LÜDKE; ANDRÉ, 2017). Segundo os autores

> [...] o que ocorre em educação é, em geral, a múltipla ação de inúmeras variáveis agindo e interagindo ao mesmo tempo. Ao tentar isolar algumas dessas variáveis está-se optando, necessariamente, por uma redução do

> enfoque do estudo a uma parte do fenômeno. Isso pode ser muito útil para fins de análises específicas, mas não resolve o problema da compreensão geral do fenômeno em sua dinâmica e complexidade. (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 6)

Os métodos de pesquisa de caráter quantitativo "não estavam levando a resultados que ajudassem a descobrir soluções para os problemas prementes, que se acumulam na área da educação, especialmente em nosso País" (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 7). Podemos citar como exemplos desses problemas a evasão escolar e a repetência.

Os pesquisadores, no intuito de superar as limitações dos métodos de pesquisa tradicionais, começaram a adotar abordagens provenientes das Ciências Sociais. Kilpatrick (1996, p. 102) afirma que "abordagens de feição fenomenológica, interpretativa, construtivista, social ou etnográfica têm se tornado especialmente populares entre pesquisadores em Educação Matemática.". Um dos principais motivos para essa mudança de paradigma é o fato de que

> Cada vez mais se entende o fenômeno educacional como situado dentro de um contexto social, por sua vez, inserido em uma realidade histórica, que sofre toda uma série de determinações. Um dos desafios atualmente lançados à pesquisa educacional é exatamente o de tentar captar essa realidade dinâmica e complexa do seu objeto de estudo, em sua realização histórica. (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 6)

Com essas novas abordagens, os estudos em Educação Matemática, até então de caráter quantitativo, passaram, em grande parte, a ter uma natureza qualitativa.

Bogdan e Biklen (1982, apud LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 12-14) apresentam cinco características básicas da pesquisa qualitativa:

1. *A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento*.

   De acordo com os autores, a abordagem qualitativa exige um contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação investigada. Se, por exemplo, a questão estudada é a da repetência, o pesquisador buscará manter contato com alunos e professores, inserido no dia a dia da escola, a fim de obter informações que expliquem o fenômeno naquele caso. Isso por que entende-se que levar em conta as circunstâncias nas quais certo objeto se insere é indispensável à sua compreensão.

2. *Os dados coletados são predominantemente descritivos*.
As informações são geralmente obtidas por meio de entrevistas, gravações, fotos, depoimentos, etc., isto é, se valendo de meios que registram ou descrevem detalhadamente as situações. O pesquisador deve captar o máximo possível de elementos da realidade estudada, para não correr o risco de desprezar algum aspecto vital à compreensão do objeto de estudo.

3. *A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto*.
Ao estudar certo fenômeno, o pesquisador se concentrará em verificar como ele se manifesta em diferentes situações e como ele altera a realidade onde está inserido.

4. *O "significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador*.
Um dos objetivos do pesquisador será captar a perspectiva dos participantes a respeito do ponto em questão, com o intuito de esclarecer o dinamismo interno da situação, o que geralmente é inacessível ao observador externo. Deve-se tomar o cuidado de verificar com os próprios participantes e outros pesquisadores a validade das informações a respeito de posicionamentos e pontos de vista descritos na pesquisa.

5. *A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo*.
Os resultados e conclusões são formulados basicamente a partir dos dados observados, sem a necessidade de evidências que comprovem hipóteses definidas antes de se iniciar o estudo, como em um processo dedutivo. Cabe observar que isso não implica na falta de um quadro teórico que oriente a pesquisa. O estudo começa em torno de focos de interesse e questões amplas, que vão se

> tornando mais específicos à medida que se desenvolve a investigação.

A metodologia de pesquisa utilizada no presente trabalho foi o Estudo de Caso de natureza qualitativa. Segundo Lüdke e André (2017, p.15), essa abordagem vem “ganhando crescente aceitação na área da educação, devido principalmente ao seu potencial para estudar questões relacionadas à escola”. Segundo Ponte, um estudo de caso

> É uma investigação que se assume como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse. (PONTE, 2006, p. 2).

Uma característica fundamental desse tipo de estudo é sua natureza empírica. O objeto de estudo é analisado dentro de seu contexto real, baseando-se no trabalho de campo e na análise documental (PONTE, 2006). A fim de obter informações, o pesquisador costuma se valer de múltiplos recursos, como gravações, entrevistas, fotos, anotações, etc. A partir desse material ele elabora uma descrição “factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objeto de estudo” (PONTE, 2006, p. 7). Conforme o interesse do estudo, pode-se elaborar uma análise da situação descrita formulando questionamentos, confrontando a situação com as teorias existentes e também com outras situações conhecidas (PONTE, 2006, p. 8).

Segundo Ponte, utilizamos o estudo de caso quando

> [...] o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é. Faz-se um estudo de caso quando não se tem controlo sobre os acontecimentos e não é portanto possível ou desejável manipular os potenciais causas do comportamento dos participantes (Merriam, 1988; Yin, 1984). Deste modo, não é uma abordagem virada para o estudo de situações de intervenção conduzidas pelo investigador. Na verdade, para se descobrir aspectos novos, escondidos, de uma dada situação, é essencial um distanciamento e uma capacidade de interrogar de modo muito livre os acontecimentos (PONTE, 2006, p. 8).

Apesar disso, entendemos que nada impede que o próprio pesquisador e suas intervenções, planejadas ou não, façam parte da realidade estudada, conforme fizemos no presente trabalho, em nossa prática em sala de aula.

Os estudos de caso permitem que o leitor, de certa forma, se aproprie de elementos da experiência do pesquisador e do objeto de estudo, incorporando-os à própria experiência por meio de generalizações. Stake (1983, p. 22) afirma que

> A grande contribuição da pesquisa qualitativa, para a maioria dos seus usuários, é a de proporcionar uma oportunidade para examinar a experiência vicária do estudo de caso com base em experiências anteriores. Isso é semelhante à aprendizagem experiencial comum. As generalizações resultantes são por mim chamadas de "generalizações naturalistas". A pesquisa qualitativa não fornece generalizações naturalistas, mas sim propicia ao leitor ou ao usuário chegar às suas próprias generalizações.

Segundo Lüdke e André (2017), em um estudo de caso, o leitor deve se perguntar: "o que eu posso (ou não) aplicar deste caso na minha situação?" (p.23). As autoras afirmam (2017, p. 23) que as generalizações naturalísticas surgem quando o leitor "tenta associar os dados encontrados no estudo com dados que são frutos das suas experiências pessoais".

O desenvolvimento de um estudo de caso se dá, de acordo com Nisbet e Watt (1978, apud LÜDKE; ANDRÉ, 2017), em três etapas. A primeira, chamada pelos autores de *exploratória*, é caracterizada pela definição das questões e pontos relevantes a serem explorados na situação estudada. Essas questões podem ser definidas a partir de observações do próprio pesquisador, a partir do exame da literatura, de documentos ou de registros referentes ao objeto de estudo, a partir do contato com pessoas ligadas ao fenômeno estudado ou por um depoimento feito por um especialista no tema (LÜDKE; ANDRÉ, 2017).

Na segunda etapa, chamada de *delimitação do estudo*, o pesquisador, baseado em suas questões iniciais, definirá mais especificamente quais serão os focos do estudo, e se dedicará a obter informações, de forma sistemática, utilizando métodos que favoreçam a compreensão e a análise desejada.

A última fase do estudo, chamada de *análise sistemática e elaboração do relatório*, é o momento em que as informações obtidas serão sistematizadas e analisadas tendo por base as questões norteadoras. Convém observar que essas fases não ocorrem necessariamente em uma ordem linear, mas “se interpolam em vários momentos, sugerindo apenas um movimento constante no confronto teoria-empiria” (LÜDKE; ANDRÉ, 2017, p. 26). Para citar um exemplo dessa interpolação, durante a fase de delimitação já surge a necessidade de se organizar as informações e torná-las disponíveis aos envolvidos no estudo para que possam se manifestar a respeito da relevância e precisão do que está sendo relatado (LÜDKE; ANDRÉ, 2017).

4.2 PARTICIPANTES E O AMBIENTE DA PESQUISA

Utilizando a nomenclatura criada por Nisbet e Watt (1978, apud LÜDKE; ANDRÉ, 2017), na fase exploratória, uma das questões iniciais em nosso estudo era sobre como, ou em que pontos específicos, ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas altera a prática docente e que consequências essas mudanças trazem para o ensino de Matemática. Também estávamos interessados em saber qual seria o desempenho dos alunos ao utilizarmos essa metodologia. Iniciamos com questões amplas sobre o tema. Na delimitação do estudo, escolhemos a Análise Combinatória como tópico de Matemática a ser abordado na prática, e implementamos a metodologia de ensino por meio do Segundo Roteiro criado pelo GTERP. Delimitamos também, como público-alvo do estudo, um grupo de alunos cursando o segundo ano do Ensino Médio.

Para a realização da pesquisa, escolhemos o Colégio Adventista do Partenon, localizado na cidade de Porto Alegre, como local de realização das atividades práticas e coleta dos dados. Nos anos de 2013 e 2017, o professor pesquisador trabalhou como professor de Matemática no referido Colégio. Trata-se de um colégio da rede privada de ensino, o qual, à época da realização das atividades, contava com apenas uma turma, denominada 121, cursando o segundo ano do Ensino Médio. Inserido em um bairro cheio de contrastes econômicos e sociais, o Colégio possui alunos inseridos nos mais variados contextos familiares. Dentre os estudantes que participaram do estudo, predominantemente na faixa etária de 16 a 18 anos, a grande maioria pertencia a famílias de classe média. A fim de preservar a identidade dos participantes, usamos letras, de A a J, para identificá-los.

A Coordenação Pedagógica do Colégio disponibilizou a sala do laboratório de química para realização da prática com os alunos. O local era bastante espaçoso e com bancadas de tampo inteiriço, o que facilitou a formação dos grupos, pois podiam assentar-se não só ao lado, mas também de frente uns para os outros. A sala também dispunha de quadro branco e canetas. Os encontros foram realizados à tarde, no turno inverso das aulas regulares da turma.

A proposta de atividades foi bem recebida por parte da coordenação pedagógica do colégio, bem como pelos alunos. Fizemos o convite para a nossa prática pessoalmente, durante uma das aulas da turma. A maior parte dos alunos que aceitou o convite apresentava dificuldades em matemática, apesar de que também havia alunos com facilidade em aprender e que iam bem na matéria. Registramos que os estudantes participantes foram alunos do professor pesquisador em 2013, cursando o 6º ano do Ensino Fundamental, fato que pode ter contribuído para a boa aceitação da proposta de trabalho.

Dentre os alunos da turma 121, 10 aceitaram o convite para participar da pesquisa, a partir da entrega dos Termo de Consentimento Informado assinados por seus responsáveis. As cópias do Termo de Consentimento da Escola e do Termo de Consentimento Informado, estão, respectivamente, nos anexos 1 e 2.

5. PRÁTICA

Em nossa prática, seguimos de perto o Segundo Roteiro (apresentado na seção 2.1.3), procurando executar cada uma de suas fases de acordo com suas orientações. Realizamos cinco encontros, sendo que no primeiro fizemos um trabalho de sondagem, no segundo, terceiro e quarto encontros desenvolvemos alguns tópicos de Análise Combinatória por meio de problemas selecionados e, no último encontro, resolvemos alguns problemas aplicando os conhecimentos adquiridos.

Nas próximas seções, organizadas por aula, apresentamos as soluções dos problemas desenvolvidas pelos alunos, na ordem discutida em sala de aula. As listas dos problemas escolhidos, para cada encontro, são apresentadas nos apêndices desse texto. Também cabe observar que, neste capítulo, utilizaremos o termo problema de maneira genérica, pois, conforme definimos no referencial teórico e também detalharemos em nossas análises, o que para um representa um problema, para outro pode ser somente um exercício. Utilizamos em nossa prática algumas questões que para a maioria representam exercícios, com a finalidade sedimentar os procedimentos desenvolvidos nos problemas, e também cobrir os aspectos tradicionalmente abordados em Análise Combinatória.

5.1 AULA 1

- **Preparação dos problemas e descrição da atividade**

  Neste primeiro encontro compareceram dez alunos. Os alunos G e I formaram um grupo, os alunos A, C, F e K formaram outro grupo, o aluno B se juntou ao aluno H. O aluno J chegou atrasado e preferiu trabalhar sozinho.

