

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RÓGER WILLIAN PINTO DA SILVA

**EXTENSÃO DE MÉTODO BASEADO EM
DADOS PARA PROJETO DE
CONTROLADORES ATRAVÉS DA
ABORDAGEM DE CORRELAÇÃO PARA
REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO NA
ENTRADA DE CONTROLE**

Porto Alegre
2021

RÓGER WILLIAN PINTO DA SILVA

**EXTENSÃO DE MÉTODO BASEADO EM
DADOS PARA PROJETO DE
CONTROLADORES ATRAVÉS DA
ABORDAGEM DE CORRELAÇÃO PARA
REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO NA
ENTRADA DE CONTROLE**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Diego Eckhard

Porto Alegre
2021

RÓGER WILLIAN PINTO DA SILVA

**EXTENSÃO DE MÉTODO BASEADO EM
DADOS PARA PROJETO DE
CONTROLADORES ATRAVÉS DA
ABORDAGEM DE CORRELAÇÃO PARA
REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO NA
ENTRADA DE CONTROLE**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira, PPGEE — UFPR
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil

Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler, PPGEQ — UFRGS
Doutor pela Universität Dortmund – Dortmund, Alemanha

Prof. Dr. Alexandre Sanfelici Bazanella, PPGEE — UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____

Prof. Dr. Sérgio Luís Haffner

Porto Alegre, junho de 2021.

DEDICATÓRIA

Esse trabalho é dedicado à Cristiane, eu não poderia desejar companhia melhor nesses últimos anos e para a minha vida toda.

Também dedico essa tese às minhas sobrinhas Mariah e Maya que nasceram nesse ano turbulento que passou. Espero que, quando estiver no controle, a sua geração tenha um setpoint melhor do que teve a nossa e a de nossos pais.

AGRADECIMENTOS

O maior agradecimento sempre será ao SENHOR, pela vida, pela oportunidade e pela misericórdia.

Quero agradecer também à Cristiane, por estar sempre ao meu lado, me motivando a continuar nos momentos difíceis. Também à nossa família, pelo entendimento de que nem sempre pude estar presente, mas foi por um bom objetivo.

Por fim, também quero agradecer muito ao meu orientador, por todas as discussões motivadoras e por toda a orientação que recebi nesses quatro anos. Também aos demais professores da pós com quem tive contato e aprendi muito e à Miriam por sempre me auxiliar com os procedimentos e a documentação.

RESUMO

Métodos diretos de controle baseado em dados ainda estão crescendo em popularidade mesmo mais de duas décadas após terem sido introduzidos. Esses métodos usam dados coletados do processo para identificar os parâmetros de um controlador ótimo usando bem pouca informação sobre o próprio processo, sendo este o seu principal diferencial em relação ao controle baseado em modelo. A literatura mostra que muitos casos podem se beneficiar dessas características, principalmente quando o processo é complexo ou difícil de modelar. Porém, a literatura cobre mais o problema de seguimento de referência, enquanto que há evidência de que muitos problemas encontrados na vida real são de rejeição ou atenuação de distúrbios. Ademais, a maior parte dos trabalhos lida com controladores parametrizados linearmente, o que equivale a fixar os polos da função de transferência do controlador. Embora a identificação dos polos seja possível, como indicado por alguns trabalhos, houve pouco esforço para apresentar uma solução baseada em dados para esse problema. Por conta disso, o presente trabalho propõe uma abordagem baseada em dados capaz de ajustar os parâmetros de controladores monovariáveis com parametrização do denominador e também os parâmetros de controladores multivariáveis com vistas à rejeição de distúrbios de carga. Em particular, essa abordagem combina a abordagem de correlação com o erro de predição de um modelo do controlador ótimo obtido dos sinais virtuais propostos por outro método baseado em dados com o mesmo objetivo. Ou seja, deseja-se que a resposta a perturbação do sistema seja similar à resposta de um determinado modelo de referência. Entretanto, o ajuste pelo modelo de referência pode levar a um baixo desempenho ou mesmo instabilidade quando este é muito distante do que pode ser atingido com a estrutura de controle disponível. Um meio de lidar com esse problema é utilizar um modelo de referência flexível, i.e. identificar o melhor modelo de referência juntamente com o controlador. Como isso não é suficiente para garantir a estabilidade, uma técnica de certificação baseada na condição de Vinnicombe também foi proposta para o caso de controladores monovariáveis. Por fim, o método de síntese proposto foi comparado ao outro método da literatura para rejeição de distúrbios através de um exemplo onde a abordagem de correlação mostrou-se mais imune ao ruído do que a abordagem de mínimos quadrados e variáveis instrumentais da literatura. Além disso, o método proposto também foi avaliado através de alguns estudos de caso e apresentou resultados satisfatórios. Já o algoritmo de certificação foi comparado com outros dois métodos de certificação baseados em dados e apresentou vantagens como baixa complexidade em relação a um e menor conservadorismo em relação ao outro.

Palavras-chave: Métodos baseados em dados, Rejeição de perturbação, Abordagem de correlação, Certificação de controladores.

ABSTRACT

Data-driven direct methods are still growing in popularity more than two decades after they were introduced. These methods use data collected from the process to identify an optimal controller's parameters with little knowledge about the process itself, and this is the main characteristic that sets them apart from model-based control. The literature shows that many cases may benefit from this characteristic, mainly when the process is complex and difficult to be modelled. However, the literature covers more the reference tracking problem, whereas there is evidence that many of the problems faced in real-life are of disturbance rejection or attenuation. Also, the vastly majority of those works deals with linearly parametrized controllers, which amounts to fixing the poles of the controller's transfer function. Although the identification of the controller's poles is not prohibitive, as hinted by some of the papers, there is little effort on presenting a data-driven solution capable of doing so. With all that in mind, this work proposes a data-driven approach which is able to adjust the parameters of monovariate controllers with parameters in the denominator and the parameters of multivariate controllers aiming at the load disturbance rejection. In particular, this approach combines the correlation approach with the prediction error of some model of the optimal controller obtained from the virtual signals proposed by another data-driven method with the same goal. That is, the goal is that the closed loop response be made as close as possible to some determined reference model's response. However, employing a reference model leads to poor performance and even instability when the reference model is much different from what may be achieved with the controller structure available. One way to deal with that problem is by using a flexible reference model, i.e. identify the best reference model along with the controller. Because that is not enough to guarantee the closed loop stability, a controller certification technique based on the Vinnicombe's condition is also proposed for the monovariate case. Finally, the proposed synthesis method was compared against the other literature method for load disturbance rejection through an example, where the correlation approach presented itself more immune to noise than the least squares and the instrumental variable approach from the literature. Besides, the proposed method was also evaluated through some case studies and presented satisfactory results. The proposed algorithm for certification was compared with two other data-driven certification methods from the literature and presented advantages such as low complexity against one of them and less conservatism against the other.

Keywords: Data-driven methods, Disturbance Rejection, Correlation Approach, Controller Certification.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	— Diagrama de blocos do processo em malha aberta	22
Figura 2	— Diagrama de blocos do sistema em malha fechada	23
Figura 3	— Diagrama de blocos com os sinais do VRFT	43
Figura 4	— Diagrama de blocos com os sinais do CbT	48
Figura 5	— Diagrama de blocos com os sinais do VDFT	51
Figura 6	— Diagrama de blocos com o erro de dados de malha aberta	62
Figura 7	— Diagrama de blocos com o erro de dados de malha fechada	63
Figura 8	— Processo multivariável do Exemplo 4.3	80
Figura 9	— Respostas ao salto na perturbação do Exemplo 4.3	81
Figura 10	— Diagrama de blocos destacando a divisão do controlador.	82
Figura 11	— Diagrama de blocos da malha fechada generalizada	96
Figura 12	— Representação gráfica da distância de Vinnicombe	98
Figura 13	— Curvas para certificação do Exemplo 5.1	100
Figura 14	— Diagrama de blocos mostrando o redimensionamento	101
Figura 15	— Curvas antes do redimensionamento do Exemplo 5.4	103
Figura 16	— Curvas após redimensionamento do Exemplo 5.4	103
Figura 17	— Análise dos intervalos de fatores de redimensionamento	105
Figura 18	— Estimativa paramétrica da resposta em frequência	111
Figura 19	— Estimativa não paramétrica da resposta em frequência	111
Figura 20	— Estimativa semiparamétrica da resposta em frequência	111
Figura 21	— Estimativa da norma \mathcal{H}_∞ do Exemplo 5.5	114
Figura 22	— Estimativa dos parâmetros de Markov do Exemplo 5.5	114
Figura 23	— Exemplo de sinais do caso monovariável simples	119
Figura 24	— Exemplo de sinais do caso monovariável subamortecido	120
Figura 25	— Respostas inicial e finais no caso monovariável subamortecido	121
Figura 26	— Exemplo de sinais do caso multivariável simples	123
Figura 27	— Respostas obtidas no caso multivariável simples	124
Figura 28	— Exemplo de sinais do caso de fase não mínima	125
Figura 29	— Respostas inicial e finais no caso de fase não mínima	127
Figura 30	— Exemplo de sinais do caso de ordem reduzida	128
Figura 31	— Respostas ideal, ótima e obtidas no caso de ordem reduzida	129
Figura 32	— Processo multivariável do caso multi-SISO	130
Figura 33	— Exemplo de sinais do caso multi-SISO	131
Figura 34	— Respostas obtidas no caso multi-SISO	132

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	— Dados simulados do Exemplo 2.2	34
Tabela 2	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 2.3	36
Tabela 3	— Dados simulados do Exemplo 3.1	44
Tabela 4	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.2	45
Tabela 5	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.3	50
Tabela 6	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.4	53
Tabela 7	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.5	57
Tabela 8	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 4.1	66
Tabela 9	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 4.2	73
Tabela 10	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 4.4	93
Tabela 11	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso monovariável simples.	119
Tabela 12	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso monovariável subamortecido.	121
Tabela 13	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso multivariável simples.	123
Tabela 14	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso de fase não mínima.	126
Tabela 15	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso de ordem reduzida.	129
Tabela 16	— Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso multi-SISO.	132
Tabela 17	— Resultados do estudo de caso da certificação.	134
Tabela 18	— Resultados do estudo de caso da certificação com ruído.	135

LISTA DE ABREVIATURAS

ACS	<i>Alternate Convex Search</i> (busca convexa alternada)
ARX	<i>Auto-Regressive with eXogenous input</i> (autoregressivo com entrada exógena)
BIBO	<i>Bounded Input Bounded Output</i> (entrada e saída limitadas)
CbT	<i>Correlation-based Tuning</i>
DCbT	<i>Disturbance Correlation-based Tuning</i>
DTFT	<i>Discrete Time Fourier Transform</i> (transformada de Fourier de tempo discreto)
FDT	<i>Frequency Domain Tuning</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> (resposta impulsiva finita)
IFT	<i>Iterative Feedback Tuning</i>
LS	<i>Least Squares</i> (mínimos quadrados)
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial linear)
LPM	<i>Local Polynomial Models</i> (modelos polinomiais locais)
LRM	<i>Local Rational Models</i> (modelos racionais locais)
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i> (linear e invariante no tempo)
MIMO	<i>Multi-Input Multi-Output</i> (entradas saídas múltiplas)
NCbT	<i>Noniterative Correlation-based Tuning</i>
OCI	<i>Optimal Controller Identification</i>
OE	<i>Output Error</i> (erro na saída)
PID	(controlador) Proporcional, Integral e Derivativo
PIDF	(controlador) PID com derivativo Filtrado
PRBS	<i>PseudoRandom Binary Sequence</i> (sequência binária pseudoaleatória)
SISO	<i>Single Input Single Output</i> (entrada e saída únicas)
VI	Variável Instrumental
VDFT	<i>Virtual Disturbance Feedback Tuning</i>
VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$A(q, \rho), B(q, \rho)$	resp. denominador e numerador da parte ajustável do controlador
a_i, b_i	i -ésimo parâmetro, resp. do denominador ou do numerador
$a(\omega), b(\omega)$	funções auxiliares empregadas na certificação
$C(q, \rho), \mathbf{C}(q, \rho)$	controlador a ser ajustado, resp. SISO e MIMO
$C^*(q)$	controlador ideal
$C(q, \rho^*)$	controlador ótimo para a estrutura disponível (ideal se Suposição 2.4)
$C_f(q)$	parte fixa do controlador
$C_i(q, \rho)$	parte ajustável do controlador com parâmetros a identificar
$C_o(q)$	controlador original presente durante o experimento
$d(t)$	perturbação de carga
$e(t)$	erro de seguimento de referência ou regulação
$\tilde{e}_f(t)$	erro virtual intermediário, saída da parte fixa do controlador
$E \circ, \bar{E} \circ$	valor esperado e valor esperado médio
$\mathcal{F}\{\circ\}$	operador da transformada de Fourier
$G(q), \mathbf{G}(q)$	processo a ser controlado, resp. SISO e MIMO
$H(q)$	modelo do ruído
\mathbf{I}	matriz identidade com dimensões apropriadas
ℓ	número máximo de deslocamentos da aproximação da correlação
N	número de amostras
p, s	número de parâmetros, resp. do controlador e do modelo de referência SISO
$p_{i,j}, s_{i,j}$	número de parâmetros de um elemento, resp. do controlador e do modelo de referência MIMO
$Q(q, \rho), \mathbf{Q}(q, \rho)$	função de sensibilidade a perturbação de carga SISO e MIMO
$Q_d(q), \mathbf{Q}_d(q)$	modelo de referência para rejeição de perturbação SISO e MIMO
$Q_d(q, \eta), \mathbf{Q}_d(q, \eta)$	modelo de referência flexível SISO e MIMO
q, q^{-1}	resp. operadores de avanço e atraso

$\mathbf{R}_{\circ,\circ}(\tau, \boldsymbol{\rho})$	matriz de correlação entre dois sinais multivariáveis
$r(t), \mathbf{r}(t)$	sinal de referência do sistema
$S(q, \boldsymbol{\rho})$	função de sensibilidade, $S(q, \boldsymbol{\rho}) = [1 + GC]^{-1}$
$\sup \circ, \inf \circ$	supremo e ínfimo
$\tilde{\mathbf{S}}(q, \boldsymbol{\rho})$	função de sensibilidade alternativa MIMO, $\tilde{\mathbf{S}}(q, \boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{I} + \mathbf{CG}]^{-1}$
$T(q, \boldsymbol{\rho})$	função de sensibilidade complementar
$T_d(q)$	modelo de referência para seguimento de referência
$\mathbf{T}_{\text{gen}}(q, \boldsymbol{\rho})$	malha fechada generalizada
$\mathbf{T}_{\delta\text{gen}}(q, \boldsymbol{\rho})$	malha fechada generalizada redimensionada
t	índice da amostra
$\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)$	sinal de entrada do processo
$\mathbf{u}_o(t), \mathbf{u}_o(t)$	sinal de entrada do processo com o controlador original
$V_d(\boldsymbol{\rho})$	função custo da resposta a perturbação
$V_{\text{dc}}(\boldsymbol{\rho})$	função custo da correlação para resposta a perturbação
$V_Q(\boldsymbol{\rho})$	função custo do modelo de referência para perturbação
$\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)$	ruído de medição
$W(q)$	filtro para pré-filtragem dos dados
$\circ_W(t)$	sinal obtido de dados pré-filtrados pelo filtro $W(q)$
$w(t)$	ruído branco
$\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t)$	sinal de saída medido
$\mathbf{y}_o(t), \mathbf{y}_o(t)$	sinal de saída medido em malha fechada com o controlador original
$\boldsymbol{\beta}(q), \mathbf{B}(q)$	estrutura de parametrização do controlador SISO e MIMO
$\boldsymbol{\gamma}(q), \mathbf{\Gamma}(q)$	estrutura de parametrização do modelo de referência SISO e MIMO
$\gamma(\omega, \boldsymbol{\rho})$	margem de estabilidade generalizada frequência a frequência
$\Delta(\omega)$	intervalo de fatores que certificam o controlador em uma frequência
δ	fator de redimensionamento
δ_0	raiz real positiva da função quadrática da certificação
$\delta_{\text{inf}}, \delta_{\text{sup}}$	limites inferior e superior de um intervalo de redimensionamento
$\delta_\nu(\boldsymbol{\rho}^{[a]}, \boldsymbol{\rho}^{[b]})$	distância de Vinnicombe entre dois controladores
\circ_δ	sinal ou operador de transferência redimensionado
$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\rho})$	erro de predição
$\epsilon_{G,C}(\boldsymbol{\rho})$	margem de estabilidade generalizada
$\boldsymbol{\zeta}(t)$	vetor de variáveis instrumentais
H	estrutura com os parâmetros do modelo de referência flexível MIMO

η, η^*	vetor de parâmetros e parâmetros ótimos do modelo de referência
$\eta[P, C]$	numero de contornos da condição de Vinnicombe
$\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]})$	distância de Vinnicombe frequência a frequência
$\bar{\lambda}[\circ]$	maior autovalor da matriz
\mathbf{M}, \mathbf{E}	estruturas auxiliares com vetores empregados nas soluções MIMO
μ, ξ	vetores auxiliares empregados nas soluções
μ	margem para evitar falsos positivos na certificação
\mathbf{P}	estrutura com os parâmetros do controlador MIMO
ρ, ρ^*	vetor de parâmetros e parâmetros ótimos do controlador
$\rho^{[a]}, \rho^{[b]}$	parâmetros de dois controladores, a e b
$\rho^{[i]}, \eta^{[i]}$	parâmetros na i -ésima iteração
σ	desvio padrão do ruído
$\bar{\sigma}[\circ]$	maior valor singular da matriz
τ	deslocamento da correlação
\mathbf{Y}	estrutura ou matriz auxiliar empregada nas soluções
$\Phi_{\circ}(\omega)$	espectro ou espectro cruzado de potência
$\Phi(t, i)$	estruturas com regressores para ajuste do controlador MIMO
$\varphi(t)$	regressores para ajuste do controlador
\mathbf{X}	estrutura ou matriz auxiliar empregada nas soluções
$\Psi(t, i)$	estrutura com regressores para ajuste do modelo de referência MIMO
$\psi(t, \rho)$	regressores para ajuste do modelo de referência
Ω	grade de frequências da DTFT
ω, ω_k	frequência discreta
$\circ(\omega)$	transformada de Fourier do sinal
$\circ(e^{j\omega})$	resposta em frequência do operador de transferência
$\ \circ\ _2$	norma \mathcal{L}_2 ou \mathcal{H}_2
$\ \circ\ _{\infty}$	norma \mathcal{H}_{∞}
$\bar{\circ}$	conjugado de um número complexo
\circ^T, \circ^H	transposto e conjugado transposto
\circ_i	i -ésima componente do vetor
$\circ_{i,j}$	elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz
$\circ_{(i,j)}$	elemento não escalar da i -ésima linha e j -ésima coluna da estrutura
$\hat{\circ}$	valor aproximado, estimado ou predito
$\tilde{\circ}(t)$	sinal virtual

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Motivação	16
1.2 Objetivos	18
1.2.1 Objetivos gerais	18
1.2.2 Objetivos específicos	18
1.3 Lista de contribuições	19
1.4 Estrutura do trabalho	20
2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES E IDENTIFICAÇÃO	21
2.1 Definições preliminares	21
2.1.1 Processo	21
2.1.2 Controlador	24
2.2 Objetivos de controle	26
2.2.1 Seguimento de referência	27
2.2.2 Rejeição de perturbação	28
2.2.3 Rejeição de ruído	29
2.2.4 Outros objetivos	29
2.3 Identificação de sistemas	30
2.3.1 Modelo autorregressivo com entrada exógena (ARX)	31
2.3.2 Modelo de resposta impulsiva finita (FIR)	32
2.3.3 Modelo de erro na saída (OE)	32
2.3.4 Identificação por mínimos quadrados (LS)	33
2.3.5 Identificação por correlação	35
2.3.6 Variáveis instrumentais (VI)	37
2.4 Considerações finais	37
3 MÉTODOS BASEADOS EM DADOS	39
3.1 Literatura de métodos baseados em dados	39
3.2 Virtual reference feedback tuning	42
3.3 Noniterative correlation-based tuning	47
3.4 Virtual disturbance feedback tuning	51
3.5 Violação da pertinência e o modelo de referência flexível	54
3.6 Considerações finais	57
4 PROPOSTA DE MÉTODO BASEADO EM DADOS PARA REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO DE CARGA	59
4.1 Controlador monovariável com parametrização linear	59

4.1.1	Propriedades desejáveis do erro	60
4.1.2	Obtenção da variável de erro monovariável	60
4.1.3	Estimação dos parâmetros	64
4.1.4	Filtro para violação da pertinência	66
4.2	Modelo de referência flexível	69
4.2.1	Variável de erro flexível	70
4.2.2	Estimação dos parâmetros	70
4.3	Ajuste de controlador multivariável	73
4.3.1	Notação	73
4.3.2	Obtenção do erro multivariável	74
4.3.3	Estimação dos parâmetros	76
4.3.4	Flexibilização do modelo de referência	77
4.4	Parametrização do denominador	82
4.4.1	Erro de predição para controlador semiparametrizado	82
4.4.2	Preditor linear da saída do controlador	83
4.4.3	Preditor não linear da saída do controlador	83
4.4.4	Soluções de mínimos quadrados	84
4.4.5	Soluções por correlação	88
4.5	Considerações finais	93
5	PROPOSTA DE MÉTODO BASEADO EM DADOS PARA CERTIFICAÇÃO DO CONTROLADOR	95
5.1	Margem de estabilidade e distância de Vinnicombe	95
5.2	Condição de Vinnicombe	99
5.3	Condição frequência a frequência	100
5.4	Mudança de unidades	100
5.5	Condição proposta	104
5.6	Estimativa das respostas em frequência	106
5.6.1	Identificação de modelo paramétrico	107
5.6.2	Identificação de modelo não paramétrico	108
5.6.3	Identificação de modelos paramétricos locais	109
5.6.4	Comparativo	110
5.7	Outros métodos de certificação	112
5.7.1	Parâmetros de Markov	112
5.7.2	Restrição na otimização	115
5.8	Comparativo entre métodos de certificação	116
5.9	Considerações finais	117
6	ESTUDOS DE CASO	118
6.1	Condição de pertinência respeitada	118
6.1.1	Caso monovariável simples	118
6.1.2	Caso monovariável subamortecido	120
6.1.3	Caso multivariável simples	122
6.2	Condição de pertinência violada	124
6.2.1	Caso de fase não mínima	125
6.2.2	Caso de ordem reduzida	127
6.2.3	Caso multi-SISO	130
6.3	Certificação	133
6.4	Análise dos resultados	135

7 CONCLUSÕES E QUESTÕES EM ABERTO	137
7.1 Conclusões	137
7.2 Questões em aberto	139
REFERÊNCIAS	140
ANEXO A CÓDIGOS FONTE DOS MÉTODOS	147

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Os processos presentes na indústria, em geral, podem ser vistos como sistemas dinâmicos cujo objetivo, na maioria das vezes, é manter as variáveis de saída o mais próximo possível de referências de entrada, no caso de seguimento de referência, ou de um valor fixo, no caso de regulação. Para alcançar o seguimento de referência, o sistema é realimentado com um controlador que garanta a estabilidade do sistema e faça com que o mesmo apresente certas características de desempenho previamente estipuladas. Estas características incluem principalmente o desempenho transitório, o erro em regime permanente, e a atenuação do ruído e das perturbações externas (ÅSTRÖM; MURRAY, 2008). Existe uma ampla gama de métodos que podem ser utilizados para projetar um controlador adequado que alcance os requisitos estipulados. Apesar disto, esses métodos podem ser agrupados, de acordo com o conhecimento necessário do processo que se quer controlar, em dois grupos: métodos baseados em modelo e métodos baseados em dados. Os métodos baseados em modelos requerem uma identificação prévia e mais detalhada do modelo do processo, o que resulta em um tempo de projeto maior e conseqüentemente maior custo envolvido. Já os métodos baseados em dados requerem um conhecimento menor do comportamento do processo e permitem o projeto do controlador a partir de dados coletados da operação normal ou experimentos especiais (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Além disso, uma subclasse de interesse especial para esta tese são métodos baseados em dados que utilizam um modelo de referência. Esse modelo de referência é utilizado como uma maneira de descrever o comportamento desejado que o sistema tenha em malha fechada após o ajuste dos parâmetros do controlador.

A maioria dos métodos baseados em dados que empregam modelo de referência foram desenvolvidos visando o problema de seguimento de referência, desde os métodos clássicos de mais de duas décadas atrás (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002; HJALMARSSON, 2002; KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2003). Aqueles trabalhos foram dando origem a outros, mas a tendência a um ajuste para seguimento de referência se mantém (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000; KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007; CAMPESTRINI et al., 2017; FORMENTIN et al., 2010; FORMENTIN; SAVARESI; DEL RE, 2012). No entanto, alguns métodos permitem outros objetivos de controle como, por exemplo, a rejeição ao ruído, penalizar o esforço de controle, aumentar a robustez minimizando a norma de alguma função de sensibilidade ou controle ótimo (FORMENTIN; KARIMI, 2013; HJALMARSSON, 2002; GONÇALVES DA SILVA et al., 2019).

Apesar dessa tendência, é comum que os sistemas sigam sinais caracterizados por longos patamares com pouca ou nenhuma mudança na referência. Nestes casos, o desempenho da rejeição ou atenuação de perturbações costuma ser tão ou mais importante

que o desempenho transitório em resposta a uma mudança de referência, por exemplo. As perturbações ou distúrbios que afetam o sistema podem ter várias origens, como uma mudança de temperatura em uma parte de um processo térmico, um sinal de distúrbio gerado por outra parte do sistema devido ao acoplamento em processos multivariáveis, uma variação da quantidade ou fluxo de um insumo em um processo químico, entre outros. Apesar disso, muitos desses distúrbios podem ser modelados como perturbações de carga ou distúrbios na entrada do processo, como será o caso nessa tese. Além de tudo isso, métodos de controle baseado em dados por modelo de referência usam conceitos de identificação de sistemas para tentar estimar os parâmetros do controlador que fará com que o sistema em malha fechada se comporte como desejado. Neste sentido, já foi proposto pelo menos um método que pode ser empregado nesse problema de rejeição de perturbação que utiliza um conceito parecido com identificação por mínimos quadrados (ECKHARD; CAMPESTRINI; BOEIRA, 2018). Entretanto, até onde se pode comprovar, aquele é o único método baseado em dados voltado especificamente para este problema de rejeição de perturbação de entrada. Além disso, as características do problema em questão tornam esse tipo de técnica (mínimos quadrados) pouco adequada para resolvê-lo (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Por outro lado, existe uma técnica de identificação por correlação que já foi utilizada em métodos baseados em dados para seguimento de referência e que é sabidamente mais resistente ao ruído do que a solução de mínimos quadrados (KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2003; KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007).

Por fim, um problema comum à maioria dos métodos de controle é a incerteza se o controlador estimado estabilizará o processo internamente. No caso de métodos baseados em dados, uma vez que o modelo do processo não está disponível, mesmo que o comportamento desejado seja sempre estável, não é possível garantir que ele é perfeitamente alcançável com a estrutura do controlador disponível. Na verdade, a otimização com um modelo de referência mal escolhido pode resultar até mesmo em um controlador que instabilizará a malha fechada. Uma opção proposta na literatura para reduzir as chances de instabilidade é uma flexibilização do modelo de referência para aumentar os graus de liberdade do problema (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012; BORDIGNON; CAMPESTRINI, 2018a). Isso permite que o comportamento desejado também se ajuste a um comportamento mais próximo do que pode ser alcançado com a estrutura de controle disponível.

Mesmo assim, há momentos em que isso não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema resultante em malha fechada. Nesse sentido também já foram empregadas técnicas de controle robusto em conjunto com métodos de controle baseado em dados para prever a estabilidade do sistema resultante, i.e. certificar o controlador estimado (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000; VAN HEUSDEN; KARIMI; BONVIN, 2008; GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2020).

Com isso tudo em mente, foi observado que seria interessante desenvolver um método baseado em dados que permitisse empregar um modelo de referência com o objetivo de rejeitar perturbações na entrada do processo. Além disso, como é comum que os dados empregados estejam corrompidos com ruído, uma técnica que envolva a abordagem de correlação pode obter melhores resultados no ajuste do controlador do que uma técnica que envolva mínimos quadrados apenas. Por fim, mesmo com a abordagem de correlação, a incerteza com respeito a estabilidade do sistema resultante precisa ser tratada. Nesse sentido, um modelo de referência flexível e um algoritmo para a certificação do controlador resultante foram as opções consideradas.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos gerais

O principal objetivo dessa tese foi estudar uma maneira de utilizar a abordagem de correlação, vinda da área de identificação de sistemas, para ajustar controladores com vistas ao problema de rejeição ou atenuação de perturbações na entrada do processo, ou perturbações de carga, utilizando dados ao invés do modelo do processo. Partindo desse objetivo, buscou-se desenvolver um método baseado em dados para rejeição de perturbação de carga que usa vários conceitos emprestados de outros métodos da literatura, como será apresentado ao longo do texto. Por fim, também buscou-se estender o método proposto para processos multivariáveis e controladores com parâmetros no denominador, que são conceitos menos explorados na literatura de métodos baseados em dados por modelo de referência.

Além daquele objetivo principal, também houve um esforço para investigar a possibilidade da utilização de uma certa condição para certificação de controladores a partir de dados, como um objetivo secundário. A condição em questão já estava presente na literatura, mas é sabidamente conservadora. Assim sendo, o objetivo torna-se combiná-la com algumas modificações para criar uma condição nova e um algoritmo que permitam reduzir um pouco o seu conservadorismo.

1.2.2 Objetivos específicos

Os dois objetivos gerais descritos acima se ramificam nos seguintes objetivos específicos, desenvolvidos ao longo do texto:

- **fazer revisão bibliográfica.** Como mencionado, os métodos de controle baseados em dados utilizam muitos conceitos em comum entre eles e também comuns à literatura de identificação de sistemas. Por isso, foi feita uma investigação sobre esses conceitos permitindo que eles fossem aplicados e estendidos para produzir o método proposto;
- **obter uma variável de erro monovariável compatível com a abordagem de correlação.** Essa abordagem consiste em minimizar a correlação entre certo sinal de erro e o sinal de excitação empregado para gerar os dados. Essa variável de erro, por sua vez, deve possuir certas características que serão melhor explicadas ao longo do texto, principalmente no início do capítulo que descreve o método proposto. O primeiro objetivo na construção do método foi obter uma variável de erro com as características certas para ser empregada no ajuste de controladores monovariáveis com o denominador não parametrizado (polos fixos);
- **obter uma variável de erro compatível com sistemas multivariáveis.** O sinal de erro monovariável foi obtido usando manipulações dos operadores de transferência que não seriam possíveis com operadores multivariáveis, i.e. comutações nas multiplicações. Assim, um outro objetivo foi encontrar uma versão do erro que pudesse ser utilizada com sistemas multivariáveis;
- **usar um modelo de referência flexível.** Como já foi mencionado e ainda será bastante discutido ao longo do texto, um dos problemas de métodos baseados em modelo de referência é justamente como escolher esse modelo sem o conhecimento do modelo do processo. Uma das soluções presentes na literatura

envolve a utilização de um modelo de referência flexível (parametrizado). Nesse caso, os parâmetros do modelo de referência são incluídos como variáveis adicionais do problema de otimização, e este último se encarrega de encontrar o modelo de referência mais próximo do que pode ser obtido com a estrutura de controle disponível. Desse modo, um outro objetivo foi encontrar uma maneira de incluir um modelo de referência flexível no método proposto;

- **permitir a síntese de controladores semiparametrizados e com parâmetros no denominador.** Muitos controladores possuem uma parte fixa, como um integrador, por exemplo. Outros controladores permitem o ajuste de parâmetros nos seus denominadores (polos livres), como um controlador PID com derivativo filtrado, por exemplo. Portanto, ainda outro objetivo foi estender todo o método inicialmente proposto para também permitir a síntese de um controlador com essas características;
- **filtragem dos dados.** Quando a flexibilização do modelo de referência não é suficiente para que o controlador se ajuste bem a ele, ainda é possível melhorar um pouco o desempenho em malha fechada se os dados empregados no método forem pré-filtrados através de um filtro com características específicas. Isso já é bem conhecido na literatura, mas os filtros são diferentes e devem ser calculados para cada um dos casos acima;
- **desenvolver a condição e o algoritmo de certificação.** Um problema comum a muitos métodos de controle é garantir que os valores de parâmetros estimados estabilizarão o sistema em malha fechada. Como o método de síntese proposto é baseado em dados, um último objetivo foi empregar uma condição no formato de um algoritmo para permitir a certificação (análise) do controlador usando também apenas os dados. A condição foi previamente selecionada da própria literatura de métodos baseados em dados, mas procurou-se modificá-la para reduzir seu conservadorismo.

1.3 Lista de contribuições

Os métodos desenvolvidos no presente trabalho resultaram nas seguintes publicações:

- o método monovariável para ajuste dos parâmetros do numerador do controlador a partir de dados, o respectivo filtro para pré-filtragem dos dados e a solução que emprega um modelo de referência flexível foram publicados em (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2019);
- a extensão para ajuste dos parâmetros dos numeradores dos elementos de um controlador multivariável também com modelo de referência multivariável flexível foi publicada em (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2020b);
- a segunda modificação, para controladores monovariáveis com parametrização do denominador já foi submetida para o *IFAC Journal of Signal Processing and Control* e está aguardando a primeira resposta;
- o algoritmo para a certificação do controlador que utiliza a nova condição desenvolvida foi publicado em (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2020a).

1.4 Estrutura do trabalho

O restante deste trabalho está estruturado como segue: no Capítulo 2 são introduzidas algumas definições e suposições que serão utilizadas ao longo do trabalho. Além disso, alguns conceitos de identificação de sistemas são apresentados, devido à sua importância para a área de controle baseado em dados por modelo referência e para este mesmo trabalho. O Capítulo 3 consiste em uma revisão da literatura de métodos baseados em dados, apresentando conceitos dessa área através de três métodos relacionados com o método proposto. Aqueles conceitos serão empregados no Capítulo 4 para construção e análise do método proposto pelo presente trabalho. Esse método serve para o ajuste de um controlador utilizando dados coletados em um experimento em malha aberta ou fechada sobre o processo e utilizando um modelo de referência para descrever o comportamento desejado do sistema com o controlador ajustado. Mais adiante, o Capítulo 5 apresenta conceitos de controle robusto como a margem de estabilidade generalizada e a distância de Vinnicombe. Esses conceitos são utilizados no mesmo capítulo para propor uma nova condição de certificação de controladores que emprega também o redimensionamento de alguns sinais. Por fim essa condição é transformada em um algoritmo baseado em dados e comparada com outras duas opções da literatura, também voltadas para certificação. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentados alguns estudos de caso simulados para mostrar como os métodos propostos se comportam em cenários com diferentes características como: experimento em malha aberta ou fechada, tipos de processo e de controlador, e se o controlador seria capaz de alcançar perfeitamente o desempenho descrito pelo modelo de referência. Ao final do texto, uma pequena discussão sobre as conclusões e questões em aberto é apresentada no Capítulo 7.

2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES E IDENTIFICAÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições utilizadas ao longo dos próximos capítulos. Além disso, este capítulo também traz uma revisão bibliográfica visando retomar alguns conceitos de identificação de sistemas sobre os quais se apoiam os métodos baseados em dados e, particularmente, esta tese.

Desse modo, o objetivo deste capítulo é apresentar conceitos básicos que serão utilizados ao longo da tese. Os objetivos específicos se resumem a apresentar os seguintes tópicos:

- a) definições preliminares com respeito à notação, o sistema e os objetivos do controle;
- b) teoria básica de identificação de modelos paramétricos por mínimos quadrados;
- c) identificação por correlação;
- d) identificação por variáveis instrumentais.

No final deste capítulo ainda serão apresentadas algumas considerações com respeito a tudo que for discutido.

2.1 Definições preliminares

Primeiramente serão fornecidas algumas definições básicas com respeito ao processo e ao controle no formato de suposições e definições que serão utilizadas ao longo do restante da tese.

2.1.1 Processo

Neste trabalho são considerados apenas sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) de tempo discreto. Por conta disso, todos os sinais são considerados amostrados com um período de amostragem constante T_s , o qual em geral não será indicado. Assim, um sinal amostrado é representado com a notação $x(t)$, onde $t \in \mathbb{N}$ representa o **índice da amostra**, não um valor de tempo contínuo.

Além disso, os sistemas são descritos utilizando o operador de atraso q^{-1} , de modo que para um sinal amostrado $x(t)$ qualquer,

$$q^{-1}x(t) = x(t - 1). \quad (1)$$

Da mesma maneira é definido o operador de avanço q como o inverso do operador de atraso:

$$qx(t) = x(t + 1). \quad (2)$$

Os sistemas estudados podem ser assumidos originalmente discretos ou discretizados a partir de sistemas contínuos, porém tanto o processo de discretização, quanto as técnicas envolvidas e suas peculiaridades estão fora do escopo deste trabalho. O leitor interessado pode encontrar estes tópicos em livros de controle para graduação como em Nise (2011), ou em Lathi (2008) ou, ainda mais detalhado, em Oppenheim, Buck e Schafer (1999), Chen e Francis (1995). Além disso, assume-se que os sistemas apresentados neste trabalho podem sempre ser descritos como uma função racional de q , também chamada de **operador de transferência** (LJUNG, 1999).

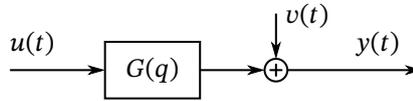
Este trabalho considera que existe um processo LTI de tempo discreto denotado $G(q)$, sobre o qual a seguinte suposição é considerada verdadeira:

Suposição 2.1 (processo em malha aberta). A relação entre a entrada e a saída do processo em malha aberta é dada pela seguinte equação:

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t), \quad (3)$$

onde $u(t)$ é a entrada do processo e $y(t)$ é a sua saída. Esta última está contaminada por um ruído de medida $v(t)$, não necessariamente branco. O processo em malha aberta está representado na Figura 1. ◆

Figura 1 — diagrama de blocos do processo em malha aberta.



Fonte: elaborado pelo autor.

Assume-se que o processo deve ser controlado empregando-se um controlador de realimentação LTI de tempo discreto $C(q, \rho)$, cujo parâmetro $\rho \in \mathbb{R}^p$ deseja-se ajustar. Desse modo, a seguinte suposição sobre o processo em malha fechada é assumida verdadeira:

Suposição 2.2 (processo em malha fechada). O sinal de controle é calculado a partir do erro de seguimento de referência

$$e(t, \rho) = r(t) - y(t, \rho), \quad (4)$$

que é dado pela diferença entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de saída medido $y(t, \rho)$. A entrada do processo é excitada pela saída do controlador, porém também é afetada por uma perturbação de entrada aditiva $d(t)$ com características estocásticas:

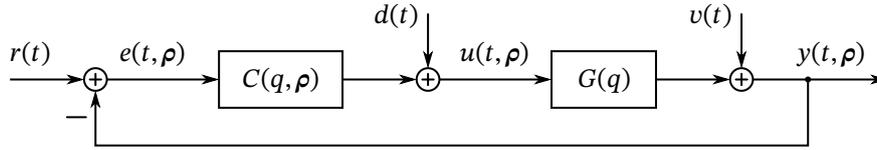
$$u(t, \rho) = C(q, \rho)e(t, \rho) + d(t). \quad (5)$$

Já a saída medida do processo é contaminada por um ruído de medição $v(t)$, não necessariamente branco:

$$y(t, \rho) = G(q)u(t, \rho) + v(t). \quad (6)$$

O sistema em malha fechada está representado na Figura 2. ◆

Figura 2 — diagrama de blocos do sistema em malha fechada.



Fonte: elaborado pelo autor.

A partir da suposição acima, pode-se escrever as equações que regem o sistema em malha fechada como:

$$y(t, \rho) = T(q, \rho)r(t) + Q(q, \rho)d(t) + S(q, \rho)v(t) \quad (7)$$

$$u(t, \rho) = G^{-1}(q)T(q, \rho)r(t) + \tilde{S}(q, \rho)d(t) - G^{-1}(q)T(q, \rho)v(t) \quad (8)$$

Nota-se que as relações entre os sinais de entrada e saída se dão através de apenas alguns operadores de transferência distintos. Estes operadores são as funções de sensibilidade do sistema em malha fechada e, por conta disso, alguns recebem nomes especiais como segue (ÅSTRÖM; MURRAY, 2008):

$$S(q, \rho) = [1 + G(q)C(q, \rho)]^{-1} \quad (\text{sensibilidade de saída}) \quad (9)$$

$$T(q, \rho) = 1 - S(q, \rho) \quad (\text{sensibilidade complementar}) \quad (10)$$

$$Q(q, \rho) = S(q, \rho)G(q) \quad (\text{sensibilidade à perturbação de carga}) \quad (11)$$

$$\tilde{S}(q, \rho) = [1 + C(q, \rho)G(q)]^{-1}. \quad (\text{sensibilidade na entrada}) \quad (12)$$

No caso monovariável, $C(q, \rho)$ e $G(q)$ comutam, de modo que

$$S(q, \rho) = \tilde{S}(q, \rho), \quad (\text{caso monovariável}) \quad (13)$$

o que em geral não é válido no caso multivariável. Neste também, a unidade é substituída pela matriz identidade com dimensão apropriada nas somas e subtrações acima.

Já o ruído de medição, considera-se, obedece à seguinte suposição, em que a correlação com outros sinais tem papel fundamental nas abordagens de correlação propostas mais adiante.

Suposição 2.3 (ruído de medição). O ruído de medição $v(t)$ que afeta o sinal de saída é um processo estocástico quasi-estacionário com média zero,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E v(t) = 0, \quad (14)$$

e é descorrelacionado de qualquer outra entrada do sistema. Isto é, em malha aberta,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)v(t - \tau) = 0 \quad \forall \tau, \quad (\text{malha aberta}) \quad (15)$$

enquanto que, em malha fechada,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r(t)v(t - \tau) = 0 \quad \forall \tau, \quad (\text{malha fechada}) \quad (16)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N d(t)v(t - \tau) = 0 \quad \forall \tau. \quad (\text{malha fechada}) \quad (17)$$



2.1.2 Controlador

Conforme mencionado anteriormente, o controlador a ser utilizado é um controlador linear invariante no tempo, de tempo discreto e parametrizado. Este controlador tem estrutura fixa e ordem limitada. Ou seja, o projetista não tem toda a liberdade para escolher a ordem ou o tipo de controlador empregado, por exemplo. Em outras palavras, o controlador possui um conjunto finito de parâmetros que podem ser ajustados para modificar o comportamento do sistema. Estes parâmetros compõem o vetor de parâmetros $\rho \in \mathbb{R}^p$. Desse modo, o operador de transferência que representa o controlador será representado como uma função do vetor de parâmetros que mapeia o conjunto dos valores possíveis de parâmetros para o conjunto de todos os controladores implementáveis com a estrutura de controle escolhida. Este último conjunto, de controladores implementáveis, recebe o nome de *classe de controle* na literatura de métodos baseados em dados, denotada

$$\mathcal{C} = \{C(q, \rho) \mid \rho \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p\}, \quad (18)$$

onde o subconjunto \mathcal{P} representa o conjunto de todos os valores possíveis de parâmetros (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

A partir das definições acima, a tarefa do projetista é estimar o vetor de parâmetros correto que resultará no comportamento desejado do sistema em malha fechada. A maneira como o controlador é parametrizado, isto é, o formato da estrutura de controle, influencia na escolha de quais algoritmos serão utilizados para estimar os parâmetros. Por conta disso, muitas vezes é interessante utilizar uma parametrização linear do operador de transferência do controlador.

Definição 2.1 (parametrização linear). Diz-se que o operador de transferência do controlador monovariável é linearmente parametrizado, ou simplesmente que um controlador monovariável é linearmente parametrizado, se ele pode ser escrito como

$$C(q, \rho) = \rho^T \beta(q), \quad (19)$$

onde $\beta(q)$ é uma matriz coluna cujos elementos são operadores de transferência. Neste caso, porque esta matriz representa como o vetor de parâmetros entra no cálculo do controlador, ela será chamada de estrutura de parametrização.

Em geral, quando o controlador é linearmente parametrizado, os problemas de otimização envolvidos nos métodos de controle baseados em dados tornam-se convexos e podem ser resolvidos analiticamente.

Exemplo 2.1. Muitos controladores da família PID são um exemplo clássico de controladores com parametrização linear. Considere, por exemplo o seguinte controlador PID com filtro derivativo (PIDF) na configuração padrão discretizado com a aproximação pela diferença atrasada de primeira ordem (*backward difference*) (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995; LATHI, 2008):

$$C(q, \rho) = K_p \left(1 + \frac{T_s}{T_i} \frac{1}{(1 - q^{-1})} + \frac{T_d}{N} \frac{1}{1 - q^{-1}} \right), \quad (20)$$

onde T_s é o período de amostragem, K_p é o ganho proporcional, T_i é o tempo integral, T_d é o tempo derivativo e N é o coeficiente do filtro. Este mesmo controlador pode ser escrito com a seguinte parametrização linear:

$$C(q, \rho) = \rho_1 + \rho_2 \frac{1}{1 - q^{-1}} + \rho_3 \frac{1 - q^{-1}}{1 - aq^{-1}}, \quad (21)$$

onde a é uma constante arbitrária conhecida. Os parâmetros originais podem ser recuperados com as seguintes equações:

$$K_p = \rho_1 \quad (22)$$

$$T_i = \frac{K_p T_s}{\rho_2} \quad (23)$$

$$N = \frac{-\rho_3}{K_p a} \quad (24)$$

$$T_d = \frac{NT_s a}{1 - a} = \frac{-\rho_3 T_s}{K_p (1 - a)} \quad (25)$$

◇

Observe que nem sempre é necessário identificar todos os parâmetros do controlador. Pelo contrário, muitas vezes é até interessante fixar parte do controlador, como no trabalho de Campestrini et al. (2017) em que informações sobre o processo podem ser inseridas em um problema de controle baseado em dados através da parte fixa do controlador. Em problemas que envolvem regulação ou rejeição de perturbação constante, é comum a utilização de controladores com ação integral, por exemplo, e isso equivale a fixar um polo do controlador.

Por fim, como o projetista tem que ajustar os parâmetros e sua liberdade para os escolher é limitada, nem sempre é possível atingir o comportamento desejado em malha fechada. Neste caso é importante conhecer ou estimar as limitações do sistema de controle utilizado em malha fechada. Aliviando momentaneamente os requisitos de linearidade, invariância no tempo e até mesmo causalidade, pode-se admitir que existe um controlador que fará com que o sistema em malha fechada apresente o comportamento almejado pelo projetista (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). A este controlador que atinge perfeitamente o desempenho desejado é dada a denominação de *controlador ideal*. Como todos os processos tratados aqui são considerados lineares e invariantes no tempo, o controlador ideal também o será. Desse modo, daqui em diante o controlador ideal será denotado como $C^*(q)$, e admite-se que ele possa não ser causal. Esta definição dá origem à seguinte suposição.

Suposição 2.4 (pertinência¹). Diz-se que o controlador ideal pertence à classe de controle,

$$C^*(q) \in \mathcal{C}, \quad (26)$$

¹ Em inglês *matching condition*, na falta de melhor tradução, outros trabalhos em português evitam dar um nome a essa suposição importante e simplesmente repetem “o controlador ideal pertence à classe” ao longo de todo o texto.

se e somente se

$$C(q, \rho^*) = C^*(q) \quad (27)$$

para algum vetor de parâmetros ideal $\rho^* \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$. ◆

A suposição de pertinência é importante para o desenvolvimento teórico dos métodos de controle baseados em dados, mas sua veracidade não é estritamente necessária para o correto funcionamento desses métodos. De fato, em situações reais essa suposição será violada na grande maioria das vezes. O que é necessário para que os métodos apresentem bons resultados é que essa suposição seja **pouco violada**. Portanto, os resultados teóricos dependem de que a norma

$$\|C(q, \rho^*) - C^*(q)\| \quad (28)$$

seja pequena, onde ρ^* é o vetor de parâmetros ótimo, i.e. o melhor ajuste possível dada a estrutura de controle disponível (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012, p. 15). Como, devido ao princípio do modelo interno, é comum que o denominador do controlador ideal tenha raízes sobre o círculo unitário, é preciso remover essas raízes do resultado da diferença dentro de (28) antes de calcular a norma (CAMPESTRINI et al., 2017). Por outro lado, ao invés da norma acima também é possível usar a seguinte restrição:

$$\left\| \frac{C(q, \rho^*)}{C^*(q)} - 1 \right\| \ll 1, \quad (29)$$

desde que o controlador ideal não possua zeros de fase não mínima.

Além disso, este trabalho assume que a violação da suposição de pertinência se dá principalmente por conta da estrutura de controle escolhida e não por conta da limitação dos valores possíveis de parâmetros representada pelo subconjunto \mathcal{P} . Por conta disso, a limitação para os valores dos parâmetros não será mais considerada daqui em diante, i.e. $\mathcal{P} = \mathbb{R}^p$. Apesar disso, essa limitação pode ser incluída facilmente através de uma restrição na otimização.

2.2 Objetivos de controle

Até aqui foram definidos o sistema e o controlador, também foi mencionado que o projetista deseja empregar o controlador para obter certo comportamento em malha fechada. O que resta agora é definir qual é este comportamento e como avaliar matematicamente com que grau ele foi alcançado. Em geral, o critério de medida do desempenho do controlador é descrito como uma *função custo*, também chamada de função de perdas. Esta é uma função não negativa calculada a partir de informações sobre o sistema, como normas de funções de sensibilidade ou sinais. O formato exato da função custo varia conforme o objetivo de controle, porém em todos os casos busca-se pelo vetor de parâmetros que fará com que o valor da função custo seja o menor possível. Isto é possível, uma vez que as funções de sensibilidade e sinais do sistema em malha fechada dependem dos parâmetros do controlador.

Este trabalho trata principalmente do problema de *controle por modelo de referência*, de modo que os objetivos de controle serão apresentados a partir deste ponto de vista. No controle por modelo de referência o objetivo é fazer com que o operador de transferência que representa o sistema em malha fechada apresente um comportamento semelhante ao de um operador escolhido pelo projetista. Este último recebe o nome de *modelo de referência*, que dá nome à abordagem. Em geral, o modelo de referência representa o comportamento

desejado de uma das funções de sensibilidade de interesse. Neste caso a função custo pode ser a norma da diferença entre as respostas desses dois operadores (modelo de referência e função de sensibilidade correspondente) a um mesmo sinal arbitrário (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), ou simplesmente a norma da diferença entre os próprios operadores (VAN HEUSDEN; KARIMI; BONVIN, 2011). A norma \mathcal{H}_2 é usada se forem dois operadores, ou a norma \mathcal{L}_2 , se forem dois sinais.

2.2.1 Seguimento de referência

O seguimento de referência é, talvez, um dos objetivos de controle mais pesquisados e desenvolvidos na literatura de controle em geral. Quando o objetivo de controle é o seguimento de referência, denotando-se o modelo de referência por $T_d(q)$, a função custo é dada por

$$V_T(\boldsymbol{\rho}) = \|T_d(q) - T(q, \boldsymbol{\rho})\|_2^2. \quad (30)$$

Se forem empregados métodos de controle baseado em modelo, o controlador ideal resultante pode ser calculado algebricamente a partir do modelo de referência e do modelo disponível do processo.

Lema 2.1. *O controlador de realimentação ideal para resposta à mudança de referência que alcança $V_T(\boldsymbol{\rho}) = 0$ é dado por:*

$$C_T^*(q) = \frac{T_d(q)}{G(q)[1 - T_d(q)]}. \quad (31)$$

Prova. De (9) e (10), para qualquer dado controlador, temos que

$$T(q, \boldsymbol{\rho}) = \frac{G(q)C(q, \boldsymbol{\rho})}{1 + G(q)C(q, \boldsymbol{\rho})}. \quad (32)$$

Substituindo $T(q, \boldsymbol{\rho})$ por $T_d(q)$ e resolvendo para o controlador, resulta em (31). ■

Observe que o controlador ideal (31) pode não respeitar a suposição de pertinência. Neste caso, o melhor que pode ser alcançado é um comportamento ótimo, obtido com

$$\boldsymbol{\rho}_T^* = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}} V_T(\boldsymbol{\rho}). \quad (33)$$

Note também que, neste caso, $V_T(\boldsymbol{\rho}_T^*) \neq 0$.

Por fim, observe que a função custo (30) representa a diferença da energia das respostas dos dois modelos (desejado e obtido) a uma entrada de ruído branco com variância unitária. Se preferir, esse custo também representa a energia da resposta impulsiva da diferença entre os dois modelos. Esta pode não ser a melhor escolha, pois outros sinais de entrada resultam em outros valores de parâmetros. Por conta disso, muitas vezes a função custo é definida levando em consideração o provável sinal de referência que será aplicado ao sistema:

$$V_r(\boldsymbol{\rho}) = \|[T_d(q) - T(q, \boldsymbol{\rho})]r(t)\|_2^2, \quad (34)$$

onde $r(t)$ representa aquele sinal. Neste caso, o parâmetro ótimo é definido como

$$\boldsymbol{\rho}_r^* = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}} V_r(\boldsymbol{\rho}), \quad (35)$$

e, embora $V_r(\boldsymbol{\rho}_r^*) \neq 0$, o parâmetro ótimo resulta na melhor resposta ao sinal $r(t)$.

2.2.2 Rejeição de perturbação

Além do seguimento de referência, a rejeição de perturbação é outro dos objetivos de controles mais perseguidos. Tanto que Gao (2014) indica que até mesmo problemas como não linearidades e variância no tempo podem ser vistos como perturbação. Por conta da abrangência desse tema, é preciso delimitar o que este trabalho considera como rejeição de perturbação. Aqui a perturbação que deve ser atenuada ou rejeitada é uma que pode ser modelada como um sinal de excitação externo que não pode ser medido ou controlado diretamente. Com essa definição, os sinais $d(t)$ e $v(t)$ na Figura 2 podem ser vistos como perturbações, porém este trabalho considera que o sinal $v(t)$ modela o ruído de medição. Assim, para deixar claro que o sinal de interesse é o distúrbio $d(t)$ que perturba a entrada do processo, será usado o termo *perturbação de carga*, apesar de que a origem do distúrbio não seja necessariamente esta.

Ainda dentro do arcabouço de controle por modelo de referência, o comportamento desejado para a resposta do sistema em malha fechada a uma perturbação de carga pode ser descrito pelo modelo de referência $Q_d(q)$. A partir daí o vetor de parâmetros ideal é o que zera o seguinte custo:

$$V_Q(\rho) = \|Q_d(q) - Q(q, \rho)\|_2^2. \quad (36)$$

De maneira análoga àquela do problema de seguimento de referência, o controlador ideal para resposta à perturbação de carga pode ser calculado diretamente a partir do modelo do processo, se este estiver disponível.

Lema 2.2. *O controlador de realimentação ideal para resposta à perturbação que alcança $V_Q(\rho) = 0$ é dado por:*

$$C_Q^*(q) = Q_d^{-1}(q) - G^{-1}(q). \quad (37)$$

Prova. Observe de (9) a (11) que, para qualquer dado controlador,

$$Q^{-1}(q, \rho) = G^{-1}(q) + C(q, \rho). \quad (38)$$

Substituindo $Q(q, \rho)$ por $Q_d(q)$ e resolvendo para o controlador, resulta em (37). ■

Novamente, note que o controlador ideal para atingir o desempenho desejado $Q_d(q)$, representado em (37), pode não respeitar a suposição de pertinência. Nesse caso, o melhor que pode ser alcançado é um controlador ótimo, cujos parâmetros são dados por

$$\rho_Q^* = \arg \min_{\rho} V_Q(\rho), \quad (39)$$

e cujo custo é $V(\rho_Q^*) \neq 0$.

