

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise Numérica de Vigas em Concreto Reforçado
com Fibras de Aço Via Método dos Elementos
Finitos**

Caio César Dias Matos

Porto Alegre
2021

CAIO CÉSAR DIAS MATOS

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS EM CONCRETO
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO VIA MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre

2021

CIP - Catalogação na Publicação

Dias Matos, Caio César

Análise Numérica de Vigas em Concreto Reforçado com
Fibras de Aço via Método dos Elementos Finitos / Caio
César Dias Matos. -- 2021.

181 f.

Orientadores: Américo Campos Filho, Paula Manica
Lazzari.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,
BR-RS, 2021.

1. Concreto reforçado com fibras de aço. 2. Vigas
de Concreto Armado. 3. Modelo de Dano Plástico. 4.
Método dos Elementos Finitos. I. Campos Filho,
Américo, orient. II. Manica Lazzari, Paula, orient.
III. Título.

CAIO CÉSAR DIAS MATOS

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS EM CONCRETO
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO VIA MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, Junho de 2021

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela Universidade de São Paulo
Orientador

Profa. Paula Manica Lazzari
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientadora

Prof. Nilo Cesar Consoli
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Samir Maghous (UFRGS)
Ph.D. pela Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussees, França

Profa. Aline da Silva Ramos Barboza (UFAL)
Dra. pela Universidade de São Paulo

Profa. Vanessa Fátima Pasa Dutra (UFRGS)
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Este trabalho é dedicado à todos que acreditam
no meu potencial e apostam nos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Matos e Lucymar, por me apoiarem incondicionalmente em todas as decisões tomadas, me aconselharem e me guiarem todo esse tempo, me ajudando a construir um futuro melhor. E aos meus irmãos, Marcus e Arthur, pelo apoio e companheirismo de sempre.

Aos meus amigos de Maceió, que mesmo distantes em diversos momentos se fizeram presentes me dando toda força e amor que precisei nos meus primeiros meses longe de casa.

Ao meu parceiro Francis, pela paciência, pelo carinho, pela troca, pela compreensão e pelo amor.

Aos amigos de Porto Alegre, que me proporcionaram momentos incríveis e que me ajudaram muito neste período longe de casa. Amizades que levarei para vida.

Aos professores Américo Campos Filho e Paula Manica Lazzari pela orientação, ensinamentos e tempo que desprenderam para a finalização deste trabalho. Agradeço a confiança e paciência.

Aos colegas do PPGEC (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) pelo auxílio e trocas de experiências e conhecimento.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Com a finalização de mais uma etapa, não posso deixar de demonstrar a minha gratidão à todos que estiveram presente me apoiando e me estimulando a continuar neste árduo caminho que é a ciência no Brasil. Agradeço imensamente a todos pelo carinho, apoio e companhia nesta jornada.

A gente quer passar um rio a nado, e passa; mas vai dar na outra banda é num ponto muito mais abaixo, bem diverso do em que primeiro se pensou. Viver nem não é muito perigoso?

Grande Sertão: Veredas – Guimarães Rosa

RESUMO

MATOS, C. C. D. **Análise Numérica de Vigas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço Via Método dos Elementos Finitos**. 2021. 181p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

O concreto se caracteriza como material de maior aplicabilidade na construção civil devido a sua versatilidade e facilidade de manuseio. Com isso, a constante busca do aperfeiçoamento das propriedades deste material tem sido o foco de diversos estudos e motivação para desenvolvimento de novas tecnologias. Neste contexto, surge o concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) que comprovadamente aumenta a resistência à tração e a compressão biaxial do compósito, além de contribuir para redistribuição de esforços, diminuição da retração e controle da fissuração no concreto. Visando uma análise mais aprofundada deste material, este trabalho tem como finalidade a reprodução numérica do comportamento de vigas em CRFA, por meio do Método dos Elementos Finitos, em combinação com as previsões de resistência de Dutra (2012) e o modelo de dano plástico *Concrete Damaged Plasticity* (CDP). Utiliza-se o estudo apresentado por Dutra (2012) para previsão de resistências do CRFA com base nas características da matriz cimentícia e o no tipo de fibra adotada para a mistura. O modelo da autora toma como base uma abordagem micromecânica do CRFA, empregando-se técnicas de homogeneização e tendo como resultado a formulação para o comportamento constitutivo do material. As previsões são calculadas através de uma rotina em MATLAB e aplicadas à análise numérica de elementos estruturais como forma de verificar a aplicabilidade destes resultados na análise numérica em um estado multiaxial de tensões. A representação do CRFA é feita através do modelo CDP, um modelo que é capaz de reproduzir o comportamento não-linear do compósito através de parâmetros de controle relacionados ao estado de tensões biaxiais e triaxiais de tensão. Esses parâmetros são calculados para melhor aproximação com a superfície proposta por Dutra (2012) e com a aplicação de modelos constitutivos para uma caracterização mais adequada do comportamento do CRFA. Toda análise é desenvolvida através do Método dos Elementos Finitos, no Abaqus SE. Faz-se então uma investigação das respostas mecânicas do CRFA em seus estados uniaxial, biaxial e multiaxial de tensões com variações de parâmetros. Resultados experimentais encontrados na literatura são utilizados para fins de comparação com as respostas analíticas e numéricas. Observou-se que o conjunto composto pelo modelo CDP, com suas devidas modificações, e as previsões de resistência e superfície de ruptura biaxial de acordo com Dutra (2012) forneceram resultados bem próximos aos experimentais, validando então a modelagem do CRFA através de entradas totalmente analíticas por meio de alterações nas propriedades do concreto devido a presença das fibras de aço.

Palavras-chave: Concreto Reforçado com Fibras de Aço, Método dos Elementos Finitos, Vigas de Concreto Armado, Modelo de Dano Plástico.

ABSTRACT

MATOS, C. C. D. **NUMERICAL ANALYSIS OF STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE BEAMS VIA FINITE ELEMENT METHOD**. 2021. 181p. Master Thesis (Masters in Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Concrete is characterized as the material with the most applicability in civil construction due to its versatility and ease of manipulation. The constant search for the improvement of the properties of this material has been the focus of several studies and motivation for the development of new technologies. In this context, steel fiber reinforced concrete (SFRC) appears, which has been proven to increase the tensile strength and biaxial compression of the composite, in addition to contributing to the redistribution of forces, reduction of shrinkage, and crack control in the concrete. Aiming at a more in-depth analysis of this material, this work aims at the numerical reproduction of the behavior of beams of SFRC, through the Finite Element Method, in combination with the resistance predictions of Dutra (2012) and the Concrete Damaged Plasticity (CDP). The study presented by Dutra (2012) is used to predict the resistance of the SFRC based on the characteristics of the cement matrix and the type of fiber adopted for the mixture. The author's model is based on a micromechanical approach to the SFRC, using homogenization techniques, resulting in a formulation for the constitutive behavior of the material. The predictions are calculated through a routine in MATLAB and applied to the numerical analysis of structural elements as a way of verifying the applicability of these results in the numerical analysis in a multiaxial state of stresses. The SFRC is represented through the CDP model, a model that is capable of reproducing the nonlinear behavior of the composite through control parameters related to the state of biaxial and triaxial stress. These parameters are calculated for a better approximation with the surface proposed by Dutra (2012) and with the application of constitutive models for a more adequate characterization of the behavior of the CRFA. All analysis is performed using the Finite Element Method, in Abaqus SE. An investigation then is proceeded of the mechanical responses of the CRFA in its uniaxial, biaxial, and multiaxial states of stresses with variations in parameters. Experimental results found in the literature are used for a comparative study along with analytical responses. It was observed that the set composed by the CDP model, with its due modifications, and the predictions of resistance and biaxial rupture surface according to Dutra (2012) provided results very close to the experimental ones, then validating the SFRC modeling through analytical input and modifying the concrete properties due to the presence of steel fibers.

Keywords: Steel Fibers Reinforced Concrete, Finite Element Method, Concrete Structures, Plastic Damage Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição do mercado brasileiro de fibras de aço por tipo de aplicação no ano de 2009 e primeiro semestre de 2010.	22
Figura 2 – Fluxograma organizacional deste trabalho.	25
Figura 3 – Comparação do esquema de distribuição de tensões entre o concreto comum e o CRFA.	27
Figura 4 – Distribuições possíveis de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico.	28
Figura 5 – Compósitos reforçados com volumes de fibras (VF) abaixo (A), acima (B) e igual (C) ao volume crítico de fibras durante um ensaio de tração na flexão.	29
Figura 6 – Relação pré-fissura e pós-fissura.	30
Figura 7 – Distribuição de tensões pré (a) e pós solitação (b).	30
Figura 8 – Distribuição de tensões na fibra.	31
Figura 9 – Relações entre tensão de cisalhamento e o ensaio de arrancamento.	31
Figura 10 – Distribuições de tensões de cisalhamento com descolamento da fibra antes de fissura.	32
Figura 11 – Distribuições de tensões de cisalhamento sem descolamento da fibra antes de fissura.	32
Figura 12 – Influência do volume de fibras na resistência à compressão, curva tensão-deformação.	33
Figura 13 – Comportamento do CRFA à tração.	35
Figura 14 – Ensaio de flexão de três pontos normatizado.	35
Figura 15 – Escalas macroscópica e microscópica.	39
Figura 16 – Processo de homogeneização.	40
Figura 17 – Etapas do processo de homogeneização.	43
Figura 18 – Meio composto por fibras curtas aleatoriamente distribuídas e meio fictício associado.	45
Figura 19 – Superfície de Drucker-Prager no plano espacial e biaxial de tensões.	47
Figura 20 – Ângulos de Euler e tensões principais, com direções das fibras representadas pelo sistema fixo $Oxyz$	49
Figura 21 – Orientação da tensão Σ uniaxial.	50
Figura 22 – Orientação da tensão Σ biaxial.	51
Figura 23 – Representação da superfície de plastificação de Drucker-Prager com <i>cut-off</i> em tração do tipo Rankine.	54
Figura 24 – Interface matriz/fibra e sua capacidade de resistência.	54
Figura 25 – Vetor normal à interface para fibra disposta segundo e_z	55

Figura 26 – Domínio de resistência da interface matriz/fibra no plano biaxial de tensões (a) e superfície final (intersecção entre os domínios (b)).	56
Figura 27 – Resposta do concreto para tensões uniaxiais de tração (a) e de compressão (b) no CDP.	59
Figura 28 – Superfície de plastificação hipotética e seus detalhes.	61
Figura 29 – Representação bidimensional de diferentes leis de escoamento.	62
Figura 30 – Plano desviador da superfície de falha para o modelo CDP.	64
Figura 31 – Superfície de falha para o modelo CDP no estado plano de tensões apresentada por Lee e Fenves (1998).	65
Figura 32 – Função linear e hiperbólica de Drucker-Prager.	66
Figura 33 – Seção dos cones de Mohr-Coulomb com aproximações de Drucker-Prager (a) e aproximações da superfície de plastificação entre os modelos (b).	70
Figura 34 – Superfície de carregamento e ruptura.	73
Figura 35 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido.	75
Figura 36 – Curva típica de carga-abertura de entalhe para o concreto reforçado com fibras.	78
Figura 37 – Lei constitutiva pós-fissuração simplificada: tensão-abertura de fissura.	79
Figura 38 – Lei constitutiva para o concreto sem reforço de fibras tracionado até seu limite plástico.	80
Figura 39 – Diagrama tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras tracionado para o Caso I, de acordo com a norma.	81
Figura 40 – Diagrama tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras tracionado para o Caso II, de acordo com a norma.	82
Figura 41 – Diagrama tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras tracionado para o Caso III, de acordo com a norma.	83
Figura 42 – Fibras de aço com diferentes tipos de ancoragem.	84
Figura 43 – Modelo elastoplástico perfeito (a) e com endurecimento linear (b) para armaduras de aço.	85
Figura 44 – Processo de análise em elementos finitos.	86
Figura 45 – Elemento tipo C3D20.	89
Figura 46 – Elemento de treliça (AB) e de membrana (CDEF) embutidos em elementos hexaédricos.	90
Figura 47 – Elemento de treliça tridimensional.	91
Figura 48 – Esquema de malha e elementos finitos para as vigas modeladas.	91
Figura 49 – Padrões de malhas estruturadas em duas dimensões.	92
Figura 50 – Superfícies de ruptura biaxial.	95
Figura 51 – Curvas de ruptura biaxial.	97
Figura 52 – Superfícies de ruptura biaxial.	99
Figura 53 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.	101
Figura 54 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.	104

Figura 55 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.	106
Figura 56 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-5}s^{-1}$	109
Figura 57 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-4}s^{-1}$	110
Figura 58 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-3}s^{-1}$	111
Figura 59 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-2}s^{-1}$	112
Figura 60 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.	114
Figura 61 – Configuração de armadura, carregamento e apoio. Dimensões em mm.	116
Figura 62 – Resultados de ensaios de flexão de quatro pontos apresentados pelos autores.	116
Figura 63 – (a) Corpo de prova modelado, (b) malha aplicada e (c) condições de contorno e carregamento.	118
Figura 64 – Compressão e tração uniaxiais para $f= 0\%$	119
Figura 65 – Compressão e tração uniaxiais para $f= 1\%$	119
Figura 66 – Compressão e tração uniaxiais para $f= 2\%$	119
Figura 67 – Condições de contorno para teste de tensão biaxial.	120
Figura 68 – Curva de ruptura biaxial para $f=0\%$	122
Figura 69 – Curva de ruptura biaxial para $f=1\%$	122
Figura 70 – Curva de ruptura biaxial para $f=2\%$	123
Figura 71 – Condições de contorno para a viga modelada.	124
Figura 72 – Malha da viga e armadura.	124
Figura 73 – Aplicação da técnica de incorporação de elementos.	125
Figura 74 – Resultado dos testes para $f=0\%$	126
Figura 75 – Resultado dos testes para $f=1\%$	126
Figura 76 – Resultado dos testes para $f=2\%$	127
Figura 77 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=0\%$, em MPa.	129
Figura 78 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=0\%$, em MPa.	130
Figura 79 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=0\%$	131
Figura 80 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=1\%$, em MPa.	132
Figura 81 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=1\%$, em MPa.	133
Figura 82 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=1\%$	134
Figura 83 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f= 2\%$, em MPa.	135
Figura 84 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f= 2\%$, em MPa.	136
Figura 85 – Desenvolvimento do dano à tração para $f= 2\%$	137
Figura 86 – Comparação entre fissuras para $f = 0\%$	139
Figura 87 – Comparação entre fissuras para $f = 1\%$	139
Figura 88 – Comparação entre fissuras para $f = 2\%$	140
Figura 89 – Configuração de armadura, em mm.	141
Figura 90 – Resultados ensaios de flexão de quatro pontos.	141
Figura 91 – Compressão e tração uniaxiais para $f=0\%$	142
Figura 92 – Compressão e tração uniaxiais para $f=0,5\%$	143

Figura 93 – Compressão e tração uniaxiais para $f=1,0\%$	143
Figura 94 – Curva de ruptura biaxial para $f= 0\%$	144
Figura 95 – Curva de ruptura biaxial para $f= 0,5\%$	144
Figura 96 – Curva de ruptura biaxial para $f= 1,0\%$	145
Figura 97 – Condições de contorno para a viga modelada.	146
Figura 98 – Malha da viga e armadura.	146
Figura 99 – Aplicação da técnica de incorporação de elementos.	147
Figura 100–Resultado dos testes para $f=0\%$	148
Figura 101–Resultado dos testes para $f=0,5\%$	148
Figura 102–Resultado dos testes para $f=1,0\%$	149
Figura 103–Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=0\%$, em MPa.	151
Figura 104–Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=0\%$, em MPa.	152
Figura 105–Desenvolvimento do dano à tração para $f=0\%$	153
Figura 106–Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=0,5\%$, em MPa.	154
Figura 107–Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=0,5\%$, em MPa.	155
Figura 108–Desenvolvimento do dano à tração para $f=0,5\%$	156
Figura 109–Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=1,0\%$, em MPa.	157
Figura 110–Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=1,0\%$, em MPa.	158
Figura 111–Desenvolvimento do dano à tração para $f=1,0\%$	159
Figura 112–Modo de ruína para $f= 0\%$	161
Figura 113–Modo de ruína para $f= 0,5\%$	161
Figura 114–Modo de ruína para $f= 1,0\%$	161

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo dos parâmetros CDP.	71
Tabela 2 – Valores de ângulo de dilatância apresentados na literatura.	72
Tabela 3 – Propriedades para concretos C12 a C50.	75
Tabela 4 – Propriedades para concretos C55 a C120.	75
Tabela 5 – Resultados experimentais de Yin et al. (1990).	94
Tabela 6 – Resultados de resistências analíticas.	95
Tabela 7 – Resultados experimentais de Traina e Mansour (1991).	96
Tabela 8 – Resultados analíticos para resistências.	96
Tabela 9 – Resultados experimentais de Lim e Nawy (2005).	98
Tabela 10 – Resultados analíticos para resistências.	98
Tabela 11 – Resultados experimentais de Swaddiwudhipong e Seow (2006).	100
Tabela 12 – Resultados analíticos para resistências.	100
Tabela 13 – Resultados experimentais de Kolle (2006).	102
Tabela 14 – Resistências analíticas.	103
Tabela 15 – Resultados experimentais de Peres (2008).	105
Tabela 16 – Resistências analíticas.	105
Tabela 17 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 0\%$	107
Tabela 18 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 1,0\%$	107
Tabela 19 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 2,0\%$	107
Tabela 20 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 3,0\%$	108
Tabela 21 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-5}s^{-1}$	108
Tabela 22 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-4}s^{-1}$	108
Tabela 23 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-3}s^{-1}$	108
Tabela 24 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-2}s^{-1}$	109
Tabela 25 – Resultados experimentais de Mohamed et al. (2019).	113
Tabela 26 – Resultados experimentais de Mohamed et al. (2019).	113
Tabela 27 – Resistências das dosagens empregadas.	116
Tabela 28 – Resistências analíticas.	117
Tabela 29 – Resumo dos parâmetros CDP para o CRFA.	117
Tabela 30 – Resistências residuais, de serviço e última.	118
Tabela 31 – Configurações de carregamento para tensões biaxiais, (+) para tração e (-) para compressão.	121
Tabela 32 – Resistências das dosagens empregadas.	140
Tabela 33 – Resistências analíticas.	141
Tabela 34 – Resumo dos parâmetros CDP para o CRFA.	142
Tabela 35 – Resistências residuais, de serviço e última.	142

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BC	<i>Brittle Cracking</i>
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>
CDP	<i>Concrete Damaged Plasticity</i>
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
CRF	Concreto Reforçado com Fibras
CRFA	Concreto Reforçado com Fibras de Aço
CSC	<i>Concrete Smeared Cracking</i>
EN	<i>European Standard</i>
<i>fib</i>	<i>Fédération Internationale du Béton</i>
MC	Meridiano de Compressão
MEF	Método dos Elementos Finitos
MT	Meridiano de Tração
VER	Volume Elementar Representativo

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\underline{\underline{\Sigma}}$ Campo de tensão macroscópica

Ω Estrutura heterogênea

Ω^{hom} Estrutura homogeneizada

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α_m Parâmetro de forma da superfície de ruptura

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ Campo de deformação local

ε Deformação total

ε_e Deformação elástica

ε_{pl} Deformação plástica

θ Orientação do vetor normal ao plano que no qual as tensões agem

μ Viscosidade

ν Coeficiente de Poisson

$\underline{\underline{\sigma}}$ Campo de tensão local

σ_f Tensão na fibra de aço

σ_m Limite elástico do material sob tensão uniaxial

$\underline{\underline{\sigma}}^m$ Campo de tensão macroscópica para a matriz

τ Resistência de aderência na interface fibra-matriz

ϕ Orientação da tensão principal no plano no qual as tensões agem

ϕ_{int} Ângulo de atrito interno

ψ Orientação do vetor normal ao plano que no qual as tensões agem

ψ_m Ângulo de dilatância do material

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

\underline{E}	Campo de deformação macroscópica
E	Módulo de elasticidade
E_0	Módulo de elasticidade integral
F^{hom}	Função critério de resistência para o meio homogêneo
F^m	Função critério de resistência para a matriz cimentícia
G	Módulo de cisalhamento
G^f	Domínio convexo que define o critério de resistência para a fibra de aço
G^{hom}	Domínio convexo que define o critério de resistência para o meio homogêneo
G_s^{hom}	Domínio convexo que define o critério de resistência para um meio reforçado com fibras em três direções perpendiculares
G_s^{hom}	Domínio convexo que define o critério de resistência para o meio homogêneo estático
G^m	Domínio convexo que define o critério de resistência para a matriz cimentícia
\tilde{I}	Tensor identidade
K	Módulo de compressão
K_c	Razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiado de tração e de compressão no plano desviador
K^{hom}	Conjunto de carregamentos suportados pela estrutura para o meio homogêneo
$\tilde{p}^{m,i}$	Tensor de Hill
\underline{Q}	Carregamento
\underline{T}	Tensão prescrita no contorno do VER
\underline{X}	Vetor posição na escala macroscópica

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

ζ^i	Tensor de elasticidade da inclusão
c_{int}	Coesão na região da interface

ζ^m	Tensor de elasticidade da matriz
d_f	Diâmetro das fibras de aço
div	Divergência
e	Excentricidade
e_f	Vetor orientação das fibras
f	Fração volumétrica de fibras
f_f	Fração volumétrica de fibras na direção $f = x, y, z$
f^i	Fração volumétrica das inclusões
\underline{g}	Vetor unitário de orientação das tensões sobre o meio homogeneizado
g_f	Módulo de cisalhamento da fibra
g_{int}	Domínio de resistência da região da interface entre fibra e matriz
g_m	Módulo de cisalhamento da matriz
k_f	Módulo de compressão da fibra
k_m	Módulo de compressão da matriz
l_f	Comprimento da fibra de aço
\underline{s}	Desviador de tensão σ
\underline{x}	Vetor posição na escala microscópica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Motivações	23
1.2	Objetivos	23
1.2.1	Delineamento do Trabalho	24
2	CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO	26
2.1	Características Gerais do Concreto Reforçado com Fibras de Aço	26
2.2	Fibras de Aço	27
2.3	Interação Fibra-Matriz	29
2.4	Comportamento Mecânico à Compressão	32
2.5	Comportamento Mecânico à Tração	33
2.6	Comportamento Mecânico Sob Solicitações Biaxiais	35
2.7	Módulo de Elasticidade	36
2.8	Coefficiente de Poisson	37
3	TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO PARA O CRFA: CARACTERÍSTICAS GERAIS DO MÉTODO	39
3.1	Volume Elementar Representativo	40
3.2	Propriedades Elásticas Efetivas para o CRFA	41
3.3	Crítério de Resistência Macroscópico e Homogeneização em Análise Limite	43
3.4	Princípio Geral do Método	43
3.4.1	Domínio de Resistência para o CRFA	44
3.4.1.1	Modelo Aproximado para o CRFA	44
3.4.1.2	Determinação do Crítério de Resistência Macroscópico para o CRFA	45
3.4.1.3	Matriz Caracterizada pelo Crítério de Drucker-Prager	47
3.4.1.4	Direções das Tensões Principais e das Fibras não colineares	48
3.4.1.4.1	Resistência à Compressão Uniaxial	49
3.4.1.4.2	Resistência à Compressão Biaxial	51
3.4.2	Condição de <i>Cut-off</i> em Tração na Interface Fibra-Matriz	52
3.4.2.1	<i>Cut-off</i> em Tração	52
3.4.2.2	Interface Fibra-Matriz	53
4	REPRESENTAÇÃO MECÂNICA E TÉCNICA DE SIMULAÇÃO	57
4.1	<i>Concrete Damaged Plasticity</i> - Modelo de Dano Plástico	58
4.1.1	Crítério de Plastificação	63

4.1.2	Regra de Fluxo Plástico	65
4.1.3	Variável de Dano Plástico	67
4.1.4	Abordagens para determinação do ângulo de dilatância	69
4.1.5	Concreto Comprimido	72
4.1.5.1	Crítério de Plastificação do Concreto	73
4.1.5.2	Regra de Endurecimento	74
4.1.6	Concreto Tracionado	76
4.1.6.1	Crítério de Fissuração	76
4.1.6.2	Colaboração do concreto entre fissuras	77
4.1.7	Modelos Constitutivos Elastoplásticos para o Aço	85
4.2	Método dos Elementos Finitos	86
4.2.1	Formulação Básica	87
4.2.2	Elementos Finitos Aplicados à Análise	89
4.2.2.1	Elementos Finitos Utilizados para o Concreto	89
4.2.2.2	Elementos Finitos Utilizados para a Armadura	90
5	ANÁLISES NUMÉRICAS E RESULTADOS	93
5.1	Análise do Modelo de Dutra (2012) e do Modelo <i>Concrete Damaged Plasticity</i> (CDP)	93
5.1.1	Aplicação do modelo de Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998) para estados uniaxial e biaxial de tensões	94
5.1.1.1	Yin et. al (1990)	94
5.1.1.2	Traina e Mansour (1991)	95
5.1.1.3	Lim e Nawy (2005)	97
5.1.1.4	Swaddiwduhipong e Seow (2006)	99
5.1.1.5	Kolle (2006)	102
5.1.1.6	Peres (2008)	105
5.1.1.7	Bao et. al (2018)	106
5.1.1.8	Mohamed et. al (2019)	112
5.2	Análise Numérica de Elementos Estruturais	115
5.2.1	Vigas de Lim e Oh (1999)	115
5.2.1.1	Tensões Uniaxiais	116
5.2.1.2	Tensões Biaxiais	120
5.2.1.3	Resposta Mecânica das Vigas	123
5.2.2	Vigas de Kovács e Balázs (2003)	140
5.2.2.1	Tensões Uniaxiais	141
5.2.2.2	Tensões Biaxiais	143
5.2.2.3	Resposta do Modelo de Viga	145
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	163

6.1	Conclusões	163
6.2	Sugestões de Trabalhos Futuros	165
	REFERÊNCIAS	167
	APÊNDICES	173
	APÊNDICE A – FUNÇÃO PARA O CÁLCULO DAS RESISTÊNCIAS UNIAXIAL E BIAXIAL À COMPRESSÃO PARA O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO DE ACORDO COM O MODELO DE DUTRA (2012)	174
	APÊNDICE B – FUNÇÃO PARA O CÁLCULO DAS CURVAS DE RUPTURA BIAXIAL DE ACORDO COM O MODELO DE DUTRA (2012)	177
	APÊNDICE C – FUNÇÃO PARA O CÁLCULO DAS CURVAS DE RUPTURA BIAXIAL DE ACORDO COM O MODELO DE LEE E FENVES (1998) – CONCRETE DAMAGED PLASTICITY	180

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da mudança do modo de vida nômade para o sedentário, o homem busca por processos construtivos e materiais capazes de suprir sua necessidade por edificações mais resistentes e duradouras. Com a evolução da ciência, foi possível desenvolver compósitos que atendessem a estes requisitos e um material pensado para este fim foi o concreto.

O concreto, compósito resultante da mistura de cimento Portland, água, agregados miúdos e graúdos, e, eventualmente aditivos e/ou adições, é o material de construção mais largamente empregado (MEHTA; MONTEIRO, 2014). Este compósito vem sendo o material estrutural mais utilizado no mundo devido ao seu baixo custo de produção e aplicação, além da capacidade de se adequar as mais variadas formas e processos construtivos. Ele também apresenta como vantagens a facilidade de seu manuseio e aplicação, e alta resistência a esforços compressivos.

Apesar de suas vantagens, o concreto apresenta um comportamento caracteristicamente frágil e uma resistência a esforços de tração relativamente baixa, que, de forma geral, não ultrapassa os 10% de sua resistência à compressão. Devido a este fato, pesquisadores surgiram com a alternativa de reforço através de barras e fios de aço no concreto, o denominando concreto armado.

Ainda devido a suas limitações, estudos de novos componentes e estratégias capazes de contornar as deficiências do concreto são realizados e, a partir disso, foi desenvolvido o concreto reforçado com fibras (CRF). A adição de fibras à matriz cimentícia surgiu com o mesmo intuito da aplicação de armaduras. Tal componente mostrou-se uma ótima alternativa para a melhoria do desempenho à tração.

De acordo com Hanai (2005), o concreto pode ser caracterizado como um material quase-frágil, ou seja, um material com pouca ductilidade. As fibras atuam como reforço à tração, melhorando o seu desempenho como um todo, devido a uma redução do comportamento frágil característico deste material. As fibras, além de serem mais eficientes no controle do processo de fissuração do concreto, contribuem para melhorar várias propriedades mecânicas como a resistência ao cisalhamento, à torção e à fadiga, quando comparados as do concreto convencional (SANT'ANA, 2005). Essas características despertam a atenção de pesquisadores, tendo como resultado trabalhos que analisem os efeitos de diferentes volumes de fibras nas propriedades mecânicas de concretos, trazendo respostas, porém levantando novos questionamentos sobre o uso deste compósito.

Outro ponto positivo do advento da adição de fibras à matriz do concreto é a praticidade e facilidade em sua aplicação, pois as fibras são adicionadas à mistura como os demais componentes

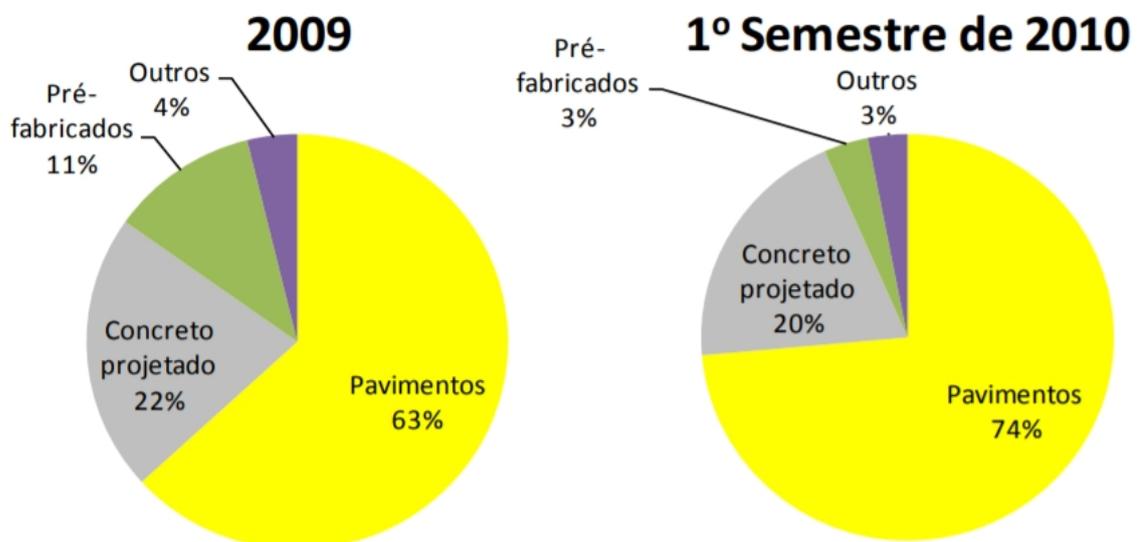
do traço desenvolvido. De forma geral, as fibras podem ser classificadas como naturais, artificiais ou sintéticas. As artificiais se subdividem em inorgânicas e orgânicas. Dentro das inorgânicas encontram-se as de carbono, vidro, cerâmica e aço (DOBBIN JÚNIOR; ROCHA, 2011). Dentre os diferentes tipos de fibras, as de aço são as mais utilizadas para aplicações estruturais e são levadas em consideração em muitas aplicações não estruturais (MEHTA; MONTEIRO, 2014).

O concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) é caracterizado como uma mistura heterogênea, combinando as características dos seus componentes e gerando um compósito com melhores aspectos mecânicos. As fibras de aço são fabricadas dos mais diversos formatos, objetivando a produção de um CRFA resistente ao proporcionar uma melhor aderência e ancoragem destes elementos à matriz de concreto.

Ao que é apresentado no Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013), por serem componentes que promovem maior resistência à tração do compósito, as fibras de aço podem substituir totalmente ou parcialmente a armadura em uma estrutura convencional de concreto, o que gera praticidade quanto à logística, produção e redução de custos. Dados mundiais mostram que as principais aplicações para este tipo de concreto têm sido em lajes e pavimentos (60%), concreto projetado para revestimento (25%), elementos pré-moldados (5%) e o restante em outras aplicações (BENTUR; MINDESS, 2007).

Segundo Figueiredo (2011), atualmente, o mercado brasileiro de fibras é centralizado em aplicações de baixo consumo de fibras e estruturas contínuas. O autor destaca um levantamento realizado que revela a concentração de aplicação das fibras de aço no Brasil. Como mostrado na Figura 1, o mercado de fibras de aço tem maior aplicação em pavimentos industriais, seguido do concreto projetado e uma pequena parcela de pré-moldados e outras aplicações.

Figura 1 – Distribuição do mercado brasileiro de fibras de aço por tipo de aplicação no ano de 2009 e primeiro semestre de 2010.



Fonte – Figueiredo (2011).

Com todas estas vantagens, nota-se que a introdução do CRFA no mercado da construção civil vem crescendo consideravelmente em escala nacional e mundial, o que leva pesquisadores e indústria a aprofundarem e fomentarem estudos acerca deste compósito de forma a dominá-lo e aprimorá-lo da melhor maneira possível.

1.1 MOTIVAÇÕES

Considerando os pontos apresentados, autores vêm desde a década de sessenta pesquisando e testando características referentes ao CRFA e às fibras de sua composição. Porém, a maior parte desses estudos são de natureza experimental. O volume de pesquisas no âmbito numérico-computacional vem apresentando um aumento mais recente, quando comparado às análises experimentais, cerca de 20 anos.

Vale ressaltar também que os estudos experimentais em relação ao CRFA, apesar do grande volume, por vezes não abordam todos os aspectos necessários para o desenvolvimento de análises numéricas e estudos sob a ótica da mecânica deste material. São detalhes mais específicos como inspeções referentes à fissuração, dano do material, avaliações a nível micro-mecânico e respostas a estado de tensões tri e biaxiais.

Sendo assim, torna-se fundamental o desenvolvimento de investigações e proposições de novas pesquisas experimentais, bem como a concepção de modelos numéricos-computacionais capazes de reproduzir de forma mais eficiente as características que influenciam no comportamento do CRFA nas mais diversas aplicações estruturais. Essas pesquisas mostram-se importantes para servir como suporte na construção ou reformulação de ferramentas e normas de projeto que garantam uma maior segurança em estruturas com CRFA além de explorar seu desempenho de forma mais eficiente e econômica.

Tendo em vista os pontos citados, este trabalho vem como uma contribuição aos estudos na área de análise numérico-computacional de compósitos aplicados à construção civil, com a finalidade de agregar novos olhares e fontes ao acervo científico, além de ampliar os horizontes de discussão acerca do CRFA nos campos teórico e prático.

1.2 OBJETIVOS

Dutra (2012) apresenta um modelo baseado numa abordagem micromecânica do CRFA, empregando-se técnicas de homogeneização e tendo como resultado a formulação para o comportamento constitutivo e propriedades elásticas do material, constituindo um modelo simples mas com o potencial de fornecer resultados interessantes.

Assim, o presente estudo tem como objetivo a aplicação deste modelo de previsão de resistências e propriedades elásticas em simulações com o CRFA, utilizando o método dos elementos finitos

como base numérica. A fim de alcançar o proposto, este trabalho segue uma verificação dos seguintes objetivos:

- a) Reproduzir a formulação proposta por Dutra (2012) através de uma rotina em MATLAB, com a finalidade de validar as previsões de resistências e resposta de ruptura biaxial para o CRFA com resultados experimentais mais recentes na literatura;
- b) Definição dos parâmetros de entrada para o modelo *Concrete Damaged Plasticity*, aplicado à análise em Elementos Finitos através do Abaqus SE;
- c) Aplicar os resultados analíticos ao modelo numérico e proceder para a validação do modelo numérico sob ações uniaxiais e biaxiais;
- d) Validar as respostas mecânicas dos elementos estruturais lineares simulados através de uma análise comparativa com os resultados experimentais.

1.2.1 Delineamento do Trabalho

O presente trabalho é dividido em seis capítulos. O Capítulo 2 constitui uma revisão bibliográfica acerca do concreto reforçado com fibras e aço e suas características gerais mais importantes para uma análise numérica do compósito. Apresentam-se as relações entre a fibra e a matriz, características físicas e comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras de aço.

No Capítulo 3 é abordada toda a teoria e o modelo desenvolvido por Dutra (2012). É desenvolvida uma breve introdução da Teoria da Homogeneização e as considerações realizadas pelo autor para chegar as formulações para previsão de resistência e de curva de ruptura biaxial propostas pelo autor.

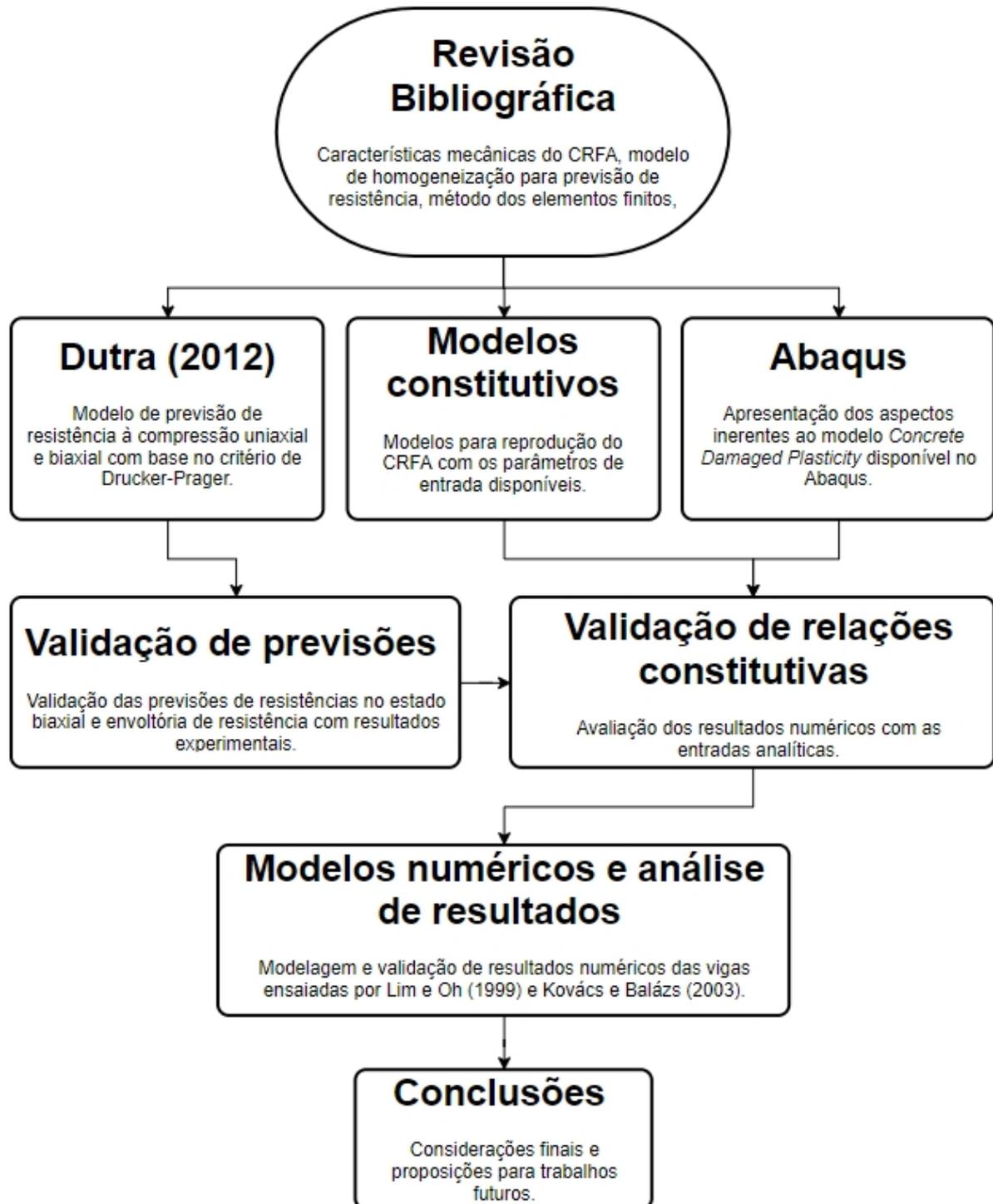
No Capítulo 4 é feito um apanhado geral da representação numérica do CRFA neste trabalho. Primeiro, define-se o modelo de dano plástico aplicado à análise no Abaqus SE, o *Concrete Damaged Plasticity*, e todos os parâmetros relacionados aos estados uni, bi e multiaxial de tensão para o modelo. Em seguida, são apresentados os modelos constitutivos analíticos, tipos de elemento finito e abordagem para geração das peças simuladas neste trabalho.

Para o Capítulo 5, têm-se a apresentação dos resultados numéricos dos elementos testados e discussões a respeito. Na ordem, são realizadas análises sob tensões uniaxiais, biaxiais e multiaxiais dos elementos, com resultados comparados aos esperados analiticamente e experimentalmente.

No Capítulo 6, são elencadas as conclusões resultantes do presente estudo, bem como sugestões para trabalhos futuros. Por fim, são apresentadas em anexo as rotinas em MATLAB utilizadas para a obtenção de resistências e curva e ruptura biaxial propostas por Dutra (2012).

A figura a seguir resume os passos deste trabalho.

Figura 2 – Fluxograma organizacional deste trabalho.



Fonte – Elaborado pelo autor.