  Ao entrarmos em contato com a turma fomos informados que eles já estavam estudando conteúdos de Análise Combinatória, o que nos levou a preparar uma lista com problemas mais elaborados, que não dependessem apenas da mera aplicação de fórmulas. Também estávamos interessados em saber quais desses conceitos já estudados estavam bem compreendidos para podermos planejar os próximos encontros. No próximo tópico desta seção, apresentamos os problemas com as soluções, na ordem em que foram trabalhados nesse primeiro encontro. Dos cinco problemas da lista, foram trabalhados os problemas 2, 5 e 1 (nessa ordem). Uma cópia da lista de problemas utilizada nesta aula encontra-se no apêndice 1.

- **Resolução dos problemas / observar e incentivar**

A primeira discussão foi relacionada ao segundo problema da lista, apresentado na figura abaixo:

Figura 3 - Problema 2

20. Uma aranha encontra-se no ponto A de sua teia e quer chegar ao ponto B sem passar mais de uma vez por um mesmo segmento da teia. Além disso, ao percorrer um segmento radial (em traço mais fino), ela deve seguir o sentido indicado pela flecha. Quantos são os caminhos possíveis?

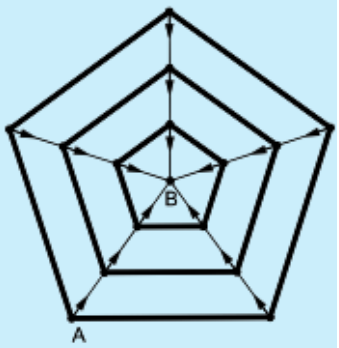
A) $2^3 \cdot 5$

B) $11^3 \cdot 5^2$

C) 5^3

D) 11^3

E) $2 \cdot 5^3$



Fonte: *prova da OBMEP 2011, 1ª fase, nível 3* [5]

Eles estavam com dificuldades de identificar os caminhos possíveis na teia. Depois de mostrar ao aluno F como a aranha poderia andar sobre a teia, o aluno A e o aluno C disseram que a resposta era 5^3, letra C), pois a aranha teria cinco maneiras de passar do pentágono maior para o pentágono do meio, cinco maneiras de passar do pentágono do meio para o pentágono menor e cinco maneiras de passar do pentágono menor para o ponto B. Ressaltei o fato de que eles estavam pensando corretamente ao resolver o problema "por etapas", contando as possibilidades de passar de um pentágono para o outro, mas que deveriam contar melhor o número de maneiras de fazê-lo em cada "etapa".

[5] Disponível em https://drive.google.com/file/d/1hpMlzKP2a2NN_rm_3i9AtLnqcW42rSH4/view

Os alunos G e I tiveram uma ideia semelhante à dos A e C, porém disseram, sem justificativa, que a resposta era $2^3 \times 5$, letra A). Dei a eles a mesma sugestão dada aos alunos A e C e mostrei alguns caminhos possíveis de A até B.

O segundo problema trabalhado foi o quinto da lista, apresentado abaixo:

5. Quantos são os anagramas da palavra COMBINAR?

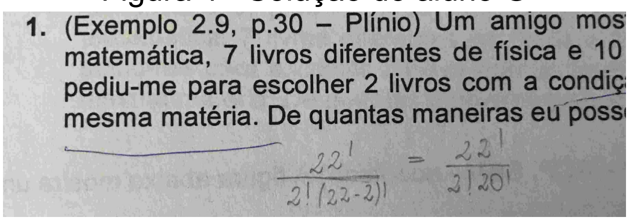
O aluno H disse que a resposta era $40320 = 8!$. Outros alunos confirmaram em voz alta a resposta. Observei que o mesmo princípio usado para chegar nesse resultado poderia ser usado para resolver os outros problemas. Alguns fizeram uma expressão de desconfiança. Perguntei então como eles haviam chegado no resultado do problema 5. O aluno G respondeu: "*por que eu contei as letrinhas*". Perguntei então o que os levou a concluir que teriam que multiplicar os algarismos de 8 até 1 no caso de oito letras. Responderam que era assim que haviam aprendido.

Abaixo, vemos o primeiro problema da lista, estudado na sequência:

1. *(SANTOS, MELLO, MURARI, 1998, p. 30) Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?*

Após alguns alunos me apresentarem como solução $C_{22,2}$, como podemos ver na figura 4. Observei que dessa forma estariam contando os casos em que se escolhe livros de mesma matéria. Sugeri escolhessem primeiro as matérias e depois contassem quantas escolhas teriam em cada caso.

Figura 4 - Solução do aluno G



1. (Exemplo 2.9, p.30 – Plínio) Um amigo mos
matemática, 7 livros diferentes de física e 10
pediu-me para escolher 2 livros com a condiç
mesma matéria. De quantas maneiras eu poss

$\frac{22!}{2!(22-2)!} = \frac{22!}{2!20!}$

Fonte: Acervo do autor

O aluno H me apresentou $\frac{5\cdot7\cdot10}{2}$ como solução do problema 1. Expliquei que dessa forma ele estaria contando o número de maneiras de escolher um livro de cada matéria e tomando metade dos casos contados, o que representaria metade do número de maneiras de se escolher três livros em vez de dois.

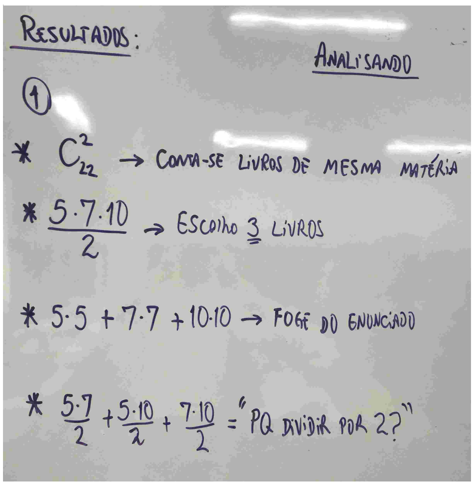
- **Resultados na lousa / Plenária:**

Os resultados encontrados para o problema 1 foram $C_{22,2}$, pelo grupo do aluno A, o aluno G encontrou inicialmente $\frac{5\cdot7\cdot10}{2}$, e depois mudou para $5\cdot5+7\cdot7+10\cdot10$.

Comecei perguntando o que havia de errado com o resultado $C_{22,2}$ para o problema 1. Os alunos A e F responderam corretamente dizendo que nesse cálculo estamos considerando as escolhas de livros de mesma matéria.

Perguntei quantos livros estaria escolhendo ao calcular $\frac{5\cdot7\cdot10}{2}$, e eles responderam corretamente que seriam três, em vez de dois. Ao mostrar que a última opção apresentada, $5\cdot5+7\cdot7+10\cdot10$, fugia do enunciado, no sentido de que $5\cdot5$, $7\cdot7$ e $10\cdot10$ indicavam que eu poderia escolher duas vezes o mesmo livro, o aluno G sugeriu que fizéssemos $\frac{5\cdot7}{2}+\frac{5\cdot10}{2}+\frac{7\cdot10}{2}$. Quando pedi uma justificativa para tal resultado, ele disse: *"por que daí tu vai ter só duas opções de cada e nenhuma vai repetir"*. Perguntei então por que dividir por 2, e ele respondeu: "tu quer só dois livros". Respondi: *"pois é, estou escolhendo um aqui* (apontando para o 5 escrito na lousa)*, e outro aqui,* (apontando para o 7)", induzindo-os a concluir que não havia necessidade de se fazer aquela divisão. Afirmei que ao efetuar uma divisão estou descontando possibilidades, e perguntei então que possibilidades deveriam ser descontadas nesse caso. Eles ficaram em silêncio. Anotei tudo na lousa, como podemos ver na figura 5.

Figura 5 - Resultados na lousa



Fonte: Acervo do autor

5.2 AULA 2

- **Preparação dos problemas e descrição da atividade:**

No primeiro encontro percebemos que os alunos apresentaram dificuldades na compreensão e aplicação dos princípios básicos da Análise Combinatória, apesar de já terem algum contato com o conteúdo e conhecerem algumas fórmulas. Isso nos levou a selecionar, para esse segundo encontro, problemas mais simples e diretos no que diz respeito a aplicação dos princípios Aditivo e Multiplicativo. Selecionamos dois problemas que envolviam o Princípio Multiplicativo e um, o último, envolvendo tanto o Princípio Multiplicativo quanto o Princípio Aditivo. Escolhemos problemas cujas quantidades envolvidas nos cálculos fossem pequenas, a fim de que os alunos pudessem contar uma a uma as possibilidades em cada caso, facilitando assim a compreensão dos conceitos subjacentes a cada questão. Nesse dia compareceram três alunos e assim formamos um único grupo para a atividade. No tópico abaixo apresentamos os problemas trabalhados e as soluções dos alunos na ordem em que foram discutidos no dia do encontro. Uma cópia da lista de problemas utilizada nesta aula encontra-se no apêndice 2.

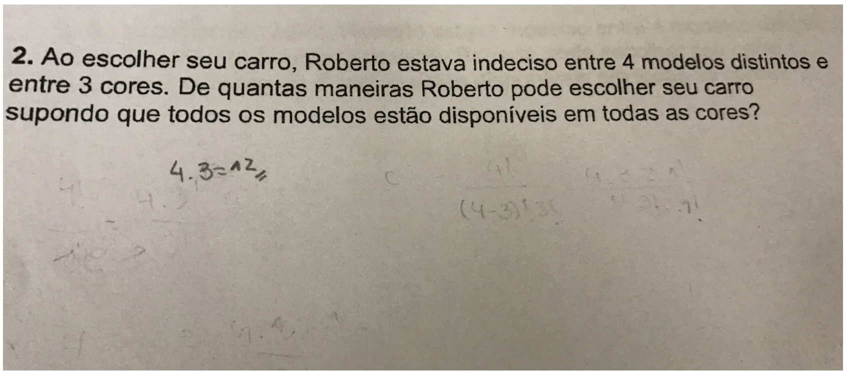
- **Resolução dos problemas / Observar e incentivar:**

A primeira discussão com a participação do professor surgiu durante a tentativa do aluno A resolver o problema 2, enunciado abaixo:

2. Ao escolher seu carro, Roberto estava indeciso entre 4 modelos distintos e entre 3 cores. De quantas maneiras Roberto pode escolher seu carro supondo que todos os modelos estão disponíveis em todas as cores?

Ele sugeriu usar a fórmula das combinações simples, conforme podemos ver na figura 6, abaixo[6].

Figura 6 - Solução do Aluno A



Fonte: Acervo do autor

A pergunta se referia aos cálculos envolvidos em $C_{4,1}$. Quando constatado que $C_{4,1} = 4$ questionei a necessidade do uso da fórmula para esse caso e sugeri que ele listasse as possibilidades para os modelos e para as cores e contasse as maneiras de relacionar as cores aos modelos. Nesse momento o aluno B diz: *"daria doze"*. Peço para ele justificar sua resposta e ele diz: *"são quatro modelos e cada cor dá para escolher entre três, é quatro vezes três"*. Confirmei seu raciocínio.

O próximo problema que entrou em discussão foi o de número 3, enunciado abaixo:

---

[6] Em algum momento após a discussão, o aluno A apagou seus cálculos de $C_{4,1}$, como podemos perceber na imagem.

3. (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO e FERNANDEZ, 1991, p. 21 - adaptado) O código morse usa "palavras" de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Alguns exemplos, de "palavras" nesse código seriam: .--., -.-, --, ., -. Quantas "palavras" existem no código morse?

Após esclarecer, a pedido do aluno A, o enunciado da questão, e deixar que discutissem entre si, me disseram que o resultado era $4!$, já que era o máximo de letras permitido. Expliquei que com isso eles estavam tentando contar (de maneira errônea) apenas as palavras com quatro letras e estavam deixando de lado as que possuíam apenas uma, ou apenas duas, por exemplo. Sugeri então que contassem individualmente quantas palavras eles conseguiam formar em cada um desses casos.
Em relação ao problema 1b), enunciado abaixo, a discussão se deu em torno de como relacionar a ida e a volta em cada viagem.

1. (SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p. 55) Há 3 linhas de ônibus entre as cidades A e B e 2 linhas de ônibus entre B e C. De quantas maneiras uma pessoa pode viajar:

a) indo de A até C, passando por B?

b) Indo e voltando entre A e C sempre passando por B?