Mais uma vez, observe que a função custo (36) representa a diferença da energia das respostas de dois modelos a uma perturbação do tipo impulso ou ruído branco, o que pode não ser a melhor escolha. Por conta disso, a função custo pode ser definida levando em conta o provável sinal de perturbação que se deseja rejeitar:

$$V_d(\rho) = \|[Q_d(q) - Q(q, \rho)] d(t)\|_2^2, \quad (40)$$

onde $d(t)$ representa aquele sinal. Neste caso, o parâmetro ótimo é dado por

$$\rho_d^* = \arg \min_{\rho} V_d(\rho), \quad (41)$$

e, embora $V_d(\rho) \neq 0$, o parâmetro ótimo resulta na melhor resposta à perturbação $d(t)$ que pode ser alcançada com a estrutura de controle escolhida.

2.2.3 Rejeição de ruído

Por fim, a rejeição de ruído é outro objetivo de controle muito utilizado. Esse tipo de abordagem busca minimizar a contribuição do ruído que afeta a saída sistema. Em se tratando de compensar o ruído pura e simplesmente, uma primeira opção seria minimizar diretamente a norma da função de sensibilidade, uma vez que é através desse operador de transferência que o ruído afeta a saída. Porém observa-se que minimizar indefinidamente a sensibilidade não é viável com a estrutura de realimentação que está sendo considerada, pois uma sensibilidade nula implicaria em um sensibilidade complementar unitária e um esforço de controle infinito, como é bem sabido da teoria de controle clássico. Desse modo, uma alternativa viável é a otimização de um critério composto, considerando, por exemplo, uma parcela de esforço de controle.

Por outro lado, considerando um controle por modelo de referência, a função custo a ser minimizada é a seguinte:

$$V_S(\rho) = \|S_d(q) - S(q, \rho)\|_2^2, \quad (42)$$

onde $S_d(q)$ é o modelo de referência desejado para a sensibilidade. Mais uma vez, o controlador ideal pode ser calculado diretamente a partir do modelo de referência e do modelo do processo, se este estiver disponível.

Lema 2.3. *O controlador de realimentação ideal para rejeição de ruído que alcança $V_S(\rho) = 0$ é dado por:*

$$C_S^*(q) = S_d(q) [1 + G(q)]. \quad (43)$$

Prova. Diretamente de (9), substituindo a função de sensibilidade $S(q, \rho)$ por $S_d(q)$ e resolvendo para o controlador ideal. ■

O lema acima considera a energia da resposta a um ruído branco, mas pode ser mostrado que nesse caso o melhor para a atenuação da energia do ruído na saída é não realimentar o sistema (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Por outro lado, caso o ruído que afeta o sistema seja colorido, informações de amostras passadas podem ser empregadas para prever e mitigar os seus efeitos na saída. Um ruído colorido pode ser modelado como um ruído branco filtrado, isto é,

$$v(t) = H(q)w(t), \quad (44)$$

onde $H(q)$ é o modelo do ruído e $w(t)$ é ruído branco. Nesse caso, Bazanella, Campestrini e Eckhard (2012) mostram que o controlador ideal para o objetivo de rejeição de perturbação é dado por

$$C_v^*(q) = \frac{H(q) - 1}{G(q)}, \quad (45)$$

que é chamado de controlador de mínima variância na literatura. É preciso notar que esse controlador nem sempre será estável.

2.2.4 Outros objetivos

Além dos objetivos de controle de seguimento de referência e rejeição de perturbação apresentados acima, existem vários outros descritos na literatura. Muitos desses objetivos também são empregados em conjunto com métodos de controle baseados em dados. Como exemplos, podem ser citados: seguimento de referência (CAMPI; LECCHINI;

SAVARESI, 2002; KARIMI; MIŠKOVIĆ; BONVIN, 2003), rejeição de perturbação (ECKHARD; CAMPESTRINI; BOEIRA, 2018), controle ótimo (GONÇALVES DA SILVA et al., 2019), robustez (FORMENTIN; KARIMI, 2013), controle com modelo interno (IMC) (FORMENTIN et al., 2010), rejeição de perturbação ativa (ROMAN et al., 2018), minimização do esforço de controle (HJALMARSSON et al., 1998), controle de mínima variância (KINOSHITA et al., 2019), entre outros. Porém, como é muito vasta a literatura de controle, este trabalho dá ênfase ao controle para rejeição de perturbação, além de seguimento de referência e regulação por serem objetivos semelhantes.

2.3 Identificação de sistemas

O controle baseado em dados utiliza várias abordagens que vêm da identificação de sistemas. Por isso, cabe aqui uma breve revisão de alguns conceitos de identificação que serão utilizados ao longo do trabalho.

Em geral, o processo de identificação se divide em quatro etapas: obtenção dos dados, seleção de uma classe de modelos, identificação do melhor modelo com respeito a algum critério e validação deste modelo (PINTELON; SCHOUKENS, 2012). Com base na escolha da classe de modelos, os métodos de identificação podem ser divididos em dois grupos: métodos de identificação de modelos paramétricos e não paramétricos. Métodos paramétricos empregam um vetor de parâmetros de dimensão finita na construção do modelo, enquanto que métodos não paramétricos não empregam (explicitamente) tal vetor (LJUNG, 1999).

Exemplos usuais de modelos paramétricos incluem modelos de operadores de transferência, enquanto que modelos não paramétricos incluem modelos da resposta impulsiva e resposta em frequência. Entre os métodos de identificação mais usados para estimar os parâmetros de modelos paramétricos estão os métodos de mínimos quadrados e de erro de predição. Por outro lado, modelos não paramétricos são geralmente identificados através de métodos empíricos, de análise de correlação, e de análise espectral.

Ao longo desta seção a notação é momentaneamente modificada para que coincida com a notação usualmente empregada nos livros sobre identificação de sistemas. A estrutura dos modelos paramétricos cujos parâmetros devem ser identificados é dada por:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)w(t), \quad (46)$$

onde $G(q, \theta)$ representa o modelo do sistema, enquanto que $H(q, \theta)$ representa o modelo do ruído e θ , o vetor de parâmetros a ser identificado. Além disso, $u(t)$ é a entrada do sistema, $y(t)$ é sua saída e $w(t)$ é ruído branco.

De acordo com Ljung (1999), o preditor ótimo de um passo a frente da saída desse sistema é dado por

$$\hat{y}(t | \theta) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(t) + [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(t), \quad (47)$$

considerando que $H(q, \theta)$ é inversível. A notação $\hat{y}(t | \theta)$ indica que o preditor é obtido a partir do seguinte conjunto de dados:

$$\mathcal{Z}^t = \{u(t), u(t-1), \dots, u(1), y(t-1), y(t-2), \dots, y(1)\}, \quad (48)$$

obtidos a partir de um experimento com o processo.

O objetivo da identificação de sistemas é obter uma estimativa para o vetor de parâmetros, denotada $\hat{\theta}$, que resulte em um modelo que represente bem o sistema real.

Definição 2.2 (viés ou polarização). A diferença entre a estimativa dos parâmetros $\hat{\theta}$ e os parâmetros reais θ_0 é chamada de erro de estimativa, e o seu valor esperado:

$$\text{viés} = E(\hat{\theta} - \theta_0). \quad (49)$$

é chamado de viés ou polarização.

Quando uma estimativa não possui viés, dizemos que ela não é polarizada. Pode acontecer que uma estimativa seja polarizada para dados finitos, porém sem polarização no limite $N \rightarrow \infty$. Quando, além disso, a variância da estimativa desaparece nesse limite, dizemos que a estimativa é consistente. Um dos requisitos usuais para que a estimativa seja consistente é que os dados sejam informativos, o que se traduz basicamente em sinais persistentemente excitantes. Por ser um requisito importante, existem diversos trabalhos na literatura de identificação que tratam desses temas (LJUNG, 1999; BAZANELLA; BOMBOIS; GEVERS, 2012; GEVERS et al., 2009). Recentemente esse assunto também foi tratado no contexto de métodos baseados em dados por Silva Garcia e Bazanella (2019, 2020a), porém esse assunto está fora do escopo deste trabalho, de modo que é apenas assumido que os dados são suficientemente informativos.

2.3.1 Modelo autorregressivo com entrada exógena (ARX)

Ainda de acordo com Ljung (1999), o modelo mais simples que descreve a relação entrada-saída do sistema acima, o modelo autorregressivo com entrada exógena (ARX²) do processo parte da seguinte equação de diferença:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-n_k) + \dots + b_{n_b} u(t-n_k-n_b+1) + e(t), \quad (50)$$

onde, neste caso, o vetor de parâmetros é dado por

$$\theta^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a}] \quad (51)$$

e n_k é o tempo morto do modelo. Para simplificar a notação, o tempo morto vai ser considerado $n_k = 1$ no restante desse capítulo. Nos capítulos posteriores, na identificação dos parâmetros de controladores, o tempo morto do controlador será considerado $n_k = 0$, como usualmente.

Se for empregada a seguinte definição usual dos polinômios:

$$A(q, \theta) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}, \quad (52)$$

$$B(q, \theta) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}, \quad (53)$$

os modelos para o processo e para o ruído que afeta a saída são dados, respectivamente, por:

$$G(q, \theta) = \frac{B(q, \theta)}{A(q, \theta)} \quad H(q, \theta) = \frac{1}{A(q, \theta)}. \quad (54)$$

Além disso, o preditor ideal de um passo a frente é dado por

$$\hat{y}(t | \theta) = B(q, \theta)u(t) + [1 - A(q, \theta)]y(t). \quad (55)$$

² do inglês *Auto-Regressive with exogenous input*.

Uma característica interessante deste preditor é que ele é linear nos parâmetros, isto é, pode ser escrito como

$$\hat{y}(t | \theta) = \varphi^T(t)\theta, \quad (56)$$

onde $\varphi(t)$ é o vetor de regressores, dado por:

$$\varphi^T(t) = [u(t-1) \quad u(t-2) \quad \cdots \quad u(t-n_b) \quad -y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \cdots \quad -y(t-n_a)]. \quad (57)$$

2.3.2 Modelo de resposta impulsiva finita (FIR)

Uma outra classe de modelos bastante comum, principalmente em processamento de sinais, a classe dos modelos de resposta impulsiva finita (FIR³) é obtida a partir da classe dos modelos ARX com a restrição de que o modelo não possui polos finitos, isto é, $A(q, \theta) = 1$ (LJUNG, 1999). Isso implica que a equação de diferença que descreve o sistema é dada por

$$y(t) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \cdots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t). \quad (58)$$

Além disso, como esses modelos provêm dos modelos ARX, o preditor da saída também é linear nos parâmetros:

$$\hat{y}(t | \theta) = B(q, \theta)u(t) \quad (59)$$

$$= \varphi^T(t)\theta, \quad (60)$$

onde, agora o vetor de parâmetros é dado apenas por

$$\theta^T = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n_b}], \quad (61)$$

e, da mesma forma, o vetor de regressores se torna apenas

$$\varphi^T(t) = [u(t-1) \quad u(t-2) \quad \cdots \quad u(t-n_b)]. \quad (62)$$

2.3.3 Modelo de erro na saída (OE)

Por fim, a terceira classe de modelos de interesse neste trabalho, os modelos de erro na saída (OE⁴) são obtidos considerando que o ruído aditivo que afeta a saída é branco. Desse modo,

$$G(q, \theta) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)} \quad H(q, \theta) = 1, \quad (63)$$

e o preditor de um passo a frente é dado por

$$\hat{y}(t | \theta) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)}u(t). \quad (64)$$

Porém, nesse caso o preditor não é linear nos parâmetros, que aparecem no polinômio que forma o denominador do modelo.

³ do inglês *Finite Impulse Response*.

⁴ do inglês *Output Error*.

2.3.4 Identificação por mínimos quadrados (LS)

Após a escolha da classe de modelos, é necessário escolher qual será o método empregado na identificação dos parâmetros. Os métodos mais simples usualmente empregados são baseados no método de mínimos quadrados (LS⁵). Esses métodos dão origem aos populares métodos de erro de predição. Observe que, partindo da ideia de que o preditor ideal pode ser descrito como (47), pode-se descrever o erro de predição como a diferença entre a amostra atual da saída e esse preditor, isto é,

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t | \theta) \quad (65)$$

$$= -H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(t) + H^{-1}(q, \theta)y(t) \quad (66)$$

onde $\varepsilon(t, \theta)$ é o erro de predição.

A partir da definição acima, os métodos de identificação por erro de predição buscam minimizar uma função custo do erro de predição. Dentre todas as funções custo possíveis, a escolha mais trivial é a norma-2:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\varepsilon(t, \theta)|^2, \quad (67)$$

onde N é o número de amostras que compõem o conjunto de dados \mathcal{Z}^N , enquanto que $\hat{\theta}$ é a estimativa dos parâmetros. Esse pode ser visto como um problema LS, onde se busca minimizar a soma dos quadrados da diferença entre o preditor e o valor real da saída em todos os instantes.

Teorema 2.1. Quando o preditor da saída do sistema é linear nos parâmetros, como em (56) e (60), a estimativa dos parâmetros é dada por:

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (68)$$

Prova. Note que quando o preditor é linear nos parâmetros, como para modelos ARX e FIR, o erro de predição é uma função afim dos parâmetros:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T(t) \theta, \quad (69)$$

o que implica que a função custo é:

$$V^{\text{pem}}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |y(t) - \varphi^T(t) \theta|^2, \quad (70)$$

e o vetor de parâmetros que a minimiza é dado pela solução da equação normal em (68). ■

O Teorema 2.1 acima fornece um meio de estimar os parâmetros usando um preditor linear. Por outro lado, quando o preditor não for linear nos parâmetros, a função custo também não será convexa. Nesse caso, a função custo pode ter mínimos locais e a busca pelo seu mínimo global é conduzida através de métodos de otimização iterativos. Observe ainda que, nesse caso, é preciso um valor inicial para o vetor de parâmetros indicando onde

⁵ do inglês *Least Squares*.

a busca deve começar e é necessário que este valor esteja dentro do domínio de atração do mínimo global. Porém, esse domínio de atração depende não só da função custo a ser otimizada — que por sua vez depende do problema e dos dados — mas também do método de otimização e dos próprios parâmetros deste, como o tamanho do passo, por exemplo. Todos esses problemas fazem com que a utilização de preditores lineares seja bastante atrativa.

Os métodos de otimização que podem ser empregados para encontrar o mínimo de uma função custo não convexa estão fora do escopo deste trabalho. Porém alguns exemplos podem ser encontrados, já contextualizados em problemas de controle baseado em dados, no livro de Bazanella, Campestrini e Eckhard (2012). Além disso, em geral não é necessário implementá-los, já que muitos estão disponíveis no próprio Matlab®, através de comandos como `fminsearch`, `fminunc` e `lsqnonlin`.

A seguir é apresentado um exemplo ilustrativo da aplicação da solução de mínimos quadrados na identificação dos parâmetros de um modelo ARX.

Exemplo 2.2 (adaptado de Aguirre (2007, p. 238)). Considere o seguinte modelo ARX de um conversor CC-CC do tipo *buck*:

$$y(t) = 1,7649y(t-1) - 0,8027y(t-2) - 0,73578u(t-1) + 0,07513u(t-2) + 0,8661u(t-3). \quad (71)$$

Suponha que os parâmetros do modelo são desconhecidos e devem ser identificados usando os dados da Tabela 1, obtidos durante uma simulação sem ruído partindo do sistema em repouso.

Tabela 1 — Dados simulados do Exemplo 2.2

Sinais	Amostra, t					
	1	2	3	4	5	6
$u(t)$	-0,27	-0,30	-0,30	-0,29	-0,30	-0,30
$y(t)$	0,0	0,1987	0,5511	0,7775	0,8608	0,8343

A partir desses dados e de (60), o seguinte sistema de equações pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} 0,1987 \\ 0,5511 \\ 0,7775 \\ 0,8608 \\ 0,8343 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,30 & -0,27 & 0 & -0,1987 & 0 \\ -0,30 & -0,30 & -0,27 & -0,5511 & -0,1987 \\ -0,29 & -0,30 & -0,30 & -0,7775 & -0,5511 \\ -0,30 & -0,29 & -0,30 & -0,8608 & -0,7775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

cuja solução é dada por (68), identificando corretamente os parâmetros:

$$\hat{\theta}^T = \theta_0^T = [-0,7358 \quad 0,0751 \quad 0,8661 \quad -1,7649 \quad 0,8027] \quad (73)$$

◇

Observe que o sistema de equações do exemplo acima é determinado e poderia ser resolvido diretamente através da inversa da matriz de regressores. Entretanto, em geral os sistemas reais são sobredeterminados e afetados por ruído, então é necessário substituir

as equações por aproximações resultando em um problema de mínimos quadrados. Além disso, os parâmetros exatos foram encontrados apenas porque os dados não são afetados por ruído e a estrutura do sistema condiz com a estrutura do modelo. Aliás, um problema bem conhecido desse método é o termo de viés que aparece quando o erro da equação não é branco, i.e. a estimativa não é consistente. Por fim, cabe mencionar que é comum o pré-processamento dos dados antes da identificação. Nesse exemplo, o sistema estava relaxado no início do experimento e não sofreu nenhuma perturbação, porém é comum que o experimento inicie com o sistema acomodado em certo ponto de operação ou apresente uma perturbação do tipo rampa (tendência). O ruído e a diferença entre as estruturas do modelo e do sistema real podem ser tratados com a pré-filtragem dos dados, enquanto que o ponto de operação e a tendência devem ser subtraídos antes da etapa de identificação propriamente dita. Quando o ruído leva a uma polarização na estimativa, o uso de técnicas como variáveis instrumentais ou a abordagem de correlação também pode ser adequado.

2.3.5 Identificação por correlação

A abordagem de correlação leva esse nome porque busca minimizar a correlação entre o erro de predição e os dados passados. De acordo com Ljung (1999), uma maneira de explicar esta ideia é que uma correlação não nula entre o erro de predição e os regressores indica que ainda há informação útil nestes que não foi completamente utilizada pelo preditor. Portanto, o que caracteriza um bom preditor é um erro de predição descorrelacionado dos regressores.

Nesse caso, a estimativa dos parâmetros, obtida minimizando a função custo de correlação, é dada por:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) h(\varepsilon(t, \theta)) \right\|_2^2, \quad (74)$$

onde $\zeta(t)$ é um vetor cujos elementos são funções das amostras passadas dos dados, e $h(\circ)$ é uma função do erro (TANGIRALA, 2015). Essa função pode ser, por exemplo, a função identidade ou um filtro linear invariante no tempo. Dependendo das funções escolhidas, essa abordagem dá origem a diversos métodos de identificação, dos quais os mais conhecidos são os que compõem a família dos métodos de variáveis instrumentais (LJUNG, 1999).

Teorema 2.2. *No caso trivial em que em que $h(\circ)$ é a função identidade e o erro é afim com respeito aos parâmetros como em (69), a estimativa dos parâmetros usando a abordagem de correlação é dada por:*

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \zeta^T(t) \sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \zeta^T(t) \sum_{t=1}^N \zeta(t) y(t). \quad (75)$$

Prova. Nesse caso, substituindo (69) em (74) resulta em uma função custo convexa e o vetor de parâmetros que a minimiza é obtido analiticamente, através de (75). ■

O Teorema 2.2 acima fornece um meio de estimar os parâmetros usando um preditor linear e a abordagem de correlação. Por outro lado, quando a função custo de correlação não é convexa, a estimativa dos parâmetros pode ser obtida através de métodos de otimização numéricos como alguns dos mencionados anteriormente.

Por se basear na correlação, essa abordagem resulta em estimativas polarizadas para dados finitos, entretanto, em geral a polarização resultante é pequena. Além disso, para uma grande quantidade de dados essa abordagem é bastante imune ao ruído. Para ver como a abordagem de correlação é mais imune ao ruído que o método de mínimos quadrados, observe o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3. Considere o mesmo sistema (71) do Exemplo 2.2, porém desta vez a entrada do experimento simulado consiste na mesma entrada daquele exemplo repetida 100 vezes no tempo (100 períodos). Além disso, a saída do processo é contaminada com ruído branco com média zero e desvio padrão $\sigma = 0,01$, ou seja, a estrutura do sistema simulado é OE. Porém, suponha que se deseja estimar os parâmetros do sistema com um modelo ARX. Nesse caso foram rodadas 1000 simulações de Monte Carlo variando apenas a realização do ruído. Os dados coletados foram utilizados para estimar os parâmetros do modelo usando a abordagem de correlação e a abordagem de mínimos quadrados. A média e o desvio padrão das estimativas são apresentadas na Tabela 2. As estimativas de mínimos

Tabela 2 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 2.3

θ	θ_0	ESTIMATIVAS	
		correlação ^a	LS ^b
ρ_1	-0,7358	-0,7410 ($\pm 0,0723$)	-0,6910 ($\pm 0,0398$)
ρ_2	0,0751	0,0848 ($\pm 0,0734$)	0,0075 ($\pm 0,0605$)
ρ_3	0,8661	0,8578 ($\pm 0,0668$)	0,9187 ($\pm 0,0452$)
ρ_4	-1,7649	-1,7711 ($\pm 0,0013$)	-1,5952 ($\pm 0,0141$)
ρ_5	0,8027	0,8082 ($\pm 0,0012$)	0,6383 ($\pm 0,0136$)

^a estimados através de (75).

^b estimados através de (68).

quadrados foram obtidas de (68), enquanto que as estimativas de correlação, por (75), utilizando o seguinte vetor de instrumentos:

$$\zeta^T(t) = [u(t-1) \quad u(t-2) \quad \dots \quad u(t-\ell) \quad y(t-1) \quad y(t-2) \quad \dots \quad y(t-\ell)], \quad (76)$$

com $\ell = 25$ deslocamentos (*lag*).

Compare as estatísticas dos parâmetros estimados pelas duas abordagens com os parâmetros reais do sistema apresentados na segunda coluna da Tabela 2. Nesse exemplo, e em geral, a estimativa obtida por correlação é melhor que a obtida por mínimos quadrados. De fato, é possível mostrar que empregar a abordagem de correlação resulta em uma estimativa consistente dos parâmetros. \diamond

No caso da abordagem de correlação também é comum o pré-processamento dos dados, principalmente a pré-filtragem, porém o uso dessa técnica será melhor explicado mais tarde, no contexto dos métodos de controle baseados em dados.

A abordagem de correlação acima leva esse nome por conta da utilização das estimativas da correlação entre dois sinais. Porém é preciso mencionar que essa não é a única abordagem que utiliza a correlação para identificação de sistemas e não deve ser confundida com as outras. Existem métodos não paramétricos para identificação da resposta impulsiva

e da resposta em frequência do sistema que utilizam estimativas da autocorrelação do sinal de entrada e a correlação cruzada entre a entrada e a saída, obtidas dos dados, sem necessariamente utilizar a minimização de uma função custo (LJUNG, 1999). Esses são os chamados métodos de análise de correlação e análise espectral. Além disso, também é possível combinar a correlação com métodos de mínimos quadrados resultando em um método de identificação paramétrico que também emprega aquelas mesmas estimativas das funções de correlação (ISERMANN; MÜNCHHOF, 2011).

2.3.6 Variáveis instrumentais (VI)

Observe que se $\zeta(t)$ tem a mesma dimensão que $\varphi(t)$ e

$$\det \left(\sum_{t=1}^N \varphi^T(t) \zeta(t) \right) \neq 0, \quad (77)$$

isto é, a matriz acima é inversível, então (75) se reduz a

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \zeta^T(t) \varphi(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \zeta^T(t) y(t). \quad (78)$$

A estimativa em (78) é a base das abordagens de variáveis instrumentais (VI) que são chamadas assim devido ao nome dado aos elementos de $\zeta(t)$, chamados de *variáveis instrumentais* ou *instrumentos*. Segundo Ljung (1999), os critérios para que essa estimativa seja consistente são a correlação entre as VI e os regressores, que implica a inversibilidade da matriz em (77), e que as VI sejam descorrelacionadas do ruído presente em $y(t)$.

Essas VI podem ser obtidas de maneiras distintas. Uma maneira bastante empregada é a coleta de dados de um segundo experimento utilizando a mesma entrada ou mesmo usar um sinal de excitação periódico e dividir o dado do experimento em dois. Nesse caso, o vetor com as variáveis instrumentais pode ser construído da mesma maneira que o vetor de regressores. Isso garante as condições acima, mas necessita de um sinal de excitação específico. Uma outra opção é identificar o modelo através de mínimos quadrados e simular um segundo experimento. Ainda outras alternativas são apresentadas por Ljung (1999) e podem apresentar melhores resultados, principalmente para dados coletados em malha fechada.

Neste trabalho, particularmente, foi escolhido utilizar um número par de períodos de sinal de excitação periódico. A partir desses dados as amostras do vetor de regressores são calculadas normalmente. Em seguida, as amostras do vetor de VI são geradas dividindo-se as amostras dos regressores em duas metades contíguas e trocando a sua ordem. Ou seja,

$$\zeta(t) = \begin{cases} \varphi(N/2 + t), & t \leq N/2, \\ \varphi(t - N/2), & t > N/2. \end{cases} \quad (79)$$

Essa escolha tem duas vantagens: primeiro, ela utiliza todo o conjunto de dados, o que não aumenta a variância da estimativa, e segundo, ela é facilmente implementável através do comando `fftshift` do Matlab®.

2.4 Considerações finais

Nesse capítulo foram apresentadas definições preliminares e suposições com respeito ao processo, controladores e sistema em malha fechada. Dessas, deve ser mais uma

vez enfatizada a importância de violar pouco a suposição de pertinência do controlador (Suposição 2.4) e a importância da correlação nula do ruído com as outras entradas do sistema (Suposição 2.3), além da definição de controlador linearmente parametrizado (Definição 2.1). É preciso, contudo, observar que a suposição de pertinência não é estritamente necessária para o funcionamento dos métodos, bastando que ela não seja excessivamente violada. Do mesmo modo, a parametrização linear do controlador não é uma condição necessária para a otimização, porém essa condição permite muitas vezes a obtenção de uma solução analítica para o problema de otimização. Além dessas definições, foi introduzido o conceito de controle por modelo de referência e, em seguida, foram apresentados alguns objetivos de controle e seus respectivos controladores ideais. Isto é, aqueles que fazem com o que o sistema se comporte exatamente como o modelo de referência desejado. Por fim, esse capítulo retomou alguns conceitos da literatura de identificação de sistemas que são úteis para o controle baseado em dados, como a classificação de modelos e os preditores de modelos ARX, FIR e OE. Ainda no final desse capítulo, foi retomado o conceito de identificação por erro de predição que dá origem às estimativas LS, por correlação e por VI. No próximo capítulo esses conceitos serão empregados em uma revisão de alguns métodos da literatura de controle direto baseado em dados por modelo de referência.

3 MÉTODOS BASEADOS EM DADOS

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos de controle baseado em dados através da revisão de alguns métodos da literatura que serviram de base ou de inspiração para o trabalho desenvolvido, permitindo melhor apresentá-lo nos próximos capítulos.

Desse modo, o objetivo deste capítulo é construir uma base firme, sobre a qual será erigido o restante da tese. Os objetivos específicos se resumem a apresentar os seguintes tópicos:

- a) conceitos básicos de controle baseado em dados e revisão da literatura em geral;
- b) revisão de alguns métodos baseados em dados que utilizam modelo de referência;
- c) a flexibilização do modelo de referência para aliviar a violação da suposição de pertinência.

No final deste capítulo ainda serão apresentadas algumas considerações com respeito a tudo que for discutido.

3.1 Literatura de métodos baseados em dados

Para motivar o estudo de métodos de controle baseados em dados é preciso iniciar pelo lado oposto: falando de controle baseado em modelo. Talvez os métodos mais estudados para ajuste de parâmetros de controladores sejam os métodos baseados em modelos. Métodos dessa família empregam um modelo do processo diretamente durante o procedimento de cálculo dos parâmetros do controlador (FORMENTIN; VAN HEUSDEN; KARIMI, 2014). Em geral, os parâmetros desse modelo precisam ser previamente identificados usando abordagens como as apresentadas no capítulo anterior. Além disso, para que o modelo resultante seja adequado para o controle, é preciso que os parâmetros sejam bem identificados, o que implica em conhecer características do sistema como a sua ordem e tempo morto. Por fim, é possível que a ordem do modelo do controlador calculado tenha que ser reduzida, resultando em um controlador que não é necessariamente ótimo quando conectado ao processo. Apesar destes problemas já serem tratados na literatura, a tarefa de identificar os parâmetros de um modelo simples e confiável pode ser difícil e demorada (FORMENTIN; VAN HEUSDEN; KARIMI, 2014). Nesse caso, uma possível alternativa são os *métodos de controle baseados em dados*.

Métodos baseados em dados utilizam um conjunto de dados de entrada e saída, coletados durante experimentos no processo, para identificar os parâmetros do controlador (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012; HOU; WANG, 2013). Esses métodos baseados em dados, em geral, são derivados de métodos de identificação de sistemas.

Além disso, é comum que a estrutura do controlador disponível seja de ordem reduzida. Porém, nesse caso, como a otimização é feita diretamente a partir dos dados, não é necessário passar pela etapa de redução de nenhum modelo. Isto é, o controlador resultante já tem a ordem desejada. Por fim, já foi demonstrado que em situações reais, nas quais é comum que a Suposição 2.4 da pertinência do controlador seja violada, métodos baseados em dados têm desempenho melhor que métodos baseados em modelos (FORMENTIN et al., 2010; CAMPESTRINI et al., 2017).

Como poderá ser constatado em seguida, existem diversos métodos baseados em dados na literatura. Um dos primeiros métodos para ajuste direto de controladores é o método clássico proposto por Ziegler, Nichols et al. (1942) que pode ser visto como o precursor dos métodos baseados em dados modernos. O livro de Bazanella, Campestrini e Eckhard (2012) apresenta outros quatro métodos bem conhecidos da literatura de controle baseado em dados que deram origem a diversos outros. Além desses, Hou e Wang (2013), Hou, Gao e Lewis (2017) apresentam vários outros trabalhos especificamente de métodos baseados em dados ou diretamente relacionados a esse tema. Abaixo são listados alguns métodos baseados em dados que utilizam modelos de referência, tendo como objetivo ilustrar alguns conceitos importantes sobre essa classe de métodos:

- a) *iterative feedback tuning* (IFT): esse método foi proposto por Hjalmarsson, Gunnarsson e Gevers (1994), Hjalmarsson et al. (1998). A função custo do IFT é um critério misto que combina o custo da resposta do modelo de referência com o custo de esforço de controle. Essa função custo não é convexa e depende do modelo do processo, porém o IFT utiliza uma abordagem baseada em dados para estimar o gradiente e a Hessiana da função custo, permitindo a estimativa dos parâmetros através de otimização iterativa. Infelizmente, essa abordagem depende de experimentos adicionais no processo com sinais de entrada especificamente projetados durante cada iteração. Essa necessidade de repetir experimentos com os controladores obtidos em cada iteração define os métodos baseados em dados chamados de *iterativos* (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Por otimizar diretamente a função custo desejada, a estimativa obtida com o IFT apresenta um ótimo desempenho quando o método é inicializado perto do mínimo global, porém a característica iterativa desse método pode ser bastante custosa devido ao gasto de tempo, energia e de matéria-prima durante os experimentos. Apesar disso, o IFT é um método baseado em dados clássico que quatro anos depois de sua introdução já havia sido aplicado ou estendido em dezenas de trabalhos (HJALMARSSON, 2002). Uma versão multivariável desse método foi proposta por Hjalmarsson (1999) e uma versão para processos de fase não mínima foi proposta por Lecchini e Gevers (2002).
- b) *frequency-domain tuning* (FDT): tido como uma versão do IFT no domínio da frequência, esse método foi proposto por Kammer, Bitmead e Bartlett (2000), Kammer, Bitmead e Bartlett (1998) e também é iterativo. A diferença entre esse método e o IFT é a utilização da análise espectral para calcular as derivadas da função custo. Além disso, uma importante contribuição desse trabalho foi mostrar como utilizar as estimativas dos espectros de potência para calcular margens de estabilidade e garantir a estabilidade do laço fechado durante as iterações através da comparação com a distância de Vinnicombe (VINNICOMBE, 1993) entre os controladores de iterações subsequentes.
- c) *virtual reference feedback tuning* (VRFT): um método muito simples e talvez o método mais popular entre os métodos baseados em dados que utilizam um modelo de

- referência, o VRFT surgiu a partir do trabalho de Guardabassi e Savaresi (2000). Chamado inicialmente de *virtual reference direct design* (VRD²) foi só posteriormente que Campi, Lecchini e Savaresi (2002) lhe deram o seu nome e formulação atuais. O VRFT recebe esse nome pois produz sinais virtuais a partir dos sinais reais coletados durante um experimento no processo, um desses sinais sendo o sinal de referência virtual, i.e. o sinal de entrada do sistema virtual em malha fechada com o controlador ideal. Diferentemente dos outros dois métodos acima, o VRFT é um método não iterativo ou *one-shot*, no sentido de que, no caso ideal, é necessário apenas um experimento no processo para coletar dados. Apesar disso, esse método não otimiza a função custo da resposta do modelo de referência diretamente como será mostrado mais adiante. Por conta disso, quando a Suposição 2.4 não é mantida é preciso empregar um filtro para aproximar o mínimo da função custo do VRFT do mínimo do custo da resposta do modelo de referência. O VRFT também foi estendido em vários trabalhos: Campestrini et al. (2011) o estenderam para processos de fase não mínima monovariáveis; já com relação a processos multivariáveis, Nakamoto (2004) o estendeu para utilizar modelos de referência diagonais, Campestrini et al. (2016) o estenderam para utilizar modelos de referência cheios, e Gonçalves da Silva, Campestrini e Bazanella (2018) o estenderam para processos com zeros de transmissão de fase não mínima.
- d) *correlation-based tuning* (CbT): método também bastante estudado que utiliza a abordagem de correlação para estimar os parâmetros do controlador, foi proposto inicialmente como um método iterativo por Karimi, Mišković e Bonvin (2003, 2016), porém mais tarde uma abordagem não iterativa (*noniterative correlation-based tuning*, NCbT) foi proposta por Karimi, van Heusden e Bonvin (2007), van Heusden, Karimi e Bonvin (2011). Como na abordagem de correlação utilizada na identificação de sistemas, o NCbT minimiza a norma da correlação entre dois sinais. Essa abordagem não iterativa é a que deu origem ao método de ajuste de parâmetros de controladores baseado em dados desenvolvido no presente trabalho. O CbT iterativo foi estendido para o caso multivariável por Mišković et al. (2007), enquanto que o NCbT foi estendido para o caso multivariável por Yubai, Usami e Hirai (2009) e posteriormente por Formentin, Savaresi e del Re (2012), mesclado com o VRFT.
- e) *optimal controller identification* (OCI): método não iterativo proposto por Campestrini et al. (2017), utiliza métodos de erro de predição para identificar os parâmetros da inversa do controlador. A identificação da inversa do controlador já havia sido proposta por Sala e Esparza (2005) com os sinais virtuais do VRFT, porém o OCI utiliza sinais diferentes. Uma importante contribuição do trabalho de Campestrini et al. (2017) foi mostrar que métodos baseados em dados podem obter resultados superiores que métodos baseados em modelos quando o controlador é subparametrizado, em concordância com o que foi sugerido por Formentin, van Heusden e Karimi (2014). Outra contribuição foi mostrar como o controlador pode ser dividido em duas partes: uma fixa e uma a ser identificada. O OCI foi estendido para processos multivariáveis por Huff et al. (2019).
- f) *virtual disturbance feedback tuning* (VDFT): este é um método não iterativo desenvolvido por Eckhard, Campestrini e Boeira (2018) como uma extensão do método VRFT para rejeição de perturbação de carga. Como o VRFT, esse método permite gerar sinais virtuais, dentre os quais o sinal de perturbação virtual que confere o nome ao método. A partir dos sinais virtuais de entrada e saída do controlador ideal é possível identificar

os parâmetros ótimos que farão com que o sistema em malha fechada se comporte de maneira semelhante ao modelo de referência. A importância desse método para esta tese reside no fato de que o VDFT tem o mesmo objetivo de controle que o método aqui proposto, isto é, a atenuação ou rejeição de perturbações que afetam a entrada do processo. O VDFT foi estendido para controladores multivariáveis por Bordignon (2018).

Para ilustrar algumas das ideias apresentadas acima e como métodos baseados em dados não iterativos com modelo de referência podem ser utilizados para ajustar controladores, a seguir são apresentados rapidamente três métodos: primeiramente o VRFT, para ilustrar os conceitos básicos, já que é o método baseado em dados mais simples; em seguida o NCbT, para ilustrar a utilização da abordagem de correlação; e, finalmente, o VDFT para mostrar o problema de rejeição de perturbação de carga.

3.2 Virtual reference feedback tuning

Considere, como antes, que dados de entrada e saída do processo foram produzidos durante um experimento específico em malha aberta e estão disponíveis, esses dados são constituídos pelos sinais $u(t)$ e $y(t)$. Inicialmente será considerado que os dados foram coletados sem ruído. Além disso, o modelo de referência foi escolhido de modo que o controlador ideal respeite a Suposição 2.4. Essas duas últimas condições constituem o chamado caso ideal (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Partindo das premissas do caso ideal acima, supõe-se momentaneamente que os dados de entrada e saída do processo foram coletados durante um experimento em malha fechada com o controlador ideal para gerar os sinais virtuais. Ora, se o controlador ideal estivesse na malha, o comportamento do sistema em malha fechada seria idêntico ao comportamento do modelo de referência. Portanto, é possível gerar um sinal de *referência virtual* filtrando a saída coletada pela inversa do modelo de referência:

$$\tilde{r}(t) = T_d^{-1}(q)y(t), \quad (80)$$

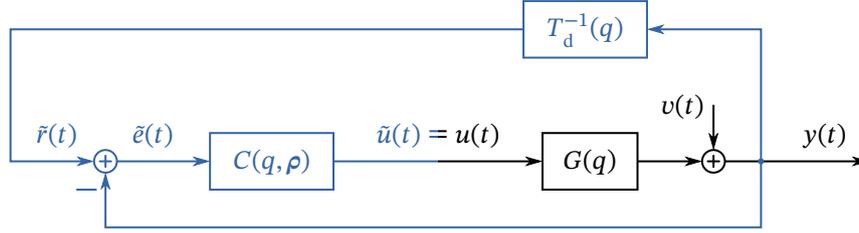
onde $\tilde{r}(t)$ é o sinal de referência virtual. A partir daí, pode-se gerar também o *erro (de seguimento de referência) virtual*, que será a diferença entre a referência virtual e a saída coletada:

$$\begin{aligned} \tilde{e}(t) &= \tilde{r}(t) - y(t) \\ &= [T_d^{-1}(q) - 1]y(t), \end{aligned} \quad (81)$$

onde $\tilde{e}(t)$ é o erro virtual. Observe que, em geral, a inversa de $T_d(q)$ não é causal e pode ser instável, porém isso não é um problema. A questão da causalidade de $T_d^{-1}(q)$ não gera problemas porque os sinais virtuais são calculados após o fim do experimento. Resta a questão da instabilidade de $T_d^{-1}(q)$, devida a zeros de fase não mínima no processo e no modelo de referência, para a qual uma solução foi apresentada por Bazanella, Campestrini e Eckhard (2012), por exemplo.

O diagrama de blocos da Figura 3 apresenta como os sinais virtuais do VRFT (em azul) são calculados a partir dos sinais reais coletados durante o experimento (em preto). Observe que o erro virtual é o sinal de entrada do controlador ideal, enquanto que o seu sinal de saída virtual é a própria entrada (real) do processo coletada durante o experimento. Portanto é possível utilizar os sinais virtuais de entrada e saída do controlador ideal para identificar os seus parâmetros.

Figura 3 — diagrama de blocos com os sinais do VRFT.



Os sinais reais coletados durante o experimento são desenhados em preto, os sinais virtuais desenhados em azul. Fonte: adaptado de Hou e Wang (2013).

Como na identificação de sistemas, o modelo do controlador é parametrizado e um preditor da sua saída pode ser calculado de diferentes maneiras, dependendo da classe do modelo escolhido, a partir dos dados (virtuais) de entrada e saída. Assim, o problema de ajustar os parâmetros do controlador se torna um problema de identificação de sistemas (GUARDABASSI; SAVARESI, 2000). Contudo, apesar de Guardabassi e Savaresi (2000) mostrarem que o método pode ser utilizado com controladores com parametrização não linear, como também Sala e Esparza (2005), Silva Garcia e Bazanella (2020b), a maioria dos trabalhos que empregam o VRFT utilizam a Definição 2.1 e mostram apenas como o método pode ser utilizado com controladores com parametrização linear (sem parâmetros no denominador).

A partir do erro virtual (81) e da parametrização linear do controlador (19), o seguinte “preditor” linear da saída do controlador é definido:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t | \rho) &= C(q, \rho)\tilde{e}(t) \\ &= \rho^\top \beta(q)\tilde{e}(t) \\ &= \rho^\top \varphi(t),\end{aligned}\quad (82)$$

onde os regressores são formados pelo erro virtual filtrado pela estrutura de controle:

$$\varphi^\top(t) = [\beta_1(q)\tilde{e}(t) \quad \beta_2(q)\tilde{e}(t) \quad \cdots \quad \beta_p(q)\tilde{e}(t)] \quad (83)$$

Ou seja, o erro de predição de (82) é dado por

$$\varepsilon^{\text{vr}}(t, \rho) = u(t) - \rho^\top \varphi(t), \quad (84)$$

e a função custo do VRFT é a norma desse erro:

$$V_{\text{vr}}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |u(t) - \rho^\top \varphi(t)|^2. \quad (85)$$

Teorema 3.1. *Se o controlador for parametrizado linearmente, a estimativa do VRFT para os seus parâmetros ótimos é dada por*

$$\hat{\rho} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^\top(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t)u(t) \right], \quad (86)$$

onde $\varphi(t)$ é dado por (83).

Prova. A prova é similar à do Teorema 2.1. A solução em (68) foi apenas reescrita em (86) para utilizar os sinais do VRFT. ■

Observação 3.1. Observe que $\hat{u}(t | \rho)$ em (82) não pode ser um preditor no sentido estrito dessa palavra, uma vez que $T_d^{-1}(q)$ em geral não é causal, fazendo com que $\tilde{e}(t)$ e, por conseguinte, $\hat{u}(t | \rho)$ dependam de amostras futuras de $y(t)$. De todo modo, isso não é um problema, pois os cálculos são realizados de maneira *off-line*.

Exemplo 3.1 (adaptado de Bazanella, Campestrini e Eckhard (2012, p. 31)). Considere o seguinte modelo (supostamente desconhecido) para o processo em malha aberta:

$$G(q) = \frac{0,5q^{-1}}{1 - 0,9q^{-1}}, \quad (87)$$

e o seguinte modelo de referência desejado:

$$T_d(q) = \frac{0,4q^{-1}}{1 - 0,6q^{-1}}. \quad (88)$$

Se o modelo do processo fosse conhecido, os parâmetros do seguinte controlador PI ideal poderiam ser obtidos de (31):

$$C^*(q) = \frac{0,8 - 0,72q^{-1}}{1 - q^{-1}}. \quad (89)$$

Porém, como não é esse o caso, foram coletados dados de entrada e saída durante um experimento simulado em malha aberta e sem ruído no processo, o sinal de excitação é um degrau unitário e os dados são apresentados no início da Tabela 3.

Tabela 3 — Dados simulados do Exemplo 3.1

Sinais	AMOSTRA, t		
	1	2	3
$u(t)$	1,0	1,0	1,0
$y(t)$	0,0	0,5	0,95
$\tilde{e}(t)$ ^a	1,25	1,375	–
$\varphi(t)$ ^b	$\begin{bmatrix} 1,25 \\ 0,0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,375 \\ 1,25 \end{bmatrix}$	–

^a calculado com (81).

^b calculado com (83).

Como o modelo de referência pede ganho estático unitário e o processo não possui integrador, a seguinte estrutura de controle (PI) foi escolhida para (19):

$$\beta^T(q) = \begin{bmatrix} 1 & q^{-1} \\ 1 - q^{-1} & 1 - q^{-1} \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Em seguida, os dados da segunda linha da Tabela 3 foram utilizados em (81) para calcular o sinal de erro virtual apresentado na terceira linha da mesma tabela. Esse também é o sinal de entrada virtual do controlador cujos parâmetros serão identificados.

A partir dos dados da Tabela 3, a seguinte estimativa:

$$\hat{\rho} = \rho^* = [0,8 \quad -0,72]^T,$$

obtida através de (83) e (86), dá os parâmetros corretos do controlador. \diamond

Observe que os parâmetros ideais foram identificados no exemplo porque os sinais não são contaminados por ruído e o controlador ideal pertence à classe de controle escolhida. Quando os sinais são corrompidos por ruído, utilizar a abordagem de mínimos quadrados irá gerar uma estimativa polarizada. Nesse caso, uma alternativa viável é a utilização de variáveis instrumentais, como no problema de identificação de sistemas apresentado anteriormente, onde os dados são divididos em duas partes. A estimativa obtida através de variáveis instrumentais é a solução da seguinte equação:

$$\hat{\rho} = \left[\sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \zeta(t) u(t) \right], \quad (91)$$

onde $\varphi(t)$ e $\zeta(t)$ têm a mesma estrutura (83), porém usando o artifício (79) apresentado no capítulo anterior.

Exemplo 3.2. Considere o mesmo sistema, modelo de referência e estrutura de controlador do Exemplo 3.1 anterior. Porém, agora o sinal de excitação do experimento em malha aberta são 4 períodos de uma onda quadrada com níveis 0 e 1 e período de 100 amostras, totalizando 400 amostras. Além disso, o sinal de saída é contaminado com ruído branco com média zero e desvio padrão $\sigma = 0,1$. Para obter os dados foram rodadas 1000 simulações de Monte Carlo variando apenas a realização do ruído. A Tabela 4 apresenta

Tabela 4 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.2

ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS	
		VRFT e VI ^a	VRFT e LS ^b
ρ_1	0,8000	0,8030 ($\pm 0,0504$)	0,4712 ($\pm 0,0164$)
ρ_2	-0,7200	-0,7230 ($\pm 0,0504$)	-0,3912 ($\pm 0,0164$)

^a estimados através de (91).

^b estimados através de (86).

as estatísticas das estimativas obtidas através das abordagens de mínimos quadrados e de variáveis instrumentais. Nela, é possível observar como a abordagem de variáveis instrumentais resulta em uma estimativa menos polarizada mas com maior desvio padrão, o que é uma característica dessa abordagem. \diamond

Por fim, cabe mencionar que a função custo do VRFT (85) tem um mínimo diferente do custo de resposta a referência (34) se a Suposição 2.4 for violada. Porém, nesse caso é possível filtrar os dados para aproximar os mínimos das duas funções, como proposto por Campi, Lecchini e Savaresi (2002). Para tanto, é preciso relembrar um caso particular do famoso Teorema de Parseval.

Teorema 3.2 (caso particular do Teorema de Parseval). *A energia de um sinal de tempo discreto pode ser expressa no domínio da frequência através da seguinte equação:*

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega, \quad (92)$$

onde $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ é a transformada de Fourier de tempo discreto do sinal $x(t)$.

Prova. Pode ser encontrada em Lathi (2008, p. 765). ■

Corolário 3.1. *Usando o Teorema de Parseval para sinais de tempo discreto, a função custo da resposta a referência (34) pode ser escrita no domínio da frequência como*

$$V_r(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_d(e^{j\omega}) - T(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_r(\omega) d\omega, \quad (93)$$

onde $\Phi_r(\omega) = |R(\omega)|^2$ é o espectro de potência do sinal de referência $r(t)$ que se deseja seguir.

Considerando dados sem ruído e desenvolvendo a equação do erro de predição da saída do controlador, resulta em

$$\varepsilon^{vr}(t, \rho) = u(t) - C(\rho) [T_d^{-1} - 1] y(t) \quad (94)$$

$$= [1 - T_d(1 - T_d)C(\rho)G] u(t) \quad (95)$$

$$= T_d^{-1} [1 + C(\rho)G] [T_d - [1 + C(\rho)G]^{-1} C(\rho)G] u(t) \quad (96)$$

$$= T_d^{-1} [1 - T(\rho)]^{-1} [T_d - T(\rho)] u(t), \quad (97)$$

onde (94) vem de (81) a (84), enquanto que (95) usa (3) e a igualdade $T_d^{-1}(q) - 1 = T_d(q) [1 - T_d(q)]$. Já (96) apenas coloca $T_d^{-1}(q) [1 + C(q, \rho)G(q)]$ em evidência, e finalmente (97) usa as relações (9) e (10). O operador q foi omitido para economizar espaço e o desenvolvimento considera o caso monovariável. Com o equacionamento acima em mente, considere ainda que os dados serão pré-filtrados por um filtro $W(q)$, de modo que a energia do erro de predição, ou seja, a função custo do VRFT, pode ser escrita no domínio da frequência como

$$V_{vr}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{T_d(e^{j\omega}) - T(e^{j\omega}, \rho)}{T_d(e^{j\omega}) [1 - T(e^{j\omega}, \rho)]} \right|^2 \Phi_u(\omega) d\omega, \quad (98)$$

onde, agora, $\Phi_u(\omega) = |U(\omega)|^2$ é o espectro de potência do sinal de entrada do processo coletado durante o experimento.

Observe que para fazer com que o mínimo de (98) fique próximo do mínimo de (93), basta usar um filtro tal que

$$\begin{aligned} |W(e^{j\omega})|^2 &= |T_d(e^{j\omega}) [1 - T(e^{j\omega}, \rho)]|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \\ &\approx |T_d(e^{j\omega}) [1 - T_d(e^{j\omega})]|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u(\omega)}, \end{aligned} \quad (99)$$

onde foi utilizada a aproximação $T(q, \rho) \approx T_d(q)$. Essa aproximação precisa ser válida ao redor do mínimo das funções. Além disso, os espectros dos sinais podem ser estimados ou,

no caso em que se pode excitar o processo com um sinal $u(t)$ com um mesmo conteúdo espectral que a referência que se quer seguir $r(t)$, os espectros se cancelam e o filtro fica simplificado (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Um exemplo de implementação simples do VRFT é apresentado na Listagem A.1 do Apêndice A.

3.3 Noniterative correlation-based tuning

O NCbT busca resolver o mesmo problema que o VRFT, isto é, fazer com que a resposta a referência do sistema em malha fechada coincida com a resposta do modelo de referência. Porém, ao invés de usar variáveis instrumentais para lidar com o ruído, o NCbT utiliza a abordagem de correlação diretamente. A seguir é apresentado o funcionamento do método NCbT de uma maneira resumida, mas similar à proposta por van Heusden, Karimi e Bonvin (2011). A abordagem não iterativa foi a escolhida porque é a que apresenta maior interesse para esta tese.

Considere inicialmente a função custo do modelo de referência (30), reescrita abaixo para evidenciar a interação entre controlador e processo:

$$V_T(\boldsymbol{\rho}) = \left\| T_d(q) - \frac{G(q)C(q, \boldsymbol{\rho})}{1 + G(q)C(q, \boldsymbol{\rho})} \right\|_2^2 \quad (100)$$

$$\approx \left\| T_d(q) - \frac{G(q)C(q, \boldsymbol{\rho})}{1 + G(q)C^*(q)} \right\|_2^2 \quad (101)$$

$$= \|T_d(q) - [1 - T_d(q)]G(q)C(q, \boldsymbol{\rho})\|_2^2, \quad (102)$$

onde (100) vem diretamente de (30), enquanto que (101) e (102) aproximam a função de sensibilidade pela função de sensibilidade ideal. De acordo com Karimi, van Heusden e Bonvin (2007), se não houver ruído e a Suposição 2.4 se mantiver, minimizar esse custo equivale a minimizar a norma do seguinte erro:

$$\varepsilon_{\text{ma}}^{\text{cbt}}(\boldsymbol{\rho}) = [T_d(q) - C(q, \boldsymbol{\rho})[1 - T_d(q)]G(q)]u(t) - C(q, \boldsymbol{\rho})[1 - T_d(q)]v(t) \quad (103)$$

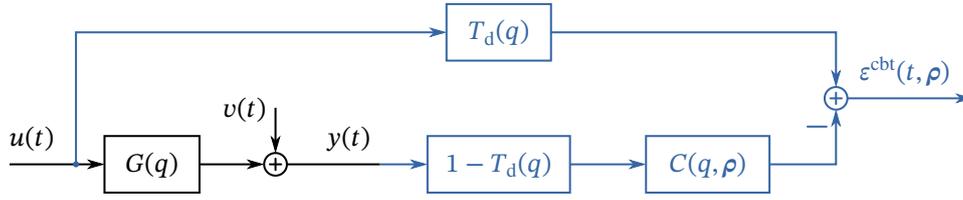
para um sinal de entrada $u(t)$ persistentemente excitante e onde os operadores de transferência foram comutados considerando o caso monovariável. Observe ainda que a variável de erro apresentada em (103) pode ser obtida a partir de dados de entrada e saída coletados durante um experimento em malha aberta no processo. Esse fato é ilustrado através da Figura 4 e da seguinte equação:

$$\varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho}) = T_d(q)u(t) - C(q, \boldsymbol{\rho})[1 - T_d(q)]y(t). \quad (104)$$

Além da característica imprescindível de poder ser obtida a partir dos dados do experimento, a variável de erro proposta por Karimi, van Heusden e Bonvin (2007) em (104) tem outras duas características importantes: Primeiramente, quando o controlador é linearmente parametrizado essa variável de erro é afim com respeito aos parâmetros do controlador. Isso permite uma otimização de um passo só. Em segundo lugar, na presença de ruído e quando os parâmetros corretos, i.e. ideais, são utilizados no seu cômputo, o termo dependente da entrada desaparece, restando apenas ruído filtrado, de acordo com a seguinte equação:

$$\varepsilon^{\text{cbt}}(\boldsymbol{\rho}^*) = -C(q, \boldsymbol{\rho}^*)[1 - T_d(q)]v(t), \quad (105)$$

Figura 4 — diagrama de blocos com os sinais do CbT.



Os sinais reais coletados durante o experimento são desenhados em preto, os sinais calculados, em azul.
Fonte: adaptado de Karimi, van Heusden e Bonvin (2007).

obtida diretamente de (103), notando que $C(q, \rho^*) [1 - T_d(q)] G(q) = T_d(q)$. O erro, sendo apenas ruído filtrado, é decorrelacionado da entrada do experimento pela Suposição 2.3.