2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

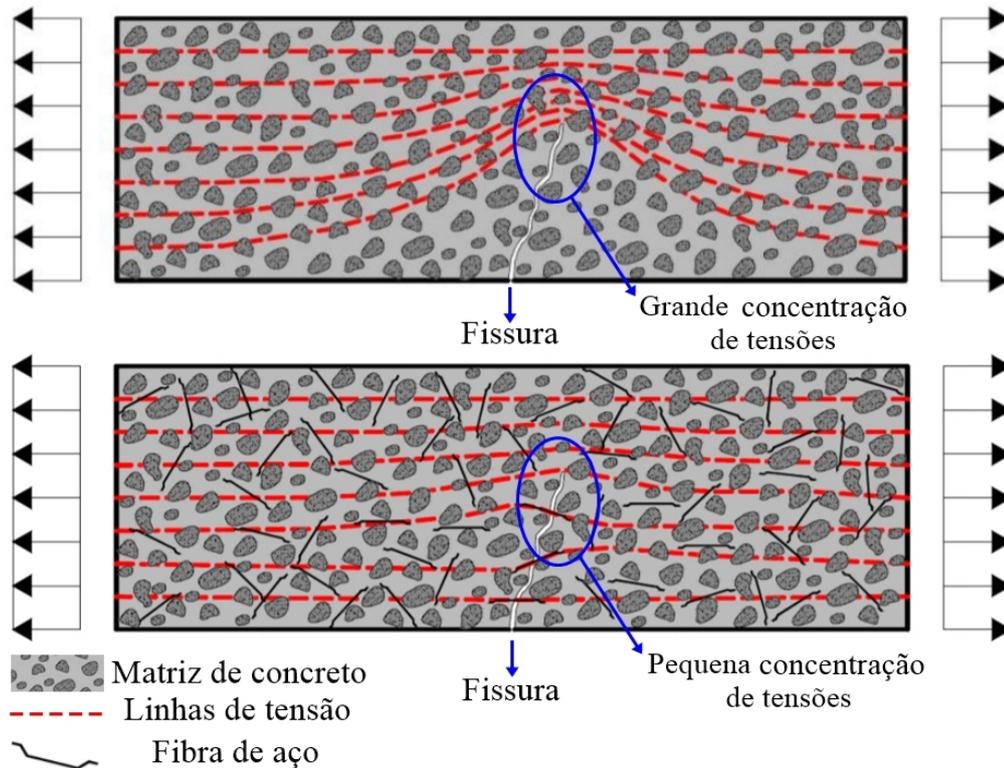
Neste capítulo, é apresentada a base referencial para o desenvolvimento deste trabalho. A princípio, busca-se a definição e determinação das principais características do concreto reforçado com fibras de aço, a fim de implementá-las na simulação.

2.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

A idealização do concreto reforçado com fibras de aço foi resultado de buscas por tecnologias e ferramentas capazes de melhorar o desempenho do concreto convencional por meio de adições capazes de reduzir sua característica como material frágil e com baixa resistência à tração. Com o fomento de novos estudos em combinação com os avanços tecnológicos e experimentais, foi possível verificar que a utilização das fibras de aço melhorava não só a resistência à tração do concreto como também a sua ductilidade, resistência ao impacto e fadiga, controle de fissuração e, em alguns casos, a resistência à compressão (FIGUEIREDO, 2011).

O Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013) define o CRFA como material formado a partir da mistura de uma matriz cimentícia com fibras discretas e descontínuas de aço. Por serem caracterizadas como armadura descontínua, as fibras de aço são menos eficientes que os fios e barras contínuas, no quesito distribuição de esforços axiais. Porém, o pequeno espaçamento entre as fibras proporciona um maior controle de abertura das fissuras na matriz, o que por sua vez diminui a suscetibilidade da estrutura a agentes agressivos ao compósito. Segundo Figueiredo (2011), essas características surgem devido à capacidade das fibras em redistribuir as tensões (como pode ser observado na Figura 3) aplicadas ao compósito em razão do elevado módulo de elasticidade das fibras de aço, apesar de suas pequenas dimensões e volumes, em comparação aos demais componentes do CRFA.

Figura 3 – Comparação do esquema de distribuição de tensões entre o concreto comum e o CRFA.



Fonte – Adaptado de Figueiredo (2011).

2.2 FIBRAS DE AÇO

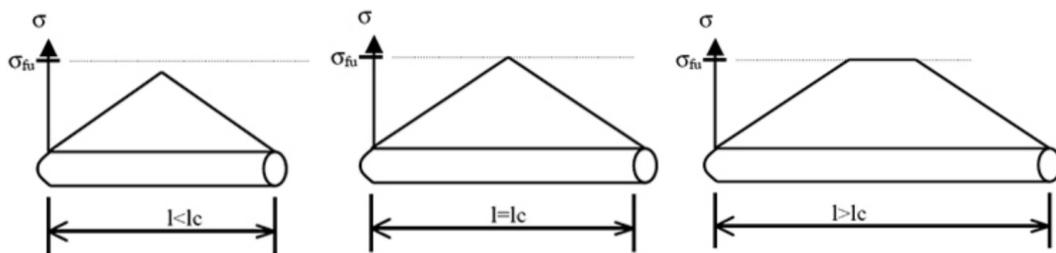
Atualmente, é possível encontrar diversas variedades de fibras de aço comercializadas para utilização como reforço em concretos. Elas possuem diferentes geometrias, texturas, tipos de ancoragem e relação comprimento/diâmetro. Os diâmetros convencionais estão na faixa entre $0,10\text{ mm}$ e $1,00\text{ mm}$, o comprimento variando de 5 mm a 65 mm , com módulo de elasticidade de 200 GPa a 210 GPa e as tensões de ruptura podendo chegar a 2100 MPa (VELASCO, 2008). Estas diferentes características podem influenciar na aderência ocorrida entre a fibra e o concreto e na resposta mecânica macroscópica do compósito.

Uma característica muito importante na aplicação das fibras no concreto é o seu razão de aspecto (l_f/d_f), que é a relação entre o comprimento e o diâmetro da circunferência virtual da fibra. Este é um dos principais parâmetros de caracterização das fibras e indica a eficiência na melhoria da tenacidade do CRFA. Mehta e Monteiro (2014) salientam que um maior razão de aspecto pode tanto proporcionar uma melhora na resistência ao arrancamento da fibra, pelo aumento do comprimento de ancoragem, como um aumento ao número de fibras que podem interceptar uma fissura, decorrente da utilização de um número maior de fibras mais delgadas.

Arelado ao conceito do razão de aspecto, está o comprimento crítico da fibra. A definição de comprimento crítico está ligada à hipótese de que a tensão entre a matriz e a fibra aumenta

linearmente dos extremos para o centro dela. O comprimento crítico será aquele que promove o desenvolvimento da tensão na fibra de forma que a tensão em seu ponto central seja igual a tensão de ruptura da fibra, como mostrado na Figura 4. Para uma fissura que se desenvolve perpendicularmente à fibra, existe uma distribuição de tensão linear das extremidades até a sua parte central, cujo o limite máximo é a tensão de ruptura da fibra que dependerá do material que a compõe. Sendo assim, caso a tensão máxima seja registrada antes do ponto central da fibra ou essa tensão não seja atingida, o potencial resistente da fibra não estará sendo plenamente aproveitado (FIGUEIREDO, 2000).

Figura 4 – Distribuições possíveis de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico.



Fonte – Figueiredo (2000).

Além da geometria das fibras, o desempenho do CRFA depende muito do teor de fibras presente na matriz. A princípio, quanto maior for a presença de fibras na matriz, melhor será o desempenho, pois maior será o número de fibras que interceptará cada microfissura, resistindo desta forma à propagação delas (GARCEZ; CAETANO, 2006).

Mehta e Monteiro (2014) afirmam que a adição de qualquer tipo de fibra em concreto convencional reduz a trabalhabilidade. Independentemente do tipo de fibra, a perda da trabalhabilidade é consideravelmente proporcional ao volume de concentração de fibras no concreto. Geralmente, o requisito de trabalhabilidade adequada de mistura contendo fibras pode ser alcançado com o uso de ar incorporado, aditivos plastificantes, maior quantidade de pasta de cimento (com ou sem pozolana), e uso de fibras coladas em conjunto.

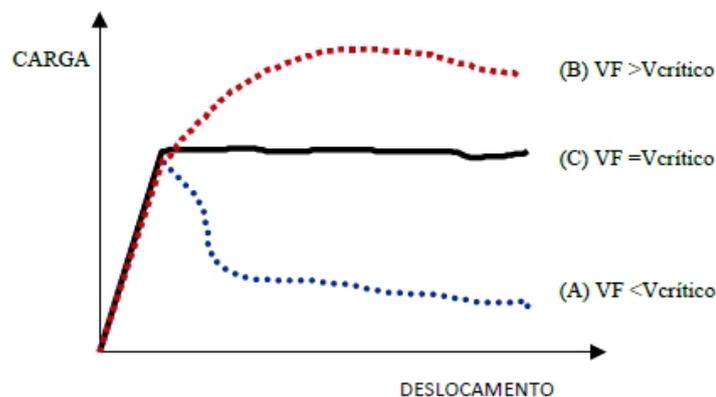
Geralmente, fibras longas e em altos teores tendem a reduzir mais a trabalhabilidade. Esses concretos produzidos de forma convencional apresentam difícil dispersão das fibras, podendo-se observar o agrupamento de fibras e conseqüentemente a formação de ouriços, um emaranhado de fibras. Assim, a produção de concretos fluidos reforçados com fibras propicia a combinação do desempenho mecânico fornecido pelas fibras com uma boa dispersão das mesmas, pela fluidez obtida nos concretos (VELASCO, 2008; MARANGON, 2006).

Ainda segundo Mehta e Monteiro (2014), o CRFA pode ser classificado em função da fração volumétrica de fibras em sua composição. São apresentadas três composições relacionadas à quantidade de fibras na matriz, onde:

- a) As misturas com baixa fração volumétrica, menor que 1% de fibras incorporadas na matriz de concreto, são responsáveis pela redução da fissuração por retração. Devido a esse fato, são aplicadas em lajes e pavimentos com grandes superfícies expostas, peças com elevados níveis de fissuração por retração;
- b) As misturas com fração volumétrica moderada, entre 1% e 2%, aumentam o módulo de tenacidade à fratura e de resistência ao impacto. São aplicadas no concreto projetado;
- c) As misturas com alta fração volumétrica, maior que 2%, levam ao endurecimento por deformação dos compósitos. São conhecidos por compósitos de alto desempenho reforçado com fibras.

Ainda no tocante à dosagem de fibras no compósito, é definido o teor crítico de fibras. O teor crítico de fibras é o volume de fibras apropriado para a mistura, mantendo a capacidade portante do concreto mesmo após a ruptura da matriz. Desta forma, observa-se que para taxas abaixo do volume crítico de fibras ocorre o comportamento de amolecimento do compósito (também conhecido como *strain – softening*). Já para volumes acima do teor crítico, o compósito continua aceitando níveis de carregamento crescentes, mesmo após a ruptura da matriz, apresentando o comportamento de endurecimento (ou *strain – hardening*), como exemplificado na Figura 5 (FIGUEIREDO, 2011).

Figura 5 – Compósitos reforçados com volumes de fibras (VF) abaixo (A), acima (B) e igual (C) ao volume crítico de fibras durante um ensaio de tração na flexão.



Fonte – Figueiredo (2011).

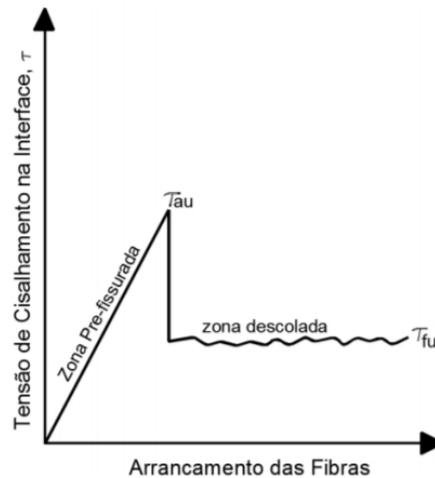
2.3 INTERAÇÃO FIBRA-MATRIZ

A zona de interface entre fibra e matriz é um importante fator a ser estudado, pois ela vai definir como a matriz se comporta e como é dado o arrancamento das fibras. De acordo com Bentur e Mindess (2007), o mecanismo básico de reforço da matriz fissurada é composto por uma parcela elástica e outra parcela de atrito. Ainda segundo os autores, os mecanismos de dissipação

de tensões no CRFA dependerão de fatores como geometria da fibra e tipo de ancoragem, e esta interação é realizada de três formas: por atrito, adesão física e química ou por ancoragem mecânica. Existem dois estágios muito importantes a serem analisados para a determinação da transferência de esforços e como se dará o comportamento final do compósito, são eles os comportamentos pré e pós-fissuração da matriz.

No primeiro estágio da interação entre fibra e matriz, as tensões cisalhantes têm um comportamento elástico e à medida que ocorre um incremento nas solicitações, este sistema linear chega a um limite onde acaba a zona elástica de corte (τ_{au}), ocasionando a primeira fissura. Este modelo foi desenvolvido para fibras retas, porém em geometrias mais complexas pode-se dizer que ocorre uma combinação deste e de outros mecanismos estudados, como é mostrado na Figura 6 (BENTUR; MINDESS, 2007).

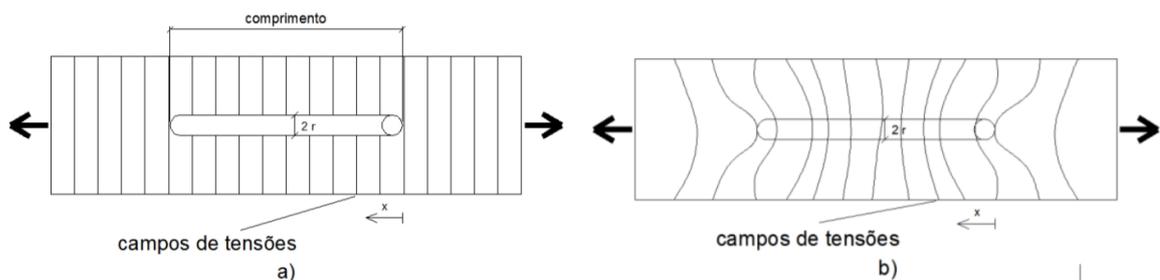
Figura 6 – Relação pré-fissura e pós-fissura.



Fonte – Bentur e Mindess (2007).

Ao analisarem as linhas de tensões em compósitos reforçados com fibras, Bentur e Mindess (2007) e Brandt (2009) mostram que à medida que os incrementos de carregamento são realizados há uma concentração de tensões nas pontas da fibras, que são caracterizadas pela deformação do campo de tensões no material (como observado na Figura 7).

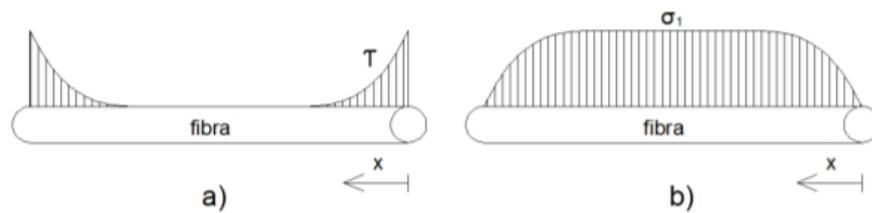
Figura 7 – Distribuição de tensões pré (a) e pós solicitação (b).



Fonte – Brandt (2009).

Com o aumento das solicitações, o campo de tensões passa a atuar de forma não linear na fibra, comportamento que pode ser explicado devido à diferença entre os módulos de elasticidade do aço, componente da fibra, e da matriz de concreto. A medida que ocorre o incremento de solicitações no compósito, é observado um aumento nas tensões de arrancamento, que diminuem de forma não linear na direção do centro da fibra (Figura 8a). É verificado também um aumento das tensões de tração na parte central da fibra, que diminuem na direção das extremidades (Figura 8b).

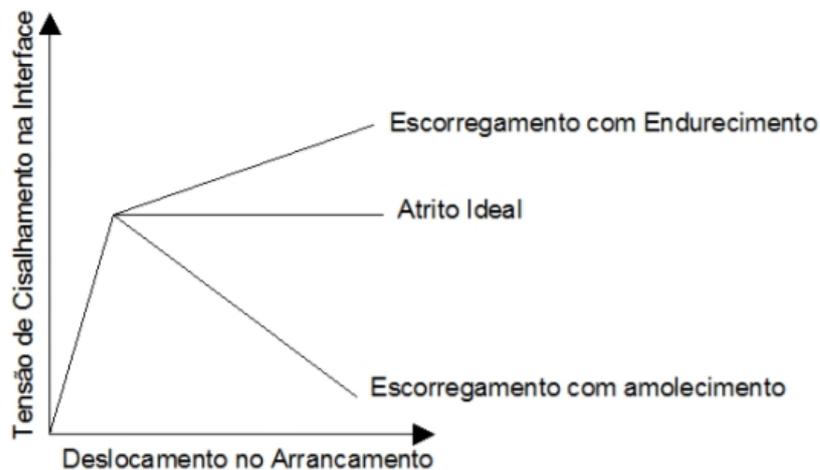
Figura 8 – Distribuição de tensões na fibra.



Fonte – Bentur e Mindess (2007).

Ao exceder resistência ao cisalhamento da interface (τ_{au}), a transferência de tensões deixará de ser elástica e se dará pelo escorregamento através do atrito. Este processo acontece após a formação da primeira fissura, configurando a segunda fase no comportamento interface fibra-matriz. Desta forma, o mecanismo predominante pós-fissuração é a transferência de tensões por atrito que pode ser dado como um escorregamento com atrito ideal (no qual é mantido um patamar de tensão), com amolecimento (com perda na capacidade de carga) ou com endurecimento (aumento da resistência ao cisalhamento). Tais comportamentos são ilustrados na Figura 9.

Figura 9 – Relações entre tensão de cisalhamento e o ensaio de arrancamento.

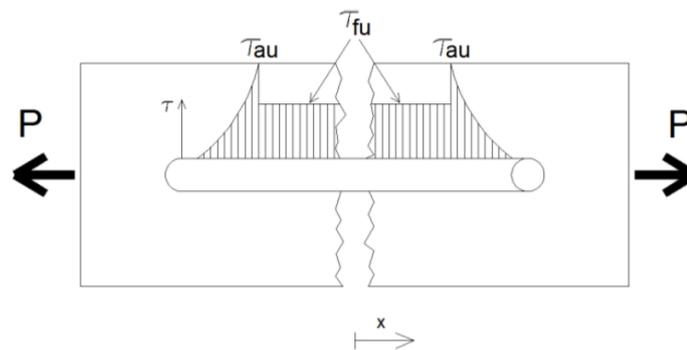


Fonte – Bentur e Mindess (2007).

Bentur e Mindess (2007) salientam também que pode ocorrer uma combinação de comportamentos no qual o processo de transferência de tensões pode ser gradual, ocorrendo a ruptura da matriz

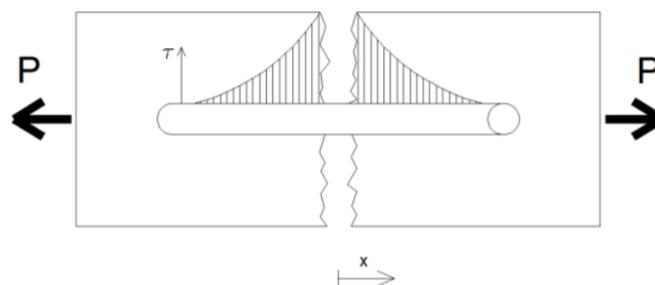
e, ao mesmo tempo, a interface apresentar uma região com aderência com descolamento da fibra, configurando uma combinação entre o cisalhamento elástico e tensões de atrito (Figura 10). Também é importante visualizar que a tensão máxima de cisalhamento ocorre na proximidade da fissura e não nas extremidades, como no modelo pré-fissurado citado (Figura 11).

Figura 10 – Distribuições de tensões de cisalhamento com descolamento da fibra antes de fissura.



Fonte – Bentur e Mindess (2007).

Figura 11 – Distribuições de tensões de cisalhamento sem descolamento da fibra antes de fissura.



Fonte – Bentur e Mindess (2007).

2.4 COMPORTAMENTO MECÂNICO À COMPRESSÃO

A resistência a tensões de compressão é a propriedade mecânica mais importante do concreto, não importa qual o tipo. Sabe-se também que essa resistência é diretamente influenciada pela porosidade do material, um concreto menos poroso será mais resistente.

A elevada resistência à compressão do concreto traz um contraponto que a sua característica de material frágil, que rompe de forma brusca. Essa característica se contrapõe à ductilidade, que, por sua vez, é elevada no compósito com a adição de fibras na matriz devido a capacidade do aço de absorver mais energia

De acordo com o código de projetos americano ACI-544:2009, os efeitos das fibras de aço na resistência à compressão do CRFA podem ser variáveis. Porém, sabe-se que a finalidade da adição de fibras no concreto não é fazer com que a sua resistência à compressão aumente. Entretanto,

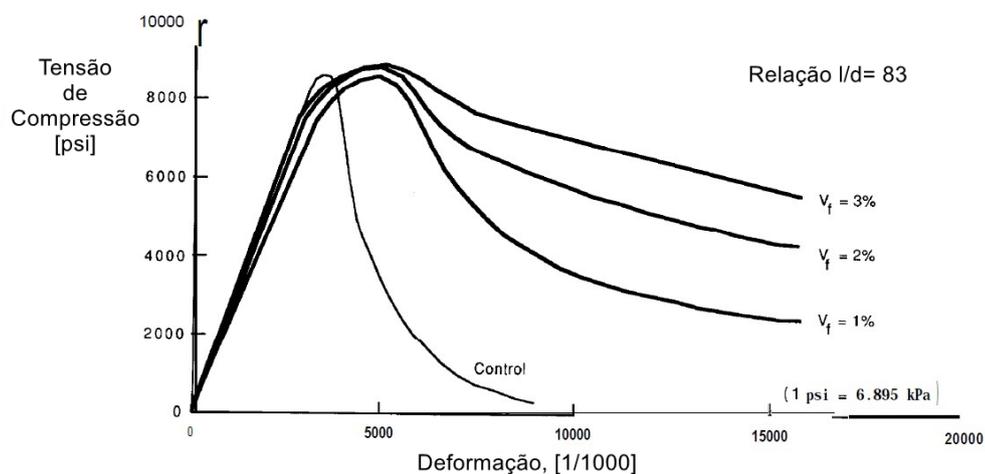
algumas pesquisas apontam que o fato de as fibras atuarem como ponte de transferência de tensões pelas fissuras, o CRFA apresenta ganhos em sua resistência à compressão, quando comparado ao concreto convencional (FIGUEIREDO, 2011).

A respeito da resposta mecânica do CRFA à compressão, ainda existem muitas divergências entre autores. Porém, independente da incerteza quanto ao aumento da resistência à compressão com a adição de fibras de aço, é certo que o concreto apresenta ganhos em tenacidade e ductilidade (BARROS, 1999). Esses ganhos de tenacidade podem variar de acordo com a orientação das fibras na matriz de concreto (ZANGELMI, 1999). É importante destacar que os ganhos de tenacidade e aumento na resistência de compressão do CRFA podem apresentar variações significativas em função da orientação das fibras na matriz de concreto (FIGUEIREDO, 2011).

Uma melhora significativa no comportamento pós-pico em testes de compressão uniaxial é reportada na literatura por diversos autores em pesquisas com o CRFA, em contrapartida não é observado ganhos significativos em sua resistência total (MAALEJ; LI, 1994; ACI-544:2009, (1999), (2009 Reapproved); PRISCO; PLIZZARI; VANDEWALLE, 2009; MICHELS; CHRISTEN; WALDMANN, 2013).

A contribuição das fibras no comportamento à compressão torna-se mais nítida no ramo decrescente da curva tensão-deformação, gerando um decaimento de resistência menos abrupto. Como citado, isto se deve a capacidade das fibras de absorver maiores volumes de energia, acarretando um melhoramento nas características pós-fissuração. A Figura 12 esquematiza esta situação.

Figura 12 – Influência do volume de fibras na resistência à compressão, curva tensão-deformação.



Fonte – Fanella e Naaman (1985), adaptado por ACI-544:2009.

2.5 COMPORTAMENTO MECÂNICO À TRAÇÃO

É sabido que o concreto foi desenvolvido para resistir esforços de compressão, porém esforços de tração surgem em estruturas devido aos diversos tipos de sollicitação que sofrem. Em razão

da existência de micro-fissuras nas zonas interfaciais mais fracas da matriz, principalmente nas regiões de contato entre os agregados e a matriz cimentícia, o concreto torna-se um material bem menos resistente, quando comparado à sua capacidade resistente compressiva. Tal fato advém da rápida propagação das micro-fissuras das zonas interfaciais sob esforços de tração.

Diferente do concreto comum, o CRFA exibe uma tensão residual de tração devido a contribuição das fibras de aço presentes na matriz endurecida, apesar de sua resistência à primeira fissuração não ser muito diferente do concreto comum. Como citado, a presença uniforme das fibras na matriz faz com que ocorra a distribuição de esforços em diversas pontes de transferência de tensão resultando em uma maior ductilidade do compósito, ou seja, deformando mais antes de falhar completamente.

Sabe-se que as fibras proporcionam o aumento da resistência à tração do concreto, pois inibem a formação e a propagação das fissuras na matriz. São vários os fatores que influenciam nesse aumento, como a porcentagem de fibras, a aderência entre fibra-matriz, resistência da fibra e razão de aspecto .

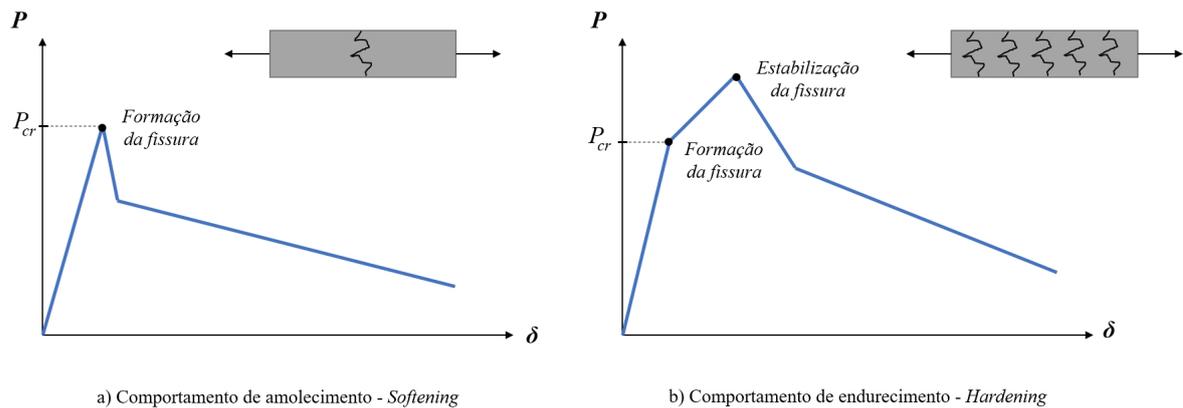
O Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013) não recomenda ensaios de tração direta para o CRFA devido à sua complexidade de montagem e interpretação de resultados. Por este motivo, o padrão para determinar a resistência à tração de maneira indireta por meio de ensaios de tração por compressão diametral também não é o indicado. A forma mais indicada para a determinação dessa resistência é por meio de ensaios de tração na flexão. A resistência à tração pode, então, ser obtida de maneira indireta por meio de correlações nesses ensaios. É admitido que a resistência à tração corresponde a 90% da resistência obtida de ensaios de compressão diametral e a 70% da obtida em ensaios à flexão (OLIVEIRA, 2012).

Segundo Barros (1996) um aumento no índice de reforço, produto entre o volume de fibras e o seu razão de aspecto , de 40 para 120 pode resultar em um aumento de 25% na resistência à tração na flexão. Ainda de acordo com o autor, como a resistência à tração depende do método de produção do compósito, quanto mais eficiente for o método em termos de dispor a maior porcentagem de fibras segundo a direção das tensões de tração, maior será o aumento da resistência à tração.

À tração direta, o compósito pode apresentar dois tipos de comportamento, o *softening*, ou amolecimento (Figura 13a), e o *hardening*, ou endurecimento (Figura 13b), que dependerão de fatores como: orientação das fibras na matriz, teor de fibras e tipo de fibras. Além disso, o documento salienta que os corpos de prova para ensaio de tração uniaxial, em virtude da sua pequena dimensão, podem apresentar o efeito de orientação das fibras oriundo do processo de moldagem. Desta forma, Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013) sugere que esta propriedade do compósito seja testada através de ensaios de flexão de três pontos em prismas entalhados (Figura 14), tendo um controle da carga aplicada e da abertura deste entalhe, ensaio normatizado pela EN-14651:2005.

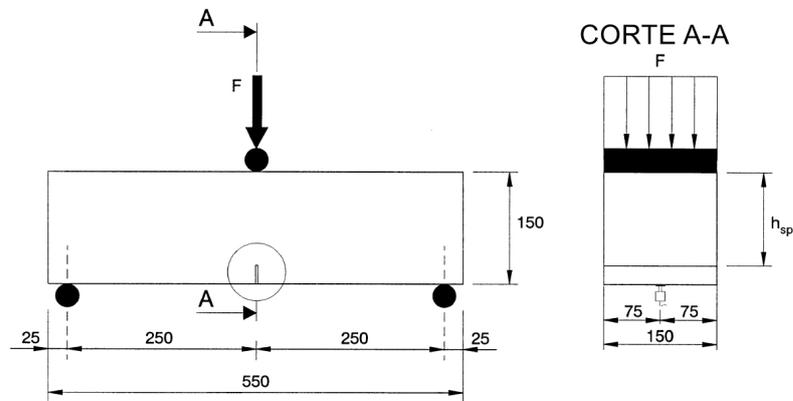
A Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013) também destaca que as fibras de aço são capazes de substituir a armadura convencional de forma total ou parcial para projetos com CRFA no estado limite último de estruturas. Para isto, as suas resistências residuais, calculadas a partir dos resultados dos testes de flexão de três pontos (EN-14651:2005), devem atender à critérios de classificação propostos na norma.

Figura 13 – Comportamento do CRFA à tração.



Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013).

Figura 14 – Ensaio de flexão de três pontos normalizado.



Fonte – *European Committee for Standardization* - (EN-14651:2005).

2.6 COMPORTAMENTO MECÂNICO SOB SOLICITAÇÕES BIAXIAIS

O concreto comum apresenta estudos que detalham bem seu comportamento a tensões multiaxiais e modelos de previsão de falha sob essas condições, fato que não é observado para o CRFA por ser uma tecnologia recente. Como destacado por Padmarajaiah e Ramaswamy (2002), devido às limitações de equipamentos de testes mais usuais e publicações limitadas acerca do CRFA, os dados experimentais para estudos mais detalhados do CRFA não estão prontamente disponíveis. Murugappan, Paramasivam e Tan (1993) afirmam que a resistência biaxial à compressão do CRFA é diretamente influenciada por vários fatores, como volume de fibras, razão de aspecto das fibras, relação entre fibra e matriz e resistência à compressão da matriz.

Segundo Attard e Setunge (1996 apud LIM; NAWY, 2005), estudos mostram que a adição de fibras curtas de geometria apropriada e em volume adequado é capaz de melhorar a capacidade resistente do concreto sob tensões biaxiais de compressão em termos de ductilidade e resistência residual. O efeito de confinamento exercido pelas fibras devido a sua resistência ao arrancamento garante a melhora do comportamento dúctil e reduz a quantidade de aço para reforço do compósito.

Sirijaroonchai, El-Tawil e Parra-Montesinos (2010) mostram que os ganhos para relação entre as resistências biaxial e uniaxial à compressão do CRFA foram expressivos em relação ao concreto comum. Os autores atribuem esse ganho de resistência à presença das fibras na matriz, que são capazes de reduzir a expansão fora do plano de ação das tensões, aumentando o confinamento do espécime testado e, conseqüentemente, a resistência a tensões de compressão.

Já para a relação tração-compressão, Shang, Yang e Niu (2014) afirmam que vários fatores devem ser considerados, são eles: resistência do concreto à compressão e tração, aparatos de teste, técnicas de teste e medição, padrões de carregamento, modo de solicitação à tração e meios para reduzir o atrito entre o espécime e o maquinário de teste.

Para o CRFA, informações acerca do comportamento a tensões biaxiais de tração-compressão são bem limitadas. Entretanto, a partir da envoltória de falha proposta por Hu, Day e Dux (2003), o aumento do volume de fibras vai aumentar a resistência à tensão biaxial de tração-compressão do CRFA. Essa previsão é de certa forma esperada, pois as fibras de aço auxiliam na suavização do processo de fissuração, aumentando sua resistência (CHIEW et al., 2018).

Sob tensões biaxiais de tração, as informações para o CRFA ainda são muito poucas, ou quase inexistentes. Porém, uma previsão pode ser feita a partir dos estudos de tensões tração-compressão. Como a fibra de aço tem excelente papel em aprimorar da capacidade resistente à tração do concreto, dessa forma o comportamento a tensões biaxiais de tração será semelhante ao comportamento uniaxial (CHIEW et al., 2018). Ou seja, as fibras atuarão como elementos de melhoramento da resistência à tração biaxial do CRFA.

2.7 MÓDULO DE ELASTICIDADE

As propriedades elásticas do concreto são determinadas pelas propriedades elásticas de seus constituintes e pelas características inerentes à aderência de agregados à pasta cimentícia. Segundo Oliveira (2012), devido à rigidez e à grande quantidade de agregado graúdo no concreto, é o agregado quem exerce a maior influência no módulo de elasticidade do concreto. Não somente a rigidez do agregado, mas também o tipo de agregado, afeta o módulo de elasticidade. Para a mesma relação água/cimento, o módulo de elasticidade do concreto com quartzito é maior que os demais. A razão pode ser que o módulo de elasticidade do quartzito é maior que o módulo de elasticidade dos outros agregados (de 30% a 50%). À medida que a resistência do concreto é

reduzida, a influência do agregado no módulo de elasticidade do concreto se torna menor. Ao mesmo tempo, o módulo de elasticidade aumenta com o aumento da resistência do concreto.

Quanto à influência da adição de fibras de aço no módulo de Young do CRFA, autores ainda não tem um consenso. Porém, todos concordam que esta propriedade do compósito será definida mais pelo traço do concreto, mais especificamente pela adição de finos aos compósitos. Como resultado de uma larga escala de experimentos, Köksal et al. (2008) chegaram à conclusão de que a adição de fibras de aço é capaz de diminuir, enquanto a adição de sílica aumenta o valor do módulo de elasticidade do compósito.

Suksawang, Wtaife e Alsabbagh (2018) mostraram que para traços que a relação agregado graúdo/agregado miúdo é maior que 1 ($G/M \geq 1$) as fibras não apresentavam grande influência no valor final do módulo de elasticidade para o compósito. Já em casos cujo a relação $G/M \leq 1$ ou sem a adição de agregado graúdo, o módulo de elasticidade do material é reduzido em média 20%, quando comparado a um concreto sem a adição de fibras e com mesma resistência à compressão.

2.8 COEFICIENTE DE POISSON

Thomas e Ramaswamy (2007) apresentam uma investigação da influência do volume de fibras e da resistência à compressão do concreto no coeficiente de Poisson do concreto reforçado com fibras de aço. As análises utilizaram fibras de aço com ganchos nas extremidades com razão de aspecto igual a 55 e 30 mm de comprimento. Estas fibras foram adicionadas a concretos com 35 MPa, 65 MPa e 85 MPa de resistência à compressão em frações volumétricas de 0,5%, 1,0% e 1,5%. Os autores então verificaram que o coeficiente de Poisson do CRFA variou de 0,18 a 0,22 para as classes de resistências analisadas. Thomas e Ramaswamy (2007) salientam que essa pequena variação se dá pelo procedimento de determinação do coeficiente de Poisson, que é calculado a partir de observações feitas nos estágios iniciais de carregamento, quando as fibras praticamente não contribuem com a capacidade resistente do compósito.

Carrillo, Ramirez e Lizarazo-Marriaga (2019) realizaram uma série de experimentos com diferentes tipos de fibras com dosagem entre 0,17% e 0,98%, razão de aspecto menor que 80 e com resistência à compressão máxima de 43 MPa. Os autores mostram que o volume de fibras utilizado e o tipo delas são fatores que afetam os valores de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson dinâmicos. Esses valores variam numa faixa de até 17%, dependendo do tipo de fibra e seu razão de aspecto .

A equipe de Furnas (1997) mostra que o coeficiente de Poisson varia, normalmente, de 0,16 a 0,20 e que os valores extremos se situam entre 0,11 e 0,27. Ou seja, o coeficiente de Poisson é mais alto para baixas tensões, tendendo a diminuir com o aumento da dimensão máxima do agregado e a aumentar com o tempo de cura, variando com a proporção relativa entre as

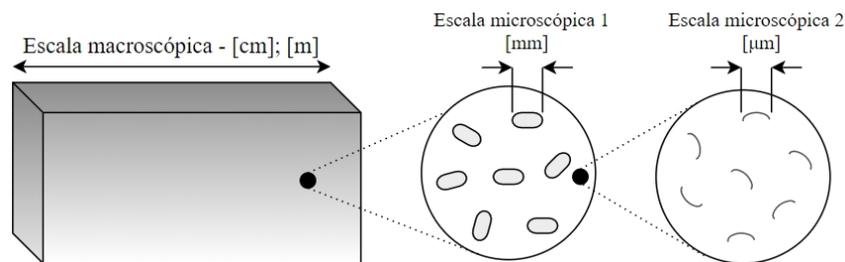
quantidades de agregado e de pasta.

3 TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO PARA O CRFA: CARACTERÍSTICAS GERAIS DO MÉTODO

A mecânica do contínuo trata de sólidos idealizados, onde, considerando um ponto infinitesimal e sua vizinhança, admite-se que a distribuição de material, as tensões e deformações são essencialmente uniformes (NEMAT-NASSER; HORI, 2013). Porém, em uma análise mais minuciosa, a nível microscópico, verifica-se a natureza heterogênea dos materiais, mesmo que a nível macroscópico eles pareçam ser homogêneos. Esta heterogeneidade pode ocorrer de diversas formas, como pequenos vazios, partículas ou inclusões de diferentes propriedades do material, formações de fissuras, irregularidades no material, materiais distintos, etc. Sendo assim, a nível microscópico, o campo de tensões e deformações não se apresenta de forma uniforme e o comportamento de materiais com essas características é o objeto de estudo da micromecânica.

A heterogeneidade de um compósito pode ocorrer em diferentes escalas e depende do meio avaliado. A Figura 15 ilustra a situação onde, na escala microscópica 1, o material é aparentemente heterogêneo quando comparado ao nível macroscópico da estrutura, com as inclusões e o material entre elas. Neste nível, o material entre as inclusões pode ser considerado homogêneo, porém avaliando esta parcela para uma escala mais refinada, a microscópica 2, nota-se a heterogeneidade dele. Dessa forma, as escalas microscópicas e macroscópicas de um determinado problema dependem do estudo a ser realizado.

Figura 15 – Escalas macroscópica e microscópica.



Fonte – Adaptado de Dutra (2012).

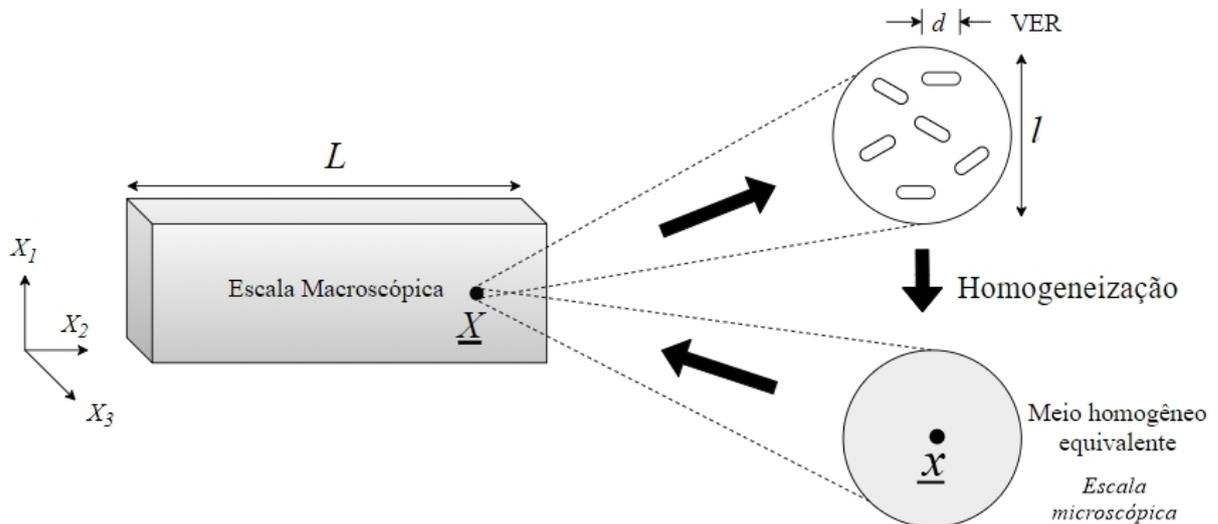
A abordagem micromecânica tem como vantagem que a avaliação de um comportamento complexo de um compósito seja determinado com base em seus constituintes e as relações entre eles, permitindo a verificação da influência e detalhes microscópicos na escala macroscópica. Esta transição micro-macro escala formalmente ocorre através de um adequado processo de médias e é chamado homogeneização.