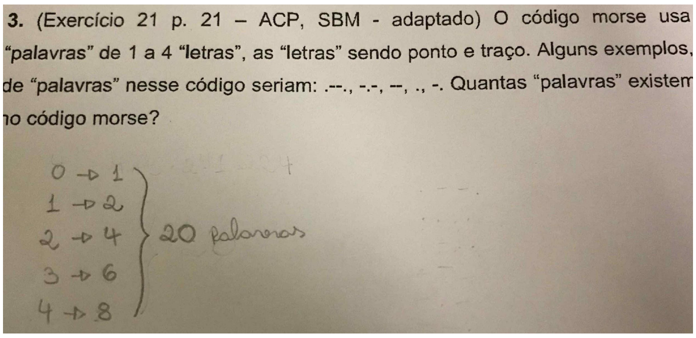
Sugeri primeiramente que contassem quantas opções de volta (C para A) existiam. Responderam corretamente que havia seis maneiras de fazer a volta. Perguntei então quantas opções de volta eles teriam para cada opção de ida. Perceberam então que deveriam multiplicar as possibilidades.

- **Resultados na lousa / Plenária:**

Como já havia discutido amplamente as questões junto com o grupo, fizemos a Plenária, a Análise dos Resultados e o Consenso de maneira unificada, anotando na lousa as soluções dos alunos, discutindo - e eventualmente corrigindo - os resultados, um problema de cada vez.

No problema 1 eles conseguiram chegar ao resultado correto em ambos os itens, e no problema 2 também. No problema 3, como podemos ver na figura 7, eles contaram duas palavras com uma letra, quatro com duas letras, seis com três letras e oito com quatro letras[7].

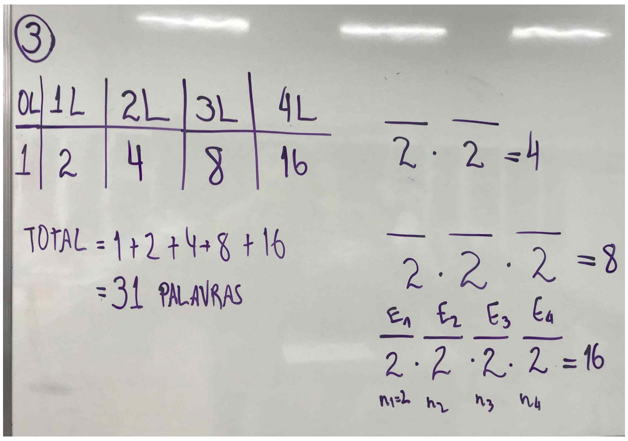
Figura 7 - Solução do aluno C



Fonte: Acervo do autor

Apesar de entenderem que para cada caractere havia duas opções de letra, acabaram somando em vez de multiplicarem as possibilidades. Na figura 8 podemos ver uma maneira de verificar que, se havia quatro palavras com duas letras, deveríamos ter oito palavras com três letras, pois em cada uma das duas escolhas para a terceira letra tínhamos as quatro palavras do caso anterior para juntarmos com essa última letra formando assim as oito palavras.

Figura 8 - Análise dos resultados do problema 3



Fonte: Acervo do autor

[7] O aluno C, a quem pertence a solução da figura 2, anotou durante a plenária a parte que indica uma palavra com zero letras, quando chamei a atenção deles para o fato de que o espaço também é um caractere.

Quando perguntei quantas palavras com quatro letras existiam, responderam 16, demonstrando que entenderam o raciocínio recém exposto.

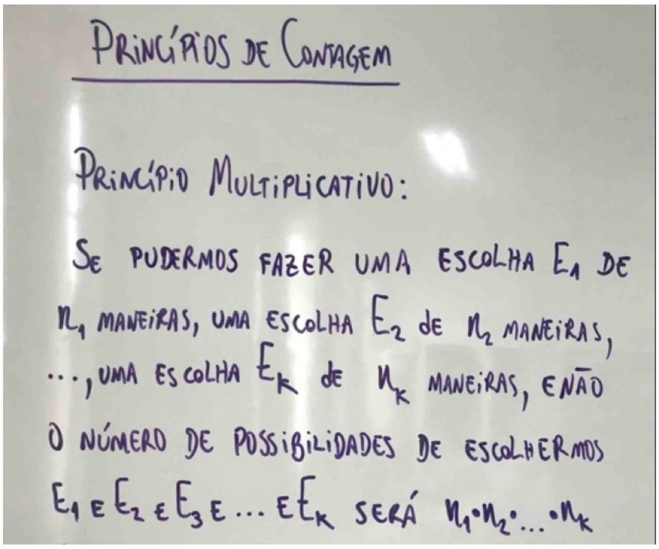
- **Formalização:**

Para formalizar as técnicas e conceitos abordados nos problemas enunciei na lousa os Princípios de contagem da seguinte forma (ver também figuras 9 e 10):

<u>Princípio Multiplicativo:</u> *"Se pudermos fazer uma escolha E_1 de n_1 maneiras, uma escolha E_2 de n_2 maneiras, ..., e uma escolha E_k de n_k maneiras, e a escolha E_i não influencia no número n_j de maneiras de se fazer a escolha E_j, $i \neq j$, então o número total de possibilidades de escolhermos E_1 e E_2 e ... e E_k será $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$".*

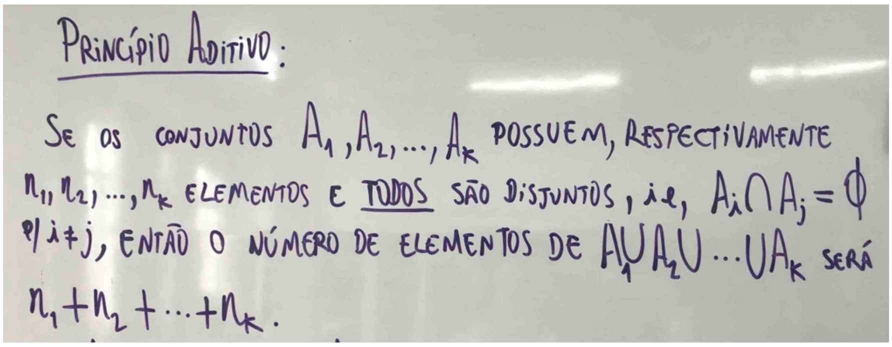
<u>Princípio Aditivo:</u> *"Se os conjuntos A_1, A_2, ..., A_k possuem, respectivamente n_1, n_2, ..., n_k elementos e todos são disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, então o número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ é igual a $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$."*

Figura 9 - Enunciado na lousa do Princípio Multiplicativo



Fonte: Acervo do autor

Figura 10 - Enunciado na lousa do Princípio Aditivo



Fonte: Acervo do autor

Após enunciar o primeiro princípio revisamos os problemas 1 e 2, mostrando quem seriam as escolhas E_i e os números n_j em cada caso. Também revisamos o problema 5 da aula 1, que solicitava o número de anagramas da palavra COMBINAR. Colocamos E_i como escolha da i-ésima letra (da esquerda para a direita), e como, para se formar o anagrama, precisamos contar o número de maneiras de fazer E_1 e E_2 e ... e E_8, ficou clara a necessidade da aplicação do Princípio Multiplicativo, totalizando $8!$ anagramas.

Ao enunciar o segundo princípio revisamos o problema 1 da lista 1, colocando A_1 como o conjunto cujos elementos são as possíveis escolhas de um livro de Matemática e um de Física, A_2 como o conjunto das possíveis escolhas de um livro de Matemática e um de Química, e A_3 o como o conjunto das possíveis escolhas de um livro de Física e um de Química. Pelo que já tínhamos calculado na aula anterior ficamos com $n_1 = 35$, $n_2 = 50$ e $n_3 = 70$. Foi fácil constatar que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$, o que nos fez concluir novamente que a resposta do problema era $35 + 50 + 70 = 155$.

De maneira análoga, revisamos o problema 3 desta segunda aula colocando A_i o conjunto das palavras com i letras, obtendo $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 8$ e $n_4 = 16$, totalizando 31 palavras.

5.3 AULA 3

- **Preparação dos problemas e descrição da atividade:**

Nessa aula compareceram 6 alunos, sendo que dois deles quiseram formar uma dupla e os outros quatro formaram o outro grupo. Os problemas para esta aula envolviam o conceito de permutações simples. O principal objetivo era que eles chegassem à conclusão de que essas permutações são uma aplicação direta do Princípio Multiplicativo. Uma cópia da lista de problemas utilizada nesta aula encontra-se no apêndice 3.

- **Resolução dos problemas / Observar e incentivar:**

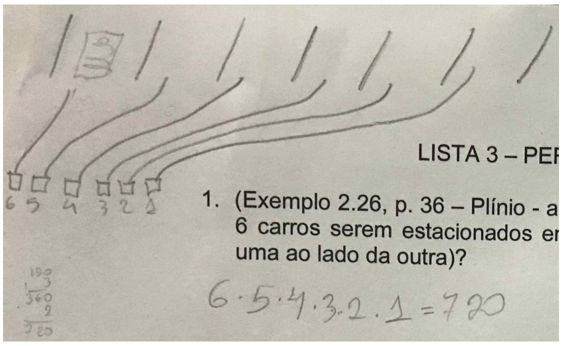
O aluno D pediu ajuda para resolver o primeiro problema da lista, cujo enunciado é dado abaixo:

1. *(SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p. 36) Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas (as vagas estão dispostas uma ao lado da outra)?*

Sugeri que começasse fazendo um desenho com os carros e as vagas. Como ele e outros dois alunos não haviam comparecido na aula anterior, fiz uma revisão rápida a respeito do Princípio Multiplicativo. Com essa revisão o aluno D percebeu que seria útil se valer do princípio para resolver o seu problema. Perguntei então de quantas maneiras ele poderia escolher a vaga do primeiro carro. Ele respondeu corretamente que poderia escolher de seis modos. Tendo feito a primeira escolha, perguntei de quantos modos poderia fazer a segunda. Ele disse que de cinco modos. Percebi que ele estava no caminho certo e deixei que seguisse sozinho.

Alguns minutos depois fui chamado para conferir a solução do aluno D. Constatei que de fato era a solução correta, como podemos perceber pela figura 9, e pedi que me explicasse o seu procedimento. Ele me disse: *"Aí eu pensei: para esse carro* (o carro nº 1 do desenho) *eu tenho seis maneiras, seis lugares para estacionar; aí para esse carro* (o carro nº 2 do desenho) *já tem uma ocupada, daí tem cinco, e assim foi sucessivamente [...]".*

Figura 11 - Solução do aluno D



Fonte: Acervo do autor

O aluno E estava tentando relacionar o problema 1 da lista 2 (das cidades A, B e C), que usei de exemplo na revisão do início da aula, com o problema 1 dessa aula, que estava querendo resolver. Perguntei o que poderia significar, no problema dos carros, cada uma das linhas de ônibus, e ele me respondeu que seria uma vaga no estacionamento. Para ajudá-lo a fazer a analogia, perguntei de quantas maneiras poderia estacionar o primeiro carro, sendo que no problema das cidades ele podia escolher de três maneiras a primeira linha de ônibus. Ele respondeu que seriam seis maneiras. Assim como no caso do aluno D, perguntei ao aluno E de quantas maneiras ele poderia estacionar o segundo carro, e ele disse que seria de cinco maneiras. A partir daí deixei-o conduzir sozinho o resto da resolução.

Os alunos A, B, C e F, que formaram um grupo, me pediram para que os ajudasse a resolver a letra a) do problema 4, enunciado abaixo.

4. (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, p. 25 - adaptado) Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

a) Que começam por consoante e terminam por vogal?
b) Que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
c) Que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
d) Que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
e) Que têm a letra C no 1º lugar E a letra A no 2º lugar?
f) Que têm a letra C no 1º lugar OU a letra A no 2º lugar?

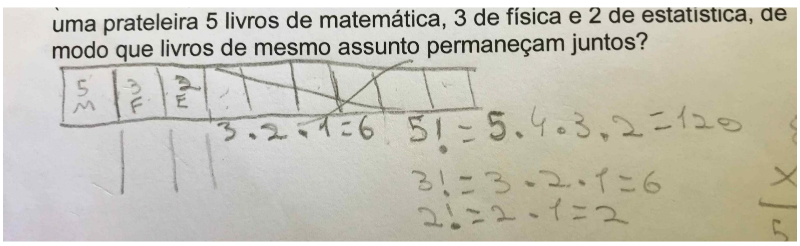
Comecei pedindo que fizessem uma analogia entre esse problema e o dos carros. Disseram que cada letra correspondia a um carro e que a posição de cada letra correspondia a uma vaga para estacionar. Chamei a atenção deles para a restrição do problema (começar por consoante e terminar por vogal) e perguntei de quantos modos poderiam escolher a primeira letra. Responderam que seriam quatro opções para a primeira letra, bem como quatro opções para a última. Quando perguntei quantas opções tínhamos para a segunda letra, o aluno F, provavelmente influenciado pelas escolhas anteriores, respondeu que seriam três. Ao lembrá-los de que o total de letras era oito e que já tínhamos usado duas, entenderam que sobrariam seis opções para a segunda letra, cinco para a terceira, e assim por diante.