Isso acontece mesmo se o dado for coletado em um experimento em malha fechada. Nesse caso, considerando que o controlador originalmente na malha seja $C_o(q)$, e indicando isso através do subscrito “o” nos operadores de transferência correspondentes, o sinal de erro (104) pode ser expandido como

$$\varepsilon^{\text{cbt}}(t, \rho) = T_d [G^{-1} T_o r(t) - C_o S_o v(t)] - C(\rho) [1 - T_d] [T_o r(t) + S_o v(t)] \quad (106)$$

$$= [C(\rho^*) - C(\rho)] [1 - T_d] T_o r(t) - [T_d C_o + C(\rho) [1 - T_d]] S_o v(t), \quad (107)$$

onde se omitiu o operador q por brevidade e onde (106) vem de substituir o controlador original $C_o(q)$ e (7) e (8) em (104), enquanto que (107) vem de rearranjar os termos e usar a igualdade $T_d(q) G^{-1}(q) = [1 - T_d(q)] C(q, \rho^*)$. Assim como antes, o primeiro termo de (107) desaparece se forem usados os parâmetros ideais:

$$\varepsilon^{\text{cbt}}(\rho^*) = - [C(q, \rho^*) [1 - T_d(q)] G(q) C_o(q) + C(q, \rho^*) [1 - T_d(q)]] S_o(q) v(t) \quad (108)$$

$$= -C(q, \rho^*) [1 - T_d(q)] [1 + G(q) C_o(q)] S_o(q) v(t) \quad (109)$$

$$= -C(q, \rho^*) [1 - T_d(q)] v(t), \quad (110)$$

onde (108) é obtida substituindo $C(q, \rho^*)$ em (107) e usando a igualdade $T_d(q) C_o(q) = C(q, \rho^*) [1 - T_d(q)] G(q) C_o(q)$, enquanto que (109) só rearranja os termos e (110) é obtida em seguida aplicando a igualdade $S_o(q) = [1 + G(q) C_o(q)]^{-1}$. Novamente, por ser apenas ruído filtrado, o erro se torna decorrelacionado da entrada do experimento $r(t)$ se forem usados os parâmetros ideais.

Observação 3.2. O equacionamento da variável de erro do NCbT de (100) a (104) foi desenvolvido de maneira similar à literatura, porém essa pode não ser a melhor escolha de apresentação. Aqui sugere-se como alternativa observar simplesmente de (94) e (104) que

$$\varepsilon^{\text{cbt}}(t, \rho) = T_d(q) \varepsilon^{\text{vr}}(t, \rho). \quad (111)$$

Por conta das características dessa variável de erro, Karimi, van Heusden e Bonvin (2007) propuseram identificar os parâmetros do controlador através da minimização da norma da função de correlação entre o erro (104) e a entrada do experimento — $u(t)$ se for em malha aberta ou $r(t)$ se for em malha fechada. Para tanto, considere a seguinte

definição da função de correlação entre a variável de erro e um sinal qualquer $x(t)$:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,x}(\tau) &= E \varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho}) x(t - \tau) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^N \varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho}) x(t - \tau), \end{aligned} \quad (112)$$

onde τ é o número de deslocamentos (*lag*). Essa expressão pressupõe uma quantidade infinita de dados, portanto na vida real teremos que usar uma aproximação:

$$\hat{f}_{\varepsilon,x}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho}) x(t - \tau). \quad (113)$$

Em geral, denotando $x(t)$ a entrada do experimento, a amplitude de $\hat{f}_{\varepsilon,x}(\tau)$ diminui conforme τ se afasta de zero nos dois sentidos. Mesmo quando o sinal de entrada é periódico, o que também reflete em $\hat{f}_{\varepsilon,x}(\tau)$, a soma das amplitudes das amostras de $\hat{f}_{\varepsilon,x}(\tau)$ concentradas na volta de $-\ell \leq \tau \leq \ell$ é suficiente para ser utilizada na minimização. Por conta disso, a função custo do NCbT é dada por

$$V_{\text{cbt}}(\boldsymbol{\rho}) = \left\| \hat{f}_{\varepsilon,x}(\tau) \right\|_2^2, \quad -\ell \leq \tau \leq \ell \quad (114)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\zeta}(t) \right\|_2^2, \quad (115)$$

onde $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$ é o vetor de instrumentos formado a partir de amostras do sinal de entrada do experimento e definido como

$$\boldsymbol{\zeta}^T(t) = [u(t + \ell) \quad u(t + \ell - 1) \quad \cdots \quad u(t) \quad \cdots \quad u(t - \ell + 1) \quad u(t - \ell)], \quad (116)$$

para dados de malha aberta e

$$\boldsymbol{\zeta}^T(t) = [r(t + \ell) \quad r(t + \ell - 1) \quad \cdots \quad r(t) \quad \cdots \quad r(t - \ell + 1) \quad r(t - \ell)], \quad (117)$$

para dados de malha fechada, enquanto que ℓ é um parâmetro de projeto que representa o número máximo de deslocamentos a considerar. Além disso, cabe notar que (114) usa a norma de um sinal truncado, enquanto que (115) usa a norma euclideana de um vetor.

Teorema 3.3. *Se o controlador for parametrizado linearmente, a estimativa do NCbT para os seus parâmetros ótimos é dada por*

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \left[\mathbf{X}_T^T \mathbf{X}_T \right]^{-1} \left[\mathbf{X}_T^T \boldsymbol{\xi}_T \right], \quad (118)$$

com

$$\mathbf{X}_T = \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\zeta}(t) \boldsymbol{\varphi}_T^T(t), \quad \boldsymbol{\xi}_T = \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\zeta}(t) \tilde{u}_T(t),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_T(t) = \boldsymbol{\beta}(q) [1 - T_d(q)] y(t), \quad \tilde{u}_T(t) = T_d(q) u(t).$$

Prova. Observe que, se o controlador for linearmente parametrizado, a variável de erro (104) pode ser escrita como

$$\varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho}) = T_d(q)u(t) - \boldsymbol{\rho}^\top \boldsymbol{\beta}(q) [1 - T_d(q)] y(t) \quad (119)$$

$$= \tilde{u}_T(t) - \boldsymbol{\varphi}_T^\top(t) \boldsymbol{\rho}, \quad (120)$$

substituindo (19) em (104). A expressão em (120) é afim com respeito aos parâmetros, fazendo com que (115) seja convexa. Desse modo, substituindo (120) em (115), derivando com respeito aos parâmetros, igualando a zero e resolvendo para os parâmetros resulta na estimativa dada em (118). ■

Exemplo 3.3. Considere o mesmo problema do Exemplo 3.2. Utilizar os mesmos dados para estimar os parâmetros do controlador usando (118) resulta na estimativa apresentada na Tabela 5, onde também é apresentado o resultado anterior, obtido com o VRFT e VI. Observe que utilizando a mesma quantidade de dados, o NCbT alcançou uma estimativa

Tabela 5 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.3

$\boldsymbol{\rho}$	$\boldsymbol{\rho}^*$	ESTIMATIVAS	
		NCbT ^a	VRFT e VI ^b
ρ_1	0,8000	0,7999 ($\pm 0,0039$)	0,8030 ($\pm 0,0504$)
ρ_2	-0,7200	-0,7199 ($\pm 0,0039$)	-0,7230 ($\pm 0,0504$)

^a estimados através de (118).

^b estimados através de (91).

menos polarizada e com menor variância do que a obtida utilizando o VRFT e VI. O parâmetro de projeto utilizado com o NCbT foi de $\ell = 25$ deslocamentos. ◇

Assim como o VRFT, o NCbT também usa um filtro para aproximar os mínimos da função custo (115) e do custo da resposta a referência (34) quando a Suposição 2.4 é violada. A derivação desse filtro também é semelhante à do VRFT. Primeiramente, usa-se o Teorema 3.2 para escrever a função custo do NCbT (115) no domínio da frequência, considerando o erro pré-filtrado por $W(q)$ e dados de malha aberta:

$$V_{\text{cbt}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_{\varepsilon u}(\omega)|^2 d\omega \quad (121)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{T_d(e^{j\omega}) - T(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})}{1 - T(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})} \right|^2 \Phi_u^2(\omega) d\omega, \quad (122)$$

onde (121) usa o fato de que a transformada de Fourier da correlação entre o erro $\varepsilon^{\text{cbt}}(t, \boldsymbol{\rho})$ e a entrada $u(t)$ é o espectro cruzado $\Phi_{\varepsilon u}(\omega)$, enquanto que (122) vem diretamente de substituir o erro do VRFT (97) na relação (111).

Nesse caso, o filtro que aproxima os mínimos de (93) e (122) é aquele para o qual

$$\begin{aligned} |W(e^{j\omega})|^2 &= \left| 1 - T(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) \right|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u^2(\omega)} \\ &\approx \left| 1 - T_d(e^{j\omega}) \right|^2 \frac{\Phi_r(\omega)}{\Phi_u^2(\omega)}, \end{aligned} \quad (123)$$

onde a validade da aproximação depende de que a função de sensibilidade seja próxima da função de sensibilidade ideal na volta do mínimo. Já para dados de malha fechada, uma derivação semelhante resulta no filtro para o qual

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx |1 - T_d(e^{j\omega})|^2 \frac{|\Phi_r(\omega)|^2}{|\Phi_{ur}(\omega)|^2}, \quad (124)$$

onde $\Phi_{ur}(\omega)$ representa o espectro cruzado entre os sinais $u(t)$ e $r(t)$ coletados durante o experimento, por outro lado, $\Phi_r(\omega)$ ainda representa o espectro do sinal de referência que se deseja seguir.

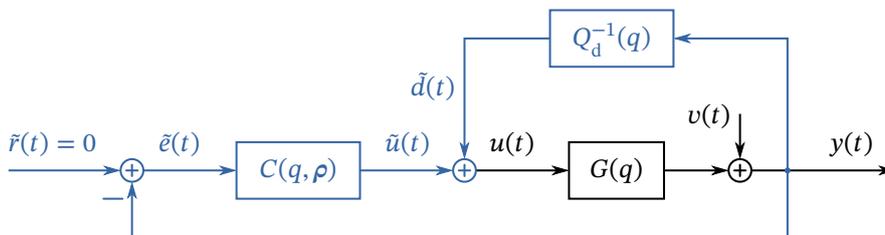
Um exemplo de uma implementação simples do NCbT é apresentado através da Listagem A.4 no Apêndice A.

3.4 Virtual disturbance feedback tuning

Os dois outros métodos apresentados anteriormente têm como objetivo o seguimento de referência, porém o VDFT foi desenvolvido tendo em mente a resposta a perturbações na entrada do processo (perturbações de carga). A derivação do VDFT, proposta por Eckhard, Campestrini e Boeira (2018), utiliza ideias similares às do VRFT. Essas ideias são apresentadas em seguida de forma resumida.

Seguindo um exercício mental semelhante ao do VRFT, suponha que o controlador ideal já estivesse na malha (virtual) sem ruído e numa configuração de regulação, isto é, a *referência virtual* é $\tilde{r}(t) = 0$. Esse exercício mental pode ser visualizado na Figura 5. Nesse caso, uma perturbação na entrada do processo produziria uma resposta idêntica à da

Figura 5 — diagrama de blocos com os sinais do VDFT.



Os sinais reais coletados durante o experimento são desenhados em preto, os sinais calculados, em azul.

Fonte: adaptado de Eckhard, Campestrini e Boeira (2018).

função de sensibilidade a perturbação desejada — $Q_d(q)$, o modelo de referência. Assim, é possível calcular qual seria essa *perturbação virtual* através da seguinte equação

$$\tilde{d}(t) = Q_d^{-1}(q)y(t), \quad (125)$$

onde $y(t)$ é a saída coletada durante o experimento. Além disso, como $\tilde{d}(t)$ é uma perturbação aditiva na entrada do processo, a *saída virtual* do controlador é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= u(t) - \tilde{d}(t) \\ &= u(t) - Q_d^{-1}(q)y(t). \end{aligned} \quad (126)$$

Por fim, a *entrada virtual* do controlador é dada pelo erro virtual

$$\tilde{e}(t) = -y(t), \quad (127)$$

porque a referência virtual é nula. Desse modo, os sinais de entrada e saída virtuais do controlador ideal podem ser obtidos a partir dos dados e os parâmetros do controlador podem ser identificados.

Teorema 3.4 (adaptado de Eckhard, Campestrini e Boeira (2018)). *Se o controlador for linearmente parametrizado, a estimativa do VDFT para os parâmetros ótimos do controlador na ausência de ruído é dada por*

$$\hat{\rho} = \left[\sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varphi}_W(t) \boldsymbol{\varphi}_W^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varphi}_W(t) \tilde{u}_W(t) \right], \quad (128)$$

onde os regressores são definidos de maneira similar a (83), conforme abaixo:

$$\boldsymbol{\varphi}_W^T(t) = [\beta_1(q)\tilde{e}_W(t) \quad \beta_2(q)\tilde{e}_W(t) \quad \cdots \quad \beta_p(q)\tilde{e}_W(t)], \quad (129)$$

onde $\tilde{e}_W(t) = W(q)\tilde{e}(t)$ e $\tilde{u}_W(t) = W(q)\tilde{u}(t)$ e onde $W(q)$ é um filtro a ser definido adiante. Por outro lado, caso os dados sejam ruidosos, a estimativa dos parâmetros é obtida através da seguinte equação:

$$\hat{\rho} = \left[\sum_{t=1}^N \zeta_W(t) \boldsymbol{\varphi}_W^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \zeta_W(t) \tilde{u}_W(t) \right], \quad (130)$$

onde o vetor $\zeta_W(t)$ de VI pode ser construído de maneira análoga à apresentada anteriormente, também com dados filtrados.

Prova. Seguindo o mesmo raciocínio do preditor do VRFT em (82), o preditor linear para a saída virtual do controlador para o VDFT é definido como

$$\begin{aligned} \hat{u}(t | \rho) &= C(q, \rho)\tilde{e}(t) \\ &= \rho^T \boldsymbol{\beta}(q)\tilde{e}(t) \\ &= \rho^T \boldsymbol{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (131)$$

Nesse caso o erro de predição também é afim em relação aos parâmetros:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{vd}}(t, \rho) &= \tilde{u}(t) - \rho^T \boldsymbol{\varphi}(t) \\ &= u(t) - Q_d^{-1}(q)y(t) - \rho^T \boldsymbol{\varphi}(t), \end{aligned} \quad (132)$$

mas esse erro é a diferença entre um sinal virtual e o preditor. A função custo do VDFT é a norma do erro de predição (132) filtrado:

$$V_{\text{vd}}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |W(q) [u(t) - Q_d^{-1}(q)y(t) - \rho^T \boldsymbol{\varphi}(t)]|^2, \quad (133)$$

que é convexa e cuja solução é dada por (128). A estimativa em (130) é a solução de VI como anteriormente. ■

Corolário 3.2. *Quando a Suposição 2.4 é respeitada, o estimador em (130) é consistente. Por outro lado, quando a pertinência é violada, o filtro pode ser projetado para reduzir os efeitos negativos do descasamento entre o modelo de referência e a estrutura de controle disponível.*

A seguir é apresentado um exemplo ilustrativo da aplicação do VDFT para ajuste da resposta a perturbação.

Exemplo 3.4. Considere novamente o processo e os dados do Exemplo 3.2, mas suponha agora que deseja-se ajustar a resposta a perturbação de carga do sistema. Nesse caso o seguinte modelo de referência para a função de sensibilidade a perturbação de carga foi escolhido:

$$Q_d(q) = \frac{0,5q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,6q^{-1})}. \quad (134)$$

Novamente, o controlador ideal poderia ser calculado usando (37), caso o modelo do processo estivesse disponível, resultando em

$$C^*(q) = \frac{0,8 - 0,72q^{-1}}{1 - q^{-1}}, \quad (135)$$

que é o mesmo controlador PI ideal dos exemplos de seguimento de referência. (Lembre-se que esse é apenas um exemplo ilustrativo e o desempenho da malha fechada não é importante.) As estatísticas dos parâmetros estimados são apresentadas na Tabela 6 para

Tabela 6 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.4

ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS	
		VDFT e VI ^a	VDFT e LS ^b
ρ_1	0,8000	0,8000 ($\pm 0,0011$)	0,7970 ($\pm 0,0006$)
ρ_2	-0,7200	-0,7200 ($\pm 0,0011$)	-0,7170 ($\pm 0,0006$)

^a estimados através de (130).

^b estimados através de (128).

comparação entre as abordagens LS e VI. Novamente, como esperado, a abordagem VI apresentou menor polarização e variância um pouco maior. Também é possível comparar os parâmetros estimados para rejeição de perturbação com os parâmetros estimados pelos outros métodos com objetivo de controle diferente, nas Tabelas 2 e 4. É interessante notar como foi mais fácil ajustar os parâmetros para rejeição de perturbação, apesar de terem sido usados os mesmos dados. \diamond

Novamente, caso a Suposição 2.4 seja violada, as funções custo do VDFT e da resposta a perturbação não têm o mínimo nos mesmos parâmetros, mas é possível aproximar os mínimos através da pré-filtragem dos dados. Nesse caso, o Teorema de Parseval é usado para escrever a função custo de resposta a perturbação no domínio da frequência.

Corolário 3.3 (do Teorema 3.2). *Usando o Teorema de Parseval para sinais de tempo discreto, a função custo da resposta a perturbação (40) pode ser escrita no domínio da frequência como*

$$V_d(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_d(\omega) d\omega, \quad (136)$$

onde $\Phi_d(\omega) = |D(\omega)|^2$ é o espectro de potência do sinal de perturbação $d(t)$ que se deseja rejeitar.

Já para a função custo do VDFT é necessário começar pelo erro de predição que pode ser escrito como:

$$\varepsilon^{\text{vd}}(t, \boldsymbol{\rho}) = u(t) - Q_d^{-1}(q)y(t) + C(q, \boldsymbol{\rho})y(t) \quad (137)$$

$$= [G^{-1}(q) + C(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] y(t) \quad (138)$$

$$= [Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] y(t), \quad (139)$$

onde (137) vem de substituir (127) e (131) em (132), enquanto que (138) usa a relação de malha aberta (3), por fim, (139) usa (38). Usando o Teorema 3.2 e o erro (139), a função custo do VDFT para dados filtrados através de um filtro $W(q)$ pode ser escrita no domínio da frequência como

$$V_{\text{vd}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega})|^2 |Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})|^2 \Phi_y(\omega) d\omega, \quad (140)$$

onde $\Phi_y(\omega)$ é o espectro de potência do sinal $y(t)$.

Comparando os custos (136) e (140), fica claro que o filtro que aproxima os seus mínimos é aquele para o qual

$$|W(e^{j\omega})|^2 = \frac{|Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 \Phi_d(\omega)}{|Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})|^2 \Phi_y(\omega)} \quad (141)$$

$$= \frac{|Q_d(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 \Phi_d(\omega)}{\Phi_y(\omega)} \quad (142)$$

$$\approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{\Phi_y(\omega)}, \quad (143)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ é o espectro do sinal de perturbação que se deseja rejeitar. Além disso, (143) usa a igualdade

$$Q_d(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) [Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})] = [Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})], \quad (144)$$

enquanto que a aproximação em (143) depende de $Q_d(e^{j\omega})$ e $Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})$ serem próximas ao redor do mínimo.

Um exemplo simples de implementação do VDFT pode ser visto através da Listagem A.6 presente no Apêndice A.

3.5 Violação da pertinência e o modelo de referência flexível

Quando métodos de controle baseados em dados são empregados, a violação da Suposição 2.4 pode implicar em um comportamento em malha fechada muito diferente do desejado, em alguns casos inclusive em instabilidade. Por isso é importante que aquela suposição seja violada somente o quanto for estritamente necessário. Em outras palavras, a diferença entre o controlador ótimo e o ideal deve ser mantida pequena.

Como pode ser visto através de (31) e (37), a pertinência do controlador depende do processo, da estrutura do controlador, e do modelo de referência. Muitas vezes, o projetista de controle não participa da construção do processo a ser controlado, e a escolha da estrutura do controlador empregado também lhe é vedada ou muito limitada. Desse

modo, para que a suposição de pertinência seja mantida, é preciso escolher bem o modelo de referência, mas para tanto é preciso algum conhecimento sobre o modelo do processo. Neste ponto é importante notar que, apesar deste ser um trabalho sobre métodos de controle baseados em dados, não se está assumindo que o comportamento do processo é completamente desconhecido. Pelo contrário, quanto mais informação estiver disponível sobre o processo, mais fácil será estimar os parâmetros do controlador, e melhor será esta estimativa (CAMPESTRINI et al., 2017).

Nesse sentido, já existem trabalhos que indicam como informações sobre o processo podem ser empregadas para escolher o modelo de referência, tanto para seguimento de referência (GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2019) quanto para rejeição de perturbação (BORDIGNON; CAMPESTRINI, 2018b). Ainda há outros casos em que o próprio método dá conta de ajustar o modelo de referência para que este não esteja tão distante do que pode ser alcançado com a estrutura de controle disponível. No caso de seguimento de referência, através da flexibilização da escolha do modelo referência (LECCHINI; GEVERS, 2002; CAMPESTRINI et al., 2011; NGUYEN; KANEKO; YAMAMOTO, 2013; GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2018; KUMAR; ZHANG; CHIU, 2020) ou, recentemente, através da identificação das instabilidades do processo (KERGUS et al., 2019). Também no caso de rejeição de perturbação, através do modelo de referência flexível (BORDIGNON; CAMPESTRINI, 2018a). Alguns resultados do presente trabalho são alinhados com este último assunto empregando um modelo de referência flexível para rejeição de perturbação de carga em sistemas monovariáveis (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2019) e estendendo a proposta para sistemas multivariáveis (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2020b).

Além disso, um dos principais problemas encontrados ao empregar controle com modelo de referência em um processo de fase não mínima é que, para que o controlador ideal seja estável, é preciso incluir os zeros instáveis do processo no modelo de referência. O problema é que, trabalhando com métodos baseados em dados, esse modelo é desconhecido. Portanto essa é uma grande motivação para utilizar o modelo de referência flexível, já que ele é capaz de identificar esses zeros instáveis juntamente com os parâmetros do controlador.

O modelo de referência flexível é definido como um operador de transferência parametrizado linearmente, de maneira similar àquela utilizada com o controlador em (19). Considere o caso do VDFT flexível de Bordignon e Campestrini (2018a), por exemplo. Nesse caso o modelo de referência flexível é dado por

$$Q_d(q, \eta) = \eta^T \gamma(q), \quad (145)$$

onde o modelo tem sua estrutura dada pelo vetor de operadores de transferência $\gamma(q)$ e é parametrizado pelo vetor de parâmetros η . Com isso, é possível resolver um problema de otimização iterativo em que cada iteração é dividida em dois passos: a estimativa dos parâmetros do controlador e, em seguida, do modelo de referência.

Observe que simplesmente substituir o modelo flexível (145) acima no custo do VDFT (133) resulta em uma função convexa com respeito aos parâmetros do controlador mas não convexa com respeito aos parâmetros do modelo de referência, por conta da sua inversa. Porém, isso pode ser remediado se o erro (132) for filtrado pelo modelo de referência, como sugerido por Bordignon e Campestrini (2018a). Nesse caso o erro de predição

filtrado do VDFT flexível é dado por

$$Q_d(q, \eta)\varepsilon^{vd}(t, \rho, \eta) = Q_d(q, \eta)u(t) + Q_d(q, \eta)C(q, \rho)y(t) - y(t) \quad (146)$$

$$= \eta^T \psi(t, \rho) - y(t) \quad (147)$$

$$= Q_d(q, \eta)\tilde{u}(t) - \rho^T \varphi_Q(t, \eta) \quad (148)$$

que agora é biafim com respeito aos parâmetros do controlador e aos parâmetros do modelo. Isso faz com que a função custo se torne biconvexa (biquadrática) em ρ e η :

$$V_{vd}(\rho, \eta) = \|Q_d(q, \eta)u(t) + Q_d(q, \eta)C(q, \rho)y(t) - y(t)\|_2^2. \quad (149)$$

Desse modo, muitas vezes é possível encontrar o mínimo da função custo através de uma busca convexa alternada (ACS¹), veja por exemplo o trabalho de Gorski, Pfeuffer e Klamroth (2007). Esse método busca pelo mínimo de uma função custo biconvexa resolvendo dois problemas de otimização convexos alternadamente:

$$\hat{\rho}^{[i]} = \arg \min_{\rho} V^{vd}(\rho, \eta^{[i-1]}) \quad (150)$$

$$\hat{\eta}^{[i]} = \arg \min_{\eta} V^{vd}(\hat{\rho}^{[i]}, \eta), \quad (151)$$

onde $[i]$ representa o número da iteração, e é preciso um valor inicial para $\eta^{[0]}$. Também é possível inverter a ordem, buscando primeiro pelos parâmetros do modelo de referência, onde será preciso um valor inicial para $\rho^{[0]}$. Como a função custo em (149) é biquadrática, cada uma das minimizações em (150) e (151) é realizada em um passo só. Observe ainda que, mesmo que a otimização seja realizada iterativamente, o método VDFT em si não é considerado um método baseado em dados iterativo, uma vez que emprega dados de um único experimento. Cabe ressaltar, por fim, que o modelo de referência flexível identificado pode ser utilizado para se ter uma ideia do comportamento de malha fechada esperado do sistema após o ajuste dos parâmetros do controlador.

Gorski, Pfeuffer e Klamroth (2007) mostram que, caso os parâmetros sejam restritos a um conjunto compacto, o ACS faz com que o valor de uma função custo biconvexa convirja monotonicamente para um valor mínimo. Entretanto não se pode garantir que os parâmetros em si convirjam para um valor único e, mesmo que isso ocorra, que esse será o mínimo global, uma vez que esse é um método de otimização local. Mesmo assim, essa técnica é de fácil implementação e foi usada com sucesso com modelos de referência flexíveis nos trabalhos mencionados no início dessa seção. Contudo, há muitas alternativas para resolver este tipo de problema, como o algoritmo de otimização global (GOP) de Floudas (2000) que é capaz de encontrar o mínimo global. Porém, nos exemplos encontrados até agora, foram obtidos bons resultados até mesmo através de uma otimização local com uma versão do algoritmo de Nelder-Mead proposta por Lagarias et al. (1998) e implementada pela função `fminsearch` do Matlab[®].

Exemplo 3.5. Considere mais uma vez os dados do Exemplo 3.4, porém agora considere que o ganho do modelo de referência é desconhecido, isto é,

$$Q_d(q, \eta) = \eta \frac{q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,6q^{-1})}. \quad (152)$$

¹ do inglês *Alternate Convex Search*.

Isso representa uma situação comum na qual o zero foi fixado em 1 para garantir a rejeição da perturbação e os polos para alcançar certo desempenho, deixando livre apenas o ganho do modelo de referência.

Nesse caso, foram empregadas apenas 100 das 1000 realizações do dado para estimar os parâmetros utilizando o VDFT flexível com duas soluções diferentes: a minimização direta da função custo, usando o algoritmo de Nelder-Mead através do comando `fminsearch`, inicializando na origem e com as configurações padrão; e a minimização alternada de duas funções quadráticas, usando 1000 iterações do ACS e VI, começando com $\eta^{[0]} = 1$. Os resultados são apresentados na Tabela 7, onde é possível perceber que o algoritmo

Tabela 7 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 3.5

Parâmetro	ideal	ESTIMATIVAS	
		ACS e VI ^a	Nelder-Mead ^b
ρ_1	0,8000	0,7989 ($\pm 0,0114$)	0,7902 ($\pm 0,0111$)
ρ_2	-0,7200	-0,7190 ($\pm 0,0105$)	-0,7109 ($\pm 0,0103$)
η	0,5000	0,5006 ($\pm 0,0057$)	0,5043 ($\pm 0,0057$)

^a inicializado com $\eta^{[0]} = 1$.

^b inicializado com $\rho^{[0]} = \mathbf{0}$ e $\eta^{[0]} = 0$.

ACS obteve melhores resultados em termos de polarização, mas o desvio padrão das estimativas para um mesmo parâmetro é semelhante. A polarização da estimativa obtida com a otimização não convexa se deve ao fato de que essa estimativa não usa VI para tratar do ruído. Não fosse por esse ruído, seria mais interessante usar a otimização não convexa pela sua velocidade. De fato, o algoritmo de Nelder-Mead geralmente converge mais rapidamente que o ACS e pode ser utilizado para inicializar este último. \diamond

Aqui também se pode empregar um filtro caso a Suposição 2.4 não possa ser alcançada e este filtro é o mesmo do VDFT apresentado anteriormente. Porém, nesse caso, há um pequeno detalhe: como o filtro depende do modelo de referência, é preciso que ele seja atualizado em cada iteração. Infelizmente, isso aumenta o tempo de computação e diminui as chances de convergência, uma vez que o formato da curva da função custo é modificado a cada iteração.

Exemplos simples de implementação do VDFT com modelo de referência flexível e otimização iterativa com algoritmo de Nelder-Mead e com algoritmo ACS podem ser encontrados, respectivamente, nas listagens A.7 e A.8 dentro do Apêndice A.

3.6 Considerações finais

Nesse capítulo foram introduzidos alguns conceitos de controle baseado em dados por modelo de referência através da revisão de alguns métodos da literatura. Aqui foi enfatizado o conceito de métodos de controle baseado em dados não iterativos, que usam uma única batelada de dados para ajustar o controlador, e por que isso é interessante. Além disso, foram apresentados exemplos de identificação de controladores para seguimento de referência (VRFT e NCbT) e rejeição de perturbação (VDFT), usando sinais virtuais, abordagens LS, VI e de correlação apresentadas no capítulo anterior. Por fim, com respeito

à violação da pertinência, foi demonstrado o uso de uma técnica de pré-filtragem dos dados para aproximar o mínimo da função custo a ser otimizada do mínimo da função custo da resposta do modelo de referência. Com respeito a esse último assunto, também foi mostrado como é possível flexibilizar o modelo de referência para facilitar a pertinência do controlador. Ainda assim, quando o controlador ideal está muito distante do que pode ser alcançado com a estrutura de parametrização disponível, ou mesmo quando o modelo de referência não pode ser bem escolhido, o controlador identificado pode resultar em uma malha fechada internamente instável. Por isso é importante certificar esse controlador antes de inseri-lo na malha, mas esse é um assunto que vai ficar reservado para o Capítulo 5. Enquanto isso, o próximo capítulo usa alguns dos conceitos apresentados aqui para propor um método baseado em dados não iterativo para o ajuste de um controlador com vistas à rejeição ou atenuação de perturbações de carga.

4 PROPOSTA DE MÉTODO BASEADO EM DADOS PARA REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO DE CARGA

O objetivo deste capítulo é apresentar o método baseado em dados proposto para rejeição de perturbação. Este método utiliza uma única batelada de dados para ajustar os parâmetros de um controlador de realimentação visando obter um comportamento em malha fechada próximo ao comportamento de um modelo de referência. Este modelo de referência, por sua vez, representa o comportamento desejado da função de sensibilidade a perturbação de carga do sistema em malha fechada. Isso permite alcançar um comportamento de atenuação ou mesmo rejeição de perturbações de carga em regime.

Visando facilitar a compreensão do método, o desenvolvimento do mesmo foi dividido em algumas seções, em que cada seção amplia ou complementa as ideias apresentadas nas seções anteriores, permitindo formar uma visão completa do método até o final do capítulo. Desse modo, os seguintes tópicos serão apresentados:

- a) ajuste de controlador parametrizado linearmente com modelo de referência fixo para rejeição de perturbação em sistemas monovariáveis;
- b) extensão para utilização de modelo de referência flexível;
- c) ajuste de controlador multivariável cujos elementos são linearmente parametrizados para rejeição de perturbação com modelo de referência fixo ou flexível;
- d) ajuste dos parâmetros do numerador e denominador de controlador monovariável (parametrização não linear) para rejeição de perturbação com modelo de referência fixo.

4.1 Controlador monovariável com parametrização linear

Assim como o método NCbT para seguimento de referência, aqui é proposto um novo método com vistas à resposta a uma perturbação de carga (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2019), batizado de *disturbance correlation-based tuning* (DCbT). Esse método emprega a ideia de utilizar diretamente os dados de um experimento em conjunto com a abordagem de correlação para ajustar o controlador, fazendo com que a resposta à perturbação se assemelhe à resposta de um modelo de referência desejado. Ainda de maneira similar ao NCbT, primeiramente é preciso escolher uma variável de erro compatível com o método da correlação.

4.1.1 Propriedades desejáveis do erro

Antes de mais nada, convém definir quais são as características necessárias à variável de erro para que possa ser utilizada com a abordagem de correlação. Essa variável de erro deve possuir as seguintes propriedades:

- a) **pode ser calculada a partir dos dados, sem o modelo do processo.** Métodos de controle baseado em dados não empregam diretamente o modelo do processo, por isso esse modelo supostamente não está disponível. Ao invés disso, um experimento é conduzido sobre o processo em malha aberta ou fechada para coletar dados que possuem informação implícita sobre o processo. Por isso é preciso que a variável de erro a ser empregada possa ser obtida a partir desses dados e de informações sobre o problema, como o modelo de referência desejado e a estrutura do controlador;
- b) **deve depender dos parâmetros, idealmente de maneira afim.** Como o controle baseado em dados estima os melhores parâmetros para o controlador através da otimização de uma função da variável de erro, é preciso que essa variável seja também uma função dos parâmetros. Assim, os parâmetros do controlador serão as variáveis do problema de otimização. Além disso, como o custo em geral é uma função quadrática do erro, se este for afim com respeito aos parâmetros do controlador, o custo será convexo, facilitando a otimização e muitas vezes permitindo encontrar a solução em um único passo, de maneira analítica;
- c) **deve ser descorrelacionada do sinal de entrada do experimento quando calculada para os parâmetros ideais.** Porque este método é baseado na abordagem de correlação, o custo é justamente uma norma da correlação entre a variável de erro e o sinal de excitação que foi empregado no experimento para coleta de dados. Por conta disso, é esperado que o custo seja zero se os parâmetros do controlador ideal forem empregados e cresça conforme eles se distanciam desse ponto ideal.

As características acima são apresentadas primeiramente aqui nessa seção sobre o ajuste de um controlador monovariável com parametrização linear, mas também serão características desejáveis para todas as variáveis de erro empregadas na abordagem de correlação para o ajuste dos outros controladores neste capítulo.

4.1.2 Obtenção da variável de erro monovariável

Para obter uma expressão para uma variável de erro com as características acima, primeiramente observe que a resposta **em malha fechada** $y(t, \rho)$ com um controlador qualquer $C(q, \rho)$ a uma perturbação $d(t)$ é dada por

$$y(t, \rho) = Q(q, \rho)d(t) + S(q, \rho)v(t) \quad (153)$$

$$= S(q, \rho) [G(q)d(t) + v(t)] \quad (154)$$

onde (153) vem diretamente de (7) com referência nula, enquanto que (154) usa a relação $Q(q, \rho) = S(q, \rho)G(q)$.

Agora, considere que dados $u(t)$ e $y(t)$ de um experimento **em malha aberta** estão disponíveis. Por fim, suponha que deseja-se simular a resposta do sistema em malha fechada (154) com um controlador qualquer a uma perturbação idêntica ao sinal de excitação do experimento em malha aberta. Ou seja, deseja-se calcular o sinal de malha

fechada simulado $y(t, \rho)$ gerado como resposta à perturbação $d(t) = u(t)$, usando os dados de malha aberta para tanto. Nesse caso,

$$y(t, \rho) = S(q, \rho) [G(q)u(t) + v(t)] \quad (155)$$

$$= S(q, \rho)y(t), \quad (156)$$

onde (155) apenas substitui a perturbação em (154) pela excitação, enquanto que (156) usa a relação de malha aberta (3), considerando que o ruído da simulação também é o mesmo dos dados. Ou seja, $y(t, \rho)$ acima é uma resposta **simulada** de malha fechada, enquanto que $u(t)$ e $y(t)$ são sinais coletados do experimento em malha aberta. Ignore momentaneamente o fato de que supostamente $G(q)$ e, conseqüentemente, $S(q, \rho)$ não são conhecidas.

Da saída simulada (156) acima, define-se o seguinte sinal de erro entre a resposta do modelo de referência e a resposta simulada:

$$\varepsilon_d(t, \rho) = Q_d(q)d(t) - y(t, \rho) \quad (157)$$

$$= Q_d(q)u(t) - S(q, \rho)y(t) \quad (158)$$

$$= [Q_d(q) - Q(q, \rho)] u(t) - S(q, \rho)v(t), \quad (159)$$

para um vetor de parâmetros ρ arbitrário, onde (158) foi obtido substituindo (156) em (157) e a perturbação pela excitação, enquanto que (159) vem de substituir (153) em (157) e, novamente, a perturbação pela excitação. É fácil mostrar que (159) se torna apenas ruído filtrado quando calculado para os parâmetros ideais:

$$\varepsilon_d(t, \rho^*) = -S(q, \rho^*)v(t), \quad (160)$$

portanto, decorrelacionado do sinal de excitação do experimento pela Suposição 2.3. Por outro lado, na ausência de ruído, esse sinal de erro se torna:

$$\varepsilon_d(t, \rho) \Big|_{v(t) \equiv 0} = [Q_d(q) - Q(q, \rho)] u(t), \quad (161)$$

o que faz com que seja identicamente nulo se calculado para os parâmetros ideais, considerando um sinal de excitação arbitrário (a propriedade c, desejável para a variável de erro). Porém, o erro (157) a (159) não pode ser obtido a partir dos dados e não é afim nos parâmetros do controlador, que aparecem no denominador de $S(q, \rho)$, mesmo se o controlador for linearmente parametrizado (propriedades a e b).

No entanto, considere o seguinte sinal de erro, definido como o erro (159) filtrado pela inversa da função de sensibilidade obtida com o parâmetro arbitrário:

$$\varepsilon_s(t, \rho) = S^{-1}(q, \rho)\varepsilon_d(t, \rho) \quad (162)$$

$$= [1 + G(q)C(q, \rho)] Q_d(q)u(t) - y(t) \quad (163)$$

$$= Q_d(q)u(t) + C(q, \rho)Q_d(q)G(q)u(t) - y(t) + C(q, \rho)Q_d(q)v(t) - C(q, \rho)Q_d(q)v(t) \quad (164)$$

$$= Q_d(q)u(t) + [C(q, \rho)Q_d(q) - 1] y(t) - C(q, \rho)Q_d(q)v(t), \quad (165)$$

onde (163) vem de substituir $S^{-1}(q, \rho) = [1 + G(q)C(q, \rho)]$ e (158) em (162), enquanto que (164) apenas soma e subtrai $C(q, \rho)Q_d(q)v(t)$. Já (165) usa (3) e agrupa os termos. Observe que (165), sendo produzido pelo erro (159) filtrado, também será decorrelacionado do sinal de excitação apenas quando calculado para os parâmetros ideais (propriedade c).

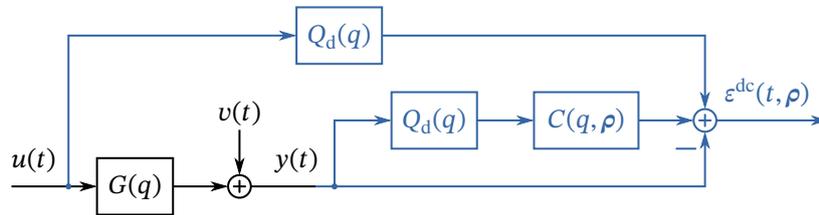
Além disso, é afim com respeito aos parâmetros do controlador se este for linearmente parametrizado (propriedade b). Porém, apesar de não depender do conhecimento de $G(q)$ diretamente, esse erro ainda não pode ser obtido a partir dos dados (propriedade a), devido ao termo de ruído bem à direita de (165).

Contudo, observe que aquele termo adicional de ruído não contribui para a correlação com o sinal de excitação do experimento, de modo que pode ser removido sem prejuízo para o método. Assim, a primeira variável de erro proposta neste trabalho para ajuste de controladores monovariáveis com vistas à rejeição de perturbação é dada por:

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho) = Q_d(q)u(t) - [1 - C(q, \rho)Q_d(q)]y(t), \quad (166)$$

que nada mais é do que (165) sem o termo de ruído adicional e com um ajuste de sinal. Essa variável de erro está ilustrada na Figura 6. Além disso, não custa lembrar que $u(t)$ e

Figura 6 — diagrama de blocos com o erro de dados de malha aberta.



Os sinais reais coletados durante o experimento são desenhados em preto, os sinais calculados, em azul.

Fonte: produzido pelo autor.

$y(t)$ são sinais coletados durante um experimento em malha aberta, $Q_d(q)$ é o modelo de referência e ρ é o vetor de parâmetros arbitrário para o qual o erro foi calculado.

É fácil perceber que o sinal de erro em (166) atende às propriedades a e b. A propriedade c também é atendida conforme o seguinte lema.

Lema 4.1. *Quando as Suposições 2.3 e 2.4 são atendidas, o vetor de parâmetros ideal descorrelaciona o erro (166) da entrada do experimento em malha aberta.*

Prova. Da discussão acima, substituindo (159) no erro proposto, claramente

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho) = S^{-1}(q, \rho)\varepsilon_d(t, \rho) + C(q, \rho)Q_d(q)v(t) \quad (167)$$

$$= S^{-1}(q, \rho)[Q_d(q) - Q(q, \rho)]u(t) + [C(q, \rho)Q_d(q) - 1]v(t), \quad (168)$$

donde, se forem empregados dados sem ruído,

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho) \Big|_{v(t)=0} = S^{-1}(q, \rho)[Q_d(q) - Q(q, \rho)]u(t), \quad (169)$$

que é identicamente zero se for empregado o vetor de parâmetros ideal. Por outro lado, se os dados forem ruidosos, o erro proposto calculado para os parâmetros ideais resulta em

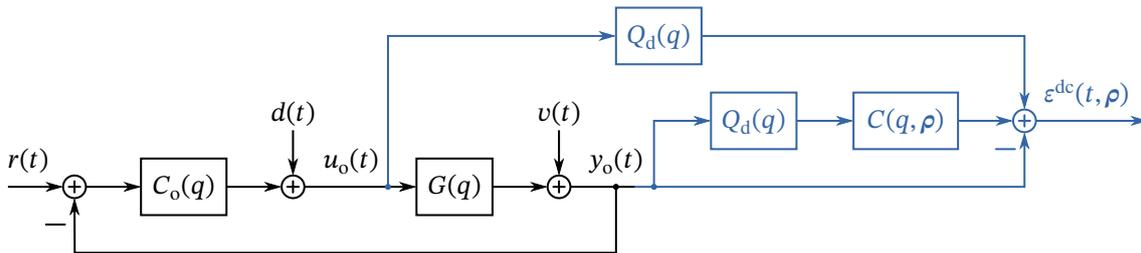
$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho^*) = [C(q, \rho^*)Q_d(q) - 1]v(t) \quad (170)$$

$$= -S(q, \rho^*)v(t) \quad (171)$$

que é apenas ruído filtrado e, portanto, descorrelacionado do sinal de excitação empregado no experimento por conta da Suposição 2.3. ■

Como mostrado mais acima, o sinal de erro proposto pode ser obtido a partir dos dados de malha aberta e é afim com respeito aos parâmetros do controlador (propriedades a e b). Além disso, o Lema 4.1 mostra que o sinal de erro proposto é decorrelacionado do sinal de excitação quando calculado para os parâmetros ideais (propriedade c). Como o erro proposto possui todas as três propriedades, ele pode ser usado na abordagem de correlação para ajustar os parâmetros do controlador usando dados de malha aberta. Porém, esse mesmo erro também pode ser empregado com dados de malha fechada em um experimento com excitação pela referência ou pela entrada de perturbação (somada ao sinal de controle). A obtenção dessa variável de erro é ilustrada na Figura 7. Observe que, independentemente

Figura 7 — diagrama de blocos com o erro de dados de malha fechada.



Os sinais reais coletados durante o experimento são desenhados em preto, os sinais calculados, em azul.

Fonte: produzido pelo autor.

do tipo de experimento, as propriedades a e b se mantêm, a propriedade c restante é demonstrada pelo seguinte lema.

Lema 4.2. *Quando as Suposições 2.3 e 2.4 são atendidas, o vetor de parâmetros ideal decorrelaciona o erro (166) da entrada do experimento em malha fechada.*

Prova. Em um experimento em malha fechada com um controlador inicial $C_o(q)$, o sistema é excitado através de uma das entradas: de referência $r(t)$, ou de perturbação $d(t)$. Dessa maneira, os sinais coletados serão:

$$u_o(t) = G^{-1}(q)T_o(q)r(t) + S_o(q)d(t) - C_o(q)S_o(q)v(t) \quad (172)$$

$$y_o(t) = G(q)G^{-1}(q)T_o(q)r(t) + G(q)S_o(q)d(t) + S_o(q)v(t), \quad (173)$$

obtidos após a substituição do controlador original em (7) e (8), indicada pelo subscrito “o”. Note que alguns termos serão zero, dependendo do tipo de excitação e da presença de ruído. Substituindo (172) e (173) diretamente em (166), obtém-se a seguinte expressão para o erro calculado com dados de malha fechada:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho) &= [Q_d(q) + Q_d(q)C(q, \rho)G(q) - G(q)] [G^{-1}(q)T_o(q)r(t) + S_o(q)d(t)] \\ &\quad - [Q_d(q)C_o(q) + 1 - Q_d(q)C(q, \rho)] S_o(q)v(t) \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} &= S^{-1}(q, \rho) [Q_d(q) - Q(q, \rho)] [G^{-1}(q)T_o(q)r(t) + S_o(q)d(t)] \\ &\quad - [Q_d(q)C_o(q) + 1 - Q_d(q)C(q, \rho)] S_o(q)v(t), \end{aligned} \quad (175)$$

onde (175) simplesmente deixa $S^{-1}(q, \rho)$ em evidência.

Com isso, se forem empregados dados sem ruído, o erro se torna:

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho) \Big|_{v(t) \equiv 0} = S^{-1}(q, \rho) [Q_d(q) - Q(q, \rho)] [G^{-1}(q)T_o(q)r(t) + S_o(q)d(t)], \quad (176)$$

que será identicamente zero se calculado para os parâmetros ideais, independentemente da origem da excitação. Por outro lado, se forem empregados dados ruidosos, o erro calculado para os parâmetros ideais resulta em:

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}^*) = - [Q_d(q)C_o(q) + 1 - Q_d(q)C(q, \boldsymbol{\rho}^*)] S_o(q)v(t) \quad (177)$$

$$= - [S(q, \boldsymbol{\rho}^*)G(q)C_o(q) + 1 - T(q, \boldsymbol{\rho}^*)] S_o(q)v(t) \quad (178)$$

$$= -S(q, \boldsymbol{\rho}^*) [G(q)C_o(q) + 1] S_o(q)v(t) \quad (179)$$

$$= -S(q, \boldsymbol{\rho}^*)v(t), \quad (180)$$

que é apenas ruído filtrado e, portanto, descorrelacionado da entrada do experimento de acordo com a Suposição 2.3. ■

Observação 4.1. Os equacionamentos da síntese e da análise da variável de erro desta seção foram desenvolvidos considerando sistemas monovariáveis. Portanto, muitas das comutações empregadas livremente nas multiplicações não são válidas para sistemas multivariáveis. Entretanto, uma variável de erro com as mesmas propriedades pode ser facilmente obtida para ser empregada em sistemas multivariáveis a partir da variável descrita acima, como será apresentado na Seção 4.3.

Observação 4.2. A obtenção da variável de erro do DCbT através de (157) a (166) usou ideias semelhantes às empregadas no NCbT da literatura, que resultam em um equacionamento um pouco intrincado. Por outro lado, é muito mais simples notar que

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}) = Q_d(q)\varepsilon^{\text{vd}}(t, \boldsymbol{\rho}), \quad (181)$$

de (137) e (166). Essa ideia será melhor aproveitada mais adiante na Seção 4.4 para ajustar controladores com parâmetros no denominador.

4.1.3 Estimação dos parâmetros

Uma vez que a variável de erro fica descorrelacionada da entrada do experimento se calculada com os parâmetros ideais, uma maneira de estimá-los é buscar pelo vetor de parâmetros que minimiza a seguinte função, análoga a (115):

$$V_{\text{dc}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\zeta}(t) \right\|_2^2, \quad (182)$$

onde $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$ é o vetor de instrumentos. Esse vetor é formado a partir de amostras do sinal de entrada do experimento de seguinte forma:

$$\boldsymbol{\zeta}^{\text{T}}(t) = [u(t + \ell) \quad u(t + \ell - 1) \quad \cdots \quad u(t) \quad \cdots \quad u(t - \ell + 1) \quad u(t - \ell)], \quad (183)$$

para dados de malha aberta, ou:

$$\boldsymbol{\zeta}^{\text{T}}(t) = [r(t + \ell) \quad r(t + \ell - 1) \quad \cdots \quad r(t) \quad \cdots \quad r(t - \ell + 1) \quad r(t - \ell)], \quad (184)$$

para dados de malha fechada com excitação pela entrada de referência, ou ainda:

$$\boldsymbol{\zeta}^{\text{T}}(t) = [d(t + \ell) \quad d(t + \ell - 1) \quad \cdots \quad d(t) \quad \cdots \quad d(t - \ell + 1) \quad d(t - \ell)], \quad (185)$$

para dados de malha fechada com excitação pela entrada de perturbação, enquanto que ℓ é um parâmetro de projeto que representa o número máximo de deslocamentos a considerar.

Teorema 4.1. *Sob as Suposições 2.3 e 2.4 e se o controlador for linearmente parametrizado, o vetor de parâmetros ideal pode ser estimado por*

$$\hat{\rho} = \left[\mathbf{X}_Q^T \mathbf{X}_Q \right]^{-1} \left[\mathbf{X}_Q^T \xi_Q \right], \quad (186)$$

com

$$\mathbf{X}_Q = \sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi_Q^T(t), \quad \xi_Q = \sum_{t=1}^N \zeta(t) \tilde{u}_Q(t),$$

$$\varphi_Q(t) = -\beta(q) Q_d(q) y(t), \quad \tilde{u}_Q(t) = Q_d(q) u(t) - y(t).$$

Prova. Observe que, se o controlador for linearmente parametrizado, a variável de erro (166) pode ser escrita como

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \rho) = Q_d(q) u(t) - y(t) + \rho^T \beta(q) Q_d(q) y(t) \quad (187)$$

$$= \tilde{u}_Q(t) - \varphi_Q^T(t) \rho, \quad (188)$$

substituindo (19) em (166). A expressão em (188) é afim com respeito aos parâmetros, fazendo com que (182) seja convexa. Desse modo, substituindo (188) em (182), derivando com respeito aos parâmetros, igualando a zero e resolvendo para os parâmetros resulta na estimativa dada em (186). ■

Note que sob a Suposição 2.4 a estimativa em (186) converge assintoticamente para o vetor de parâmetros ideal, mesmo na presença de ruído, uma vez que a estimativa por correlação é consistente. Por outro lado, se não houver ruído, essa estimativa converge imediatamente após poucas amostras, uma vez que o parâmetro ideal é o único que fará com que o custo seja identicamente zero por conta de (169) ou (176) e sob a Suposição 2.4.

Exemplo 4.1. Considere mais uma vez o processo e o modelo de referência do Exemplo 3.4, que implicam que o controlador ideal também será o mesmo que em (135). Todos são reproduzidos novamente abaixo por conveniência:

$$G(q) = \frac{0,5q^{-1}}{1 - 0,9q^{-1}},$$

$$Q_d(q) = \frac{0,5q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,6q^{-1})},$$

$$C^*(q) = \frac{0,8 - 0,72q^{-1}}{1 - q^{-1}}.$$

Novamente foram simulados 1000 experimentos em malha aberta, em cada um dos quais o processo foi excitado com 4 períodos de uma onda quadrada com níveis 0 e 1 e período de 100 amostras, totalizando 400 amostras. Porém, dessa vez o sinal de saída coletado foi contaminado com ruído branco com média zero e desvio padrão $\sigma = 1,0$. Os resultados das estimativas obtidas com o método proposto, usando $\ell = 25$, e com o VDFT e VI são apresentados na Tabela 8. Observe que, usando os mesmos dados, tanto o método proposto quanto o da literatura obtiveram estimativas com polarização semelhante. Entretanto o desvio padrão da estimativa obtida com o DCbT é mais de três vezes menor que a estimativa obtida com o VDFT. Isso se deve, em partes, ao fato de que, usando $\ell = 25$, o vetor de instrumentos que foi utilizado no DCbT tem 51 elementos, dimensão muito maior que o vetor de VI do VDFT, com apenas 2 elementos. É fato conhecido das abordagens de correlação que uma variável instrumental maior reduz a variância da estimativa. ◇

Tabela 8 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 4.1

ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS	
		DCbT ^a	VDFT e VI ^b
ρ_1	0,8000	0,7998 ($\pm 0,0076$)	0,8003 ($\pm 0,0254$)
ρ_2	-0,7200	-0,7198 ($\pm 0,0077$)	-0,7203 ($\pm 0,0255$)

^a estimados através de (186).

^b estimados através de (130).

4.1.4 Filtro para violação da pertinência

De maneira similar aos outros métodos descritos, a função custo do DCbT em (182) é diferente da função custo da resposta do modelo de referência em (40). Quando a Suposição 2.4 é garantida e uma quantidade razoável de dados é empregada, os mínimos das duas funções ficam próximos, como demonstrado no Exemplo 4.1. Porém, quando a pertinência não é muito violada, ainda é possível fazer com que os dois mínimos fiquem próximos através da pré-filtragem dos dados. Isso fará com que seja possível identificar um vetor de parâmetros ótimos que resulta em um comportamento próximo do desejado. Para ver como isso é possível, observe os seguintes teoremas, iniciando pelo experimento em malha aberta.

Teorema 4.2. *Quando empregados dados de malha aberta, o filtro que fará com que a função custo de correlação (182) seja assintoticamente idêntica à função custo de resposta do modelo de referência (40) é tal que:*

$$|W(e^{j\omega})|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yu}(\omega)|^2}, \quad (189)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ é o espectro da perturbação que se deseja rejeitar e $\Phi_{yu}(\omega)$ é o espectro cruzado entre a saída e a entrada do experimento.

Prova. Usando o Teorema de Parseval para sinais de tempo discreto, a função custo da correlação (182) usando dados de malha aberta pré-filtrados por um filtro $W(q)$ pode ser escrita no domínio da frequência como:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow \infty}} V_{dc}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|W(e^{j\omega})|^2 |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_u^2(\omega)}{|S(e^{j\omega}, \rho)|^2} d\omega \quad (190)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|W(e^{j\omega})|^2 |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 |\Phi_{yu}(\omega)|^2}{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2} d\omega, \quad (191)$$

onde (190) foi obtida usando (168) e onde $\Phi_u(\omega)$ é o sinal de excitação. Além disso, a igualdade em (191) usa a relação $\Phi_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega})\Phi_u(\omega)$. Uma comparação entre (191) e (136) indica que o filtro em (189) é o que fará com que as duas funções se aproximem assintoticamente conforme mais dados forem usados. ■

Corolário 4.1. O filtro em (189) pode ser aproximado por

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yu}(\omega)|^2}, \quad (192)$$

desde que a aproximação $Q(q, \rho^*) \approx Q_d(q)$ seja válida. Ou seja, desde que a Suposição 2.4 não seja muito violada.

Corolário 4.2. Se o espectro do sinal de excitação do experimento em malha aberta puder ser escolhido idêntico ao espectro do sinal de perturbação a ser rejeitado, o filtro em (192) ainda pode ser simplificado como

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega)}{|\Phi_{yu}(\omega)|^2} \quad (193)$$

$$= \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2}{|G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega)} \quad (194)$$

$$\approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2}{\Phi_y(\omega)}, \quad (195)$$

onde $\Phi_y(\omega)$ é o espectro do sinal de saída do experimento e a aproximação em (195) depende de uma boa relação sinal-ruído.

O caso de dados de um experimento em malha fechada com excitação pela referência é tratado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.3. Se forem empregados dados de malha fechada com excitação pela referência, o filtro que fará com que a função custo de correlação (182) seja assintoticamente idêntica à função custo de resposta do modelo de referência (40) é tal que:

$$|W(e^{j\omega})|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yr}(\omega)|^2}, \quad (196)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ é o espectro da perturbação que se deseja rejeitar e $\Phi_{yr}(\omega)$ é o espectro cruzado entre a saída e a entrada de referência do experimento.