3.1 VOLUME ELEMENTAR REPRESENTATIVO

O processo de homogeneização é baseado na existência e determinação de um volume elementar representativo (VER). O VER é um meio heterogêneo que pode ser representado por um meio homogêneo equivalente, de forma que sejam análogos do ponto de vista mecânico, com respostas globais semelhantes sob qualquer tipo de solicitação.

Em outras palavras, o meio homogêneo equivalente deve ser tal que os campos de tensão e deformação macroscópica ($\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X})$ e $\underline{\underline{E}}(\underline{X})$, respectivamente) sejam os valores médios calculados sobre o VER localizado em \underline{X} dos campos de tensão e deformação locais ($\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ e $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$, respectivamente), onde \underline{X} se refere a posição do ponto na escala macroscópica e \underline{x} o vetor posição na escala microscópica (Figura 16).

Figura 16 – Processo de homogeneização.



Fonte – Adaptado de Dutra (2012).

Para que o processo seja validado, a dimensão característica das heterogeneidades presentes (d) devem ser muito menores que a dimensão característica do volume elementar (l), como ilustrado na Figura 16. Além disso, l deve ser suficientemente menor que a dimensão característica da estrutura em escala macroscópica, L , sendo possível o uso de ferramentas de integração e derivação amplamente utilizadas na mecânica clássica. Dessa forma, tem-se a relação representada na Equação 3.1 para a separação de escalas no processo de homogeneização de acordo com Zaoui (2002), onde d_0 representa a menor dimensão abaixo da qual a mecânica do contínuo não é mais válida.

$$d_0 \ll d \ll l \ll L \quad (3.1)$$

O VER se caracteriza então como volume capaz de representar, de forma suficientemente precisa, o comportamento macroscópico do material em estudo, possuindo todas as informações

para a descrição geométrica e mecânica do meio heterogêneo. Para o CRFA, a definição do VER é efetuada através da especificação das fases que constituem o material heterogêneo, das características geométricas e mecânicas dos componentes e distribuição espacial e morfológica das fases: a fração volumétrica e a forma e orientação das inclusões ou fibras.

3.2 PROPRIEDADES ELÁSTICAS EFETIVAS PARA O CRFA

As propriedades elásticas efetivas para o CRFA são, neste estudo, obtidas através da Estimativa de Mori e Tanaka (1973). Esta foi a abordagem adotada para o CRFA homogeneizado, uma vez que se identificam claramente duas fases: a matriz de concreto e as fibras, as quais se apresentam em moderada e baixa quantidade.

A partir da Equação 3.2, Dutra (2012) desenvolveu as relações para as propriedades elásticas efetivas do CRFA. O CRFA, formado por uma matriz isotrópica com fibras aleatoriamente orientadas e distribuídas, apresenta propriedades globais isotrópicas, sendo o tensor \underline{C}_{mt}^{hom} definido a partir de duas constantes elásticas. Desta forma, com a determinação dos coeficientes de \underline{C}_{mt}^{hom} é possível obter as constantes elásticas K^{hom} e G^{hom} , respectivamente, o módulo de compressão e de cisalhamento. É importante ressaltar que a homogeneidade assumida para a matriz de concreto resulta de um processo de homogeneização preliminar, a qual considera as microfissuras existentes.

$$\underline{C}_{mt}^{hom} = \underline{c}^m + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (\underline{c}^i - \underline{c}^m) : \left[\underline{1} + \underline{P}^{m,i} : (\underline{c}^i - \underline{c}^m) \right]^{-1} : \left\langle \left[\underline{1} + \underline{P}^m : (\underline{c} - \underline{c}^m) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (3.2)$$

Onde \underline{c}^m e \underline{c}^i representam os tensores de elasticidade da matriz e das inclusões, respectivamente, \underline{P}^m e $\underline{P}^{m,i}$ os tensores de Hill que relacionados à matriz e ao conjunto matriz e inclusões, respectivamente, $\underline{1}$ o tensor identidade e f a fração volumétrica das inclusões.

Os módulos K^{hom} e G^{hom} são função das propriedades elásticas da matriz de concreto k^m e g^m , respectivamente, módulos de compressão e de cisalhamento, e das fibras k^f e g^f , da fração volumétrica das fibras f e da razão de aspecto α .

As expressões obtidas para K^{hom} e G^{hom} utilizando-se $\alpha = \infty$ (para inclusões cujo comprimento seja muito maior que o diâmetro, como o caso abordado) foram, de acordo com Dutra (2012):

$$K^{hom} = - \frac{3k^m g^m f + k^m g^m f - 3k^f g^f f - k^f g^f f - 3k^m g^m - k^m g^f - 3k^m k^f}{3k^m f - 3k^f f + 3g^m + 3k^f + g^f} \quad (3.3)$$

$$G^{hom} = -\frac{((g^f)^3 n_0 + (g^f)^2 g^m n_1 + g^f (g^m)^2 n_2 + (g^m)^3 n_3 + (g^m)^4 n_4 + (g^m)^5 n_5)}{((g^f)^2 d_0 + g^m g^f d_1 + (g^m)^2 d_2 + (g^m)^3 d_3 + (g^m)^4 d_4)} \quad (3.4)$$

Sabendo que:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.5)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.6)$$

$$n_0 = -9fk^m k^f \quad (3.7)$$

$$n_1 = -3(5g^f k^m + 7fg^f k^m + 7g^f k^f + 15fk^f k^m + 15k^f k^m) \quad (3.8)$$

$$n_2 = -(35(g^f)^2 + 37f(g^f)^2 + 45fg^f k^m + 105g^f k^f + 75g^f k^m + 51fg^f k^f - 9fk^f k^m + 90k^f k^m) \quad (3.9)$$

$$n_3 = (-145(g^f)^2 - 39f(g^f)^2 - 120fg^f k^f - 45k^f k^m - 105g^f k^m + 45fk^m k^f + 57fg^f k^f + 21fg^f k^m) \quad (3.10)$$

$$n_4 = -45k^m - 15k^f - 125g^f + 61fg^f + 15fk^f + 45fk^m \quad (3.11)$$

$$n_5 = 15(f-1) \quad (3.12)$$

$$d_0 = -3k^m(-5g^f + 5fg^f + 12fk^f - 15k^f) \quad (3.13)$$

$$d_1 = -(-35(g^f)^2) + 35f(g^f)^2 - 105g^f k^f + 84fg^f k^f + 39fg^f k^m - 75g^f k^m - 75g^f k^m - 90k^f k^m \quad (3.14)$$

$$d_2 = 145(g^f)^2 + 36fk^f k^f + 36fk^m k^f + 15fg^f k^m - 73f(g^f)^2 + 45k^f k^m + 105g^f k^m + 120g^f k^f \quad (3.15)$$

$$d_3 = 45k^m + 125g^f + 15k^f + 48fk^f + 59fg^f + 39fk^m \quad (3.16)$$

$$d_4 = 15 + 49f \quad (3.17)$$

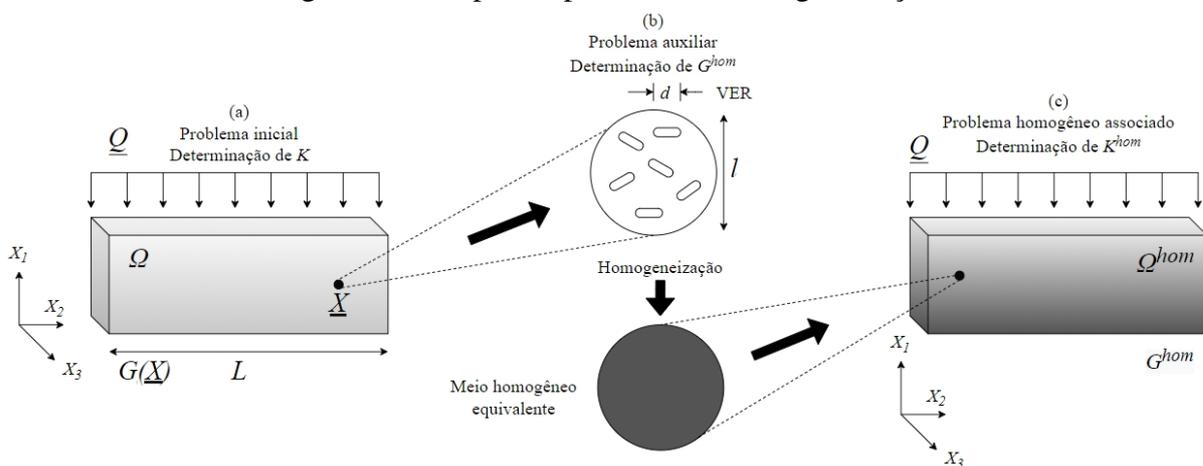
3.3 CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA MACROSCÓPICO E HOMOGENEIZAÇÃO EM ANÁLISE LIMITE

Conhecer a capacidade de resistência de um material é fundamental para sua utilização em dimensionamentos e verificações de estruturas. Um critério de resistência impõe, por natureza, limitações no nível de tensões nos pontos do material que constituem um dado elemento, se caracterizando como um critério importante a ser conhecido para a completa modelagem computacional de estruturas.

A homogeneização do CRFA, considerado um meio contínuo heterogêneo, está baseada na distinção entre duas escalas características do meio: a microscópica, que permite a descrição dos constituintes, e a macroscópica que abrange a definição da estrutura.

A avaliação das propriedades mecânicas através da homogeneização se dá em três etapas. A primeira é feita descrição da microestrutura analisada. Para o CRFA, consideram-se as fibras dispostas aleatoriamente na matriz de concreto, sendo ambos considerados homogêneos. A segunda etapa é a definição do volume elementar representativo do meio heterogêneo, esta etapa tem como objetivo a definição da resistência do material. E por fim, com as propriedades mecânicas do meio homogêneo definidas, é possível então avaliar as propriedades mecânicas globais da estrutura. Processo resumido na Figura 17.

Figura 17 – Etapas do processo de homogeneização.



Fonte – Adaptado de Dutra (2012).

3.4 PRINCÍPIO GERAL DO MÉTODO

Como ilustrado na Figura 17, sendo Ω uma estrutura composta por um material heterogêneo (periódico ou aleatório), submetida a um carregamento caracterizado por \underline{Q} formado por n parâmetros. O objetivo da análise limite para este caso é a determinação da carga máxima suportada pela estrutura a fim de determinar a sua resistência.

$G(\underline{X})$ denota o domínio convexo que define o critério de resistência da estruturas. Um carregamento é considerado suportável pela estrutura se for estaticamente admissível (*E.A.*) e respeitar o critério de resistência de todo o sistema. O conjunto de carregamentos suportáveis pela estrutura Ω é denominado K e expresso por:

$$K = \{\underline{Q} \mid \exists \underline{\sigma} \text{ E.A. e } \underline{\sigma}(\underline{X}) \in G(\underline{X}), \forall \underline{X} \in \Omega\} \quad (3.18)$$

Devido a alta heterogeneidade da estrutura, a avaliação direta de K torna-se muito difícil, sendo assim, o emprego de um processo de homogeneização consiste em substituir a estrutura heterogênea inicial Ω por uma homogênea associada Ω^{hom} , com mesma geometria da estrutura inicial e submetida a mesma solicitação \underline{Q} . Com isso, é determinado o domínio de resistência G^{hom} idêntico em qualquer ponto da estrutura. O problema inicial então é transferido para o meio homogêneo, onde a deve-se determinar o domínio de carregamento suportáveis pela estrutura Ω^{hom} , o K^{hom} , onde:

$$K^{hom} = \{\underline{Q} \mid \exists \underline{\sigma} \text{ E.A. e } \underline{\sigma}(\underline{X}) \in G^{hom}(\underline{X}), \forall \underline{X} \in \Omega^{hom}\} \quad (3.19)$$

Para determinar K^{hom} , é necessário encontrar o domínio de resistência macroscópico G^{hom} . A determinação do domínio de resistência depende da definição do VER, da descrição das suas características geométricas e mecânicas e da distribuição espacial de suas fases. A determinação também consiste na resolução de um problema auxiliar em análise limite definido sobre o VER (DE BUHAN (1983) e Suquet et al. (1983)).

3.4.1 Domínio de Resistência para o CRFA

Dutra (2012) define o modelo para a caracterização do domínio de resistência do CRFA através do método da homogeneização de acordo com as suposições que todas as fibras podem ser representadas como fibras longas distribuídas perpendiculares entre si em três eixos definidos no espaço, que a resistência total do compósito é definida pela parcela resistente da matriz de concreto em conjunto da parcela resistente das fibras longas perpendiculares entre si, considerando o critério de resistência como o de Drucker-Prager para a matriz de concreto. Essas suposições e formulações são apresentadas a seguir.

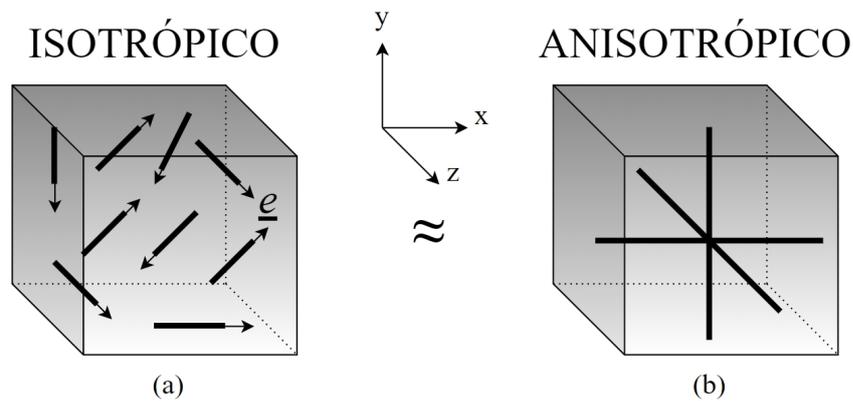
3.4.1.1 Modelo Aproximado para o CRFA

Sabe-se que as fibras estão aleatoriamente distribuídas na matriz no CRFA, logo, cada orientação constitui uma família de heterogeneidade. O compósito então caracteriza-se como um meio aleatório composto por uma matriz cimentícia e pelas famílias de fibras e suas orientações. Fibras

estas que são definidas por suas orientações (vetor \underline{e}_f) e pelo seu razão de aspecto, relação entre comprimento e diâmetro da fibra (l_f/d_f). A situação é ilustrada na Figura 18 (a).

Para a construção do domínio macroscópico do CRFA (G^{hom}) é necessária a definição do domínio de seus constituintes (ou seja, da matriz de concreto, das fibras e da interface fibra-matriz), da sua configuração geométrica e da fração volumétrica das fibras. Desta forma, o modelo apresenta algumas simplificações em seu desenvolvimento. Primeiro, foi admitido que a resistência macroscópica do CRFA com fibras curtas aleatoriamente distribuídas (Figura 18 (a)) seria equivalente a um meio fictício com fibras longas (Figura 18 (b)). A segunda suposição seria que essas fibras longas no meio fictício estariam dispostas em três direções e perpendiculares entre si. Por fim, quanto às propriedades de resistência da interface fibra-matriz, foi considerada aderência perfeita entre os constituintes.

Figura 18 – Meio composto por fibras curtas aleatoriamente distribuídas e meio fictício associado.



Fonte – Adaptado de Dutra (2012).

3.4.1.2 Determinação do Critério de Resistência Macroscópico para o CRFA

A suposição de um VER para o CRFA cujas fibras estão dispostas em três direções e perpendiculares entre si é definido como um material periódico. Sendo assim, é possível definir uma célula base A , estrutura que se repete ao longo do compósito e contém as informações necessárias para a caracterização do compósito na ordem macroscópica. A resolução do problema de análise limite para a célula base é capaz de determinar o domínio de resistência macroscópico, G^{hom} , de acordo com Suquet et al. (1983), da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \text{ e } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ contínuo} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ antiperiódico} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \forall \underline{\underline{x}} \in A \end{cases} \quad (3.20)$$

Têm-se que $\underline{\underline{\Sigma}}$ é a tensão macroscópica, $\underline{\underline{\sigma}}$ é o campo de tensão microscópica em A . $G(\underline{x})$ é o domínio de resistência do material no ponto \underline{x} de A , ou seja, o conjunto de tensores de tensão $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$. Para a matriz, tem-se que $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^m \forall \underline{x} \in A^m$ e para as fibras que $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^f \forall \underline{x} \in A^f$.

Para o caso apresentado, no qual as fibras estão dispostas segundo os eixos de referência $Oxyz$, a abordagem da Análise Limite é adotada satisfazendo a Equação 3.20 sendo então determinado da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m & \forall \underline{x} \in A^m; \\ \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f e_f \otimes e_f & \forall \underline{x} \in A^f, f = x, y, z \end{cases} \quad (3.21)$$

com

$$\underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m \quad e \quad \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma^f e_f \otimes e_f \quad \forall \underline{x} \in G^f \quad (3.22)$$

Sabe-se então que G_s^{hom} define o domínio de resistência estático do CRFA. Para as condições particulares definidas, onde $f \ll 1$ e $G^f \simeq \tilde{G}_{f \rightarrow 0} / f \gg G^m$, onde \tilde{G}_f é um domínio fixo convexo e limitado, pode-se afirmar, de acordo com DE BUHAN e Taliercio (1991), que $G^{hom} \simeq G_s^{hom}$. Sendo assim:

$$G^{hom} \simeq G_s^{hom} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f e_f \otimes e_f \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m, \sigma_f \in [\tilde{\sigma}_f^-, \tilde{\sigma}_f^+] \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

O domínio de resistência G^{hom} pode também ser representado pela função critério de resistência F^{hom} , ou seja, os estados de tensão macroscópicas que satisfazem o critério do domínio G^{hom} (Equação 3.23) definido pelo critério de resistência onde $F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0$, com σ_f^- e σ_f^+ representando, respectivamente, a resistência à tração e à compressão uniaxial das fibras, desta forma:

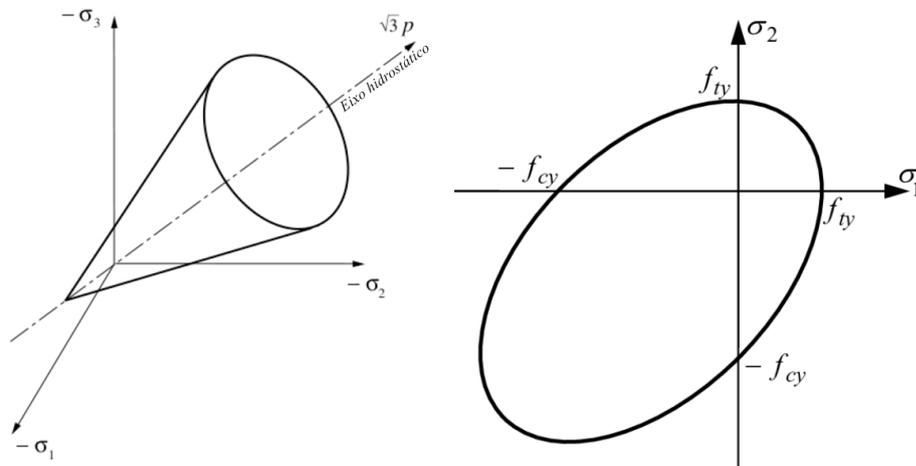
$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f e_f \otimes e_f \\ F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0, \sigma_f \in I_f \end{array} \right. \quad (3.24)$$

com $I_f = [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+]$.

3.4.1.3 Matriz Caracterizada pelo Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager foi desenvolvido inicialmente para o estudo do comportamento de solos. Entretanto, tem sido aplicado também para o estudo de rochas, polímeros, espumas, concreto e outros materiais cuja resistência é dependente da pressão hidrostática. No espaço tridimensional de tensões principais, a superfície de Drucker-Prager apresenta a forma de um cone regular com vértice sobre o eixo hidrostático ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$). No espaço bidimensional de tensões ele apresenta o domínio de forma elipsoidal, como ilustrado na Figura 19. A lei que rege o critério é definida pela Equação 3.25.

Figura 19 – Superfície de Drucker-Prager no plano espacial e biaxial de tensões.



Fonte – Adaptado de Dutra (2012).

$$F^m(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^m\| + \alpha_m (tr(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0 \quad (3.25)$$

Onde $\|\underline{\underline{s}}\| = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$ é a norma do tensor de segunda ordem $\underline{\underline{s}}$ que representa a parte desviadora de $\underline{\underline{\sigma}}$, ou seja, $\underline{\underline{s}} = dev(\underline{\underline{\sigma}})$. A constante σ_m representa o limite elástico do material sob estado de tração uniaxial e α_m o parâmetro de forma da superfície que varia de 0 a 1 o qual considera a dependência do critério em relação à pressão hidrostática.

Desta forma, a expressão do critério de resistência para o CRFA de acordo com o critério de Drucker-Prager, e o pressuposto definido por DE BUHAN e Taliercio (1991), é definida por:

$$F^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \min\{F^m(\underline{\underline{\Sigma}} - \sigma_x \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sigma_z \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)\} \quad (3.26)$$

$$\sigma_f(\underline{\Sigma}) = \begin{cases} f_f \sigma_f^- & \text{se } \sigma_f \leq f_f \sigma_f^- \\ \sigma_f \text{ com } \sigma_f = f_f \sigma_f^+ & \text{se } \sigma_f \in I_f \\ f_f \sigma_f^+ & \text{se } \sigma_f \geq f_f \sigma_f^+ \end{cases} \quad (3.27)$$

Com $f = x, y, z$, $f_f \sigma_f^+ = -f_f \sigma_f^- = (f/3) \sigma_f^+$, sendo f a fração volumétrica das fibras no CFRA e σ_f^+ a resistência à tração uniaxial das fibras.

A saída para o problema então se dá através da resolução da Equação 3.26, na qual serão variadas as tensões nas fibras, de acordo com o que é proposto pela Equação 3.27, e serão determinados os valores de $\underline{\Sigma}$ que minimizam a função F^{hom} .

De acordo com Dutra (2012), para uma primeira análise na qual as tensões são colineares com as fibra, as resistências à compressão uniaxial e biaxial do CRFA, respectivamente, f_c^{CRFA} e f_{cb}^{CRFA} , podem ser estimadas de acordo com a Equação 3.28 e a Equação 3.29. Onde f representa a fração volumétrica das fibras na matriz e σ_f^+ a resistência à tração uniaxial das fibras.

$$f_c^{CRFA} = \frac{(2 + \alpha_m)(f/3)\sigma_f^+ + (1 + \alpha_m)\sigma_m}{(\alpha_m - 1)} \quad (3.28)$$

$$f_{cb}^{CRFA} = \frac{(2 - \alpha_m)(f/3)\sigma_f^+ + (1 + \alpha_m)\sigma_m}{(2\alpha_m - 1)} \quad (3.29)$$

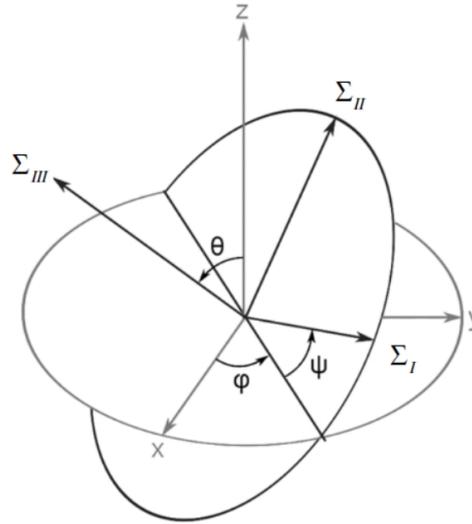
Ainda segundo Dutra (2012), para frações volumétricas $f \leq 5\%$ o razão de aspecto das fibras tem uma pequena influência na determinação das resistências à compressão e tração uniaxiais do compósito, Kolle (2006) também indica a mesma tendência em seu estudo. Desta forma, para o modelo apresentado, os estudos se limitarão a porcentagens de fibras menores que o limite proposto. Assim, serão fatores determinantes a fração volumétrica das fibras e características mecânicas das mesmas, além das características mecânicas referentes a matriz cimentícia em sua composição simples, sem a adição de fibras, ou seja, quando $f = 0$.

3.4.1.4 Direções das Tensões Principais e das Fibras não colineares

Foram avaliadas as resistências biaxial e uniaxial do compósito formado por matriz e fibras longas dispostas perpendicularmente em três direções, quando as direções das tensões principais não coincidem com aquelas das fibras. Consideram-se então os estados de tensão definidos pelas tensões principais Σ_I e Σ_{II} no plano. As direções das tensões são definidas através dos ângulos de Euler ψ , φ e θ em relação às fibras. Os ângulos ψ e θ definem a orientação do vetor normal ao plano no qual as tensões agem, e o φ a orientação das tensões principais nesse plano, Figura 20.

Para a suposição na qual as tensões são colineares com as fibras, esses ângulos são considerados nulos.

Figura 20 – Ângulos de Euler e tensões principais, com direções das fibras representadas pelo sistema fixo $Oxyz$.



Vale ressaltar que o modelo considera o triedro formado pelas fibras como fixo, e as relações entre as tensões principais e o sistema fixado são determinadas pelos ângulos ψ , ϕ e θ . Desta forma, é possível analisar as combinações de direções de tensões capazes de minimizar a função critério de resistência F^{hom} variando a tensão σ_f aplicada às fibras. Alternativamente, uma melhor forma de caracterizar o CRFA é utilizando esta análise de direções de tensões a partir da teoria de homogeneização em análise limite. Determinou-se o domínio $\tilde{G}^{hom}(\psi, \phi, \theta)$ de um meio reforçado com fibras em três direções perpendiculares, o qual depende da orientação das fibras em relação às tensões macroscópicas. A média de todos os possíveis resultados de $\tilde{G}^{hom}(\psi, \phi, \theta)$, considerando todas as possíveis orientações, permitiria obter um domínio de resistência isotrópico para a caracterização da resistência do CRFA, ou seja:

$$G^{hom} = \langle \tilde{G}^{hom}(\psi, \phi, \theta) \rangle \quad (3.30)$$

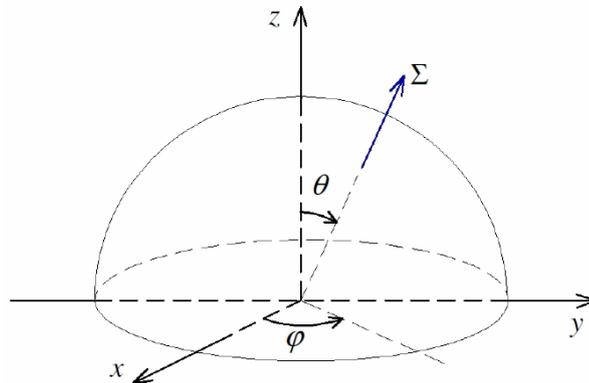
3.4.1.4.1 Resistência à Compressão Uniaxial

A obtenção da equação que define a resistência à compressão uniaxial homogeneizada do CRFA supõe um estado de tensão uniaxial Σ com orientação arbitrária, como mostrado na Figura 21. A orientação da tensão Σ é definida pelo vetor unitário $\underline{g} = [\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta]^T$ com componentes g_f , $f = x, y, z$. A função tem como objetivo encontrar o valor mínimo de Σ em conformidade com os parâmetros de resistência do material e obedecendo o critério de

Drucker-Prager definido pelo domínio G^{hom} , ou seja:

$$G^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f e_f \otimes e_f, \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^m\| + \alpha_m (tr(\underline{\underline{\sigma}}^m) - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0, \sigma_f \in [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+], f = x, y, z \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

Figura 21 – Orientação da tensão Σ uniaxial.



Fonte – Dutra (2012).

O valor da resistência macroscópica é dado por:

$$\Sigma^-(\underline{g}) = \min \left\{ \Sigma \mid \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{g} \otimes \underline{g}; \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\Sigma}} - \sum_{f=1}^3 \sigma_f e_f \otimes e_f; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}^m\| + \alpha_m (tr(\underline{\underline{\sigma}}^m) - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0; |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, f = x, y, z \right\} \quad (3.32)$$

$$\Sigma^-(\underline{g}) = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{f=1}^3 \sigma_f (3g_f^2 - 1 - 2\alpha_m^2) - 2\alpha_m(\alpha_m + 1)\sigma_m - \sqrt{\beta}}{2(1 - \alpha_m^2)}, \\ |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, f = x, y, z \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

$$\beta = \left(- \sum_{f=1}^3 \sigma_f (3g_f^2 - 1 - 2\alpha_m^2) + 2\alpha_m(\alpha_m + 1)\sigma_m \right)^2 \\ - 4(1 - \alpha_m^2) \left(- \left((\sigma_m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f) \alpha_m + \sigma_m \right)^2 + \sum_{f=1}^3 \sigma_f^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right) \quad (3.34)$$

A estimativa da resistência à compressão uniaxial numa direção \underline{g} pode ser definida através da expressão Equação 3.35, que ao variar os valores de σ_f , com $f = x, y, z$, com as diferentes

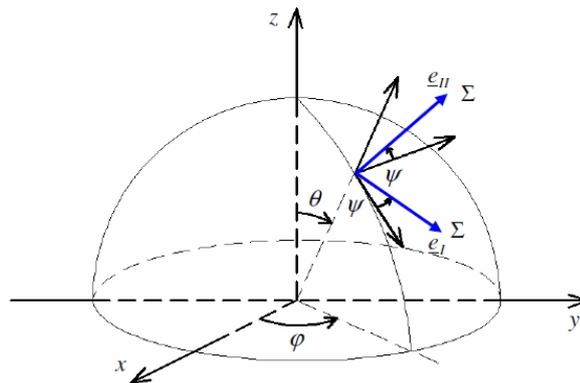
possibilidades de orientação da tensão, fornece os valores de tensão macroscópica que atendem ao critério. Desta forma, é possível resgatar o menor valor encontrado e tomá-lo como a resistência à compressão uniaxial do CRFA.

$$f_c = \langle \Sigma^-(\underline{g}) \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Sigma^-(\varphi, \theta) d\varphi d\theta \quad (3.35)$$

3.4.1.4.2 Resistência à Compressão Biaxial

Assim como foi suposto para a compressão uniaxial, a compressão biaxial será encontrada a partir da variação dos parâmetros de σ_f que minimizem a função critério de resistência em conformidade com as propriedades de resistência do CRFA definidas pelo domínio G^{hom} . Com uma tensão biaxial Σ , onde $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \Sigma \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}$, de orientação arbitrária. A orientação de acordo com os ângulos de Euler é definida pela matriz de rotação \mathbf{A} com componentes a_{ij} , com \underline{e}_I e \underline{e}_{II} determinados como em Equação 3.37.

Figura 22 – Orientação da tensão Σ biaxial.



Fonte – Dutra (2012).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi & \cos\theta \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi & -\sin\theta \cos\psi \\ -\cos\theta \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi & -\cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \sin\theta \sin\psi \\ \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\underline{e}_I = a_{11}\underline{e}_x + a_{12}\underline{e}_y + a_{13}\underline{e}_z$$

$$\underline{e}_{II} = a_{21}\underline{e}_x + a_{22}\underline{e}_y + a_{23}\underline{e}_z \quad (3.37)$$

$$\underline{e}_{III} = a_{31}\underline{e}_x + a_{32}\underline{e}_y + a_{33}\underline{e}_z$$

$$\Sigma_b^-(a_{ij}) = \min \left\{ \Sigma \mid \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \Sigma \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}; \underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{\Sigma}} - \sum_{f=1}^3 \sigma_f \underline{e}_f \otimes \underline{e}_f; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{\sigma}}^m\| + \alpha_m (tr(\underline{\underline{\sigma}}^m) - \sigma_m) - \sigma_m \leq 0; |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, f = x, y, z \right\} \quad (3.38)$$

$$\Sigma_b^-(a_{ij}) = \min \left\{ \frac{\sum_{f=1}^3 \sigma_f (2(1 + 2\alpha_m^2 - 3(a_{1f}^2 - a_{2f}^2))) - 4\alpha_m(\alpha_m + 1)\sigma_m - \sqrt{\beta_b}}{2(1 - 4\alpha_m^2)}, \right. \quad (3.39)$$

$$\left. |\sigma_f| \leq f_f \sigma_f^+, f = x, y, z \right\}$$

$$\beta_b = \left(- \sum_{f=1}^3 \sigma_f (2(1 + 2\alpha_m^2 - 3(a_{1f}^2 - a_{2f}^2))) + 4\alpha_m(\alpha_m + 1)\sigma_m \right)^2 \quad (3.40)$$

$$- 4(1 - 4\alpha_m^2) \left(- \left((\sigma_m + \sum_{f=1}^3 \sigma_f) \alpha_m + \sigma_m \right)^2 + \sum_{f=1}^3 \sigma_f^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right)$$

A estimativa da resistência à compressão biaxial, assim como a compressão uniaxial, em uma direção determinada pelos vetores \underline{e}_I e \underline{e}_{II} pode ser definida através da expressão Equação 3.41, que ao variar os valores de σ_f , com $f = x, y, z$, com as diferentes possibilidades de orientação da tensão, fornece os valores de tensão macroscópica que atendem ao critério. Desta forma, é possível resgatar o menor valor encontrado e tomá-lo como a resistência à compressão biaxial do CRFA.

$$f_{cb} = \langle \Sigma_b^-(a_{ij}) \rangle = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Sigma_b^-(\varphi, \theta, \psi) d\varphi d\theta d\psi \quad (3.41)$$

3.4.2 Condição de *Cut-off* em Tração na Interface Fibra-Matriz

Para a superfície de plastificação determinada pelo critério de Drucker-Prager no estado plano, têm-se uma elipse que conta com uma resistência elevada para a tração do CRFA, como mostrado na Figura 19. Então, com a finalidade de melhor caracterizar o CRFA, Dutra (2012) apresentou um critério de *cut-off* em tração, tensões positivas, considerando as propriedades mecânicas relacionadas às fibras e a resistência da interface com a matriz cimentícia na formulação do domínio de resistência.

3.4.2.1 *Cut-off* em Tração

O critério de ruptura de Drucker-Prager é uma simples adaptação do critério de Von Mises para os materiais que possuem resistências diferentes sob solicitações de tração e de compressão e que são dependentes da tensão hidrostática, como o concreto. Para tanto se introduz no critério de Von Mises um termo adicional, que reflete a influência da tensão hidrostática na ruptura do material. Este critério pode ser empregado para a descrição do comportamento do concreto, entretanto, ele não permite a caracterização da sua resistência à tração e à compressão com os mesmos parâmetros. A sua associação com uma condição de *cut-off* em tração permite caracterizar de forma mais adequada o comportamento do concreto sob solicitações de tração.

Assim como aplicado à compressão, a determinação do domínio de resistência macroscópico é necessária a resolução do problema de análise limite definido sobre o VER, onde:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \text{ (e } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ contínuo)} \\ \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ antiperiódico} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \forall \underline{\underline{x}} \in A \end{cases} \quad (3.42)$$

No caso da matriz caracterizada pelo critério de Drucker-Prager associado a uma condição de *cut-off* em tração do tipo Rankine (Figura 23), o critério de resistência da matriz pode ser expresso como:

$$F^m(\underline{\underline{\sigma}}) = \max(F^{DP}(\underline{\underline{\sigma}}), \sigma_I - f_t, \sigma_{II} - f_t, \sigma_{III} - f_t) \leq 0 \quad (3.43)$$

Onde $F^{DP}(\underline{\underline{\sigma}})$ representa o critério de Drucker-Prager, como apresentado na Equação 3.25, σ_I , σ_{II} , σ_{III} se referem às tensões principais e f_t a resistência à tração uniaxial da matriz.

Para a condição de *cut-off*, limitam-se as tensões macroscópicas aos seguintes intervalos:

$$\begin{aligned} \Sigma_I &\leq f_t + f_x \sigma_x^+ \\ \Sigma_{II} &\leq f_t + f_y \sigma_y^+ \\ \Sigma_{III} &\leq f_t + f_z \sigma_z^+ \end{aligned} \quad (3.44)$$

quando as direções das tensões principais são colineares às direções das fibras ($\Sigma_I = \Sigma_{xx}$, $\Sigma_{II} = \Sigma_{yy}$, $\Sigma_{III} = \Sigma_{zz}$), com $f_x \sigma_x^+ = f_y \sigma_y^+ = f_z \sigma_z^+$.

Ou seja, o modelo fornece a seguinte expressão para a estimativa de resistência à tração uniaxial do CRFA f_t^{CRFA} :

$$f_t^{CRFA} = f_t + \frac{f \sigma_f^+}{3} \quad (3.45)$$

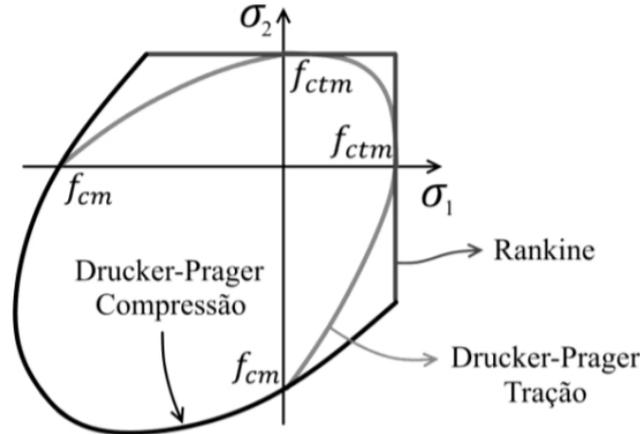
onde f_t e σ_f^+ são as resistências à tração da matriz cimentícia e das fibras de aço, respectivamente, e f a porcentagem de fibras no compósito.

Resultados apresentados por Dutra (2012), mostram que as estimativas obtidas a partir da Equação 3.45 geram valores superiores as reais resistências à tração uniaxial do CRFA. Com isso, foi apresentada uma formulação simplificada, que utiliza os próprios resultados experimentais para melhor adaptação e coerência da superfície de falha proposta no trabalho.

3.4.2.2 Interface Fibra-Matriz

Observações experimentais levam à conclusão de que o comportamento do CRFA, como o de outros materiais compósitos, pode, muitas vezes, ser influenciado pela falta de aderência

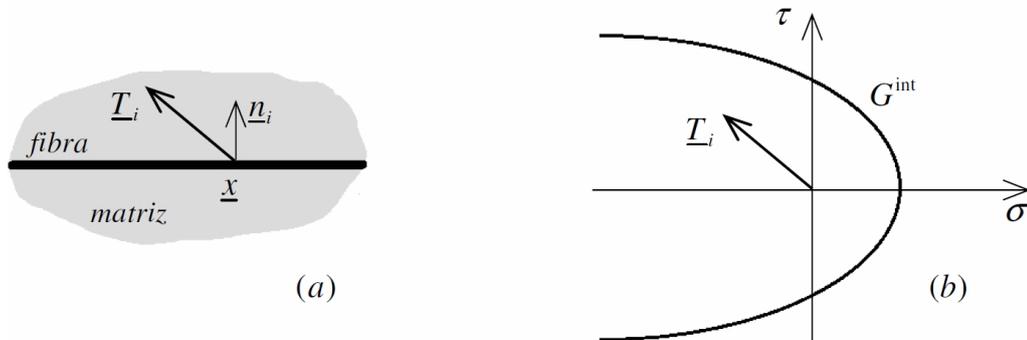
Figura 23 – Representação da superfície de plastificação de Drucker-Prager com *cut-off* em tração do tipo Rankine.



entre os constituintes (BENTUR; MINDESS, 2007). Uma abordagem mais apropriada deve, portanto, avaliar as propriedades limitadas de resistência da interface na formulação do domínio de resistência macroscópico G^{hom} .

Para o critério de resistência macroscópico considerando a interação entre a interface de fibras e matriz, considera-se o vetor de tensão $\underline{T}(\underline{x})_i = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i$ que age sobre um ponto \underline{x} da interface i entre a fibra e matriz, como detalhado na Figura 24.

Figura 24 – Interface matriz/fibra e sua capacidade de resistência.



Fonte – Dutra (2012).

A condição de resistência da interface pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underline{T}_i \in g^{int} \Leftrightarrow (\underline{T}_i) \leq 0 \quad (3.46)$$

Na qual g^{int} é uma função convexa do R^3 composta por vetores de tensão $\underline{T}_i(\sigma, \tau)$ admissíveis. Supõe-se também que a interface é homogênea e isótropa, portanto, g^{int} independe do ponto \underline{x} da interface.

Assim como o caso do *cut-off* em tração, para a determinação do domínio no qual a relação fibra/matriz é considerada também se reduz à resolução do problema de análise limite sobre o VER com as condições propostas pela Equação 3.42. Considerando-se também que as fibras

estão dispostas em três direções perpendiculares, o domínio de resistência G_{int}^{hom} pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_{int}^{hom} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^m + \sigma_x e_x \otimes e_x + \sigma_y e_y \otimes e_y + \sigma_z e_z \otimes e_z \\ \underline{\underline{\sigma}}^m \in G^m (\Leftrightarrow F^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \leq 0) \\ \sigma_{x,y,z} \in I_{x,y,z}, I_f = [f_f \sigma_f^-, f_f \sigma_f^+] \\ \underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n}_i \in G_{int}^{hom}, \text{ com } \underline{n}_i \perp \underline{e}_i, i = x, y, z \end{cases} \quad (3.47)$$

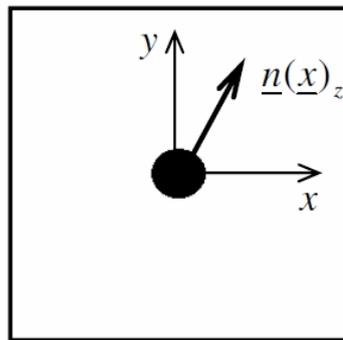
Onde G_{int}^{hom} designa o critério de resistência da interface entre as fibras e a matriz, \underline{n}_i é o vetor normal à interface da fibra disposta segundo a direção \underline{e}_i e $\underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n}_i$ refere-se à tensão na interface fibra/matriz com a fibra disposta na direção \underline{e}_i .