O próximo problema discutido foi o de número 3, enunciado abaixo:

3. (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ., 1991, p. 26) De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de mesmo assunto permaneçam juntos?

Sugeri aos alunos D e E que desenhassem os dez lugares na estante e usassem as ideias dos problemas anteriores para organizar os livros. Após fazer o desenho e pensar um pouco a respeito da minha sugestão, o aluno E me questionou a respeito da restrição do problema, que faz com que livros de mesma matéria fiquem juntos, e perguntou o que faria com os cinco livros de Matemática. Disse que, sendo assim, deveria considerar os cinco livros de Matemática como um..., e fiz uma pausa para ele completar a frase. Ele completou: *"todo"*. Percebendo que ele estava entendendo onde eu queria chegar, respondi: *"como um bloco"*. Ele disse: *"ah, entendi!"*, e escreveu $5M$ dentro do primeiro lugar da estante em seu desenho, $3F$ dentro do segundo e $2E$ dentro do terceiro, como podemos observar na figura 12.

Figura 12 - Solução do aluno E



Fonte: Acervo do autor

Perguntei quantos blocos tínhamos, e alguém do outro grupo, que a essa altura já estava prestando atenção na conversa, disse: *“três”*. Me remeti ao problema 2 dizendo que lá tínhamos 8 letras para permutar, e perguntei quantos seriam, no nosso problema, os elementos a permutar. O aluno E disse que seriam três. Perguntei quantas opções ele teria para colocar o primeiro bloco na prateleira. Ele respondeu: *“cinco”*, provavelmente ainda pensando nos livros de matemática separadamente. Pedi então para ele parar de pensar nos livros separadamente e pensar apenas nos blocos. Finalmente ele percebeu que agora, além de ter somente três elementos (os blocos de livros) a permutar, contaríamos apenas três lugares na prateleira.

Fazendo perguntas semelhantes às fiz ao mesmo aluno E na resolução de problema 1 (dos carros a serem estacionados), este entendeu que seriam $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras de permutar os blocos. Quando perguntei de quantas maneiras poderíamos organizar os cinco livros “dentro” do primeiro bloco, ele disse que para isso teria que usar a noção de fatorial, apontando para um dos problemas anteriores da lista.

Em vez de fazer $5!$, ele então colocou o símbolo de fatorial no 6. Disse a ele de maneira direta: *“não é no 6 o fatorial, né?”*. *“Não é no 6, é no 5?”*, ele perguntou. Enquanto ele escrevia $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, perguntei: *“cinco fatorial por quê? Porque eu tenho...”*, e ele completou: *“cinco livros de matemática”*. Antes que ele seguisse fazendo as contas, perguntei o que se faria respeito do bloco com os três livros de Física. Seguiu-se um silêncio, e então retomei: *“dentro do bloco de Matemática tu não permutou os cinco?”*. *“Tá, permutei.”*, ele respondeu. “E deu quanto?”, perguntei. Ele falou: *“não quer trocar essa palavra, não?”*, referindo-se à palavra “permutar”.

Baseado nas discussões anteriores, acreditava que ele já havia entendido a que procedimento essa palavra se referia. Perguntei qual tinha sido o resultado, apontando para o $5!$, e perguntei quantas permutações haveria “dentro” do bloco com três livros. Ele respondeu: *“três! E no dois eu vou ter dois!”*. *“Fatorial...”*, completei. *“aí eu vou multiplicando até chegar..., tá, um, entendi. A cada um deles.”*, referindo-se ao $5!$, ao $3!$ e ao $2!$. *“Todos eles”*, respondi.

Após ter calculado $5!$, $3!$ e $2!$, o aluno E, junto com o aluno D me chamaram novamente. Perguntei de quantas formas poderiam organizar os livros de

Física para cada uma das 120 maneiras de organizar os livros de Matemática, e responderam corretamente que seriam seis. *"Então tu faz o que?"*, perguntei. E o aluno D respondeu: *"somo"*, talvez pensando que a organização dos livros de cada matéria fossem casos distintos. A essa altura, eu apenas disse: *"multiplica (!)"*, e relembrei o problema das linhas de ônibus usado na revisão, o que os induziu a concluir que deveriam multiplicar todos os resultados encontrados até então.

- **Resultados na lousa / Plenária:**

Assim como na aula anterior, fizemos essa etapa da aula e as três próximas de maneira unificada, um problema de cada vez.

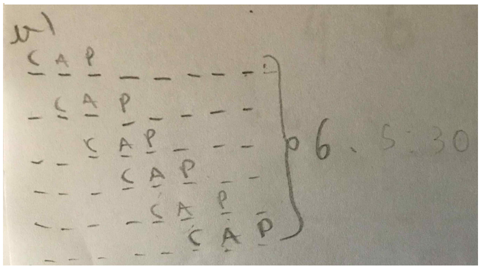
Para o problema 1, a única resposta distinta de $6!$ foi $6 \cdot 6$. Após discutir o erro dessa solução e de revisar a solução correta, passamos ao problema 2. Aqui cometi um erro material, pois esse problema já havia aparecido na aula 1 (deveria ter usado outra palavra). Mesmo assim, pelo menos três alunos dos seis presentes não tinham visto esse problema ainda, pois não haviam comparecido na aula 1.

No problema 3 houve, de início, uma tentativa do aluno E de fazer $(5 + 3 + 2)! = 10!$ para encontrar a resposta. Fora isso, os alunos A, B, C e F listaram as seis possibilidades de permutar os três blocos de livros, mas pararam por aí e se concentraram na questão 4. Então resolvi o problema 3 na lousa usando os argumentos expostos na hora da discussão com os alunos D e E.

Ao passar para a lousa o resultado do problema 4a), recomendei que tratassem em primeiro lugar as possíveis restrições apresentadas nos problemas. Como já havia sido discutido em grupo esse item, apenas anotamos o que já havia sido feito.

No problema 4b) o aluno B fez o seguinte: considerou o caso em que CAP estava antes das outras cinco letras, depois o caso em que CAP estava após a segunda letra, depois após a terceira, e assim por diante, como podemos ver na figura 13:

Figura 13 - Solução do aluno B



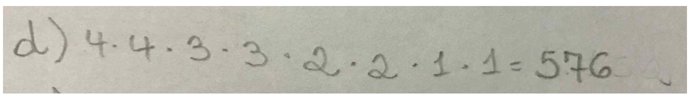
Fonte: Acervo do autor

Os outros integrantes de seu grupo fizeram a mesma coisa e o outro grupo respondeu com $3!$, mas quando pedi para alguém se manifestar de maneira favorável ou contrária apenas o grupo do aluno B confirmou sua solução. Usando essa solução do aluno B, mostrei que, só no primeiro caso listado por ele, teríamos cinco opções de escolha da letra ao lado do P, quatro opções para a próxima, e assim por diante, totalizando $5!$ permutações. Tratei os outros casos da solução dele de maneira análoga, chegando em $6 \cdot 5! = 6!$ permutações.

Ao pedir que me dessem a solução do item c) do problema 4 disseram que só pensaram em fazer algo semelhante ao item anterior e que multiplicaram os seis casos por cinco. Antes de mostrar a solução expliquei que naquele caso eu deveria fazer uma permutação dentro do bloco CAP e que essa situação era semelhante à do problema 3. Então mostrei que para cada um dos casos do item anterior teria $3!$ permutações das letras CAP, totalizando $3! \cdot 6!$ permutações.

O item d) foi resolvido somente pelo grupo com quatro alunos. Eles contaram quatro escolhas para a primeira letra e quatro para a segunda, três para a terceira e três para a quarta, duas para a quinta e duas para a sexta, e uma para a sétima e uma para a oitava, como se pode observar pela figura 14.

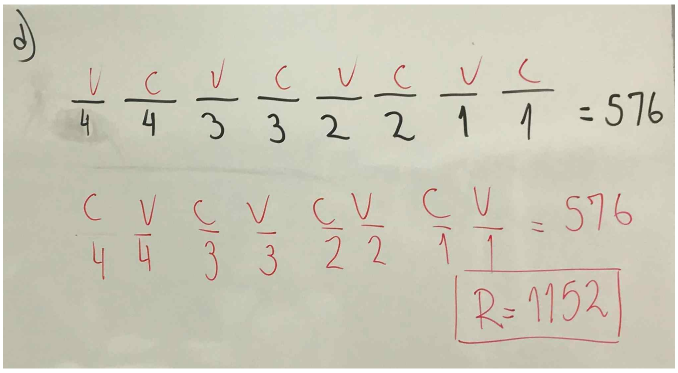
Figura 14 - Solução do aluno C



Fonte: Acervo do autor

Após elogiar a estratégia deles e escrevê-la na lousa, mostrei que na verdade eles tinham contado metade dos casos. Mostrei que esse resultado pressupõe a escolha de se começar por vogal ou por consoante. Supus que na contagem deles tinham começado por vogal. Escrevi a solução para ambas as escolhas na lousa, como podemos observar na figura 15, e disse que, pelo Princípio Aditivo, a resposta era a soma das duas.

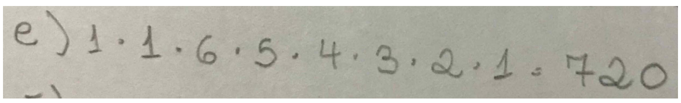
Figura 15 - Solução do problema 4d) na lousa



Fonte: Acervo do autor

Tendo feito isso, o aluno C disse que tinha feito dessa forma mas havia apagado, achando que estava errado.
O item e) foi resolvido corretamente, como podemos ver na figura 16 a solução do aluno C.

Figura 16 - Solução do aluno C



Fonte: Acervo do autor

No item f) eles se equivocaram na leitura do enunciado e entenderam que poderia ser C ou A tanto na primeira letra quanto na segunda, e responderam $2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880$. Encerrei mostrando um procedimento adequado para resolver a questão, calculando todos os casos com a letra C no primeiro lugar ($7!$), todos os casos com a letra A no segundo lugar ($7!$) e subtraindo os casos em que as duas coisas aconteciam ao mesmo tempo, pois esses foram contados em ambos os cálculos anteriores. Pelo item anterior, já sabíamos que eram 720 permutações contadas duas vezes. Chegamos então em $2 \cdot 7! - 720$ como resposta.

- **Formalização:**

Formalizei o conteúdo apresentando a seguinte definição-teorema, baseada em (SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p. 32) e relacionando-a aos problemas:

Definição: *“Chamamos de permutação de n elementos a qualquer disposição ordenada em fila destes elementos. O número de permutações de n elementos é dado por $P_n = n!$”.*

5.4 AULA 4

- **Preparação dos problemas e descrição da atividade:**

Neste dia quatro alunos (A, B, C e F) estavam presentes e formaram um único grupo. Os problemas envolviam o conceito de combinações simples. A expectativa era que fizessem as escolhas dos elementos, usando o Princípio Multiplicativo, e descontassem as permutações de cada escolha fazendo a divisão correspondente. Uma cópia da lista de problemas utilizada nesta aula encontra-se no apêndice 4.

- **Resolução dos problemas / Observar e incentivar:**

O primeiro problema discutido foi o de número 1, enunciado abaixo:

1. *Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$. De quantas maneiras podemos escolher 2 elementos de A.*

Como havia divergência de opiniões em relação ao problema, fui convidado para participar da discussão. Logo percebi que o aluno F tinha listado escolhas do tipo: $(1,1)$, $(2,2)$, etc. Expliquei que esse tipo de escolha não valia e então ele concordou com a solução dos alunos A e C que haviam contado vinte maneiras de escolher dois elementos de A. Eles estavam considerando, por exemplo, $(4,3)$ sendo diferente de $(3,4)$.

Perguntei por que estavam considerando diferentes essas escolhas, e o aluno F disse que era por causa da ordem. Respondi que o enunciado não exigia qualquer tipo de ordem para a escolha dos elementos, e que, portanto, $(4,3)$ e $(3,4)$ contariam como apenas uma escolha. O aluno F seguiu pensando sozinho.

Perguntei aos alunos A e C por que tinham escrito como solução $5 \cdot 4 = 20$. Explicaram que tinham cinco maneiras de escolher um dos elementos e que teriam quatro opções de escolher o outro elemento, portanto $5 \cdot 4 = 20$. Expliquei que calculando dessa maneira estavam considerando a ordem dos elementos e perguntei o que deveria ser feito para se descontar as escolhas equivalentes.