Prova. Se forem usados dados de malha fechada com excitação pela referência, a função custo no domínio da frequência fica:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow \infty}} V_{dc}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|W(e^{j\omega})|^2 |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 |T_o(e^{j\omega})|^2 \Phi_r^2(\omega)}{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2} d\omega \quad (197)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|W(e^{j\omega})|^2 |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 |\Phi_{yr}(\omega)|^2}{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2} d\omega, \quad (198)$$

onde (197) vem de (175), enquanto que (198) usa a relação $\Phi_{yr}(\omega) = T_o(e^{j\omega})\Phi_r(\omega)$, válida para a malha fechada do experimento. Novamente, uma comparação entre o custo da correlação (198) e o custo da resposta do modelo de referência (136) revela que o filtro em (196) é o que fará com que os dois custos se aproximem assintoticamente conforme a quantidade de dados empregados aumenta. ■

Corolário 4.3. *O filtro em (196) pode ser aproximado por*

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yr}(\omega)|^2}, \quad (199)$$

contanto que a aproximação $Q(q, \rho^) \approx Q_d(q)$ seja válida. Ou seja, a Suposição 2.4 da pertinência do controlador ideal seja pouco violada.*

Corolário 4.4. *Se o espectro do sinal de referência que excita o experimento em malha fechada puder ser escolhido idêntico ao espectro do sinal de perturbação a ser rejeitado, o filtro em (199) ainda pode ser simplificado como*

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_r(\omega)}{|\Phi_{yr}(\omega)|^2} \quad (200)$$

$$= \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2}{|T_o(e^{j\omega})|^2 \Phi_r(\omega)} \quad (201)$$

$$\approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2}{\Phi_y(\omega)}, \quad (202)$$

onde $\Phi_y(\omega)$ é o espectro do sinal de saída do experimento e a aproximação em (202) depende de uma boa relação sinal-ruído.

Finalmente, quando os dados vêm de um experimento em malha fechada com excitação pela entrada de perturbação, o filtro para compensar a violação da pertinência é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.4. *No caso em que os dados foram coletados em malha fechada com excitação pela perturbação, o filtro que fará com que a função custo de correlação (182) seja assintoticamente idêntica ao custo de resposta do modelo de referência (40) é tal que:*

$$|W(e^{j\omega})|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yd}(\omega)|^2}, \quad (203)$$

*onde $\Phi_d(\omega)$ é o espectro da perturbação **que se deseja rejeitar** e $\Phi_{yd}(\omega)$ é o espectro cruzado entre a saída e a entrada de perturbação **do experimento**.*

Prova. Se forem usados dados de malha fechada com excitação pela entrada de perturbação, a função custo no domínio da frequência fica:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow \infty}} V_{dc}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|W(e^{j\omega})|^2 |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 |S_o(e^{j\omega})|^2 \Phi_d^2(\omega)}{|S(e^{j\omega}, \rho)|^2} d\omega \quad (204)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|W(e^{j\omega})|^2 |Q_d(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_{yd}(\omega)^2}{|Q(e^{j\omega}, \rho)|^2} d\omega, \quad (205)$$

onde (204) vem de (175), enquanto que (205) usa a relação $\Phi_{yd}(\omega) = S_o(e^{j\omega})G(e^{j\omega})\Phi_d(\omega)$, válida para a malha fechada do experimento. Mais uma vez, uma comparação entre o custo da correlação (205) e o custo da resposta do modelo de referência (136) revela que o filtro em (203) é o que fará com que esses dois custos se aproximem assintoticamente conforme a quantidade de dados empregados aumenta. ■

Corolário 4.5. *O filtro em (203) pode ser aproximado por*

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yd}(\omega)|^2}, \quad (206)$$

contanto que a aproximação $Q(q, \rho^*) \approx Q_d(q)$ seja válida. Ou seja, contanto que a violação da Suposição 2.4 seja pequena.

Corolário 4.6. *Se o espectro do sinal de perturbação que excita o experimento em malha fechada puder ser escolhido idêntico ao espectro do sinal de perturbação a ser rejeitado, o filtro em (206) ainda pode ser simplificado como*

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2}{|Q_o(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)} \quad (207)$$

$$\approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})|^2}{\Phi_y(\omega)}, \quad (208)$$

onde $\Phi_y(\omega)$ é o espectro do sinal de saída do experimento e a aproximação em (208) é válida contanto que a relação sinal-ruído seja boa.

Observe que todas as quantidades envolvidas nas aproximações (192), (195), (199), (202), (206) e (208) estão disponíveis diretamente do problema que se deseja solucionar ou podem ser estimadas a partir dos dados. Além disso, note que o vetor de parâmetros estimado quando a Suposição 2.4 for violada não será o ideal, mas será ótimo com respeito à função custo de resposta a perturbação, contanto que seja empregado o filtro correto.

Uma implementação simples do método DCbT proposto para ajuste de controlador SISO linearmente parametrizado para rejeição de perturbação pode ser encontrada na Listagem A.9 no Apêndice A.

4.2 Modelo de referência flexível

Como mencionado antes, o bom desempenho dos métodos de controle diretos baseados em dados por modelo de referência depende de uma boa escolha desse modelo para que a violação da suposição de pertinência seja pequena. Até mesmo quando a violação da Suposição 2.4 for compensada com um filtro, a utilidade do próprio filtro dependerá de que a violação da pertinência seja moderada, por conta da aproximação envolvida. O problema é que a escolha do modelo de referência não é uma tarefa trivial, pois depende de certo conhecimento sobre o processo que pode não estar disponível. Uma maneira de amenizar esse problema é a utilização de um modelo de referência flexível, como apresentado na Seção 3.5. Desse modo, o objetivo dessa seção é apresentar a formulação do DCbT monovariável utilizando um modelo de referência flexível para que não fique muito distante do que pode ser alcançado com a estrutura de controle disponível.

4.2.1 Variável de erro flexível

Como mostrado em (181), o erro do DCbT pode ser obtido diretamente a partir do erro do VDFT filtrado pelo modelo de referência. Como essa filtragem já era parte da proposta de Bordignon e Campestrini (2018a) apresentada na Seção 3.5, a variável de erro que será empregada no método flexível é a mesma de (146) a (148), reescritas abaixo com a notação desse capítulo:

$$\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = Q_d(q, \boldsymbol{\eta})u(t) + Q_d(q, \boldsymbol{\eta})C(q, \boldsymbol{\rho})y(t) - y(t) \quad (209)$$

$$= \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\rho}) - y(t) \quad (210)$$

$$= \tilde{u}_Q(t, \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\rho}^\top \boldsymbol{\varphi}_Q(t, \boldsymbol{\eta}), \quad (211)$$

lembrando que o modelo de referência flexível é linearmente parametrizado, ou seja,

$$Q_d(q, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{\gamma}(q), \quad (212)$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor de parâmetros e $\boldsymbol{\gamma}(q)$ é um vetor de operadores de transferência que representa a parametrização do modelo de referência. Além disso,

$$\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\gamma}(q) [u(t) + C(q, \boldsymbol{\rho})y(t)] \quad (213)$$

é o vetor de regressores para a identificação dos parâmetros do modelo de referência, enquanto que

$$\boldsymbol{\varphi}_Q(t, \boldsymbol{\eta}) = -\boldsymbol{\beta}(q)Q_d(q, \boldsymbol{\eta})y(t) \quad (214)$$

é o vetor de regressores para a identificação dos parâmetros do controlador. Por fim,

$$\tilde{u}_Q(t, \boldsymbol{\eta}) = Q_d(q, \boldsymbol{\eta})u(t) - y(t) \quad (215)$$

é o sinal de controle virtual.

Observe de (210) que o erro proposto é afim com respeito aos parâmetros do modelo de referência flexível. Além disso, de (211) o erro proposto também é afim com respeito aos parâmetros do controlador. Como o modelo de referência e o controlador são parametrizados independentemente, o erro proposto é biafim com respeito aos parâmetros. Além disso, como a função custo da correlação é quadrática com respeito à variável de erro, esse custo é biquadrático com respeito aos parâmetros, o que facilita a otimização como demonstrado a seguir.

4.2.2 Estimação dos parâmetros

A solução da otimização pode ser encontrada usando o algoritmo ACS, como anteriormente. A diferença é que ao invés de minimizar a norma de (209), aqui é minimizada a correlação entre o erro e a entrada do experimento:

$$V_{\text{dc}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\zeta}(t) \right\|_2^2. \quad (216)$$

Lembrando que esse é um algoritmo de otimização iterativo para busca de um mínimo local de uma função biconvexa.

Observe que para um modelo de referência fixo, isto é, um vetor η fixo, a função custo (216) é dada por

$$V_{dc}(\rho, \eta) = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \zeta(t) \tilde{u}_Q(t) - \sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi_Q(t) \rho \right\|_2^2 \quad (217)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \xi_Q(\eta) - \mathbf{X}_Q(\eta) \rho \right\|_2^2 \quad (218)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[\rho^\top \mathbf{X}_Q^\top(\eta) \mathbf{X}_Q(\eta) \rho - 2 \xi_Q^\top(\eta) \mathbf{X}_Q(\eta) \rho + \xi_Q^\top(\eta) \xi_Q(\eta) \right], \quad (219)$$

obtida substituindo a expressão para o erro (211) em (216) e empregando as seguintes definições:

$$\mathbf{X}_Q(\eta) = \sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi_Q^\top(t, \eta), \quad (220)$$

$$\xi_Q(\eta) = \sum_{t=1}^N \zeta(t) \tilde{u}_Q(t, \eta). \quad (221)$$

A expressão em (219) é claramente quadrática, e portanto convexa, com respeito aos vetor de parâmetros do controlador. Além disso, o vetor de parâmetros que minimiza essa função custo é dado por

$$\hat{\rho} = \left[\mathbf{X}_Q^\top(\eta) \mathbf{X}_Q(\eta) \right]^{-1} \left[\mathbf{X}_Q^\top(\eta) \xi_Q(\eta) \right], \quad (222)$$

obtido derivando (219), igualando a zero e resolvendo para o vetor de parâmetros.

Por outro lado, para um controlador fixo, isto é, um vetor ρ fixo, a função custo (216) pode ser escrita

$$V_{dc}(\rho, \eta) = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \zeta(t) \psi^\top(t, \rho) \eta - \sum_{t=1}^N \zeta(t) y(t) \right\|_2^2 \quad (223)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \mathbf{Y}(\rho) \eta - \mu \right\|_2^2 \quad (224)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[\eta^\top \mathbf{Y}^\top(\rho) \mathbf{Y}(\rho) \eta - 2 \mu^\top \mathbf{Y}(\rho) \eta + \mu^\top \mu \right], \quad (225)$$

obtida substituindo a expressão do erro (210) em (216) e usando as seguintes definições:

$$\mathbf{Y}(\rho) = \sum_{t=1}^N \zeta(t) \psi^\top(t, \rho), \quad (226)$$

$$\mu = \sum_{t=1}^N \zeta(t) y(t). \quad (227)$$

A expressão (225) é claramente quadrática, e portanto convexa, com respeito ao vetor de parâmetros do modelo de referência flexível. Além disso, o vetor de parâmetros que minimiza essa função custo é dado por

$$\hat{\eta} = \left[\mathbf{Y}^\top(\rho) \mathbf{Y}(\rho) \right]^{-1} \left[\mathbf{Y}^\top(\rho) \mu \right], \quad (228)$$

obtido derivando (225), igualando a zero e resolvendo para o vetor de parâmetros.

Como de (219) e (225) a função custo de correlação é biquadrática com respeito aos parâmetros, o mínimo local dessa função custo pode ser encontrado de maneira iterativa, resolvendo dois problemas de otimização convexos alternadamente:

$$\hat{\rho}^{[i]} = \left[\mathbf{X}_Q^T(\eta^{[i-1]}) \mathbf{X}_Q(\eta^{[i-1]}) \right]^{-1} \mathbf{X}_Q^T(\eta^{[i-1]}) \xi_Q(\eta^{[i-1]}), \quad (229)$$

$$\hat{\eta}^{[i]} = \left[\mathbf{Y}^T(\rho^{[i]}) \mathbf{Y}(\rho^{[i]}) \right]^{-1} \mathbf{Y}^T(\rho^{[i]}) \mu, \quad (230)$$

onde $[i]$ representa o número da iteração, e é preciso um valor inicial para $\eta^{[0]}$. Também é possível inverter a ordem, buscando primeiro pelos parâmetros do modelo de referência, onde será preciso um valor inicial para $\rho^{[0]}$. Como a função custo é biquadrática, cada uma das minimizações em (229) e (230) é resolvida analiticamente. Convém lembrar que, mesmo que a otimização seja realizada iterativamente, o método DCbT em si não é considerado um método baseado em dados iterativo, uma vez que emprega dados de um único experimento. Também é bom lembrar que o modelo de referência flexível identificado pode ser utilizado para se ter uma ideia do comportamento de malha fechada esperado do sistema após o ajuste dos parâmetros do controlador.

Observação 4.3. Porque cada um dos problemas de otimização resolvidos em (229) e (230) é convexo, a sequência de valores da função custo é não crescente. Se o conjunto dos valores permitidos para os parâmetros é compacto, é possível mostrar que o valor da função custo converge para um valor mínimo. Apesar disso não há garantia de convergência para o vetor de parâmetros em si. Além disso, mesmo que o vetor de parâmetros convirja, não há garantia de que será para o vetor que resulta no mínimo global da função custo, já que esse é um método de otimização local. Entretanto, foi observado empiricamente que o domínio de atração do mínimo global é razoavelmente amplo.

Exemplo 4.2. Considere mais uma vez os mesmos processo e modelo flexível do Exemplo 3.5, isto é,

$$G(q) = \frac{0,5q^{-1}}{1 - 0,9q^{-1}},$$

$$Q_d(q, \eta) = \eta \frac{q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,8q^{-1})(1 - 0,6q^{-1})}.$$

Como sinal de excitação do experimento, também considere a mesma onda quadrada com 4 períodos de 100 amostras cada e níveis 0 e 1. Porém, dessa vez, o ruído de medição é um ruído branco com desvio padrão $\sigma = 0,5$. Os dados de entrada e saída do processo foram coletados de 100 simulações de Monte Carlo variando apenas a realização do ruído. Os parâmetros do controlador foram estimado utilizando o método DCbT flexível proposto e o VDFT, ambos inicializados com $\eta^{[0]} = 1$. Para lidar com o ruído, o método VDFT utiliza a mesma estrutura de VI apresentada na Seção 2.3.6. As estimativas obtidas são apresentadas na Tabela 9. A estimativa obtida com o método proposto, que utiliza a abordagem de correlação, apresenta uma polarização muito menor que a obtida com o VDFT, embora sua variância seja maior. Perceba também como, agora com um nível de ruído maior que no Exemplo 3.5, a otimização iterativa do VDFT com VI não convergiu mais para estimativas tão próximas do vetor de parâmetros ideal (compare com a coluna ACS e VI da Tabela 7). Isso se deve tanto ao nível de ruído quanto ao fato de que a teoria não garante polarização nula para dados finitos. \diamond

Tabela 9 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 4.2

Parâmetro	ideal	ESTIMATIVAS	
		DCbT ^a	VDFT ^b
ρ_1	0,8000	0,8005 ($\pm 0,0651$)	0,4283 ($\pm 0,0134$)
ρ_2	-0,7200	-0,7204 ($\pm 0,0602$)	-0,3742 ($\pm 0,0125$)
η	0,5000	0,5015 ($\pm 0,0311$)	0,7559 ($\pm 0,0143$)

^a calculado de (229) e (230) com $\ell = 25$.

^b calculado de (150) e (151) usando VI.

Aqui cabe uma última observação com respeito à utilização do modelo de referência flexível. Mesmo a flexibilização do modelo de referência pode não ser suficiente para garantir a Suposição 2.4. Nesse caso também é possível empregar um filtro para permitir que os parâmetros ótimos com respeito ao custo de resposta a perturbação sejam estimados através da minimização do custo de correlação, como anteriormente. Esse filtro é exatamente o mesmo filtro calculado para o modelo de referência fixo e descrito por (189), (196) e (203). Porém, como não é utilizado o filtro em si, mas aproximações do mesmo que dependem do modelo de referência flexível, e este último é atualizado a cada iteração, a aproximação para o filtro também precisa ser atualizada iterativamente.

Um exemplo de implementação simples do método DCbT monovariável com modelo de referência flexível pode ser encontrado na Listagem A.10 dentro do Apêndice A.

4.3 Ajuste de controlador multivariável

Até agora foi tratado apenas o caso monovariável, embora muito do que foi mostrado possa ser utilizado diretamente em processos multivariáveis. Apesar disso, ao substituir os operadores de transferência escalares por matrizes, algumas comutações nas multiplicações, que foram necessárias para a derivação das variáveis de erro, deixam de ser válidas. Porém, ao invés de tentar justificar uma derivação semelhante àquela do erro monovariável usando matrizes, a variável de erro para controladores multivariáveis é obtida diretamente a partir do erro monovariável, como mostrado mais adiante. O método multivariável proposto (PINTO DA SILVA; ECKHARD, 2020b) foi concebido tendo em mente processos com o mesmo número de entradas e saídas, de modo que o controlador também terá uma estrutura quadrada. Claro que isso é mais comum em problemas de seguimento de referência.

4.3.1 Notação

Como o caso multivariável envolve uma grande quantidade de estruturas multidimensionais, a seguir é apresentada a notação empregada nesse caso. Uma estrutura escalar é representada em letra minúscula e fonte com peso normal: t, i, j, k, n etc. Por outro lado, uma estrutura unidimensional (vetor) é representada com letras latinas ou gregas minúsculas com fonte em negrito: $\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t), \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\varphi}(t, i)$ etc. Já, uma estrutura bidimensional (matriz) é representada com letras latinas ou gregas maiúsculas com fonte em negrito: $\mathbf{Q}_d(q), \mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\Phi}(t, i), \mathbf{R}(\tau, \boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\Xi}$ etc. Um único elemento de uma estrutura unidimensional ou bidimensional é representado com índices subscritos: $[\mathbf{u}(t)]_i, [\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i, [\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{i,j}, [\mathbf{R}(\tau, \boldsymbol{\rho})]_{i,j}, \mathbf{P}_{(i,j)}, [\mathbf{B}(q)]_{(i,j)}$ etc, onde o primeiro índice representa a primeira

dimensão (linha) e o outro, se presente, a segunda dimensão (coluna). Para representar elementos que **não são escalares** (células), os índices são envolvidos em parênteses, por exemplo: $\mathbf{P}_{(i,j)}$, $[\mathbf{B}(q)]_{(i,j)}$ etc. Finalmente, quando uma **subpartição** de uma estrutura se estende por toda uma de suas dimensões isso é representado substituindo o índice correspondente àquela dimensão por um asterisco, por exemplo: $[\mathbf{Q}_d(q)]_{i,*}$ representa toda a i -ésima linha do modelo de referência.

4.3.2 Obtenção do erro multivariável

Utilizando como base a variável de erro monovariável em (166), substituindo apenas os operadores monovariáveis por multivariáveis e a unidade pela matriz identidade, obtém-se a seguinte variável de erro vetorial:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{u}(t) - [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{y}(t), \quad (231)$$

onde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^n$ é a matriz identidade e n é o número de canais, i.e. entradas e saídas dos blocos que compõem o sistema. Como a variável de erro (231) foi obtida diretamente do erro monovariável, resta demonstrar que essa variável também atende às propriedades a, b e c do início do capítulo. Claramente, a propriedade a é mantida, uma vez que a variável de erro pode ser obtida usando apenas os sinais de entrada e saída, o modelo de referência desejado e a estrutura de controle disponível. Restam as propriedades b e c. Para maior clareza, a propriedade da correlação é demonstrada a seguir e a propriedade da convexidade foi deixada para logo depois.

Para abreviar a demonstração da propriedade c, a variável de erro é calculada apenas para dados de malha aberta, resultados similares podem ser encontrados para os outros tipos de experimentos. Partindo de (231):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{u}(t) - [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{y}(t) \\ &= [\mathbf{Q}_d(q) + \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})\mathbf{G}(q) - \mathbf{G}(q)]\mathbf{u}(t) - [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (232)$$

$$= [\mathbf{Q}_d(q)\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{G}(q)]\mathbf{u}(t) - [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{v}(t) \quad (233)$$

$$= [\mathbf{Q}_d(q) - \mathbf{G}(q)\tilde{\mathbf{S}}(q, \boldsymbol{\rho})]\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(q, \boldsymbol{\rho})\mathbf{u}(t) - [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{v}(t) \quad (234)$$

$$= [\mathbf{Q}_d(q) - \mathbf{Q}(q, \boldsymbol{\rho})]\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(q, \boldsymbol{\rho})\mathbf{u}(t) - [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{v}(t), \quad (235)$$

o que indica que, para o parâmetro ideal,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}^*) = -[\mathbf{I} - \mathbf{Q}_d(q)\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho}^*)]\mathbf{v}(t) \quad (236)$$

$$= -[\mathbf{I} - \mathbf{T}(q, \boldsymbol{\rho}^*)]\mathbf{v}(t) \quad (237)$$

$$= -\mathbf{S}(q, \boldsymbol{\rho}^*)\mathbf{v}(t), \quad (238)$$

que é apenas ruído filtrado, descorrelacionado do sinal de excitação pela Suposição 2.3. Por outro lado, na ausência de ruído,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}) \Big|_{\mathbf{v}(t)=\mathbf{0}} = [\mathbf{Q}_d(q) - \mathbf{Q}(q, \boldsymbol{\rho})]\tilde{\mathbf{S}}^{-1}(q, \boldsymbol{\rho})\mathbf{u}(t), \quad (239)$$

que será identicamente nulo apenas para o vetor de parâmetros ideais. Isso demonstra a propriedade da correlação.

De (231), não é evidente que o erro multivariável proposto é afim com respeito aos parâmetros do controlador. Porém, para poder avaliar a propriedade b é preciso uma nova definição de controlador linearmente parametrizado.

Definição 4.1 (Controlador multivariável linearmente parametrizado). Um controlador multivariável $\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{n \times n}(q)$ é dito linearmente parametrizado se cada um dos seus elementos for linearmente parametrizado. Ou seja,

$$[\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{i,j} = \mathbf{P}_{(i,j)}^\top [\mathbf{B}(q)]_{(i,j)}, \quad (240)$$

onde o escalar $[\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{i,j} \in \mathbb{R}(q)$ é o elemento do controlador que conecta a sua j -ésima entrada à sua i -ésima saída, enquanto que $\mathbf{P}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{p_{i,j}}$ é o subvetor de parâmetros e $[\mathbf{B}(q)]_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{p_{i,j}}(q)$ é a subestrutura de controle associados a esse bloco.

Com a definição acima, a i -ésima componente da variável de erro é dada por

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i = \underbrace{[\mathbf{Q}_d(q)]_{i,*} \mathbf{u}(t) - [\mathbf{y}(t)]_i}_{[\tilde{\mathbf{u}}_Q(t)]_i} + \underbrace{[\mathbf{Q}_d(q)]_{i,*} \mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{y}(t)}_{[-\hat{\mathbf{u}}_Q(t, \boldsymbol{\rho})]_i}, \quad (241)$$

onde $[\mathbf{Q}_d(q)]_{i,*}$ é a i -ésima linha de $\mathbf{Q}_d(q)$, enquanto que $[\tilde{\mathbf{u}}_Q(t)]_i$ é o i -ésimo elemento da versão multivariável de $\tilde{\mathbf{u}}_Q(t)$ e $[-\hat{\mathbf{u}}_Q(t, \boldsymbol{\rho})]_i$ é o i -ésimo elemento da versão multivariável do preditor (131) filtrado pelo modelo de referência. Perceba que desenvolvendo um pouco mais esse último termo, obtém-se

$$[-\hat{\mathbf{u}}_Q(t, \boldsymbol{\rho})]_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{j,k} [\mathbf{Q}_d(q)]_{i,j} [-\mathbf{y}(t)]_k \quad (242)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\mathbf{P}]_{(j,k)}^\top \underbrace{[\mathbf{B}(q)]_{(j,k)} [\mathbf{Q}_d(q)]_{i,j} [-\mathbf{y}(t)]_k}_{[\boldsymbol{\Phi}(t,i)]_{(j,k)}} \quad (243)$$

$$= \boldsymbol{\rho}^\top \boldsymbol{\varphi}(t, i), \quad (244)$$

onde (242) usa o fato de que operadores escalares comutam, (243) emprega a parametrização linear de (240), enquanto que (244) usa as seguintes estruturas vetoriais:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(1,1)} \\ \mathbf{P}_{(2,1)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{(n,1)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{(n,n)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t, i) = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Phi}(t, i)]_{(1,1)} \\ [\boldsymbol{\Phi}(t, i)]_{(2,1)} \\ \vdots \\ [\boldsymbol{\Phi}(t, i)]_{(n,1)} \\ \vdots \\ [\boldsymbol{\Phi}(t, i)]_{(n,n)} \end{bmatrix}. \quad (245)$$

Ou seja, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{\sum p_{i,j}}$ e $\boldsymbol{\varphi}(t, i) \in \mathbb{R}^{\sum p_{i,j}}$ são obtidos usando o operador de vetorização, i.e. empilhando os elementos da estrutura correspondente para formar um vetor. É preciso cuidar que a ordem na qual os parâmetros e os regressores são empilhados seja a mesma.

Observe de (244) que (241) pode ser escrito como

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i = [\tilde{\mathbf{u}}_Q(t)]_i - \boldsymbol{\rho}^\top \boldsymbol{\varphi}(t, i), \quad (246)$$

ou seja, o erro (231) é afim com respeito aos parâmetros de um controlador linearmente parametrizado. Isso conclui a demonstração de que o erro multivariável proposto possui as três propriedades desejáveis apresentadas anteriormente.

4.3.3 Estimação dos parâmetros

Uma vez que o erro multivariável proposto possui as três propriedades necessárias é possível obter uma estimativa para o vetor de parâmetros ideais através da minimização da correlação entre a variável de erro e a entrada do experimento. O problema é que agora esses dois sinais são multivariáveis, de modo que é necessário definir também uma função custo de correlação adequada. Por isso, a seguinte matriz de correlação é proposta:

$$\mathbf{R}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho}) = \mathbb{E} \varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}^{\text{T}}(t - \tau), \quad (247)$$

de uma maneira análoga a (112). Dessa maneira, cada elemento

$$[\mathbf{R}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho})]_{i,j} = \mathbb{E} [\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i [\mathbf{u}(t - \tau)]_j, \quad (248)$$

representa a correlação entre a i -ésima componente do erro com a j -ésima entrada de excitação do experimento. Do mesmo modo que no caso monovariável, se for empregada uma quantidade finita de dados, cada um desses elementos da matriz acima pode ser aproximado como

$$[\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho})]_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i [\mathbf{u}(t - \tau)]_j, \quad (249)$$

usando N amostras de dados. Com as definições acima já é possível enunciar o teorema para estimação dos parâmetros do controlador.

Teorema 4.5. *Os parâmetros do controlador multivariável que minimizam a soma das energias de todas as correlações entre as componentes do erro e as componentes do sinal de excitação são estimados por*

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_{(i,j)}^{\text{T}} \mathbf{X}_{(i,j)} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_{(i,j)}^{\text{T}} \boldsymbol{\Xi}_{(i,j)} \right], \quad (250)$$

onde são empregados a matriz $\mathbf{X}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{(2\ell+1) \times \sum p_{i,j}}$ e o vetor $\boldsymbol{\Xi}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$, definidos como

$$\mathbf{X}_{(i,j)} = \sum_{t=1}^N [\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)} \boldsymbol{\varphi}^{\text{T}}(t, i), \quad \boldsymbol{\Xi}_{(i,j)} = \sum_{t=1}^N [\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)} [\tilde{\mathbf{u}}_Q(t)]_i, \quad (251)$$

e onde cada variável instrumental vetorial $[\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)} \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$ é dada por

$$[\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)}^{\text{T}} = [[\mathbf{u}(t + \ell)]_j \quad \cdots \quad [\mathbf{u}(t)]_j \quad \cdots \quad [\mathbf{u}(t - \ell)]_j], \quad (252)$$

construída a partir das amostras adiantadas e atrasadas da j -ésima entrada de excitação.

Prova. Primeiramente, observe que, como no caso monovariável, a energia total de cada uma das correlações (249) pode ser aproximada pela energia contida entre $-\ell \leq \tau \leq \ell$

deslocamentos. Com isso, a energia aproximada de cada elemento da matriz de correlações (247) é dada por

$$\left\| [\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho})]_{i,j} \right\|_2^2 = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \sum_{\tau=-\ell}^{\ell} [\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i [\mathbf{u}(t - \tau)]_j \right\|_2^2 \quad (253)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N [\zeta(t)]_{(j)} [\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho})]_i \right\|_2^2 \quad (254)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N [\zeta(t)]_{(j)} [\tilde{\mathbf{u}}_Q(t)]_i - \sum_{t=1}^N [\zeta(t)]_{(j)} \boldsymbol{\varphi}^T(t, i) \boldsymbol{\rho} \right\|_2^2 \quad (255)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \boldsymbol{\Xi}_{(i,j)} - \mathbf{X}_{(i,j)} \boldsymbol{\rho} \right\|_2^2 \quad (256)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{X}_{(i,j)}^T \mathbf{X}_{(i,j)} \boldsymbol{\rho} - 2 \boldsymbol{\Xi}_{(i,j)}^T \mathbf{X}_{(i,j)} \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Xi}_{(i,j)}^T \boldsymbol{\Xi}_{(i,j)} \right], \quad (257)$$

onde (254) faz uso do vetor instrumental proposto e comuta os fatores, já que são escalares, e onde (255) vem direto de (231). A função custo multivariável proposta no teorema é a soma da energia de cada elemento, que com as definições acima fica:

$$V_{\text{dc}}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| [\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho})]_{i,j} \right\|_2^2, \quad (258)$$

uma função custo quadrática, cujo mínimo é dado por (250). ■

Corolário 4.7. *Os resultados do Teorema 4.5, provados apenas para dados de malha aberta, são válidos também para outros tipos de excitação, bastando utilizar a variável instrumental adequada.*

4.3.4 Flexibilização do modelo de referência

De maneira similar ao caso monovariável, uma flexibilização do modelo de referência pode melhorar o desempenho do método multivariável ao aproximar o modelo de referência do conjunto de modelos alcançáveis com a estrutura de controlador disponível. Novamente, da mesma maneira que no caso monovariável, a flexibilização inicia pela de definição da estrutura do modelo de referência com parametrização linear.

Definição 4.2 (Modelo de referência multivariável linearmente parametrizado). Um modelo de referência multivariável $\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}(q)$ é dito linearmente parametrizado se cada um de seus elementos é linearmente parametrizado:

$$[\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{i,j} = \mathbf{H}_{(i,j)}^T [\boldsymbol{\Gamma}(q)]_{(i,j)}, \quad (259)$$

onde o escalar $[\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{i,j}$ é o elemento do modelo de referência que liga a sua j -ésima entrada à sua i -ésima saída, enquanto que $\mathbf{H}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{s_i, j}$ e $[\boldsymbol{\Gamma}(q)]_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{s_i, j}(q)$ são, respectivamente, o subvetor de parâmetros e a subestrutura de controle associados a esse elemento.

Da definição acima, a i -ésima componente da variável de erro pode ser escrita como:

$$[\varepsilon^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})]_i = [\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{i,*} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})\mathbf{y}(t)] - [\mathbf{y}(t)]_i \quad (260)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n [\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{i,j} \left[[\mathbf{u}(t)]_j + [\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{j,*} \mathbf{y}(t) \right] \right) - [\mathbf{y}(t)]_i \quad (261)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{(i,j)}^{\text{T}} \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(q)]_{(i,j)} \left[[\mathbf{u}(t)]_j + [\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{j,*} \mathbf{y}(t) \right]}_{[\boldsymbol{\Psi}(t, i, \boldsymbol{\rho})]_{(i,j)}} \right) - [\mathbf{y}(t)]_i \quad (262)$$

$$= \boldsymbol{\psi}^{\text{T}}(t, i, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\eta} - [\mathbf{y}(t)]_i, \quad (263)$$

com os vetor de parâmetros e regressores definidos de maneira similar aos anteriores:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(1,1)} \\ \mathbf{H}_{(2,1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{(n,1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{(n,n)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}(t, i, \boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\Psi}(t, i, \boldsymbol{\rho})]_{(1,1)} \\ [\boldsymbol{\Psi}(t, i, \boldsymbol{\rho})]_{(2,1)} \\ \vdots \\ [\boldsymbol{\Psi}(t, i, \boldsymbol{\rho})]_{(n,1)} \\ \vdots \\ [\boldsymbol{\Psi}(t, i, \boldsymbol{\rho})]_{(n,n)} \end{bmatrix}. \quad (264)$$

Porém, com o detalhe de que o vetor de regressores em (263) é esparsos:

$$[\boldsymbol{\Psi}(t, i, \boldsymbol{\rho})]_{(k,j)} = \begin{cases} [\boldsymbol{\Gamma}(q)]_{(i,j)} \left[[\mathbf{u}(t)]_j + [\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{j,*} \mathbf{y}(t) \right], & \text{se } k = i, \text{ e} \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (265)$$

Com isso, o seguinte teorema pode ser enunciado.

Teorema 4.6. *Os parâmetros do modelo de referência multivariável que minimizam a soma de todas as correlações entre as componentes do erro e as componentes do sinal de excitação são estimados por*

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)}^{\text{T}} [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)}^{\text{T}} \mathbf{M}_{(i,j)} \right], \quad (266)$$

onde são empregados a matriz $[\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{(2\ell+1) \times \sum s_{i,j}}$ e o vetor $\mathbf{M}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{2\ell+1}$ definidos como:

$$[\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)} = \sum_{t=1}^N [\zeta(t)]_{(j)} \boldsymbol{\psi}^{\text{T}}(t, i, \boldsymbol{\rho}), \quad \mathbf{M}_{(i,j)} = \sum_{t=1}^N [\zeta(t)]_{(j)} [\mathbf{y}(t)]_i. \quad (267)$$

Prova. Seguindo um caminho semelhante ao utilizado na obtenção dos parâmetros do

controlador, é possível mostrar que

$$\left\| [\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})]_{i,j} \right\|_2^2 = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N [\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)} [\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dc}}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})]_i \right\|_2^2 \quad (268)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N [\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)} \boldsymbol{\psi}^T(t, i, \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\eta} - \sum_{t=1}^N [\boldsymbol{\zeta}(t)]_{(j)} [\mathbf{y}(t)]_i \right\|_2^2 \quad (269)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\| [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{M}_{(i,j)} \right\|_2^2 \quad (270)$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[\boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)}^T [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)} \boldsymbol{\eta} - 2\mathbf{M}_{(i,j)}^T [\mathbf{Y}(\boldsymbol{\rho})]_{(i,j)} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{M}_{(i,j)}^T \mathbf{M}_{(i,j)} \right] \quad (271)$$

onde (269) usa (263). A função custo de correlação proposta pode ser escrita em função dos parâmetros do modelo de referência como

$$V_{\text{dc}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| [\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})]_{i,j} \right\|_2^2, \quad (272)$$

que é uma função quadrática cujo mínimo é dado por (266). ■

Corolário 4.8. *A função custo de correlação proposta para o problema multivariável flexível é biquadrática e seu mínimo pode ser encontrado iterativamente através do algoritmo ACS, como no caso monovariável. Para tanto, cada iteração é dividida em dois passos:*

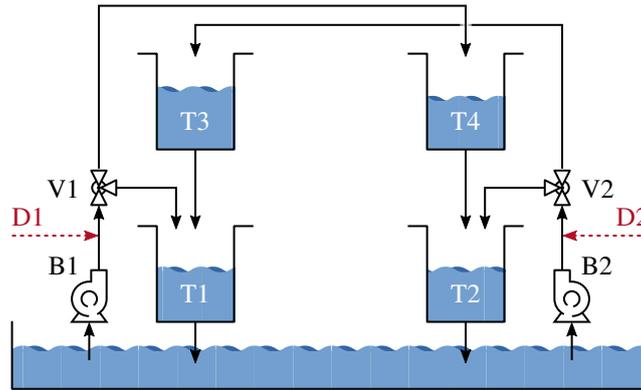
$$\hat{\boldsymbol{\rho}}^{[i]} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| [\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^{[i-1]})]_{k,j} \right\|_2^2, \quad (273)$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^{[i]} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| [\hat{\mathbf{R}}_{\varepsilon, \mathbf{u}}(\tau, \hat{\boldsymbol{\rho}}^{[i]}, \boldsymbol{\eta})]_{k,j} \right\|_2^2, \quad (274)$$

onde $[i]$ representa a iteração. As soluções desses dois problemas de otimização são dadas, respectivamente, por: (250), substituindo o modelo de referência por $\mathbf{Q}_d(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta})$ na derivação; e por (266). Além disso, é necessário um valor inicial para $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{[0]}$ na primeira iteração.

Exemplo 4.3 (adaptado de Pinto da Silva e Eckhard (2020b)). Considere o processo multivariável proposto por Johansson (2000). Esse processo é composto por quatro tanques (T1 a T4) interconectados representados na Figura 8. Os tanques são alimentados através de duas bombas (B1 e B2) e são descarregados pela ação da gravidade, escoando o líquido de seu interior pela abertura abaixo deles, sendo que os tanques de cima descarregam nos tanques de baixo. As posições das duas válvulas (V1 e V2) são fixas e essas válvulas apenas dividem o fluxo das bombas entre os tanques de cima e os tanques de baixo. Para avaliar o método aqui proposto, foram adicionadas duas entradas de perturbação de carga (D1 e D2), inexistentes no processo original. A entrada do processo é o fluxo que vem das

Figura 8 — Processo multivariável do Exemplo 4.3.



Fonte: adaptado de Johansson (2000).

bombas e a saída é o nível dos tanques de baixo. O modelo do processo é de fase mínima e, após a discretização, é dado por:

$$\mathbf{G}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,2014q^{-1}}{1 - 0,9225q^{-1}} & \frac{0,01192q^{-1} + 0,01079q^{-2}}{1 - 1,727q^{-1} + 0,7423q^{-2}} \\ \frac{0,006022q^{-1} + 0,005592q^{-2}}{1 - 1,792q^{-1} + 0,8007q^{-2}} & \frac{0,1513q^{-1}}{1 - 0,9460q^{-1}} \end{bmatrix} \quad (275)$$

Esse processo simulado é colocado em malha fechada com o seguinte controlador PI centralizado:

$$\mathbf{C}_o(q) = \begin{bmatrix} 0,1 + 0,01 \frac{1}{1 - q^{-1}} & 0 \\ 0 & 0,1 + 0,01 \frac{1}{1 - q^{-1}} \end{bmatrix} \quad (276)$$

em seguida o sistema é excitado através das entradas de referência $[\mathbf{r}(t)]_1$ e $[\mathbf{r}(t)]_2$ empregando-se duas ondas quadradas com períodos de 100 e 90 amostras, respectivamente. Ruído de medição branco com variância $\sigma^2 = 0,1$ é injetado na saída do sistema e são coletadas 5000 amostras dos sinais de interesse: $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{u}_o(t)$ e $\mathbf{y}_o(t)$.

O modelo de referência escolhido tem a seguinte estrutura:

$$[\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{1,1} = \frac{\eta_1 q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,87q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})} \quad (277)$$

$$[\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{1,2} = \frac{q^{-1}(\eta_2 - \eta_3 q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,95q^{-1})(1 - 0,92q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})} \quad (278)$$

$$[\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{2,1} = \frac{q^{-1}(\eta_4 - \eta_5 q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,95q^{-1})(1 - 0,92q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})} \quad (279)$$

$$[\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta})]_{2,2} = \frac{\eta_6 q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})^2}, \quad (280)$$

e como parâmetro inicial foi escolhido $\boldsymbol{\eta}^{[0]} = [0,36 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,3]^T$, para tentar desacoplar a resposta a perturbação dos canais. Já, o controlador escolhido foi um controlador

multivariável descentralizado com dois controladores PID na diagonal e dois PD nos outros elementos, ou seja,

$$[\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{1,1} = \rho_1 + \rho_2 \frac{1}{1 - q^{-1}} + \rho_3 \frac{1 - q^{-1}}{1} \quad (281)$$

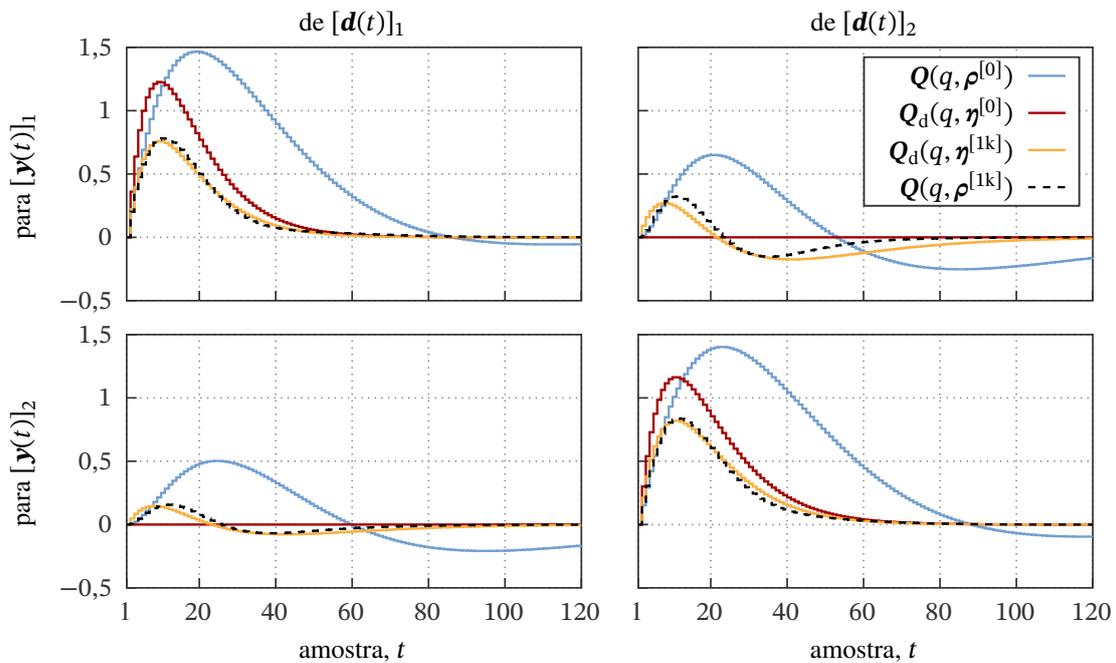
$$[\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{1,2} = \rho_4 + \rho_5 \frac{1 - q^{-1}}{1} \quad (282)$$

$$[\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{2,1} = \rho_6 + \rho_7 \frac{1 - q^{-1}}{1} \quad (283)$$

$$[\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho})]_{2,2} = \rho_8 + \rho_9 \frac{1}{1 - q^{-1}} + \rho_{10} \frac{1 - q^{-1}}{1}. \quad (284)$$

Para ajustar os ganhos desse controlador foi utilizado o método flexível apresentado, com um parâmetro de projeto $\ell = 200$. Os resultados obtidos com o método proposto são apresentados na Figura 9 na forma de respostas a um degrau de perturbação. A resposta

Figura 9 — Respostas a um salto na perturbação do Exemplo 4.3.



Fonte: adaptado de Pinto da Silva e Eckhard (2020b).

inicial do sistema $Q(q, \boldsymbol{\rho}^{[0]})$ com o controlador centralizado é a curva em azul, a resposta do modelo de referência inicial $Q_d(q, \boldsymbol{\eta}^{[0]})$ é a curva em vermelho. Após 1000 iterações, o algoritmo convergiu para um controlador e para o modelo de referência $Q_d(q, \boldsymbol{\eta}^{[1k]})$, cuja resposta é dada pela curva amarela. Ao substituir (somente agora) o controlador inicial pelo final, o sistema resultante $Q(q, \boldsymbol{\rho}^{[1k]})$ apresentou a resposta da curva preta tracejada. Observe que o desacoplamento completo não pode ser alcançado, porém a resposta final está muito menos acoplada que a inicial. Além disso, o modelo de referência final identificado pelo método está muito próximo do resultado real, obtido ao substituir o controlador. \diamond

Uma implementação simples do método DCbT multivariável com modelo de referência flexível é apresentada através da Listagem A.11 no Apêndice A.

4.4 Parametrização do denominador

Até aqui foram empregados controladores cujos parâmetros se concentram todos no numerador do controlador. Apesar disso, pode ser interessante ajustar também os polos do controlador, caso a estrutura disponível permita. Um exemplo usual dessa situação, que já foi apresentado no início desse texto, são os controladores PID com filtro no derivativo. Nesse caso é preciso que o método proposto seja adaptado para incluir os coeficientes do denominador na rotina de otimização. Portanto, o objetivo desta última parte desse capítulo é apresentar essas modificações necessárias. Além disso, a partir daqui voltam a ser abordados apenas controladores monovariáveis, apesar de que muitas das ideias apresentadas podem ser usadas no caso multivariável.

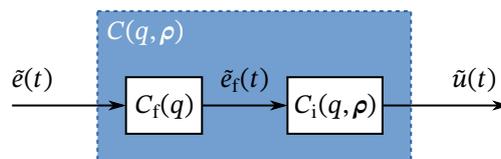
4.4.1 Erro de predição para controlador semiparametrizado

Primeiramente, para facilitar a análise, o controlador será dividido em duas partes, acompanhando a sua parametrização. Como mencionado já anteriormente, muitas vezes é interessante fixar parte do controlador e ajustar apenas o restante, resultando em um controlador semiparametrizado. Considere, por exemplo, um controlador com ação integral, nesse caso o polo do integrador não deve ser ajustado e pode ser colocado em um fator à parte. Desse modo, de uma maneira parecida com a empregada por Campestrini et al. (2017), serão empregados controladores semiparametrizados cuja estrutura será decomposta da seguinte maneira:

$$C(q, \rho) = C_i(q, \rho)C_f(q), \quad (285)$$

onde $C_i(q, \rho)$ é o fator que concentra todos os parâmetros a serem identificados, enquanto que $C_f(q)$ é a parte fixa, i.e. que não será identificada. Essa decomposição do controlador em dois fatores pode ser visualizada na Figura 10. Porque os parâmetros que serão

Figura 10 — Diagrama de blocos destacando a divisão do controlador.



Fonte: elaborado pelo autor.

identificados estão concentrados em $C_i(q, \rho)$, um novo sinal de erro virtual intermediário é definido como a saída da parte fixa do controlador:

$$\tilde{e}_f(t) = C_f(q)\tilde{e}(t), \quad (286)$$

onde $\tilde{e}(t)$ é o erro de regulação virtual e $\tilde{e}_f(t)$ é o sinal de erro virtual intermediário. Esse sinal intermediário é utilizado como o sinal de entrada do fator do controlador cujos parâmetros devem ser identificados:

$$\tilde{u}(t) = C_i(q, \rho)\tilde{e}_f(t), \quad (287)$$

onde $\tilde{u}(t)$ ainda é a saída virtual do controlador. Após separar a parte fixa, o restante é considerado completamente parametrizado, ou seja:

$$C_i(q, \rho) = \frac{B(q, \rho)}{A(q, \rho)} \quad (288)$$

$$= \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}}, \quad (289)$$

enquanto que o vetor de parâmetros será

$$\rho^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n_b}], \quad (290)$$

onde n_a e n_b representam a ordem dos polinômios denominador e numerador, respectivamente.

Novamente, usando a teoria de identificação de sistemas é possível usar um preditor da saída do controlador para calcular o seguinte erro de predição:

$$\varepsilon(t, \rho) = \tilde{u}(t) - \hat{\tilde{u}}(t | \rho), \quad (291)$$

que pode ser usado em seguida para identificar os parâmetros do controlador ótimo. Como foi demonstrado em (111), o erro de predição da saída do controlador empregado no VRFT e a variável de erro empregada no NCbT são muito similares, diferindo apenas por conta da filtragem pelo modelo de referência, mesmo que o processo original de derivação dos métodos tenha sido diferente. O mesmo é válido para os sinais do VDFT e do DCbT, em (181). Portanto aqui também serão exploradas essas duas abordagens, de minimização do erro de predição e de minimização da correlação usando o erro acima. Porém, antes disso serão propostos dois diferentes preditores para a saída do controlador.

4.4.2 Preditor linear da saída do controlador

O primeiro preditor proposto para a saída do controlador, inspirado no preditor ARX, é dado por

$$\hat{\tilde{u}}_{\text{lin}}(t | \rho) = [1 - A(q, \rho)] \tilde{u}(t) + B(q, \rho) \tilde{e}_f(t), \quad (292)$$

que pode ser escrito na forma da regressão linear

$$\hat{\tilde{u}}_{\text{lin}}(t | \rho) = \varphi^T(t) \rho, \quad (293)$$

onde o vetor regressor é dado por

$$\varphi^T(t) = [-\tilde{u}(t-1) \ \dots \ -\tilde{u}(t-n_a) \ \tilde{e}_f(t) \ \dots \ \tilde{e}_f(t-n_b)]. \quad (294)$$

Assim, o erro de predição do preditor linear pode ser escrito

$$\varepsilon_{\text{lin}}(t, \rho) = \tilde{u}(t) - \varphi^T(t) \rho \quad (295)$$

que é afim com respeito aos parâmetros, facilitando a análise e o projeto do controlador.

4.4.3 Preditor não linear da saída do controlador

Diferentemente do primeiro, esse preditor é inspirado no preditor de um modelo OE, de modo que é dado simplesmente por

$$\hat{\tilde{u}}_{\text{nl}}(t | \rho) = C_i(q, \rho) \tilde{e}_f(t) \quad (296)$$

$$= \frac{B(q, \rho)}{A(q, \rho)} \tilde{e}_f(t), \quad (297)$$

fazendo com que o erro de predição seja

$$\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}) = \tilde{u}(t) - C_f(q, \boldsymbol{\rho})\tilde{e}_f(t). \quad (298)$$

Note que esse preditor não é linear com respeito aos parâmetros porque alguns deles aparecem no denominador. Observe porém que os dois preditores são equivalente se $n_a = 0$, i.e. $A(q, \boldsymbol{\rho}) = 1$, o que também é equivalente ao problema do controlador linearmente parametrizado apresentado anteriormente.

4.4.4 Soluções de mínimos quadrados

Esta é a solução mais simples para o problema de estimação dos parâmetros, guardando certa similaridade com os métodos VRFT e VDFT, e consiste na minimização da norma do erro de predição. Ou seja, o custo a ser otimizado é dado por

$$V_{pc}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |\varepsilon_w(t, \boldsymbol{\rho})|^2, \quad (299)$$

onde $\varepsilon_w(t, \boldsymbol{\rho}) = W(q)\varepsilon(t, \boldsymbol{\rho})$ é o erro de predição filtrado através de um filtro $W(q)$ que será projetado mais adiante. Agora, como as derivações das soluções são diferentes dependendo de qual preditor será empregado, elas serão apresentadas separadamente.

4.4.4.1 Mínimos quadrados com preditor linear

Observe de (295) que o erro de predição do preditor linear pode ser escrito

$$\varepsilon_{lin}(t, \boldsymbol{\rho}) = A(q, \boldsymbol{\rho})\tilde{u}(t) - B(q, \boldsymbol{\rho})\tilde{e}_f(t). \quad (300)$$

Perceba também que aplicando as definições (285) e (288) em (38), obtém-se

$$A(q, \boldsymbol{\rho})Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) = A(q, \boldsymbol{\rho})G^{-1}(q) + B(q, \boldsymbol{\rho})C_f(q). \quad (301)$$

Em seguida, considere o seguinte lema importante.

Lema 4.3. *Se forem empregados dados sem ruído, o erro de predição do preditor linear será sempre*

$$\varepsilon_{lin}(t, \boldsymbol{\rho}) \Big|_{v(t) \equiv 0} = A(q, \boldsymbol{\rho}) [Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] y(t), \quad (302)$$

independentemente se os dados vêm de um experimento em malha aberta ou fechada.

Prova. Primeiramente considere apenas dados de malha aberta. Nesse caso, o sinal de excitação é $u(t)$ e o erro de predição é dado por

$$\varepsilon_{lin}(t, \boldsymbol{\rho}) = A(q, \boldsymbol{\rho}) [u(t) - Q_d^{-1}(q)y(t)] + B(q, \boldsymbol{\rho})C_f(q)y(t) \quad (303)$$

$$\begin{aligned} &= [A(q, \boldsymbol{\rho})G^{-1}(q) + B(q, \boldsymbol{\rho})C_f(q)] G(q)u(t) \\ &\quad - A(q, \boldsymbol{\rho})Q_d^{-1}(q)G(q)u(t) \\ &\quad - [A(q, \boldsymbol{\rho})Q_d^{-1}(q) - B(q, \boldsymbol{\rho})C_f(q)] v(t) \end{aligned} \quad (304)$$

$$\begin{aligned} &= A(q, \boldsymbol{\rho}) [Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] G(q)u(t) \\ &\quad - [A(q, \boldsymbol{\rho})Q_d^{-1}(q) - B(q, \boldsymbol{\rho})C_f(q)] v(t), \end{aligned} \quad (305)$$

onde (303) vem de (126), (127), (286) e (300), enquanto que (304) vem de (3), e (305) vem de (301). Removendo o termo de ruído de (305) resulta em (302).

Por outro lado, considerando dados de malha fechada com um controlador inicial $C_o(q)$, os sinais de entrada e saída coletados do processo são dados por

$$u_o(t) = G^{-1}(q)T_o(q)r(t) + G^{-1}(q)Q_o(q)d(t) - C_o(q)S_o(q)v(t), \quad (306)$$

$$y_o(t) = T_o(q)r(t) + Q_o(q)d(t) + S_o(q)v(t). \quad (307)$$

Nesse caso, substituindo (306) e (307) em (303), obtém-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{lin}}(t, \rho) &= [A(q, \rho)G^{-1}(q) + B(q, \rho)C_f(q) - A(q, \rho)Q_d^{-1}(q)] T_o(q)r(t) \\ &\quad + [A(q, \rho)G^{-1}(q) + B(q, \rho)C_f(q) - A(q, \rho)Q_d^{-1}(q)] Q_o(q)d(t) \\ &\quad - A(q, \rho)C_o(q)S_o(q)v(t) \end{aligned} \quad (308)$$

$$\begin{aligned} &= A(q, \rho) [Q^{-1}(q, \rho) - Q_d^{-1}(q)] [T_o(q)r(t) + Q_o(q)d(t)] \\ &\quad - [A(q, \rho)Q_d^{-1}(q) - B(q, \rho)C_f(q) + A(q, \rho)C_o(q)] S_o(q)v(t), \end{aligned} \quad (309)$$

onde (309) usa (301) e deixa $A(q, \rho)$ em evidência. Removendo o termo dependente do ruído de (309) resulta em (302). ■

Teorema 4.7. *Quando a Suposição 2.4 é válida e o preditor linear (293) é obtido de dados sem ruído, o mínimo global de (299) é obtido com o vetor de parâmetros ideal.*

Prova. Usando o Lema 4.3 e substituindo $Q(q, \rho^*) = Q_d(q)$ por conta da Suposição 2.4, a norma do erro se torna identicamente nula. Além disso, esse é o mínimo global porque o custo (299) é quadrático. ■

Corolário 4.9. *Quando a Suposição 2.4 é válida, usando o preditor linear, os parâmetros do controlador ideal podem ser estimados por*

$$\hat{\rho} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi_W(t) \varphi_W^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi_W^T(t) \tilde{u}_W(t) \right], \quad (310)$$

onde $\varphi_W(t) = W(q)\varphi(t)$ e $\tilde{u}_W(t) = W(q)\tilde{u}(t)$.