Desta maneira a obtenção do domínio de resistência para o CRFA resulta da determinação do domínio $G_{s,int}^{hom}$, que, por sua vez, é obtido a partir da intersecção entre os domínios G_s^{hom} e g_f^{int} , como mostrado na Figura 26. Para a determinação dos domínios g_f^{int} , toma-se a equação:

$$g^{int}(\underline{T}_i) = |\tau| + \sigma t g \phi^{int} - c^{int} \leq 0 \quad (3.48)$$

onde ϕ^{int} e c^{int} representam o ângulo de atrito e a coesão na região da interface, τ e σ representam as tensões de cisalhamento e normal referentes à \underline{T}_i . Sabendo então que as fibras estão dispostas perpendicularmente entre si e nos eixos fixados $Oxyz$, considera-se inicialmente a fibra posicionada na direção \underline{e}_z , com vetor normal $\underline{n}(x)_z$ (Figura 25).

Figura 25 – Vetor normal à interface para fibra disposta segundo \underline{e}_z .

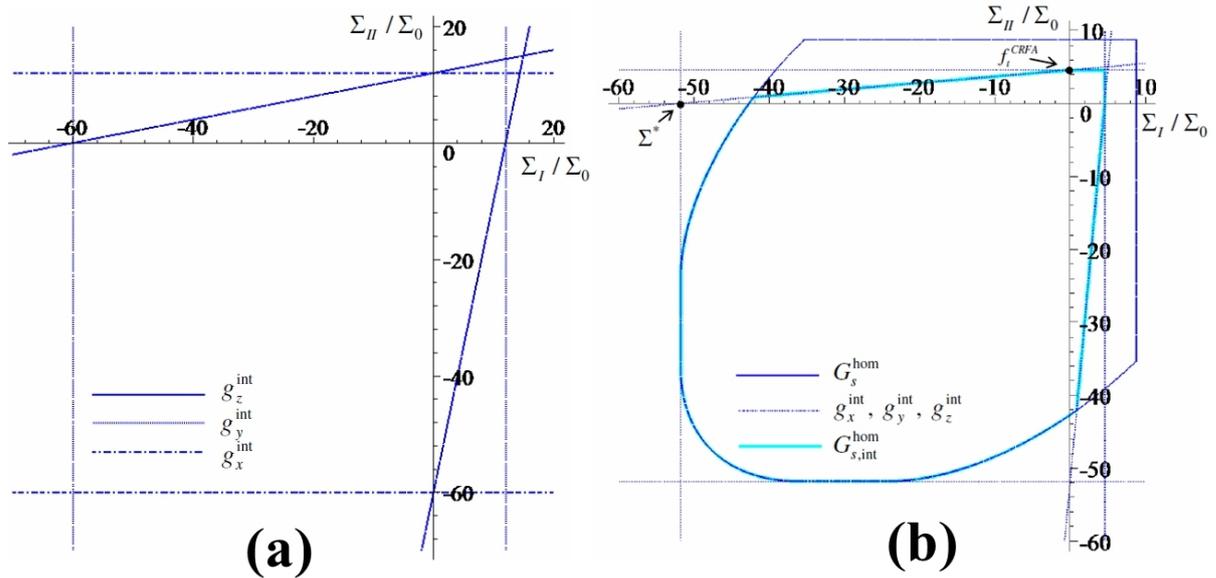


Fonte – Dutra (2012).

A partir de $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(x)_z$ é possível obter as tensões de cisalhamento e normais da interface. Considerando-se as direções das fibras e das tensões principais colineares, τ e σ são função das tensões principais Σ_I e Σ_{II} . Com a Equação 3.48 e as expressões para as tensões de cisalhamento e normais da interface, é possível obter as expressões para o domínio de resistência da interface. Para o caso em que a fibra está posicionada segundo a direção \underline{e}_z :

$$g_z^{int} = \pm \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \mp \phi^{int}\right) \left(\frac{\Sigma_I - \Sigma_{II}}{2}\right) + t g \phi^{int} \left(\Sigma_I \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\phi^{int}}{2}\right) + \Sigma_{II} \text{cos}^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\phi^{int}}{2}\right)\right) - c^{int} \leq 0 \quad (3.49)$$

Figura 26 – Domínio de resistência da interface matriz/fibra no plano biaxial de tensões (a) e superfície final (intersecção entre os domínios (b)).



Fonte – Dutra (2012).

Em função da simetria que ocorre em relação às três direções das fibras, a resolução dos demais casos (g_x^{int} e g_y^{int}) é obtida através de permutações de x , y e z e de I , II e III na Equação 3.49, gerando assim a envoltória do domínio como mostrado na Figura 26. Os parâmetros ϕ^{int} e c^{int} definem as propriedades da interface, como mostrado. Porém, em função da impossibilidade de se testar o material desta região no CRFA, Dutra (2012) apresentou relações para aproximação destes valores através das equações:

$$tg\phi^{int} = \frac{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}{2\sqrt{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}} \quad c^{int} = \frac{-(\Sigma^* f_t^{CRFA})}{2\sqrt{-(\Sigma^* + f_t^{CRFA})}} \quad (3.50)$$

onde:

$$\Sigma^* = \frac{(-f_1 + f_2)(f_7 + f_8)}{f_9} \rightarrow \begin{cases} f_1 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2)(-\sigma_x + \sigma_z) \\ f_2 = \sqrt{1 - \alpha_m^2}(3\alpha_m(-\sigma_x - \sigma_z) - 2\sigma_m(1 + \alpha_m^2)) \\ f_7 = 3\alpha_m\sqrt{1 - \alpha_m^2} \\ f_8 = \sqrt{3}(1 - \alpha_m^2) \\ f_9 = 3(1 - \alpha_m^2)(1 - 4\alpha_m^2) \\ \sigma_x = f_x\sigma_x^- \\ \sigma_z = f_z\sigma_z^+ \end{cases} \quad (3.51)$$

sendo α_m e σ_m os parâmetros de Drucker-Prager calculados para a matriz e σ^+ e σ^- as resistências à compressão e tração, respectivamente, das fibras aplicadas ao CRFA.

4 REPRESENTAÇÃO MECÂNICA E TÉCNICA DE SIMULAÇÃO

O Abaqus SE é uma ferramenta computacional que possibilita a execução de análises lineares e não-lineares, através de elementos finitos, para soluções de problemas de ordem estática, dinâmica, térmica em uma, duas ou três dimensões para diferentes tipos de materiais (HIBBIT; KARLSSON; SORENSEN, 2012).

O Abaqus SE disponibiliza três modelos para a simulação do comportamento não-linear do concreto. Dois deles são baseados na abordagem de fissuras distribuídas, os chamados *Concrete Smeared Cracking* (CSC) e *Brittle Cracking* (BC), o terceiro é desenvolvido a partir da teoria da plasticidade, o chamado *Concrete Damaged Plasticity* (CDP). O modelo BC tem sua aplicação limitada a análises dinâmicas, sendo inadequado para o escopo deste trabalho. O CSC e CDP, por sua vez, podem ser aplicados a análises estáticas, o que os tornam opções para o desenvolvimento da investigação proposta.

Uma detalhada análise realizada por Casper (2017), aplicada a estudos numéricos acerca do concreto reforçado com fibras de aço, mostra as conclusões a respeito das diferenças e aplicabilidades dos modelos CSC e CDP, cujo as principais características são resumidas a seguir:

- a) Os modelos apresentam as mesmas definições para o comportamento uniaxial a compressão, através da definição dos valores de tensão e deformação plástica sofridos pelo material;
- b) O CDP foi inicialmente pensado para análises sob carregamentos cíclicos através da definição de parâmetros de dano que afetam a rigidez do material após descarregamento; Porém, com a definição correta dos valores de tensão e deformação plástica do material, o CDP se encaixa perfeitamente em análises elastoplásticas não-cíclicas;
- c) Do ponto de vista mecânico, o CSC considera um amolecimento ortotrópico após a fissuração, enquanto o CDP assume um amolecimento isotrópico;
- d) Ao definir o trecho de amolecimento à tração uniaxial, o modelo CSC requer que os dados inseridos sejam normalizados, ao invés de seus módulos característicos. O que se configura como um ponto negativo do modelo, pois não fica claro como é diretamente definida a tensão de ruptura do material. Já o CDP possibilita a inserção dos valores de forma direta: tensões e deformações de fissuração.

O modelo proposto por Dutra (2012) aplica a teoria da homogeneização para a elaboração da formulação. Assim, o modelo que apresenta a melhor capacidade de representar o comportamento

do CRFA homogeneizado é o CDP devido a sua evolução de dano de forma isotrópica e uma melhor determinação do comportamento à tração do material pelo usuário, característica muito importante na definição do comportamento constitutivo do CRFA.

A seguir, então, tem-se o detalhamento do modelo utilizado neste trabalho, conhecido como *Concrete Damaged Plasticity* (CDP), evidenciando as suas características, formulações e parâmetros de controle.

4.1 *CONCRETE DAMAGED PLASTICITY* - MODELO DE DANO PLÁSTICO

Sabe-se que a Teoria da Plasticidade é uma ferramenta pensada para descrever o comportamento dúctil dos materiais, originalmente destinada a análise de materiais metálicos. O comportamento plástico de um material é caracterizado a partir do aparecimento de deformações irreversíveis quando um material antes solicitado sofre um descarregamento.

Como forma de melhor reproduzir o comportamento não-linear do concreto, Lubliner et al. (1989) propuseram um modelo que se baseava na Teoria da Plasticidade em conjunto com a Mecânica do Dano Contínuo, o *Concrete Damaged Plasticity*. Este modelo passou por algumas modificações definidas por Lee e Fenves (1998) para um refinamento de seus resultados.

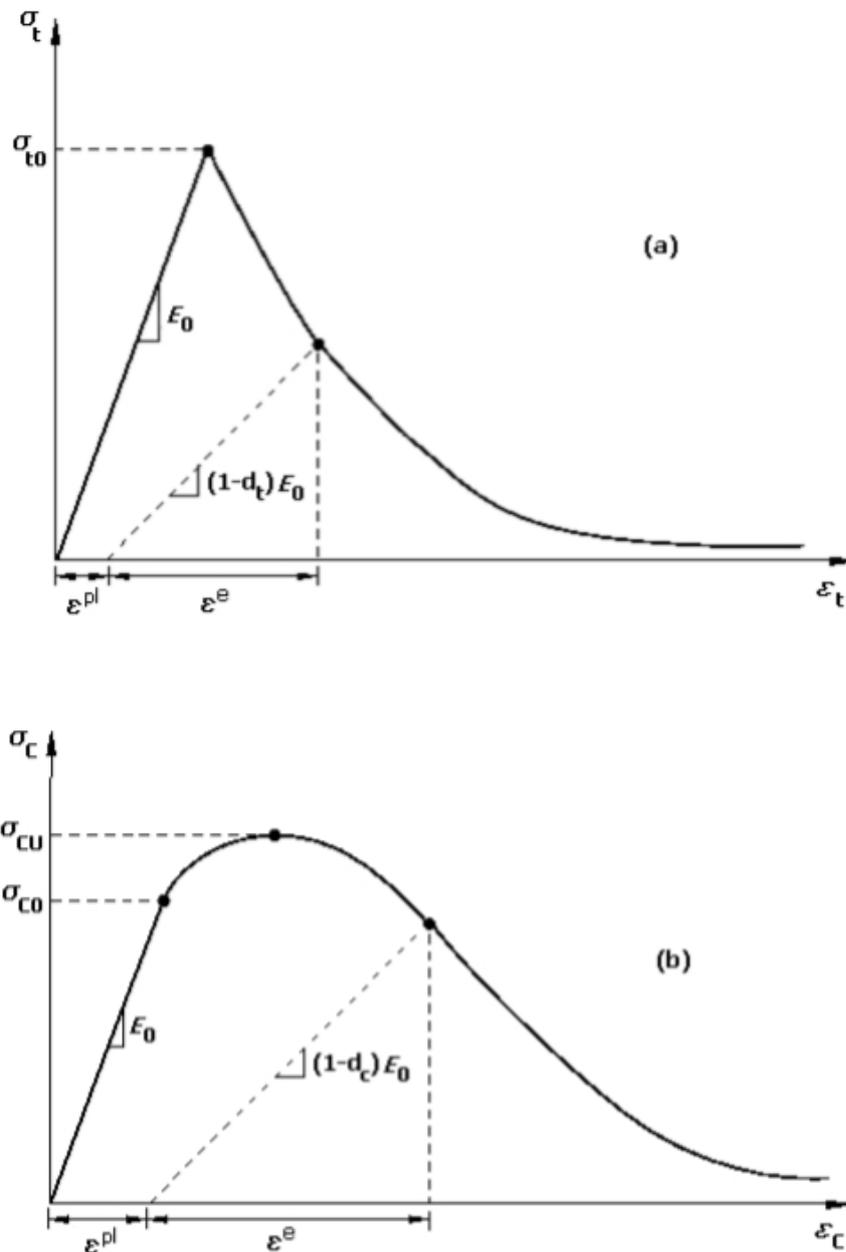
Neste modelo, o concreto é considerado um material coesivo com atrito, com uma eventual perda de rigidez (danificação do material), que pode ser relacionada a uma perda de coesão (LUBLINER et al., 1989). As duas principais formas de falha por dano neste modelo dão-se por fissuração devido a esforços de tração e esmagamento devido à compressão. A Figura 27 apresenta o funcionamento básico do modelo para as respostas uniaxiais à tração e compressão, respectivamente.

Como apresentado na Figura 27 (a), o concreto tem seu comportamento elástico linear até que a tensão atinja o valor da sua resistência máxima à tração ($\sigma_{t0} = f_{ct}$), coincidindo com sua tensão de limite elástico, este ponto corresponde ao surgimento de micro-fissuras no concreto. Após atingir sua resistência limite, a formação de micro-fissuras é representada pelo amolecimento da curva tensão-deformação do material.

Já na Figura 27 (b) apresenta-se o comportamento à compressão uniaxial, onde a resposta do material é linear até a sua tensão de plastificação ($\sigma_{c0} = 0,4f_{cm}$). O material então é solicitado até atingir sua resistência à compressão uniaxial ($\sigma_{cu} = f_{cm}$) e então, no regime plástico, passa por um amolecimento, com aumento da deformação e diminuição da tensão resistente.

O modelo considera que as deformações sofridas pelo material até o seu limite elástico não geram danos à rigidez, representando o módulo de elasticidade E_0 na sua forma integral. A

Figura 27 – Resposta do concreto para tensões uniaxiais de tração (a) e de compressão (b) no CDP.



Fonte – Adaptado de Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012).

deformação total sofrida pelo compósito pode ser decomposta em duas parcelas, a elástica (ε^e) e a plástica (ε^{pl}), como mostrado na Equação 4.1.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{pl}; \quad \varepsilon^e = \sigma/E \quad (4.1)$$

Atingindo a região plástica das curvas, a resposta de descarregamento é caracterizada pela redução da rigidez elástica do material, ou seja, a danificação dele. O modelo, então, determina o novo módulo de elasticidade do compósito analisado a partir da Equação 4.2.

$$E = (1 - d)E_0 \quad (4.2)$$

Desta forma, relacionando a tensão e a deformação do material para os casos de tensões uniaxiais tem-se que:

$$\sigma_t = (1 - d_t)E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl}) \quad (4.3)$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl}) \quad (4.4)$$

onde d_t e d_c são as variáveis de dano escalar na tração e compressão, respectivamente.

As relações apresentadas aplicam-se ao estado uniaxial de tensões no concreto, porém, sabe-se que na prática as estruturas estão dificilmente submetidas a estados de tensão tão simples. Assim, a Teoria da Plasticidade define três pontos principais para a determinação de um modelo constitutivo: o critério de plastificação, a regra de endurecimento e a regra de plastificação.

Para o concreto em sua forma íntegra, não-fissurado, admite-se um comportamento isotrópico. A configuração geral da superfície de ruptura, baseada em observações experimentais do material, pode ser expressa das seguintes formas:

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0, \quad f(\xi, \rho, \theta) = 0, \quad f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta) = 0 \quad (4.5)$$

No primeiro caso, a superfície de ruptura é expressa em função dos invariantes de tensão (I_1 , J_2 e J_3). No segundo, é representada, também no espaço de tensões de *Haigh-Westergaard* como função das coordenadas ξ , ρ e θ , e, no terceiro, como função das tensões normal e de corte octaédricas, onde, considerando-se as tensões principais $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, têm-se:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - \text{primeiro invariante do tensor de tensões;} \quad (4.6)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_m)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \quad (4.7)$$

segundo invariante do tensor de tensões desviadoras;

$$J_3 = (\sigma_{xx} - \sigma_m)[(\sigma_{yy} - \sigma_m)(\sigma_{zz} - \sigma_m) - \tau_{xz}^2] + \tau_{xy}[\tau_{xy}(\sigma_{zz} - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz}] + \quad (4.8)$$

$\tau_{xz}[\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_{yy} - \sigma_m)\tau_{xz}]$ - terceiro invariante do tensor de tensões desviadoras;

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} - \text{tensão normal média.} \quad (4.9)$$

Sendo então as tensões totais representadas por σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} , têm-se:

$$p = -\frac{I_1}{3}; \quad (4.10)$$

$$q = \sqrt{3J_2}; \quad (4.11)$$

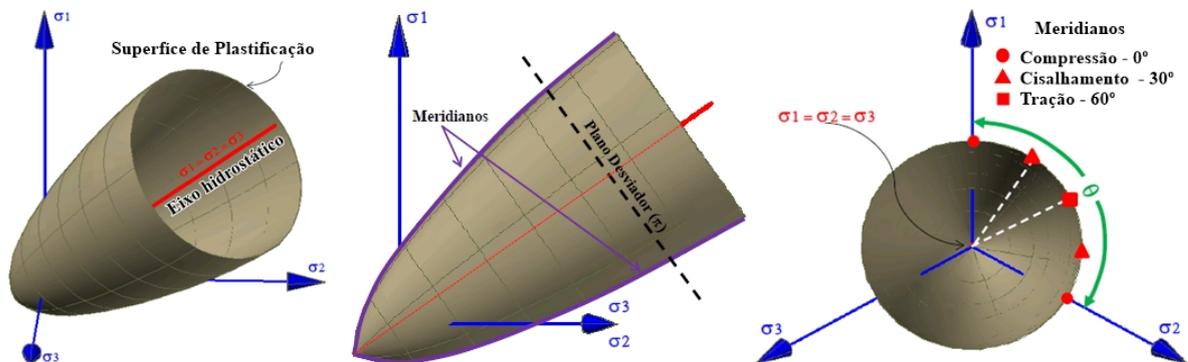
$$\cos\theta = \left[\frac{3(\sigma_1 - \sigma_m)}{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3\sigma_m^2}} \right]; \quad (4.12)$$

$$\sigma_{oct} = \sigma_m; \quad (4.13)$$

$$\tau_{oct} = \frac{\rho}{\sqrt{3}} \quad (4.14)$$

A superfície de ruptura pode também ser visualizada através de sua seção transversal (Figura 28) nos planos desviadores ou octaédricos, bem como seus meridianos de compressão, tração e cisalhamento. Os meridianos da superfície de ruptura são curvas de intersecção entre esta superfície e um plano desviador, que tem como normal o eixo hidrostático e com p constante (CHEN; SALEEB, 2013).

Figura 28 – Superfície de plastificação hipotética e seus detalhes.



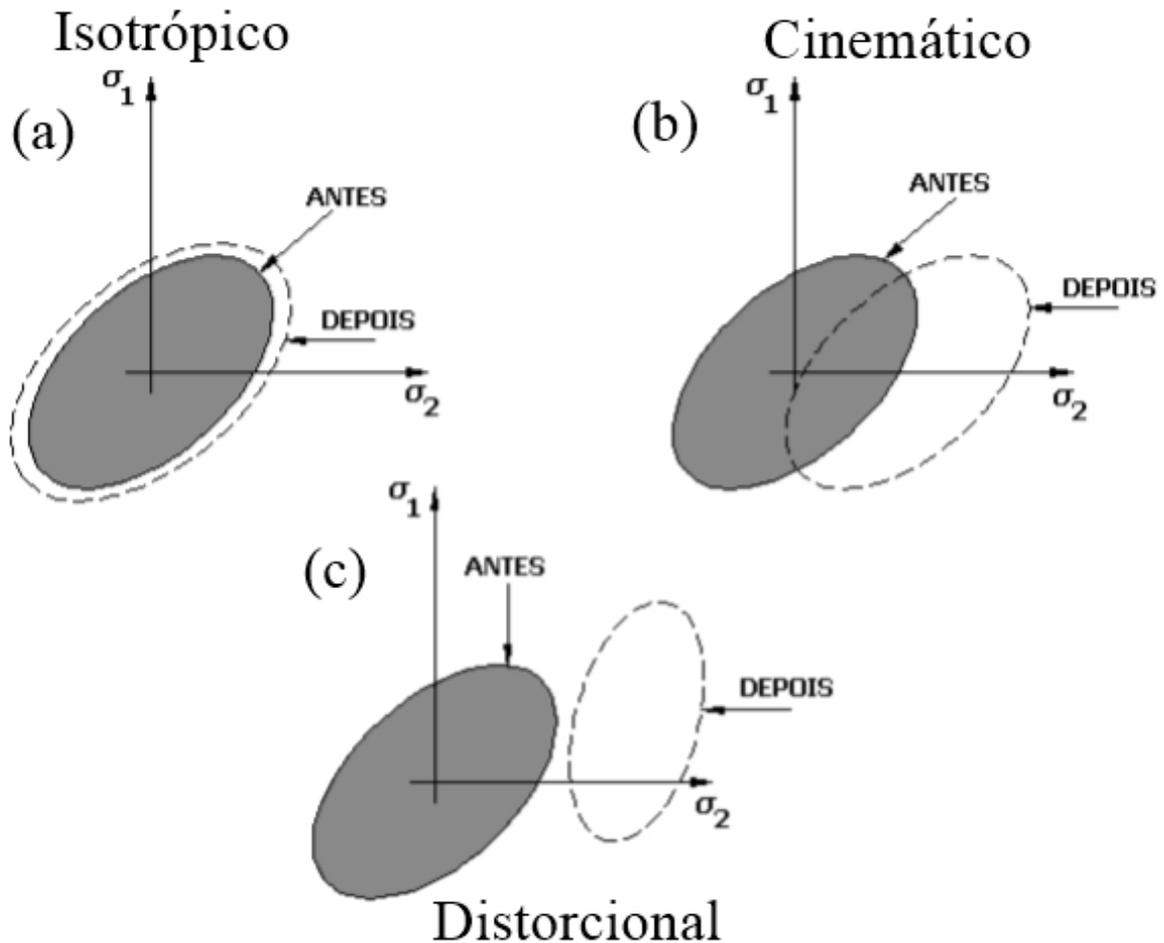
Fonte – Adaptado de Jamal (2013).

Sabe-se que o concreto ao ser carregado além do seu limite elástico por determinado carregamento não é capaz de recuperar a configuração inicial, ocorrendo deformações permanentes. Em relação a estas mudanças causadas na superfície de escoamento, ALVES FILHO (2012) apresenta os três modelos básicos para a determinação desta alteração, são eles:

- Modelo Isotrópico: A superfície de escoamento do material carregado, após sua deformação plástica, mantém o formato, sofrendo uma expansão uniforme da envoltória anterior no espaço (Figura 29 (a));
- Modelo Cinemático: A superfície de escoamento no estágio seguinte, provocada pelo incremento de deformações plásticas, mantém o formato, sofrendo uma translação no espaço de tensões como um corpo rígido (Figura 29 (b));

- c) Modelo de Endurecimento Distorcional: Admite a expansão, translação e rotação da superfície de escoamento, além da mudança de seu formato (Figura 29 (c)).

Figura 29 – Representação bidimensional de diferentes leis de escoamento.



Fonte – Adaptado de Sarturi (2014).

A determinação da evolução de deformações num determinado material é estabelecida pelos incrementos de deformações plásticas à medida que o material é carregado. A deformação total é obtida pelo somatório destes incrementos (ALVES FILHO, 2012). O CDP considera que o material tem um comportamento isotrópico, ou seja, a superfície de carregamento e plastificação tem o mesmo formato, com a distribuição isotrópica do dano.

A regra do fluxo plástico é responsável por determinar as evoluções das deformações com as tensões sofridas. Esta regra pode ser determinada considerando que o incremento de deformação plástica é obtido através da derivação de uma função potencial. Esta função potencial (G) é uma função escalar, que depende do tensor de tensões, cujas deformações plásticas parciais são, de forma geral, determinadas por:

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = d\gamma \cdot \frac{dG}{d\sigma_{ij}} \quad (4.15)$$

onde $d\gamma$ é uma constante de proporcionalidade não negativa, denominada multiplicador plástico.

A regra de escoamento é chamada associativa se o potencial plástico coincidir com a função da plastificação, ou seja, $G = F$, caso contrário é denominada de não-associativa. A regra associativa é utilizada para materiais mais dúcteis, como aço, e a não-associativa mais adequada para materiais granulares, como o concreto.

4.1.1 Critério de Plastificação

O modelo proposto por Lubliner et al. (1989) define uma função de plastificação ($F(\bar{\sigma})$) de forma homogênea até primeira ordem e que leve em consideração a coesão do material, semelhante aos modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. Desconsiderando as regiões de alta-pressão, os invariantes de tensão (I_1 e J_2) podem ser ajustados na equação da superfície de plastificação da seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}) = c \quad (4.16)$$

$$F(\bar{\sigma}) = \frac{1}{1-\alpha} (\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma_{max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{max} \rangle) \quad (4.17)$$

Onde c representa um escalar que determinará o ponto na superfície de falha, α , β e γ são constantes adimensionais ligadas ao material e σ_{max} é o módulo máximo das tensões principais, sendo esta a forma da superfície de falha desenvolvida por Lubliner et al. (1989).

A constante α pode ser obtida através dos valores resultantes das resistências à compressão uniaxial e biaxial do material (σ_{c0} e σ_{cb0} , respectivamente), podendo dentro do intervalo $0 \leq \alpha \leq 0,5$ (Equação 4.18). Conhecido o valor de α , β é determinado com o valor da resistência à tração do material, o σ_{t0} (Equação 4.19).

$$\alpha = \frac{\sigma_{cb0} - \sigma_{c0}}{2\sigma_{cb0} - \sigma_{c0}} \quad (4.18)$$

$$\beta = (\alpha - 1) \frac{\sigma_{c0}}{\sigma_{t0}} - (1 + \alpha) \quad (4.19)$$

O parâmetro γ por sua vez deve ser definido no ensaio triaxial do concreto. Determinam-se as invariantes de tensão do material sob as condições do ângulo de Lode para os meridianos de tração (MT) e o de compressão (MC), onde valem $\theta_t = 0^\circ$ e $\theta_c = 60^\circ$ respectivamente. Tem-se então:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{3} (I_1 + 2\sqrt{3J_2}) \quad (MT) \quad (4.20)$$

$$\sigma_{max} = \frac{1}{3} (I_1 + \sqrt{3J_2}) \quad (MC) \quad (4.21)$$

com $\sigma_{max} < 0$, as equações podem ser reduzidas em:

$$(2\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = (1 - \alpha)\sigma_c \quad (MT) \quad (4.22)$$

$$(\gamma + 3)\sqrt{3J_2} + (\gamma + 3\alpha)I_1 = (1 - \alpha)\sigma_c \quad (MC) \quad (4.23)$$

onde σ_c é a tensão crítica na compressão uniaxial.

Desta forma, define-se a razão entre o segundo invariante de tensão no meridiano de tração pelo de compressão como K_c , que pode ter seus valores simplificados a partir das equações Equação 4.22 e Equação 4.22, obtendo-se a seguinte relação:

$$K_c = \frac{(\sqrt{J_2})_{MT}}{(\sqrt{J_2})_{MC}} \quad (4.24)$$

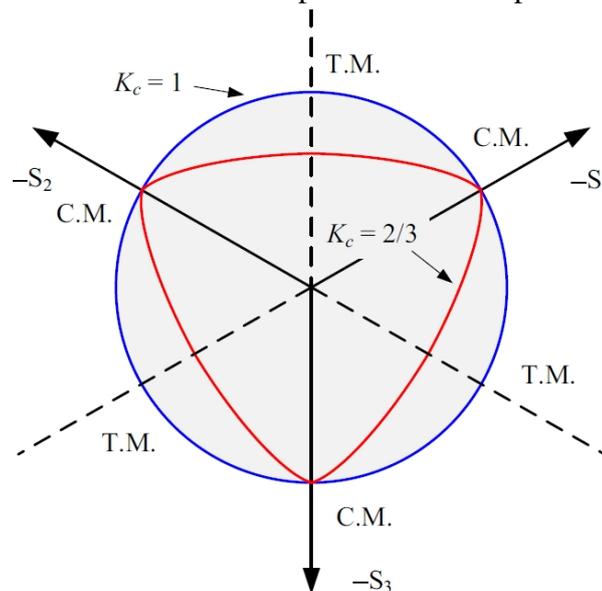
$$K_c = \frac{\gamma + 3}{2\gamma + 3} \quad (4.25)$$

A constante K_c então determina a forma da superfície de falha no plano desviador, por representar a razão entre os meridianos de tração e compressão no plano π , o plano desviador. Os valores de K_c variam entre $0,5 < K_c \leq 1$, então pode-se determinar a variável γ de acordo com Equação 4.26.

$$\gamma = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1} \quad (4.26)$$

Um valor de K_c normalmente empregado para o concreto no CDP é $K_c = 2/3$ (Kmieciak e Kamiński (2011)). Com $K_c = 1$, a superfície de falha torna-se um círculo, como no critério de Drucker-Prager, sendo esse o valor adotado para a análise realizada.

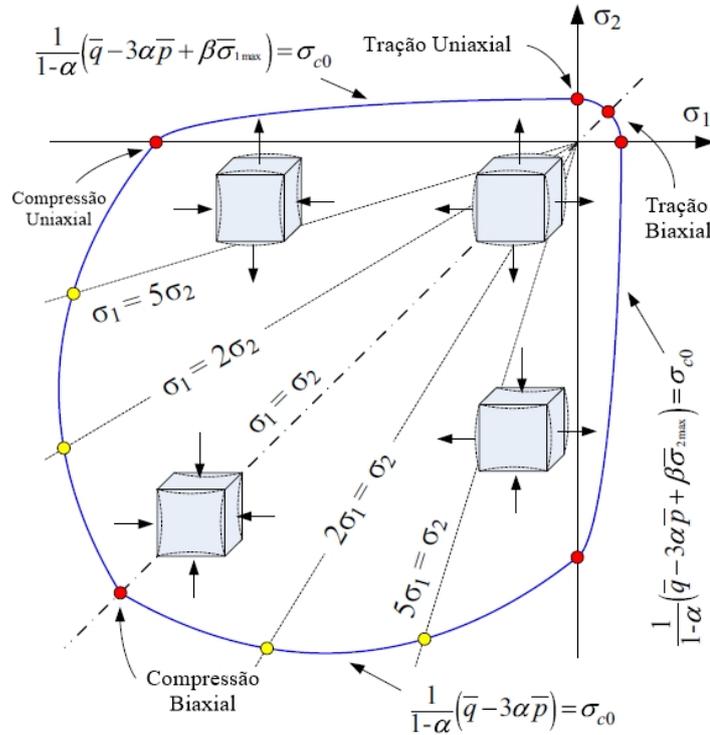
Figura 30 – Plano desviador da superfície de falha para o modelo CDP.



Fonte – Adaptado de Chi et al. (2017).

Para o estado plano de tensões, o modelo CDP admite a superfície de falha apresentada na Figura 31, com os parâmetros α e β definidos anteriormente, seguindo o formato para as situações de carregamento apresentadas.

Figura 31 – Superfície de falha para o modelo CDP no estado plano de tensões apresentada por Lee e Fenves (1998).



Fonte – Adaptado de Chi et al. (2017).

4.1.2 Regra de Fluxo Plástico

Materiais como o concreto podem apresentar uma mudança significativa de volume gerada por deformações plásticas. Estas mudanças no volume do material são reproduzidas por uma função potencial plástica G , adequada à definição da regra de escoamento, definida de forma geral pela Equação 4.27.

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4.27)$$

sendo $\dot{\varepsilon}^{pl}$ a taxa de deformação plástica, $\dot{\lambda}$ representa a variável do fator de carregamento e o termo $\frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}}$ o gradiente de deformação plástica.

Lubliner et al. (1989) utilizou a função plástica aplicada ao modelo de Mohr-Coulomb, substituindo o ângulo de atrito interno (ϕ) pelo ângulo de dilatância do material (ψ_m), gerando a equação de escoamento associativa apresentada a seguir.

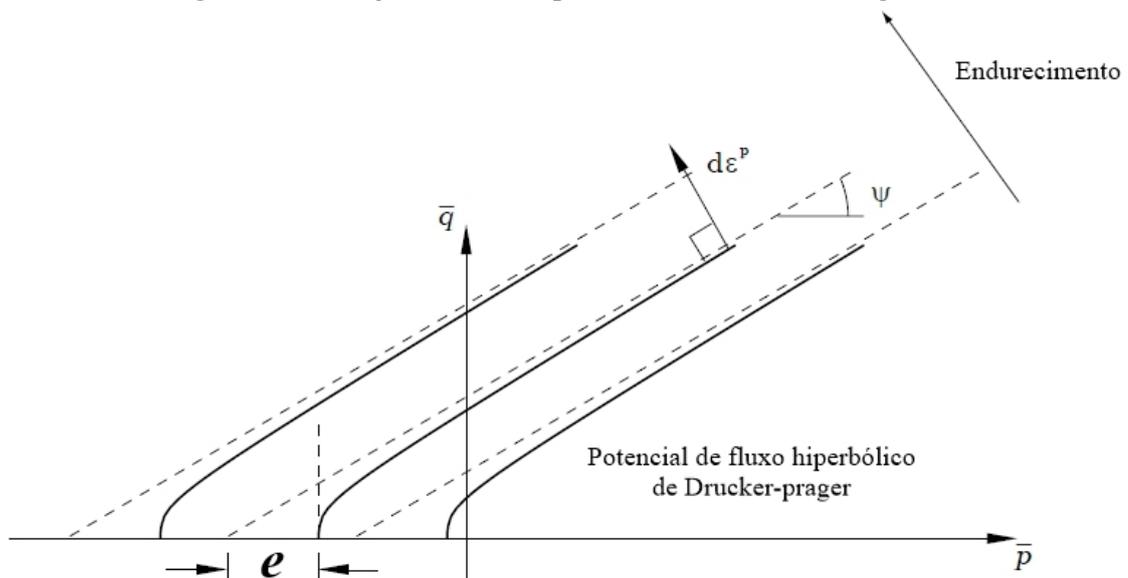
$$G(\bar{\sigma}, \psi_m) = \frac{I_1}{3} \text{sen}(\psi_m) + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{\text{sen} \theta \text{sen} \psi_m}{\sqrt{3}} \right) \quad (4.28)$$

As modificações do modelo adotadas por Lee e Fenves (1998) assume que essa função do potencial de fluxo no CDP seja a função hiperbólica de Drucker-Prager, sendo então a equação redefinida da seguinte forma:

$$G = \sqrt{(e\sigma_{10}tg\psi_m)^2 + q^2} - ptg\psi_m \quad (4.29)$$

onde e representa a excentricidade da superfície potencial plástico, ou seja, a aproximação da função potencial com a superfície de plastificação. Em outras palavras, é o comprimento (medido ao longo do eixo hidrostático p) do segmento entre o vértice da hipérbole e a interseção da assíntota com o eixo hidrostático, conforme a Figura 32. Ela também pode ser calculada como a razão entre a resistência à tração e a compressão uniaxial do material. Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) sugere que este valor, para o concreto, seja igual a 0,1. Porém, sabe-se que quando a excentricidade tiver o valor de $e = 0$, a curva no plano meridional se torna uma linha reta, ou seja, o critério clássico de Drucker-Prager.

Figura 32 – Função linear e hiperbólica de Drucker-Prager.



Fonte – Adaptado de Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012).

Para o valor do ângulo de dilatância ψ_m , assume-se que esse valor seja correspondente ao ângulo de inclinação da função linear de Drucker-Prager, como mostrado na Figura 32. A depender a abordagem, este valor pode ser interpretado também como o ângulo de atrito interno do material, sendo este no intervalo de $32^\circ \leq \psi_m \leq 40^\circ$ para o concreto (HIBBIT; KARLSSON; SORENSEN, 2012).

Foram então definidos os conceitos básicos que regem o modelo constitutivo aplicado à análise do CRFA neste trabalho, o CDP. De forma geral, para definir o modelo CDP no Abaqus SE necessita-se das curvas tensão-deformação para tração e compressão uniaxial do material, definição das

variáveis de dano de acordo com a tensão efetiva e evolução das deformações plásticas no material ao longo do carregamento.

Além disso, cinco outros parâmetros, alguns já mencionados neste capítulo, são necessários para a representação dos efeitos do estado multiaxial de tensões no CDP, são eles: ângulo de dilatância (ψ_m), razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiano de tração e de compressão (K_c), excentricidade (e), índice de viscosidade do material (μ) e razão entre as resistências biaxial e uniaxial à compressão ($\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$).

4.1.3 Variável de Dano Plástico

Em modelos de dano, a relação tensão-deformação total tem o seguinte formato:

$$\sigma = D^S : \varepsilon \quad (4.30)$$

onde σ é o tensor de tensões e ε o tensor de deformações. O tensor de rigidez secante, D^S , de um material danificado depende do número de variáveis internas que podem ser de natureza tensorial, vetorial ou escalar.

Para o caso da evolução isotrópica do dano, a Equação 4.30 é modificada de forma que o módulo de rigidez inicial é degradado por uma variável de dano d . Uma forma de simplificar o modelo isotrópico de dano é assumindo que a variável de dano irá degradar os módulos de cisalhamento e volumétrico do material de forma com o aumento do dano gerado pelas tensões. Ou seja, o coeficiente de Poisson do material não se modifica, o que pode ser representado pela equação a seguir:

$$\sigma = (1 - d)\underline{D}^0 : \varepsilon \quad (4.31)$$

onde o a variável de dano d pode variar de zero, para o material sem danos, a um, para o material completamente danificado. O tensor de rigidez D^0 representa a rigidez do material não-danificado (MALM, 2006).

Sabe-se que o concreto tensionado, após determinado ponto de resistência, começa a apresentar deformações permanentes, as deformações plásticas. O modelo mais simples para relacionar o dano e a plasticidade sofrida por determinado material é a definição do escalar de dano elasto-plástico baseado no conceito de tensão efetiva apresentada por Ju (1989).

Assim, para os casos de tração e compressão uniaxiais, as equações de tensão-deformação que relacionam a rigidez, deformações plásticas e variáveis de dano para o CDP são determinadas pelas equações a seguir:

$$\sigma_t = (1 - d_t)E_0(\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl}) \quad (4.32)$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_0(\varepsilon_c - \varepsilon_c^{pl}) \quad (4.33)$$

onde E_0 é a rigidez elástica inicial do material, ε_t^{pl} e ε_c^{pl} são as deformações plásticas também conhecidas por variáveis de endurecimento do material e d_t e d_c as variáveis de dano.

Foram então definidos os conceitos básicos que regem o modelo constitutivo aplicado à análise do CRFA neste trabalho, o CDP. De forma geral, para definir o modelo CDP no Abaqus SE necessita-se das curvas tensão-deformação para tração e compressão uniaxial do material, definição das variáveis de dano de acordo com a tensão efetiva e evolução das deformações plásticas no material ao longo do carregamento.

Além disso, cinco outros parâmetros são necessários para a representação dos efeitos do estado multiaxial de tensões no CDP, alguns já explanados neste capítulo. De forma geral, são eles:

- a) $\frac{\sigma_{cb0}}{\sigma_{c0}} = \frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$: a relação entre as resistências biaxial e uniaxial à compressão do material, que, neste trabalho, é definida pelo modelo de previsão proposto por Dutra (2012);
- b) K_c : a representação da razão entre a distância do eixo hidrostático ao meridiano de tração e de compressão no plano desviador, com valor sugerido por autores igual a $2/3$. Para a avaliação neste trabalho, assume-se $K_c = 1$, de forma que a superfície no plano desviador represente um círculo como no modelo de Drucker-Prager, que baliza toda teoria nas previsões de Dutra (2012);
- c) ψ_m : o ângulo de dilatância, medido no plano meridiano $p - q$ de pressões confinantes do material. Em termos práticos, esse ângulo determina a capacidade de expansão do concreto ao sofrer deformações plásticas. Para este parâmetro, são avaliadas três abordagens de cálculo, baseados no modelo de previsão adotado neste documento e nos limites impostos pelo modelo no *software*;
- d) e : a excentricidade, que representa a taxa de aproximação da hipérbole à sua assíntota no plano $p - q$. Para uma melhor aproximação do caso real, Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) sugere o valor de $e = 0,1$. Ainda de acordo com Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012), este parâmetro pode ser calculado também como a razão entre tensão última de tração e a de compressão no caso uniaxial. Sabe-se que o valor $e = 0$ faz com que a aproximação da superfície no plano meridional se torne uma linha reta, o que representa a associação da superfície de fluxo potencial à superfície de falha de Drucker-Prager, sendo então este o valor adotado para as análises neste trabalho;
- e) μ : o índice de viscosidade do material. Representa o tempo de relaxação do sistema viscoplástico, esse valor pode variar de $0 \leq \mu \leq 1$ e se relaciona com o tempo de carregamento determinado pelo usuário no *software*. Para análises estáticas de curta duração, considera-se este valor nulo. Porém, ele também está ligado a convergência do modelo, um pequeno aumento neste parâmetro ajuda a aumentar a taxa de convergência da análise,

especialmente nos trechos de amolecimento do material. Sendo assim, será aplicado um valor $\mu = 0,0001$ para o controle de convergência nas simulações.