Depois de deixá-los pensando um pouco, perguntei quantas opções a mais que são equivalentes a $(3,4)$ eu teria, para fixar as ideias. O aluno F disse que tinha só mais uma. Perguntei quantas escolhas de cada eles teriam na contagem que fizeram, e o aluno F respondeu que eram duas. Tendo listado duas vezes cada escolha, perguntei novamente o que deveriam fazer para descontar as repetidas. Após um momento de silêncio, eu mesmo respondi dizendo para dividirem o resultado que haviam encontrado por 2.

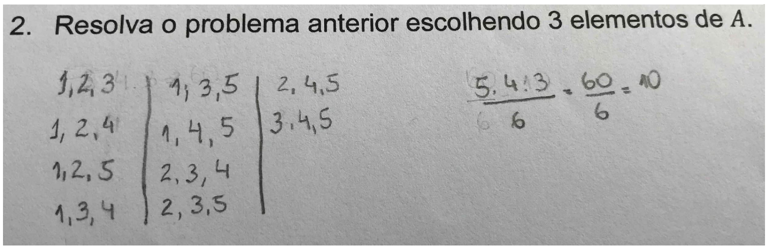
No problema 2, enunciado abaixo, os alunos listaram uma a uma as dez escolhas.

2. Resolva o problema anterior escolhendo 3 elementos de A.

Discuti então o problema com eles sob a ótica do Princípio Multiplicativo, como no problema anterior. Eles concluíram facilmente que teríamos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ escolhas considerando a ordem dos elementos. Usando a listagem que tinham feito com as dez escolhas, perguntei quantas de cada uma estavam sendo contadas nas sessenta. Usei como exemplo $(1,2,3)$, que é equivalente a $(3,2,1)$, $(2,1,3)$, etc. Depois de alguns palpites por parte de outros alunos, o aluno A respondeu que seriam seis.

Como tínhamos seis escolhas de cada listadas nas sessenta, perguntei mais uma vez o que deveria ser feito em relação ao 60 para chegarmos ao resultado correto. Mais uma vez, depois de um momento de silêncio, eu mesmo respondi: *“pego o* 60 *e divido por...”*. *“Seis”*, completaram. Podemos ver na figura 17 a solução do aluno A.

Figura 17 - Solução do aluno A



Fonte: Acervo do autor

No problema 3, enunciado abaixo, adotei com eles um procedimento análogo ao que havia adotado nos problemas anteriores.

3. Resolva os problemas 1 e 2 usando $B = \{1,2,3, \ldots, n\}$ *em vez de* A*.*

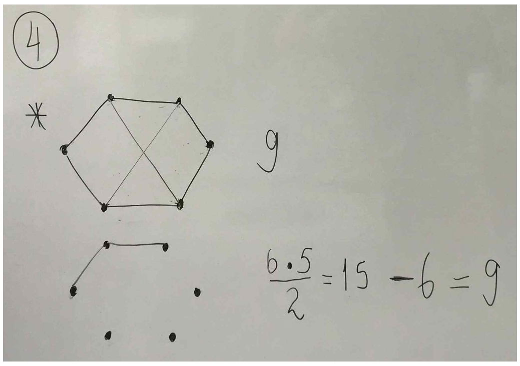
Depois de alguma dificuldade da parte do aluno F para entender n como o número de elementos de B, eles perceberam a semelhança desse problema com os precedentes e conseguiram, após mais um pouco de discussão, resolver o problema.

- **Resultados na lousa / Plenária:**

Os alunos A, C e F resolveram o problema 1 listando as escolhas e também usando o Princípio Multiplicativo, e o aluno B usou a fórmula para $C_{5,2}$. Coloquei na lousa também a solução inicial $5 \cdot 4 = 20$ dos alunos A e C, e quando perguntei qual o problema dessa solução o aluno A respondeu: *“que a gente não dividiu por* 2*”*. Frisei mais uma vez que essa divisão significava descontar as escolhas “repetidas” dentre as 20 contadas.

Da mesma forma que no problema 1, os alunos A e C resolveram o problema 2 listando as escolhas e também usando o Princípio Multiplicativo, e o aluno B usou a fórmula para $C_{5,3}$. O aluno F listou dezessete possibilidades de escolha

Figura 18 - Solução do problema 4 na lousa



Fonte: Acervo do autor

repetindo elementos em algumas escolhas. Reforcei os argumentos usados durante a resolução da lista e passamos para o próximo problema.

Em relação ao problema 3 também já havíamos feito a discussão durante a resolução da lista, por isso apenas revisamos a sua solução e passamos para o problema 4.

O problema 4, enunciado logo abaixo, foi resolvido pelos alunos A, B, C e F.

4. Quantas diagonais possui um hexágono regular?

Os alunos A, B, e C desenharam as nove diagonais do hexágono, e o aluno F usou a fórmula das diagonais de um polígono regular. Apresentei a eles então uma abordagem que se vale do conceito de combinações simples. Desenhei os seis vértices do hexágono e perguntei o que era necessário fazer para se ter uma diagonal, como podemos ver na figura 18.

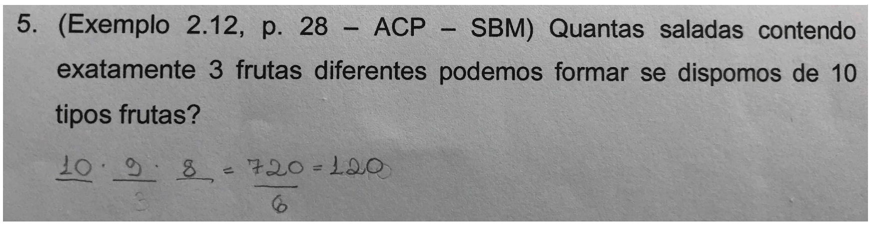
Um deles disse que era necessário *"ligar um no outro"*. Completei perguntando o que eu deveria ESCOLHER para ter a diagonal no polígono. Um deles disse: "dois pontos". "Dentre quantos?", perguntei. "De seis", alguém respondeu. A partir daí, usando os procedimentos dos problemas 1, 2, e 3, calculamos $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Perguntei por que a resposta não fechava com a que já havíamos encontrado. Depois de alguns palpites, o aluno B disse que era por que nesse último caso estávamos contando também os lados do hexágono. Daí ficou claro que bastava fazer $15 - 6$ para encontrar a resposta correta.
Apenas o aluno F não resolveu o problema 5, enunciado logo abaixo:

5. (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, p. 28) Quantas saladas contendo exatamente 3 frutas diferentes podemos formar se dispomos de 10 tipos frutas?

Os alunos A e C relataram que se valeram dos argumentos desenvolvidos na aula, efetuaram os cálculos conforme a figura 19 abaixo. O aluno B usou a fórmula das combinações.

Figura 19 - Solução do aluno C


5. (Exemplo 2.12, p. 28 – ACP – SBM) Quantas saladas contendo exatamente 3 frutas diferentes podemos formar se dispomos de 10 tipos frutas?

$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{720}{6} = 120$

Fonte: Acervo do autor

- **Formalização:**

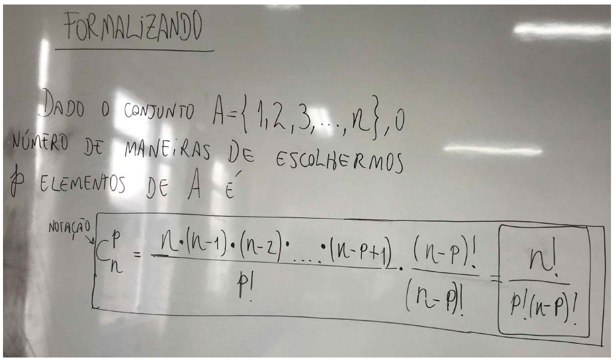
Para explicitar a fórmula para calcular as combinações de n elementos tomados p a p, comecei colocando a notação $C_{n,p}$. Meu objetivo era deduzir a fórmula usando os argumentos discutidos em aula e fazer uso de um recurso algébrico para deixar o resultado no formato conhecido por todos.
Pedi que eles me ajudassem dizendo quantas opções eu tinha para a primeira escolha e quantas opções eu tinha para a segunda. Eles disseram: "n" e "$n - 1$", respectivamente. Disse que deveria seguir esse padrão até chegar à p-ésima escolha que corresponde a $(n - p + 1)$ opções.
Eles perguntaram por que na p-ésima escolha tínhamos $(n - p + 1)$ opções. Em vez de tentar sanar a dúvida deles fazendo uma demonstração, resolvi

calcular $(n - p + 1)$ em alguns dos problemas que estavam na lousa. Eles se demonstraram satisfeitos com isso.

Segui explicando que, tendo multiplicado aqueles p fatores, estava levando em conta a ordem dos elementos escolhidos. Disse que deveria permutá-los a fim de saber quantas escolhas equivalentes teria feito. Depois de revisarmos alguns problemas vistos na aula, eles perceberam que, cada escolha de elementos estava sendo contada $p!$ vezes, e, portanto, deveríamos dividir $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$ por $p!$.

Multiplicando o numerador e o denominador de $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!}$ por $(n-p)!$, chegamos em $C_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!} \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$, como podemos observar na figura 20.

Figura 20 - Formalização na lousa do conceito de combinação simples



Fonte: Acervo do autor

5.5 AULA 5

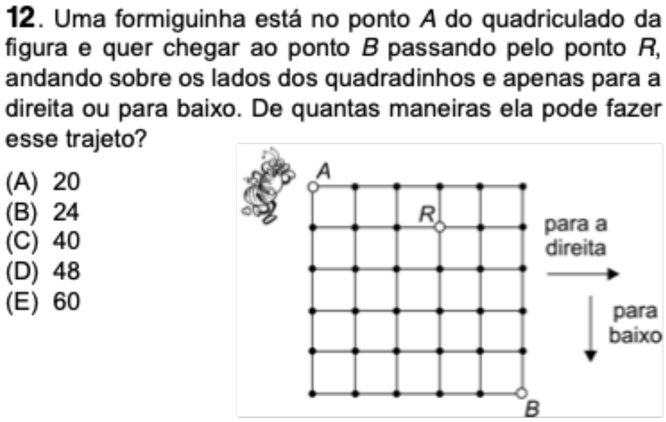
- **Preparação dos problemas e descrição da atividade:**

Nesta última aula compareceram os alunos A, C, E e F. Os alunos A e C formaram uma dupla e os alunos E e F fizeram individualmente. Selecionei dois problemas retirados de provas da OBMEP e um problema que generalizava o problema 4 da aula anterior. Os objetivos da aula eram desafiá-los com problemas não-rotineiros que envolviam os conceitos desenvolvidos até então, e dar ênfase ao processo de resolução, não à resposta final, conforme citado na seção 2.1.3, à página 20. Como não foram abordados conteúdos novos, não foi realizada a etapa da formalização. Uma cópia da lista de problemas utilizada nesta aula encontra-se no apêndice 5.

- **Resolução dos problemas / Observar e incentivar:**

Comecei revisando com o aluno E a fórmula das combinações simples e sua aplicação, pois não havia comparecido na aula passada. No problema 1, os alunos A e C me chamaram para conferir o que haviam feito. O enunciado do problema[8] pode ser visto na figura 21, abaixo:

Figura 21 - Problema 1


12. Uma formiguinha está no ponto *A* do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto *B* passando pelo ponto *R*, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?

(A) 20
(B) 24
(C) 40
(D) 48
(E) 60

Fonte: Prova da OBMEP 2008, primeira fase, nível 3

Eles calcularam $C_{10,3}$ e justificaram dizendo que em todos os caminhos do ponto *A* para o ponto *B* a formiga teria que dar dez passos $(n = 10)$ e escolheram $p = 3$ pois ela deveria passar por *A*, *R* e *B*.

Mostrei, usando a ilustração do problema, que nesse cálculo eles estavam considerando caminhos que não passavam por *R*. Sugeri então que contassem quantos caminhos havia da *A* até *R*, e depois quantos havia de *R* até *B*.

Ressaltei o fato de que independentemente do caminho escolhido de *A* até *R*, em todos os casos teria que descer uma vez. O aluno F me questionou em que esse fato ajudaria na solução do problema. Resolvi mostrar uma ideia semelhante em relação ao caminho de *R* até *B*. Constatamos que em todos os casos a formiga daria seis passos. Perguntei em quantos desses seis passos

[8] Disponível em https://drive.google.com/file/d/1pXkMm0-TjFjziXiZ7IbUzvuQLlK1jAuo/view

a formiga teria que descer ou ir para o lado. Ele respondeu corretamente que seriam quatro passos para baixo e dois para a direita. Perguntei então o que esse fato teria a ver com os problemas de escolha resolvidos anteriormente e com o que havia sido revisado no início da aula. Ele seguiu pensando. O aluno E teve fez uma tentativa semelhante à dos alunos A e C.