A maior vantagem de empregar o preditor linear é que a solução da otimização pode ser obtida analiticamente. Se houver pouco ruído nos dados, a polarização e a variância da estimativa serão pequenas e o controlador será ajustado próximo ao ideal. Entretanto, se os dados forem ruidosos, esse se torna um problema de erros nas variáveis e a solução de mínimos quadrados produzirá uma estimativa polarizada. Além disso, quando a Suposição 2.4 não puder ser garantida, a sua violação pode ser compensada com a ajuda da pré-filtragem dos dados através do filtro $W(q)$ de acordo com o teorema seguinte.

Teorema 4.8. *Quando for utilizado o preditor linear, computado a partir de dados sem ruído, o filtro que fará com que a função custo da norma do erro de predição (299) seja assintoticamente idêntica ao custo da resposta a perturbação (40) é tal que*

$$|W(e^{j\omega}, \rho)|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \rho)Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|A(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_y(\omega)}, \quad (311)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ e $\Phi_y(\omega)$ são os espectros da perturbação a ser rejeitada e da saída coletada, respectivamente.

Prova. Basta comparar o custo de resposta a perturbação (136) com o custo da norma do erro de predição (299) no domínio da frequência, obtido usando o Lema 4.3 e o teorema de Parseval:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_{pe}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 |A(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 |Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})|^2 \Phi_y(\omega) d\omega, \quad (312)$$

e em seguida usar a relação (144). O filtro que aproxima as duas funções custo é aquele em (311). ■

Observação 4.4. O filtro proposto é ótimo na ausência de ruído, mas se os dados contiverem ruído, este pode ser amplificado, aumentando a distância entre as funções custo. Mas isso é válido para todos os outros filtros propostos.

Observação 4.5. O filtro em (311) pode ser aproximado por

$$|W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|A(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 \Phi_y(\omega)}, \quad (313)$$

contanto que $Q(q, \boldsymbol{\rho}^*) \approx Q_d(q)$. Ou seja, se a violação da Suposição 2.4 for pequena.

Todas as quantias envolvidas em (313) são disponíveis do problema ou podem ser estimadas dos dados. Infelizmente, mesmo após essa aproximação o filtro ainda depende dos parâmetros, de modo que uma otimização iterativa é necessária. Uma opção é começar com $A(q) = 1$ no denominador do filtro e resolver um problema de mínimos quadrados e atualizar o filtro a cada iteração.

4.4.4.2 Mínimos quadrados com preditor não linear

Como antes, primeiramente considere o seguinte lema importante com respeito ao erro de predição obtido de dados sem ruído.

Lema 4.4. *Na ausência de ruído, o erro de predição do preditor não linear será sempre*

$$\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}) \Big|_{v(t)=0} = [Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] y(t), \quad (314)$$

independentemente se os dados vêm de um experimento em malha aberta ou fechada.

Prova. Novamente, considere inicialmente apenas dados de malha aberta. Nesse caso o sinal de excitação é $u(t)$ e o erro de predição do preditor não linear é dado por

$$\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}) = \tilde{u}(t) - C(q, \boldsymbol{\rho})\tilde{e}(t) \quad (315)$$

$$= u(t) - Q_d^{-1}(q)y(t) + C(q, \boldsymbol{\rho})y(t) \quad (316)$$

$$= [G^{-1}(q) + C(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] G(q)u(t) - [Q_d^{-1}(q) - C(q, \boldsymbol{\rho})] v(t) \quad (317)$$

$$= [Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] G(q)u(t) - [Q_d^{-1}(q) - C(q, \boldsymbol{\rho})] v(t), \quad (318)$$

onde (315) vem de (285), (286) e (298). Já, (316) vem de (126) e (127), enquanto que (317) vem da relação de malha aberta (3), e (318) vem de (38). Removendo o termo dependente de ruído de (318) resulta em (314).

Agora considere dados de malha fechada. Nesse caso, ao substituir novamente (306) e (307) em (316), pode se escrever o erro de predição do preditor não linear como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}) &= [G^{-1}(q) + C(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] T_o(q)r(t) \\ &\quad + [G^{-1}(q) + C(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] Q_o(q)d(t) \\ &\quad - [Q_d^{-1}(q) - C(q, \boldsymbol{\rho}) + C_o(q)] S_o(q)v(t)\end{aligned}\quad (319)$$

$$\begin{aligned}&= [Q^{-1}(q, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(q)] [T_o(q)r(t) + Q_o(q)d(t)] \\ &\quad - [Q_d^{-1}(q) - C(q, \boldsymbol{\rho}) + C_o(q)] S_o(q)v(t),\end{aligned}\quad (320)$$

onde (320) usa (38). Removendo em seguida o termo dependente do ruído de (320) obtém-se (314). ■

Teorema 4.9. *Quando a Suposição 2.4 é garantida e o preditor não linear (297) é obtido de dados sem ruído, um mínimo global de (299) é obtido com o vetor de parâmetros ideal.*

Prova. Usando o Lema 4.4 e substituindo $Q(q, \boldsymbol{\rho}^*) = Q_d(q)$ por conta da Suposição 2.4, a norma do erro se torna identicamente nula. Além disso, esse é um mínimo global porque o custo (299) não pode ser negativo. ■

Corolário 4.10. *Quando a Suposição 2.4 é garantida, usando o preditor não linear, os parâmetros do controlador ideal podem ser estimados através da solução de uma otimização não convexa de (299).*

Quando a suposição de pertinência se sustenta, o mínimo de (299) é obtido no vetor de parâmetros ideal. Porém, quando essa suposição é violada, os mínimos de (40) e (299) diferem. Nesse caso, o filtro pode ser empregado para forçar que os mínimos dos dois custos fiquem próximos.

Teorema 4.10. *Quando for utilizado o preditor não linear, computado a partir de dados sem ruído, o filtro que fará com que a função custo da norma do erro de predição (299) seja assintoticamente idêntica ao custo da resposta a perturbação (40) é tal que*

$$|W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{\Phi_y(\omega)}, \quad (321)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ e $\Phi_y(\omega)$ são os espectros da perturbação a ser rejeitada e da saída coletada, respectivamente.

Prova. Basta comparar o custo de resposta a perturbação (136) com o custo da norma do erro de predição (299) no domínio da frequência, obtido usando o Lema 4.4 e o teorema de Parseval:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_{pe}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 |Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})|^2 \Phi_y(\omega) d\omega, \quad (322)$$

e em seguida usar novamente a relação (144). O filtro que aproximará as duas funções custo será aquele em (321). ■

Observação 4.6. O filtro (321) é o mesmo do VDFT em (142) e, portanto, pode ser aproximado como em (143), repetido abaixo:

$$|W(e^{j\omega})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{\Phi_y(\omega)}, \quad (143)$$

contanto que $Q(q, \rho^*) \approx Q_d(q)$. Ou seja, se a violação da Suposição 2.4 for pequena.

Novamente, todas as quantias envolvidas em (143) são disponíveis do problema ou podem ser estimadas a partir dos dados. Além disso, diferentemente do filtro para o erro do preditor não linear, esse filtro não depende dos parâmetros. Mesmo assim a otimização terá que ser iterativa porque o custo não é convexo.

4.4.5 Soluções por correlação

Como no caso da parametrização linear do controlador, a minimização da norma do erro de predição resulta em uma estimativa polarizada na presença de ruído. Uma alternativa para contornar esse problema é a utilização de variáveis instrumentais, mas só pode ser empregada com o preditor linear. Uma alternativa melhor ainda pode ser a minimização da correlação entre o erro de predição e o sinal de excitação do experimento, resultando em uma variante do DCbT para controladores com parâmetros no denominador. Para tanto, considere novamente a norma da função de correlação:

$$V_c(\rho) = \frac{1}{N^2} \left\| \sum_{t=1}^N \zeta(t, \rho) \varepsilon_w(t, \rho) \right\|_2^2, \quad (323)$$

onde $\varepsilon_w(t, \rho)$ é o erro filtrado, como antes, e o vetor de instrumentos $\zeta(t)$ é construído com amostras do sinal de excitação. Novamente, as soluções são apresentadas separadamente para cada preditor a seguir.

4.4.5.1 Correlação e preditor linear

Considere primeiramente o que acontece quando a abordagem de correlação é empregada em conjunto com o preditor linear. Inicialmente considerando apenas dados sem ruído.

Teorema 4.11. *Se a Suposição 2.4 for garantida e o preditor linear for obtido de dados sem ruído, o custo (323) tem um mínimo global nos parâmetros ideais.*

Prova. Do Lema 4.3 o erro de predição é identicamente nulo no vetor de parâmetros ideal. Isso faz com que a norma da correlação também seja zero e, como (323) é convexa com o preditor linear, esse é um mínimo global. ■

Considere em seguida o que acontece se forem usados dados ruidosos respeitando a Suposição 2.4, da pertinência do controlador.

Lema 4.5. *Se a Suposição 2.4 for garantida, o erro de predição do preditor linear calculado para o vetor de parâmetros ideal será sempre*

$$\varepsilon_{\text{lin}}(t, \rho^*) = -A(q, \rho^*)G^{-1}(q)v(t), \quad (324)$$

independentemente se os dados forem de malha aberta ou fechada.

Prova. A demonstração é similar àquela do Lema 4.3, considerando inicialmente apenas dados de malha aberta. Partindo de (305), substituindo o vetor de parâmetros ideais e usando (301) resulta em (324).

Considere agora dados de malha fechada. Nesse caso, partindo de (309) e substituindo novamente o vetor de parâmetros ideais:

$$\varepsilon_{\text{lin}}(t, \boldsymbol{\rho}^*) = - [A(q, \boldsymbol{\rho}^*)Q_d^{-1}(q) - B(q, \boldsymbol{\rho}^*)C_f(q) + A(q, \boldsymbol{\rho}^*)C_o(q)] S_o(q)v(t) \quad (325)$$

$$= -A(q, \boldsymbol{\rho}^*) [G^{-1}(q) + C_o(q)] S_o(q)v(t), \quad (326)$$

onde (326) usa (301). Por fim, (324) é alcançada usando a seguinte igualdade:

$$[G^{-1}(q) + C_o(q)] S_o(q) = G^{-1}(q), \quad (327)$$

que pode ser obtida diretamente de (11) e (38). ■

Teorema 4.12. *Sob as Suposições 2.3 e 2.4, considerando o erro de predição do preditor linear calculado para dados ruidosos, o custo de correlação (323) tem um mínimo assintótico nos parâmetros ideais.*

Prova. Do Lema 4.5, o erro de predição calculado nos parâmetros ideais é simplesmente ruído filtrado, descorrelacionado com a entrada do experimento pela Suposição 2.3. Desse modo, $V_c(\boldsymbol{\rho}^*)$ é um mínimo de (323). ■

Corolário 4.11. *Quando as Suposições 2.3 e 2.4 puderem ser garantidas, o vetor de parâmetros ideal pode ser estimado por*

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = [\mathbf{X}_W^T \mathbf{X}_W]^{-1} [\mathbf{X}_W^T \boldsymbol{\xi}_W], \quad (328)$$

com

$$\mathbf{X}_W = \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\zeta}(t) \boldsymbol{\varphi}_W^T(t), \quad \boldsymbol{\xi}_W = \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\zeta}(t) \tilde{\mathbf{u}}_W(t),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_W(t) = W(q)\boldsymbol{\varphi}(t), \quad \tilde{\mathbf{u}}_W(t) = W(q)\tilde{\mathbf{u}}(t).$$

Quando a Suposição 2.4 é garantida os mínimos de (40) e (323) são o mesmo, mas se essa suposição for violada os mínimos serão diferentes. Nesse caso é possível utilizar o filtro para aproximar as duas funções, como anteriormente.

Teorema 4.13. *Sob a Suposição 2.3, quando for utilizado o preditor linear, o filtro que fará com que a função custo da correlação (323) seja assintoticamente idêntica ao custo da resposta a perturbação (40) é tal que*

$$|W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})Q_d(e^{j\omega})|^2}{|A(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2} \frac{\Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yx}(\omega)|^2}, \quad (329)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ e $\Phi_{yx}(\omega)$ são, respectivamente, o espectro da perturbação a ser rejeitada e o espectro cruzado entre a saída coletada e o sinal de excitação.

Prova. Basta comparar o custo de resposta a perturbação (136) com o custo da correlação (323) no domínio da frequência, obtido usando o Lema 4.3 e o teorema de Parseval:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow \infty}} V_c(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 |A(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 |Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})|^2 |\Phi_{yx}(\omega)|^2 d\omega, \quad (330)$$

e em seguida usar a relação (144). O filtro que aproxima as duas funções custo é aquele em (329). Note que o Lema 4.3 é empregado aqui, mesmo que os dados sejam ruidosos, por conta da Suposição 2.3. Em outras palavras, a parcela do erro que viria do ruído não contribui para o custo de correlação. ■

Observação 4.7. O filtro em (329) pode ser aproximado por

$$|W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})Q_d(e^{j\omega})|^2}{|A(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2} \frac{\Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yx}(\omega)|^2}, \quad (331)$$

contanto que $Q(q, \boldsymbol{\rho}^*) \approx Q_d(q)$. Ou seja, se a Suposição 2.4 não for muito violada.

Mais uma vez, todas as quantias envolvidas em (331) estão disponíveis do problema ou podem ser estimadas dos dados. Além disso, novamente o filtro depende dos parâmetros, o que dificulta a estimativa em um passo só. Uma alternativa é a otimização iterativa sugerida anteriormente, que consiste em iniciar com $A(q) = 1$ e resolver um problema convexo e atualizar o filtro a cada iteração.

4.4.5.2 Correlação e preditor não linear

Considere agora o que acontece ao empregar a abordagem de correlação em conjunto com o preditor não linear, iniciando novamente com dados sem ruído.

Teorema 4.14. *Sob a Suposição 2.4, empregando o preditor não linear obtido a partir de dados sem ruído, o custo (323) tem um mínimo global nos parâmetros ideais.*

Prova. O Lema 4.4 indica que o erro de predição calculado para os parâmetros ideais é identicamente nulo na ausência de ruído. Nessa caso a correlação também será nula, resultando em um mínimo global de (323), porque essa é uma função não negativa. ■

Considere agora que os dados são ruidosos, mas que a Suposição 2.4, da pertinência do controlador, é garantida.

Lema 4.6. *Se a Suposição 2.4 for válida, o erro de predição do preditor não linear calculado no vetor de parâmetros ideais será sempre*

$$\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}^*) = -G^{-1}(q)v(t), \quad (332)$$

independentemente se os dados forem coletados durante um experimento em malha aberta ou fechada.

Prova. Primeiramente, considere apenas dados de malha aberta. Nesse caso, usando o vetor de parâmetros ideais em (318) resulta no erro de predição

$$\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}^*) = - [Q_d^{-1}(q) - C(q, \boldsymbol{\rho}^*)] v(t), \quad (333)$$

em seguida, aplicando (301) produz (332).

Agora, considere dados de malha fechada. Nesse caso, ao substituir os parâmetros ideais em (320), obtém-se:

$$\varepsilon_{nl}(t, \boldsymbol{\rho}^*) = - [Q_d^{-1}(q) - C(q, \boldsymbol{\rho}^*) + C_o(q)] S_o(q) v(t) \quad (334)$$

$$= - [G^{-1}(q) + C_o(q)] S_o(q) v(t), \quad (335)$$

onde (335) usa (38). Em seguida, usando novamente a igualdade (327) resulta em (332). ■

Teorema 4.15. *Se as Suposições 2.3 e 2.4 forem garantidas, considerando o erro de predição do preditor linear calculado com dados ruidosos, o custo de correlação (323) tem um mínimo assintótico no vetor de parâmetros ideal.*

Prova. De acordo com o Lema 4.6, o erro de predição do preditor não linear calculado para os parâmetros ideais é apenas ruído filtrado, descorrelacionado com a entrada de excitação por conta da Suposição 2.3. Assim, $V_c(\boldsymbol{\rho}^*)$ é um mínimo de (323). ■

Corolário 4.12. *Sob as Suposições 2.3 e 2.4, usando o preditor não linear, os parâmetros do controlador ideal podem ser estimados através da solução de uma otimização não convexa de (323).*

Perceba novamente que se a Suposição 2.4 for violada, os mínimos de (40) e (323) não serão mesmo. No entanto, é possível projetar o filtro de modo a compensar essa violação.

Teorema 4.16. *Se a Suposição 2.3 for válida, ao usar o preditor não linear, o filtro que fará com que a função custo da correlação (323) seja similar à função custo da resposta a perturbação (40) é tal que*

$$|W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 = \frac{|Q(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yx}(\omega)|^2}, \quad (336)$$

onde $\Phi_d(\omega)$ e $\Phi_{yx}(\omega)$ são, respectivamente, o espectro da perturbação a ser rejeitada e o espectro cruzado entre a saída coletada e o sinal de excitação.

Prova. Compare o custo da resposta a perturbação (40) com o custo da correlação (323) no domínio da frequência, obtido usando o Lema 4.4 e o teorema de Parseval:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow \infty}} V_c(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho})|^2 |Q^{-1}(e^{j\omega}, \boldsymbol{\rho}) - Q_d^{-1}(e^{j\omega})|^2 |\Phi_{yx}(\omega)|^2 d\omega. \quad (337)$$

Usando a igualdade (144) é possível mostrar que o filtro que aproxima os dois custos é aquele em (336). ■

Observação 4.8. O filtro em (336) pode ser aproximado por

$$|W(e^{j\omega}, \rho)|^2 \approx \frac{|Q_d(e^{j\omega})Q_d(e^{j\omega})|^2 \Phi_d(\omega)}{|\Phi_{yx}(\omega)|^2}, \quad (338)$$

contanto que $Q(q, \rho^*) \approx Q_d(q)$. Ou seja, se a Suposição 2.4 não for muito violada.

Ainda outra vez, todas as quantias envolvidas na aproximação (338) são disponíveis do problema ou podem ser estimadas a partir dos dados. Além disso, o filtro não depende dos parâmetros, mas uma otimização iterativa é necessária porque a função custo não é convexa.

Exemplo 4.4. Considere o seguinte sistema estável com ganho estático unitário:

$$G(q) = \frac{1}{120} \frac{q^{-1}(1 - 0,7q^{-1})}{(1 - 0,95q^{-1})^2}, \quad (339)$$

cujo modelo é supostamente desconhecido. Suponha também que se deseja rejeitar completamente perturbações constantes em regime, o que pode ser alcançado com uma ação de controle integral. Considere que o controlador disponível tem estrutura PIDF parecida com (21) mas foi reparametrizado como:

$$C(q, \rho) = \frac{b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2}}{1 + a_1q^{-1}} \frac{1}{1 - q^{-1}}, \quad (340)$$

já decomposto para mostrar o integrador como parte fixa. Observe que isso é o mesmo que utilizar um algoritmo de velocidade na implementação do controlador. Considere ainda o seguinte modelo de referência desejado para a função de sensibilidade a perturbação de carga:

$$Q_d(q) = \frac{1}{120} \frac{q^{-1}(1 - 0,7q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,95q^{-1})^2}, \quad (341)$$

que é aproximadamente tão rápido quanto o processo em malha aberta mas rejeita perturbações constantes. Se o modelo do processo estivesse disponível, usando (37) seria fácil calcular o controlador ideal:

$$C(q, \rho^*) = \frac{12 - 22,8q^{-1} + 10,83q^{-2}}{1 - 0,7q^{-1}} \frac{1}{1 - q^{-1}}, \quad (342)$$

que também é um PIDF e, portanto, nesse caso a Suposição 2.4 é válida.

Para gerar os dados necessários para os métodos foram realizadas 100 simulações de Monte Carlo com o processo em malha aberta variando apenas a realização do ruído de medição. Cada simulação compreende 3000 amostras de dados onde o processo foi excitado por uma onda quadrada com níveis ± 1 e período de 300 amostras. O ruído de medição é branco com variância $\sigma^2 = 0,0025$.

Os dados simulados foram empregados para ajustar 100 controladores usando cada um dos métodos de ajuste de controladores com parâmetros no denominador apresentados. Para o caso do ajuste pelo erro do preditor linear, os controladores foram obtidos analiticamente pelo Corolário 4.9. Já, para o caso do ajuste pelo erro do preditor não linear, os controladores foram obtidos através de uma otimização iterativa pelo Corolário 4.10. Para o caso do ajuste pela correlação com preditor linear, novamente os controladores

foram obtidos analiticamente pelo Corolário 4.11. Finalmente, para o caso do ajuste pela correlação com preditor não linear, os controladores foram obtidos através de uma otimização iterativa usando o Corolário 4.12. Para as otimizações iterativas, foi utilizado um valor inicial $\rho^{[0]} = 0,5\rho^*$ e foram calculadas 1000 iterações. Além disso, como a Suposição 2.4 é válida, os dados não foram pré-filtrados.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 10. Observe que o método de ajuste

Tabela 10 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no Exemplo 4.4

		ESTIMATIVAS			
		ERRO DE PREDIÇÃO		CORRELAÇÃO	
ρ	ρ^*	linear ^a	não linear ^b	linear ^c	não linear ^d
a_0	-0,70	0,21 ($\pm 0,02$)	-0,72 ($\pm 0,01$)	-0,70 ($\pm 0,02$)	-0,70 ($\pm 0,02$)
b_1	12,00	35,60 ($\pm 0,73$)	11,23 ($\pm 0,38$)	11,97 ($\pm 0,44$)	12,04 ($\pm 0,46$)
b_2	-22,80	-66,60 ($\pm 1,38$)	-21,35 ($\pm 0,72$)	-22,75 ($\pm 0,82$)	-22,88 ($\pm 0,85$)
b_3	10,83	31,12 ($\pm 0,66$)	10,15 ($\pm 0,33$)	10,81 ($\pm 0,38$)	10,87 ($\pm 0,40$)

^a usando o Corolário 4.9.

^b usando o Corolário 4.10.

^c usando o Corolário 4.11.

^d usando o Corolário 4.12.

pelo erro de predição com preditor linear foi o que obteve, de longe, os piores resultados. Como mencionado, isso é porque esse método é bastante sensível ao ruído por tentar resolver um problema de erros nas variáveis através de mínimos quadrados. Por outro lado, é interessante notar que o método de ajuste pelo erro de predição com preditor não linear não apresentou resultados tão ruins, devido ao seu preditor ser diferente. Já os métodos que usam a abordagem de correlação apresentaram os melhores resultados. Isso já era esperado, uma vez que essa abordagem é muito mais imune aos efeitos do ruído. \diamond

Exemplos de implementações simples dos métodos de ajuste de controladores monovariáveis para rejeição de perturbação através da minimização de erro de predição com preditor linear e com preditor não linear são apresentados nas listagens A.12 e A.14, no Apêndice A. Já os métodos de ajuste através da minimização da correlação empregando preditor linear e preditor não linear são apresentados nas listagens A.15 e A.16.

4.5 Considerações finais

Nesse capítulo foi proposto um novo método baseado em dados para ajuste de controladores visando uma resposta a perturbação de carga semelhante à resposta de um modelo de referência. Esse método, ao qual foi dado o nome de DCbT, usa a abordagem de correlação e depende de uma variável de erro com certas características. Assim, o método foi inicialmente proposto com vistas ao ajuste de controladores monovariáveis, de preferência linearmente parametrizados. Em seguida, uma variável de erro para sistemas multivariáveis também foi proposta, simplesmente extrapolada da variável inicial, permitindo a expansão do método para esse tipo de sistemas. Por fim, voltando ao domínio monovariável, foram propostas modificações que permitem o ajuste de controladores com parâmetros no denominador. Para tanto, foi preciso aproveitar os sinais virtuais do VDFT

e usar erros de predição com modelos semelhantes aos empregados na identificação de sistemas. Cabe notar aqui que o método monovariável para controladores parametrizados linearmente pode ser visto como um caso particular dos outros dois.

Além disso, tanto para o caso monovariável como para o multivariável com controladores parametrizados linearmente, foi proposto um modelo de referência flexível. Isso permite melhorar a validade da pertinência do controlador ideal e facilitar a escolha do modelo de referência. Mesmo quando essa suposição não pode ser garantida foram propostos diversos filtros que melhoram as estimativas obtidas.

Finalmente, algumas vezes é necessário resolver uma otimização iterativa que necessita de uma estimativa inicial. Nesses casos foram apresentadas opções de inicialização e quando a opção não for óbvia é possível inicializar o método iterativo usando uma das estimativas analíticas.

5 PROPOSTA DE MÉTODO BASEADO EM DADOS PARA CERTIFICAÇÃO DO CONTROLADOR

Nos capítulos anteriores foi apresentado como os métodos de controle baseado em dados se baseiam em conceitos da área de identificação de sistemas e, por conta disso, dependem de que a classe de modelos do controlador e o modelo de referência sejam bem escolhidos, i.e. que a pertinência do controlador não seja demasiadamente violada. Quando a pertinência não pode ser alcançada, foi mostrado que um filtro pode ser empregado para modificar o formato da função custo a ser otimizada fazendo com que o seu mínimo se aproxime do mínimo da verdadeira função objetivo da resposta do sistema em malha fechada. Por fim, também foi apresentada uma técnica de flexibilização do modelo de referência para ajudar a aumentar as chances de que a pertinência seja respeitada ou mesmo pouco violada.

Contudo, quando se fala de controle baseado em dados, em geral a Suposição 2.4 não pode ser garantida. Quando a violação da pertinência é grande o sistema resultante em malha fechada pode apresentar comportamento muito diferente do desejado. Portanto, como em qualquer outro problema de controle, é importante certificar o controlador para evitar que um ajuste inadequado resulte na instabilidade do sistema em malha fechada. Com isso em mente, o objetivo deste capítulo é apresentar a proposta de um método de certificação de controladores monovariáveis baseado em dados.

O método proposto se fundamenta em uma condição introduzida por Vinnicombe (1993) que compara a margem de estabilidade generalizada do sistema em malha fechada com a distância de Vinnicombe entre o controlador atual e o candidato. Esta condição é sabidamente conservadora, porém há duas maneiras de amenizar este problema: calcular a condição frequência a frequência e usar um redimensionamento dos sinais do sistema. Desse modo, os seguintes assuntos serão abordados neste capítulo:

- a) a proposta original resumida da condição de Vinnicombe;
- b) as melhorias propostas na literatura para reduzir o conservadorismo;
- c) a nova condição proposta para sistemas monovariáveis;
- d) técnicas para estimação das funções de resposta em frequência necessárias;
- e) uma rápida comparação com outros métodos da literatura.

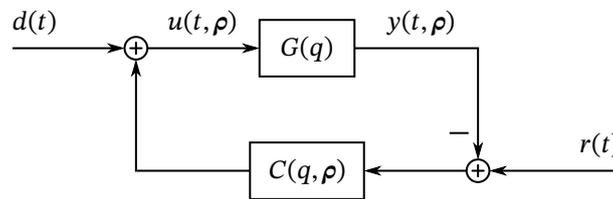
5.1 Margem de estabilidade e distância de Vinnicombe

No trabalho de Kammer, Bitmead e Bartlett (2000) foi sugerido pela primeira vez comparar a distância de Vinnicombe com a margem de estabilidade generalizada do

sistema para garantir a estabilidade da malha fechada após o ajuste do controlador com um método baseado em dados. Vinnicombe (1993) propôs a comparação entre essas duas métricas para garantir a estabilidade da malha fechada, porém naquele trabalho considerou um único controlador e a variabilidade do processo. Já Kammer, Bitmead e Bartlett (2000) inverteram os papéis do processo e do controlador, considerando que este último é o que varia. A abordagem original de Vinnicombe (1993) utiliza valores extremos (supremo e ínfimo) das métricas, o que resulta em uma estimativa muito conservadora para a estabilidade. Porém, Steele e Vinnicombe (2002) propuseram uma comparação frequência a frequência juntamente com uma ponderação (filtragem) dos sinais, reduzindo o conservadorismo.

Considere, por exemplo, uma malha fechada monovariável internamente estável com um controlador $C(q, \rho)$ qualquer. Na ausência de ruído o sistema pode ser representado conforme a Figura 11. Observe que a equação que descreve as relações entre as entradas e

Figura 11 — diagrama de blocos da malha fechada generalizada.



Fonte: adaptado de Steele e Vinnicombe (2002).

os sinais internos desse sistema é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} u(t, \rho) \\ y(t, \rho) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S(q, \rho) & C(q, \rho)S(q, \rho) \\ Q(q, \rho) & T(q, \rho) \end{bmatrix}}_{T_{\text{gen}}(q, \rho)} \begin{bmatrix} d(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad (343)$$

onde $T_{\text{gen}}(q, \rho)$ é o operador de transferência que mapeia as entradas externas para os sinais internos. Observe que este operador é multivariável e, como tal, apresenta ganhos diferentes dependendo da direção do vetor de entrada. O maior ganho desse sistema para uma determinada frequência é dado pelo maior valor singular da matriz de resposta em frequência naquela frequência:

$$\bar{\sigma}[T_{\text{gen}}(e^{j\omega}, \rho)] = \sqrt{\bar{\lambda}[T_{\text{gen}}^H(e^{j\omega}, \rho)T_{\text{gen}}(e^{j\omega}, \rho)]}, \quad (344)$$

onde \circ^H representa o conjugado transposto, $\bar{\sigma}[\circ]$ é o maior valor singular, e $\bar{\lambda}[\circ]$ é o maior autovalor de uma matriz. Quando o processo é monovariável, como é o caso considerado aqui, esse ganho pode ser calculado analiticamente, como mostra o seguinte lema.

Lema 5.1. Para sistemas monovariáveis, o maior ganho da malha fechada generalizada em determinada frequência é dado por

$$\bar{\sigma}[T_{\text{gen}}(e^{j\omega}, \rho)] = \frac{\sqrt{(1 + |G(e^{j\omega})|^2)(1 + |C(e^{j\omega}, \rho)|^2)}}{|1 + G(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|} \quad (345)$$

Prova. Basta notar que

$$\mathbf{T}_{\text{gen}}^H \mathbf{T}_{\text{gen}} = \begin{bmatrix} \bar{S} & \bar{Q} \\ \bar{C}S & \bar{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & CS \\ Q & T \end{bmatrix} \quad (346)$$

$$= \begin{bmatrix} |S|^2 + |Q|^2 & C|S|^2 + \bar{Q}T \\ \bar{C}|S|^2 + \bar{T}Q & |C|^2|S|^2 + |T|^2 \end{bmatrix} \quad (347)$$

$$= |S|^2 (1 + |G|^2) \begin{bmatrix} 1 & C \\ \bar{C} & |C|^2 \end{bmatrix}, \quad (348)$$

onde os parâmetros $e^{j\omega}$ e ρ são omitidos para não carregar a notação. A matriz à direita de (348) é claramente singular, ou seja, pelo menos um de seus autovalores é zero. Nesse caso o outro autovalor pode ser obtido diretamente pelo traço da matriz:

$$\bar{\lambda}[\mathbf{T}_{\text{gen}}^H \mathbf{T}_{\text{gen}}] = |S|^2 (1 + |G|^2) (1 + |C|^2). \quad (349)$$

Substituindo esse autovalor em (344) e usando a definição da função de sensibilidade (9), resulta em (345). ■

Observe que (349) também é a norma de Frobenius, i.e. a soma dos quadrados das amplitudes das quatro funções de sensibilidade que compõem $\mathbf{T}_{\text{gen}}(q, \rho)$. Como $S(q, \rho) + T(q, \rho) = 1$, pela desigualdade triangular, $\bar{\sigma}[\mathbf{T}_{\text{gen}}(e^{j\omega}, \rho)] \geq 1$ para todas as frequências. O menor limitante superior desse ganho para todas as frequências é a norma \mathcal{H}_∞ do sistema:

$$\|\mathbf{T}_{\text{gen}}(q, \rho)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}[\mathbf{T}_{\text{gen}}(e^{j\omega}, \rho)]. \quad (350)$$

No caso da certificação pela distância de Vinnicombe a inversa do maior ganho é mais utilizada que o próprio ganho. Desse modo, a seguinte função é definida diretamente a partir de (345):

$$\gamma(\omega, \rho) = \frac{|1 + G(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|}{\sqrt{(1 + |G(e^{j\omega})|^2)(1 + |C(e^{j\omega}, \rho)|^2)}}. \quad (351)$$

e pelo mesmo motivo da desigualdade anterior, $0 \leq \gamma(\omega, \rho) \leq 1$ para todas as frequências.

Definição 5.1 (Margem de estabilidade generalizada). Para um sistema estável, a *margem de estabilidade generalizada* é o inverso da sua norma \mathcal{H}_∞ , ou seja, o maior limitante inferior de (351):

$$\epsilon_{G,C}(\rho) = \inf_\omega \gamma(\omega, \rho) = \|\mathbf{T}_{\text{gen}}(q, \rho)\|_\infty^{-1}, \quad (352)$$

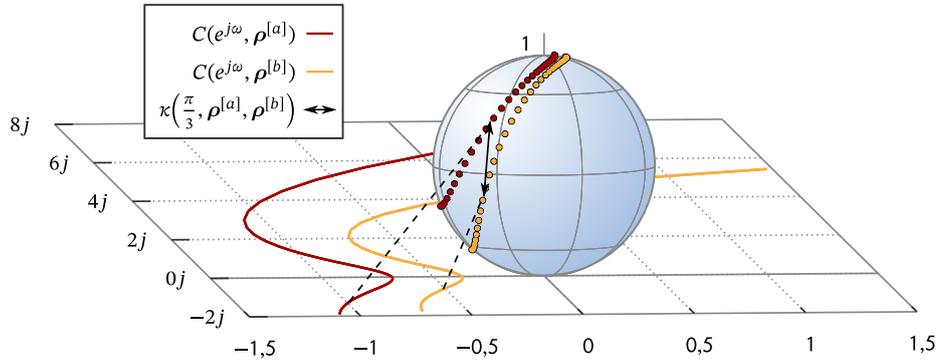
por outro lado, se o sistema for instável a margem de estabilidade generalizada será zero.

Já a distância de Vinnicombe é uma métrica do efeito sobre a margem de estabilidade generalizada devido à substituição de um bloco da malha fechada por outro, nesse caso a troca do (parâmetro do) controlador. Considere, por exemplo, dois controladores quaisquer, $C(q, \rho^{[a]})$ e $C(q, \rho^{[b]})$, sobre os quais a seguinte função é definida:

$$\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}) = \frac{|C(e^{j\omega}, \rho^{[a]}) - C(e^{j\omega}, \rho^{[b]})|}{\sqrt{(1 + |C(e^{j\omega}, \rho^{[a]})|^2)(1 + |C(e^{j\omega}, \rho^{[b]})|^2)}}, \quad (353)$$

que representa a distância medida entre as projeções das respostas em frequência dos controladores em direção ao polo superior de uma esfera de diâmetro unitário repousando sobre a origem do plano complexo, conhecida como esfera de Riemann (VINNICOMBE, 2001). Essa interpretação gráfica é apresentada na Figura 12. Assim como a margem

Figura 12 — representação gráfica da distância de Vinnicombe.



Respostas em frequência dos controladores (sólidas grossas), projeções sobre a superfície da esfera de Riemann (tracejadas finas), pontos projetados (pontilhadas grossas) e distância para uma determinada frequência (seta sólida fina). Fonte: adaptado de Vinnicombe (2001).

de estabilidade generalizada, a distância de Vinnicombe utiliza um limitante da função $\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]})$, porém com uma condição de adicional sobre o número de contornos da origem no plano de Nyquist:

$$\eta [C(q, \rho^{[a]}), -\overline{C}(q, \rho^{[b]})] = \eta [C(q, \rho^{[b]}), -\overline{C}(q, \rho^{[a]})], \quad (354)$$

onde, de acordo com Steele e Vinnicombe (2002), $\eta [P, C]$ é o número de zeros de fase não mínima da malha fechada com realimentação positiva composta pelos blocos P e C . Além disso, $\overline{C}(\rho)$ é o conjugado complexo do controlador. Uma justificativa simples dessa condição é dada por Åström e Murray (2008).

Definição 5.2 (Distância de Vinnicombe). O limite superior da função $\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]})$ é a chamada *distância de Vinnicombe* ou *v-gap*.

$$\delta_v(\rho^{[a]}, \rho^{[b]}) = \begin{cases} \sup_{\omega} \kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}), & \text{se (354)} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (355)$$

Pode-se observar uma semelhança entre as funções $\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]})$ e $\gamma(\omega, \rho)$ acima. Na verdade, de acordo com Steele e Vinnicombe (2002), a margem de estabilidade generalizada também pode ser calculada como a distância de Vinnicombe entre o processo e a inversa do controlador.

Observação 5.1. A Definição 5.1 não deve ser confundida com o conceito mais simples de *margem de estabilidade*, por exemplo, que é o ínfimo do numerador de $\gamma(\omega, \rho)$ apenas. A margem de estabilidade também é o inverso da máxima sensibilidade e pode ser medida diretamente no plano complexo, uma vez que também é a menor distância entre a curva de Nyquist do operador de transferência de malha aberta, $G(q)C(q, \rho)$, e o ponto $(-1; 0j)$, como mostrado por Åström e Murray (2008). Por outro lado, a margem de estabilidade generalizada necessita da esfera de Riemann para ter interpretação gráfica.

5.2 Condição de Vinnicombe

Apesar de existir uma interpretação gráfica para a distância de Vinnicombe, a seguinte interpretação é mais útil. Considere que o laço fechado estável com um dos controladores é o sistema em malha fechada nominal. A distância $\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]})$ representa um limitante superior para a perturbação que seria inserida na malha fechada (em relação à nominal) por substituir um controlador pelo outro na frequência ω . Note que a perturbação à qual se refere essa seção não se trata de um sinal mas de uma perturbação na margem de estabilidade generalizada do sistema. Com isso Steele e Vinnicombe (2002) propuseram o seguinte.

Teorema 5.1 (Proposição 2 de Steele e Vinnicombe (2002), controlador e processo com papéis trocados). *Considerando uma malha fechada com o processo $G(q)$, um controlador estabilizante $C(q, \rho^{[a]})$ e um controlador candidato $C(q, \rho^{[b]})$, a seguinte relação sempre se mantém:*

$$\epsilon_{G,C}(\rho^{[b]}) \geq \epsilon_{G,C}(\rho^{[a]}) - \delta_v(\rho^{[a]}, \rho^{[b]}). \quad (356)$$

Prova. Pode ser encontrada em Steele e Vinnicombe (2002) e mais detalhada em Vinnicombe (1993, 2001). ■

Corolário 5.1 (Resultado RS1 de Vinnicombe (2001, p. 110), controlador e processo com papéis trocados). *Se a distância de Vinnicombe entre os dois controladores for menor que a margem de estabilidade original do sistema com o controlador estabilizante, o controlador candidato também estabiliza o processo.*

Exemplo 5.1 (adaptado de Pinto da Silva e Eckhard (2020a)). Considere o seguinte processo monovariável:

$$G(q) = \frac{-0,04q^{-1}(1 - 1,2q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,92q^{-1})}, \quad (357)$$

inicialmente em malha fechada com o seguinte controlador:

$$C(q, \rho^{[a]}) = 0,663 + 0,0426 \frac{1}{1 - q^{-1}}. \quad (358)$$

Esse controlador estabiliza internamente o sistema. Agora suponha que o seguinte controlador candidato foi obtido a partir de um método baseado em dados:

$$C(q, \rho^{[b]}) = 0,8 + 0,01 \frac{1}{1 - q^{-1}}. \quad (359)$$

A questão é: será que o controlador candidato também estabiliza o sistema? Usando o Matlab® para calcular a margem de estabilidade generalizada do sistema original e a distância de Vinnicombe, obtém-se:

$$0,4887 = \delta_v(\rho^{[a]}, \rho^{[b]}) \not\leq \epsilon_{G,C}(\rho^{[a]}) = 0,4072, \quad (360)$$

o que não certifica o controlador pelo Corolário 5.1. Porém não se deve tirar conclusões precipitadas, é preciso lembrar que o Corolário 5.1 é conservador. ◇

5.3 Condição frequência a frequência

Na verdade o controlador candidato do Exemplo 5.1 estabiliza o sistema. O que ocorre é que esse método de certificação dá uma condição somente suficiente para a certificação do controlador, porém é sabido que a certificação através do Corolário 5.1 pode ser muito conservadora. Um pouco desse conservadorismo é devido à utilização dos pontos extremos das duas funções discutidas anteriormente. Uma abordagem menos conservadora compara as duas funções em todo o espectro de frequência.

Teorema 5.2 (de Vinnicombe (2001, lema 3.6) com os papéis do controlador e do processo trocados.). *Seja a malha fechada internamente estável formada pelo processo $G(q)$ e pelo controlador $C(q, \rho^{[a]})$ e existindo um outro controlador candidato $C(q, \rho^{[b]})$ tal que*

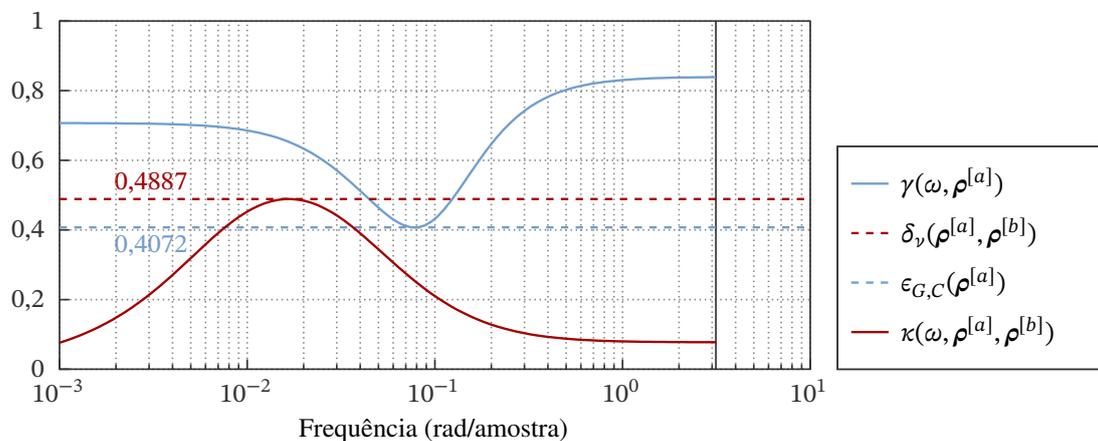
$$\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}) < \gamma(\omega, \rho^{[a]}) \quad \forall \omega \in [0; \pi], \quad (361)$$

então o controlador candidato também estabiliza internamente o sistema contanto que a condição (354) seja verificada.

Prova. Pode ser encontrada em Vinnicombe (2001). ■

Exemplo 5.2. Considere o mesmo sistema e controlador candidato do Exemplo 5.1. Esse controlador pode ser certificado se for usada uma comparação frequência a frequência, visualizada através da Figura 13. Observe novamente que os pontos extremos das curvas

Figura 13 — Curvas para certificação do Exemplo 5.1.



Margem de estabilidade generalizada (azul tracejado) e distância de Vinnicombe (vermelho tracejado), além de suas respectivas funções frequência a frequência (linhas contínuas). Fonte: elaborado pelo autor.

não são suficientes para certificar o controlador candidato. Porém, como uma curva fica completamente abaixo da outra, o controlador candidato pode ser certificado. ◇

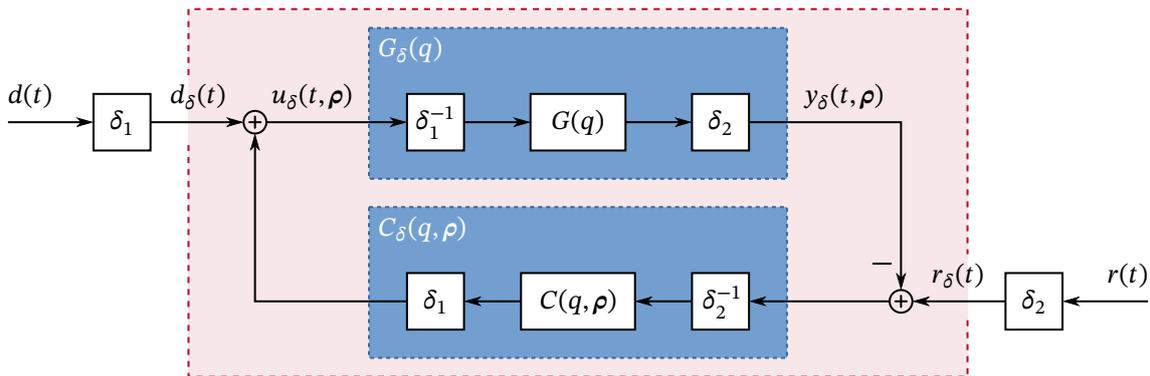
5.4 Mudança de unidades

Além de comparar as funções $\kappa(\circ)$ e $\gamma(\circ)$ frequência a frequência, os valores dessas funções podem ser distorcidos através de uma filtragem dos sinais de interesse. De fato, Steele e Vinnicombe (2002) mostram que até mesmo uma mudança de unidades de medida dos sinais pode distorcer essas duas funções em frequência. Portanto, uma boa

escolha dessas unidades de medida pode contribuir para a redução do conservadorismo da certificação.

Em geral, os sinais de interesse do sistema são medidos em duas unidades de medida distintas: os sinais de entrada/controlador/perturbação em uma e os sinais de referência/saída/erro em outra. De modo que uma mudança das unidades de medida dos sinais da malha fechada introduz dois “ganhos”, δ_1 e δ_2 , além do blocos do processo e controlador redimensionados, $G_\delta(q)$ e $C_\delta(q, \rho)$, ilustrados na Figura 14. O sistema como um todo

Figura 14 — diagrama de blocos mostrando o redimensionamento.



O sistema completo é o mesmo, mas o sistema interno redimensionado faz com que as funções $\kappa(\odot)$ e $\gamma(\odot)$ fiquem distorcidas. Fonte: produzido pelo autor.

ainda é o mesmo descrito por (343), porém com as seguintes relações:

$$d_\delta(t) = \delta_1 d(t), \quad (362)$$

$$u_\delta(t, \rho) = \delta_1 u(t, \rho), \quad (363)$$

$$r_\delta(t) = \delta_2 r(t), \quad (364)$$

$$y_\delta(t, \rho) = \delta_2 y(t, \rho), \quad (365)$$

$$G_\delta(q) = \delta^{-1} G(q), \quad (366)$$

$$C_\delta(q, \rho) = \delta C(q, \rho), \quad (367)$$

onde $\delta = \delta_1 \delta_2^{-1}$ será chamado de *fator de redimensionamento*.

Exemplo 5.3 (de Pinto da Silva e Eckhard (2020a)). Suponha que o sinal de controle $u(t, \rho)$ de um determinado sistema será convertido de litros por segundo para metros cúbicos por minuto, gerando o sinal redimensionado $u_\delta(t, \rho)$, enquanto que as unidades originais da saída do processo serão mantidas. Nesse caso, $\delta = \delta_1 = 60/1000$ e $\delta_2 = 1$. \diamond

É possível utilizar uma estratégia de redimensionamento para reduzir o conservadorismo da certificação através do seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Seja a malha fechada internamente estável formada pelo processo $G(q)$ e pelo controlador $C(q, \rho^{[a]})$ e suponha que exista um outro controlador candidato $C(q, \rho^{[b]})$. Nesse caso, se a condição (354) for verificada e se*

$$\exists \delta > 0 \mid \kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}, \delta) < \gamma(\omega, \rho^{[a]}, \delta) \quad \forall \omega \in [0; \pi], \quad (368)$$

onde

$$\gamma(\omega, \rho, \delta) = \frac{|1 + G(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|}{\sqrt{(1 + \delta^{-2}|G(e^{j\omega})|^2)(1 + \delta^2|C(e^{j\omega}, \rho)|^2)}}, \quad (369)$$

$$\kappa(\omega, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}, \delta) = \frac{\delta|C(e^{j\omega}, \rho^{[a]}) - C(e^{j\omega}, \rho^{[b]})|}{\sqrt{(1 + \delta^2|C(e^{j\omega}, \rho^{[a]})|^2)(1 + \delta^2|C(e^{j\omega}, \rho^{[b]})|^2)}}, \quad (370)$$

então o controlador candidato também estabiliza internamente o sistema.

Prova. Como mencionado, o sistema nas Figuras 11 e 14 é o mesmo. Entretanto, note que se for considerada apenas a relação entre os sinais redimensionados (362) a (365), a seguinte equação é obtida para o sistema

$$\begin{bmatrix} u_\delta(t, \rho) \\ y_\delta(t, \rho) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S(q, \rho) & \delta C(q, \rho)S(q, \rho) \\ \delta^{-1}Q(q, \rho) & T(q, \rho) \end{bmatrix}}_{T_{\delta\text{gen}}(q, \rho)} \begin{bmatrix} d_\delta(t) \\ r_\delta(t) \end{bmatrix}, \quad (371)$$

onde $T_{\delta\text{gen}}(q, \rho)$ é a parte “interna” do sistema que será chamado de *sistema redimensionado*. De fato, usando (362) a (367), (343) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} u(t, \rho) \\ y(t, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T_{\delta\text{gen}}(q, \rho) \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ r(t) \end{bmatrix}. \quad (372)$$

Como o sistema original é apenas o sistema redimensionado pré e pós-multiplicado por ganhos estáticos, se $0 < \delta < \infty$, basta que

$$\|T_{\delta\text{gen}}(q, \rho)\|_\infty^{-1} > 0 \quad (373)$$

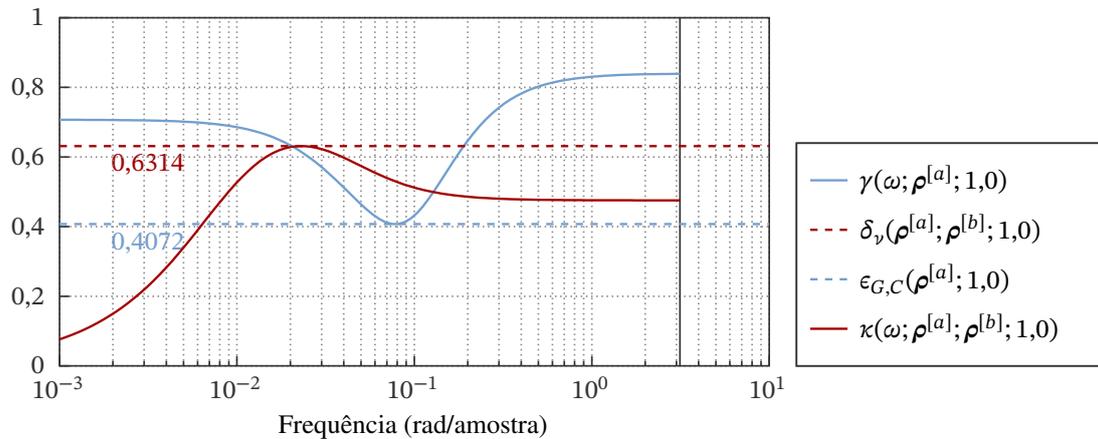
para que o sistema original seja internamente estável. As funções $\gamma(\circ)$ e $\kappa(\circ)$ para o sistema redimensionado são dadas respectivamente por (369) e (370), construídas a partir das relações em (366) e (367). Desse modo, uma condição suficiente para que o controlador seja certificado é a existência de um fator de redimensionamento que faça com que uma curva fique completamente abaixo da outra, contanto que a condição de contorno seja verificada. ■

Observação 5.2. É importante notar que os blocos redimensionados são empregados apenas no cálculo das métricas envolvidas na certificação, nada é modificado no sistema real, sinais, controle ou supervisor. Além disso, as unidades de medida após o redimensionamento não importam e, em geral, não vão condizer com nenhuma unidade de medida real, uma vez que, para cada valor de δ existem infinitas combinações possíveis de δ_1 e δ_2 . Na realidade, o único parâmetro de interesse daqui em diante é a razão entre as mudanças de unidades, i.e. o fator de redimensionamento δ , que pode ser qualquer número real positivo.

Exemplo 5.4. Considere novamente o mesmo sistema original do Exemplo 5.1. Porém agora considere o seguinte controlador candidato:

$$C(q, \rho^{[c]}) = 0,1 + 0,01 \frac{1}{1 - q^{-1}}. \quad (374)$$

Figura 15 — Curvas antes do redimensionamento do Exemplo 5.4.

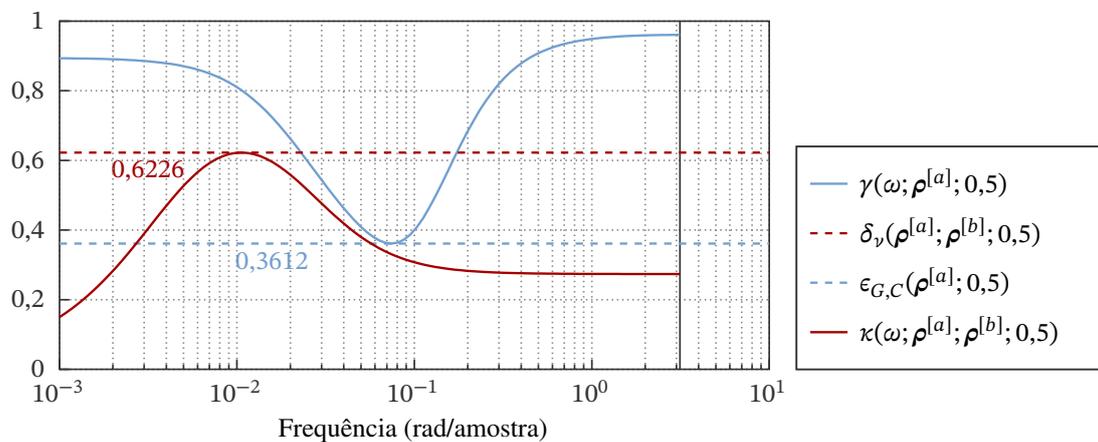


Margem de estabilidade generalizada (azul tracejado) e distância de Vinnicombe (vermelho tracejado), além de suas respectivas funções frequência a frequência (linhas contínuas). Fonte: elaborado pelo autor.

As curvas das funções de interesse para o sistema original e para esse controlador são apresentadas na Figura 15, com um fator $\delta = 1,0$, i.e. sem redimensionamento. Novamente, a comparação entre os pontos extremos das duas funções não certifica o novo controlador e dessa vez nem mesmo a comparação frequência a frequência é suficiente.

Contudo, observe através da Figura 16 o que acontece quando um fator de redimensionamento de $\delta = 0,5$ é utilizado. Um fator de redimensionamento não unitário distorce

Figura 16 — Curvas após redimensionamento do Exemplo 5.4.



Margem de estabilidade generalizada (azul tracejado) e distância de Vinnicombe (vermelho tracejado), além de suas respectivas funções frequência a frequência (linhas contínuas). Fonte: elaborado pelo autor.

as curvas das duas funções de maneiras diferentes, nesse caso fazendo com que elas não mais se cruzem. Note que agora o controlador é certificado uma vez que a curva $\kappa(\circ)$ está completamente abaixo de $\gamma(\circ)$. Claro que isso só é possível porque o controlador candidato efetivamente estabiliza o sistema. \diamond

A partir da discussão acima surge a seguinte questão: É possível definir uma condição para a existência de um fator de redimensionamento δ que certifica o controlador em toda a faixa de frequências? O objetivo da próxima seção é tentar responder essa questão.