4.1.4 Abordagens para determinação do ângulo de dilatância

Inicialmente, uma das hipóteses adotadas por Dutra (2012) em seu modelo foi que há uma aderência perfeita entre a fibra de aço e a matriz cimentícia, fato que não impõe nenhuma limitação sobre o tensor de tensões atuante na interface entre as partes.

Para a determinação desta envoltória de resistência, a autora utilizou do critério tipo Coulomb para caracterizar a ruptura da interface. Este critério leva em consideração dois parâmetros chave, componentes do modelo de Mohr-Coulomb, que são o ângulo de atrito interno (ϕ) e coesão da interface (c).

Sabe-se que para o CDP o ângulo de dilatância ψ_m pode ser considerado igual ao ângulo de atrito interno caso seja adotada a regra associativa na qual a superfície de escoamento tem o mesmo formato e inclinação da sua assíntota. Desta forma, como primeira abordagem para definição de ψ_m , adota-se a equação utilizada por Dutra (2012) e apresentada por Proença; Chen (1988, 2007 apud CARMO, 2005) definida a seguir:

$$\phi = -\arcsen\left(\frac{f_{ct} - f_c}{f_{ct} + f_c}\right) \quad (4.34)$$

Também foi determinado por Proença (1988) a partir de observações experimentais que, para o concreto reforçado com fibras de aço um valor fixo seria adequado para o ângulo de atrito interno deste compósito, com $\phi = 37^\circ$ e o mesmo não sendo influenciado de forma direta pela porcentagem de fibras no compósito. Enquanto que, para o concreto comum, Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) determinam que um valor a ser adotado ideal é $\psi_m = 34^\circ$. Definindo então uma segunda possibilidade para a determinação do ângulo de dilatação para o CRFA no CDP.

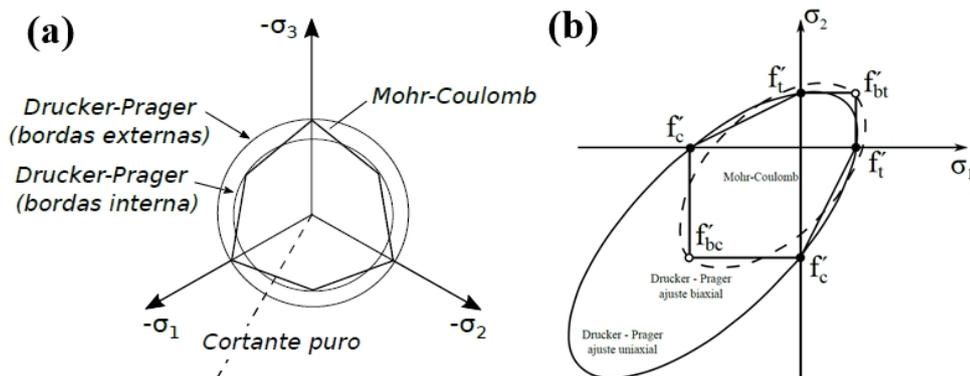
Por fim, sabendo que o modelo de Dutra (2012) utiliza como referência em suas previsões a superfície de falha definida por Drucker-Prager, então buscou-se uma forma de aproximar os parâmetros definidos a partir do modelo de Mohr-Coulomb que melhor se adaptassem aos parâmetros de Drucker-Prager.

Segundo Souza Neto, Peric e Owen (2011), para aproximar a superfície de Drucker-Prager da superfície de Mohr-Coulomb, é conveniente definir a função de escoamento para o modelo de Drucker-Prager como:

$$F(\bar{\sigma}, c) = \sqrt{J_2} - \eta \frac{I_1}{3} - \xi c \quad (4.35)$$

em que, c é a coesão do material e os parâmetros η e ξ dependem da aproximação para o critério de Mohr-Coulomb. Esses parâmetros dependerão do tipo de aproximação que for utilizada para a aproximação dos critérios. Podendo ser utilizada a aproximação pelo cone interior, que leva em consideração apenas as tensões uniaxiais do material, ou a aproximação do cone exterior, que compreende as resistências uniaxiais e biaxiais do material (Figura 33).

Figura 33 – Seção dos cones de Mohr-Coulomb com aproximações de Drucker-Prager (a) e aproximações da superfície de plastificação entre os modelos (b).



Fonte – Adaptado de Faria (2017).

Assim, a Equação 4.35 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}, c) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - \kappa \quad (4.36)$$

sendo α e κ constantes do material em função do ângulo de atrito e coesão do material definidos pelas relações geométricas do círculo de Mohr-Coulomb.

Com isso, tomando a definição de ψ_m como a inclinação da reta no plano meridiano $p - q$, sendo p e q definido pelas invariantes I_1 e J_2 , respectivamente, pode-se considerar α como a inclinação da reta no plano meridiano e, logo, igual a ψ_m . Para o cálculo de α em um estado de tensão biaxial é aplicado o valor do ângulo de atrito, definido pela Equação 4.34, e utilizada a relação a seguir:

$$\alpha = \frac{\text{sen}\phi}{\sqrt{3}} \quad (4.37)$$

Assim, é apresentado a seguir uma tabela (Tabela 1) que resume os parâmetros adotados para o modelo de dano plástico e como são definidos seus valores.

Tabela 1 – Resumo dos parâmetros CDP.

PARÂMETRO	MÓDULO
σ_{cb0}/σ_{c0}	Definido de acordo com as relações em 3.41 e 3.35
K_c	1
ψ_m	Definido pela relação 4.34 Definido pela relação 4.37 $\psi_m = 37^\circ$ para o CRFA e $\psi_m = 34^\circ$ para o concreto comum
e	0
μ	0,0001

De forma geral, ainda não há uma uniformidade de opiniões entre autores quanto a melhor abordagem para determinação do parâmetro ψ_m , como apontado em Earij et al. (2017) e Christoforo, Carvalho et al. (2021), fazendo-se necessária essa breve análise de diferentes abordagens para o ψ_m de acordo com que é exposto na literatura. Assim, são verificados os casos em que o ângulo de dilatância é exatamente igual ao de atrito interno do material (Chen (2007)), uma estimativa do ângulo de dilatância a partir de uma aproximação entre os parâmetros de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb (Souza Neto, Peric e Owen (2011)) e uma determinação de ψ_m a partir de observações experimentais (Proença (1988)).

Outro ponto de relevante importância, as equações escolhidas para este trabalho geram ângulos de dilatância dentro de uma margem amplamente utilizada por diversos autores para análises numéricas com o concreto, de forma geral, com $0^\circ \leq \psi_m \leq 56,31^\circ$ a depender do tipo de concreto e estrutura analisada. Fato que pode ser verificado e sugerido não apenas por Kmiecik e Kamiński (2011) e Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) como apontado pela maioria dos trabalhos encontrados, mas também apresentado em recentes análises de sensibilidade de calibração deste fator do CDP (Michał e Andrzej (2015), Othman (2016), Chi et al. (2017), Li et al. (2019), Rewers (2019), Wang et al. (2020), Belyakov et al. (2021)), como mostrado na Tabela 2. Além disso, a determinação deste parâmetro especificamente para o CRFA torna-se uma tarefa difícil e dispendiosa do ponto de vista experimental e teórico, sendo então, neste trabalho, limitada pelas abordagens supracitadas e já estabelecidas na literatura.

Tabela 2 – Valores de ângulo de dilatação apresentados na literatura.

FONTE	ψ_m
Kmiecik e Kamiński (2011)	$36^\circ \leq \psi_m \leq 40^\circ$
Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012)	$0^\circ \leq \psi_m \leq 56,31^\circ$
Michał e Andrzej (2015)	$0^\circ \leq \psi_m \leq 30^\circ$
Othman (2016)	$30^\circ \leq \psi_m \leq 45^\circ$
Chi et al. (2017)	$7^\circ \leq \psi_m \leq 47^\circ$
Rewers (2019)	$5^\circ \leq \psi_m \leq 45^\circ$
Li et al. (2019)	$0^\circ \leq \psi_m \leq 45^\circ$
Wang et al. (2020)	$15^\circ \leq \psi_m \leq 55^\circ$
Belyakov et al. (2021)	$0^\circ \leq \psi_m \leq 30^\circ$

4.1.5 Concreto Comprimido

Segundo Chen e Saleeb (2013), a superfície de ruptura do concreto é caracterizada pela dependência dos três invariantes de tensão (I_1 , J_2 e J_3), por ter forma suave e convexa, com excessão do seu vértice, por apresentar meridianos parabólicos que abrem no sentido negativo do eixo hidrostático e por possuir seção aproximadamente triangular. Os modelos aplicados ao concreto variam de acordo com o refinamento, que aumentam a precisão de acordo com número de parâmetros aplicados.

Com base nestas definições e demais observações experimentais, autores apresentaram modelos de reprodução dessas superfícies de acordo com o nível de refinamento. Para este trabalho, optou-se pelo uso do critério de ruptura adotado pelo CDP, o proposto Lubliner et al. (1989) com modificações realizadas por Lee e Fenves (1998). O critério é determinado pela Equação 4.38 e formando uma superfície como a ilustrada na Figura 31.

$$F = \frac{1}{1-\alpha} \left(q - 3\alpha p + \beta(\tilde{\epsilon}^{pl}) \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle - \gamma \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle \right) - \sigma_c(\tilde{\epsilon}_c^{pl}) = 0 \quad (4.38)$$

$$\alpha = \frac{(f_{cbm} - f_{cm})}{(2f_{cbm} - f_{cm})} \quad (4.39)$$

$$\beta = \frac{\hat{\sigma}_c(\tilde{\epsilon}_c^{pl})}{\hat{\sigma}_t(\tilde{\epsilon}_t^{pl})} (1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (4.40)$$

$$\gamma = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1} \quad (4.41)$$

Onde:

f_{cbm} é a resistência à compressão biaxial;

f_{cm} a resistência à compressão uniaxial;

$\hat{\sigma}_c(\tilde{\epsilon}_c^{pl})$ é a tensão efetiva de coesão à compressão;

$\hat{\sigma}_t(\tilde{\epsilon}_t^{pl})$ é a tensão efetiva de coesão à tração;

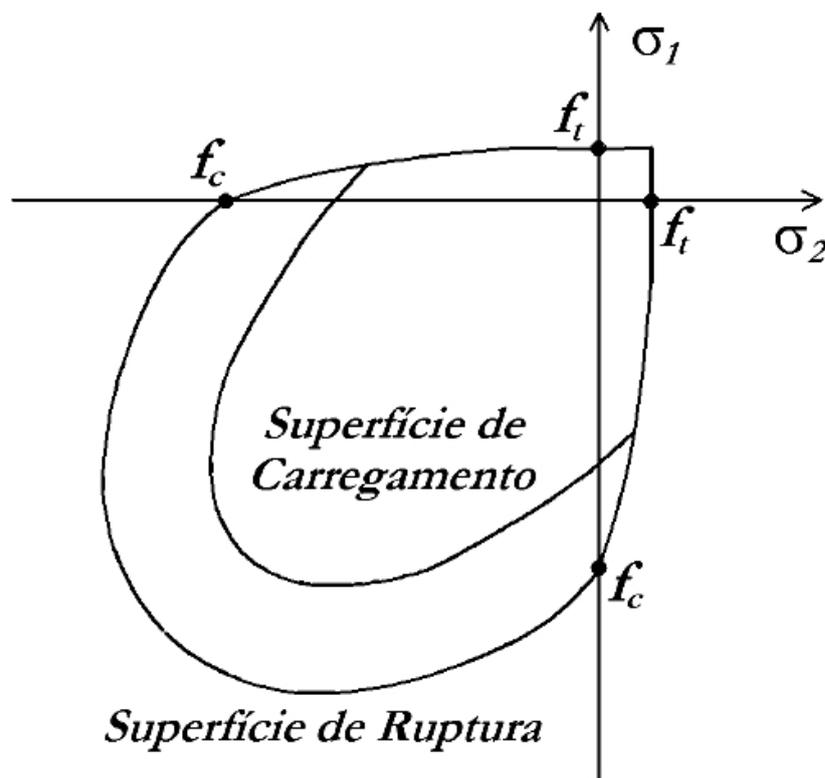
$\langle \hat{\sigma}_{max} \rangle$ a máxima tensão principal efetiva;

K_c a razão entre os meridianos de tração e compressão uniaxial.

4.1.5.1 Critério de Plastificação do Concreto

O modelo adotado neste trabalho, o CDP, admite que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que as superfícies de carregamento e plastificação tenham a mesma forma (Figura 34). Considerando a tensão de plastificação inicial nula, o domínio plástico, onde o material possui comportamento elastoplástico com endurecimento, ocorre para os valores onde a tensão efetiva (σ_{ef}) atuante dentro do intervalo $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$.

Figura 34 – Superfície de carregamento e ruptura.



4.1.5.2 Regra de Endurecimento

A regra de endurecimento determina a forma de movimentação das superfícies de carregamento durante a deformação plástica. A adição de fibras de aço na matriz faz com que o concreto, sob compressão uniaxial, apresente ganhos de tenacidade, como destacado por Figueiredo (2011). Porém, esses ganhos são perceptíveis apenas para deformações além da deformação limite usual, cerca de 3,5 ‰. Tal fato permite com que o CRFA possa ser modelado da mesma forma que o concreto comum sob tensões de compressão uniaxial.

Desta forma, usa-se então como regra de tensão-deformação para representar o concreto sob compressão uniaxial a relação proposta pelo Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013), como mostrado na Figura 35. As tabelas 3 e 4 relacionam os valores das variáveis f_{ck} , E_{ci} , E_{c1} , ε_{c1} , $\varepsilon_{c,lim}$ e k de acordo com as classes de concreto.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right), \quad |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}|$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}}$$
(4.42)

Onde:

ε_c = Deformação de compressão;

ε_{c1} = Deformação na máxima tensão de compressão;

$\varepsilon_{c1,lim}$ = Deformação último de compressão;

E_{ci} = Módulo de elasticidade do concreto;

E_{c1} = Módulo secante correspondente à máxima tensão de compressão;

k = Número plástico.

Figura 35 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido.

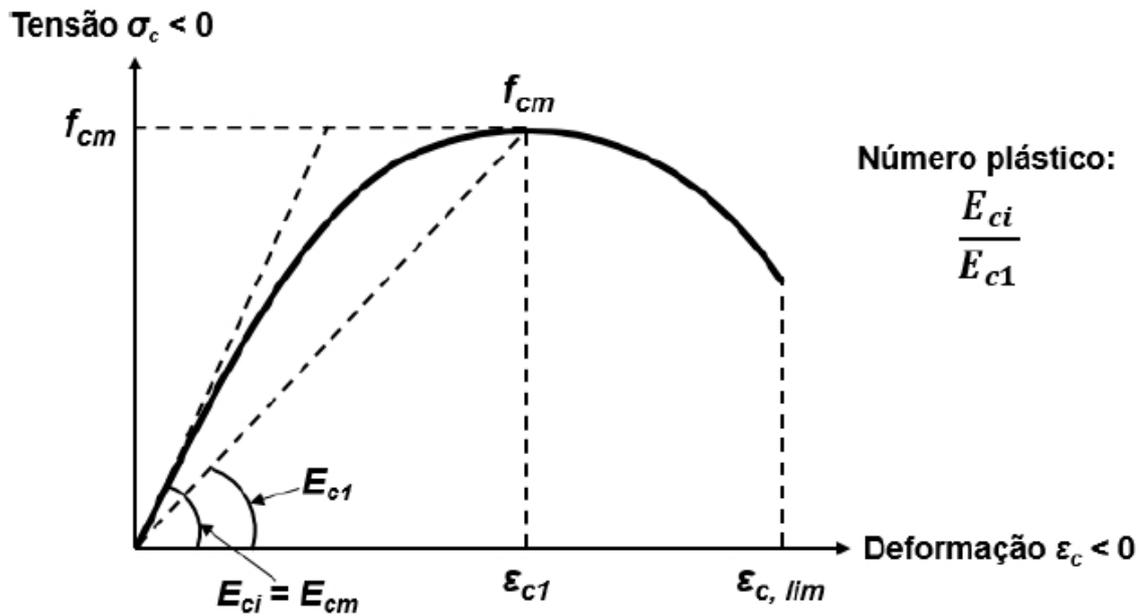
Fonte – Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013)

Tabela 3 – Propriedades para concretos C12 a C50.

CONCRETO	C12	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50
f_{ck} (kN/cm ²)	1.2	1.6	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
E_{ci} (kN/cm ²)	2710	2880	3030	3200	3360	3500	3630	3750	3860
E_{c1} (kN/cm ²)	1110	1220	1330	1490	1650	1820	2000	2160	2320
ϵ_{c1} (‰)	-1.9	-2.0	-2.1	-2.2	-2.3	-2.3	-2.4	-2.5	-2.6
$\epsilon_{c,lim}$ (‰)	-3.5	-3.5	-3.5	-3.5	-3.5	-3.5	-3.5	-3.5	-3.4
k	2.44	2.36	2.28	2.15	2.04	1.92	1.82	1.74	1.66

Fonte – Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013)

Tabela 4 – Propriedades para concretos C55 a C120.

CONCRETO	C55	C60	C70	C80	C90	C100	C110	C120
f_{ck} (kN/cm ²)	5.5	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
E_{ci} (kN/cm ²)	3970	4070	4260	4440	4600	4750	4890	5030
E_{c1} (kN/cm ²)	2470	2620	2890	3140	3380	3600	3930	4270
E_{ci} (kN/cm ²)	-2.6	-2.7	-2.7	-2.8	-2.9	-3.0	-3.0	-3.0
$\epsilon_{c,lim}$ (‰)	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3.0	-3.0	-3.0	-3.0
k	1.61	1.55	1.47	1.41	1.36	1.32	1.24	1.18

Fonte – Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013)

4.1.6 Concreto Tracionado

O concreto é um material cuja resistência à tração é pequena quando comparada à sua resistência à compressão. Devido a isso, em estruturas de concreto armado as fissuras aparecem ainda em condições de serviço, submetido a baixas tensões de tração. Esta formação de fissuras no concreto merece especial atenção, pois induz o acentuado comportamento não-linear do material, necessitando uma modelagem adequada para boa precisão dos resultados.

Para análises utilizando o Método dos Elementos Finitos, existem duas formas de representar esses processos de fissuração no material. O primeiro seria o de fissuras discretas, tratando cada fissura de forma isolada como uma descontinuidade no material avaliado. Este modelo de fissuração é altamente dependente da malha de elementos finitos, sendo assim, ele demanda um grande tempo e poder de processamento devido ao alto nível de refinamento da malha. O segundo seria o modelo de dano plástico, que leva em consideração a danificação da região afetada, tornando-a menos resistente ao longo do carregamento até que sua capacidade resistente seja completamente desprezada.

Para o modelo de dano plástico tem-se uma alteração nas propriedades do material, considerando o dano devido à fissuração, enquanto o concreto fissurado permanece contínuo. Este modelo torna-se atrativo do ponto de vista computacional uma vez que a topologia da malha não muda ao decorrer da análise, mesmo que a sua relação tensão-deformação deva ser atualizada quando ocorre a fissuração.

No presente trabalho, o concreto tracionado é modelado como sendo um material elástico com amolecimento, ou seja, antes de fissurar, comporta-se como um material elástico linear e, após a fissuração, utiliza-se o modelo de dano que irá degradar a rigidez do concreto a depender a evolução da variável de dano.

4.1.6.1 Critério de Fissuração

Como explanado, no modelo de dano plástico não é considerado descontinuidade da malha de elementos finitos, sendo desnecessária a modificação da topologia dela. Para a avaliação da fissuração do concreto é verificado se o nível de tensão dos pontos de integração dos elementos atingiu a superfície de ruptura.

Para o modelo de dano, de acordo com Lubliner et al. (1989), pode-se assumir que a fissura se inicia no ponto onde a deformação plástica à tração no material é maior que zero, $\tilde{\epsilon}_i^{pl} > 0$, a máxima deformação principal é positiva e a tensão principal máxima é positiva, $\sigma_{max} > 0$. A direção do vetor normal à fissura é considerada paralela à direção da máxima deformação plástica principal.

O mesmo conceito é aplicado para o ponto de integração no caso de esmagamento por com-

pressão, onde as tensões serão avaliadas e determinadas as deformações. Assume-se que o esmagamento se inicia no ponto onde a deformação plástica à compressão no material é menor que zero, $\tilde{\epsilon}_c^{pl} < 0$, a máxima deformação principal é negativa e a tensão principal máxima é negativa, $\sigma_{max} < 0$.

Sendo assim, de forma geral, sabendo que as tensões efetivas e deformações plásticas estão ligadas às variáveis de dano no material, como mostrado na equação 4.33, de forma que o módulo dessas variáveis aumentarão com o incremento das suas deformações plásticas, define-se então que:

- a) $d_t > 0$, para a fissuração do ponto de integração;
- b) $d_c > 0$, para o esmagamento do ponto de integração;

No CDP, é possível introduzir o conceito da direção efetiva de fissuração com o objetivo de se obter graficamente o padrão de fissuração do material na estrutura de concreto. A direção do vetor normal à fissura é considerada paralela à direção da máxima deformação plástica principal. Ou seja, a fissura se forma num plano perpendicular à direção da tensão principal de tração.

4.1.6.2 Colaboração do concreto entre fissuras

Conforme Hinton (1988), os primeiros estudos feitos em análise numérica de concreto estrutural admitiam que o concreto sob tração era um material elástico-frágil. Desta forma, quando uma fissura ocorria, a tensão normal à fissura era zerada. Posteriormente, observou-se que a aderência do concreto entre fissuras às barras de armadura, permitia que o material ainda fosse capaz de suportar um certo nível de tensão, contribuindo significativamente para a rigidez total da estrutura. Este fenômeno é conhecido como “enrijecimento à tração” ou *tension stiffening*, sendo de fundamental importância na análise de peças fletidas de concreto.

Porém, sabe-se que o CRFA apresenta um comportamento de enrijecimento à tração bem diferente do concreto comum. Tomando essa característica do CRFA, algumas considerações são efetuadas para a uma curva tensão-deformação mais fiel à apresentada pelo compósito.

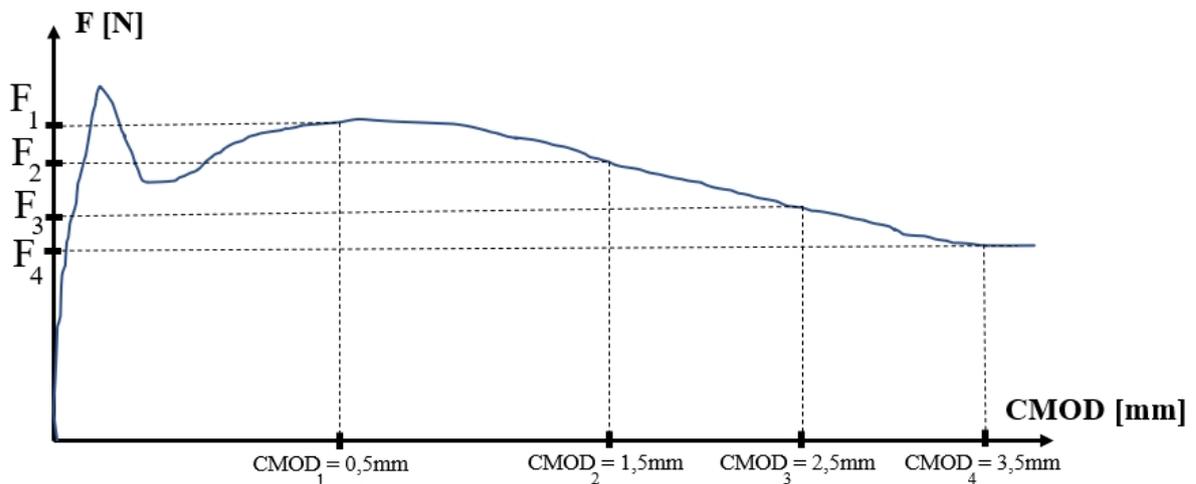
Utiliza-se então a curva tensão-deformação apresentada pelo Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013) para o concreto reforçado com fibras. Neste modelo o concreto apresenta um comportamento elástico-linear até sua ruptura, então admite-se a colaboração do concreto entre fissuras. Para tanto, atribui-se uma perda ou ganho de resistência, a depender da fração volumétrica de fibras. Este fenômeno de enrijecimento ou amolecimento é determinado a partir das tensões residuais calculadas a partir de resultados experimentais variáveis a depender do tipo de concreto produzido e das proporções de fibras aplicadas à mistura, originando uma diagrama tensão-deformação como o mostrado na Figura 13.

Esses valores nominais de tensões residuais podem ser determinados a partir do teste de flexão de três pontos em vigas entalhadas normatizado pela EN-14651:2005. Neste teste, a deformação é expressa baseada na abertura do entalhe (*crack mouth opening displacement* - CMOD) e a tensão gerada na viga é medida através da força F aplicada ao elemento. Tem-se então que:

$$f_{R,j} = \frac{3F_j l}{2bh_{sp}^2} \quad (4.43)$$

onde $f_{R,j}$ é a tensão residual à flexão correspondente ao $CMOD_j$ medida em MPa , F_j é a carga aplicada correspondente ao $CMOD_j$ em N , l o comprimento da viga em mm , b a largura da viga em mm e h_{sp} a altura útil da viga, distância do topo da abertura ao topo da viga, em mm . Os pontos j são valores de abertura de entalhe pré-estabelecidos pela norma, como mostrado na Figura 36.

Figura 36 – Curva típica de carga-abertura de entalhe para o concreto reforçado com fibras.

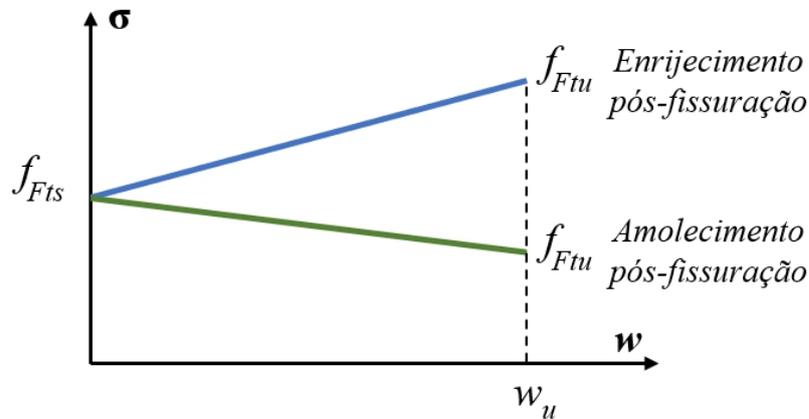


Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013).

Com as resistências residuais, a norma disponibiliza de modelos de simplificação para o comportamento constitutivo à tração do concreto reforçado com fibras. Essas regras assumem uma resposta de enrijecimento ou amolecimento pós-fissuração, a depender das resistências residuais obtidas para a mistura.

O modelo linear determina dois valores de referência, o f_{Fts} e o f_{Ftu} , que representam, respectivamente, a resistência residual de serviço (referente ao estado limite de serviço da estrutura) e a resistência residual última (referente ao estado limite último). O gráfico pós-fissuração para a tensão atuante à tração e a abertura de fissuras tem a forma como a apresentada na Figura 37. Esses valores são definidos de acordo com as equações 4.44 e 4.45.

Figura 37 – Lei constitutiva pós-fissuração simplificada: tensão-abertura de fissura.



Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - fib 2010 (2013).

$$f_{Fts} = 0,45f_{R1} \quad (4.44)$$

$$f_{Ftu} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3}(f_{Fts} - 0.5f_{R3} + 0.2f_{R1}) \geq 0 \quad (4.45)$$

Onde w_u é a máxima abertura de fissura aceita no projeto estrutural, valor este que depende da ductilidade requerida para estrutura. Assim, a deformação do concreto pode ser determinada a partir da relação apresentada na Equação 4.46, onde l_{cs} corresponde ao comprimento característico estrutural do elemento e w a abertura da fissura no elemento.

$$\varepsilon = \frac{w}{l_{cs}} \quad (4.46)$$

Para w_u , tem-se que $w_u = l_{cs}\varepsilon_{Fu}$, onde é sugerido assumir $\varepsilon_{Fu} = 2\%$ para uma distribuição de deformação à tração variável ao longo da seção transversal do elemento e $\varepsilon_{Fu} = 1\%$ para uma distribuição constante de deformação à tração na seção transversal. Entretanto, para qualquer caso, a norma recomenda que o valor de w_u não ultrapasse os 2,5 mm.

Com essas considerações a respeito do comportamento pós-fissuração, a norma sugere um modelo para relação tensão-deformação do concreto reforçado com fibras baseado nos parâmetros apresentados. A norma apresenta três casos para o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço. Para o Caso I, onde há um amolecimento do material após sua resistência nominal à tração ($f_{ct} > f_{Fts}$), adota-se o mesmo modelo constitutivo aplicado ao concreto comum tracionado (Figura 38) até a sua resistência à tração. No ramo pós-fissuração, uma relação bilinear é adotada seguindo os padrões apresentados na Figura 39. Onde:

$$\frac{\sigma - f_{ct}}{0,2f_{ct} - f_{ct}} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_P}{\varepsilon_Q - \varepsilon_P} \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_Q = \frac{G_F}{f_{ct}l_{cs}} + \varepsilon_P - \frac{0,8f_{ct}}{E_c} \quad (4.48)$$

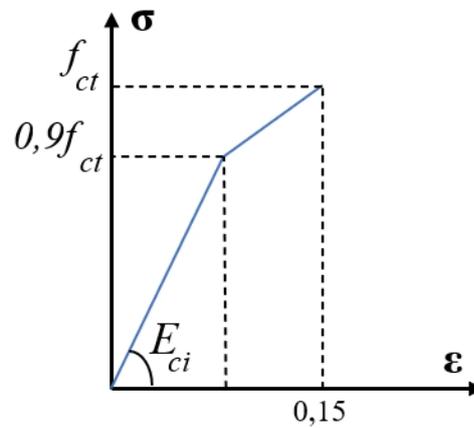
$$G_F = 73f_{cm}^{0,18} \quad (4.49)$$

Para o ramo de amolecimento no Caso I, o terceiro segmento da curva é definida pelos pontos $(\varepsilon_{SLS}, f_{Fts})$ e $(\varepsilon_{ULS}, f_{Ftu})$, onde:

$$\varepsilon_{SLS} = CMOD_1/l_{cs} \quad (4.50)$$

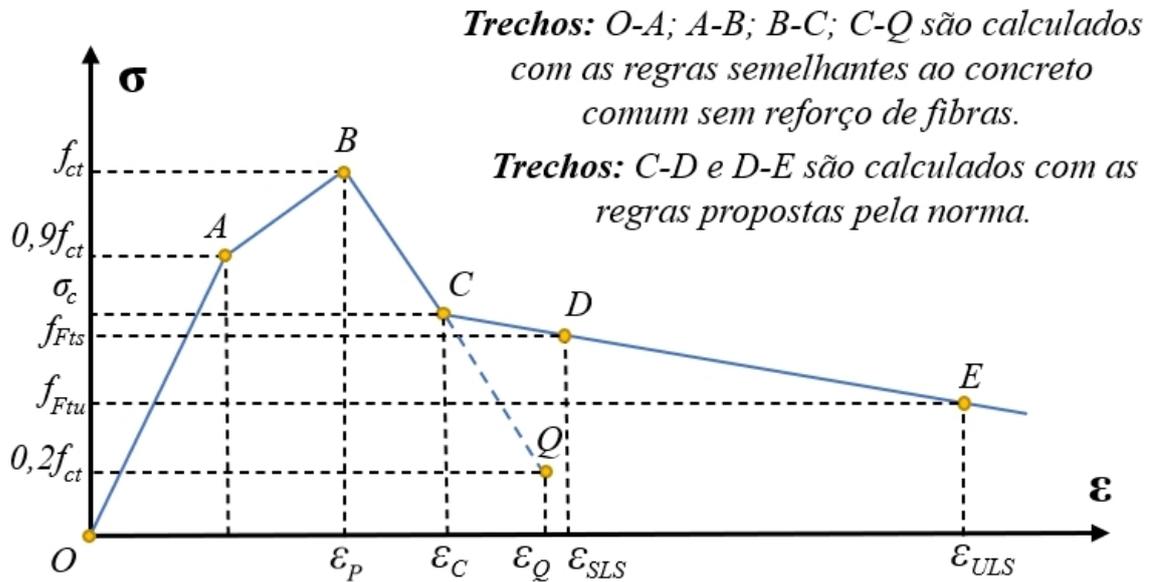
$$\varepsilon_{ULS} = w_u/l_{cs} = \min(\varepsilon_{Fu}, 2,5/l_{cs}) \quad (4.51)$$

Figura 38 – Lei constitutiva para o concreto sem reforço de fibras tracionado até seu limite plástico.



Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - fib 2010 (2013).

Figura 39 – Diagrama tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras tracionado para o Caso I, de acordo com a norma.



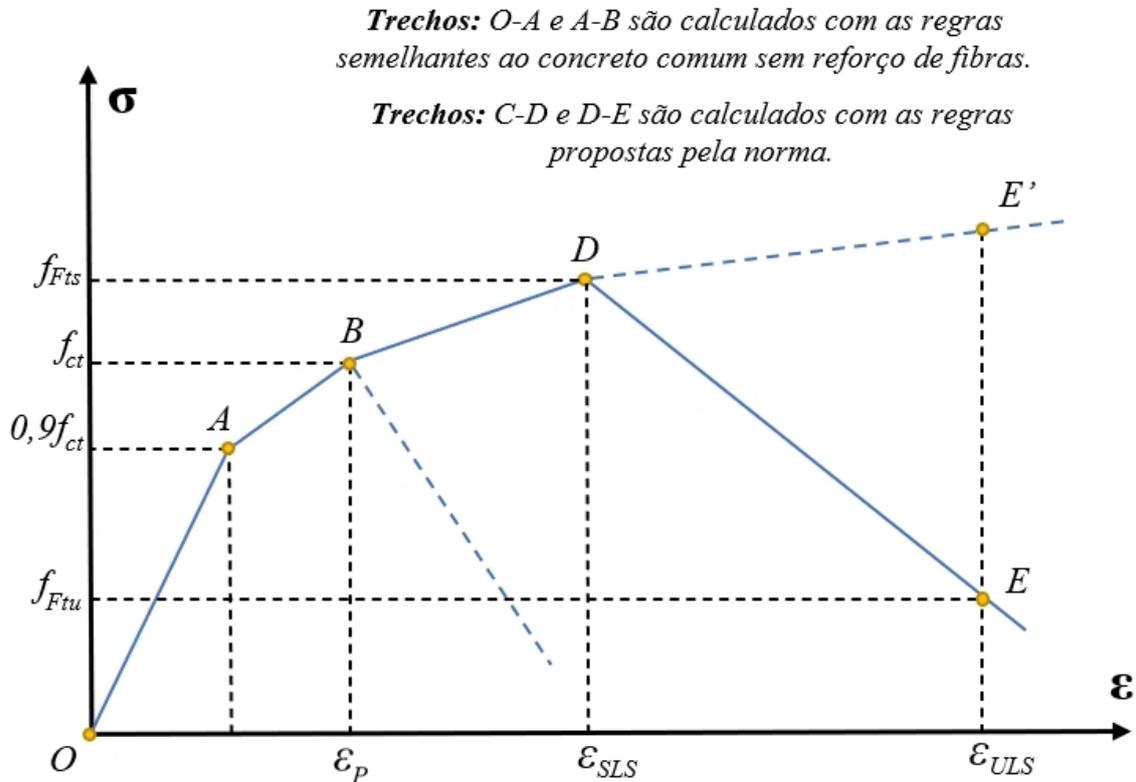
Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - fib 2010 (2013).

A norma ainda apresenta dois outros casos, para quando a resistência residual à tração no limite de serviço (f_{Fts}) for maior que a resistência à tração uniaxial de cálculo do concreto (f_{ct}). No Caso II, o processo de fissuração se torna estável até a deformação de estado limite de serviço e quatro segmentos definem a relação constitutiva do concreto reforçado com fibras tracionado. Os dois primeiros ramos, assim como no Caso I, são definidos como o concreto sem reforço. O terceiro é definido pela relação:

$$\frac{\sigma - f_{ct}}{f_{Fts} - f_{ct}} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_P}{\varepsilon_{SLS} - \varepsilon_P} \quad \text{para} \quad \varepsilon_P \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{SLS} \quad (4.52)$$

E o quarto segmento do gráfico é determinado pelas resistências residuais f_{Fts} e f_{Ftu} e suas respectivas deformações, como mostrado na Figura 40.

Figura 40 – Diagrama tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras tracionado para o Caso II, de acordo com a norma.



Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - fib 2010 (2013).

Por fim, tem-se o Caso III no qual o processo de fissuração permanece estável até a deformação do estado limite de serviço e três segmentos definem o comportamento constitutivo. O segundo segmento do diagrama ($A'-D$) é definido a partir das relações apresentadas a seguir:

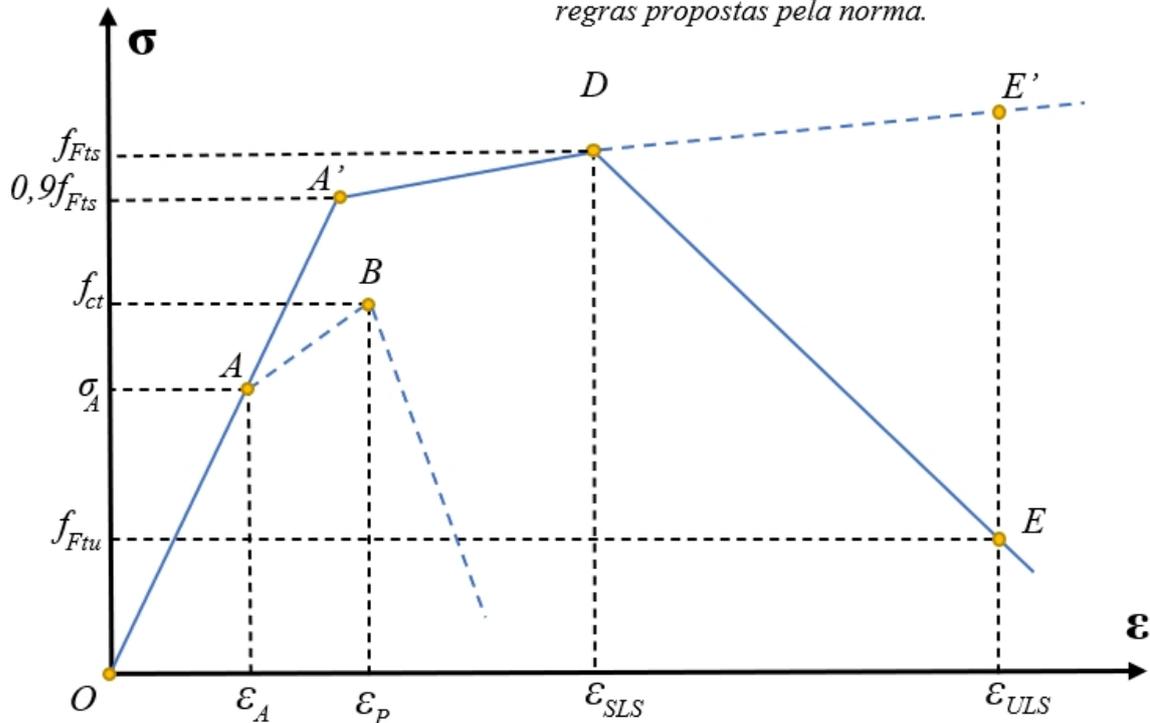
$$\frac{\sigma - \sigma_{A'}}{f_{Fts} - \sigma_{A'}} = \frac{\epsilon - \epsilon_{A'}}{\epsilon_{SLS} - \epsilon_{A'}} \quad \text{para} \quad \epsilon_{A'} \leq \epsilon \leq \epsilon_{SLS} \quad (4.53)$$

Onde $\sigma_{A'}$ é a tensão equivalente a $0,9f_{Fts}$ no ramo elástico da curva. E, como nos casos anteriores, o segundo segmento do diagrama é definido pelas resistências residuais à tração de estados limite de serviço e último, como mostrado na Figura 41.

Figura 41 – Diagrama tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras tracionado para o Caso III, de acordo com a norma.

Trecho: *O-A é calculado com as regras semelhantes ao concreto comum sem reforço de fibras.*

Trechos: *A-A'; A'-D e D-E são calculados com as regras propostas pela norma.*



Fonte – Adaptado de Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013).

A norma também destaca que, para os Casos II e III, a depender dos valores de f_{Fts} e f_{Ftu} o material pode apresentar um comportamento de amolecimento (D-E) ou enrijecimento (D-E') de acordo com a inclinação da curva gerada pelos valores, como é possível analisar nas figuras 40 e 41.

Como apresentado, a norma especifica regras para determinação do comportamento constitutivo do concreto reforçado com fibras à tração uniaxial através da determinação das resistências residuais à tração na flexão. Resistências estas que são obtidas através de resultados de flexão de três pontos em vigas entalhadas, ensaio normatizado pela EN-14651:2005.

Os resultados experimentais coletados para a análise proposta por este trabalho não contemplam este teste, assim, foi necessário buscar na literatura formas de prever as tensões residuais à tração na flexão do CRFA com as características e dados apresentados pelos experimentos, como tipo de fibra, resistência à compressão da matriz e fração volumétrica de fibras aplicadas à matriz.