O debate seguiu em torno do problema 2, enunciado abaixo:

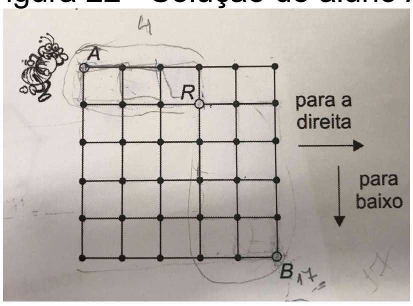
2. Quantas diagonais possui um polígono regular com n lados?

Sugeri que começassem atribuindo um valor pequeno para n, como 4, 5 ou 6, e que se lembrassem do problema 4 da aula anterior. Também relembrei que para termos uma diagonal precisamos escolher dois pontos ou vértices do polígono. O aluno A escolheu $n = 5$ calculou $C_{5,2}$.Relembrei da aula passada que ao calcularem $C_{5,2}$ estavam levando em conta os lados do polígono. Concluíram então que deveriam subtrair essas possibilidades do total encontrado. Chamei a atenção para o fato de que poderíamos aplicar o mesmo raciocínio usado para $n = 5$ para n qualquer.

- **Registro das resoluções na lousa / Plenária**

No dia desta aula a sala onde costumávamos nos encontrar não estava disponível, pois essa última aula teve de ser remarcada, o que nos forçou a realizar a atividade na biblioteca. Tive que usar uma das cópias da lista para fazer as anotações e resoluções. No problema 1 os alunos A e C contaram 4 caminhos de *A* até *R* e 17 caminhos de *R* até *B*, como podemos ver na figura 22.

Figura 22 - Solução do aluno A

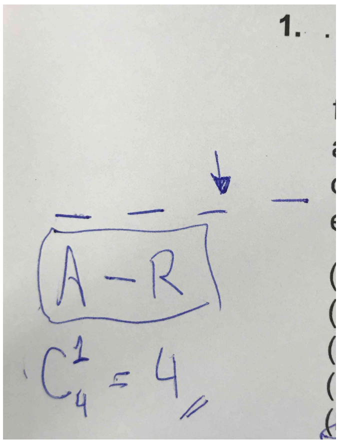


Fonte: Acervo do autor

Os alunos E e F não encontraram uma solução para o problema.

Para resolver o problema comecei desenhando em uma sequencia genérica de quatro passos de *A* até *R*, como se pode ver na figura 23.

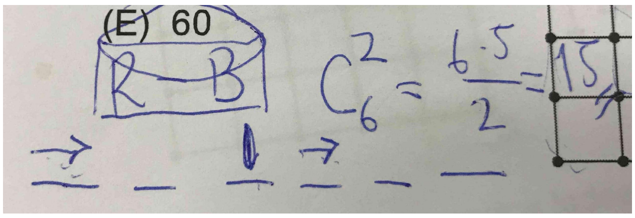
Figura 23 - Resolução do problema 1



Fonte: Acervo do autor

Ressaltei o fato de que em todos os caminhos seríamos obrigados a descer uma vez, o que nos leva a sempre escolher um entre quatro passos para descer. Assim o número de maneiras de escolher um passo entre quatro é, como revisado no início da aula, igual a $C_{4,1} = 4$. Analogamente, dos seis passos necessários para ir de *R* até *B*, em dois teríamos que ir para a direita. Utilizei um desenho semelhante ao do caso anterior, como podemos ver na figura 24.

Figura 24 - Solução do problema 1

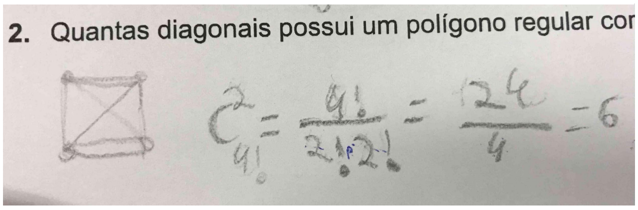


Fonte: Acervo do autor

Calculamos o número de maneiras de escolher os dois passos entre os seis usando $C_{6,2} = 15$. Conclui que, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta do problema era $4 \cdot 15 = 60$.

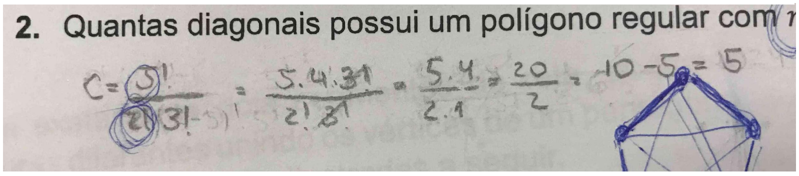
No problema 2 os alunos E e F começaram a resolver o problema para $n = 4$, como podemos ver na figura 25, e os alunos A e C resolveram para $n = 5$, como vemos na figura 26.

Figura 25 - Solução do aluno F



Fonte: Acervo do autor

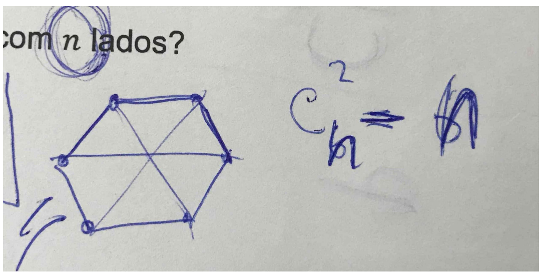
Figura 26 - Solução do aluno A



Fonte: Acervo do autor

Para resolver o problema 2 comecei chamando a atenção deles para o fato de que um polígono com n lados terá n vértices. Como para termos uma diagonal precisamos escolher dois vértices, o número de maneiras de fazermos essa escolha será $C_{n,2}$. Como os lados do polígono também estão sendo contados nesse cálculo, devemos subtrair n de $C_{n,2}$, chegando em $C_{n,2} - n$ como resposta. Mostrei também como a solução de um caso particular poderia induzir ao resultado geral. Expliquei que para $n = 6$, por exemplo, a resposta do problema seria $C_{6,2} - 6$, e que a única coisa que muda desse caso para o geral é o fato de que em vez de 6 lados serão n, o que nos leva a trocar 6 por n em $C_{6,2} - 6$, chegando em $C_{n,2} - n$, como podemos ver na figura 27.

Figura 27 - Resolução do problema 2



Fonte: Acervo do autor

Apenas o aluno F tentou resolver o problema 3, cujo enunciado está na figura 28, obtendo 20, letra A), como resposta.

Figura 28 - Problema 3

19. Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

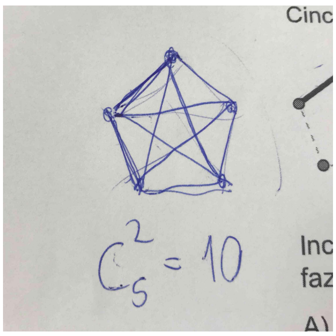
Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

A) 20
B) 30
C) 35
D) 40
E) 45

Fonte: Prova da OBMEP 2009, primeira fase, nível 2

Resolvi o problema mostrando primeiramente que o total de posições possíveis para os dois segmentos de reta seria o total de diagonais do pentágono mais os lados, o que resulta em dez possibilidades. Desenhei um pentágono com suas diagonais para visualizar as possibilidades. Também afirmei que poderíamos usar o problema 2, com $n = 5$, sem subtrair n, isto é, calculando $C_{5,2}$, para chegar ao resultado, o que de fato fizemos, como podemos ver na figura 29.

Figura 29 - Resolução do problema 3



Fonte: Acervo do autor

Como das dez posições possíveis para colocarmos os segmentos de reta deveríamos escolher duas, concluímos que a solução do problema era $C_{10,2} = 45$, letra E).

6. ANÁLISE DA PRÁTICA

Conforme mencionamos no capítulo anterior, os alunos relataram que já haviam tido contato com alguns conceitos e fórmulas da Análise Combinatória. Isso nos levou a selecionar, já na primeira aula, problemas mais elaborados, no intuito de saber até que ponto eles compreendiam esses conceitos e fórmulas. Era fundamental entendermos quanto os alunos já dominavam o conteúdo na hora de selecionarmos os problemas a serem trabalhados nos encontros seguintes, uma vez que seria por meio destes problemas que exploraríamos mais detalhadamente os conceitos da Análise Combinatória. Como o que para alguns pode ser um problema e, ao mesmo tempo, para outros pode ser um exercício, seja pela quantidade de recursos que o indivíduo possua, seja pelo desinteresse na questão (POZO; ECHEVERRIA, 1998), nosso intuito era utilizar situações e questionamentos que, para a maioria, representassem problemas. Compreendendo quais aspectos do conteúdo os alunos dominavam, poderíamos selecionar problemas cuja solução motivasse o desenvolvimento dos conceitos ainda não compreendidos pelos alunos. De fato, essa foi a nossa atitude ao produzir as atividades a serem aplicadas em cada aula.

6.1 AULA 1

Em nossa primeira aula, em uma visão geral, percebemos que os alunos não estavam muito acostumados com os tipos de situações apresentadas nos problemas dessa primeira lista, mesmo assim demonstraram interesse em resolvê-los. Na etapa denominada “Preparação do problema”, escolhemos os problemas utilizando os critérios descritos acima.

Na etapa “Resolução dos problemas”, durante a resolução dos problemas 2 (teia de aranha) e 1 (escolher 2 livros), notamos que os alunos possuíam alguma noção do Princípio Multiplicativo, pois as estratégias apresentadas por eles nos dois problemas envolviam contar as possibilidades de escolhas e multiplicar os resultados.

Em relação à solução apresentada para o problema 5 (anagramas), notamos que os alunos ainda não compreendiam o princípio por trás das permutações, e assim, apenas aplicavam a fórmula nos casos de anagramas. Até certo ponto, o problema 5 foi encarado pela maioria como um exercício, de acordo com o conceito de exercício apresentado na seção 2.1.2, e posteriormente passou a se tornar um problema para alguns. Isso porque, a partir do momento em que disse a eles que podiam usar a mesma ideia por trás dessa solução para resolver os outros problemas, a reação deles foi de desconfiança, conforme mencionado no capítulo anterior (p. 51).

Na etapa "Plenária", ao discutirmos as soluções apresentadas para o problema 1, o aluno G, de maneira intuitiva, raciocinou corretamente, utilizando simultaneamente os princípios multiplicativo e aditivo, ao sugerir que fizéssemos $\frac{5 \cdot 7}{2} + \frac{5 \cdot 10}{2} + \frac{7 \cdot 10}{2}$, apesar de não ter percebido que não era necessária a divisão por dois.

Em relação ao papel do professor na primeira aula, nossa participação foi, inicialmente, no sentido de auxiliá-los a compreender o que se pedia em cada problema, conforme o primeiro passo para a resolução de um problema apresentado por Polya. Nos focamos também em fazer questionamentos que os levassem a entender os princípios subjacentes às soluções procuradas, e a aplicar esses princípios para resolver os outros problemas. Também auxiliamos os alunos a analisarem suas próprias estratégias de resolução, com intuito de fazê-los, por si só, confirmar ou descartar suas ideias, a fim de que, conforme estabelecido nos PCN (BRASIL, 2018, p. 42), abordassem os problemas com mais confiança, e aprendessem a reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

Cabe observar que, por ser um encontro de sondagem, não realizamos todas as etapas do roteiro proposto por Onuchic e Allevato. O "Consenso" e a "Formalização", por exemplo, ocorreram no segundo encontro, conforme descrito no capítulo anterior.

6.2 AULA 2

Em virtude das deficiências na compreensão e aplicação dos princípios Multiplicativo e Aditivo, para o segundo encontro, selecionamos problemas mais simples de serem resolvidos e nos quais ficasse mais evidente a aplicação desses princípios.

Nossa expectativa era que na resolução dos problemas 1 (linhas de ônibus) e 2 (escolha do carro) os alunos percebessem que poderiam obter as soluções multiplicando as possibilidades para cada escolha, e que percebessem o princípio por trás desse procedimento. Levando em conta a observação do aluno B, referente ao problema 2: *“são quatro modelos e cada cor dá para escolher entre três, é quatro vezes três”*; e o fato de que, na resolução do problema 1, eles perceberam que deveriam multiplicar o número de formas de ir pelo número de formas de voltar, podemos dizer que, para essa etapa de “Resolução dos Problemas”, nossas expectativas foram parcialmente alcançadas, conforme explicaremos melhor mais abaixo.