5.5 Condição proposta

Como já mostrado, a certificação pelo método da distância de Vinnicombe no Teorema 5.3 depende de duas condições imprescindíveis. A primeira condição é dada por (354) e não será modificada. Desse modo, resta apenas a segunda condição (368) que será convertida em uma condição mais simples. Para tanto, primeiramente observe o seguinte lema, que fornece um intervalo de fatores de redimensionamento que certificam o controlador em uma única frequência.

Lema 5.2. *O intervalo dos fatores de redimensionamento que verificam a desigualdade*

$$\gamma(\omega_k, \rho^{[a]}, \delta) > \kappa(\omega_k, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}, \delta), \quad (375)$$

para uma dada frequência ω_k , é dado por:

$$\delta \in \Delta(\omega_k) = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \text{se } b(\omega_k) > 0 \text{ e } a(\omega_k) \geq 0, \\ (0; \delta_0), & \text{se } b(\omega_k) > 0 \text{ e } a(\omega_k) < 0, \\ (\delta_0; \infty), & \text{se } b(\omega_k) \leq 0 \text{ e } a(\omega_k) > 0, \text{ ou} \\ \emptyset, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (376)$$

com as seguintes definições:

$$a(\omega_k) \triangleq |C(e^{j\omega_k}, \rho^{[b]})|^2 - |C(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]}) - C(e^{j\omega_k}, \rho^{[b]})|^2 |S(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]})|^2, \quad (377)$$

$$b(\omega_k) \triangleq 1 - |C(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]}) - C(e^{j\omega_k}, \rho^{[b]})|^2 |Q(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]})|^2, \quad (378)$$

$$\delta_0 \triangleq \sqrt{-\frac{b(\omega_k)}{a(\omega_k)}}, \quad (379)$$

onde a dependência de ω_k em δ_0 foi deixada implícita.

Prova. De (349), juntando os dois primeiros fatores, a função $\gamma(\circ)$ pode ser reescrita como

$$\gamma(\omega_k, \rho^{[a]}, \delta) = \left(|S(\rho^{[a]})|^2 + \delta^{-2} |Q(\rho^{[a]})|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[a]})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (380)$$

e de (370),

$$\kappa(\omega_k, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}, \delta) = \left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[b]})|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \delta |C(\rho^{[a]}) - C(\rho^{[b]})| \left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[a]})|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (381)$$

onde se omitiu o parâmetro $e^{j\omega_k}$ para não carregar a notação.

Agora substituindo as expressões acima na inequação (375) e multiplicando os dois lados pela quantidade não negativa

$$\left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[b]})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(|S(\rho^{[a]})|^2 + \delta^{-2} |Q(\rho^{[a]})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[a]})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

resulta em

$$\left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[b]})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} > \delta |C(\rho^{[a]}) - C(\rho^{[b]})| \left(|S(\rho^{[a]})|^2 + \delta^{-2} |Q(\rho^{[a]})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (382)$$

Como os dois lados dessa desigualdade não são negativos, elevá-los ao quadrado não muda a desigualdade:

$$\left(1 + \delta^2 |C(\rho^{[b]})|^2\right) > \delta^2 |C(\rho^{[a]}) - C(\rho^{[b]})|^2 \left(|S(\rho^{[a]})|^2 + \delta^{-2} |Q(\rho^{[a]})|^2\right), \quad (383)$$

e, finalmente, escrevê-los na forma de uma inequação do segundo grau em δ produz:

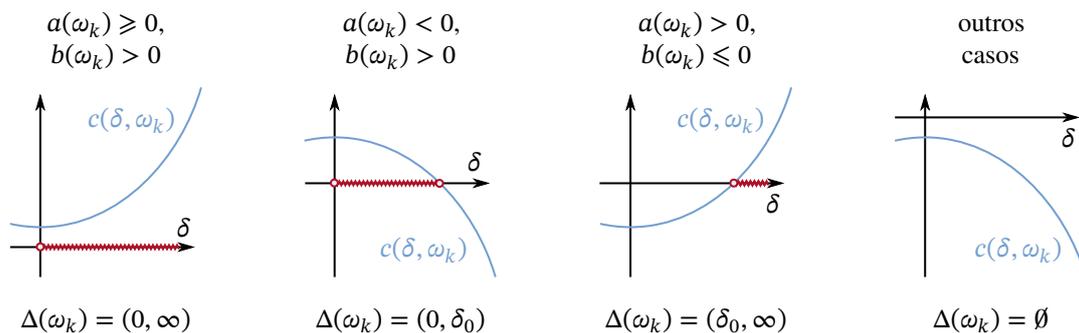
$$0 < \delta^2 \left(|C(\rho^{[b]})|^2 - |C(\rho^{[a]}) - C(\rho^{[b]})|^2 |S(\rho^{[a]})|^2\right) + \left(1 - |C(\rho^{[a]}) - C(\rho^{[b]})|^2 |Q(\rho^{[a]})|^2\right) \quad (384)$$

$$= \delta^2 a(\omega_k) + b(\omega_k), \quad (385)$$

cujo lado direito é uma parábola simétrica sobre o eixo das ordenadas e sua raiz real não negativa, caso exista, é dada por δ_0 .

Uma análise do sinal dessa função permite identificar o intervalo de valores de $\delta > 0$ para os quais ela é positiva para cada frequência ω_k . Os quatro possíveis casos são ilustrados através da Figura 17, indicando que uma análise do sinal da parábola permite

Figura 17 — Análise dos intervalos de fatores de redimensionamento.



Uma análise do sinal da parábola $c(\delta, \omega_k) = \delta^2 a(\omega_k) + b(\omega_k)$ para as quatro possíveis situações mostrando como o intervalo de fatores de redimensionamento pode ser identificado. Fonte: elaborado pelo autor.

mostrar que o intervalo de fatores de redimensionamento que certificarão o controlador em determinada frequência é dado por (376). ■

Teorema 5.4 (de Pinto da Silva e Eckhard (2020a)). *Seja a malha fechada internamente estável formada pelo processo $G(q)$ e pelo controlador $C(q, \rho^{[a]})$ e suponha que exista um outro controlador candidato $C(q, \rho^{[b]})$. Nesse caso, se*

$$\Delta(\omega_1) \cap \Delta(\omega_2) \cap \dots \neq \emptyset \quad \forall \omega_k \in [0; \pi] \quad (386)$$

então o controlador candidato também estabiliza o sistema, contanto que a condição de contorno seja satisfeita.

Prova. Diretamente do Teorema 5.3 e do Lema 5.2. ■

Corolário 5.2. *Para a certificação são necessárias estimativas das respostas em frequência da função de sensibilidade, $S(e^{j\omega}, \rho^{[a]})$, e da sensibilidade a perturbação de carga,*

$Q(e^{j\omega}, \rho^{[a]})$, com o controlador original. Isso implica que não será possível testar todas as frequências e a condição para certificação do controlador terá que ser aproximada por

$$\Delta(\omega_1) \cap \Delta(\omega_2) \cap \dots \cap \dots \neq \emptyset \quad \forall \omega_k \in \Omega, \quad (387)$$

onde $\Omega \subset [0; \pi]$, é a grade de frequências para as quais foi calculada a transformada de Fourier dos sinais, por exemplo. Além disso, caso o controlador possua um integrador, não é possível testar a frequência $\omega_k = 0$ a partir dos dados, devendo essa amostra ser descartada das DTFT.

Quando se tenta certificar um controlador é melhor obter um falso negativo do que correr o risco de instabilizar o sistema. Por isso, é possível usar uma margem de segurança na condição de certificação.

Corolário 5.3. *Uma margem de segurança $0 \leq \mu < 1$ pode ser adicionada à condição proposta para reduzir as chances de um falso positivo:*

$$(1 - \mu)\gamma(\omega_k, \rho^{[a]}, \delta) > \kappa(\omega_k, \rho^{[a]}, \rho^{[b]}, \delta). \quad (388)$$

Essa margem representa a fração mínima de $\gamma(\circ)$ que deve ficar acima de $\kappa(\circ)$ em cada frequência para que o controlador seja certificado. Nesse caso, só é preciso trocar as funções (377) a (379) por

$$a_\mu(\omega_k) = (1 - \mu)^2 |C(e^{j\omega_k}, \rho^{[b]})|^2 - |S(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]})|^2 |C(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]} - C(e^{j\omega_k}, \rho^{[b]}))|^2, \quad (389)$$

$$b_\mu(\omega_k) = (1 - \mu)^2 - |Q(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]})|^2 |C(e^{j\omega_k}, \rho^{[a]} - C(e^{j\omega_k}, \rho^{[b]}))|^2, \quad (390)$$

$$\delta_{0\mu} = \sqrt{-b_\mu(\omega_k)/a_\mu(\omega_k)}. \quad (391)$$

A partir da discussão acima, do Teorema 5.3 e dos Corolários 5.2 e 5.3 foi concebido um mecanismo de busca por um intervalo de valores do fator de redimensionamento para os quais o controlador candidato pode ser certificado. Esse mecanismo é apresentado na forma do Algoritmo 1. Observe que esse algoritmo não depende da identificação de nenhum modelo paramétrico do processo ou do sistema em malha fechada. Porém esse algoritmo depende da estimativa da amplitude da resposta em frequência de duas funções de sensibilidade do sistema em malha fechada. Portanto esse é um método baseado em dados. Observe que o conhecimento do intervalo de fatores de dimensionamento pode dar mais segurança ao projetista. A necessidade de fatores muito diferentes de 1 para a certificação representa que houve um “esforço” do algoritmo para certificar o controlador, o que pode indicar que o sistema resultante é pouco robusto ou que o resultado da certificação não tem muita confiabilidade. Um exemplo de uma implementação simples do Algoritmo 1 pode ser encontrado na Listagem A.17 dentro do Apêndice A.

Na próxima seção serão apresentados alguns métodos para obter estimativas da resposta em frequência a partir dos dados. Esses métodos podem ser utilizados para estimar as funções de resposta em frequência das sensibilidades para serem empregadas no Algoritmo 1.

5.6 Estimativa das respostas em frequência

Uma vez que o algoritmo proposto para certificação do controlador depende das estimativas das magnitudes das respostas em frequência de duas das funções de sensibilidade

Algoritmo 1: Busca pelo intervalo de fatores de redimensionamento que certifi-
cam o controlador em uma grade de frequências.

Dados: Estimativas das respostas em frequência de $S(e^{j\omega}, \rho^{[a]})$ e $Q(e^{j\omega}, \rho^{[a]})$ e
respostas em frequência calculadas de $C(e^{j\omega}, \rho^{[a]})$ e $C(e^{j\omega}, \rho^{[b]})$ para todas as
 N_ω frequências $\omega_k \in \Omega$.

Resultado: Intervalo $\Delta = (\delta_{\text{inf}}, \delta_{\text{sup}})$ de fatores de redimensionamento que certifica o
controlador. Se $\delta_{\text{inf}} = \delta_{\text{sup}}$, o controlador não foi certificado.

```

1  $\delta_{\text{inf}} \leftarrow 0$  ; //  $\Delta \leftarrow \mathbb{R}^+$ 
2  $\delta_{\text{sup}} \leftarrow +\infty$  ;
3 para cada  $\omega_k$  faça
4   calcule  $a_\mu$  e  $b_\mu$  como em (389) e (390) ;
5   se  $a_\mu \geq 0$  e  $b_\mu > 0$  então
6     | próxima iteração ; //  $\Delta \leftarrow \Delta \cap \mathbb{R}^+$ 
7   senão
8     | calcule  $\delta_{0\mu}$  como em (391) ;
9     | se  $a_\mu < 0$  e  $b_\mu > 0$  e  $\delta_{0\mu} > \delta_{\text{inf}}$  então
10    | |  $\delta_{\text{sup}} \leftarrow \min\{\delta_{\text{sup}}, \delta_{0\mu}\}$  ; //  $\Delta \leftarrow \Delta \cap (0; \delta_{0\mu})$ 
11    | senão se  $a_\mu > 0$  e  $b_\mu \leq 0$  e  $\delta_{\text{sup}} > \delta_{0\mu}$  então
12    | |  $\delta_{\text{inf}} \leftarrow \max\{\delta_{\text{inf}}, \delta_{0\mu}\}$  ; //  $\Delta \leftarrow \Delta \cap (\delta_{0\mu}; \infty)$ 
13    | senão
14    | |  $\delta_{\text{inf}} \leftarrow 0$  ; //  $\Delta \leftarrow \Delta \cap \emptyset$ 
15    | |  $\delta_{\text{sup}} \leftarrow 0$  ;
16    | | encerra a execução;
17    | fim
18  fim
19 fim

```

do sistema em malha fechada original, esta seção discute como essas estimativas podem ser obtidas. Primeiramente, lembrando que o algoritmo depende de um controlador inicial na malha, observe de (343) que um experimento em malha fechada permite estimar duas funções de sensibilidade diretamente a partir dos dados. Em um experimento com excitação pela perturbação podem ser estimadas diretamente $S(e^{j\omega}, \rho)$ e $Q(e^{j\omega}, \rho)$ — as duas sensibilidades de interesse. Por outro lado, se a referência for excitada, podem ser estimadas $C(e^{j\omega}, \rho)S(e^{j\omega}, \rho)$ e $T(e^{j\omega}, \rho)$. Nesse caso, as sensibilidades de interesse são obtidas dividindo as estimativas pela resposta do controlador original, que seria calculada de qualquer maneira para o algoritmo. A maneira como as estimativas são efetivamente obtidas, contudo, é uma escolha do projetista. A seguir são apresentadas algumas das muitas opções presentes na literatura.

5.6.1 Identificação de modelo paramétrico

Caso o sinal de entrada tenha persistência de excitação e os dados tenham uma boa relação sinal-ruído, podem ser empregadas técnicas de identificação de sistemas como as apresentadas no Capítulo 2. Nesse caso, é identificado o sistema em malha fechada, não apenas o processo. Apesar de esse tipo de abordagem ir um pouco contra a filosofia dos métodos baseados em dados, pode se alegar que o sistema não precisa ser tão bem identificado, uma vez que o modelo final não será utilizado para controle, apenas para

certificação.

Por conta disso, também não é necessário saber a ordem ou o grau relativo do sistema real — lembre que o único interesse é nas magnitudes das respostas em frequência dos modelos. Portanto, nesse caso pode ser empregado um modelo de alta ordem permitindo um pouco de sobreajuste.

5.6.2 Identificação de modelo não paramétrico

Uma alternativa aos modelos paramétricos pode ser a identificação direta da resposta em frequência. Para tanto, existem algumas possibilidades: medição direta, relação entre as transformadas de Fourier e relação entre os espectros de potência, entre outros (PINTELO; SCHOUKENS, 2012).

Medição direta: utiliza como sinal de excitação um sinal senoidal na frequência de interesse e com amplitude conhecida. Nesse caso, basta esperar o sistema entrar em regime e medir a amplitude do sinal de saída. Se a relação sinal-ruído for boa, a amplitude da resposta em frequência para essa determinada frequência é aproximadamente o quociente da amplitude de saída pela amplitude de entrada. Por exemplo:

$$|S(e^{j\omega}, \rho)| \approx \frac{\text{amplitude de } u(t, \rho)}{\text{amplitude de } d(t)}. \quad (392)$$

Esse é um método bastante preciso, porém pouco prático, pela necessidade de excitar uma frequência de cada vez. Além disso, esse método não aproveita informações da resposta em frequências em bandas adjacentes, o que implica que a existência de alta concentração de energia de ruído ou profunda atenuação do sinal em determinada banda de frequência introduz erros locais na estimativa.

Transformada de Fourier: essa segunda opção emprega um sinal de entrada que excita todas as frequências de interesse ao mesmo tempo. Nesse caso, é preciso calcular as amplitudes das transformadas de Fourier dos sinais de entrada e saída em cada frequência. Novamente, considerando uma boa relação sinal-ruído, a amplitude da resposta em frequência será aproximadamente igual ao quociente entre a amplitude da transformada de Fourier da saída pela amplitude da transformada da entrada em cada frequência. Por exemplo:

$$|S(e^{j\omega}, \rho)| \approx \left| \frac{U(\omega, \rho)}{D(\omega)} \right|, \quad (393)$$

onde $U(\omega, \rho)$ e $D(\omega)$ são as transformadas de Fourier discretas (DTFT¹) de $u(t, \rho)$ e $d(t)$, respectivamente. Porém, nesse caso, para obter uma boa estimativa é preciso adicionalmente que o sinal de excitação seja periódico, com um número inteiro de períodos e que o experimento inicie com o sistema em regime/repouso. De outro modo, as estimativas sofrem de um fenômeno chamado de *leakage*, em que a energia em determinada frequência “borra” a estimativa nas frequências vizinhas.

Espectros de potência: a última opção estima a amplitude da resposta em frequência utilizando uma análise espectral. Lembrando que o espectro de potência (cruzado) de um sinal (de dois sinais) é a transformada de Fourier da sua autocorrelação (da sua correlação cruzada). Nesse caso, a amplitude da resposta em frequência pode ser estimada pela razão entre a amplitude do espectro cruzado da entrada e da saída e a amplitude do espectro da entrada. Por exemplo:

$$|S(e^{j\omega}, \rho)| \approx \left| \frac{\Phi_{ud}(\omega)}{\Phi_d(\omega)} \right|, \quad (394)$$

¹ do inglês *Discrete Time Fourier Transform*.

onde $\Phi_{ud}(\omega)$ é o espectro cruzado entre $u(t, \rho)$ e $d(t)$, enquanto que $\Phi_d(\omega)$ é o espectro de $d(t)$ apenas. Esse método apresenta as mesmas necessidades e características que o método anterior, das transformadas de Fourier, mas é um pouco mais robusto ao ruído.

5.6.3 Identificação de modelos paramétricos locais

Ainda uma terceira alternativa de modelagem da resposta em frequência é um meio termo entre modelos paramétricos e modelos não paramétricos. Essa alternativa consiste em identificar modelos paramétricos de baixa ordem mas válidos apenas dentro de uma estreita faixa de frequências. Como representantes dessa classe de métodos podem ser citados os modelos polinomiais locais (LPM²) de Schoukens et al. (2009) e os modelos racionais locais (LRM³) de McKelvey e Guérin (2012).

A primeira técnica, com modelos LPM, modela a resposta em frequência através de polinômios de uma maneira parecida com *splines* não interpolantes, com as diferenças de que os polinômios têm coeficientes complexos e modelos adjacentes utilizam pontos de janelas que se sobrepõem parcialmente. Já, a segunda técnica, com modelos LRM, apresenta características semelhantes à primeira mas modela a resposta em frequência através de funções racionais com coeficientes complexos ao invés de polinômios. Essas duas técnicas se apoiam no fato de que a resposta em frequência geralmente é uma curva suave e pode ser aproximada localmente por um sistema de baixa ordem. O número de pontos empregados e o número de coeficientes do modelo controlam quão suave será a estimativa local. Além disso, uma vantagem desses modelos é que eles podem ser interpolados posteriormente, dando uma boa estimativa para a resposta em frequências em pontos situados entre duas das frequências originais adjacentes. A seguir é apresentado resumidamente como obter os modelos através do método LRM.

Considere que deseja-se modelar a mesma função de sensibilidade anterior. O método LRM busca gerar um modelo local no entorno de cada k -ésima frequência, dado por

$$U(\omega_{k+r}) \approx \frac{B_k(r)}{A_k(r)} D(\omega_{k+r}) + \frac{E_k(r)}{A_k(r)}, \quad (395)$$

em que $D(\omega_k)$ e $U(\omega_k)$ são pontos das DTFT de $d(t)$ e $u(t, \rho)$, respectivamente. Os polinômios $A_k(r)$ e $B_k(r)$ modelam a resposta em frequência, enquanto que o outro termo, bem à direita, modela o *leakage* e as condições iniciais (caso o sistema não inicie acomodado). Por fim, o parâmetro r representa o deslocamento em relação à frequência central de cada modelo local. Como os modelos são locais, eles vão perdendo a representatividade conforme o valor absoluto de r cresce:

$$\left| S(e^{j\omega_{k+r}}) \right| \approx \left| \frac{B_k(r)}{A_k(r)} \right|, \quad \text{para } |r| \text{ não muito grande.} \quad (396)$$

Por conta do termo adicional em (395), a estimativa obtida pelos modelos LRM consegue ser mais precisa que os outros métodos quando o experimento não pode ser realizado em condições ideais. Para obter os coeficientes de cada modelo local, primeiramente é preciso calcular as DTFT dos sinais e determinar o número de coeficientes e pontos utilizados no modelo. Em seguida, basta multiplicar ambos os lados de (395) por $A_k(r)$ e resolver o problema de mínimos quadrados resultante.

² do inglês *Local Polynomial Models*.

³ do inglês *Local Rational Models*.

5.6.4 Comparativo

Para se ter uma ideia do desempenho dos métodos acima, o seguinte processo

$$G(q) = \frac{0,7893q^{-3}}{1 - 1,418q^{-1} + 1,59q^{-2} - 1,316q^{-3} + 0,886q^{-4}} \quad (397)$$

de van Heusden, Karimi e Bonvin (2011) foi simulado em malha fechada com o seguinte controlador:

$$C(q, \rho) = \frac{0,2087 - 0,2808q^{-1} + 0,3048q^{-2} - 0,2512q^{-3} + 0,1733q^{-4} + 0,005038q^{-5}}{1 - q^{-1}}. \quad (398)$$

A entrada de excitação utilizada foi $d(t)$ e foi coletado o sinal de controle $u(t, \rho)$, buscando identificar a resposta em frequência da sensibilidade do sistema. Para simular condições mais realistas, também foram injetados na saída $y(t, \rho)$ do sistema um ruído de medição $v(t)$ branco com desvio padrão $\sigma = 0,1$ e um sinal senoidal com amplitude 0,1 e frequência 0,1 rad/amostra. Além disso, os dados compreendem 512 amostras de cada sinal envolvido.

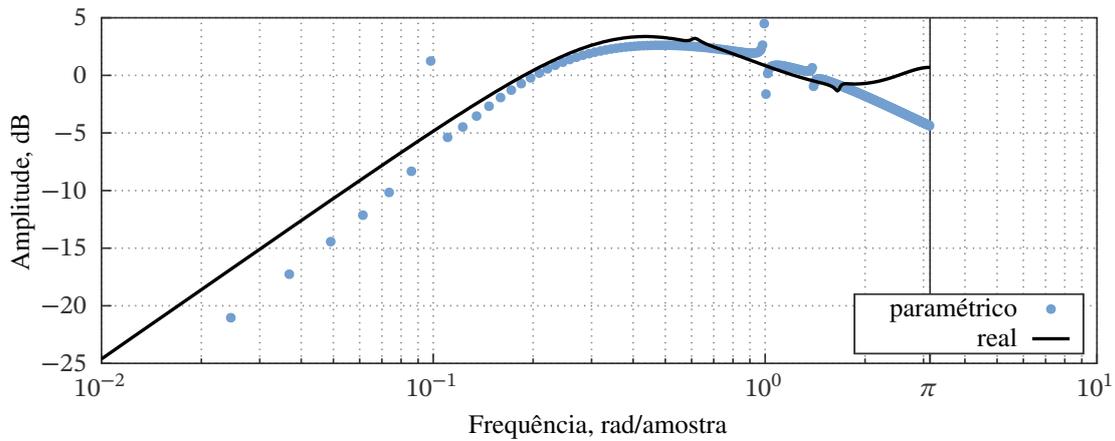
Primeiramente, para testar o método da identificação paramétrica, o sistema foi excitado por um sinal onda quadrada com níveis $\{0; 1\}$ e período de 60 amostras. Os dados simulados foram empregados para identificar um operador de transferência de ordem 10 através do comando `tf` da *toolbox* de identificação do Matlab®. A amplitude da resposta em frequência desse operador representa a estimativa desejada, que pode ser visualizada através da Figura 18. Observe que, como o modelo paramétrico é sobreparametrizado (pois a ordem do sistema é supostamente desconhecida), ocorre um sobreajuste e aparecem picos de ressonância que não existem na resposta do sistema real.

Em seguida, para testar o método da medida direta, o sistema foi excitado com 512 sinais senoidais com amplitude unitária em frequências linearmente espaçadas no intervalo $[0; \pi)$. Após cada simulação, a amplitude da resposta em frequência foi estimada como o valor do pico da DTFT que aparece na respectiva amostra em frequência, para agilizar o processo. O resultado é apresentado na Figura 19. Observe que esse método apresenta uma excelente estimativa para as frequências em que há uma relação sinal-ruído razoável.

Por fim, para testar o método semiparamétrico dos modelos LRM, foi empregado o mesmo dado utilizado na identificação paramétrica. Nesse caso foram identificados 512 modelos racionais de segunda ordem, um ao redor de cada frequência, ajustado aos 101 pontos mais próximos (lembrando que as DTFT são periódicas na frequência). Para cada frequência, a estimativa da amplitude da resposta em frequência foi calculada como a média das amplitudes do modelo centrado nessa frequência e do modelo adjacente à direita. A estimativa resultante pode ser visualizada na Figura 20. Observe como esse tipo de modelagem resulta em uma estimativa melhor que as outras duas apresentadas.

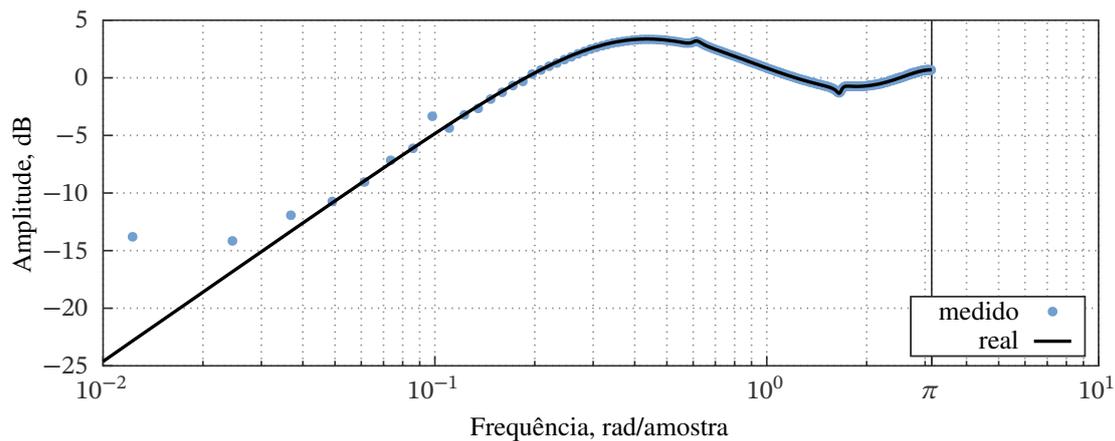
O método da identificação de um modelo de alta ordem tem uma tendência ao sobreajuste, que pode resultar em grandes erros em determinadas frequências. Além disso, para uma boa estimativa o sinal precisa ser composto de um número inteiro de períodos. Por outro lado, o método da medição direta estimou mal a resposta nas baixas frequências, onde o sinal é atenuado e está sujeito à interferência do sinal senoidal injetado na saída. Além disso, necessita de um grande número de experimentos específicos. Já, o método dos modelos LRM foi capaz de uma boa estimativa em baixa frequência pois ajusta um modelo racional incluindo informação de frequências mais altas e é capaz de reduzir o efeito do sinal senoidal injetado na saída. Além disso, a suavidade da estimativa pode ser controlada

Figura 18 — Estimativa paramétrica da resposta em frequência.



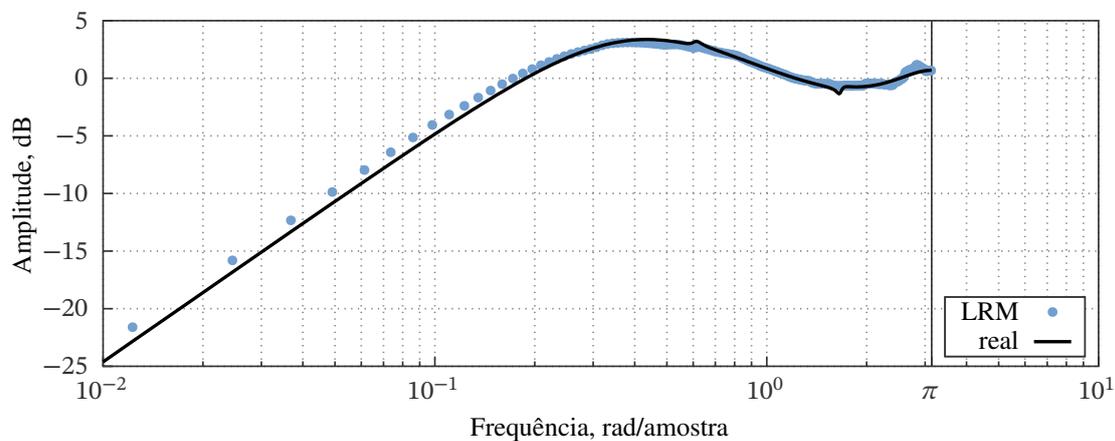
Amplitude da resposta em frequência da sensibilidade real (linha preta) e estimada através de um modelo paramétrico de alta ordem (pontos azuis). Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 19 — Estimativa não paramétrica da resposta em frequência.



Amplitude da resposta em frequência da sensibilidade real (linha preta) e estimada através do pico da DTFT da resposta a sinais senoidais puros (pontos azuis). Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 20 — Estimativa semiparamétrica da resposta em frequência.



Amplitude da resposta em frequência da sensibilidade real (linha preta) e estimada através da média dos modelos LRM mais próximos de cada frequência (pontos azuis). Fonte: elaborado pelo autor.

através da ordem dos modelos e do número de pontos empregados para o ajuste de cada modelo individualmente. Dessa forma é possível evitar falsas ressonâncias e identificar as verdadeiras.

5.7 Outros métodos de certificação

Como a certificação é bastante importante para área de controle baseado em dados, a literatura já apresenta algumas possibilidades nessa direção. A seguir são apresentados dois métodos de certificação baseada em dados presentes na literatura que possuem o mesmo objetivo que o método proposto, porém com características bem distintas. O primeiro utiliza conceitos de decomposição coprima, permitindo que o mesmo possa ser facilmente empregado em processos multivariáveis. Já o segundo método, baseado no bem conhecido teorema do pequeno ganho, foi concebido para ser incorporado na otimização dos parâmetros do controlador, de forma que garante que a estimativa será assintoticamente estabilizante.

5.7.1 Parâmetros de Markov

Gonçalves da Silva, Bazanella e Campestrini (2020) propuseram um método baseado em dados não iterativo para a certificação de controladores. Esse método equipara a estabilidade interna do sistema final à BIBO estabilidade de um mapeamento (operador de transferência) entre dois sinais que podem ser calculados dos dados. A BIBO estabilidade desse operador é determinada checando uma estimativa para sua norma \mathcal{H}_∞ e o decréscimo dos seus parâmetros de Markov. Esse método pode ser empregado em sistemas multivariáveis, porém é apresentado abaixo considerando sistemas monovariáveis apenas.

Teorema 5.5 (adaptado de Gonçalves da Silva, Bazanella e Campestrini (2020)). *Considere o sistema em malha fechada internamente estável com o processo $G(q)$ e o controlador $C(q, \rho^{[a]})$. Além disso, sejam $C(q, \rho^{[a]}) = V^{-1}(q, \rho^{[a]})U(q, \rho^{[a]})$ e $C(q, \rho^{[b]}) = V^{-1}(q, \rho^{[b]})U(q, \rho^{[b]})$ as fatorações coprimas normais à esquerda do controlador original e do controlador candidato, respectivamente. Por fim, considere o seguinte sinal*

$$z(t) = V(q, \rho^{[b]})V^{-1}(q, \rho^{[a]})r(t) + [U(q, \rho^{[b]})U^{-1}(q, \rho^{[a]}) - V(q, \rho^{[b]})V^{-1}(q, \rho^{[a]})]y(t, \rho^{[a]}), \quad (399)$$

calculável a partir dos dados. A estabilidade interna do sistema com o controlador candidato $C(q, \rho^{[b]})$ é equivalente à estabilidade BIBO do mapeamento $r(t) \mapsto z(t)$.

Prova. A prova é apresentada em (GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2020). ■

Corolário 5.4. *O Teorema 5.5 permite que o controlador candidato seja certificado através da estimativa da norma \mathcal{H}_∞ ou dos parâmetros de Markov (resposta impulsiva) do mapeamento descrito acima. Se a estimativa da norma \mathcal{H}_∞ convergir ou, equivalentemente a resposta impulsiva tiver energia limitada, o mapeamento $r(t) \mapsto z(t)$, e consequentemente a malha fechada com o controlador candidato, é estável.*

Um procedimento para estimativa dos parâmetros de Markov e da norma \mathcal{H}_∞ necessários é apresentado por Gonçalves da Silva, Bazanella e Campestrini (2020) e reproduzido resumidamente a seguir. Uma explicação mais detalhada do método pode ser encontrada

no artigo original. Considerando N_m parâmetros da resposta impulsiva a serem estimados e um total de N amostras de dados disponíveis, são definidas as seguintes matrizes de dados:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p &= \mathbf{H}(r(1)), & \mathbf{R}_f &= \mathbf{H}(r(N_m + 1)), \\ \mathbf{Z}_p &= \mathbf{H}(z(1)), & \mathbf{Z}_f &= \mathbf{H}(z(N_m + 1)), \end{aligned}$$

onde $\mathbf{H}(x(t))$ é a seguinte matriz Hankel de um sinal $x(t)$ qualquer:

$$\mathbf{H}(x(t)) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) & x(t+1) & \cdots & x(t+N-2N_m-1) \\ x(t+1) & x(t+2) & \cdots & x(t+N-2N_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(t+N_m-1) & x(t+N_m) & \cdots & x(t+N-N_m-2) \end{bmatrix}. \quad (400)$$

A matriz Toeplitz com a estimativa da resposta impulsiva é dada pela inversa da matriz formada pelas últimas N_m colunas da matriz $\hat{\Theta}$ definida a seguir:

$$\hat{\Theta} = \mathbf{Z}_f \Phi^\dagger = [\cdots \underbrace{\hat{\mathbf{S}}_m}_{N_m \text{ colunas}}], \quad (401)$$

onde Φ^\dagger é a pseudoinversa de

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p \\ \mathbf{Z}_p \\ \mathbf{R}_f \end{bmatrix}. \quad (402)$$

Ou seja, a estimativa da norma \mathcal{H}_∞ de interesse é o maior valor singular de $\hat{\mathbf{S}}_m^{-1}$, enquanto que a estimativa da resposta impulsiva é dada pela sua primeira coluna.

Exemplo 5.5 (adaptado de Gonçalves da Silva, Bazanella e Campestrini (2020)). Considere o seguinte processo monovariável:

$$G(q) = \frac{0,5q^{-1}}{1 - 0,9q^{-1}}, \quad (403)$$

inicialmente em malha fechada com o seguinte controlador:

$$C(q, \rho^{[a]}) = \frac{0,2(1 - 0,8q^{-1})}{1 - q^{-1}}. \quad (404)$$

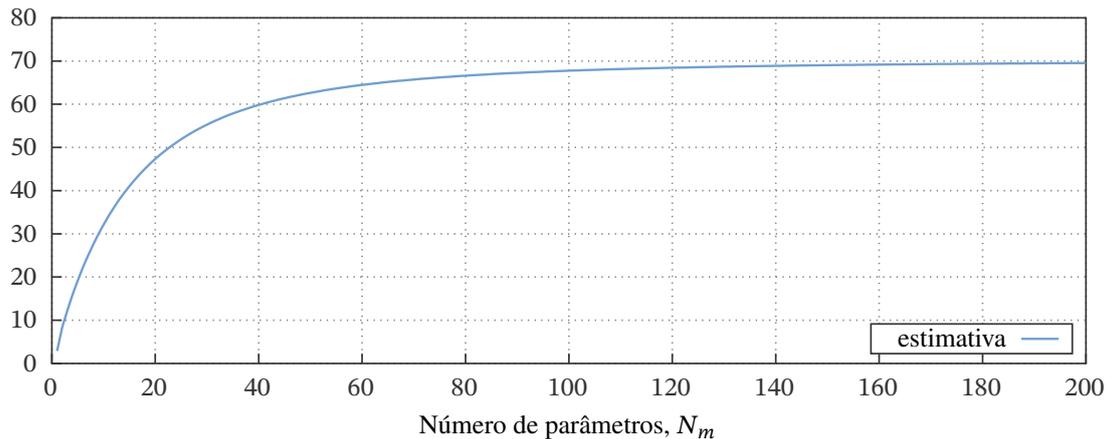
Esse controlador estabiliza o sistema e resulta em uma margem de estabilidade generalizada de $\epsilon_{G,C}(\rho^{[a]}) = 0,3229$, calculada de (352). Agora considere o seguinte controlador candidato:

$$C(q, \rho^{[b]}) = \frac{3,8(1 - 0,9q^{-1})}{1 - q^{-1}}. \quad (405)$$

A distância de Vinnicombe entre esse controlador e o controlador estabilizante original é de 0,901 e mesmo utilizando o Algoritmo 1, o controlador candidato não pode ser certificado. Na verdade o controlador candidato estabiliza o sistema, mas o Teorema 5.3 dá uma condição somente suficiente para a estabilidade e não é capaz de certificar o controlador. Por outro lado, utilizando o Teorema 5.5 é possível realizar a certificação do controlador candidato como mostrado a seguir.

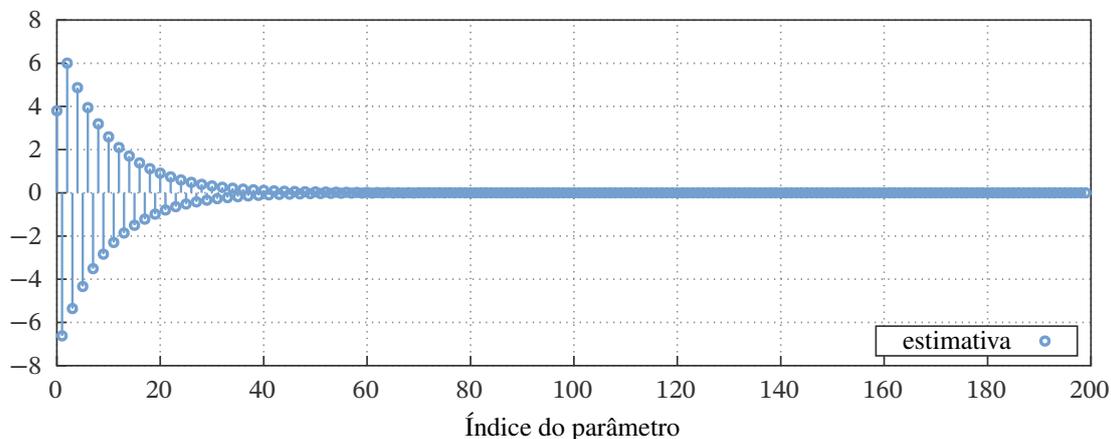
Para gerar os dados foi simulado um experimento sem ruído em malha fechada com o controlador inicial. Durante esse experimento, o sinal de referência empregado foi um PRBS com 1260 amostras, um *clock* de 20 amostras e amplitude ± 4 . A partir dos sinais $r(t)$ e $y(t, \rho^{[al]})$ coletados, foi obtida uma sequência de estimativas para a norma \mathcal{H}_∞ de interesse, apresentada na Figura 21. Observe como a estimativa converge para um valor finito, certificando corretamente o controlador candidato. Do mesmo modo, a estimativa

Figura 21 — Estimativa da norma \mathcal{H}_∞ do Exemplo 5.5.



Sequência com todas as estimativas obtidas até $N_m = 200$. Fonte: produzido pelo autor.

Figura 22 — Estimativa dos parâmetros de Markov do Exemplo 5.5.



Última estimativa dos parâmetros de Markov, obtida para $N_m = 200$. Fonte: produzido pelo autor.

dos parâmetros de Markov de interesse é apresentada no gráfico da Figura 22. Observe como os parâmetros decaem para zero resultando em uma resposta impulsiva com energia finita, indicativo da BIBO estabilidade do mapeamento de interesse. Por conta disso, o controlador é corretamente certificado. \diamond

Por fim, cabe mencionar que esse método também foi desenvolvido para ser empregado com dados de malha aberta, porém o procedimento foi omitido aqui para economizar espaço. Desse modo, esse método apresenta ao menos três grandes vantagens. Primeiramente, ele permite a certificação de controladores multivariáveis e a utilização dados de malha aberta. Além disso, esse método fornece condições necessária e suficiente para a

estabilidade do sistema em malha fechada com o controlador candidato. Uma pequena desvantagem é que ele é um pouco complexo, pois necessita da decomposição em fatores coprimos do controlador.

5.7.2 Restrição na otimização

No trabalho de van Heusden, Karimi e Bonvin (2008, 2011) foi proposta uma condição de estabilidade baseada no teorema do pequeno ganho. Essa condição se traduz em uma condição sobre a norma \mathcal{H}_∞ de um operador de transferência e pode ser calculada a partir dos dados de um experimento em malha aberta ou fechada. A condição é dada pelo seguinte teorema, considerando um problema de seguimento de referência.

Teorema 5.6 (adaptado de van Heusden, Karimi e Bonvin (2011), simplificado). *Seja o processo $G(q)$, um modelo de referência internamente estável $T_d(q)$ e um controlador candidato $C(q, \rho^{[b]})$. Se a condição*

$$\|T_d(q) - C(q, \rho^{[b]}) [1 - T_d(q)] G(q)\|_\infty < 1, \quad (406)$$

for verificada, o controlador candidato estabiliza o processo.

Prova. A prova pode ser encontrada em van Heusden, Karimi e Bonvin (2011). ■

Corolário 5.5. *Observe que o operador de transferência em (406) é o mesmo operador representado na Figura 4 que produz o erro $\varepsilon^{cbt}(t, \rho)$ em (104) a partir da excitação $u(t)$. Isso implica que a norma \mathcal{H}_∞ necessária pode ser estimada a partir dos dados.*

Corolário 5.6. *A condição (406) pode ser traduzida na seguinte condição para dados finitos:*

$$|\Phi_{u\varepsilon}(\omega_k)| < \Phi_u(\omega_k), \quad \forall \omega_k \in \Omega, \quad (407)$$

onde $\Phi_{u\varepsilon}$ é o espectro cruzado entre $u(t)$ e o erro do NCbT. Se o controlador for linearmente parametrizado essa condição se torna um conjunto de restrições convexas.

Observe que, por conta do Corolário 5.6, se o controlador for linearmente parametrizado, esse método de certificação pode ser facilmente incluído no problema de otimização, resultando em um estimativa com garantia de estabilidade. Os autores desse método também mostraram que ele pode ser aplicado em dados de malha fechada. Além disso, a condição pode ser facilmente traduzida em forma de desigualdades matriciais lineares (LMI⁴), embora os próprios autores, van Heusden, Karimi e Bonvin (2008), indiquem que as LMI tem um desempenho computacional pior que comparar os espectros diretamente.

Desse modo, uma vantagem desse método é poder incluí-lo diretamente no problema de otimização. Uma desvantagem desse método é que ele fornece uma condição apenas suficiente para a estabilidade. Porém, de (406) é possível perceber que se o controlador for próximo do ideal, ele provavelmente será certificado. Isso implica que o método põe um pouco mais de responsabilidade na escolha de um modelo de referência robusto e alcançável para que o controlador seja certificado. Por fim, uma vantagem com relação ao método proposto nesse capítulo é que o método de van Heusden, Karimi e Bonvin (2011) pode ser empregado com dados de malha aberta.

⁴ do inglês *Linear Matrix Inequality*.

5.8 Comparativo entre métodos de certificação

Uma vez que o método de Gonçalves da Silva, Bazanella e Campestrini (2020) fornece uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema com o controlador candidato, resta apenas comparar as condições dos outros métodos. Para tanto é apresentado o seguinte exemplo.

Exemplo 5.6. Considere o mesmo processo $G(q)$ e o mesmo controlador inicial $C(q, \rho^{[a]})$ do Exemplo 5.5. Porém, como controlador candidato, considere agora um controlador com a seguinte estrutura:

$$C(q, \rho^{[b]}) = \frac{k(1 - 0,9q^{-1})}{1 - q^{-1}}, \quad (408)$$

onde $\rho^{[b]} = k$ é o parâmetro variável. Para avaliar o método proposto nesse capítulo e o método de van Heusden, Karimi e Bonvin (2011), foram testados o Algoritmo 1 e a condição (407) usando as respostas em frequência calculadas diretamente dos operadores de transferência. Dessa maneira foram evitados erros devidos à estimação de respostas em frequência ou espectros de potência, permitindo comparar os métodos pura e diretamente. Além disso, uma vez que a condição (407) necessita de um modelo referência estável para ser avaliada, foi usado como suposto modelo de referência e apenas para essa condição:

$$T_d(q) = \frac{0,15q^{-1}}{1 - 0,85q^{-1}}, \quad (409)$$

alcançável com o controlador ideal

$$C^*(q) = \frac{0,3(1 - 0,9q^{-1})}{1 - q^{-1}}. \quad (410)$$

(Observe, no entanto, que não foi realizado nenhum ajuste baseado em dados para tentar alcançar esse modelo.)

Para gerar os controladores candidatos iniciou-se com $k = 0,3$ (controlador ideal) e foi incrementando-se gradualmente o parâmetro até que as condições deixassem de certificar o controlador. Nesse caso foi possível certificar até $k \approx 0,6$ com o método de van Heusden, Karimi e Bonvin (2011), enquanto que com o método proposto no presente trabalho foi possível certificar até $k = 2,1577$. Como demonstrado no Exemplo 5.5, na verdade o controlador estabiliza o sistema até pelo menos $k = 3,8$. \diamond

A partir do Exemplo 5.6 acima conclui-se que o método proposto é menos conservador que o método semelhante proposto na literatura. Apesar disso, o método de van Heusden, Karimi e Bonvin (2011) não foi desenvolvido para certificar qualquer controlador, apenas um que resulte em um comportamento próximo do modelo de referência. Além disso, pode ser incorporado facilmente na otimização e é capaz de usar dados de malha aberta.

Como demonstrado anteriormente, o outro método investigado, de Gonçalves da Silva, Bazanella e Campestrini (2020), é ainda menos conservador que o proposto nesse trabalho. Com a desvantagem de que necessita da decomposição do controlador, mas com as vantagens de que pode ser utilizado com dados de malha aberta e processos multivariáveis.

5.9 Considerações finais

Nesse capítulo foi retomada a importância da certificação dos controladores ajustados através de métodos baseados em dados, assim como também seria importante certificar o controlador se obtido por métodos baseados em modelo. No caso de métodos baseados em dados que empregam um modelo de referência a Suposição 2.4 em geral não pode ser garantida e, além disso, é difícil avaliar a estabilidade em malha fechada sem um modelo do processo. Para realizar a certificação, foram revisitados conceitos da literatura como norma \mathcal{H}_∞ , margem de estabilidade generalizada e distância de Vinnicombe. A comparação direta entre essas últimas duas métricas dá origem à condição de Vinnicombe para certificação de controladores. O emprego dessa condição já foi proposto na literatura de métodos de controle baseado em dados, porém ela é bastante conservadora. Por conta disso, foi proposto comparar as métricas frequência a frequência e usar um redimensionamento dos sinais, técnicas também já documentadas na literatura. A partir dessas modificações, foi mostrado como a certificação de um controlador monovariável se reduz à análise do sinal de uma função quadrática do fator de redimensionamento, dando origem à condição e ao algoritmo propostos. Em seguida, como as funções envolvidas na certificação dependem de estimativas da resposta em frequência de duas funções de sensibilidade do sistema original, foram investigadas algumas técnicas para obtenção dessas estimativas.

Ao final do capítulo a condição proposta foi comparada diretamente com outras duas condições da literatura na certificação de uma sequência de controladores. Uma das condições da literatura é necessária e suficiente, mas depende da decomposição dos controladores em fatores coprimos e outros cálculos com uma complexidade maior que os envolvidos na condição proposta. Além disso, aquela condição da literatura depende de dados ricos para obter uma boa estimativa dos parâmetros de Markov. Portanto, um dos diferenciais do método proposto em relação a esse primeiro método é a sua baixa complexidade e a possibilidade de empregar dados mais pobres. Já a outra condição da literatura pode ser traduzida em um conjunto de desigualdades convexas e incluída como uma restrição no problema de otimização. Por outro lado, é apenas suficiente e, portanto, conservadora. Os resultados indicam que, no caso em questão, a condição proposta é menos conservadora que esta última.

6 ESTUDOS DE CASO

O objetivo deste capítulo é mostrar como as propostas apresentadas nos dois capítulos anteriores podem ser utilizadas para ajustar e certificar controladores a partir de dados. Todos os dados são obtidos de simulações, porém isso permite que as propostas sejam analisadas com várias classes diferentes de processos. Portanto, os seguintes casos serão estudados neste capítulo:

- ajuste dentro da condição de pertinência;
- ajuste quando ela é violada;
- processos que apresentam peculiaridades que dificultam o ajuste do controlador;
- certificação de controladores.

6.1 Condição de pertinência respeitada

Primeiramente, nesta seção serão ajustados apenas controladores que respeitam a Suposição 2.4. Nesse caso, é esperado que a resposta do sistema resultante em malha fechada seja bem próxima da desejada.

6.1.1 Caso monovariável simples

Considere o seguinte processo de primeira ordem:

$$G(q) = \frac{0,5q^{-1}}{1 - 0,95q^{-1}}, \quad (411)$$

o qual possui ganho estático igual a 10 e tempo de acomodação de 77 amostras. Suponha que deseja-se realimentar esse processo com um controlador PI para que o sistema em malha fechada rejeite perturbações constantes em aproximadamente 50 amostras. Isso seria alcançado se o sistema se comportasse como o seguinte modelo de referência, por exemplo:

$$Q_d(q) = \frac{0,5q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,8q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})}, \quad (412)$$

que pode ser alcançado com o seguinte controlador ideal:

$$C(q, \rho^*) = 0,46 + 0,04 \frac{q^{-1}}{1 - q^{-1}}, \quad (413)$$

o qual claramente respeita a Suposição 2.4, visto que a estrutura do controlador ideal e do controlador a ser ajustado são ambas do tipo PI. O modelo de referência (412) foi escolhido

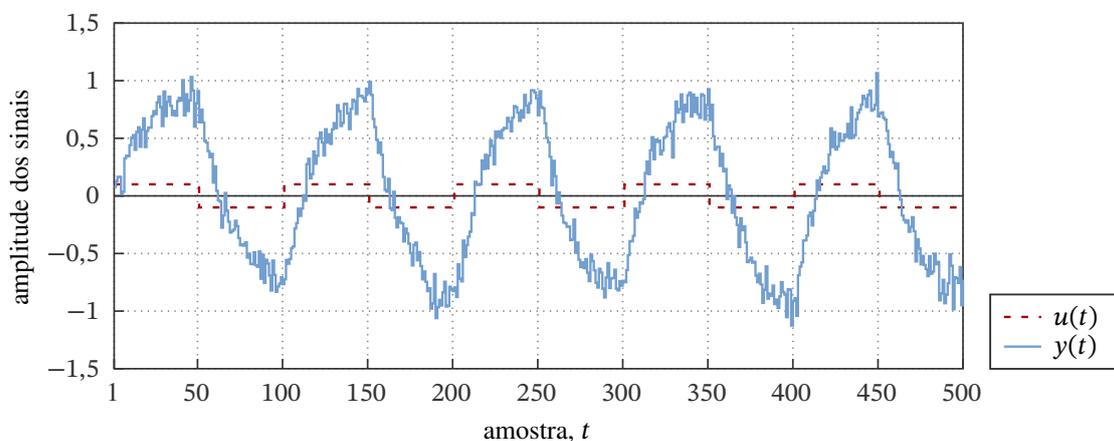
levando em conta apenas a ordem do processo e as primeiras amostras da sua resposta impulsiva, isto é, o ganho 0,5 e o grau relativo unitário.

Para avaliar o método proposto foram simuladas 1000 rodadas de Monte Carlo. Em cada rodada o processo foi excitado com 5 períodos de 100 amostras de uma onda quadrada com amplitude $\pm 0,1$. A saída do processo foi contaminada com ruído de medição colorido gerado a partir de uma realização de ruído branco com desvio padrão $\sigma = 0,1$ filtrado através do seguinte modelo de ruído:

$$H(q) = \frac{1 - 0,8q^{-1}}{1 - 0,95q^{-1}}. \quad (414)$$

Uma realização dos dados coletados é apresentada na Figura 23, o sinal de excitação é

Figura 23 — Exemplo de sinais do caso monovariável simples.



Uma realização dos sinais produzidos durante a simulação em malha aberta para serem empregados no ajuste do controlador. O sinal de excitação é uma onda quadrada representada em vermelho tracejado, o sinal da saída é representado em azul, evidenciando o ruído de medição colorido. Fonte: produzido pelo autor.

a onda quadrada em vermelho tracejado, e o sinal de saída contaminado com ruído é a curva em azul. Cada uma das realizações dos dados coletados foi empregada para ajustar um controlador PI com a mesma estrutura que (413). A média e o desvio padrão dos parâmetros estimados são apresentados na Tabela 11. Assim como no Exemplo 4.1, o

Tabela 11 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso monovariável simples.

ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS ^a
ρ_1	0,4600	0,4600 ($\pm 0,0033$)
ρ_2	0,0400	0,0400 ($\pm 0,0002$)

^a obtidas com (186) e $\ell = 25$.

método proposto foi capaz de identificar os parâmetros do controlador ideal. Apesar de esse ser um exemplo bem simples, é comum que processos térmicos sejam modelados como sistemas de baixa ordem e estejam sujeitos a perturbações de carga.

6.1.2 Caso monovariável subamortecido

Considere agora o seguinte processo de segunda ordem pouco amortecido:

$$G(q) = \frac{3,628q^{-1}(1 - 0,5979q^{-1})}{1 - 1,706q^{-1} + 0,8251q^{-2}}, \quad (415)$$

que possui tempo de acomodação de 49 amostras e ganho estático $G(1) = 10$. Esse processo foi colocado em malha fechada com o seguinte controlador:

$$C_o(q) = \frac{0,1198 - 0,1485q^{-1} + 0,04597q^{-2}}{(1 - 0,01044q^{-1})(1 - q^{-1})}, \quad (416)$$

que permite a rejeição de perturbação do tipo degrau, mas resulta em uma resposta oscilatória como poderá ser visto na comparação com as respostas obtidas, mais adiante.