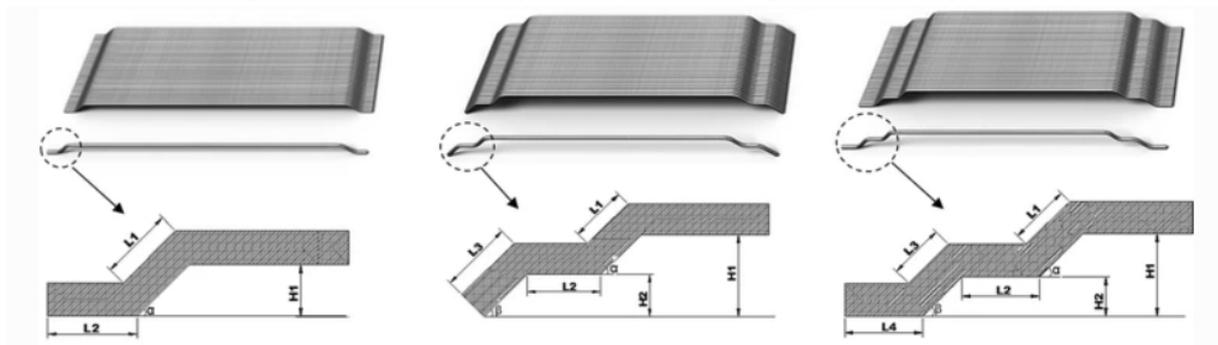
Chegou-se então ao trabalho apresentado por Venkateshwaran, Tan e Li (2018). Os autores avaliaram 69 exemplares em acordo com as características geométricas e de teste apresentadas

na EN-14651:2005 de forma a obter as curvas força-CMOD.

Os testes foram realizados com misturas contendo diferentes tipos de fibras de aço ancoradas e com diferentes proporções, sendo os resultados, em conjunto com os de outros autores, utilizados para a validação de um modelo de previsão de resistência residual obtido através de múltiplas regressões.

Venkateshwaran, Tan e Li (2018) apresentaram um modelo capaz de determinar as resistências residuais nos pontos 1, 2, 3 e 4 (Figura 36) do teste e o limite de proporcionalidade. Os autores determinaram que essas resistências são proporcionais ao índice de reforço da mistura (produto entre o razão de aspecto e porcentagem volumétrica de fibra), à raiz quadrada da resistência à compressão uniaxial do concreto e ao quadrado do número de ancoragens nas extremidades das fibras em gancho (Figura 42). As relações propostas pelos autores são apresentadas nas equações de 4.54 a 4.60.

Figura 42 – Fibras de aço com diferentes tipos de ancoragem.



Fonte – Adaptado de Abdallah e Fan (2017).

$$f_L = 0,637(f_{cm})^{0,5} + 1,295(RI) \quad (4.54)$$

$$f_{R,1} = \psi_{CRFA}[0,320(f_{cm})^{0,5} + 6,214(RI) + 0,034N^2] \quad (4.55)$$

$$f_{R,2} = \psi_{CRFA}[0,353(f_{cm})^{0,5} + 7,337(RI) + 0,300N^2] \quad (4.56)$$

$$f_{R,3} = \psi_{CRFA}[0,300(f_{cm})^{0,5} + 7,629(RI) + 0,373N^2] \quad (4.57)$$

$$f_{R,4} = \psi_{CRFA}[0,284(f_{cm})^{0,5} + 7,018(RI) + 0,343N^2] \quad (4.58)$$

$$\psi_{CRFA} = (1 + L_f/100)^{0,5} \quad (4.59)$$

$$RI = f \frac{l_f}{d_f} \quad (4.60)$$

Onde N representa o número de ancoragens na extremidade da fibra aplicada, l_f o comprimento da fibra, d_f o diâmetro da fibra, f a porcentagem volumétrica de fibras e f_{cm} a resistência à compressão uniaxial da matriz.

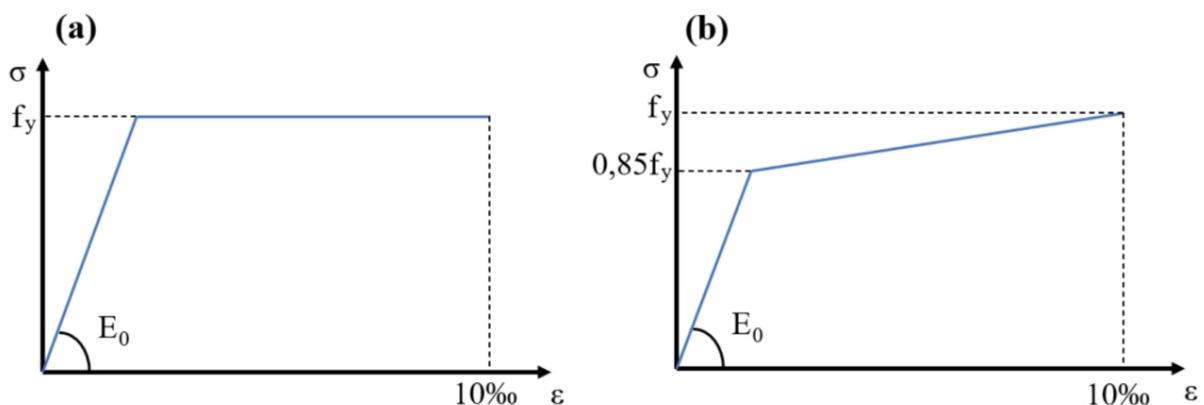
4.1.7 Modelos Constitutivos Elastoplásticos para o Aço

Para as análises realizadas neste trabalho, é aplicado um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras já que, em estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a tensões uniaxiais. No modelo computacional implementado, o aço é considerado um material elastoplástico que apresenta o mesmo comportamento para tensões de tração e compressão uniaxial.

Para aços com patamar de escoamento bem definido, adota-se um modelo elastoplástico perfeito. Já para aços encruados a frio, aplica-se um comportamento elastoplástico com endurecimento a partir de 85% da tensão de escoamento. O parâmetro de endurecimento é determinado de acordo com a Equação 4.61. A representação do comportamento constitutivo destes materiais dá-se por um gráfico tensão-deformação bilinear, como exemplificado na Figura 43.

$$H_s = \frac{0,15f_y}{10\% - \frac{f_y}{E_0}} \quad (4.61)$$

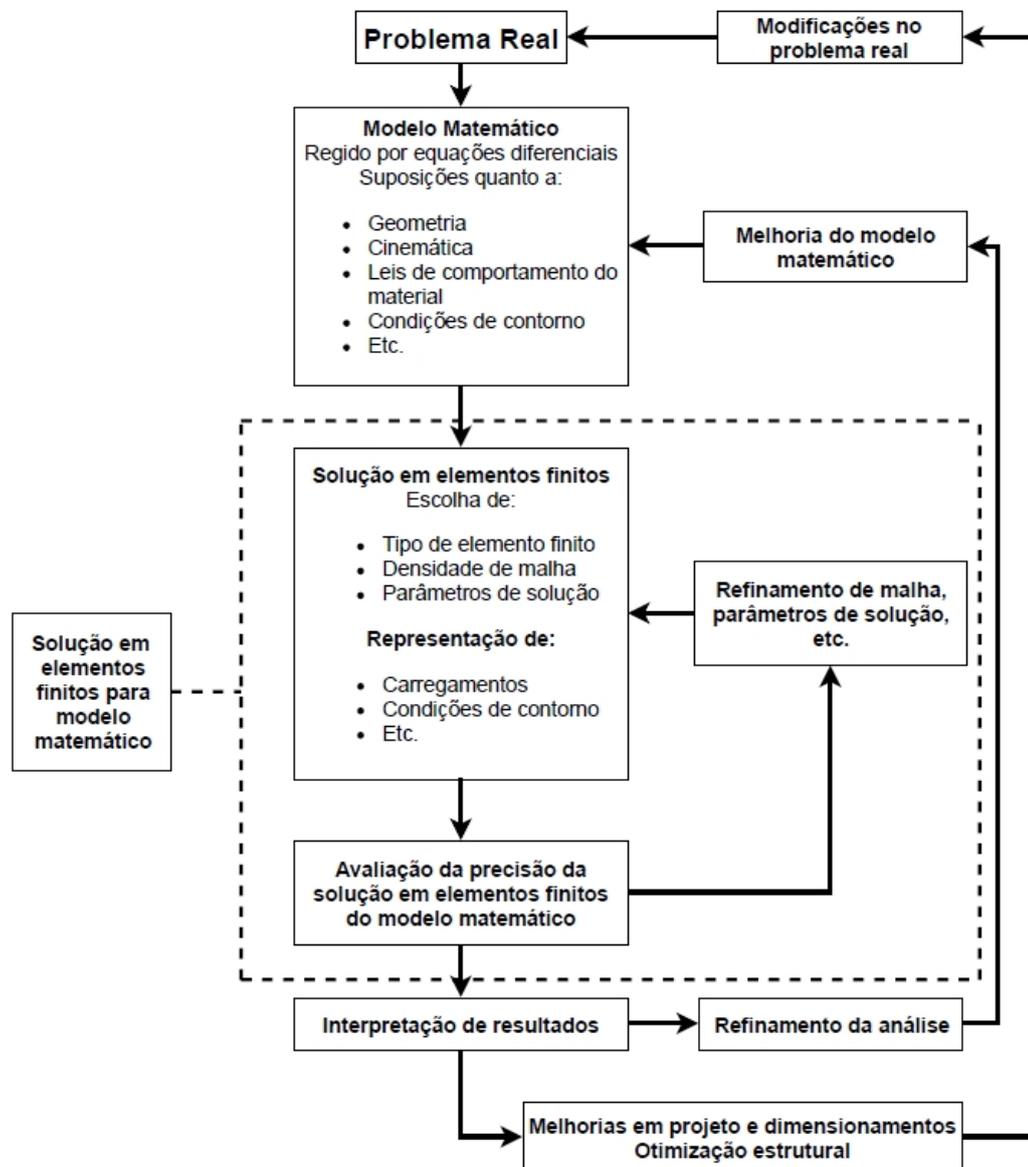
Figura 43 – Modelo elastoplástico perfeito (a) e com endurecimento linear (b) para armaduras de aço.



4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é empregado na resolução de problemas físicos em análise e projetos de engenharia. A Figura 44 resume o processo de análise baseada no MEF. O problema físico tipicamente envolve uma estrutura real ou componente de uma estrutura submetido a certos tipos de carregamentos. Por se caracterizar como um método numérico, as soluções propostas por análises em elementos finitos devem ter sua precisão checada. Dessa forma, caso o critério de precisão não seja atendido, a solução numérica deve ser repetida com parâmetros de solução mais refinados até que se alcancem os parâmetros de precisão desejados (BATHE, 2016).

Figura 44 – Processo de análise em elementos finitos.



Fonte – Adaptado de Bathe (2016).

Como resumido na Figura 44, a concepção do MEF está fundada na divisão de um meio contínuo em número discreto de subdomínios interligados entre si. Essa ligação é feita por pontos em seus contornos, de maneira que o conjunto de subdomínios se comporte de maneira igual ao meio contínuo. A formulação matemática geral para o método é descrita a seguir, conforme Soriano e Lima (2003).

4.2.1 Formulação Básica

O campo de deslocamentos, para pontos no interior de um elemento finito, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\{u\} = [N]\{u\}^t \quad (4.62)$$

Onde $[N]$ é a matriz que relaciona deslocamento de um ponto qualquer do elemento, $\{u\}$, como deslocamentos nodais do elemento, $\{u\}^t$, ou, ainda, é a matriz das funções de interpolação, N_i . Como as deformações específicas são expressas em termos de derivadas de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas, a partir da interpolação dos deslocamentos dados pela Equação 4.62, pode-se escrever:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\}^t = [B]\{u\}^t \quad (4.63)$$

sendo $[L]$ a matriz de operadores diferenciais e $[B]$ a matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos nodais, conforme explicitado em Equação 4.63.

$$[B] = [L][N] \quad (4.64)$$

As componentes de deformação específica se relacionam com as componentes de tensão por meio da Equação 4.65 onde $[E]$ é a matriz de elasticidade constitutiva ou de coeficientes elásticos do material.

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (4.65)$$

Considerando a variação do campo de deslocamentos (ou deslocamento virtual infinitesimal), a partir das relações apresentadas, têm-se as seguintes variações:

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u\}^t \quad (4.66)$$

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u\}^t \quad (4.67)$$

As expressões básicas do MEF são obtidas substituindo-se essas variações e o campo de deslocamentos na variação do funcional de energia potencial total, dado pela relação a seguir, a qual equivale ao Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Nessa relação, tem-se $\delta\pi$ como a variação do funcional da energia potencial total, $\{\varepsilon\}$ e $\{u\}$, a variação da deformação específica e do

deslocamento, respectivamente, $\{\sigma\}$ e $\{\sigma_0\}$ tensão e a tensão inicial, $\{\bar{p}\}$ a força de volume e $\{\bar{q}\}$ a força de superfície.

$$\delta\pi = \int_V \{\delta\varepsilon\}^t (\{\sigma\} + \{\sigma_0\}) dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}^t \{\bar{p}\} dV - \int_S \{\delta\varepsilon\}^t \{\bar{q}\} dS = 0 \quad (4.68)$$

A partir então da Equação 4.68, é possível obter a equação na forma compacta:

$$[S]^t \{\delta u\}^t = \{f\}^t \quad (4.69)$$

onde,

$$\{f\}^t = -\{f\}_p^t - \{f\}_q^t - \{f\}_{\sigma_0}^t \quad (4.70)$$

As relações acima apresentam um sistema de equações algébricas de equilíbrio genérico. Onde $[S]^t$ é a matriz de rigidez (simétrica) e $\{f\}^t$ é o vetor de forças nodais. Os valores em $\{u\}^t$ são os deslocamentos nodais, e $\{f\}_p^t$, $\{f\}_q^t$ e $\{f\}_{\sigma_0}^t$ são as forças nodais equivalentes às forças de volume, de superfície e tensões iniciais, respectivamente. A matriz de rigidez e os vetores de força são obtidos a partir das seguintes relações:

$$[S]^t = \int_{V_t} [B]^T [E] [B] dV_t \quad (4.71)$$

$$\{f\}_p^t = - \int_{V_t} [N]^T \{\bar{p}\} dV_t \quad (4.72)$$

$$\{f\}_q^t = - \int_{V_t} [N]^T \{\bar{q}\} dV_t \quad (4.73)$$

$$\{f\}_{\sigma_0}^t = - \int_{V_t} [B]^T \{\sigma_0\} dV_t \quad (4.74)$$

Deve-se ressaltar que, neste procedimento, lança-se mão do fato de o princípio dos trabalhos virtuais ser condição suficiente para o equilíbrio e que, arbitrando-se um campo de deslocamentos para o elemento, substitui-se com este princípio as equações diferenciais de equilíbrio e as condições mecânicas de contorno por equações algébricas de equilíbrio do elemento como um todo. No caso geral, escolhendo-se um referencial para cada ponto nodal da malha de elementos finitos, a partir dos sistemas de equações de equilíbrio dos diversos elementos e das forças externas diretamente aplicadas aos pontos nodais, obtém-se o sistema global de equações como mostrado a seguir. Onde $[S^*]$ representa a matriz de rigidez global, $\{d^*\}$ o vetor de deslocamentos nodais da malha (incluindo os deslocamentos restringidos ou de apoio) e $\{f^*\}$ o vetor correspondente às forças nodais.

$$[S^*] \{d^*\} = \{f^*\} \quad (4.75)$$

4.2.2 Elementos Finitos Aplicados à Análise

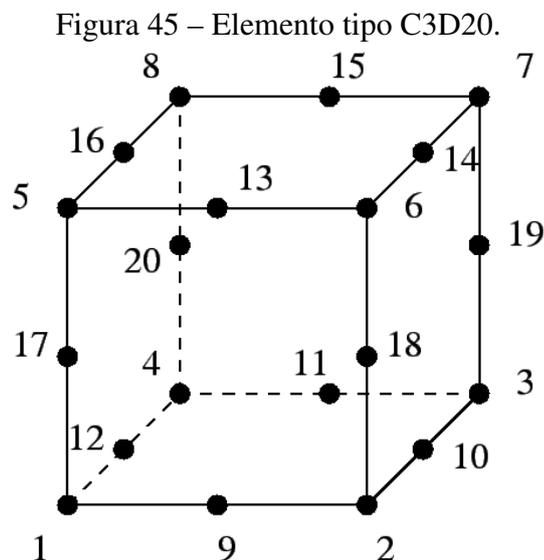
O Abaqus SE é ferramenta de análise em elementos finitos dispõe de uma vasta variedade de elementos uni, bi e tridimensionais, e, para orientar o usuário, disponibiliza também de uma biblioteca que traz informações pertinentes para cada elemento. A plataforma Abaqus SE oferece também opções diversificadas para a escolha de elementos finitos e de modelos constitutivos.

A seguir, são apresentados os tipos de elementos empregados neste trabalho para a análise do CRFA, junto com suas características e formulações apresentadas de acordo com Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) que desenvolveram o manual de auxílio do usuário do Abaqus SE.

4.2.2.1 Elementos Finitos Utilizados para o Concreto

Para representação do concreto foram utilizados elementos finitos tridimensionais isoparamétricos da família *Serendipity*. De acordo com Soriano e Lima (2003), elementos isoparamétricos são aqueles que utilizam as funções de interpolação para definir tanto as incógnitas do problema quanto a geometria a partir dos respectivos valores nodais. Elementos que possuem nós apenas em seu contorno fazem parte da família *Serendipity*.

Foram escolhidos então elementos hexaédricos do tipo C3D20. São caracterizados por pertencerem à família de elementos que suportam esforços tridimensionais, com vinte nós, três graus de liberdade por nó (translações em x, y e z) e funções de interpolação quadráticas.



Fonte – Adaptado de Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012).

Ele pode ser aplicado como elemento em camadas ou homogêneo, sendo a segunda opção a aplicação adotada. O elemento permite também a escolha entre a integração completa ou reduzida, sendo a completa a adotada, além de possibilitar o uso de armadura incorporada, que será de grande utilidade para o desenvolver deste trabalho.

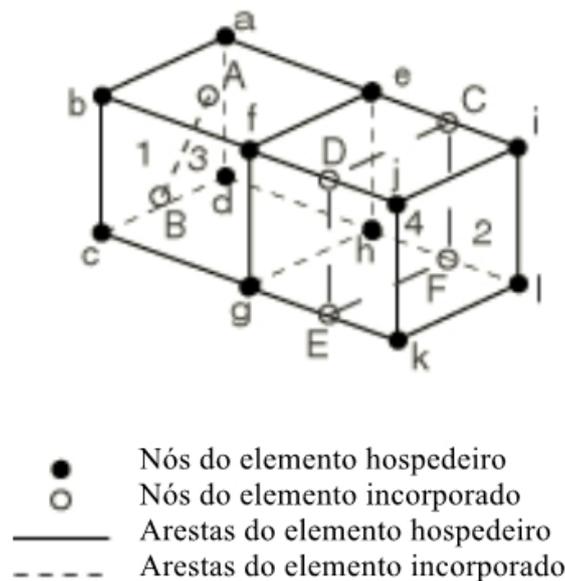
4.2.2.2 Elementos Finitos Utilizados para a Armadura

A aplicação de elementos capazes de reproduzir a armadura incorporada é uma forma conveniente de modelar as barras de aço do concreto armado, uma vez que o elemento de reforço utiliza os mesmos nós do elemento base de concreto, ainda que sua posição geométrica não coincida com eles.

A técnica de incorporação de elemento (*embedded element*) é utilizada para especificar que um certo grupo de elemento está embutido no elemento hospedeiro (*host*). Por exemplo, a técnica de incorporação de elementos pode ser facilmente aplicada na reprodução de barras de reforço em um elemento de concreto.

O Abaqus SE procura por relações geométricas entre os nós dos elementos incorporados no elemento hospedeiro. Se um nó do elemento incorporado está nos limites geométricos do elemento hospedeiro, os graus de liberdade translacionais e graus de liberdade poro-pressão do elemento incorporado são eliminados e embutidos ao elemento hospedeiro, tornando-se um nó incorporado. Assim, os graus de liberdade translacionais e de poro-pressão do nó incorporado são restringidos aos valores interpolados pelos nós do elemento hospedeiro.

Figura 46 – Elemento de treliça (AB) e de membrana (CDEF) embutidos em elementos hexaédricos.

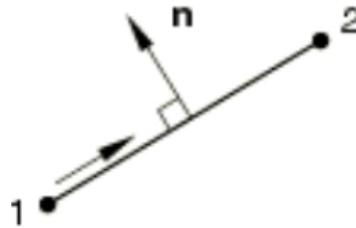


Fonte – Adaptado de Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012).

Tomando como base o exposto, optou-se pela utilização de treliça tridimensional T3D2, mostrada na Figura 47, para a modelagem das armaduras nos elementos simulados. O elemento de treliça pode ser usado em análises bi ou tridimensionais a fim de reproduzir estruturas esbeltas e lineares que apenas suportem esforços de natureza axial ou na linha central do elemento. O elemento não suporta forças perpendiculares ou momentos.

Além disso, a seção transversal do elemento de reforço deve ser pequena quando comparada ao seu comprimento longitudinal e é admitida uma aderência perfeita entre o reforço e o elemento base, não havendo movimento relativo entre eles.

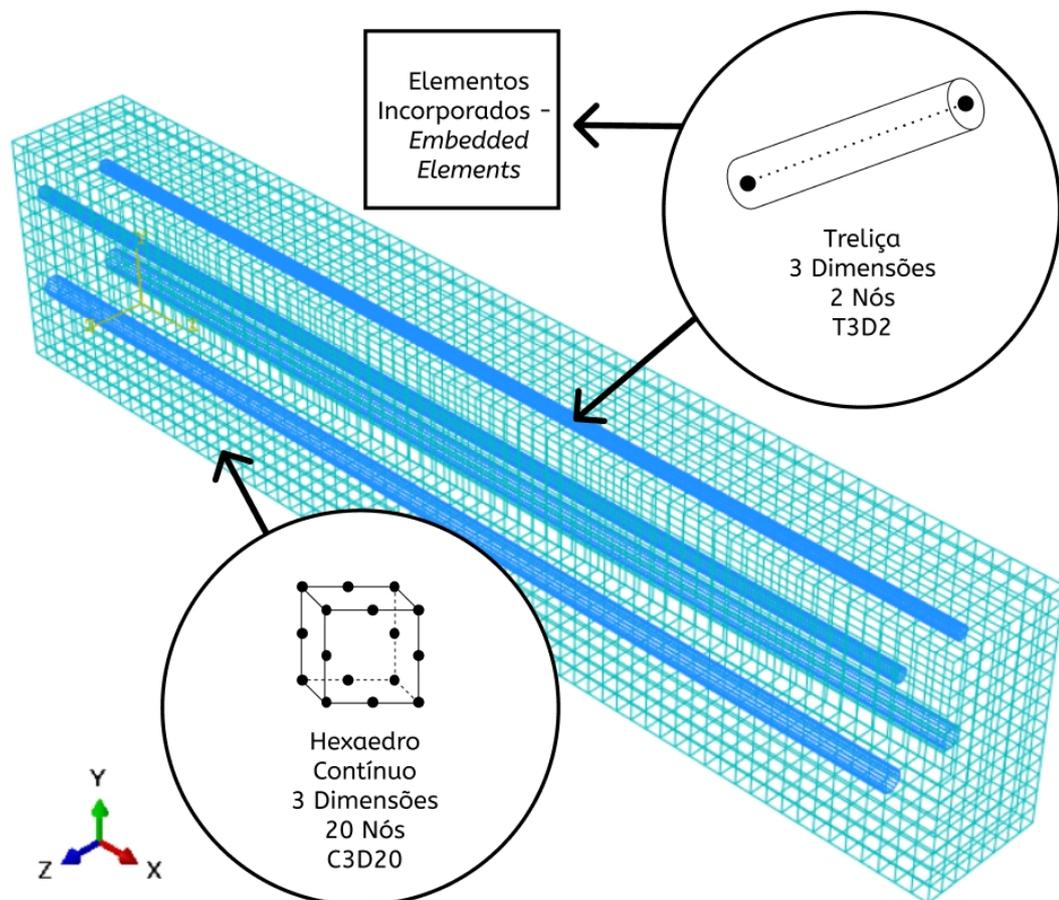
Figura 47 – Elemento de treliça tridimensional.



Fonte – Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012).

Desta forma, a Figura 48 resume a configuração final de elementos finitos e técnicas utilizadas para a montagem dos modelos.

Figura 48 – Esquema de malha e elementos finitos para as vigas modeladas.

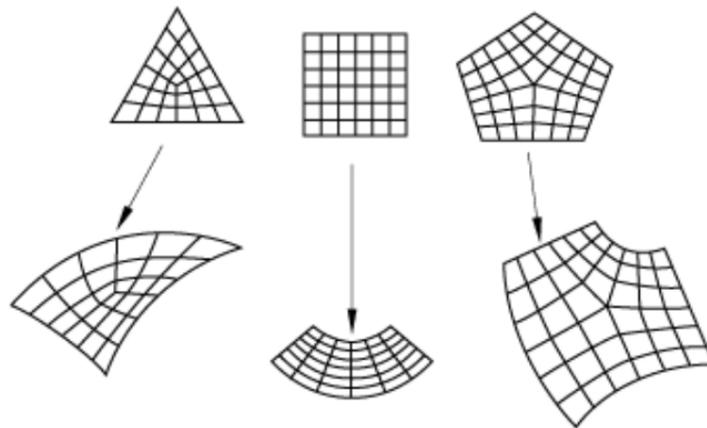


Fonte – Elaborado pelo autor.

Para a geração da malha de elementos finitos, utiliza-se o gerador do Abaqus SE. Determina-se um tamanho global dos elementos como entrada do usuário, a depender das dimensões da estrutura, considerado suficiente para conceber resultados satisfatórios. A técnica utilizada para a geração da malha é chamada de *Structured*.

O Abaqus SE transforma a malha de uma região regular, como um quadrado ou cubo, na região da geometria desejada pelo usuário. A Figura 49 ilustra como simples padrões de malhas triangulares, quadradas ou pentagonais são aplicadas para formas mais complexas. A técnica pode ser aplicada em elementos bi ou tridimensionais que tem elementos do tipo hexaédrico atribuídos à divisão de elementos finitos. Esta técnica dá um maior controle sobre a malha, porém a maior parte dos sólidos tem formas muito complexas para utilizar as malhas pré-estabelecidas, o que não se aplica às estruturas estudadas neste trabalho, pois são vigas prismáticas sem descontinuidades.

Figura 49 – Padrões de malhas estruturadas em duas dimensões.



Fonte – Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012).

5 ANÁLISES NUMÉRICAS E RESULTADOS

Nesta seção são utilizados os resultados experimentais de outros autores para um estudo comparativo e de validação das previsões de resistência e de comportamento mecânico do CRFA, conforme modelos propostos.

5.1 ANÁLISE DO MODELO DE DUTRA (2012) E DO MODELO *CONCRETE DAMAGED PLASTICITY* (CDP)

Primeiramente, são apresentados os trabalhos que avaliam as resistências uniaxial e biaxial à compressão do concreto e as superfícies de falha de acordo com a variação de parâmetros de carga, que tiveram seus resultados comparados aos modelos de previsão propostos por Dutra (2012), que tem como base o critério de resistência de Drucker-Prager.

Além disso, para fins de comparação entre os modelos, as resistências obtidas analiticamente também foram aplicadas à determinação da superfície de ruptura biaxial de acordo com o critério de Lee e Fenves (1998), o critério adotado pelo CDP.

Para isso, são apresentadas algumas suposições realizadas para a determinação da terceira resistência do compósito para a construção da superfície de ruptura biaxial. E, ao fim desta seção, é realizada uma conclusão com base nos resultados analíticos em comparação com os resultados experimentais.

Nota-se que, em sua maioria, os dados experimentais encontrados na literatura para o CRFA sob solicitações biaxiais apresentam poucos ou nenhum resultado referente ao compósito sob esforços de tração. Sendo assim, foi assumido nesta análise que, para solicitações biaxiais, a resistência à tração para o CRFA e o concreto sem reforço de fibras é o mesmo que o obtido para os compósitos sob solicitações uniaxiais. Então, para ambos tipos de concreto, é feita a estimativa de resistência à tração uniaxial de acordo com o que é proposto pela Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013), como mostrado nas equações 5.1 e 5.2.

$$f_{ctm} = 0,3 f_{cm}^{2/3}, \text{ para concretos classe } C \leq 50 \quad (5.1)$$

$$f_{ctm} = 2,12 \ln(1 + 0,11 f_{cm}), \text{ para concretos classe } C > 50 \quad (5.2)$$

onde f_{ctm} é a resistência média à tração do concreto e f_{cm} a resistência à compressão média do concreto. Desta forma, têm-se todos os parâmetros necessários para a elaboração das curvas

de ruptura biaxial do CRFA através das relações apresentadas por Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998).

5.1.1 Aplicação do modelo de Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998) para estados uniaxial e biaxial de tensões

Para a previsão de resistências e geração da curva de ruptura biaxial, foi utilizado uma rotina em MATLAB capaz de reproduzir de forma iterativa as equações apresentadas no Capítulo 3. As rotinas são apresentadas nos Apêndices A, B e C, ao final deste documento.

5.1.1.1 Yin et. al (1990)

Yin et al. (1990) avaliaram os ganhos de resistência à compressão biaxial do CRFA em relação ao concreto sem reforço de fibras. Foram analisadas três diferentes frações de reforço (0%, 1% e 2%), com resistência à compressão da matriz de $f_{cm} = 33,66$ MPa e fibras do tipo reta com resistência à tração de 414 MPa (σ_f). Os resultados experimentais são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados experimentais de Yin et al. (1990).

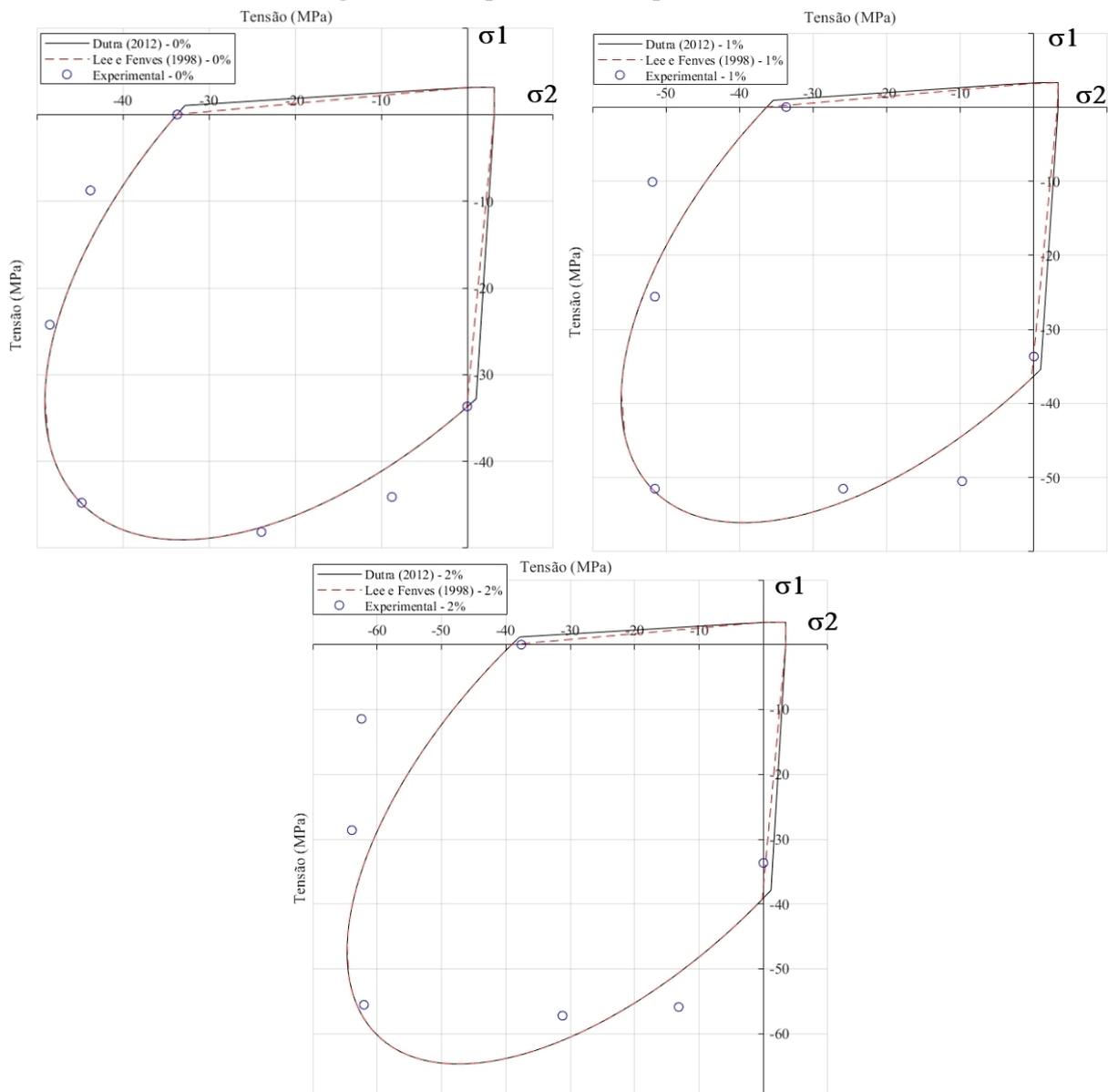
f (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
0	0	-33,661
	-8,75185	-43,7592
	-23,8993	-48,1352
	-44,7691	-44,7691
1,0	0	-33,661
	-9,76168	-50,4914
	-25,9189	-51,5013
	-51,5013	-51,5013
2,0	0	-33,661
	-13,16	-55,8772
	-31,208	-57,2236
	-55,5406	-62,04

Os resultados experimentais foram então aplicados às relações de Dutra (2012) para determinação das resistências à compressão uniaxial e biaxial e a estimativa de resistência à tração de acordo com Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013). As respostas analíticas são apresentadas na Tabela 6 e são utilizadas com a finalidade de construir as envoltórias de ruptura biaxial analíticas para que possam ser comparadas com as respostas experimentais, como é mostrado na Figura 50.

Tabela 6 – Resultados de resistências analíticas.

f (%)	0	1,0	2,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,33	1,45	1,6
f_{cm} (MPa)	33,7	36,3	39,1
f_{cbm} (MPa)	44,82	51,7	60,1
f_{ctm} (MPa)	3,13	3,3	3,45

Figura 50 – Superfícies de ruptura biaxial.



Fonte – Elaborado pelo autor.

5.1.1.2 Traina e Mansour (1991)

Na investigação realizada por Traina e Mansour (1991) foram realizados testes em cubos sob solicitações biaxiais de compressão. Foram aplicadas às misturas porcentagens de fibras de

0%, 0,5%, 1,0% e 1,5%. As fibras escolhidas foram do tipo ancoradas na extremidades e com resistência à tração uniaxial de 1100 MPa (σ_f). A relações entre as resistências biaxiais e uniaxiais à compressão variavam de acordo com a porcentagem de fibras e a resistência à compressão da matriz registrada foi de $f_{cm} = 82,7$ MPa. Os resultados experimentais são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Resultados experimentais de Traina e Mansour (1991).

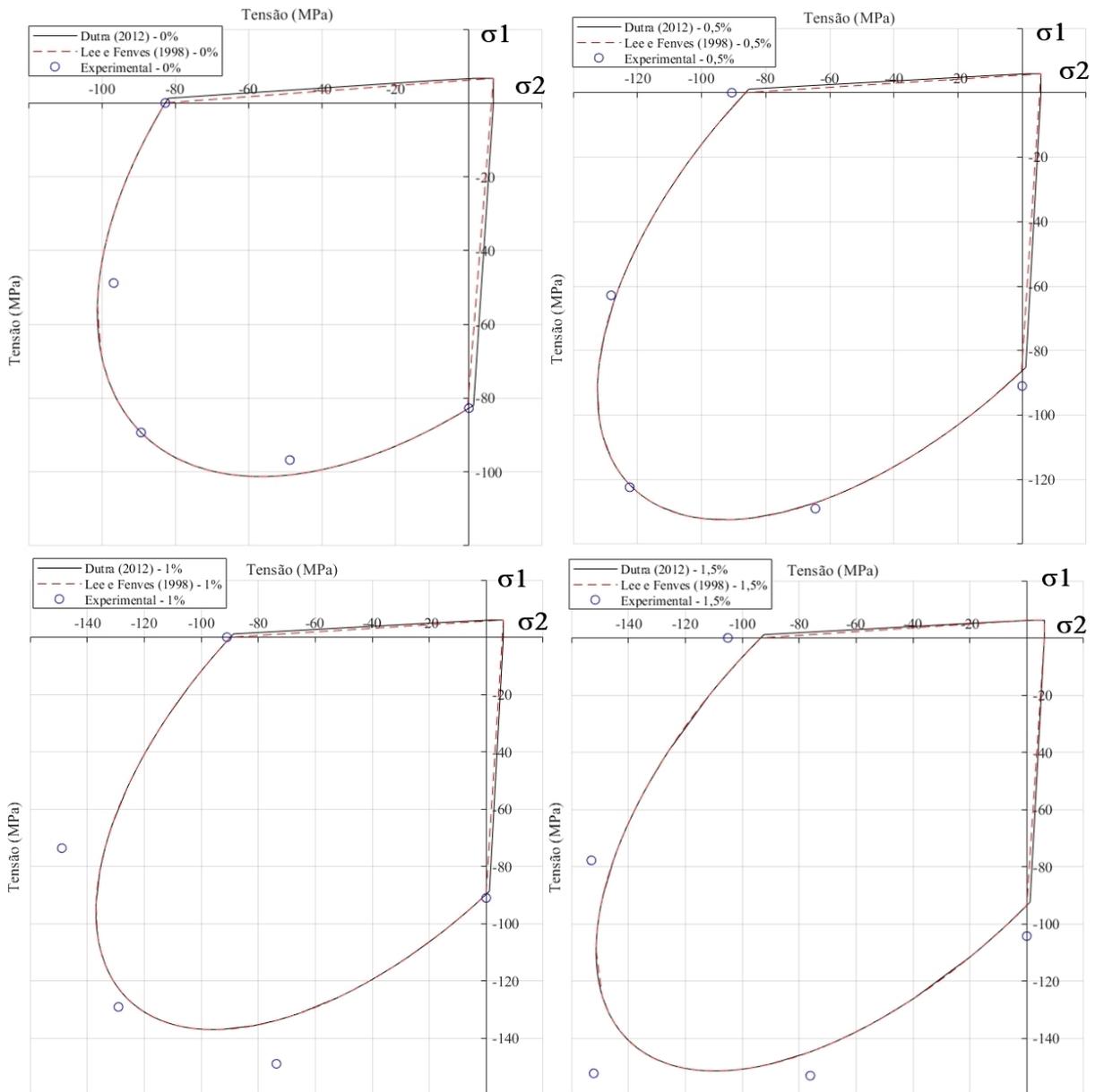
f (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
0	0	-82,7
	-96,759	-48,793
	-89,316	-89,316
0,5	0	-90,5565
	-129,012	-64,506
	-122,396	-122,396
1	0	-90,97
	-148,86	-73,603
	-129,012	-129,012
1,5	0	-105,029
	-152,995	-76,084
	-152,168	-152,168

Os resultados para as resistências analíticas, apresentados na Tabela 8, foram utilizados para a construção das curvas de ruptura biaxial, com resultados expostos na Figura 51.

Tabela 8 – Resultados analíticos para resistências.

f (%)	0	0,5	1	1,5
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,08	1,43	1,43	1,55
f_{cm} (MPa)	82,7	86,3	89,7	93,5
f_{cbm} (MPa)	89,31	122	126	140,3
f_{ctm} (MPa)	4,72	4,8	4,9	4,95

Figura 51 – Curvas de ruptura biaxial.



Fonte – Elaborado pelo autor.

5.1.1.3 Lim e Nawy (2005)

Lim e Nawy (2005) avaliaram corpos de prova moldados com concreto com e sem fibras com frações volumétricas de fibras de 0,5%, 1,0% e 1,5% para carregamentos compressivos, com proporção de $\sigma_1/\sigma_2 = 0; 0,5; 0,75$ e 1. As fibras empregadas no experimento tinham resistência à tração uniaxial 1115 MPa (σ_f), a relação entre resistências biaxial e uniaxial varia de acordo com a fração de fibras na matriz e a resistência uniaxial à compressão da matriz de $f_{cm} = 82,3$ MPa. A Tabela 9 apresenta os resultados experimentais obtidos pelos autores.