Em relação ao problema 3 (código morse), esperávamos que, usando o princípio aprendido por meio da resolução dos problemas 1 e 2, os alunos calculassem o número de palavras em cada caso (com uma “letra”; com duas “letras”; etc.) e somassem os totais encontrados em cada caso. Conforme descrito no capítulo anterior (p. 55), nossa sugestão a eles foi apenas no sentido de contarem o número de palavras em cada caso, sem dizer como fazer essa contagem, e sem mencionar a soma final, pois, segundo Polya (2006, p.1), o “estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. [...] O professor deve auxiliar, nem demais, nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável de trabalho*.”.

Na etapa Plenária, como já relatado, eles contaram duas possibilidades para palavras com uma “letra”; quatro para duas “letras”; seis para três “letras”; e oito para quatro “letras”, mostrando, assim, que não aplicaram o Princípio Multiplicativo para a contagem em cada caso. Nesse ponto nossas expectativas para a etapa de “Resolução” não foram completamente alcançadas, pois esperávamos que já conseguissem aplicar o Princípio nesse caso análogo. Apesar disso, durante a discussão ocorrida na plenária, conseguimos chegar literalmente em um “Consenso”.

Na Formalização, notamos que a experiência adquirida nos dois encontros durante a resolução dos problemas tornou muito mais natural para os alunos a terminologia e a notação envolvidas nos enunciados dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Conforme relatado no capítulo anterior, procedemos revisão dos problemas já resolvidos usando agora a terminologia e notação formalizada. Após apresentar os dois princípios e revisar os problemas, perguntei: “*toda vez que eu separar o problema em casos, eu tenho que fazer o quê, no final?*”. Eles responderam: “*somo*”. Depois perguntei: “*e toda vez que eu escolho uma coisa e outra; que eu vou “acumulando” as escolhas, eu faço o quê?*”. Alguém disse: “*multiplica*”. Fizemos esses questionamentos no intuito de saber se havia ficado clara a formalização e a aplicação dos conceitos. As respostas corretas nos indicam que os alunos entenderam o sentido dos conceitos formalizados. Conforme Onuchic e Allevato (2011, p. 82), no contexto da Resolução de Problemas, “A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.”.

6.3 AULA 3

Como já mencionado no capítulo anterior (p. 59), selecionamos os problemas para esse terceiro encontro com o intuito de que os alunos entendessem o conceito de permutação simples como uma aplicação do Princípio Multiplicativo.

Na etapa de resolução dos problemas, ressaltamos, inicialmente, o esforço do aluno E em tentar relacionar o problema 1 da lista 2 (cidades A, B e C) com o problema 1 (carros nas vagas) da lista dessa terceira aula. Nesse momento, o aluno E utilizou o problema das cidades como um problema correlato ao que estava tentando resolver. Conforme relatado anteriormente, essa estratégia conduziu-o à solução do problema.

Em relação ao problema 4 (anagramas da palavra CAPÍTULO), sugeri que os alunos utilizassem o problema das vagas no estacionamento como correlato a esse. Eles fizeram corretamente a analogia entre as vagas no estacionamento e as posições das letras, e entre as letras e os carros, podendo assim, conforme os passos para resolução de um problema apresentados por Polya, utilizar o seu método para resolver o problema dos anagramas, o que, de fato, fizeram.

Durante a resolução do problema 3 (livros na estante), procurei acompanhar mais de perto os alunos, pois considerei importante que ficasse bem compreendida a ideia de permutar os “blocos” de livros, e depois permutar “dentro dos “blocos” ”. Ainda assim procurei conduzi-los, por meio de questionamentos e analogias, considerando os alunos, conforme Onuchic e Allevato (2011, p. 83), como “co-construtores da matéria nova que se quer abordar [...]”.

Durante a Plenária, discutindo as soluções apresentadas pelos grupos para o problema 4, procurei atingir o consenso utilizando ao máximo as ideias dos alunos, valorizando o trabalho deles. Também procurei deixar claro o princípio geral de que, em todos os casos, atendendo primeiramente as exigências das restrições – começar por vogal, por exemplo –, eles conseguiriam chegar ao resultado final com maior segurança. Tendo chegado a um consenso em relação a todos os problemas, formalizamos o conceito de permutação simples, ficando, assim, claro o uso do fatorial em problemas de contagem.

6.4 AULA 4

Para desenvolver o conceito de combinação simples, por meio da resolução dos problemas apresentados, escolhemos questões nas quais os alunos pudessem listar e contar todas as possibilidades sem muita dificuldade, bem como percebessem quais seriam as escolhas repetidas que apareceriam ao utilizarem o Princípio Multiplicativo. Nossa expectativa era que percebessem a necessidade de se realizar a divisão do total de escolhas contadas com o uso do Princípio Multiplicativo pelo número de permutações de cada escolha.

Conforme relatado no capítulo anterior, durante a etapa de resolução dos problemas, nos problemas 1 (elementos de A) e 2, os alunos utilizaram o Princípio Multiplicativo para contar as escolhas dos elementos. Depois de esclarecido que a ordem dos elementos escolhidos não importava, os alunos perceberam a quantidade de escolhas repetidas que haviam feito – duas equivalentes de cada no problema 1 e seis equivalentes de cada no problema 2. Nesse momento nosso esforço foi no sentido de contribuir para que percebessem a necessidade de se fazer a divisão mencionada no parágrafo acima. Quando questionamos o grupo sobre como fazer para descontar as escolhas repetidas, entendemos que o professor poderia tê-los deixado pensando um pouco mais, em vez de acabar respondendo, diante do silêncio do grupo, como acabou ocorrendo. Isso pois, segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 82), o professor "precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade.".

Durante a Plenária, ao discutirmos o problema 4 (diagonais do hexágono), procuramos apresentar a solução via combinações da maneira mais interativa possível. Utilizamos o mesmo procedimento dos problemas anteriores para chegar no resultado, tomando cuidado para que o professor não deixasse de ser o mediador da discussão e se tornasse o único detentor do saber, conforme orienta o roteiro a que nos propusemos seguir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85).

Na Formalização, conforme descrito no capítulo anterior, utilizamos o procedimento que resolveu os problemas para deduzir a fórmula das combinações simples. Mesmo nessa etapa buscamos a interatividade com os alunos, a fim de que percebessem que já estavam utilizando a fórmula de maneira intuitiva, e que essa era uma fórmula que não necessitava ser decorada. Dessa forma, procuramos contribuir para desenvolver "a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82) e para que, conforme já mencionado, os alunos se tornassem "co-construtores da matemática nova que se quer abordar" (idem, p. 83-84).

6.5 AULA 5

Nossos objetivos para o último encontro de nossa prática eram desafiá-los com problemas não-rotineiros, que envolvessem os conceitos desenvolvidos até então, e dar ênfase ao processo de resolução, não à resposta final, conforme descrito na seção 2.1.3.

Durante a resolução do problema 1 (caminhos de A até B), os alunos, no início, pensaram corretamente no sentido de tentar usar a fórmula das combinações. Perceberam que a formiga sempre daria 10 passos para ir de A até B, e que isso estava diretamente relacionado com os valores e serem substituídos na fórmula. Apesar disso, não incluíram na estratégia a condicionante de que a formiga deveria passar pelo ponto R. Conforme o primeiro passo para a resolução de um problema apresentado por Polya (p. 27), chamamos a atenção dos alunos para essa parte essencial do problema e dei uma sugestão, sem resolver o problema, de como poderiam satisfazer essa condicionante.

Ao discutirmos o problema 2 (diagonais), por ser um problema de generalização, sugerimos, conforme relatado no capítulo anterior, que fizessem casos particulares e usassem o resultado obtido no problema correlato da aula anterior, conforme segundo passo apresentado por Polya (p. 27). Os alunos resolveram o problema corretamente, utilizando o problema correlato, para os casos particulares que consideraram, mas não fizeram a generalização.

Durante as etapas "Plenária" e "Consenso", solucionamos os problemas utilizando ao máximo o que foi desenvolvido durante a Resolução, em especial destacando as ideias propostas pelos alunos. Também resolvemos o problema 3, mesmo não tendo sido discutido em grupo, uma vez que um dos alunos havia tentado resolvê-lo. Fizemos questão de resolvê-lo a fim de valorizar o interesse do aluno, e também para mostrar como esse problema, mais complicado que os outros, também poderia ser resolvido usando as ideias discutidas até ali.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nossa pesquisa com o propósito de analisar as principais mudanças na prática pedagógica – em relação ao método tradicional – e o processo de desenvolvimento dos conceitos básicos da Análise Combinatória, com uma turma do Ensino Médio, utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem. Para tal, escolhemos implementar a metodologia de ensino seguindo o segundo Roteiro de Atividades proposto pelo GTERP. Também nos propusemos a analisar particularidades do caso, a fim de que, como mencionado no capítulo 4, o leitor possa, "com base em experiências anteriores [...] chegar às suas próprias generalizações" (STAKE, 1983, p. 22).

Em relação à prática pedagógica, observamos, inicialmente, uma mudança significativa no planejamento das aulas. Em vez de procurar formas de explicar o conteúdo e preparar atividades baseadas na explicação, o professor deve saber selecionar problemas que envolvam os conceitos a serem estudados para que, por meio da resolução desses problemas, os alunos desenvolvam os conceitos. Observamos também que se deve tomar cuidado o nível de dificuldade dos problemas selecionados. Problemas mais complicados logo de início tendem a dificultar o desenvolvimento dos conceitos, como observamos no primeiro encontro de nossa prática.

A Resolução de Problemas exige mais preparo da parte do professor. Além de simplesmente responder perguntas, o professor deve estar pronto para auxiliar os alunos a construírem as soluções levando em conta, por vezes, caminhos ainda não pensados por ele mesmo. Isso exige um conhecimento mais profundo do conteúdo. O professor deve adquirir experiência no sentido de orientar os alunos a buscarem as soluções de maneira que eles mesmos percebam quando e por que certo caminho ou estratégia trará ou não o resultado desejado, sem com isso precisar dar a resposta do problema. Para tanto, o professor deve estar acostumado com aqueles "procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas e que todas as pessoas colocam em ação com maior ou menor competência" (POZO; ECHEVERRIA, 1998, p. 22), como, por exemplo, os passos apresentados por Polya.

O desenvolvimento dos conceitos da Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas, em nossa prática, colocou, de fato, os alunos na posição de co-construtores do próprio conhecimento. O interesse em resolver os problemas motivou o desenvolvimento de conceitos e procedimentos que posteriormente foram formalizados. A resolução dos problemas 1 (cidades A, B e C) e 3 (código morse), da aula 2, foi fundamental para o desenvolvimento dos conceitos dos princípios de contagem. A resolução dos problemas da aula 3 mostrou de maneira natural o fato de que a contagem das permutações dos elementos de um conjunto se faz usando o Princípio Multiplicativo; bem como a resolução dos problemas da aula 4 auxiliou a desenvolver o conceito de combinação simples como o número de formas de escolher uma quantidade p de elementos em um conjunto com n elementos. O procedimento desenvolvido na resolução dos problemas da aula 4 foi utilizado para a dedução da fórmula das combinações simples, o que representou um ganho para todos os envolvidos em nossa prática.

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Análise Combinatória se mostrou eficaz no desenvolvimento do conteúdo e das técnicas de resolução dos problemas. Uma das grandes vantagens que tivemos ao aplicar essa metodologia no ensino-aprendizagem desse conteúdo é que os alunos não apresentaram as famosas dúvidas quanto à aplicação das fórmulas: "é arranjo, permutação ou combinação, professor?". A aplicação dessa metodologia em nossa prática também contribuiu para que se alcançassem os objetivos colocados PCN para o ensino de matemática no nível médio, como: "utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 42), para citar um exemplo.

Em relação ao roteiro utilizado para a implementação da metodologia de ensino-aprendizagem, frisamos, inicialmente, a necessidade de ser feita nos grupos a leitura e a compreensão dos enunciados dos problemas. Conforme relatado na aula 4, havia alunos que não tinham percebido que no enunciado do problema 1 (escolha de elementos de A) estava subentendido que a ordem dos elementos escolhidos não importava. Quanto à etapa de resolução dos problemas, retomamos o que foi dito por Diogo (2007, p. 16): "a habilidade de resolver problemas não é inata, muito pelo contrário, pode e deve ser desenvolvida". O professor deve sempre ter isso em mente, a fim de fazer o máximo para transmitir aos alunos essa experiência de como encarar os problemas.

Na etapa de registro das soluções na lousa e da plenária, o professor deve colocar todas as soluções diante da turma sem demonstrar qualquer tipo de preconceito em relação a alguma solução colocada. Todas as soluções devem ser discutidas com o mesmo rigor, para que todos os grupos possam tirar proveito da experiência de seus colegas.