Suponha que deseja-se a rejeição de uma perturbação do tipo degrau em aproximadamente 30 amostras e com um pico de resposta de aproximadamente 50% do ganho estático em malha aberta. Isso pode ser alcançado com o seguinte modelo de referência:

$$Q_d(q) = \frac{3,268q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,5q^{-1})(1 - 0,85q^{-1})}, \quad (417)$$

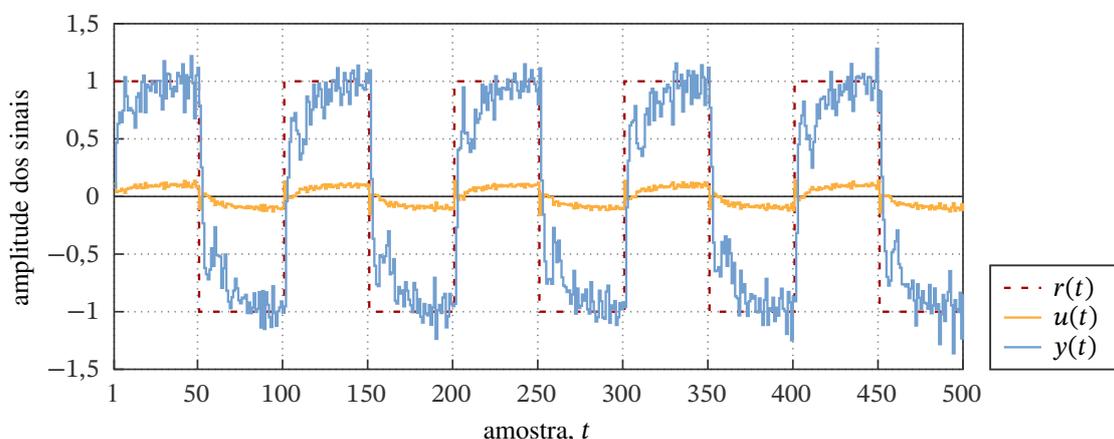
que tem ganho igual ao do processo em malha aberta (3,268) e também mesmo grau relativo. Esse modelo de referência, por sua vez, é alcançado com o controlador ideal:

$$C(q, \rho^*) = \frac{0,209 - 0,3656q^{-1} + 0,1648q^{-2}}{(1 - 0,5979q^{-1})} \frac{1}{(1 - q^{-1})}, \quad (418)$$

cuja parte fixa é apenas o integrador que compõe o fator da direita. Esse controlador ideal poderia ser facilmente calculado de (37) se o modelo do processo estivesse disponível. Como supostamente esse não é o caso, o sistema com o processo (415) em malha fechada com o controlador mal ajustado (416) foi simulado para coletar dados para que sejam empregados no ajuste do controlador.

Foram realizadas 1000 simulações de Monte Carlo, e uma das realizações dos sinais coletados é apresentada na Figura 24. Em cada uma das simulações o sistema em malha

Figura 24 — Exemplo de sinais do caso monovariável subamortecido.



Uma realização dos sinais produzidos. A excitação é a onda quadrada em vermelho tracejado, o sinal da saída ruidoso é representado em azul, o sinal de controle em amarelo. Fonte: produzido pelo autor.

fechada foi excitado através da entrada de referência com 5 períodos de 100 amostras de uma onda quadrada com níveis ± 1 . Enquanto isso, a saída do processo foi contaminada com ruído de medição branco com desvio padrão $\sigma = 0,1$. Cada uma das realizações dos sinais coletados foi empregada para estimar um conjunto de parâmetros para um controlador com a mesma estrutura que o controlador original.

Os resultados das estimativas são apresentados na Tabela 12. Novamente o método

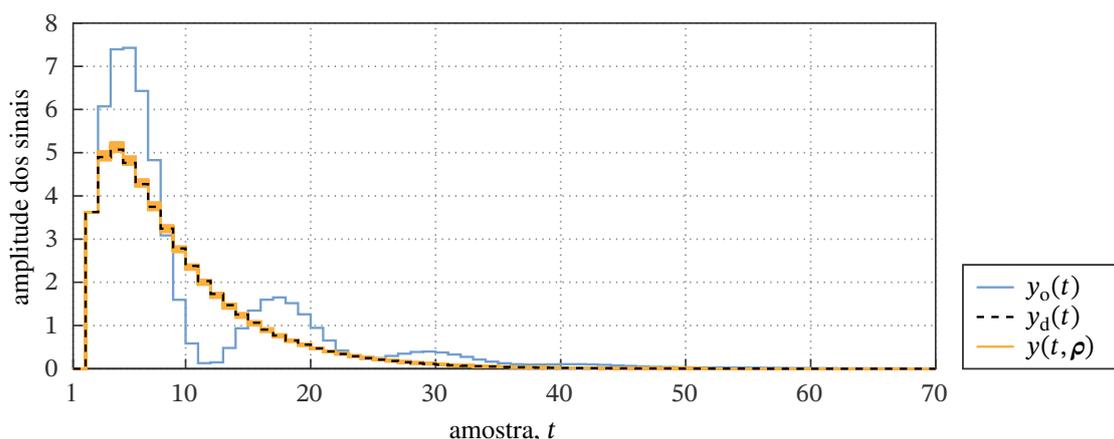
Tabela 12 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso monovariável subamortecido.

ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS ^a
a_1	-0,5979	-0,5927 ($\pm 0,0132$)
b_0	0,2090	0,2070 ($\pm 0,0036$)
b_1	-0,3656	-0,3610 ($\pm 0,0064$)
b_2	0,1648	0,1624 ($\pm 0,0030$)

^a obtidas com (328) e $\ell = 25$.

proposto foi capaz de identificar os parâmetros ideais, mesmo a partir de um experimento em malha fechada e com ruído significativo. Cada conjunto de parâmetros foi utilizado para ajustar o controlador e as respostas ao salto na perturbação (sem ruído) obtidas são apresentadas na Figura 25 em amarelo, juntamente com a resposta desejada do modelo de

Figura 25 — Respostas inicial e finais no caso monovariável subamortecido.



Resposta inicial do sistema a uma perturbação do tipo salto com o controlador mal ajustado em azul, resposta desejada do modelo de referência em preto tracejado, e respostas obtidas com os controladores encontrados em amarelo, todas simuladas sem ruído. Fonte: produzido pelo autor.

referência em preto tracejado e a resposta inicial com o controlador inicial mal ajustado em azul. Como pode ser observado as respostas obtidas são menos oscilatórias e possuem as características que eram buscadas (pico e tempo de acomodação).

6.1.3 Caso multivariável simples

Considere o seguinte processo multivariável de exemplo utilizado por Campestrini et al. (2016):

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,095q^{-1}}{(1 - 0,92q^{-1})(1 - 0,8q^{-1})} & \frac{0,04q^{-1}}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,85q^{-1})} \\ \frac{-0,03q^{-1}}{(1 - 0,92q^{-1})(1 - 0,8q^{-1})} & \frac{0,05q^{-1}}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,85q^{-1})} \end{bmatrix}, \quad (419)$$

e considere também o modelo de referência:

$$Q_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,095q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,92q^{-1})(1 - 0,8q^{-1})^2} & \frac{0,04q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,85q^{-1})(1 - 0,6q^{-1})} \\ \frac{-0,03q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,92q^{-1})(1 - 0,8q^{-1})^2} & \frac{0,05q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,85q^{-1})(1 - 0,6q^{-1})} \end{bmatrix}, \quad (420)$$

que pode ser alcançado com o seguinte controlador ideal:

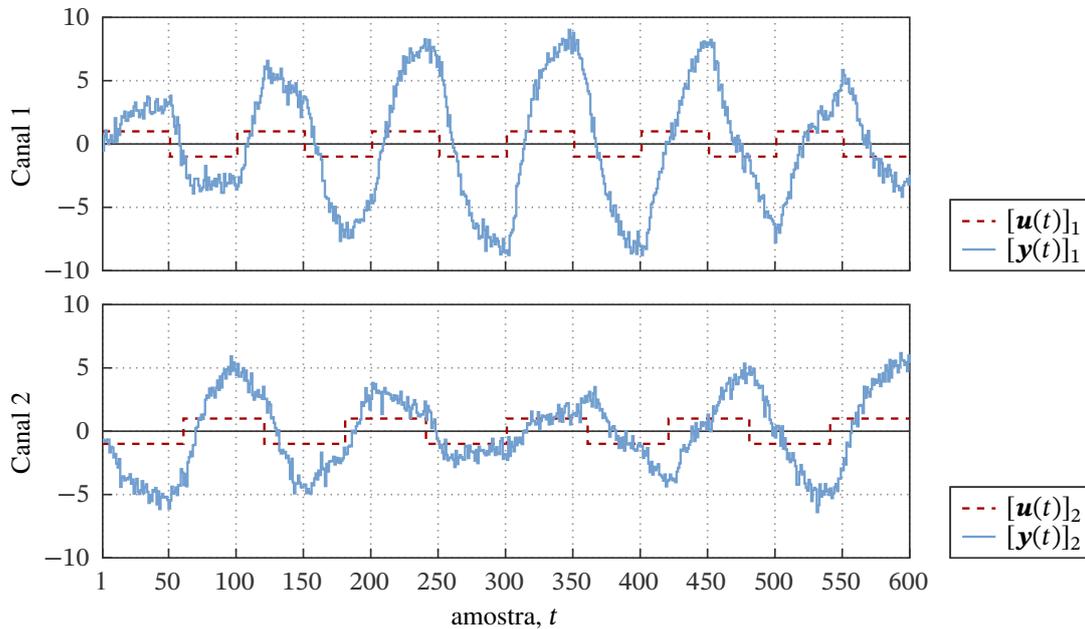
$$C(q, \rho^*) = \begin{bmatrix} \frac{1,681 - 2,891q^{-1} + 1,237q^{-2}}{1 - q^{-1}} & \frac{-1,345 + 2,313q^{-1} - 0,9896q^{-2}}{1 - q^{-1}} \\ \frac{2,017 - 3,529q^{-1} + 1,543q^{-2}}{1 - q^{-1}} & \frac{6,387 - 11,18q^{-1} + 4,886q^{-2}}{1 - q^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (421)$$

O controlador ideal é composto por quatro controladores PID interconectados. O modelo de perturbação foi escolhido para que resultasse neste controlador ideal específico, de modo que não tem nenhuma interpretação em termos de performance da resposta a perturbação. Em outras palavras, esse modelo de referência é só um exemplo para avaliar a capacidade do método de estimar um número um pouco maior de parâmetros. Além disso, como essa seção trata apenas dos casos em que a Suposição 2.4 é respeitada, a estrutura do controlador cujos parâmetros serão estimados será considerada como

$$C(q, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1 + \rho_2q^{-1} + \rho_3q^{-2}}{1 - q^{-1}} & \frac{\rho_7 + \rho_8q^{-1} + \rho_9q^{-2}}{1 - q^{-1}} \\ \frac{\rho_4 + \rho_5q^{-1} + \rho_6q^{-2}}{1 - q^{-1}} & \frac{\rho_{10} + \rho_{11}q^{-1} + \rho_{12}q^{-2}}{1 - q^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (422)$$

Novamente, supõe-se que o modelo real do processo não está disponível e o controlador será ajustado apenas a partir dos dados. Por conta disso, os dados foram coletados de 100 simulações de Monte Carlo, variando apenas a realização do ruído de medida, e um controlador foi projetado para cada realização. Em cada simulação, a entrada do processo foi excitada em malha aberta simultaneamente por dois sinais de onda quadrada com 600 amostras, períodos de 100 e 120 amostras e amplitudes de ± 1 . Além disso, em cada simulação a saída coletada do processo é contaminada com uma realização de um sinal de ruído branco com desvio padrão $\sigma = 0,5$. Uma das realizações dos sinais coletados durante os experimentos simulados, separados por canal, é apresentada na Figura 26, o sinal de excitação é a onda quadrada em vermelho tracejado e o sinal de saída é representado em azul, evidenciando o ruído de medida.

Figura 26 — Exemplo de sinais do caso multivariável simples.



Uma realização dos sinais produzidos. O sinal de excitação é uma onda quadrada representada em vermelho tracejado e o sinal da saída ruidoso é representado em azul. Fonte: produzido pelo autor.

Os dados gerados durante a simulação foram empregados para ajustar os parâmetros do controlador (422) através de (250). As médias e desvios padrão das estimativas obtidas para os parâmetros são apresentados pela Tabela 13. Observe que a maioria dos parâmetros foi bem estimada. À exceção dos parâmetros ρ_7 a ρ_9 , os outros apresentam menos de 1%

Tabela 13 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso multivariável simples.

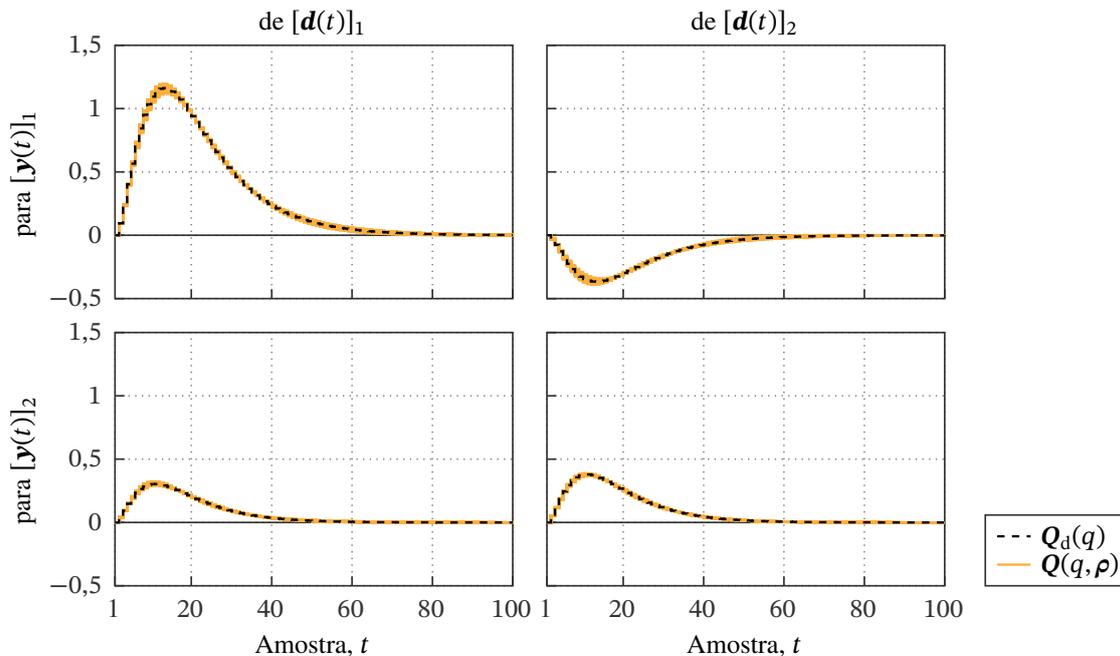
ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS ^a
ρ_1	1,6807	1,6723 ($\pm 0,1070$)
ρ_2	-2,8908	-2,8740 ($\pm 0,2135$)
ρ_3	1,2370	1,2285 ($\pm 0,1069$)
ρ_4	2,0168	2,0189 ($\pm 0,1526$)
ρ_5	-3,5294	-3,5338 ($\pm 0,3046$)
ρ_6	1,5429	1,5451 ($\pm 0,1526$)
ρ_7	-1,3445	-1,3912 ($\pm 0,1512$)
ρ_8	2,3126	2,4062 ($\pm 0,3033$)
ρ_9	-0,9896	-1,0367 ($\pm 0,1525$)
ρ_{10}	6,3866	6,4450 ($\pm 0,2207$)
ρ_{11}	-11,1765	-11,2937 ($\pm 0,4425$)
ρ_{12}	4,8857	4,9446 ($\pm 0,2224$)

^a obtidas com (250) e $\ell = 25$.

de polarização e menos de 10% de desvio padrão em relação ao valor ideal dos parâmetros.

De qualquer maneira, para mostrar que os resultados obtidos são razoáveis mesmo com alguns parâmetros não tão bem estimados, as respostas a perturbação do tipo degrau são apresentadas na Figura 27. Cada uma das respostas em amarelo foi obtida com um dos

Figura 27 — Respostas obtidas no caso multivariável simples.



Respostas obtidas com os controladores ajustados em amarelo e resposta desejada do modelo de referência em preto tracejado. Fonte: produzido pelo autor.

controladores ajustados e a resposta desejada do modelo de referência é apresentada em preto tracejado. Todas as respostas foram simuladas sem ruído. Mais uma vez é possível perceber que as respostas obtidas estão bem próximas do desejado, indicando que o método dá bons resultados quando a Suposição 2.4 é respeitada.

6.2 Condição de pertinência violada

A Suposição 2.4 supõe que existe um vetor de parâmetros para o qual o sistema em malha fechada terá comportamento exatamente igual ao desejado. Como mencionado já diversas vezes nessa tese, em geral essa suposição não pode ser garantida. Isso não é devido apenas à falta de um modelo do processo. Na verdade mesmo se um modelo estivesse disponível, esse jamais poderia ser considerado um modelo exato e aquela condição é sempre pelo menos um pouco violada. Algumas vezes, no entanto, as informações disponíveis sobre o processo podem ser suficientes para concluir que a função de sensibilidade a perturbação de carga terá certo formato. Desse modo, é possível parametrizar o modelo de referência para reduzir bastante a violação da suposição de pertinência ao identificar alguns parâmetros do modelo de referência juntamente com os parâmetros do controlador. Quando a flexibilização do modelo de referência não é possível ou não é suficiente para garantir um bom desempenho do método, a pré-filtragem dos dados pode ser empregada.

6.2.1 Caso de fase não mínima

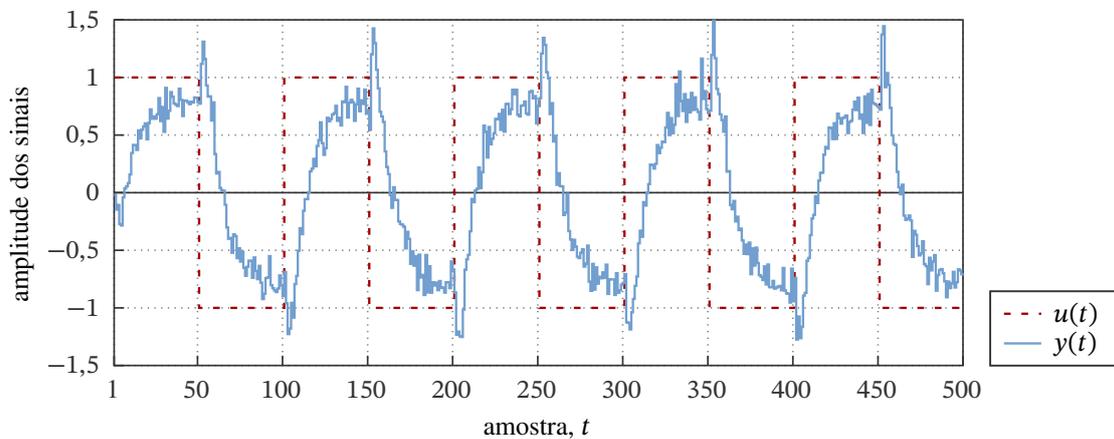
Observe o seguinte processo monovariável relativamente simples:

$$G(q) = \frac{-0,2q^{-1}(1 - 1,2q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,5q^{-1})}, \quad (423)$$

esse processo é de segunda ordem e possui um zero de fase não mínima em 1,2 que produz uma resposta inicial inversa em malha aberta. Além disso, lembrando do que foi mencionado no Capítulo 3, é importante incluir esse zero de fase não mínima no modelo de referência. Porém esse zero é supostamente desconhecido pelo projetista.

Entretanto, suponha que seja possível executar experimentos em malha aberta no sistema, usando como sinal de excitação uma onda quadrada com período de 100 amostras e níveis ± 1 . A Figura 28 apresenta os sinais coletados em um desses experimentos simulados.

Figura 28 — Exemplo de sinais do caso de fase não mínima.



Uma realização dos sinais produzidos. O sinal de excitação é uma onda quadrada representada em vermelho tracejado e o sinal da saída ruidoso é representado em azul, evidenciando a resposta inicial invertida do processo. Fonte: produzido pelo autor.

A entrada é a onda quadrada em vermelho tracejado, enquanto a saída contaminada com ruído branco com desvio padrão $\sigma = 0,1$ é apresentada em azul, evidenciando a resposta inversa devida ao zero de fase não mínima.

Suponha que o controlador disponível é um controlador do tipo PI com a seguinte estrutura:

$$C(q, \rho) = \frac{\rho_1 + \rho_2 q^{-1}}{1 - q^{-1}}. \quad (424)$$

Além disso, suponha que se deseja que o sistema apresente uma função de sensibilidade a perturbação com a seguinte estrutura:

$$Q_d(q, \eta) = \frac{q^{-1}(\eta_1 - \eta_2 q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 1,678q^{-1} - 0,7136q^{-2})} \quad (425)$$

$$= \frac{\eta_1 q^{-1}(1 - zq^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 1,678q^{-1} - 0,7136q^{-2})}, \quad (426)$$

onde $\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^T$ é o vetor de parâmetros do modelo de referência (linearmente parametrizado). Esse modelo foi reescrito em (426) para evidenciar que $z = -\eta_2/\eta_1$ é o zero livre

do modelo de referência e η_1 é o ganho. Por fim, suponha que ao analisar os sinais coletados, o projetista estimou inicialmente que o ganho do modelo deve ser aproximadamente $\eta_1^{[0]} = -0,18$. Ele também percebeu a resposta inversa do sistema, estimando um zero de fase não mínima em $z^{[0]} = 1,5$. Isso indica que o valor inicial da estimativa do segundo parâmetro do modelo de referência pode ser $\eta_2 = 0,24$.

Observe que se o modelo do processo (423) estivesse disponível, seria possível mostrar que o modelo de referência ideal que deveria ter sido escolhido é dado por:

$$Q_d(q, \eta^*) = \frac{-0,2(1 - 1,2q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 1,678q^{-1} - 0,7136q^{-2})}, \quad (427)$$

isto é, com o mesmo grau relativo, ganho e zero de fase não mínima que o processo. Porém, como esse não é o caso, os dados coletados foram empregados para estimar os parâmetros do controlador e do modelo de referência ideais. Os dados consistem de 100 realizações de Monte Carlo, das quais uma já foi apresentada na Figura 28. Para cada realização um conjunto de parâmetros para o controlador (424) foi estimado com 100 iterações do método DCbT flexível e os resultados são apresentados na Tabela 14. Na

Tabela 14 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso de fase não mínima.

Parâmetro	ideal	ESTIMATIVAS ^b	
		inicial	final
ρ_1	0,8900	-0,0093 ($\pm 0,0093$)	0,8496 ($\pm 0,0342$)
ρ_2	-0,8100	0,0986 ($\pm 0,0094$)	-0,7609 ($\pm 0,0345$)
η_1	-0,2000	-0,1800 ^a	-0,2053 ($\pm 0,0109$)
η_2	0,2400	0,2700 ^a	0,2463 ($\pm 0,0108$)
z	1,2000	1,5000 ^a	1,2003 ($\pm 0,0119$)

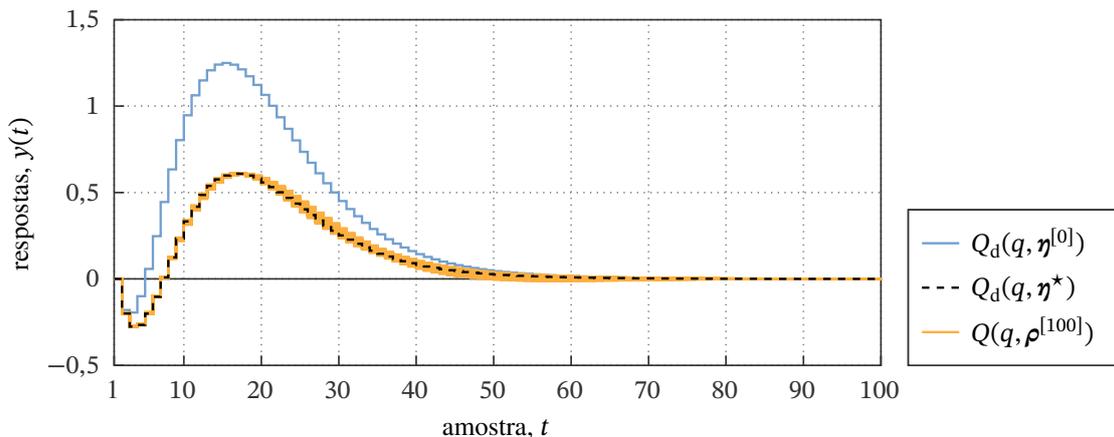
^a iniciais escolhidas pelo projetista.

^b obtidas com 100 iterações de (229) e (230) e $\ell = 35$.

coluna “ideal” são apresentados os valores ideais de todos os parâmetros, os valores iniciais dos parâmetros do modelo de referência escolhidos pelo projetista e as estatísticas dos parâmetros do controlador após a primeira iteração são apresentados na coluna “inicial”, as estatísticas de todos os parâmetros após as 100 iterações são apresentados na coluna “final”. A última linha apresenta os valores para o zero de fase não mínima que não é estimado diretamente pelo método e precisa ser calculado a partir dos parâmetros do modelo de referência. Observe que os parâmetros do modelo foram razoavelmente bem estimados, mas os do controlador apresentam certa polarização. Apesar disso, o zero do controlador foi bem estimado, o zero do controlador ideal é em $-\rho_2^*/\rho_1^* = 0,9101$, enquanto que o zero do controlador médio estimado ficou em $0,7609/0,8496 = 0,8956$.

A resposta inicial requisitada pelo projetista pode ser vista na Figura 29, em azul, juntamente com a resposta do modelo de referência ideal (para os polos e o zero fixados), em preto tracejado, e as respostas obtidas com cada controlador, em amarelo. Observe da Tabela 14, que os parâmetros iniciais do modelo de referência fazem com que o controlador ideal viole muito a Suposição 2.4. Isso faz com que a resposta do modelo de referência inicial seja muito diferente do que pode ser alcançado, como pode ser observado na Figura 29. Porém, ao final da otimização os parâmetros do modelo de referência estão

Figura 29 — Respostas inicial e finais no caso de fase não mínima.



Resposta do modelo de referência inicial escolhido pelo projetista a uma perturbação do tipo salto em azul, resposta do modelo ideal para os polos escolhidos em preto tracejado, e respostas obtidas com os controladores encontrados em amarelo, todas simuladas sem ruído. Fonte: produzido pelo autor.

próximos dos ideais, principalmente o zero de fase não mínima, que tem o papel mais importante. Como a violação da pertinência é pequena, ao final da otimização o método é capaz de ajustar o controlador de maneira que a resposta do sistema se aproxime da resposta do modelo de referência ideal. Por fim, é importante lembrar que, para cada controlador obtido, toda a otimização é realizada *offline* com um mesmo conjunto de dados, não é preciso realizar um novo experimento a cada iteração, uma vez que o método proposto não é iterativo, apenas a sua solução.

6.2.2 Caso de ordem reduzida

Considere novamente o processo e o modelo de referência do Exemplo 4.4, isto é,

$$G(q) = \frac{1}{120} \frac{q^{-1}(1 - 0,7q^{-1})}{(1 - 0,95q^{-1})^2}, \quad (428)$$

$$Q_d(q) = \frac{1}{120} \frac{q^{-1}(1 - 0,7q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})(1 - 0,95q^{-1})^2}, \quad (429)$$

porém agora, considere que o controlador disponível é um PI. No Exemplo 4.4 foi mostrado que o controlador ideal (342), necessário para alcançar o desempenho do modelo de referência desejado, tem estrutura PIDF:

$$C^*(q) = \frac{12 - 22,8q^{-1} + 10,83q^{-2}}{(1 - 0,7q^{-1})(1 - q^{-1})}. \quad (430)$$

Isso implica que o controlador que está disponível tem ordem reduzida e que o controlador ideal não respeita a Suposição 2.4.

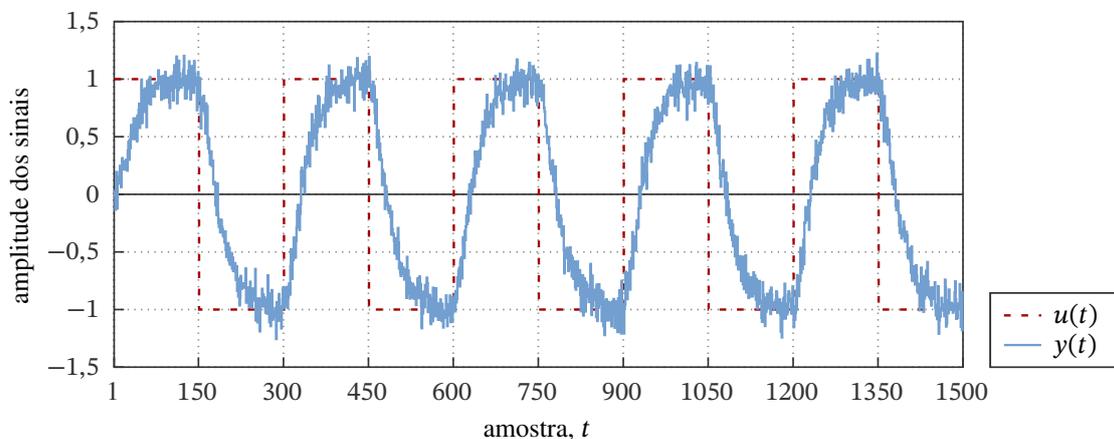
Nesse caso, não é possível alcançar o comportamento ideal desejado, porém ainda é possível alcançar um comportamento ótimo com respeito à resposta a perturbação. Esse comportamento é obtido com o seguinte controlador PI ótimo:

$$C(q, \rho^*) = \frac{4,0745 - 3,9854q^{-1}}{1 - q^{-1}}, \quad (431)$$

obtido através de uma otimização direta da função custo de resposta da perturbação (40) usando o modelo do processo e uma perturbação degrau de 300 amostras. Note que isso só seria possível se o modelo do processo estivesse disponível, o que supostamente não é verdade, e só será empregado aqui para fins de comparação com as respostas obtidas com controladores identificados.

Para ajustar os parâmetros do controlador disponível, primeiramente suponha que é possível realizar um experimento em malha aberta no processo para obter dados. Desse modo, 100 simulações de Monte Carlo foram executadas sobre o processo. Em cada simulação o processo foi excitado por 5 períodos de 300 amostras de uma onda quadrada com níveis ± 1 e a saída foi contaminada com uma realização de ruído branco com desvio padrão $\sigma = 0,1$. Uma realização dos dados coletados é apresentada no gráfico da Figura 30. O sinal de entrada do experimento é a onda quadrada em vermelho tracejado, enquanto

Figura 30 — Exemplo de sinais do caso de ordem reduzida.



Uma realização dos sinais produzidos. O sinal de excitação é uma onda quadrada representada em vermelho tracejado e o sinal da saída ruidoso é representado em azul. Fonte: produzido pelo autor.

que o sinal de saída contaminado com ruído de medida é representado em azul.

Como a Suposição 2.4 foi violada e, nesse caso, essa violação não poderia ser remediada pelo método flexível, os seus efeitos foram amenizados através da pré-filtragem dos dados. Como o denominador do controlador PI é todo fixo, o filtro foi calculado conforme (194) diretamente, sem estimar o espectro dos sinais. Lembrando que $\Phi_u(\omega) = |\mathcal{F}\{u(t)\}|^2$ e aproximando a onda quadrada da excitação por um degrau, o filtro fica:

$$W(q) = \frac{Q_d(q) 1 - q^{-1}}{G(q) 1} \quad (432)$$

$$= \frac{(1 - q^{-1})^2}{(1 - 0,9q^{-1})} \quad (433)$$

onde o primeiro fator do lado direito de (432) usa a aproximação $Q_d(q) \approx Q(q, \rho^*)$ e o segundo fator vem do inverso da transformada de Fourier do degrau. Note que na vida real esse cálculo direto não seria possível, pois emprega o modelo do processo. No entanto, isso foi feito para evitar introduzir os erros de estimação dos espectros, para dar uma ideia da melhor estimativa que pode ser obtida nesse caso pelo método proposto.

Os dados foram empregados para estimar os parâmetros de 100 controladores PI usando o método DCbT proposto e uma variável instrumental com até $\ell = 185$ deslocamentos.

Tabela 15 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso de ordem reduzida.

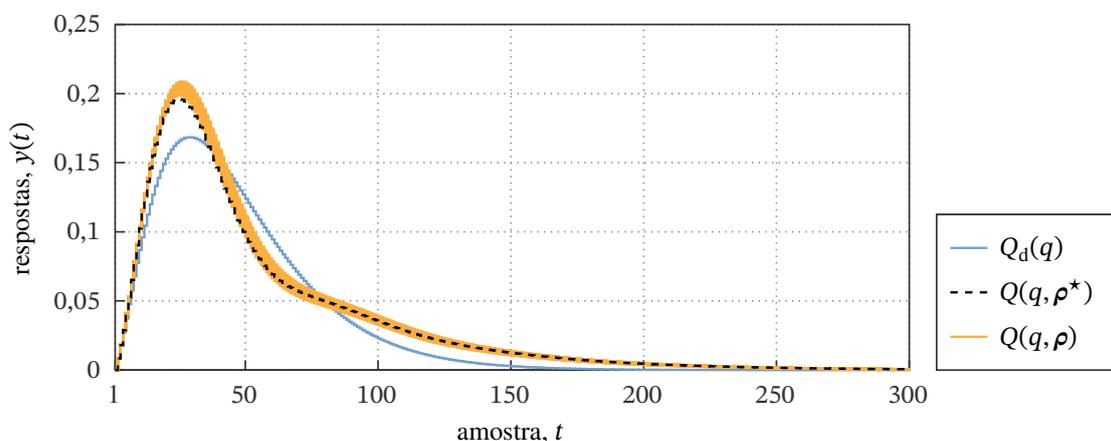
ρ	ρ^*	ESTIMATIVAS ^a
ρ_1	4,0745	3,8299 ($\pm 0,0440$)
ρ_2	-3,9854	-3,7440 ($\pm 0,0425$)

^a obtidas com (186), $\ell = 185$ e o filtro descrito em (432).

O resultado das estimativas dos parâmetros obtidas é apresentado na Tabela 15, onde é possível observar que a estimativa apresenta certa polarização e pouca variância. A polarização é devida a pelo menos três fatores, a saber: o espectro do sinal de excitação que foi aproximado por um degrau para calcular o filtro; a função de sensibilidade a perturbação ótima que foi aproximada pela ideal, também para o filtro; e o número de amostras finitas que é aproximado pelo limite de $N \rightarrow \infty$ na correlação. Apesar da visível polarização dos parâmetros, o zero do controlador foi bem estimado: o zero do controlador ótimo é em $-\rho_2^*/\rho_1^* = 0,9781$, enquanto que o zero do controlador médio estimado ficou em $3,8299/3,7440 = 0,9776$.

As respostas de todas as funções de sensibilidade a perturbação de carga a uma perturbação do tipo degrau de 300 amostras são apresentadas na Figura 31. A resposta

Figura 31 — Respostas ideal, ótima e obtidas no caso de ordem reduzida.



Resposta ideal do modelo de referência escolhido pelo projetista a uma perturbação do tipo salto em azul, resposta ótima alcançável com a estrutura de controlador disponível em preto tracejado, e respostas obtidas com os controladores encontrados em amarelo, todas simuladas sem ruído. Fonte: produzido pelo autor.

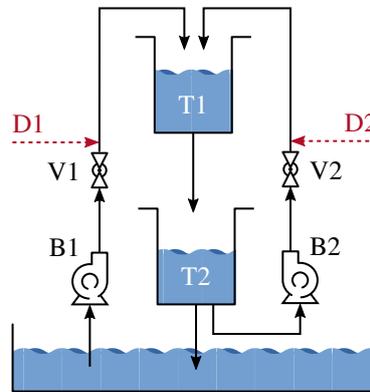
solicitada pelo projetista é a curva em azul, a melhor resposta possível de acordo com a otimização direta do custo da resposta a perturbação do modelo de referência é a curva em preto tracejado, e as respostas obtidas com cada controlador identificado são apresentadas em amarelo. Todas as respostas foram simuladas sem ruído.

Como pode ser observado na Figura 31, a resposta desejada é bastante diferente da resposta ótima, por isso é preciso filtrar os dados. Além disso, vale a pena lembrar que os dados filtrados são utilizados apenas para calcular o regressor e o sinal de saída virtual do controlador, a variável instrumental ainda é obtida diretamente do sinal de excitação, sem filtrar.

6.2.3 Caso multi-SISO

Considere o processo multivariável da Figura 32, composto por dois tanques (T1 e T2), duas bombas (B1 e B2) e duas válvulas (V1 e V2). A bomba B1 bombeia líquido

Figura 32 — Processo multivariável do caso multi-SISO.



Fonte: produzido pelo autor.

do reservatório para o tanque superior através da válvula V1, enquanto que a bomba B2 bombeia do tanque inferior para o superior através da válvula V2. O líquido do tanque superior escoia por ação da gravidade para o tanque inferior através de um orifício e o líquido do tanque inferior também escoia para o reservatório através de outro orifício. As aberturas das válvulas estão sujeitas às perturbações aditivas D1 e D2. Para um dado ponto de operação esse sistema pode ser aproximado por um sistema linear através das seguintes equações de diferenças:

$$[\mathbf{y}(t)]_1 = [\mathbf{y}(t-1)]_1 + b_1 [\mathbf{u}(t-1)]_1 + b_2 [\mathbf{u}(t-1)]_2 - a_1 [\mathbf{y}(t-1)]_1, \quad (434)$$

$$[\mathbf{y}(t)]_2 = [\mathbf{y}(t-1)]_2 + a_1 [\mathbf{y}(t-1)]_1 - a_2 [\mathbf{y}(t-1)]_2 - b_2 [\mathbf{u}(t-1)]_2, \quad (435)$$

onde a entrada $\mathbf{u}(t)$ representa as aberturas das válvulas e a saída $\mathbf{y}(t)$ representa os níveis dos tanques. Além disso, a_1 e a_2 são constantes dos orifícios e das áreas dos respectivos tanques, enquanto que b_1 e b_2 são constantes dos respectivos conjuntos bomba-válvula, para o dado ponto de operação.

Partindo das equações (434) e (435), é possível escrever o seguinte modelo para o processo:

$$\mathbf{G}(q) = \begin{bmatrix} \frac{q^{-1}}{1 - 0,9q^{-1}} & \frac{2q^{-1}}{1 - 0,9q^{-1}} \\ \frac{0,1q^{-2}}{(1 - 0,9q^{-1})^2} & \frac{-2q^{-1}(1 - q^{-1})}{(1 - 0,9q^{-1})^2} \end{bmatrix}, \quad (436)$$

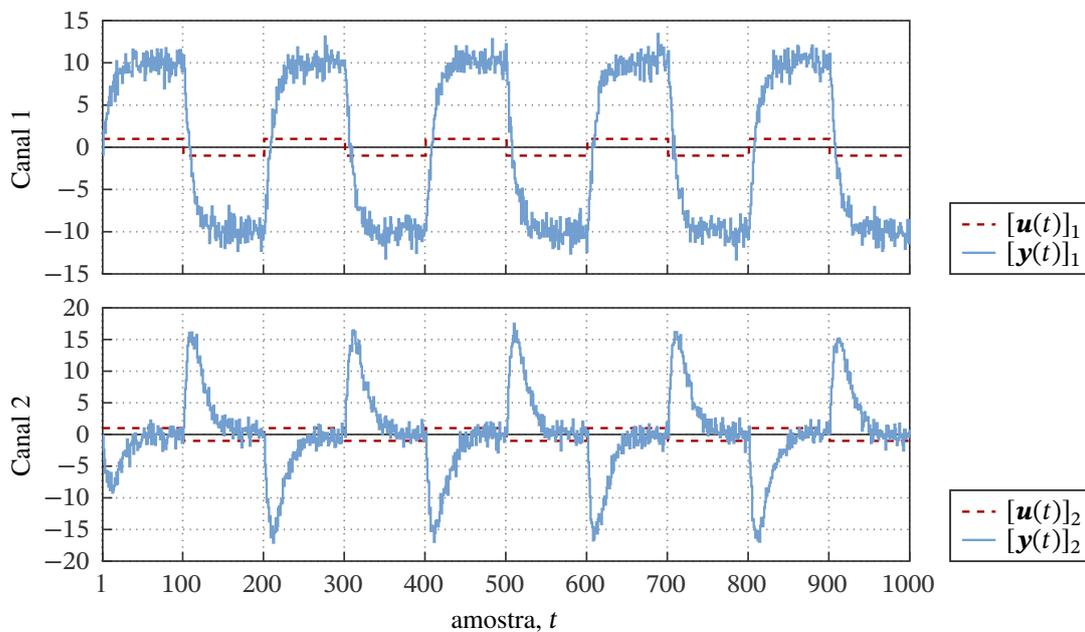
onde foram utilizados os seguintes valores para as constantes: $a_1 = a_2 = 0,1$ para os conjuntos de saída dos tanques, $b_1 = 1$ para um dos conjuntos de entrada e $b_2 = 2$ para o outro. Novamente, esse modelo é suposto desconhecido e o ajuste dos controladores será realizado a partir de dados.

Os controladores escolhidos são dois controladores PI, cada um responsável pelo controle de um dos canais. Desse modo, a estrutura do controlador é dada por:

$$\mathbf{C}(q, \boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} \rho_1 + \frac{\rho_2}{(1 - q^{-1})} & 0 \\ 0 & \rho_3 + \frac{\rho_4}{(1 - q^{-1})} \end{bmatrix}. \quad (437)$$

Para obter os dados necessários, 100 realizações de Monte Carlo foram empregadas. Em cada realização, dois experimentos foram executados sobre o processo em malha aberta, excitando uma entrada de cada vez e medindo apenas a saída correspondente. Uma realização dos dados coletados é apresentada na Figura 33. O sinal de excitação são 5

Figura 33 — Exemplo de sinais do caso multi-SISO.



Uma realização dos sinais produzidos. O sinal de excitação é uma onda quadrada representada em vermelho tracejado e o sinal da saída ruidoso é representado em azul. Cada entrada foi excitada separadamente enquanto a outra foi mantida em zero. Fonte: produzido pelo autor.

períodos de onda quadrada de 200 amostras cada, representado em vermelho tracejado, o sinal de saída é contaminado com ruído branco com desvio padrão $\sigma = 1,0$, representado em azul.

Após a coleta de dados, foi selecionado um modelo de referência flexível com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{Q}_d(q, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{(\eta_1 - \eta_2 q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,5q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\eta_3 - \eta_4 q^{-1})(1 - q^{-1})}{(1 - 0,5q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})^2} \end{bmatrix}. \quad (438)$$

Usando os dados de cada realização, cada canal foi ajustado separadamente, isto é, um controlador por vez. Para ajustar o primeiro controlador, foram usados os dados do canal 1 juntamente com 1000 iterações do método DCbT flexível monovariável como apresentado em (229) e (230). Em seguida foi ajustado o segundo controlador, usando os dados coletados do canal 2 e mais 1000 iterações do DCbT flexível monovariável. As médias e desvios padrão dos parâmetros estimados são apresentados na Tabela 16 juntamente com os ótimos. Nesse caso os parâmetros ótimos foram obtidos otimizando a função custo de resposta do modelo de referência, porém com o modelo de referência flexibilizado. As respostas a um degrau de perturbação obtidas com cada par de controladores identificados formando a estrutura (437) são apresentadas na Figura 34 em amarelo, juntamente com

Tabela 16 — Média e desvio padrão dos parâmetros estimados no caso multi-SISO.

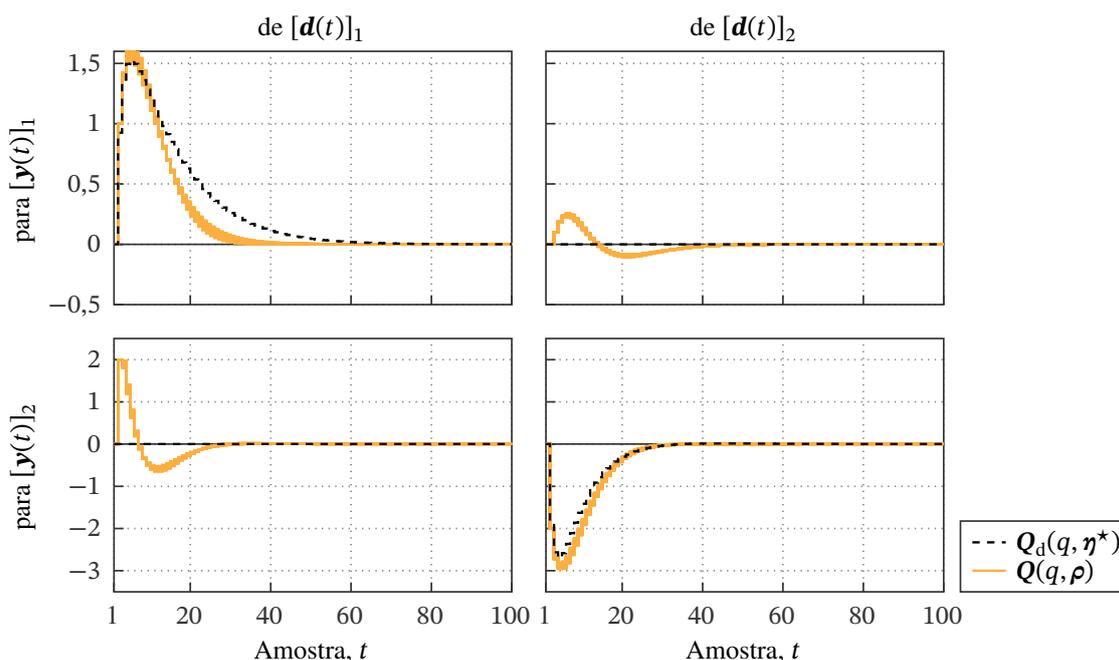
Parâmetro	ótimo ^a	ESTIMATIVAS	
		inicial	final ^c
ρ_1	0,5345	0,5036 ($\pm 0,0007$)	0,4546 ($\pm 0,0122$)
ρ_2	0,0366	0,0498 ($\pm 0,0000$)	0,0507 ($\pm 0,0002$)
ρ_3	-0,2307	-0,0726 ($\pm 0,0011$)	-0,1955 ($\pm 0,0045$)
ρ_4	-0,0369	-0,0435 ($\pm 0,0000$)	-0,0315 ($\pm 0,0004$)
η_1	0,9251	0,9000 ^b	0,9927 ($\pm 0,0231$)
η_2	-0,7898	-0,8000 ^b	-0,8941 ($\pm 0,0234$)
η_3	-1,8698	-2,1000 ^b	-1,8406 ($\pm 0,0249$)
η_4	1,7359	2,0000 ^b	1,7042 ($\pm 0,0239$)

^a obtidos otimizando (40) diretamente.

^b estimativas iniciais dadas pelo projetista.

^c obtidas com 1000 iterações de (229) e (230) e $\ell = 25$.

Figura 34 — Respostas obtidas no caso multi-SISO.



Respostas obtidas com os controladores ajustados em amarelo e resposta do modelo de referência ótimo em preto tracejado. Fonte: produzido pelo autor.

a resposta obtida com os parâmetros ótimos em preto tracejado. É claro que nesse caso o modelo de referência tem as componentes fora da diagonal principal zeradas. Fora isso, os modelos de referência estimados em cada realização (não mostrados) aproximam razoavelmente o comportamento do sistema após o ajuste do controlador.

Esse estudo de caso mostra como é possível ajustar cada um dos controladores de um sistema multi-SISO através de dados coletados em malha aberta. No caso de dados coletados em malha fechada, o ajuste se torna mais difícil, pois é preciso levar em conta a dinâmica dos outros controladores que vão interferir no experimento. Nesse caso não foi

possível obter bons resultados e estes foram omitidos.

6.3 Certificação

Para o estudo de caso da certificação, foi escolhido o mesmo sistema inicial do caso monovariável subamortecido da Seção 6.1.2. Isto é, o processo é dado por

$$G(q) = \frac{3,628q^{-1}(1 - 0,5979q^{-1})}{1 - 1,706q^{-1} - 0,8251q^{-2}}, \quad (439)$$

enquanto que o controlador inicialmente na malha é dado por

$$C_o(q) = \frac{0,1198 - 0,1485q^{-1} + 0,04597q^{-2}}{(1 - 0,01044q^{-1})(1 - q^{-1})}. \quad (440)$$

Com esse sistema inicial, foram calculadas as respostas em frequência da função de sensibilidade, $S_o(q)$, e função de sensibilidade a perturbação de carga, $Q_o(q)$. Novamente é preciso mencionar que em uma situação real essas funções teriam que ser estimadas, uma vez que é preciso o conhecimento do modelo do processo para calculá-las. Porém, como a intenção aqui é avaliar o método de certificação em si, e não os métodos de estimativa da resposta em frequência, optou-se por usar o modelo do sistema diretamente.

Os controladores a serem avaliados são controladores PID com o polo do derivativo em 0,6. Ou seja, têm a seguinte estrutura:

$$C(q, \rho) = \frac{k(1 - z_1q^{-1})(1 - z_2q^{-1})}{(1 - 0,6q^{-1})(1 - q^{-1})}, \quad (441)$$

onde o parâmetro k é o ganho do controlador, enquanto que z_1 e z_2 são os seus zeros. Os controladores foram gerados automaticamente a partir de uma grade de valores para estes parâmetros:

$$k = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, \quad (442)$$

$$z_1 = 0,01, 0,11, 0,21, 0,31, 0,41, 0,51, 0,61, 0,71, 0,81, 0,91, \quad (443)$$

$$z_2 = 0,05, 0,15, 0,25, 0,35, 0,45, 0,55, 0,65, 0,75, 0,85, 0,95. \quad (444)$$

Como a grade tem dimensões $10 \times 10 \times 10$, foram gerados 1000 controladores para que sejam avaliados. Mais uma vez, é importante mencionar que, em situações reais, esses controladores teriam sido obtidos de ajuste baseado em dados com um dos métodos apresentados. Porém, aqui foi escolhido gerar os controladores a partir de uma grade de parâmetros para obter uma amostra de um conjunto mais diverso de controladores. Além dessa grade, foram feitas outras escolhas arbitrárias, como o valor do polo do derivativo e forçar que os zeros do controlador sejam sempre reais.

Lembrando que o método de certificação, descrito pelo Algoritmo 1, opera comparando a distância de Vinnicombe entre um dos controladores candidatos e o controlador inicial, que já estabilizava o sistema, com a margem de estabilidade generalizada do sistema inicial. Além disso, o método usa um redimensionamento dos sinais para distorcer essas duas métricas facilitando a certificação. Para tanto, são empregadas as funções de resposta em frequência das sensibilidades mencionadas acima e dos dois controladores — inicial e candidato. Essas duas últimas respostas em frequência podem ser calculadas diretamente a partir dos modelos dos controladores, que sempre estarão disponíveis, mesmo se forem empregados métodos baseados em dados.

Desse modo, as respostas em frequência das funções de sensibilidade e dos controladores foram calculadas para uma grade de frequência composta de 100 pontos com $0,01\pi \leq \omega \leq \pi$. Isto é, o modelo do processo foi empregado no cálculo das respostas em frequência, o que é equivalente a empregar dados sem ruído. Essas respostas em frequência foram utilizadas para alimentar o Algoritmo 1 e os resultados da classificação dos controladores são apresentados na Tabela 17. Dos 1000 controladores, 510 são capazes

Tabela 17 — Resultados do estudo de caso da certificação.

REALIDADE	CERTIFICADOS		TOTAL
	sim	não	
estabilizante	184 (36,1%)	326 (63,9%)	510 (51,0%)
instabilizante	0 (0,0%)	490 (100,0%)	490 (49,0%)
TOTAL	184 (18,4%)	816 (81,6%)	1000 (100,0%)

de estabilizar o processo e os outros 490 não são capazes. Dos 510 controladores estabilizantes, o algoritmo certificou apenas 184, o que representa pouco mais que 36%, porém os outros quase 64% dos controladores estabilizantes não foram certificados. Por outro lado, dos controladores instabilizantes, o algoritmo não certificou nenhum, ou seja, não produziu nenhum falso positivo. Claro que esse tipo de viés é uma característica desejável de qualquer algoritmo de certificação se não for possível evitar o viés completamente. Além disso, era esperado que esse algoritmo não fosse capaz de certificar todos os controladores estabilizantes, já que a condição que ele usa é uma condição apenas suficiente. Mesmo assim, o algoritmo é capaz de certificar controladores que não estejam muito distantes do controlador original. Além disso, é uma boa prática de controle não fazer grandes modificações repentinamente no sistema. Isso evita que o mesmo seja perturbado para muito distante de um ponto de operação que já é sabidamente seguro e cujas características são bem conhecidas.

Para demonstrar o efeito do ruído na certificação, foi realizado um experimento em malha fechada com o controlador original para coletar dados. Durante esse experimento o sistema foi excitado através da entrada de perturbação por 5 períodos de 100 amostras cada de uma onda quadrada com níveis ± 1 . Além disso, foi injetado um ruído de medição branco com desvio padrão $\sigma = 0,1$ na saída do processo. Os sinais de entrada e saída coletados do processo foram empregados para estimar as respostas em frequência da função de sensibilidade a perturbação de carga e da função de sensibilidade do sistema com o controlador original através do método LRM. Em seguida, essas funções de sensibilidade foram empregadas no algoritmo de certificação para tentar certificar os mesmos controladores gerados anteriormente. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 18. Novamente, percebe-se que muitos (57,1%) dos controladores estabilizantes não foram certificados, o que é esperado do método. Porém, dessa vez foram certificados mais controladores do que quando foram usadas as funções de sensibilidade verdadeiras, um aumento de 3,8%. Inclusive, alguns controladores instabilizantes foram certificados, gerando uma taxa de falsos positivos de 0,6%. Isso é uma característica indesejável de que dados com ruído podem produzir falsos positivos. Porém essa taxa pode ser reduzida facilmente utilizando o parâmetro $\mu > 0$ no cálculo das funções do algoritmo.

Tabela 18 — Resultados do estudo de caso da certificação com ruído.

REALIDADE	CERTIFICADOS		TOTAL
	sim	não	
estabilizante	219 (42,9%)	291 (57,1%)	510 (51,0%)
instabilizante	3 (0,6%)	487 (99,4%)	490 (49,0%)
TOTAL	222 (22,2%)	778 (77,8%)	1000 (100,0%)

6.4 Análise dos resultados

Nesse capítulo foram apresentados alguns estudos de caso para dar uma ideia do comportamento dos métodos propostos em face de condições diversas. Nesse sentido, inicialmente foram ajustados controladores que eram capazes de alcançar o comportamento em malha fechada requisitado, ou seja, respeitando a Suposição 2.4, e conforme o capítulo foi se desenrolando foram abordadas situações mais interessantes.

Assim, no primeiro caso, da Seção 6.1.1, foi mostrado como o método monovariável é capaz de ajustar um controlador simples para um processo de primeira ordem com dados de malha aberta e ruído de medição colorido. Como nos exemplos apresentados ao longo do texto esse caso não apresentou nenhuma dificuldade.

Em seguida, na Seção 6.1.2, foi visto que o método proposto também é capaz de ajustar os parâmetros no denominador do controlador, mesmo a partir de dados de malha fechada. Nesse caso foi empregado um processo de segunda ordem pouco amortecido e um controlador PID com derivativo filtrado. A resposta mais amortecida buscada foi obtida sem problemas, por conta da pertinência do controlador ideal.

Em uma situação mais interessante, o terceiro caso ajustou um controlador multivariável empregando o método proposto. Nesse caso, apresentado na Seção 6.1.3, foram ajustados os 12 parâmetros do controlador, embora alguns parâmetros não puderam ser tão bem estimados quanto antes. Mesmo assim, a resposta resultante a perturbação ficou muito próxima da desejada, apesar da presença de ruído significativo nos dados.

Todos aqueles três casos usaram um modelo de referência “bem comportado” que pode ser alcançado com o controlador disponível sem nenhuma grande modificação. Porém, no quarto caso, na Seção 6.2.1, foi utilizado um processo com um zero de fase não mínima que precisa ser incluído no modelo de referência. Como o modelo do processo é supostamente desconhecido, essa foi uma boa oportunidade para mostrar a utilização do método DCbT flexível proposto. Esse método é capaz de ajustar os parâmetros do controlador e estimar os parâmetros de um modelo de referência alcançável ao mesmo tempo, facilitando as escolhas do projetista.