Tabela 9 – Resultados experimentais de Lim e Nawy (2005).

f (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
0	0	-82,3
	-53,45	-106,9
	-76,575	-102,1
	-98,5	-98,5
0,5	0	-88,1
	-56,4	-112,8
	-81,9	-109,2
	-104	-104
1	0	-88,5
	-56,2	-112,4
	-82,275	-109,7
	-101,8	-101,8
1,5	0	-100,8
	-60,5	-121
	-89,175	-118,9
	-109	-109

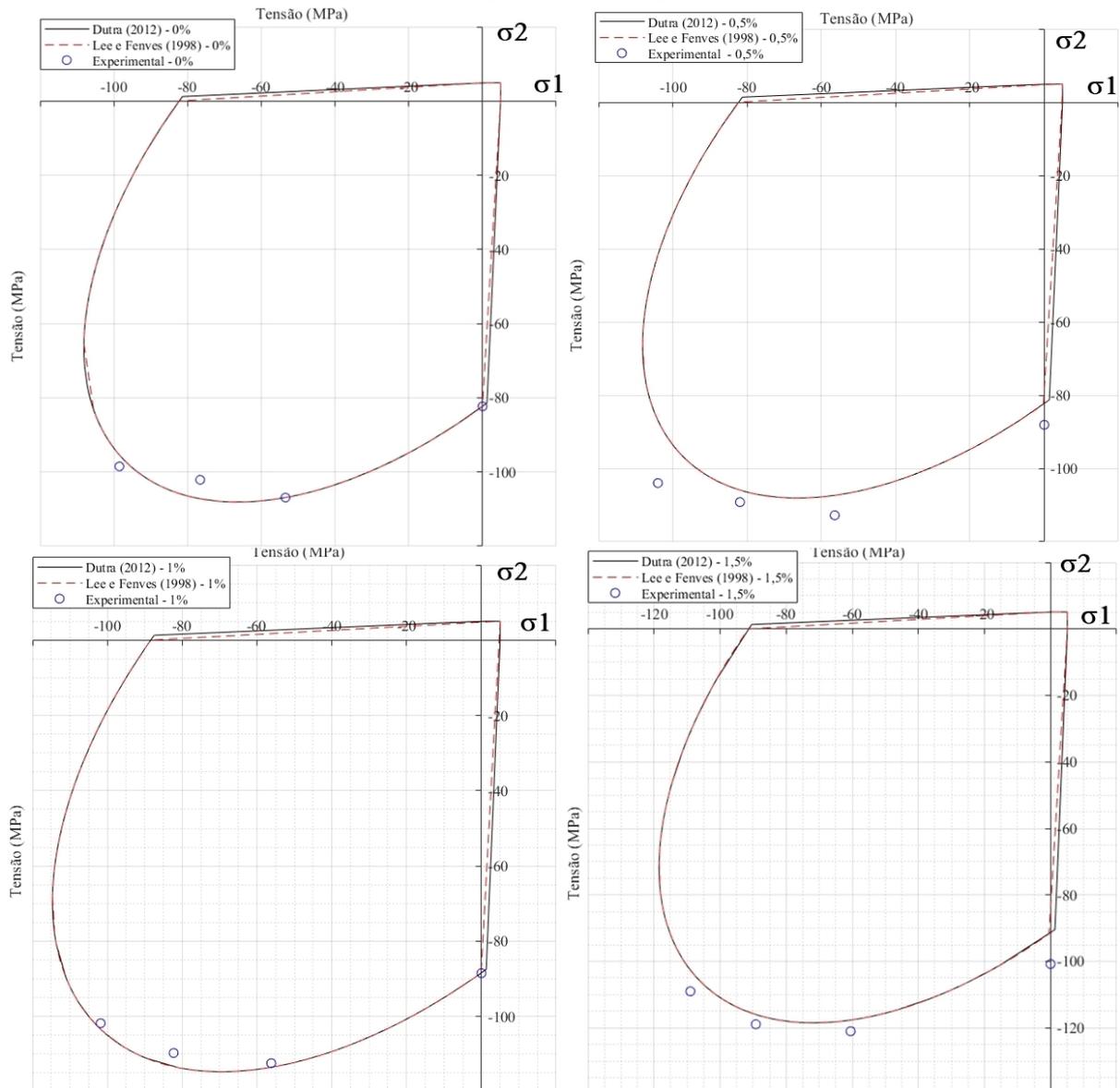
Foram realizados os cálculos com os parâmetros apresentados pelos autores, de acordo com as formulações apresentadas por Dutra (2012), para as resistências à compressão uniaxial e biaxial, e de acordo com Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013), para a resistência à tração uniaxial. Os resultados analíticos são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Resultados analíticos para resistências.

f (%)	0	0,5	1	1,5
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,18	1,18	1,16	1,16
f_{cm} (MPa)	82,3	85,4	88,4	91,4
f_{cbm} (MPa)	97	100,7	102,6	106
f_{ctm} (MPa)	4,89	4,96	5,02	5,1

Pôde-se verificar uma boa concordância entre os resultados de resistência previstos e os obtidos analiticamente. Assim foram definidas as curvas de ruptura biaxial de acordo com a formulação de Dutra (2012) e com a de Lee e Fenves (1998), apresentadas na figura 52, que se mostraram coerentes por determinar uma envoltória condizente com a obtida através dos resultados experimentais.

Figura 52 – Superfícies de ruptura biaxial.



Fonte – Elaborado pelo autor.

5.1.1.4 Swaddiwudhipong e Seow (2006)

Na análise realizada por Swaddiwudhipong e Seow (2006), foram avaliados cinquenta e quatro corpos de prova de concreto simples e reforçado com fibras de aço em volumes de 0,5%, 1% e 1,5% sob solicitações biaxiais de compressão. As fibras utilizadas tinham resistência nominal à tração igual a 1100 MPa (σ_f), relação entre resistências biaxial e uniaxial igual a 1,16 e resistência uniaxial à compressão da matriz de $f_{cm} = 31,06$ MPa. Os resultados dos experimentos dos autores são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 – Resultados experimentais de Swaddiwudhipong e Seow (2006).

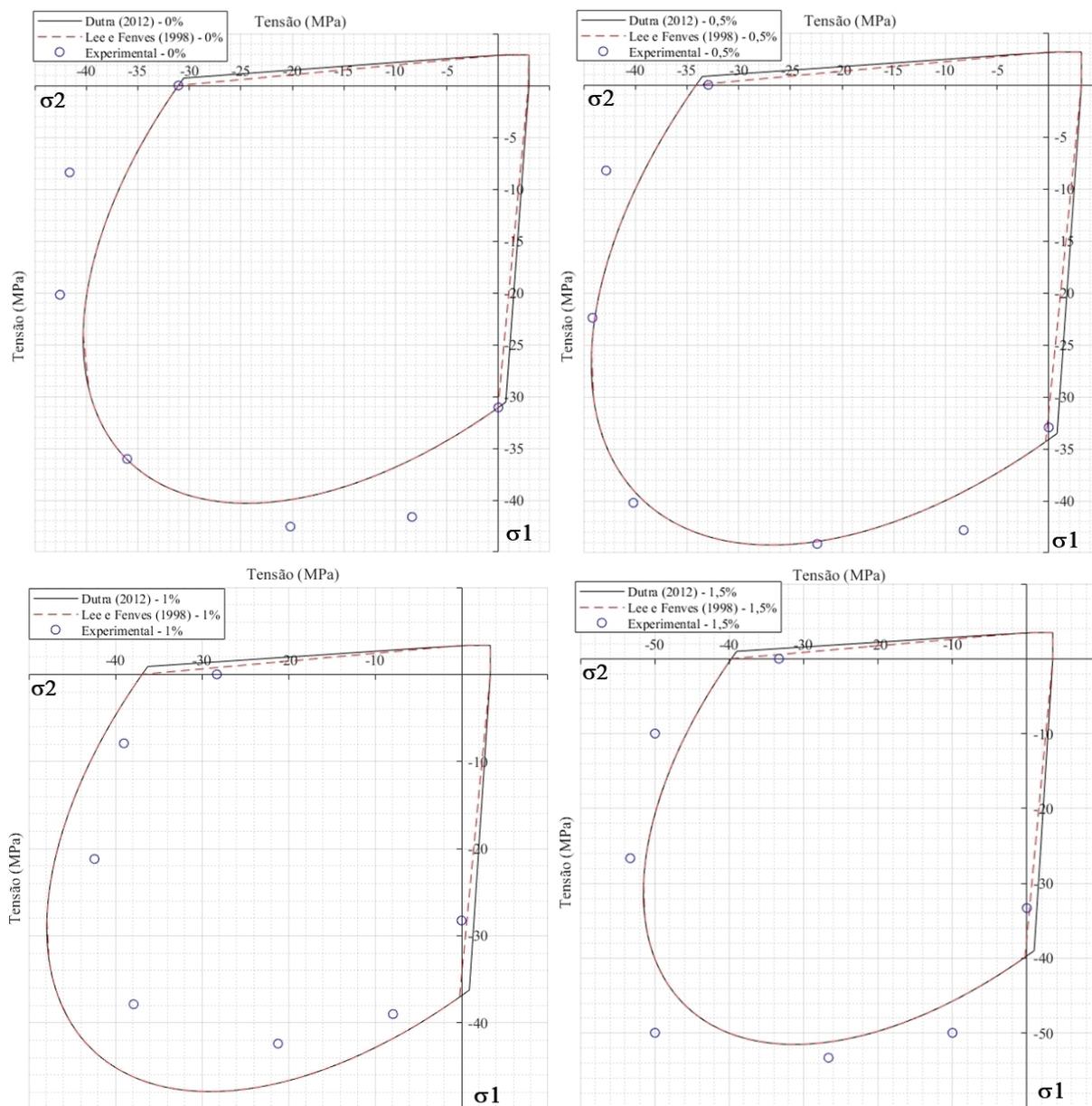
f (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
0	0	-31,06
	-8,3862	-41,6204
	-20,189	-42,5522
	-36,0296	-36,0296
0,5	0	-32,94
	-8,235	-42,822
	-22,3992	-44,1396
	-40,1868	-40,1868
1,0	0	-28,27
	-7,9156	-39,0126
	-21,2025	-42,405
	-37,8818	-37,8818
1,5	0	-33,31
	-9,993	-49,965
	-26,648	-53,296
	-49,965	-49,965

Os resultados apresentados pelos autores foram aplicados às rotinas de cálculo em MATLAB para a determinação das resistências, de acordo com a formulação proposta por Dutra (2012), e definição das curvas de ruptura biaxial, para as equações apresentadas por Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998). Os resultados para as resistências analíticas são apresentados na Tabela 12 e na Figura 53 as curvas de ruptura biaxial em comparação com os resultados experimentais.

Tabela 12 – Resultados analíticos para resistências.

f (%)	0	0,5	1	1,5
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,16	1,16	1,16	1,16
f_{cm} (MPa)	31,06	34,1	36,9	39,7
f_{cbm} (MPa)	36,03	39,6	42,88	46,1
f_{ctm} (MPa)	2,96	3,16	3,33	3,45

Figura 53 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.



Fonte – Elaborado pelo autor.

5.1.1.5 Kolle (2006)

Kolle (2006) apresentou resultados de testes com CRFA sob solicitações biaxiais de compressão e tração-compressão. Em sua avaliação, foram testados corpos de prova com volumes de fibras entre 0,5% e 2% e com $\sigma_f = 1200$ MPa, para a tensão de tração das fibras, e diferentes fatores de forma. Para este trabalho, optou-se pela utilização dos dados referentes às fibras com fator de forma igual a 65. A relação entre as resistências à compressão biaxial e uniaxial variou de acordo com a a fração de fibras e com resistência uniaxial à compressão da matriz de $f_{cm} = 103,9$ MPa. Os resultados experimentais utilizados são apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Resultados experimentais de Kolle (2006).

f (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
0	0	-114,7056
	-35,326	-131,6413
	-68,0545	-131,6413
	-102,2376	-136,5246
	-107,1209	-119,7967
	0	-99,744
	-67,6389	-135,2778
	-128,0048	-128,0048
	6,9412	0
	4,7838	-18,8538
	3,8458	-18,8538
	1,9698	-28,2338
	1,0318	-74,102
	0	-93,0496
1	0	-121,2513
	-34,5987	-136,9402
	-71,8988	-138,9143
	-115,6407	-152,9408
	-122,3942	-139,1221
	-39,2742	-155,5383
	-117,3031	-170,7077
	0	-113,6666
	6,3784	0
	4,69	-6,6598
	3,5644	-58,8126
	1,5946	-107,9638
	0	-106,7444

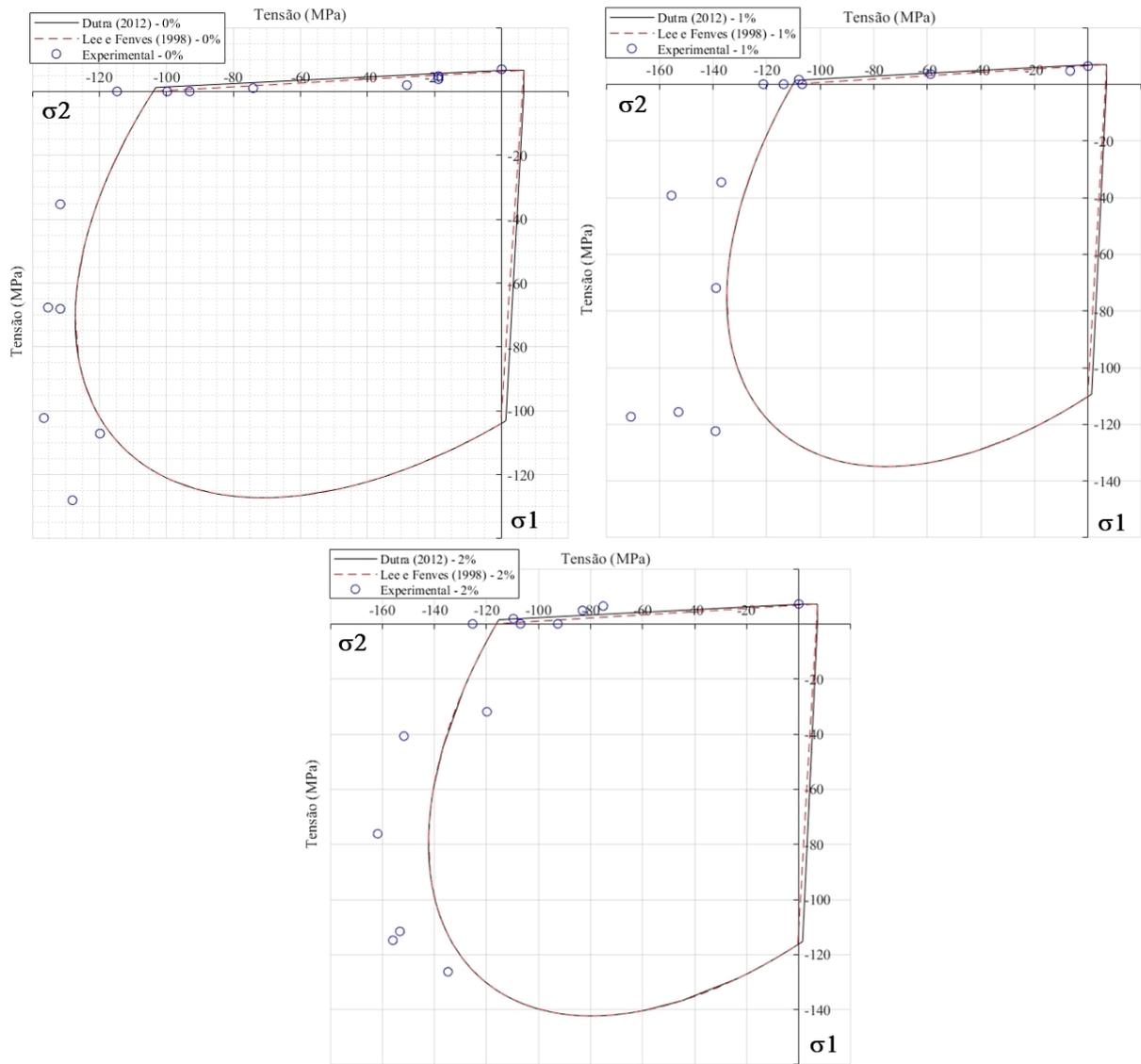
Continuação da tabela 13		
f (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
	0	-106,9131
	-31,8973	-119,7967
	-76,1587	-161,7723
	-111,5886	-153,2525
	-126,2385	-134,7583
	-40,7288	-151,694
2	-114,8095	-155,9539
	0	-125,3034
	7,2226	0
	6,4722	-75,1338
	4,8776	-83,1068
	1,876	-109,6522
	0	-92,5806

Usando os dados experimentais dos referidos autores, foi possível determinar as resistências analíticas (Tabela 14) e, com elas, a confecção das envoltórias de resistência biaxial para fins de comparação com os dados experimentais, como mostrado na Figura 54.

Tabela 14 – Resistências analíticas.

f (%)	0	1,0	2,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,08	1,08	1,08
f_{cm} (MPa)	103,9	110,17	116,16
f_{cbm} (MPa)	112,21	119	125,5
f_{ctm} (MPa)	6,63	6,89	7,14

Figura 54 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.



Fonte – Elaborado pelo autor.

5.1.1.6 Peres (2008)

Em seu estudo, Peres (2008) desenvolveu uma série de experimentos com CRFA sob solicitações uniaxiais e biaxiais de compressão. Foram avaliados corpos de prova com frações volumétricas de fibras de 0,5%, 1,0% e 1,5% para carregamentos compressivos com proporção de $\sigma_1/\sigma_2 = -1/0, -1/-0,2, -1/-0,5$ e $-1/-1$. As fibras aplicadas ao concretos apresentavam uma tensão nominal de $\sigma_f = 1200$ MPa, a relação entre resistências biaxial e uniaxial à compressão varia de acordo com os volumes de fibras na matriz e a resistência à compressão uniaxial da matriz foi de $f_{cm} = 28,2443$ MPa. Os resultados são mostrados na Tabela 15.

Tabela 15 – Resultados experimentais de Peres (2008).

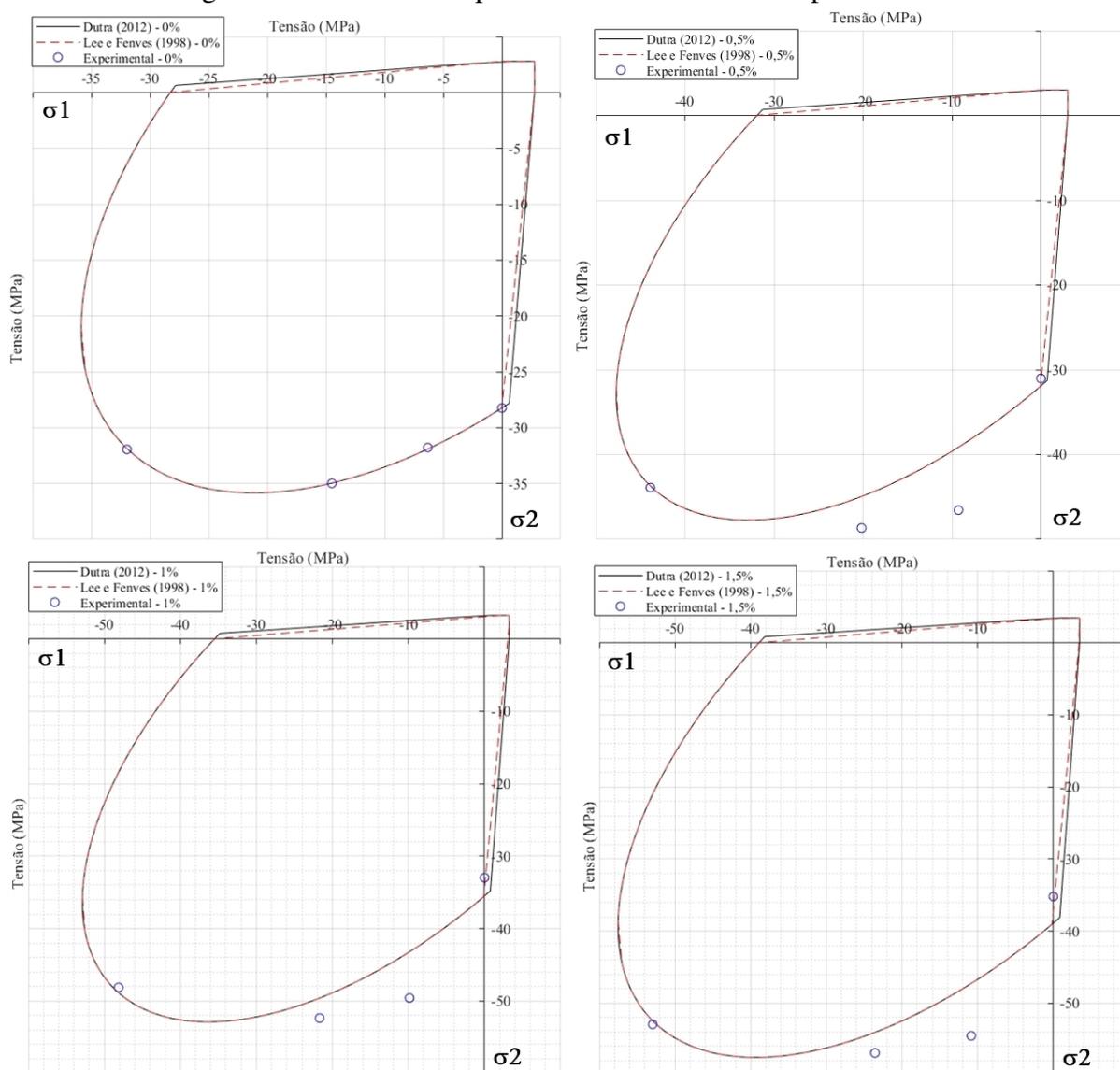
<i>f</i> (%)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
0	0	-28,2443
	-6,3225	-31,7853
	-14,492	-34,9867
	-31,9512	-31,9512
0,5	0	-31,025
	-9,2606	-46,556
	-20,1567	-48,6626
	-43,8878	-43,8878
1,0	0	-32,9769
	-9,8625	-49,582
	-21,6876	-52,3586
	-48,1304	-48,1304
1,5	0	-35,2051
	-10,8481	-54,5369
	-23,5738	-56,9122
	-52,9387	-52,9387

Com os dados experimentais, foi possível determinar as resistências analíticas e as envoltórias de ruptura biaxial para o CRFA de acordo com as equações de Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998), apresentados respectivamente na Tabela 16 e Figura 55.

Tabela 16 – Resistências analíticas.

<i>f</i> (%)	0	0,5	1	1,5
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,13	1,4	1,4	1,4
f_{cm} (MPa)	28,24	31,9	35,5	38,9
f_{cbm} (MPa)	31,91	43,8	48,5	52,7
f_{ctm} (MPa)	2,78	3,01	3,24	3,44

Figura 55 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.



Fonte – Elaborado pelo autor.

5.1.1.7 Bao et. al (2018)

Bao et al. (2018) apresentam uma investigação experimental de corpos de prova de CRFA sob diferentes taxas de deformação em compressão biaxial. No estudo, são analisados corpos de prova cúbicos com volume de fibras de 0%, 1%, 2% e 3%, submetidos a tensões de diferentes taxas de deformação. As fibras utilizadas apresentavam uma tensão nominal igual a 1350 MPa (σ_f), as relações entre resistências biaxial e uniaxial à compressão variavam de acordo com a taxa de deformação aplicada e frações volumétricas de fibras. Os resultados experimentais obtidos pelos autores são apresentados nas tabelas de 17 a 20, separadas por volumes de fibras aplicados às misturas.

Tabela 17 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 0\%$.

$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-5}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-4}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-3}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-2}
σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)
-34,56	0	-35,8	0	-36,85	0	-37,4	0
-40	-10	-42,28	-10,57	-43,46	-10,86	-45,31	-11,32
-42,7	-21,35	-43,65	-21,82	-47,65	-23,82	-48,27	-24,13
-42,41	-31,80	-43,3	-32,47	-44,75	-33,56	-46,1	-34,57
-37,28	-37,28	-38,89	-38,89	-39,5	-39,5	-41,3	-41,3
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,07	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,08	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,07	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,10

Tabela 18 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 1,0\%$.

$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-5}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-4}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-3}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-2}
σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)
-40,56	0	-42,33	0	-43,8	0	-46,86	0
-51,85	-12,96	-52,74	-13,18	-54,67	-13,66	-56,34	-14,08
-53	-26,5	-54,3	-27,15	-57,04	-28,52	-59,49	-29,74
-48,2	-36,15	-50,1	-37,57	-53,67	-40,25	-57,19	-42,89
-47,16	-47,16	-49,8	-49,8	-52,39	-52,39	-56,09	-56,09
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,16	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,17	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,19	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,19

Tabela 19 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 2,0\%$.

$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-5}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-4}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-3}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-2}
σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)
-41,88	0	-42,35	0	-43	0	-44,97	0
-53,2	-13,3	-56,2	-14,05	-58,58	-14,64	-59,88	-14,97
-55,43	-27,71	-59,6	-29,8	-60,28	-30,14	-62	-31
-53,4	-40,05	-55,97	-41,97	-57,21	-42,90	-58,27	-43,70
-52,73	-52,73	-53,21	-53,21	-56,11	-56,11	-57,3	-57,3
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,25	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,25	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,30	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,27

Tabela 20 – Resultados experimentais de Bao et al. (2018) para $f = 3,0\%$.

$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-5}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-4}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-3}	$\dot{\epsilon}(s^{-1})$	10^{-2}
σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)
-38,48	0	-40,78	0	-47,35	0	-51,49	0
-54	-13,5	-57,53	-14,38	-60,06	-15,01	-62	-15,5
-57,47	-28,73	-60	-30	-62,59	-31,29	-63,78	-31,89
-55,31	-41,48	-59,63	-44,72	-61	-45,75	-62,1	-46,57
-56,85	-56,85	-57,28	-57,28	-59,36	-59,36	-61	-61
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,47	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,40	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,25	$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,18

Com base nos resultados experimentais apresentados pelos autores, foram realizados os cálculos para resistências obtidas de forma analítica, cujo valores são expostos nas tabelas 21 a 24. Tendo então as resistências analíticas, foi possível desenvolver as curvas de ruptura biaxial para as equações de Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998), como mostrado nas figuras de 56 a 59.

Tabela 21 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-5}s^{-1}$.

f (%)	0	1,0	2,0	3,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,08	1,16	1,18	1,1
f_{cm} (MPa)	34,56	41,6	48,5	53,2
f_{cbm} (MPa)	37,32	48,3	56,8	58,6
f_{ctm} (MPa)	3,18	3,6	3,98	4,24

Tabela 22 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-4}s^{-1}$.

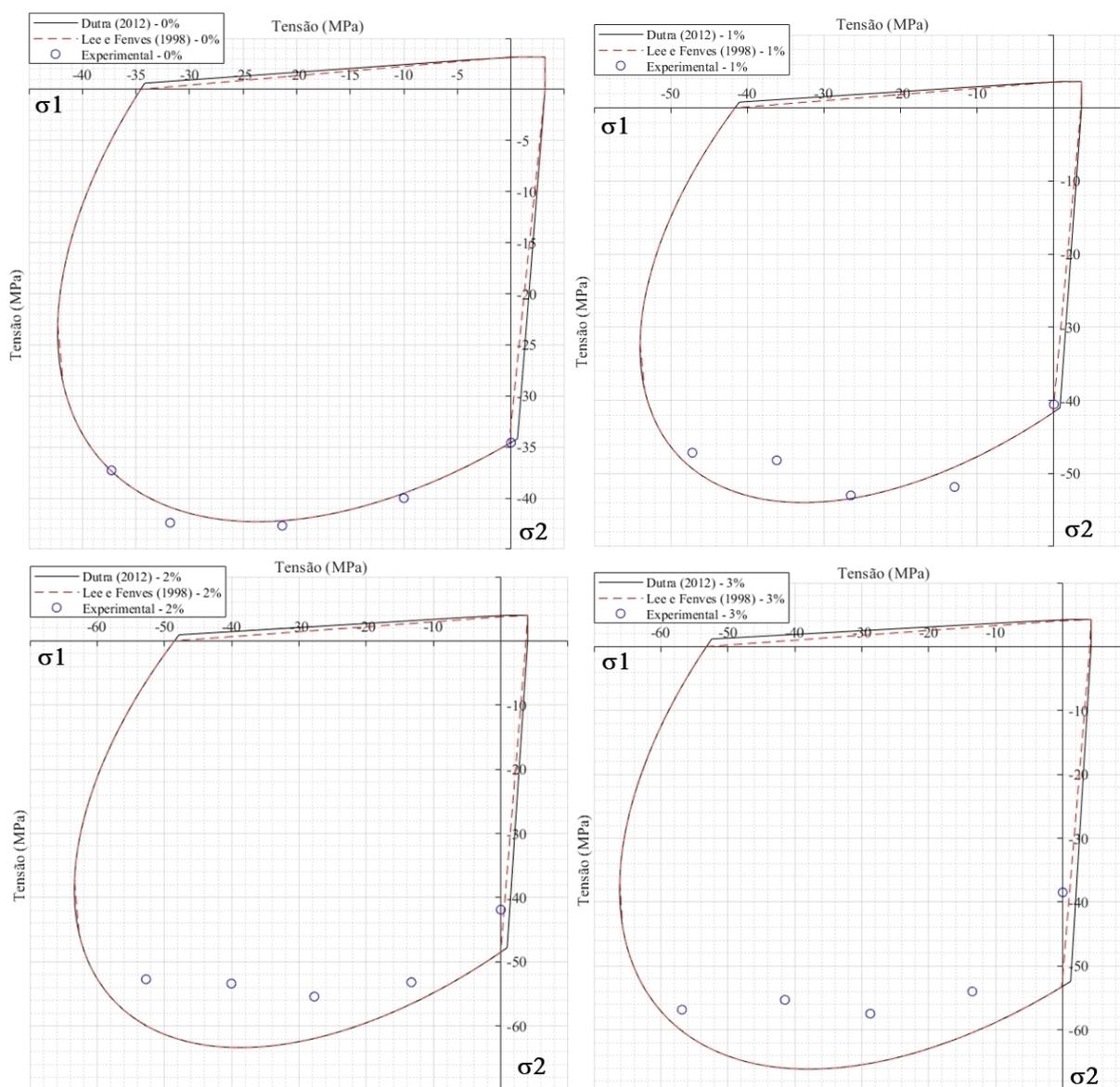
f (%)	0	1,0	2,0	3,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,08	1,16	1,1	1,1
f_{cm} (MPa)	35,8	43	48,8	54,1
f_{cbm} (MPa)	38,66	49,8	53,7	58,8
f_{ctm} (MPa)	3,25	3,68	4,0	4,29

Tabela 23 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-3}s^{-1}$.

f (%)	0	1,0	2,0	3,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,08	1,16	1,14	1,08
f_{cm} (MPa)	36,85	44	50,4	55,24
f_{cbm} (MPa)	39,79	51	57,4	59,7
f_{ctm} (MPa)	3,32	3,74	4,1	4,35

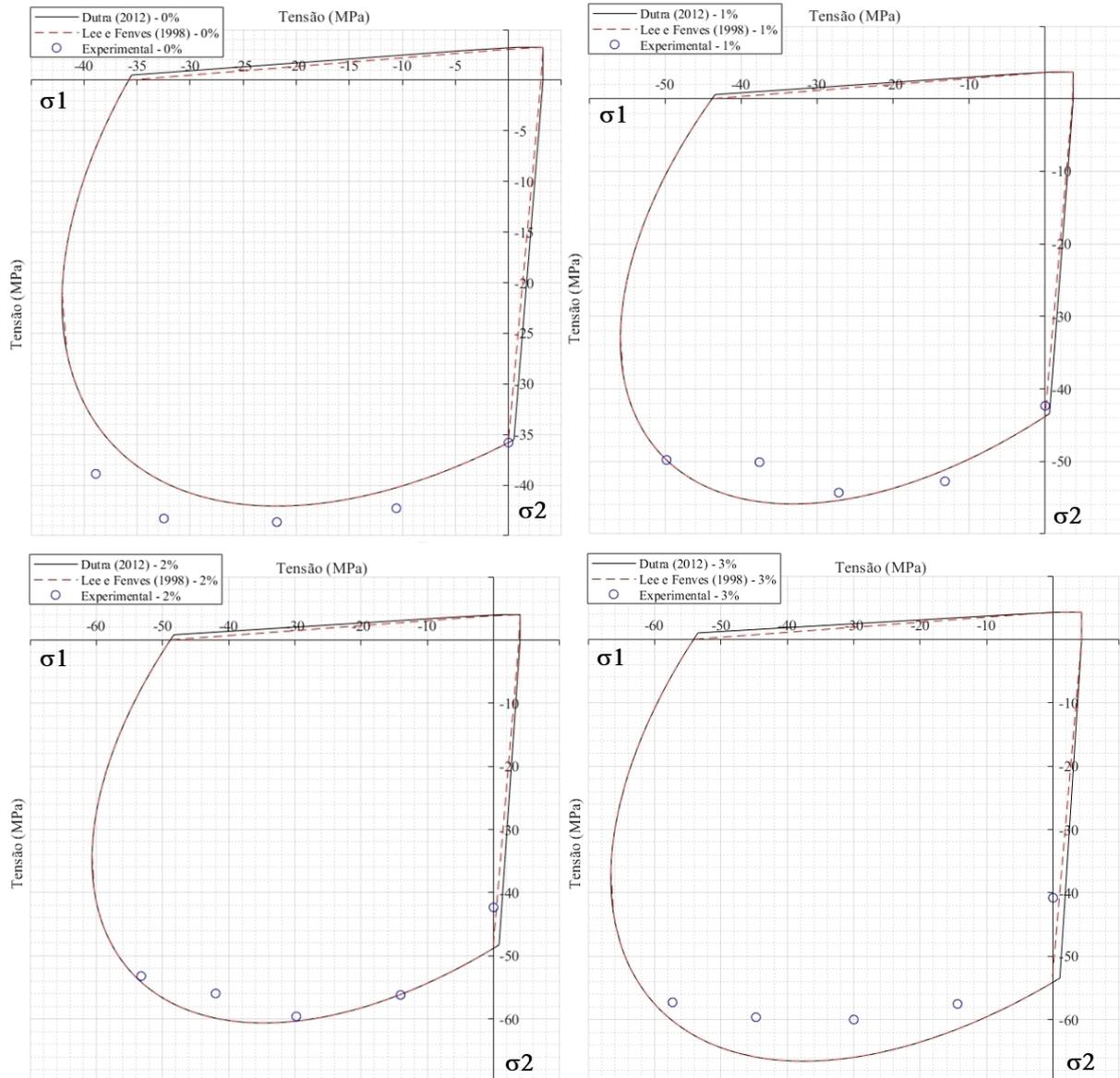
Tabela 24 – Resultados analíticos para resistências, $\dot{\epsilon} = 10^{-2} s^{-1}$.

f (%)	0	1,0	2,0	3,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,1	1,2	1,1	1,1
f_{cm} (MPa)	37,4	44,8	50,45	56,2
f_{cbm} (MPa)	41,14	53,5	55,5	61,9
f_{ctm} (MPa)	3,35	3,78	4,1	4,40

Figura 56 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-5} s^{-1}$.

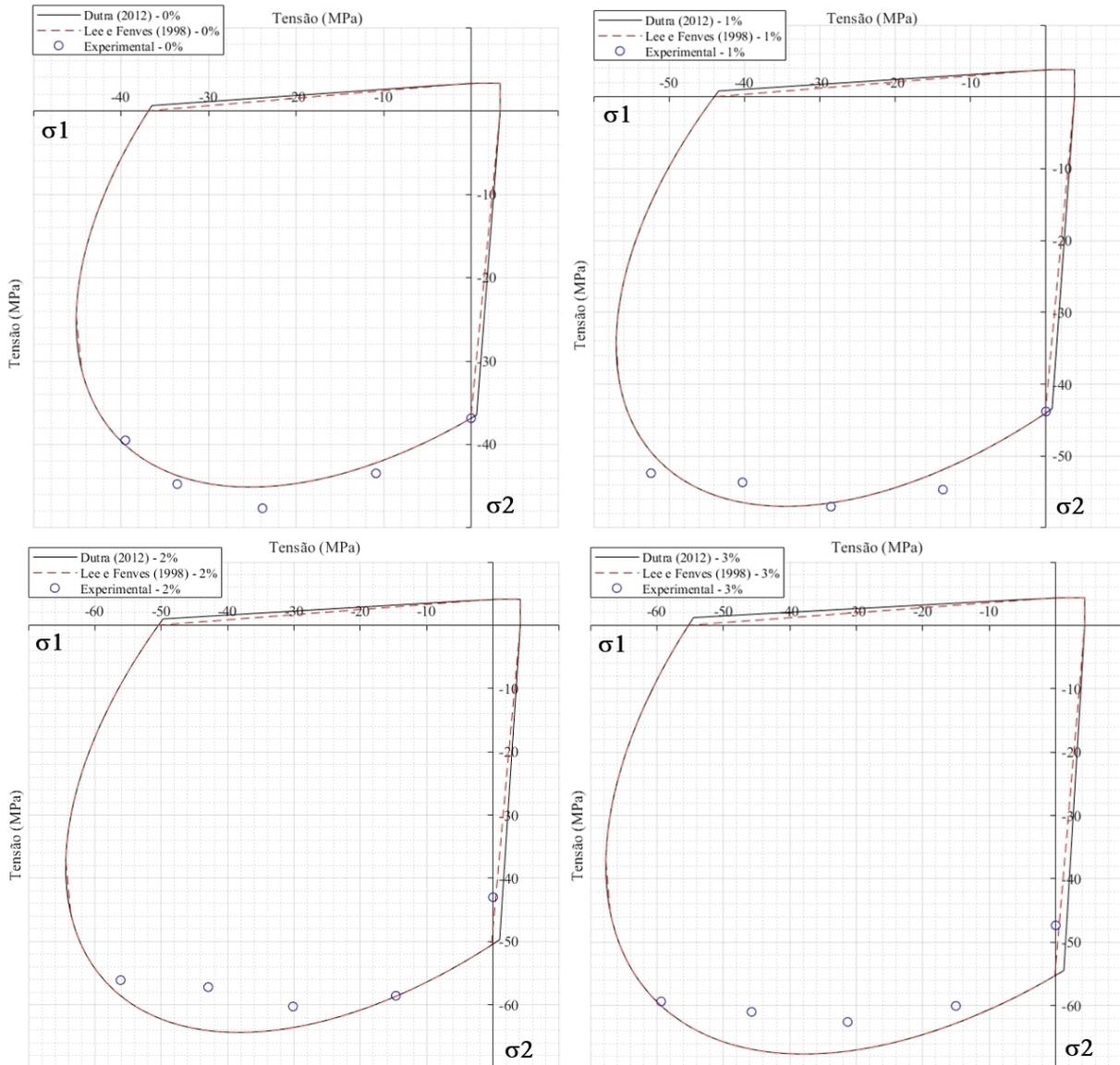
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 57 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} s^{-1}$.



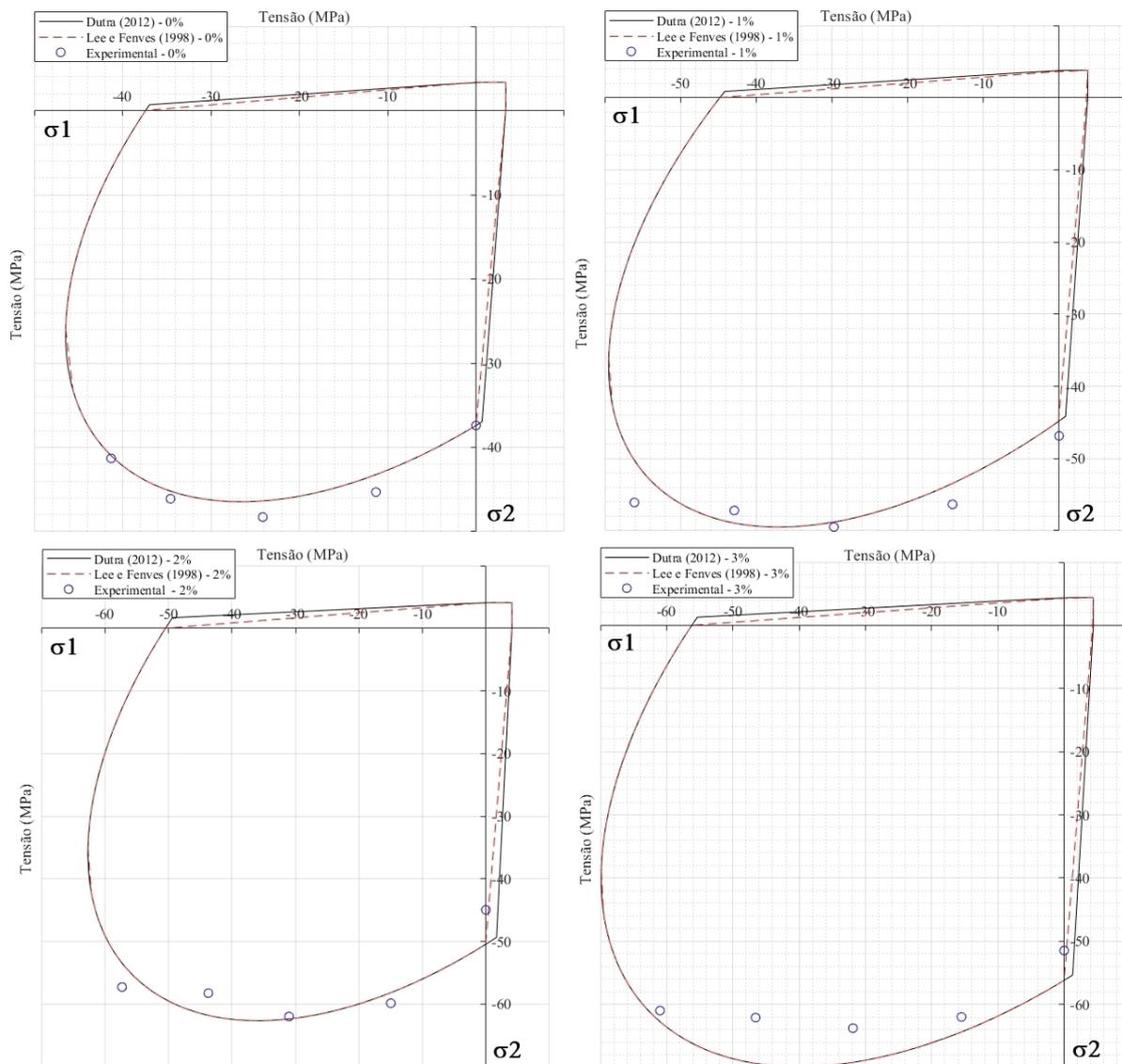
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 58 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 59 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais, $\dot{\epsilon} = 10^{-2} s^{-1}$.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Para este experimento, em especial, vale destacar as diferentes taxas de deformação apresentadas pelos autores. O modelo de previsão de resistências e da curva de ruptura biaxial de Drucker-Prager modificado não levam em consideração os efeitos viscosos do material, entretanto, o modelo analítico foi capaz de gerar bons resultados, tanto para a previsão das resistências uniaxiais e biaxiais à compressão quanto para o formato da curva para todas as taxas de deformação, especialmente as mais elevadas.