Quanto à formalização dos conceitos, destacamos a importância de se aproveitar ao máximo o que foi produzido durante as etapas anteriores. Esta etapa não deve ficar desconexa das anteriores. Tomando como exemplo os conceitos de permutação e de fatorial, desenvolvidos na aula 3, na qual ficou evidenciada a íntima relação entre eles, nosso único trabalho durante a Formalização foi o de apresentar as notações. Podemos citar novamente a dedução da fórmula das combinações simples, durante a Formalização da aula 4, na qual apenas generalizamos o procedimento utilizado durante a Resolução.

Encerramos nossas considerações retomando o que foi dito por Ponte (2006, p. 2) sobre os estudos de caso de caráter qualitativo, que estes devem "contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse", que no nosso caso é o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas no Ensino Médio. Todo o trabalho feito durante esta pesquisa contribuiu de forma positiva para a nossa compreensão desse fenômeno. Além disso, o processo pelo qual passamos durante a pesquisa mudou nossa maneira de pensar o ensino-aprendizagem de Matemática, em especial de Análise Combinatória, em sala de aula em diversos aspectos, conforme descrevemos acima. Percebemos que o professor pode ir além da explicação dos conteúdos, podendo compartilhar aos alunos sua própria experiência.

REFERÊNCIAS

BAGATINI, A. *Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas*. 2010. 82f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/29144>. Acesso em 05 de abr de 2021.

BAUR, A. P. *O Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas*. 2009. 44f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/18220. Acesso em 20 de mai de 2021.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. *Qualitative research for education*. Boston: allyn and Bacon, Inc., 1982.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Parte III. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 23 de nov de 2018.

DANTE, L. R. *Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática*. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre docência, 1988.

DIOGO, M. A. *Problemas Geradores no Ensino-Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio*. 2007. 119f. Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: < https://lume.ufrgs.br/handle/10183/11230>. Acesso em 25 de nov de 2018.

FERREIRA, C. P. *A Metodologia da Resolução de Problemas na primeira série do Ensino Médio: Experiência e considerações*. 2009. Disponível em

<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_cleonice_pereira_ferreira.pdf>. Acesso em 15 de nov de 2018.

KILPATRICK, J. *Fincando Estacas: Uma tentativa de Demarcar a Educação Matemática como Campo Profissional e Científico*. Zetetiké, Campinas, SP, v. 4, n. 5, p. 99-120, jan./jun. 1996.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise combinatória e probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1991.

NISBET, J.; WATT, J. *Case study*. Readguide 26: Guides in Educational Research. University of Nottingham School of Education, 1978.

ONUCHIC, L. De La R. *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. P. 199-218.

______.; ALLEVATO, N. S. *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. Boletim de educação matemática, vol 25, núm 41, dezembro de 2011, pp. 73-98. Disponível em < http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf>. Acesso em 13 de nov de 2018.

POGGIOLI, L. Estratégias de resolución de Problemas. Serie Enseñando a aprender. Caracas, Polar, 2001. Disponível em: < https://spratfau.files.wordpress.com/2011/09/biblio_estrategias-de-resolucic3b3n-de-problemas.pdf>. Acesso em 15 de nov de 2018.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. *Estudos de caso em educação matemática*. Bolema, v. 19, nº 25, p. 105-132. Disponível em < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte(BOLEMA-Estudo%20de%20caso).pdf >. Acesso em 2 de dez de 2018.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. *Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender*. In. POZO, J. I. (Org.) Et. Al. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 1998. Disponível em <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6831/mod_resource/content/4/pozo-cap%201%20.pdf>. Acesso em 15 de nov de 2018.

RAMOS, A. P. et al. *Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução*. IME-USP – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2002. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/Artigos/resolucao_problemas.pdf>. Acesso em 16 de nov de 2018.

RIBEIRO, R. E. S. *Uma Proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio.* 116f. Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/55136>. Acesso em 25 de nov de 2018.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I.T.C. *Introdução à análise combinatória*. Coleção Livro-texto, Editora da UNICAMP, 1998.

SCHROEDER, T. L.; LESTER Jr., F. K*. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving*. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics*, 1989 (Year Book). Disponível em: <https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/COSMOS/Documents/resources/C2AM2P-resources/Developing-Understanding-Mathematics-Problem-Solving-Schroeder-Lester-1989.pdf>. Acesso em 13 de nov de 2018.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. *Metodologia da Resolução de Problemas*. In: Reunião ANPEd, 24., Caxambu, Minas Gerais, Hotel Glória, 7 a 11 de out de 2001.
Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Acesso em 16 de dez de 2018.

SOUSA, A. B. de. *A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino de matemática*. 12 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, UCB, Brasília, 2005. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>. Acesso em 18 de nov de 2018.

STAKE, R. E. *Pesquisa qualitativa/naturalista – Problemas epistemológicos*. Educação e Seleção, nº 7, p. 19-27, jan/jun 1983. Disponível em <http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/edusel/article/view/2541/2495>. Acesso em 7 de dez de 2018.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. *Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/stanic-kilpatrick.pdf>. Acesso em 13 de nov de 2018.

VIANNA, C. R. Resolução de Problemas. In: Futuro Congressos e Eventos. (Org.). Temas em Educação I - Livro das Jornadas 2002. Curitiba: Futuro Congressos e Eventos, 2002, p. 401- 410. Disponível em < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Carlos8.pdf:>. Acesso em 15 de nov de 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

LISTA 1 – CONTAGEM E PERMUTAÇÕES

1. (Exemplo 2.9, p.30 – Plínio) Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?

2.

20. Uma aranha encontra-se no ponto A de sua teia e quer chegar ao ponto B sem passar mais de uma vez por um mesmo segmento da teia. Além disso, ao percorrer um segmento radial (em traço mais fino), ela deve seguir o sentido indicado pela flecha. Quantos são os caminhos possíveis?

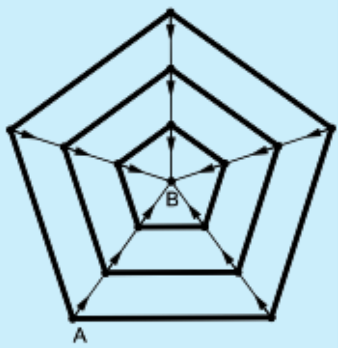
A) $2^3 \cdot 5$

B) $11^3 \cdot 5^2$

C) 5^3

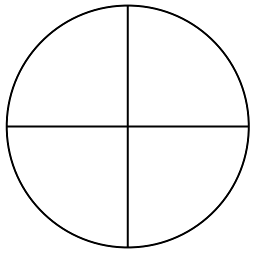
D) 11^3

E) $2 \cdot 5^3$



3. (Exemplo 2.2 p. 17 – ACP, SBM) Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

4. (EXERCÍCIO 27 P. 22 – ACP, SBM - ADAPTADO) A FIGURA ABAIXO MOSTRA UM MAPA COM 4 PAÍSES.



a) DE QUANTOS MODOS ESSE MAPA PODE SER COLORIDO (CADA PAÍS COM UMA COR, PAÍSES COM UMA LINHA FRONTEIRA COMUM NÃO PODEM TER A MESMA COR) SE DISPOMOS DE 5 CORES DIFERENTES?

b) NOS TERMOS DO ITEM ANTERIOR, DE QUANTAS MANEIRAS PODEMOS COLORIR O MAPA DE DISPUSERMOS DE N CORES DIFERENTES?

5. QUANTOS SÃO OS ANAGRAMAS DA PALAVRA COMBINAR?

APÊNDICE 2

LISTA 1A – PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

1. (Exercício 1, p.55 – Plínio) Há 3 linhas de ônibus entre as cidades A e B e 2 linhas de ônibus entre B e C. De quantas maneiras uma pessoa pode viajar:

a) INDO DE A ATÉ C, PASSANDO POR B?

b) INDO E VOLTANDO ENTRE A E C SEMPRE PASSANDO POR B?

2. Ao escolher seu carro, Roberto estava indeciso entre 4 modelos distintos e entre 3 cores. De quantas maneiras Roberto pode escolher seu carro supondo que todos os modelos estão disponíveis em todas as cores?

3. (Exercício 21 p. 21 – ACP, SBM - adaptado) O código morse usa “palavras” de 1 a 4 “letras”, as “letras” sendo ponto e traço. Alguns exemplos, de “palavras” nesse código seriam: .--., -.-, --, ., -. Quantas “palavras” existem no código morse?

APÊNDICE 3

LISTA 3 – PERMUTAÇÕES

1. (Exemplo 2.26, p. 36 – Plínio - adaptado) Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas (as vagas estão dispostas uma ao lado da outra)?

5. Quantos são os anagramas da palavra COMBINAR?

6. (Exercício 5, p. 26 – ACP) De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de mesmo assunto permaneçam juntos?

7. (Exercício 1, p. 25 – ACP - adaptado) Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

   a) Que começam por consoante e terminam por vogal?
   b) Que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
   c) Que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
   d) Que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
   e) Que têm a letra C no 1º lugar E a letra A no 2º lugar?
   f) Que têm a letra C no 1º lugar OU a letra A no 2º lugar?

APÊNDICE 4

LISTA 4 – COMBINAÇÕES SIMPLES

1. CONSIDERE O CONJUNTO $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$. DE QUANTAS MANEIRAS PODEMOS ESCOLHER 2 ELEMENTOS DE $\boldsymbol{A}$.

2. RESOLVA O PROBLEMA ANTERIOR ESCOLHENDO 3 ELEMENTOS DE $\boldsymbol{A}$.

3. RESOLVA OS PROBLEMAS 1 E 2 USANDO $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ EM VEZ DE $\boldsymbol{A}$.

4. QUANTAS DIAGONAIS POSSUI UM HEXÁGONO REGULAR?

5. (EXEMPLO 2.12, P. 28 – ACP – SBM) QUANTAS SALADAS CONTENDO EXATAMENTE 3 FRUTAS DIFERENTES PODEMOS FORMAR SE DISPOMOS DE 10 TIPOS FRUTAS?

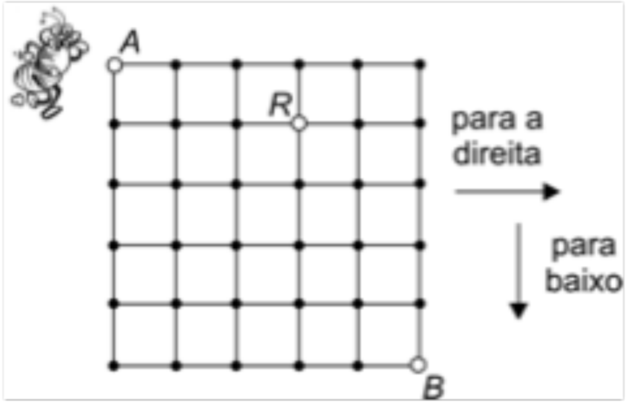
APÊNDICE 5

LISTA 5 – COMBINAÇÕES SIMPLES

1.

12. Uma formiguinha está no ponto *A* do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto *B* passando pelo ponto *R*, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?

(A) 20
(B) 24
(C) 40
(D) 48
(E) 60



2. Quantas diagonais possui um polígono regular com n lados?

3.

19. Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

A) 20
B) 30
C) 35
D) 40
E) 45

ANEXOS

ANEXO 1

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

O Colégio Adventista de Porto Alegre, neste ato representado pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza João Carlos Motta dos Santos, brasileiro, estudante, CPF xxx.xxx.xxx-xx, a aplicar a proposta de ensino: "Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas" na turma 121 do Ensino Médio. A Escola está ciente de que a referida proposta de ensino é base para o trabalho de conclusão de curso (TCC) de João Carlos, o qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e é orientado pelo Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana. O autorizado, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes da escola que participarão da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, ___de ___________ de 2018

________________________________ João Carlos Motta dos Santos

________________________________ Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

________________________________ Direção da Escola

ANEXO 2

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu,_____________________________________, R.G.______________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas", desenvolvida pelo pesquisador e professor João Carlos Motta dos Santos. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelo professor da UFRGS Alvino Alves Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do e-mail alvino@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

Analisar as principais mudanças na prática pedagógica sob perspectiva da Resolução de Problemas, bem como o processo de formação dos conceitos e das soluções dos problemas.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito extra às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, áudios ou vídeos obtidos durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., <u>sem identificação</u>. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no telefone (51)xxxxxxxxx ou e-mail joaomotta7007@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ____________________________________ de 2018.

Assinatura do Responsável:

____

Assinatura da Coordenadora Pedagógica do Colégio Adventista de Porto Alegre:

____

Assinatura do(a) pesquisador(a):

____

Assinatura do Orientadora da pesquisa:

____