Já, na Seção 6.2.2 foi apresentada uma situação bastante comum em controle baseado em dados: as ordens do processo e do modelo de referência desejado são tais que o comportamento pedido não pode ser alcançado com a estrutura de controle disponível. Ou seja, o controlador é sub-parametrizado. Nesse caso, nem mesmo a flexibilização do modelo de referência dá conta da Suposição 2.4. Porém, é possível empregar um filtro para obter um comportamento mais próximo ao comportamento ótimo com respeito ao custo de resposta a perturbação.

Por fim, na Seção 6.2.3 foi encontrada uma situação em que é preciso de dois controladores separados para controlar um processo multivariável com dois canais. Nesse caso, foi projetado um controlador da cada vez com dados de malha aberta e usando o método

monovariável, porém o resultado não ficou tão próximo do solicitado quanto nos outros ajustes. Uma alternativa, se o caso permitir, é ajustar os dois controladores de uma vez só com o método multivariável flexível. Nesse caso também foi feita uma tentativa de ajustar os controladores com dados de malha fechada, mas os resultados não foram bons e foram omitidos.

Com respeito ao método de certificação de controladores monovariáveis através de dados de malha fechada, apenas um estudo de caso foi apresentado na Seção 6.3. Nesse caso foi utilizado um processo simples e um controlador com parâmetros ajustáveis apenas no numerador. Um controlador estabilizante foi usado como ponto de partida, como requer o método. Em seguida foram gerados diversos controladores variando os três parâmetros do seu numerador dentro de uma grade de valores. Por fim, os controladores foram testados pelo Algoritmo 1 usando funções de resposta em frequência calculadas diretamente dos modelos do processo e do controlador original, evitando, assim, introduzir erros de estimação. O método foi capaz de certificar pouco mais que um terço dos controladores estabilizantes mas conseguiu classificar corretamente todos os controladores instabilizantes. Isso mostrou que apesar da redução do conservadorismo da condição inicial de Vinnicombe, o método de certificação proposto ainda é bastante conservativo. Mesmo assim, esse método pode ser uma opção para quando o comportamento desejado não é muito distante do comportamento atual do sistema.

7 CONCLUSÕES E QUESTÕES EM ABERTO

Nesse trabalho foram propostos dois métodos baseados em dados com objetivos distintos. O primeiro é um método para ajuste dos parâmetros de um controlador com vistas a rejeição de perturbações de carga. Já o segundo método é um algoritmo que emprega uma condição no domínio da frequência e dados de malha fechada para a certificação de um controlador. A seguir são apresentadas algumas conclusões obtidas da realização desse trabalho e em seguida algumas questões que ainda ficaram em aberto.

7.1 Conclusões

Uma das principais motivações para o presente trabalho foi a escassez de trabalhos voltados para a rejeição de perturbação de carga na literatura de métodos de controle baseado em dados com modelo de referência, apesar de esse ser um objetivo de controle comum. Uma outra motivação foi que o único outro método conhecido com esse objetivo, o VDFT, utilizava uma abordagem de mínimos quadrados para o ajuste dos parâmetros do numerador de um controlador monovariável. Que o método de mínimos quadrados resulta em uma estimativa polarizada nesse caso, é um fato já conhecido da literatura. Por conta disso, o VDFT utiliza a abordagem de variáveis instrumentais para reduzir a polarização da estimativa, porém isso aumenta sua variância. Por outro lado, o método proposto para o ajuste dos parâmetros do controlador foi desenvolvido a partir de uma abordagem de correlação, baseada em conceitos de identificação de sistemas, e variáveis de erro muito similares às empregadas pelo VDFT e pelo NCbT. Esse novo método, chamado de DCbT, foi comparado com o VDFT através de um simples exemplo para o ajuste dos parâmetros de um controlador monovariável, uma vez que a teoria de identificação de sistemas já comprova que a abordagem de correlação é mais imune ao ruído dos dados, resultando em uma estimativa consistente dos parâmetros do controlador. Além disso, para dados finitos, a estimativa obtida com o método proposto tem menor variância uma vez que o vetor de instrumentos empregado tem dimensão maior que o vetor de variáveis instrumentais empregado no método da literatura.

Além de buscar uma boa estimativa para os parâmetros, é importante considerar controladores para processos multivariáveis. Nesse caso, a única formulação multivariável do VDFT que consta na literatura é apresentada em uma monografia acadêmica e não emprega variáveis instrumentais. Portanto uma outra vantagem da presente proposta é que o DCbT também consegue ajustar os parâmetros de um controlador multivariável utilizando a abordagem de correlação, obtendo uma estimativa consistente dos parâmetros ideais, mesmo na presença de ruído, sob a suposição de pertinência. Já quando aquela suposição não pode ser garantida, tanto o método da literatura (VDFT) quanto o método proposto (DCbT) são capazes de ajustar os parâmetros de um modelo de referência flexível,

independente de o controlador ser monovariável ou multivariável. Isso contribui para um melhor ajuste do controlador, uma vez que um bom casamento entre o modelo de referência e a estrutura do controlador é crucial para o bom desempenho dos métodos. Como a abordagem de correlação apresenta melhor desempenho que a abordagem de mínimos quadrados do VDFT, o DCbT multivariável proposto foi avaliado apenas com um exemplo e um estudo de caso, mas não foi comparado com o VDFT.

Além dessas vantagens, uma outra novidade trazida pela presente proposta está na inclusão dos parâmetros do denominador do controlador monovariável no problema de otimização. Apesar do ajuste desses parâmetros ser possível com os métodos baseados em dados da literatura, otimizando numericamente uma função custo não convexa, o DCbT também traz uma formulação que emprega um erro de predição da saída de um modelo do controlador semelhante aos modelos ARX. Nesse caso, o erro de predição torna-se afim com respeito aos parâmetros, resultando em um problema de otimização convexo com uma solução analítica. No caso em que o modelo escolhido para o controlador tem estrutura diferente do modelo ARX, os parâmetros ainda podem ser estimados numericamente como em outros métodos da literatura.

Se a suposição de pertinência pudesse ser garantida com exatidão o mínimo da função custo de correlação do DCbT coincidiria assintoticamente com o mínimo da função custo da resposta a perturbação do modelo de referência. Porém, em geral a suposição de pertinência nunca poderá ser garantida com exatidão. Por conta disso, é possível filtrar os dados do experimento para fazer com que o mínimo da função custo da abordagem de correlação do DCbT fique próximo do mínimo da função custo da resposta a perturbação. Os filtros ótimos que permitem tal comportamento foram derivados para todos os casos com controlador monovariável e também foram apresentadas aproximações desses filtros que podem ser obtidas a partir de informações disponíveis ao projetista.

Por fim, tanto em problemas de controle baseado em dados como em problemas de controle baseado em modelo, inicialmente não há garantia de que o controlador ajustado estabilizará o sistema em malha fechada. Ou seja, o controlador com os novos parâmetros precisa ser certificado antes de ser colocado na malha para operar. A literatura de controle baseado em modelo cobre bastante esta questão, de modo que existem várias maneiras de certificar o controlador quando o modelo do processo está disponível. Porém, como o DCbT é baseado em dados, também foi desenvolvida uma nova condição baseada em dados que permite a certificação do controlador recém ajustado. Essa condição é baseada em uma condição de Vinnicombe modificada e depende da identificação da amplitude da resposta em frequência de duas funções de sensibilidade do sistema já com outro controlador estabilizante, ou seja, só pode usar dados de malha fechada. Além disso, essa condição serve apenas à certificação de controladores monovariáveis. De qualquer modo, a condição proposta foi avaliada e comparada a outros dois métodos baseados em dados da literatura para certificação de controladores. Comparada ao primeiro método da literatura, a condição proposta tem como vantagem uma implementação mais simples. Entretanto, a condição daquele método é exata, ou seja, é necessária e suficiente para a estabilidade. Além disso, aquele método pode ser aplicado a controladores multivariáveis e dados de malha aberta. Porém a condição proposta pode ser empregada com dados mais pobres. Já em comparação com o segundo método da literatura, a condição da literatura tem a vantagem de poder ser incluída na otimização, permitindo a garantia assintótica de estabilidade do controlador estimado. Porém, nesse caso a condição proposta no presente trabalho se mostrou menos conservadora.

7.2 Questões em aberto

Apesar do esforço em produzir um trabalho bastante completo, não foi uma aspiração dessa tese de esgotar completamente esse assunto. Desse modo, as seguintes questões permanecem em aberto e podem ser um assunto interessante de pesquisas futuras:

- a) **escolha do modelo de referência para perturbação.** Como indicado ao longo da tese, uma escolha inadequada do modelo de referência pode ser a diferença entre um bom ajuste e a instabilidade do sistema. Para o problema de seguimento de referência já existe um trabalho que fornece um conjunto de diretrizes que podem ser aplicadas na escolha do modelo de referência (GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2019). Porém, para o problema de rejeição de perturbação de carga, as diretrizes ainda estão incompletas (BORDIGNON; CAMPESTRINI, 2018b);
- b) **escolha da dimensão da variável instrumental.** A variável instrumental empregada na correlação tem um comprimento $2\ell + 1$, onde o parâmetro ℓ representa a quantidade de deslocamentos da função de correlação que serão empregados na aproximação da sua norma. Esse número deve ser escolhido pelo projetista. Da literatura, sabe-se que a polarização das estimativas tem uma relação direta com esse parâmetro, enquanto que a variância tem uma relação inversa (KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007). Porém, um estudo mais aprofundado do impacto dessa variável em conjunto com outras informações como tipo de experimento, tipo de controlador, nível de ruído etc. parece um assunto interessante. Se possível, a produção de diretrizes para a escolha desse parâmetro também ajudaria a melhorar o desempenho do método;
- c) **extensão para outros tipos de problemas.** Como muitas vezes é necessário um controle multiobjetivo, uma extensão para utilizar a abordagem proposta para ajustar as respostas à referência e à perturbação ao mesmo tempo parece pertinente. Além disso, seria interessante estudar estratégias para controlar processos com tempo morto grande, onde é muito difícil escolher um modelo de referência adequado;
- d) **proveitar a semelhança dos métodos.** Vários métodos de controle baseado em dados com modelo de referência apresentam muitas semelhanças entre si. A principal semelhança está nos sinais de erro que são empregados. Assim como o VDFT e o DCbT proposto são similares, o VRFT, NCbT, OCI e outros métodos também o são. Desse modo, estudar as semelhanças entre esses métodos pode levar a uma abordagem mais geral, capaz de resolver diversos problemas de controle de uma só vez e de maneira mais simples;
- e) **filtro para reduzir a variância.** O filtro empregado nos métodos apresentados para compensar a violação da pertinência do controlador ideal reduz a distância entre a média das estimativas e o vetor de parâmetros ótimos. Por conta disso, esse filtro tem um desempenho ótimo na ausência de ruído. Porém, quando os sinais são ruidosos o filtro pode amplificar as contribuições do ruído e aumentar a variância das estimativas. Por outro lado, é interessante investigar se é possível obter um filtro adicional capaz de atenuar os efeitos deletérios do ruído, que poderia ser empregado, mesmo quando a pertinência não é violada, para reduzir a variância das estimativas. Já foi observado que muitas vezes filtrar os dados pelo modelo de referência pode dar bons resultados, o que motiva mais ainda um estudo nessa direção.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas*. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *PID controllers: Theory, design, and tuning*. 2nd. ed. Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America, 1995.

ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008.

BAZANELLA, A. S.; BOMBOIS, X.; GEVERS, M. Necessary and sufficient conditions for uniqueness of the minimum in prediction error identification. *Automatica*, Amsterdam, v. 48, n. 8, p. 1621–1630, Aug. 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.06.018>. Acesso em: 30 mar. 2021.

BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. *Data-driven controller design: The H_2 approach*. Dordrecht: Springer, 2012. (Communications and Control Engineering). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2300-9>. Acesso em: 30 mar. 2021.

BORDIGNON, V. *Critério otimizado para projeto de controle regulatório baseado em dados*. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/183059>. Acesso em: 30 mar. 2021.

BORDIGNON, V.; CAMPESTRINI, L. Data-driven PID control tuning for disturbance rejection in a hierarchical control architecture. *IFAC-PapersOnLine*, Amsterdam, v. 51, n. 4, p. 569–574, June 2018. Trabalho apresentado no 3rd IFAC Conference on Advances in Proportional-Integral-Derivative Control PID, 2018, [Ghent, Bélgica]. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.06.156>. Acesso em: 30 mar. 2021.

BORDIGNON, V.; CAMPESTRINI, L. Improving the choice of disturbance reference model in data-driven control methods. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA), 22., 2018, João Pessoa. *Anais[...]*. Campinas: Sociedade Brasileira de Automática (SBA), 2018. Disponível em: https://www.sba.org.br/open_journal_systems/index.php/sba/article/view/848. Acesso em: 30 mar. 2021.

CAMPESTRINI, L. et al. Data-driven model reference control design by prediction error identification. *Journal of the Franklin Institute*, Amsterdam, v. 354, n. 6, p. 2628–2647, Apr. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.08.006>. Acesso em: 30 mar. 2021.

CAMPESTRINI, L. et al. Unbiased MIMO VRFT with application to process control. *Journal of Process Control*, Amsterdam, v. 39, p. 35–49, Mar. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2015.12.010>. Acesso em: 30 mar. 2021.

CAMPESTRINI, L. et al. Virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants. *Automatica*, Amsterdam, v. 47, n. 8, p. 1778–1784, Aug. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.04.002>. Acesso em: 30 mar. 2021.

CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. M. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. *Automatica*, Amsterdam, v. 38, n. 8, p. 1337–1346, Aug. 2002. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(02\)00032-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00032-8). Acesso em: 30 mar. 2021.

CHEN, T.; FRANCIS, B. A. *Optimal sampled-data control systems*. London, UK: Springer, 1995. (Communications and Control Engineering Series). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3037-6>. Acesso em: 30 mar. 2021.

ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L.; BOEIRA, E. C. Virtual disturbance feedback tuning. *IFAC Journal of Systems and Control*, Amsterdam, v. 3, p. 23–29, Mar. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2018.01.003>. Acesso em: 30 mar. 2021.

FLOUDAS, C. A. *Deterministic Global Optimization: Theory, methods and applications*. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2000. v. 37. (Nonconvex optimization and its applications, v. 37). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4949-6>. Acesso em: 30 mar. 2021.

FORMENTIN, S. et al. Virtual reference feedback tuning of internal model controllers. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 49., 2010, Atlanta, GA. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2010. p. 5542–5547. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC.2010.5718027>. Acesso em: 30 mar. 2021.

FORMENTIN, S.; KARIMI, A. A data-driven approach to mixed-sensitivity control with application to an active suspension system. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Piscataway, NJ, v. 9, n. 4, p. 2293–2300, Nov. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TII.2012.2220556>. Acesso em: 30 mar. 2021.

FORMENTIN, S.; SAVARESI, S. M.; DEL RE, L. Non-iterative direct data-driven controller tuning for multivariable systems: theory and application. *IET Control Theory and Applications*, London, v. 6, n. 9, p. 1250–1257, June 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0204>. Acesso em: 30 mar. 2021.

FORMENTIN, S.; VAN HEUSDEN, K.; KARIMI, A. A comparison of model-based and data-driven controller tuning. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Hoboken, NJ, v. 28, n. 10, p. 882–897, Oct. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/acs.2415>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GAO, Z. On the centrality of disturbance rejection in automatic control. *ISA Transactions*, Amsterdam, v. 53, n. 4, p. 850–857, July 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2013.09.012>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GEVERS, M. et al. Identification and the information matrix: How to get just sufficiently rich. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, NJ, v. 54, n. 12, p. 2828–2840, Dec. 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2034199>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GONÇALVES DA SILVA, G. R.; BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L. On the choice of an appropriate reference model for control of multivariable plants. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Piscataway, NJ, v. 27, n. 5, p. 1937–1949, Sept. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TCST.2018.2842178>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GONÇALVES DA SILVA, G. R.; BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L. One-shot data-driven controller certification. *ISA Transactions*, Amsterdam, v. 99, p. 361–373, Apr. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2019.10.011>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GONÇALVES DA SILVA, G. R. et al. Data-driven LQR control design. *IEEE Control Systems Letters*, Piscataway, NJ, v. 3, n. 1, p. 180–185, Jan. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2018.2868183>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GONÇALVES DA SILVA, G. R.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Multivariable virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants. *IEEE Control Systems Letters*, Piscataway, NJ, v. 2, n. 1, p. 121–126, Jan. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2017.2763824>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GORSKI, J.; PFEUFFER, F.; KLAMROTH, K. Biconvex sets and optimization with biconvex functions: a survey and extentions. *Mathematical Methods of Operations Research*, Amsterdam, v. 66, n. 3, p. 373–407, June 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00186-007-0161-1>. Acesso em: 30 mar. 2021.

GUARDABASSI, G. O.; SAVARESI, S. M. Virtual reference direct design method: An off-line approach to data-based control system design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, NJ, v. 45, n. 5, p. 954–959, May 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/9.855559>. Acesso em: 30 mar. 2021.

HJALMARSSON, H. Efficient tuning of linear multivariable controllers using iterative feedback tuning. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Hoboken, NJ, v. 13, n. 7, p. 553–572, Nov. 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1115\(199911\)13:7%3C553::AID-ACS572%3E3.0.CO;2-B](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1115(199911)13:7%3C553::AID-ACS572%3E3.0.CO;2-B). Acesso em: 30 mar. 2021.

HJALMARSSON, H. Iterative feedback tuning: an overview. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Hoboken, NJ, v. 16, n. 5, p. 373–395, June 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/acs.714>. Acesso em: 30 mar. 2021.

HJALMARSSON, H. et al. Iterative feedback tuning: Theory and applications. *IEEE Control Systems Magazine*, Piscataway, NJ, v. 18, n. 4, p. 26–41, Aug. 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/37.710876>. Acesso em: 30 mar. 2021.

HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 33., 1994, Lake Buena Vista, FL. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ:

IEEE, 1994. v. 2, p. 1735–1740. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC.1994.411185>. Acesso em: 30 mar. 2021.

HOU, Z.-S.; GAO, H.; LEWIS, F. L. Data-driven control and learning systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Piscataway, NJ, v. 64, n. 5, p. 4070–4075, May 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TIE.2017.2653767>. Acesso em: 30 mar. 2021.

HOU, Z.-S.; WANG, Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective. *Information Sciences*, Amsterdam, v. 235, p. 3–35, June 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.07.014>. Acesso em: 30 mar. 2021.

HUFF, D. D. et al. Data-driven control design by prediction error identification for multivariable systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Berlim, v. 30, p. 465–478, Aug. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40313-019-00468-9>. Acesso em: 30 mar. 2021.

ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M. *Identification of Dynamic Systems: An introduction with applications*. Heidelberg: Springer, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78879-9>. Acesso em: 30 mar. 2021.

JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Piscataway, NJ, v. 8, n. 3, p. 456–465, May 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/87.845876>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KAMMER, L. C.; BITMEAD, R. R.; BARTLETT, P. L. Direct iterative tuning via spectral analysis. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 37., 1998, Tampa, FL. *Proceedings[...]*. Piscataway: IEEE, 1998. v. 3, p. 2874–2879. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC.1998.757912>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KAMMER, L. C.; BITMEAD, R. R.; BARTLETT, P. L. Direct iterative tuning via spectral analysis. *Automatica*, Amsterdam, v. 36, n. 9, p. 1301–1307, Sept. 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(00\)00040-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(00)00040-6). Acesso em: 30 mar. 2021.

KARIMI, A.; MIŠKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Correlation-based tuning of a restricted-complexity controller for an active suspension system. *European Journal of Control*, Amsterdam, v. 9, n. 1, p. 77–83, Jan. 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.3166/ejc.9.77-83>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KARIMI, A.; MIŠKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Convergence analysis of an iterative correlation-based controller tuning method. *IFAC Proceedings Volumes*, Amsterdam, v. 35, n. 1, p. 413–418, Apr. 2016. Trabalho apresentado no 15th IFAC World Congress, 2002, [Barcelona, Espanha]. Disponível em: <https://doi.org/10.3182/20020721-6-ES-1901.00150>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KARIMI, A.; VAN HEUSDEN, K.; BONVIN, D. Non-iterative data-driven controller tuning using the correlation approach. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (ECC), 2007., 2007, Kos, Grécia. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2007. p. 5189–5195. Disponível em: <https://doi.org/10.23919/ECC.2007.7068802>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KERGUS, P. et al. From reference model selection to controller validation: application to Loewner data-driven control. *IEEE Control Systems Letters*, Piscataway, NJ, v. 3, n. 4, p. 1008–1013, Oct. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2920208>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KINOSHITA, T. et al. Design of a data-oriented performance driven control system based on the generalized minimum variance control law. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Washinton, DC, v. 58, n. 26, p. 11440–11451, July 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.8b06119>. Acesso em: 30 mar. 2021.

KUMAR, A.; ZHANG, Y.; CHIU, M.-S. VRFT-base digital controller design using a generalized second-order refrence model. *Computers & Chemical Engineering*, Amsterdam, v. 142, p. 107049, Nov. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2020.107049>. Acesso em: 30 mar. 2021.

LAGARIAS, J. C. et al. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, Filadélfia, PA, v. 9, n. 1, p. 112–117, Oct./Dec. 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S1052623496303470>. Acesso em: 30 mar. 2021.

LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. Tradução de Gustavo Guimarães Palma. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

LECCHINI, A.; GEVERS, M. On iterative feedback tuning for non-minimum phase plants. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas, NV. *Proceedings[...]*. Piscataway: IEEE, 2002. v. 4, p. 4658–4663. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185113>. Acesso em: 30 mar. 2021.

LJUNG, L. *System identification: theory for the user*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.

MCKELVEY, T.; GUÉRIN, G. Non-parametric frequency response estimation using a local rational model. *IFAC Proceedings Volumes*, Amsterdam, v. 45, n. 16, p. 49–54, July 2012. Trabalho apresentado no 16th IFAC Symposium on System Identification (SYSID), 2012, [Bruxelas, Bélgica]. Disponível em: <https://doi.org/10.3182/20120711-3-BE-2027.00299>. Acesso em: 30 mar. 2021.

MIŠKOVIĆ, L. et al. Correlation-based tuning of decoupling multivariable controllers. *Automatica*, Amsterdam, v. 43, n. 9, p. 1481–1494, Sept. 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.02.006>. Acesso em: 30 mar. 2021.

NAKAMOTO, M. An application of the virtual reference feedback tuning for an MIMO process. In: SICE ANNUAL CONFERENCE, 2004., 2004, Saporó, Japão. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2004. v. 3, p. 2208–2213. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1491812>. Acesso em: 30 mar. 2021.

NGUYEN, H. T.; KANEKO, O.; YAMAMOTO, S. Fictitious reference iterative tuning of internal model controllers for non-minimum phase systems: A laguerre expansion approach. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Chiyoda-ku, v. 6, n. 1, p. 38–44, Jan. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.9746/jcmsi.6.38>. Acesso em: 30 mar. 2021.

NISE, N. S. *Control systems engineering*. 6. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011.

OPPENHEIM, A. V.; BUCK, J. R.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time signal processing*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.

PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. *System Identification: A Frequency Domain Approach*. 2. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.

PINTO DA SILVA, R. W.; ECKHARD, D. Extension of the correlation-based tuning method for load disturbance rejection. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC)*, 58., 2019, Nice, França. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2019. p. 8386–8391. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029360>. Acesso em: 30 mar. 2021.

PINTO DA SILVA, R. W.; ECKHARD, D. Data-driven controller certification through Vinnicombe test local rational models. *In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL TECHNOLOGY AND APPLICATIONS (CCTA)*, 2020., 2020, Montreal, Canadá. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2020. p. 231–236. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CCTA41146.2020.9206310>. Acesso em: 30 mar. 2021.

PINTO DA SILVA, R. W.; ECKHARD, D. Multivariable correlation-based tuning for load disturbance rejection. *In: IFAC WORLD CONGRESS*, 21., 2020, Berlim. *Proceedings[...]*. Laxemburgo, Áustria: IFAC, 2020. p. 4043–4048. Meio digital.

ROMAN, R.-C. et al. Data-driven active disturbance rejection control of pendulum cart systems. *In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL TECHNOLOGY AND APPLICATIONS (CCTA)*, 2018., 2018, Copenhagen. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2018. p. 933–938. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CCTA.2018.8511541>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SALA, A.; ESPARZA, A. Extensions to “virtual reference feedback tuning: A direct method for the design of feedback controllers”. *Automatica*, Amsterdam, v. 41, n. 8, p. 1473–1476, Aug. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.02.008>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SCHOUKENS, J. et al. Nonparametric preprocessing in system identification: a powerful tool. *European Journal of Control*, Amsterdam, v. 15, n. 3-4, p. 260–274, May 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.3166/ejc.15.260-274>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SILVA GARCIA, C.; BAZANELLA, A. S. Extraction of informative subsets from routine operating data for use in data-driven control. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC)*, 58., 2019, Nice, França. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2019. p. 8392–8397. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029265>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SILVA GARCIA, C.; BAZANELLA, A. S. Selection of informative intervals in routine operating data for use in data-driven control design. *In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL TECHNOLOGY AND APPLICATIONS (CCTA)*, 2020., 2020, Montreal, Canadá. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2020. p. 225–230. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CCTA41146.2020.9206266>. Acesso em: 30 mar. 2021.

SILVA GARCIA, C.; BAZANELLA, A. S. *VRFT with ARX controller model and constrained total least squares*. 2020. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2009.06787>. Acesso em: 30 mar. 2021.

STEELE, J.; VINNICOMBE, G. The ν -gap metric and the generalised stability margin. In: FIELDING, C. et al. (Ed.). *Advanced Techniques for Clearance of Flight Control Laws*. Berlin: Springer-Verlag, 2002, (Lecture notes in control and information sciences, 283). cap. 5, p. 57–75. Disponível em: https://doi.org/10.1007/3-540-45864-6_4. Acesso em: 30 mar. 2021.

TANGIRALA, A. K. *Principles of System Identification: Theory and practice*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015.

VAN HEUSDEN, K.; KARIMI, A.; BONVIN, D. Data-driven controller tuning with integrated stability constraint. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 47., 2008, Cancun. *Proceedings[...]*. Piscataway: IEEE, 2008. p. 2612–2617. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739326>. Acesso em: 30 mar. 2021.

VAN HEUSDEN, K.; KARIMI, A.; BONVIN, D. Data-driven model reference control with asymptotically guaranteed stability. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Hoboken, NJ, v. 25, n. 4, p. 331–351, Apr. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/acs.1212>. Acesso em: 30 mar. 2021.

VINNICOMBE, G. Frequency domain uncertainty and the graph topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, NJ, v. 38, n. 9, p. 1371–1383, Sept. 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/9.237648>. Acesso em: 30 mar. 2021.

VINNICOMBE, G. *Uncertainty and Feedback: \mathcal{H}_∞ loop-shaping and the ν -gap metric*. Londres: Imperial College Press, 2001.

YUBAI, K.; USAMI, H.; HIRAI, J. Correlation-based direct tuning of MIMO controllers by least-squares and its application to tension-and-speed control apparatus. In: ICCAS-SICE, 2009., 2009, Fukuoka. *Proceedings[...]*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009. p. 931–936. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5334546>. Acesso em: 30 mar. 2021.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. et al. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, Nova Iorque, NY, v. 64, n. 11, p. 759–768, Nov. 1942.

ANEXO A CÓDIGOS FONTE DOS MÉTODOS

Listagem A.1 — Método VRFT para seguimento de referência.

```

1 % vrft - ajusta o controlador usando o VRFT
2 %
3 % [C,RHO] = vrft(U,Y1,Y2,Td,BETA,W) U é o sinal de entrada, Y1 é a saída do
4 % primeiro experimento e Y2 (opcional), do segundo, Td é o modelo de
5 % referência, BETA é a estrutura do controlador, W é o filtro. Se Y2=[]
6 % usa mínimos quadrados, senão, usa variáveis instrumentais. Retorna o
7 % controlador C e o vetor de parâmetros RHO.
8 %
9 % See also: ncbt vdft
10 function [C,rho] = vrft(u,y1,y2,Td,beta,W)
11 % Ajuste de causalidade da inversa de Td
12 nk = degree(Td);
13 D = timeshift(nk,Td.Ts);
14
15 % Vetor com saída do controlador
16 u_W = lsim(minreal(D*W),u);
17 % Matriz com regressores
18 PHI_W = lsim(minreal(beta*D*(1/Td - 1)*W),y1);
19
20 if isempty(y2)
21 % Estimativa LS
22 rho = (PHI_W'*PHI_W)\PHI_W'*u_W;
23 else
24 % Matriz com VI
25 ZETA_W = lsim(minreal(beta*D*(1/Td - 1)*W),y2);
26 % Estimativa VI
27 rho = (ZETA_W'*PHI_W)\ZETA_W'*u_W;
28 end
29
30 % Controlador com parametrização linear
31 C = minreal(rho'*beta);
32 end

```

Listagem A.2 — Função do grau relativo usada pelos métodos VRFT e VDFT.

```

1 % degree - grau relativo de um sistema SISO
2 %
3 % NK = degree(SYS) retorna em D o grau relativo do sistema SYS.
4 %
5 % See also: timeshift
6 function nk = degree(sys)
7 [z,p,~] = zpndata(sys,'v');
8 nk = numel(p) - numel(z);
9 end

```

Listagem A.3 — Função de ajuste de grau relativo usada pelos métodos VRFT e VDFT.

```

1 % timeshift - deslocamento no tempo para frente ou para trás
2 %
3 %   D = timeshift(N,TS) se N>0 retorna um bloco D formado por N atrasos, já se
4 %       N<0 retorna um bloco formado por |N| avanços, o período de amostragem é
5 %       dado pelo parâmetro TS.
6 %
7 %   See also:   degree
8 function d = timeshift(n,Ts)
9     if n > 0
10        d = zpk([],zeros(1,n),1,Ts);
11    elseif n < 0
12        d = zpk(zeros(1,-n),[],1,Ts);
13    else
14        d = zpk(1);
15    end
16 end

```

Listagem A.4 — Método NCbT para seguimento de referência.

```

1 % ncbt - ajusta o controlador usando o NCbT
2 %
3 %   [C,RHO] = ncbt(X,U,Y,Td,BETA,W) X é o sinal de excitação do experimento, U é
4 %       a entrada do processo, Y é a saída do processo, Td é o modelo de
5 %       referência, BETA a estrutura do controlador, W o filtro. Retorna o
6 %       controlador C e o vetor de parâmetros RHO.
7 %
8 %   See also:   vrft  dcbt
9 function [C,rho] = ncbt(x,u,y,Td,beta,W,L)
10    % Vetor com sinal virtual
11    u_T = lsim(minreal(Td*W),u);
12    % Matriz com regressores
13    PHI_T = lsim(minreal(beta*(1-Td)*W),y);
14    % Matriz com VI
15    ZETA = zeta(x,L);
16    % Matriz auxiliar
17    CHI_T = ZETA*PHI_T;
18    % Vetor auxiliar
19    xi_T = ZETA*u_T;
20    % Estimativa
21    rho = (CHI_T'*CHI_T)\(CHI_T'*xi_T);
22    % Controlador com parametrização linear
23    C = minreal(rho'*beta);
24 end

```

Listagem A.5 — Variável instrumental usada pelos métodos NCbT e DCbT.

```

1 % zeta - constrói a matriz de instrumentos para a correlação
2 %
3 %   ZETA = zeta(X,L1,L2) X é o sinal a ser utilizado, L1 é o número de amostras
4 %       passadas e L2 futuras (opcional). Se omitido, o valor de L2 é o mesmo
5 %       valor de L1:
6 %       ZETA'(t) = [X(t+L2) ... X(t) ... X(t-L1)]
7 %
8 %   See also:   ncbt  dcbt
9 function ZETA = zeta(x,L1,L2)
10    if ~exist('L2','var')
11        L2 = L1;
12    end
13    col = [flipud(x(1:L2+1)); zeros(L1,1)];
14    row = [x(L2+1:end); zeros(L2,1)];
15    ZETA = toeplitz(col,row);
16 end

```

Listagem A.6 — Método VDFT para rejeição de perturbação.

```

1 % vdft - ajusta o controlador usando o VDFT
2 %
3 % [C,RHO] = vdft(U,Y1,Y2,Qd,BETA,W) U é o sinal de entrada, Y1 é a saída do
4 % primeiro experimento e Y2 (opcional), do segundo, Qd é o modelo de
5 % referência, BETA a estrutura do controlador, W o filtro. Se Y2=[] usa
6 % mínimos quadrados, senão, usa variáveis instrumentais. Retorna o
7 % controlador C e o vetor de parâmetros RHO.
8 %
9 % See also: dcbt vrft
10 function [C,rho] = vdft(u,y1,y2,Qd,beta,W)
11 % Ajuste de causalidade da Qd
12 nk = degree(Qd);
13 D = timeshift(nk,Qd.Ts);
14
15 % Vetor com saída virtual do controlador
16 u_W = lsim(minreal(D*W),u) - lsim(minreal(D*W/Qd),y1);
17 % Matriz com regressores
18 PHI_W = -lsim(minreal(beta*D*W),y1);
19
20 if isempty(y2)
21 % Estimativa LS
22 rho = (PHI_W'*PHI_W)\PHI_W'*u_W;
23 else
24 % Matriz com VI
25 ZETA_W = -lsim(minreal(beta*D*W),y2);
26 % Estimativa VI
27 rho = (ZETA_W'*PHI_W)\ZETA_W'*u_W;
28 end
29
30 % Controlador com parametrização linear
31 C = minreal(rho'*beta);
32 end

```

Listagem A.7 — Método VDFT flexível com otimização de Nelder-Mead.

```

1 % vdftflexnm - ajusta o controlador usando o VDFT+NM e modelo de ref. flexível
2 %
3 % [C,Qd,RHO,ETA] = vdftflexnm(U,Y,BETA,GAMMA) U é o sinal de entrada, Y é a
4 % saída do experimento, BETA a estrutura do controlador, e GAMMA a
5 % estrutura do modelo de referência. Retorna o controlador C, o modelo de
6 % referência Qd e os vetores de parâmetros RHO e ETA.
7 %
8 % See also: vdftflexvi dcbtflex vdft
9 function [C,Qd,rho,eta] = vdftflexnm(u,y,beta,gamma)
10 p = size(beta,1);
11 s = size(gamma,1);
12
13 V = @(x) cost(u,y,beta,gamma,x);
14 x = fminsearch(V,zeros(p+s,1));
15 rho = x(1:p);
16 eta = x(p+1:end);
17 C = minreal(rho'*beta);
18 Qd = minreal(eta'*gamma);
19 end
20
21 % O custo é a norma do erro de predição
22 function V = cost(u,y,beta,gamma,x)
23 p = size(beta,1);
24 C = minreal(x(1:p)'*beta);
25 Qd = minreal(x(p+1:end)'*gamma);
26 epred = lsim(Qd,u) + lsim(Qd*C,y) - y;
27 V = norm(epred);
28 end

```

Listagem A.8 — Método VDFT flexível com otimização ACS.

```

1 % vdftflexvi - ajusta o controlador usando o VDFT+VI e modelo de ref. flexível
2 %
3 % [C,Qd,RHO,ETA] = vdftflexvi(U,Y1,Y2,BETA,GAMMA,ETA0,Niter) U é o sinal de
4 % entrada, Y1 e Y2 são a saída de primeiro e segundo experimentos, BETA a
5 % estrutura do controlador, e GAMMA a estrutura do modelo de referência,
6 % ETA0 é o parâmetro inicial do modelo de referência e Niter é o número de
7 % iterações. Retorna o controlador C, o modelo de referência Qd e os
8 % vetores de parâmetros RHO e ETA.
9 function [C,Qd,rho,eta] = vdftflexvi(u,y1,y2,beta,gamma,eta0,Niter)
10     eta = eta0;
11     Qd = minreal(eta'*gamma);
12     for i=1:Niter
13         [C,rho] = searchRho(u,y1,y2,beta,Qd);
14         [Qd,eta] = searchEta(u,y1,y2,gamma,C);
15     end
16 end
17
18 % Resolve o primeiro problema convexo
19 function [C,rho] = searchRho(u,y1,y2,beta,Qd)
20     u_Q = lsim(Qd,u) - y1;
21     PHI_Q = -lsim(minreal(beta*Qd),y1);
22     ZETA_Q = -lsim(minreal(beta*Qd),y2);
23     rho = (ZETA_Q'*PHI_Q)\(ZETA_Q'*u_Q);
24     C = minreal(rho'*beta);
25 end
26
27 % Resolve o segundo problema convexo
28 function [Qd,eta] = searchEta(u,y1,y2,gamma,C)
29     PSI = lsim(gamma,u+lsim(C,y1));
30     ZETA = lsim(gamma,u+lsim(C,y2));
31     eta = (ZETA'*PSI)\(ZETA'*y1);
32     Qd = minreal(eta'*gamma);
33 end

```

Listagem A.9 — Método DCbT para rejeição de perturbação.

```

1 % dcbt - ajusta o controlador usando o DCbT
2 %
3 % [C,RHO] = dcbt(X,U,Y,Qd,BETA,W,L) X é o sinal de excitação do experimento, U
4 % é a entrada do processo, Y é a saída do processo, Qd é o modelo de
5 % referência, BETA a estrutura do controlador, W o filtro e L o número de
6 % deslocamentos para compor a variável instrumental. Retorna o controlador
7 % C e o vetor de parâmetros RHO.
8 %
9 % See also: dcbtflex dcbtmimoflex dcbtlin vdft
10 function [C,rho] = dcbt(x,u,y,Qd,beta,W,L)
11     % Vetor com sinal virtual
12     u_Q = lsim(minreal(Qd*W),u) - lsim(W,y);
13     % Matriz com regressores
14     PHI_Q = -lsim(minreal(beta*Qd*W),y);
15     % Matriz com VI
16     ZETA = zeta(x,L);
17     % Matriz auxiliar
18     CHI_Q = ZETA*PHI_Q;
19     % Vetor auxiliar
20     xi_Q = ZETA*u_Q;
21     % Estimativa
22     rho = (CHI_Q'*CHI_Q)\(CHI_Q'*xi_Q);
23     % Controlador com parametrização linear
24     C = minreal(rho'*beta);
25 end

```

Listagem A.10 — Método DCbT com modelo de referência flexível.

```

1 % dcbtflex - ajusta o controlador usando o DCbT e modelo de referência flexível
2 %
3 % [C,Q,RHO,ETA] = dcbtflex(X,U,Y,BETA,GAMMA,ETA0,W,L,Niter) X é o sinal de
4 % entrada do experimento, U é a entrada do processo, Y é a saída, BETA é a
5 % estrutura do controlador, GAMMA é a estrutura do modelo de referência,
6 % ETA0 é o parâmetro inicial do modelo de referência, W é o filtro, L é o
7 % número de deslocamentos para compor a variável instrumental empregada na
8 % correlação e Niter é o número de iterações. Retorna o controlador C, o
9 % modelo de referência Qd e os vetores de parâmetros RHO e ETA.
10 %
11 % See also: dcbtmimoflex dcbt vdftflexnm vdftflexvi
12 function [C,Qd,rho,eta] = dcbtflex(x,u,y,beta,gamma,etai,L,Niter)
13     eta = etai;
14     Qd = minreal(eta'*gamma);
15     ZETA = zeta(x,L);
16
17     [C,rho] = buscaRho(ZETA,u,y,beta,Qd);
18     for i=2:Niter
19         [C,rho] = buscaRho(ZETA,u,y,beta,Qd);
20         [Qd,eta] = buscaEta(ZETA,u,y,gamma,C);
21     end
22 end
23
24 % Resolve o primeiro problema convexo
25 function [C,rho] = buscaRho(ZETA,u,y,beta,Q)
26     u_Q = lsim(Q,u) - y;
27     PHI_Q = -lsim(minreal(beta*Q),y);
28     CHI_Q = ZETA*PHI_Q;
29     xi_Q = ZETA*u_Q;
30     rho = (CHI_Q'*CHI_Q)\(CHI_Q'*xi_Q);
31     C = minreal(rho'*beta);
32 end
33
34 % Resolve o segundo problema convexo
35 function [Qd,eta] = buscaEta(ZETA,u,y,gamma,C)
36     PSI = lsim(gamma,u) + lsim(minreal(gamma*C),y);
37     UPSILON = ZETA*PSI;
38     mu = ZETA*y;
39     eta = (UPSILON'*UPSILON)\(UPSILON'*mu);
40     Qd = minreal(eta'*gamma);
41 end

```

Listagem A.11 — Método DCbT MIMO e flexível (continua).

```

1 % dcbtmimoflex   DCbT multivariable with flexible reference model.
2 %
3 %   [C,Qd,RHO,ETA] = dcbtmimoflex(X,U,Y,BETA,GAMMA,ETA0,L,NIT,DISPLAY,P) X é o
4 %   sinal de excitação do experimento, U é a entrada do processo, Y é a
5 %   saída do processo, BETA é a estrutura do controlador, GAMMA a estrutura
6 %   do modelo de referência, ETA0 é o parâmetro inicial do modelo de
7 %   referência e Niter é o número de iterações. Retorna o controlador C, o
8 %   modelo de referência Qd e os vetores de parâmetros RHO e ETA.
9 %
10 %   See also: dcbt dcbtflex
11 function [C,Qd,RHO,ETA] = dcbtmimoflex(x,u,y,BETA,GAMMA,ETA0,L,Nit)
12     if ~iscell(BETA)
13         BETA = {BETA};
14     end
15     if ~iscell(ETA0)
16         ETA0 = {ETA0};
17     end
18     if ~iscell(GAMMA)
19         GAMMA = {GAMMA};
20     end
21
22     ETA = ETA0;
23     Qd = linparam(ETA,GAMMA);
24
25     ZETA = zetaMIMO(x,L);
26     [C,RHO] = searchRho(u,y,BETA,ZETA,Qd);
27     for i = 2:Nit
28         [Qd,ETA] = searchEta(u,y,GAMMA,ZETA,C);
29         [C,RHO] = searchRho(u,y,BETA,ZETA,Qd);
30     end
31 end
32
33 % Parametrização linear multivariável a partir dos parâmetros P e estrutura S
34 function SYS = linparam(P,S)
35     [n,m] = size(P);
36     SYS = zpk(zeros(n,m));
37     SYS.Ts = S{1}.Ts;
38     for i=1:n
39         for j=1:m
40             SYS(i,j) = minreal(P{i,j}'*S{i,j},1e-3);
41         end
42     end
43 end
44
45 % Constrói as matrizes de instrumentos para a correlação
46 function ZETA = zetaMIMO(x,L)
47     [N,n] = size(x);
48     ZETA = cell(n,1);
49     for j=1:n
50         col = [flipud(x(1:L+1,j)); zeros(L,1)];
51         row = [x(L+1:N,j); zeros(L,1)]';
52         ZETA{j} = toeplitz(col,row);
53     end
54 end
55
56 % Constrói as matrizes de regressores para o controlador
57 function PHI = phiMIMO(y,BETA,Qd)
58     [~,n] = size(y);
59     PHI = cell(n,1);
60     for i=1:n
61         PHI{i} = [];
62         for j=1:n
63             for k=1:n
64                 PHI{i} = [PHI{i} -lsim(minreal(BETA{j,k}*Qd(i,j),1e-3),y(:,k))];
65             end
66         end
67     end
68 end

```

Listagem A.11 — Método DCbT MIMO e flexível (continuação).

```

69
70 % Resolve o primeiro problema convexo
71 function [C,RHO] = searchRho(u,y,BETA,ZETA,Qd)
72     [~,n] = size(u);
73     CHI = cell(n);
74     XI = cell(n);
75     A = 0;
76     b = 0;
77     PHI = phiMIMO(y,BETA,Qd);
78     u_Q = lsim(Qd,u) - y;
79     for i=1:n
80         for j=1:n
81             CHI{i,j} = ZETA{j}*PHI{i};
82             XI{i,j} = ZETA{j}*u_Q(:,i);
83             A = CHI{i,j}'*CHI{i,j} + A;
84             b = CHI{i,j}'*XI{i,j} + b;
85         end
86     end
87     rho = A\b;
88     DIMS = cellfun(@el size(el,1),BETA);
89     RHO = unvec(rho,DIMS);
90     C = linparam(RHO,BETA);
91 end
92
93 % Inversa do operador de vetorização, transforma vetor de parâmetros em células
94 function P = unvec(p,DIMS)
95     [n,m] = size(DIMS);
96     P = cell(n,m);
97     acc = 0;
98     for i=1:n
99         for j=1:n
100             P{i,j} = p(acc+1:acc+DIMS(i,j));
101             acc = acc + DIMS(i,j);
102         end
103     end
104 end
105
106 % Resolve o segundo problema convexo
107 function [Qd,ETA] = searchEta(u,y,GAMMA,ZETA,C)
108     [~,n] = size(u);
109     UPSILON = cell(n);
110     MU = cell(n);
111     A = 0;
112     b = 0;
113     PSI = psiMIMO(u,y,GAMMA,C);
114     for i=1:n
115         for j=1:n
116             UPSILON{i,j} = ZETA{j}*PSI{i};
117             MU{i,j} = ZETA{j}*y(:,i);
118             A = UPSILON{i,j}'*UPSILON{i,j} + A;
119             b = UPSILON{i,j}'*MU{i,j} + b;
120         end
121     end
122     eta = A\b;
123     DIMS = cellfun(@el size(el,1),GAMMA);
124     ETA = unvec(eta,DIMS);
125     Qd = linparam(ETA,GAMMA);
126 end

```

Listagem A.11 — Método DCbT MIMO e flexível (conclusão).

```

127
128 % Constrói as matrizes regressoras para o modelo de referência
129 function PSI = psiMIMO(u,y,GAMMA,C)
130     [N,n] = size(u);
131     PSI = cell(n,1);
132     for i=1:n
133         PSI{i} = [];
134         for k=1:n
135             for j=1:n
136                 if k==i
137                     PSI{i} = [PSI{i} lsim(GAMMA{i,j}, u(:,j)) + ...
138                             lsim(minreal(GAMMA{i,j}*C(j,:), y))];
139                 else
140                     PSI{i} = [PSI{i} zeros(N,size(GAMMA{k,j},1))];
141                 end
142             end
143         end
144     end
145 end

```

Listagem A.12 — Método VDFT com preditor semelhante ao ARX.

```

1 % vdftlin - VDFT minimizando o erro de predição de um preditor linear (tipo ARX)
2 %
3 % [C,B,A] = vdftlin(U,Y,Qd,NA,NB,Cf,W) U é a entrada do processo, Y é a saída,
4 % Qd é o modelo de referência, NA e NB são os números de coeficientes a
5 % serem identificados, Cf é a parte fixa do controlador e W é o filtro
6 % para essa iteração. Retorna o controlador completo em C, os parâmetros
7 % que foram identificados do numerador em B e do denominador em A.
8 %
9 % See also: vdfnlin dcbtlin vdfn
10 function [C,b,a] = vdftlin(u,y,Qd,na,nb,Cf,W)
11     Ts = Qd.Ts;
12     % Ajustes de causalidade da inversa de Qd e dos fatores do controlador
13     D1 = timeshift(degree(Qd),Ts);
14     D2 = timeshift(-degree(Cf),Ts);
15     e_fW = lsim(minreal(W*D1*Cf*D2),-y);
16     u_W = lsim(minreal(W*D1),u) - lsim(minreal(W*D1/Qd), y);
17     PHI_W = phiarx(u_W,e_fW,nb,na);
18     % Parâmetros e controlador completo
19     rho = (PHI_W'*PHI_W)\(PHI_W'*u_W);
20     a = [1 rho(1:na)'];
21     b = rho(na+1:end)';
22     C = minreal(tf(b,a,Ts)*Cf);
23 end

```

Listagem A.13 — Matriz de regressores para preditores lineares.

```

1 % phiarx - Constrói a matriz de regressores de um modelo ARX
2 function PHI = phiarx(out,in,nb,na)
3     PhiA = [];
4     PhiB = [];
5     if na > 0
6         col = zeros(na,1);
7         row = [0; -out(1:end-1)];
8         PhiA = toeplitz(col,row);
9     end
10    if nb > 0
11        col = [in(1); zeros(nb-1,1)];
12        row = in;
13        PhiB = toeplitz(col,row);
14    end
15    PHI = [PhiA; PhiB]';
16 end

```

Listagem A.14 — Método VDFT com preditor semelhante ao OE.

```

1 % vdfnlin - VDFT minimizando o erro de predição de um preditor não linear (OE)
2 %
3 % [C,B,A] = vdfnlin(U,Y,Qd,NA,RHO0,Cf,Nit,W) U é a entrada do processo, Y é a
4 % saída, Qd é o modelo de referência, NA é o número de coeficientes do
5 % denominador, RHO0 é o valor inicial dos parâmetros, Cf é a parte fixa do
6 % controlador, Nit é o número de iterações e W é o filtro para essa
7 % iteração. Retorna o controlador completo em C, os parâmetros que foram
8 % identificados do numerador em B e do denominador em A.
9 %
10 % See also: vdfnlin dcbntlin vdfn
11 function [C,b,a] = vdfnlin(u,y,Qd,na,rho0,Cf,Nit,W)
12 Ts = Qd.Ts;
13 % Ajustes de causalidade da inversa de Qd e dos fatores do controlador
14 D1 = timeshift(degree(Qd),Ts);
15 D2 = timeshift(-degree(Cf),Ts);
16 e_fW = lsim(minreal(W*D1*Cf*D2),-y);
17 u_W = lsim(minreal(W*D1),u) - lsim(minreal(W*D1/Qd), y);
18 % Minimização do custo
19 V = @(rho) norm(u_W - filter(rho(na+1:end)',[1 rho(1:na)'],e_fW));
20 opt = optimset('Display','off','FunValCheck','on','MaxFunEvals',Inf,...
21 'MaxIter',Nit,'TolFun',0,'TolX',0);
22 rho = fminsearch(V,rho0,opt);
23 % Parâmetros e controlador completo
24 a = [1 rho(1:na)'];
25 b = rho(na+1:end)';
26 C = minreal(tf(b,a,Ts)*Cf);
27 end

```

Listagem A.15 — Método DCbT com preditor semelhante ao ARX.

```

1 % dcbtlin - DCbT com um erro de predição de um preditor linear (tipo ARX)
2 %
3 % [C,B,A] = dcbtlin(X,U,Y,Qd,NA,NB,Cf,L,W) X é o sinal de excitação do
4 % experimento, U é a entrada do processo, Y é a saída, Qd é o modelo de
5 % referência, NA e NB são os números dos parâmetros a serem identificados,
6 % Cf é a parte fixa, L é o número de deslocamentos para compor a variável
7 % instrumental e W é o filtro. Retorna o controlador completo em C, os
8 % parâmetros que foram identificados do numerador em B e os do denominador
9 % em A.
10 %
11 % See also: dcbtlin vdfnlin dcbt
12 function [C,b,a] = dcbtlin(x,u,y,Qd,na,nb,Cf,L,W)
13 Ts = Qd.Ts;
14 % Ajustes de causalidade da inversa de Qd e dos fatores do controlador
15 D1 = timeshift(degree(Qd),Ts);
16 D2 = timeshift(-degree(Cf),Ts);
17 e_fW = lsim(minreal(W*D1*Cf*D2),-y);
18 u_W = lsim(minreal(W*D1),u) - lsim(minreal(W*D1/Qd), y);
19 PHI_W = phiarx(u_W,e_fW,nb,na);
20 ZETA = zeta(x,L);
21 CHI_W = ZETA*PHI_W;
22 xi_W = ZETA*u_W;
23 % Parâmetros e controlador completo
24 rho = (CHI_W'*CHI_W)\(CHI_W'*xi_W);
25 a = [1 rho(1:na)'];
26 b = rho(na+1:end)';
27 C = minreal(tf(b,a,Ts)*Cf);
28 end

```

Listagem A.16 — Método DCbT com preditor semelhante ao OE.

```

1 % dcbtlin - DCbT com erro de predição de um preditor não linear (tipo OE)
2 %
3 % [C,B,A] = dcbtlin(X,U,Y,Qd,NA,RHO0,Cf,Nit,L,W) X é o sinal de excitação do
4 % experimento, U é a entrada do processo, Y é a saída, Qd é o modelo de
5 % referência, NA é o número de coeficientes do denominador, RHO0 é o valor
6 % inicial dos parâmetros, Cf é a parte fixa do controlador, Nit é o número
7 % de iterações, L é o número de deslocamentos para compor a variável
8 % instrumental e W é o filtro para essa iteração. Retorna o controlador
9 % completo em C, os parâmetros que foram identificados do numerador em B e
10 % do denominador em A.
11 %
12 % See also: vdftnlin dcbtlin dcbt
13 function [C,b,a] = dcbtlin(x,u,y,Qd,na,rho0,Cf,Nit,L,W)
14     Ts = Qd.Ts;
15     % Ajustes de causalidade da inversa de Qd e dos fatores do controlador
16     D1 = timeshift(degree(Qd),Ts);
17     D2 = timeshift(-degree(Cf),Ts);
18     e_fW = lsim(minreal(W*D1*Cf*D2),-y);
19     u_W = lsim(minreal(W*D1),u) - lsim(minreal(W*D1/Qd), y);
20     ZETA = zeta(x,L);
21     % Minimização do custo
22     V = @(rho) norm(ZETA*(u_W - filter(rho(na+1:end)',[1 rho(1:na)]),e_fW));
23     opt = optimset('Display','off','FunValCheck','on','MaxFunEvals',Inf,...
24                 'MaxIter',Nit,'TolFun',0,'TolX',0);
25     rho = fminsearch(V,rho0,opt);
26     % Parâmetros e controlador completo
27     a = [1 rho(1:na)'];
28     b = rho(na+1:end)';
29     C = minreal(tf(b,a,Ts)*Cf);
30 end

```

Listagem A.17 — Busca do intervalo de redimensionamento para certificação.

```

1 % deltasearch - algoritmo para busca de intervalo de certificação
2 %
3 % DELTA = deltasearch(S,Q,CA,CB,MU) S é a resposta em frequência da função
4 % de sensibilidade original, Q é a resposta em frequência da função de
5 % sensibilidade de carga original, Ca é a resposta em frequência do
6 % controlador original, Cb é a resposta em frequência do controlador
7 % candidato e MU é a margem de segurança para evitar falsos positivos.
8 % Retorna o intervalo aberto de fatores de redimensionamento que
9 % certificam o controlador candidato em todas as frequências.
10 %
11 function DELTA = deltasearch(S,Q,Ca,Cb,mu)
12     Nw = numel(S);
13     DELTA = [0 Inf];
14     m = (1-mu)^2;
15     for k=1:Nw
16         a = m*(Cb(k)'*Cb(k)) - ((Cb(k) - Ca(k))'*(Cb(k) - Ca(k)))*(S(k)'*S(k));
17         b = m - ((Cb(k) - Ca(k))'*(Cb(k) - Ca(k)))*(Q(k)'*Q(k));
18         if a >= 0 && b > 0
19             continue;
20         else
21             d0 = sqrt(-b/a);
22             if a < 0 && b > 0 && d0 > DELTA(1)
23                 DELTA(2) = min(DELTA(2),d0);
24             elseif a > 0 && b <= 0 && DELTA(2) > d0
25                 DELTA(1) = max(DELTA(1),d0);
26             else
27                 DELTA = [0 0];
28                 return;
29             end
30         end
31     end
32 end

```