5.1.1.8 Mohamed et. al (2019)

Mohamed et al. (2019) desenvolveram um estudo acerca do CRFA auto-adensável sob solicitações biaxiais de compressão-compressão, compressão-tração e tração-tração. Foram analisados elementos com volume de fibras variando de 0%, 0,5% e 1,0%. As fibras aplicadas apresentavam

uma tensão nominal igual a 1150 MPa (σ_f), as relações entre resistências biaxial e uniaxial à compressão variavam de acordo com as frações volumétricas de fibras. Os resultados experimentais obtidos são mostrados na Tabela 25.

Tabela 25 – Resultados experimentais de Mohamed et al. (2019).

$f = 0\%$		$f = 0,5\%$		$f = 1,0\%$	
σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)
-49,86	-50,085	-61,7	-62,2	-75,7665	-75,823
-26,82	-53,505	-34,2	-68,1	-42,9965	-85,993
-9,81	-48,96	-11,3	-55,9	-14,8595	-73,902
0	-45	0	-50	0	-56,5
1,215	-24,705	1,6	-32	2,2035	-43,9005
1,62	-16,38	1,85	-18,6	2,373	-24,182
2,205	-10,755	2,5	-12,4	2,712	-13,7295
2,79	-7,74	2,85	-9,65	2,9945	-10,057
3,015	3,015	3	3	3,2205	3,2205
3,33	0,675	3,8	0,75	3,616	1,8645
3,33	1,665	3,8	1,9	3,7855	0,791
3,375	0	3,95	0	4,0115	0

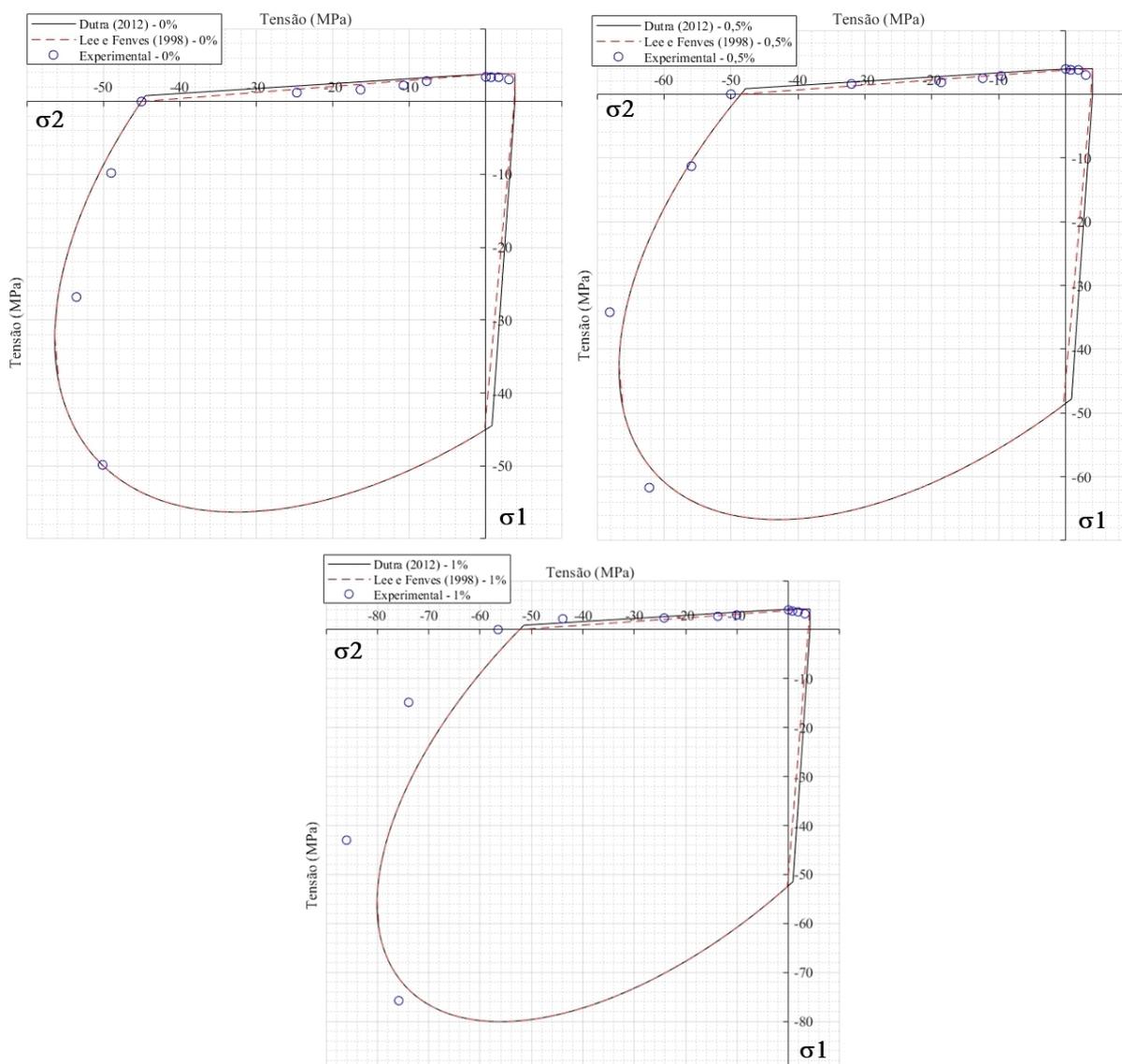
Os autores trazem os dados necessários para a obtenção dos parâmetros analíticos, assim são realizados os cálculos, de acordo com critério de Drucker-Prager adaptado por Dutra (2012) e com o proposto pela Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013), para as resistências à compressão uniaxial e biaxial e a tração uniaxial com resultados apresentados na Tabela 26.

Tabela 26 – Resultados experimentais de Mohamed et al. (2019).

f (%)	0	0,5	1,0
$\frac{f_{cbm}}{f_{cm}}$	1,12	1,24	1,45
f_{cm} (MPa)	45	48,5	52,3
f_{cbm} (MPa)	50	60,4	73,7
f_{ctm} (MPa)	3,79	3,98	4,19

Com essas resistências então foram plotadas as curvas de ruptura biaxial do CRFA para tensões de compressão-compressão, compressão-tração e tração-tração, de acordo com as formulações desenvolvidas por Dutra (2012) e Lee e Fenves (1998), em comparação com os resultados experimentais dos autores, como mostram na Figura 60.

Figura 60 – Curvas de ruptura biaxial e resultados experimentais.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Tendo em vista o exposto nesta seção, é possível notar que as relações propostas por Dutra (2012) apresentaram considerável concordância com boa parte da base de dados experimentais, quanto à previsão de resistências à compressão uniaxial e biaxial do CRFA.

Foram tomados também os valores de previsão de resistência para a apresentação da curva de ruptura biaxial utilizando uma diferente relação para superfície de plastificação, a do critério proposto por Lee e Fenves (1998). Este critério é o mesmo adotado pelo modelo *Concrete Damaged Plasticity* no Abaqus SE para os casos de tensões no plano.

É possível notar que a curva de ruptura biaxial do CDP se adapta de maneira muito semelhante, quando comparada à proposta por Dutra (2012), aos resultados experimentais para as diferentes taxas volumétricas de fibras no concreto, apresentando uma sutil diferença em relação à curva

gerada pelo critério de Drucker-Prager. A diferença entre os modelos basicamente está no ramo tração-compressão da curva, na qual o modelo de Lee e Fenves (1998) mostra-se sensivelmente menos resistente que o modelo de Drucker-Prager modificado por Dutra (2012).

Desta forma, o modelo proposto pelo CDP, com o ajuste ideal de seus parâmetros de entrada, seria capaz de reproduzir de forma satisfatória a superfície de ruptura de Dutra (2012) sem a necessidade de grandes modificações ou implementações no CDP, dando continuidade então às análises propostas por este documento.

5.2 ANÁLISE NUMÉRICA DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Para a parte final desta análise, apresenta-se a avaliação de elementos estruturais como forma de validação do modelo de *Concrete Damaged Plasticity*, e suas devidas modificações, em conjunto com as resistências obtidas pelo modelo de previsão de Dutra (2012), de forma a obter um elemento completamente analítico-numérico. Este elemento então será avaliado com base em resultados experimentais para sua validação. Os testes escolhidos para esta etapa do trabalho são apresentados a seguir.

5.2.1 Vigas de Lim e Oh (1999)

Lim e Oh (1999) testaram vigas de CRFA sob flexão de quatro pontos, a fim de verificar a influência de diferentes porcentagens de fibras na matriz e de taxa de armaduras transversais na resistência máxima do elemento. Para um dos grupos de elementos, foram ensaiadas vigas com teores de 0%, 1,0% e 2,0% e contendo 0% dos estribos necessários para resistir aos esforços cortantes (vigas S0V0, S0V1 e S0V2, respectivamente). As configurações de armação das vigas são apresentadas na Figura 61.

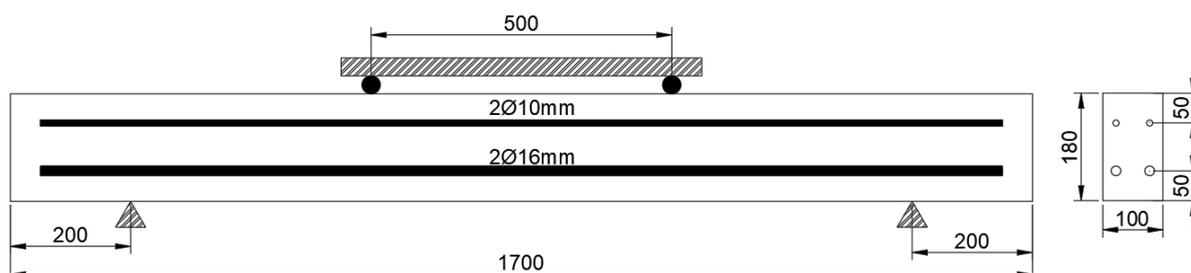
A armadura longitudinal de tração adotada é composta por duas barras de 16 mm, enquanto a armadura de compressão é formada por duas barras de 10 mm, ambas com tensão de escoamento de 42 kN/cm² e 54,5 kN/cm² de tensão resistente. Todas as barras de aço têm módulo de elasticidade de 20000 kN/cm² e apresentam comportamento elastoplástico com endurecimento linear. As fibras de aço adotadas têm fator de forma 60, com comprimento 42 mm e o diâmetro 0,7 mm, ancoradas na extremidade e com tensões de escoamento e resistente de 130 kN/cm² e 178,4 kN/cm², respectivamente. Para validação, foram utilizados os valores de resistências e desempenho das vigas sob flexão. Os resultados dos testes de caracterização do concreto estão dispostos na Tabela 27 e dos ensaios de flexão de quatro pontos na Figura 62.

Tabela 27 – Resistências das dosagens empregadas.

Espécime	Resistência à compressão uniaxial - f_{cm} (MPa)	Resistência Média à compressão diametral - f_{sp} (MPa)
S0V0	34,00	2,50
S0V1	38,69	4,00
S0V2	42,40	5,10

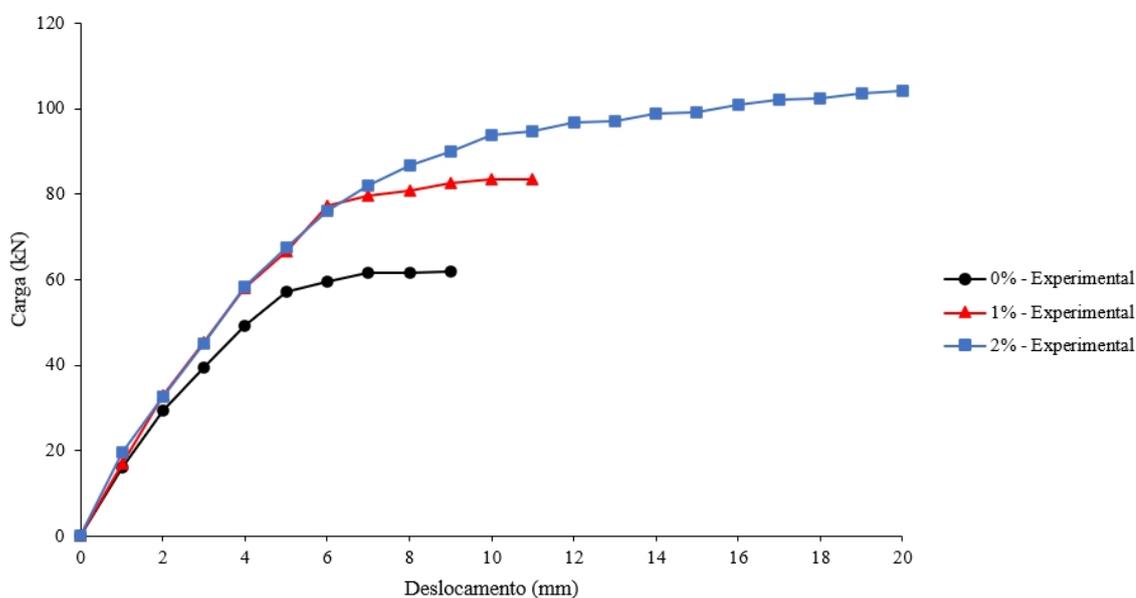
Fonte – Lim e Oh (1999).

Figura 61 – Configuração de armadura, carregamento e apoio. Dimensões em mm.



Fonte – Adaptado Lim e Oh (1999).

Figura 62 – Resultados de ensaios de flexão de quatro pontos apresentados pelos autores.



Fonte – Adaptado de Lim e Oh (1999).

5.2.1.1 Tensões Uniaxiais

Com base nas equações do Capítulo 3 e os dados apresentados pelos autores do experimento, foram determinadas as resistências uniaxiais à compressão e à tração do CRFA, bem como as resistências à compressão biaxial e módulo de elasticidade para os modelos, apresentados na Tabela 28.

Tabela 28 – Resistências analíticas.

f (%)	Resistência à compressão uniaxial analítica - (MPa)	Resistência à tração uniaxial analítica - (MPa)	Resistência à compressão biaxial analítica - (MPa)	Módulo de Elasticidade analítico - (MPa)
0	34,00	3,14	39,44	32329.4
1	40,9	3,56	47,43	34092.3
2	47,24	3,92	54,61	35881.25

Para análise da resposta dos modelos uniaxiais aplicados, foram determinados antes os parâmetros de entrada para o CDP e o modelo numérico de corpo de prova para a avaliação destas entradas. Os parâmetros CDP aplicados aos modelos são apresentados na Tabela 29, todas as configurações com o mesmo valor para o coeficiente de Poisson, $\nu = 0,20$, e mesma razão entre as resistências à compressão biaxial e uniaxial.

Tabela 29 – Resumo dos parâmetros CDP para o CRFA.

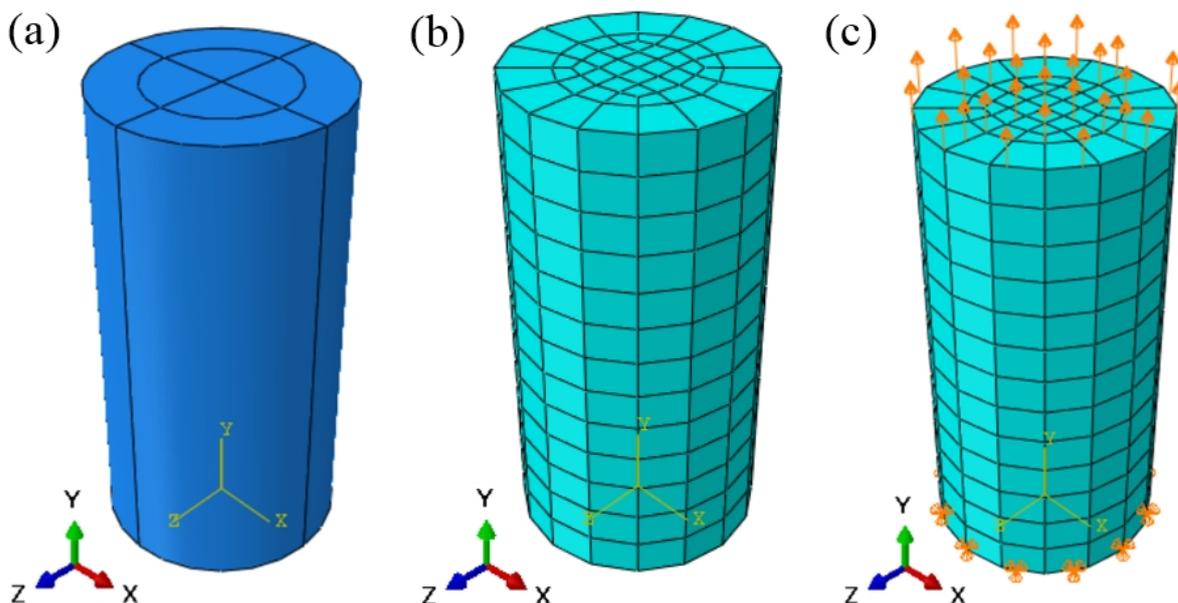
PARÂMETRO	$f = 0\%$	$f = 1\%$	$f = 2\%$
σ_{cb0}/σ_{c0}	1,16	1,16	1,16
K_c	1	1	1
ψ	28,54°	26,7°	24,7°
	56,14°	51,65°	49,8°
	34°	37°	37°
e	0	0	0
μ	0,0001	0,0001	0,0001

Foi implementado um elemento cilíndrico para simular e avaliar as leis de evolução de tensões adotadas para o CRFA. Além disso, as relações propostas para tensões uniaxiais de compressão e tração foram utilizadas como leis de evolução de endurecimento/amolecimento para o critério de escoamento do CDP. Modelou-se, então, um elemento prismático de seção circular, com 100 mm de diâmetro e 200 mm de altura (Figura 63a).

Esta abordagem foi realizada para avaliar a resposta do modelo constitutivo no processamento tridimensional em conjunto com os parâmetros CDP. Para construção da malha, foram aplicados elementos finitos tridimensionais com 20 nós e integração total (C3D20) e dimensão fixada de 15 mm, como mostrado na Figura 63b.

A corpo de prova tem deslocamentos e rotações restritos em uma de suas faces, como condição de contorno, e deslocamentos são aplicados na face oposta do modelo para o melhor controle e identificação de tensões, sejam de tração ou compressão uniaxial (Figura 63c). As respostas são registradas e comparadas aos dados de entrada, a fim de verificar a convergência entre o modelo numérico e as regras analíticas para o comportamento constitutivo do CRFA aplicadas.

Figura 63 – (a) Corpo de prova modelado, (b) malha aplicada e (c) condições de contorno e carregamento.



Fonte – Elaborado pelo autor.

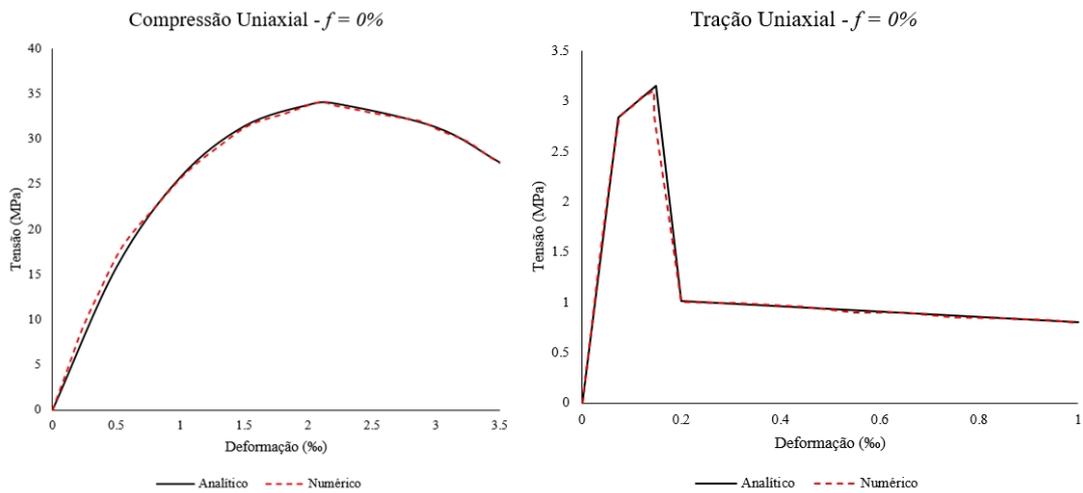
Os resultados dos testes de tensão uniaxial do modelo numérico foram registrados e plotados em comparação com as equações analíticas dos modelos constitutivos, como ilustrado nas Figuras de 64 a 66.

As resistências residuais $f_{R,1}$ e $f_{R,3}$, utilizadas para a determinação das resistências à tração uniaxial f_{Fts} e f_{Ftu} , de acordo com as relações propostas por Venkateshwaran, Tan e Li (2018), são apresentadas na Tabela 30.

Tabela 30 – Resistências residuais, de serviço e última.

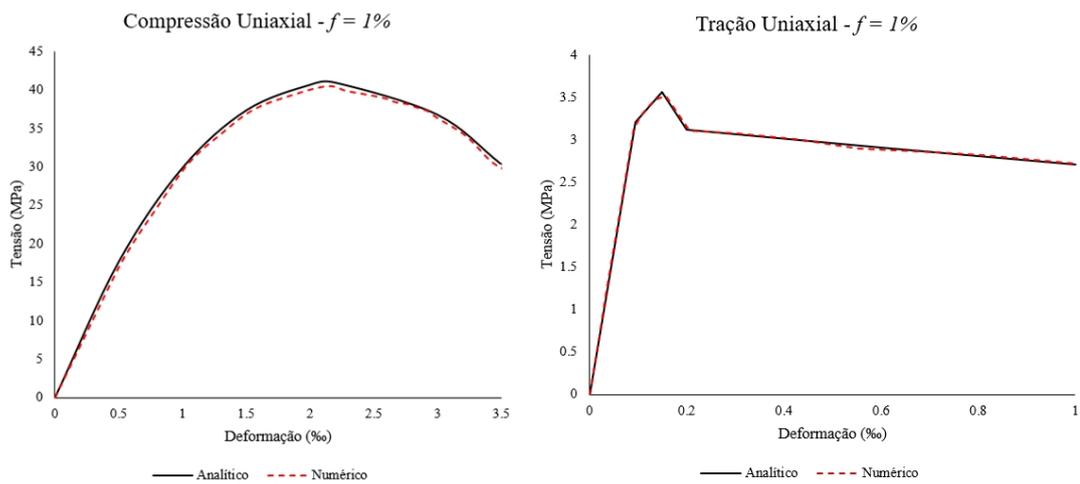
f (%)	$f_{R,1}$ (MPa)	$f_{R,3}$ (MPa)	f_{Fts} (MPa)	f_{Ftu} (MPa)
0	2,16	2,41	0,97	0,67
1	6,92	8,18	3,11	2,43
2	11,54	13,81	5,19	4,15

Figura 64 – Compressão e tração uniaxiais para $f = 0\%$.



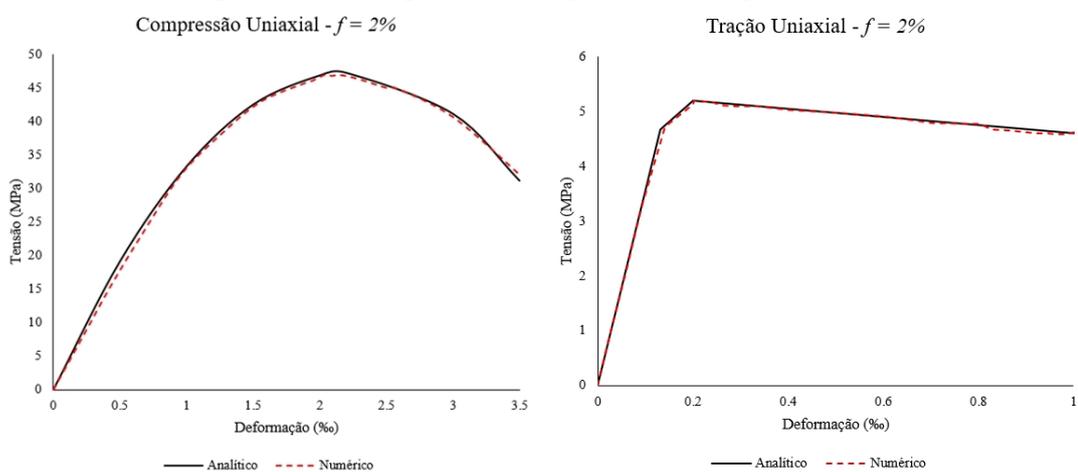
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 65 – Compressão e tração uniaxiais para $f = 1\%$.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 66 – Compressão e tração uniaxiais para $f = 2\%$.



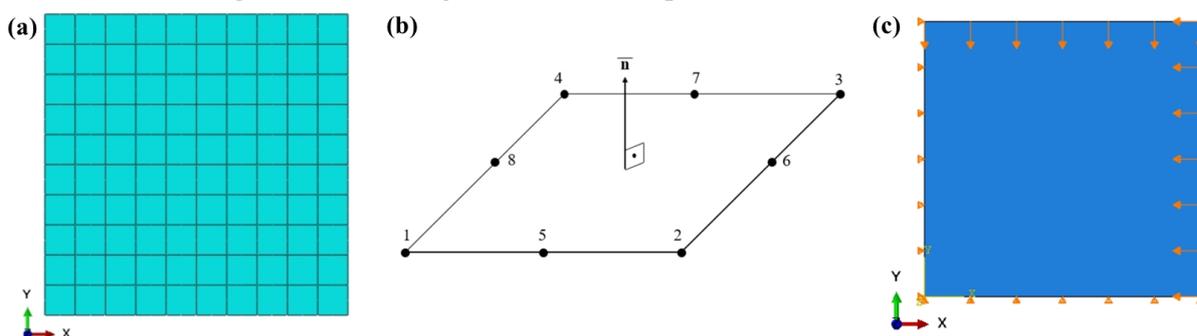
Fonte – Elaborado pelo autor.

Nota-se que os modelos uniaxiais numéricos apresentam uma boa convergência com os resultados analíticos tanto para compressão uniaxial, quanto para tração uniaxial. Outro ponto observado com a comparação dos resultados foi que a variação de ψ não interferiu nos resultados para os testes de tensões uniaxiais. Assim, assumindo que o CDP atende de forma satisfatória ao que é esperado pelas entradas analíticas para tensões uniaxiais, parte-se para o próximo passo da avaliação.

5.2.1.2 Tensões Biaxiais

Um elemento plano foi modelado para a análise a respostas de tensões biaxiais do compósito. Assim, foi desenvolvida uma placa quadrilátera plana bilinear com dimensões de 100x100 mm e elementos finitos com dimensões fixadas de 10x10 mm. São aplicados elementos do tipo casca (*shell elements*) com 8 nós e integração reduzida, como mostrado na Figura 67a e b. Como ilustrado na Figura 67c, as condições de contorno impostas para a placa são restrições de translação nos eixos X e Y de duas arestas adjacentes. Nas outras duas arestas são aplicados deslocamentos para simular o efeito das tensões naquela direção.

Figura 67 – Condições de contorno para teste de tensão biaxial.



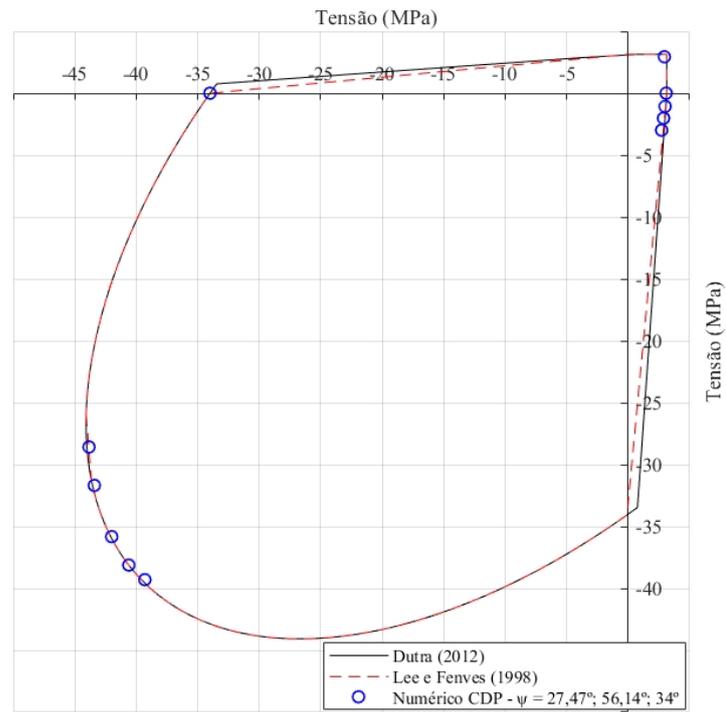
Fonte – Elaborado pelo autor.

Este passo, assim como na sessão anterior, foi realizado a fim de verificar se o modelo numérico segue o padrão determinado pelas regras analíticas de entrada para o CDP. Foram simuladas doze configurações de carregamento, como mostrado na Tabela 31.

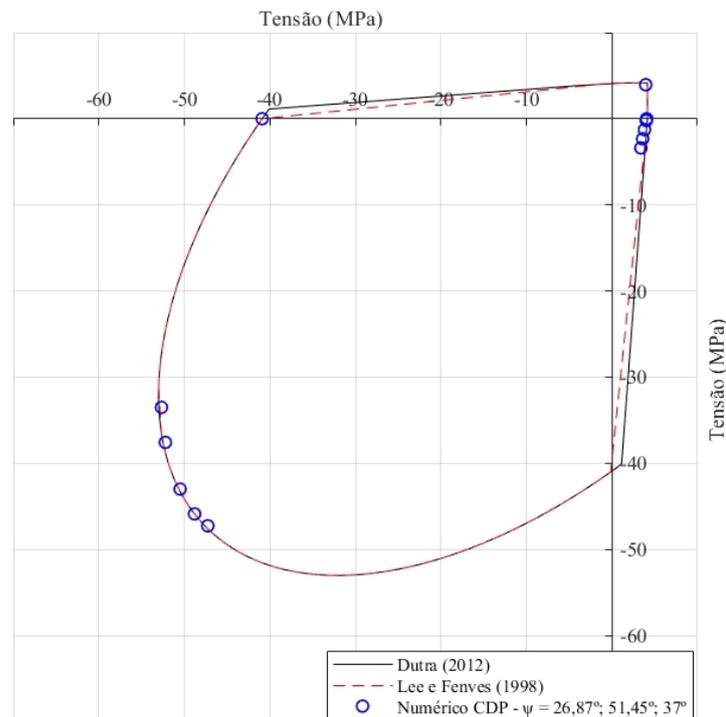
Tabela 31 – Configurações de carregamento para tensões biaxiais, (+) para tração e (-) para compressão.

Configuração	Deslocamento X (mm)	Deslocamento Y (mm)
1	-1,00	-1,00
2	-1,00	-0,75
3	-1,00	-0,50
4	-1,00	-0,25
5	-1,00	-0,125
6	-1,00	0,00
7	+1,00	-0,25
8	+1,00	-0,50
9	+1,00	-0,75
10	+1,00	-1,00
11	+1,00	0,00
12	+1,00	+1,00

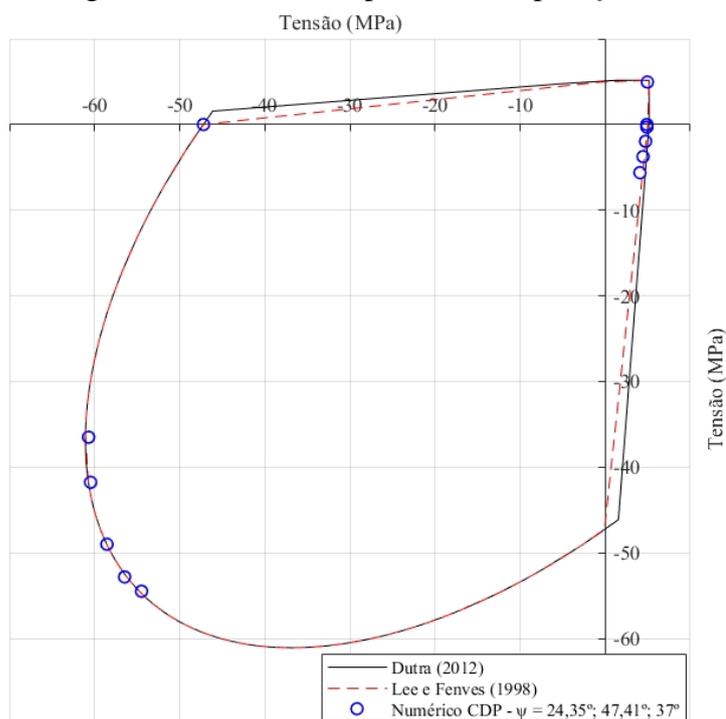
A partir disso, foram realizadas as simulações levando em consideração os parâmetros CDP adotados e modelos constitutivos testados. Os doze pontos obtidos por modelo foram plotados junto às curvas das equações analíticas propostas por Dutra (2012) e por Lee e Fenves (1998) para fins de comparação neste trabalho, gerando os resultados apresentados nas figuras 68 a 70.

Figura 68 – Curva de ruptura biaxial para $f=0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 69 – Curva de ruptura biaxial para $f=1\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 70 – Curva de ruptura biaxial para $f=2\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

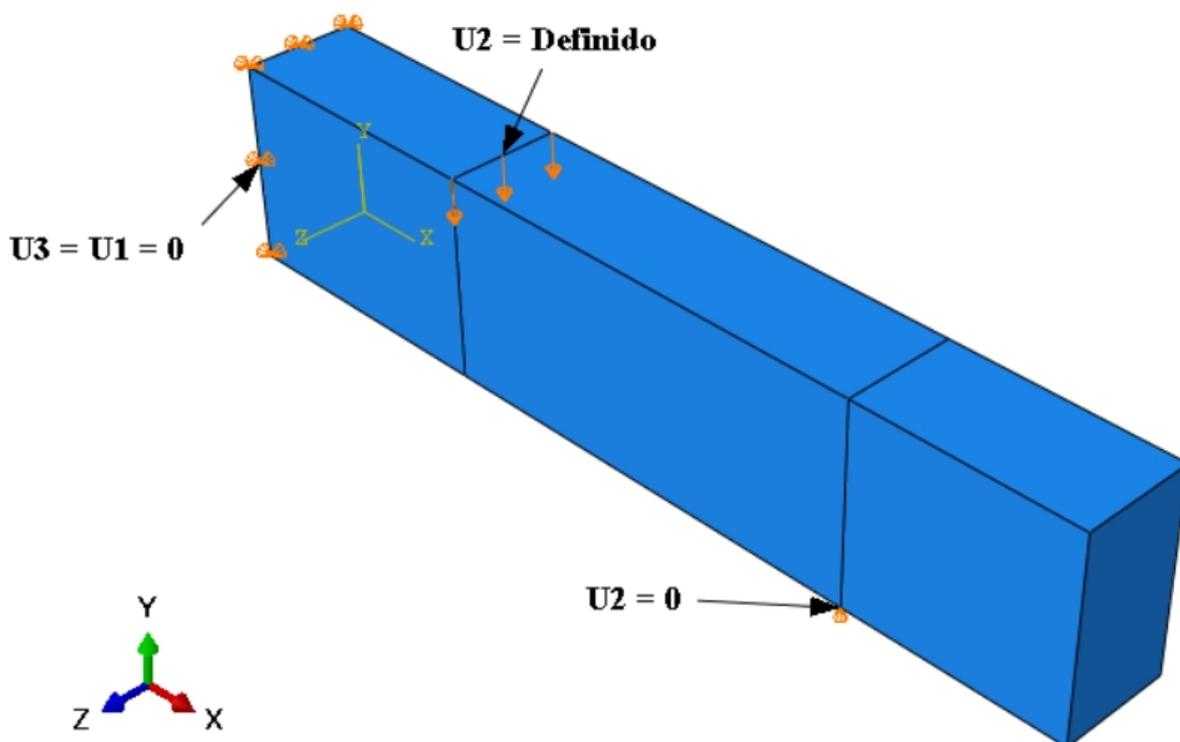
Os resultados comprovam que o modelo numérico retorna de forma satisfatória as respostas esperadas de acordo com o modelo de Lee e Fenves (1998), além disso, como discutido no início deste capítulo, os resultados também mostram-se convergentes com o modelo de envoltória de ruptura biaxial proposta por Dutra (2012), pois os pontos obtidos na simulação encontram-se dentro da curva, ou seja, estão a favor da segurança. Outro ponto observado nas análises foi que, assim como verificado para a tensão uniaxial, o valor de ψ não interfere na análise de tensões biaxiais do compósito.

Sendo assim, assume-se que CDP atende às premissas para a reprodução do CRFA admitidas para este trabalho, seguindo então para a etapa final de análises numéricas propostas por este documento.

5.2.1.3 Resposta Mecânica das Vigas

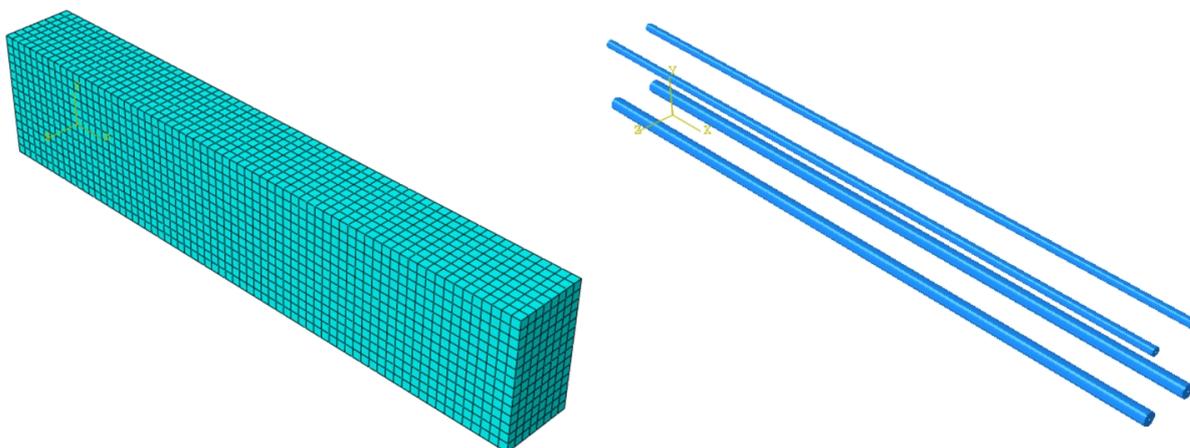
Para a análise computacional das vigas, adotou-se a simetria do caso modelando assim apenas metade do elemento estrutural e estabelecendo as condições de contorno apresentadas na Figura 71. Como ilustrado na Figura 72, para a viga de CRFA foi desenvolvida uma malha de elementos hexaédricos com tamanho global de 15 mm, totalizando 4788 elementos. Para a armadura, foi desenvolvida uma malha com elementos lineares com tamanho global de 15 mm, totalizando 212 elementos.

Figura 71 – Condições de contorno para a viga modelada.



Fonte – Elaborado pelo autor.

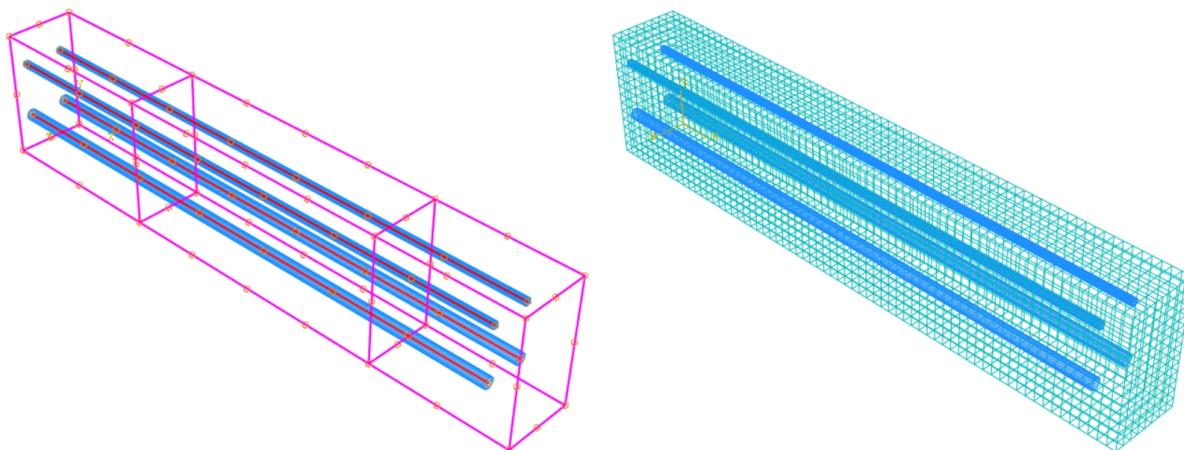
Figura 72 – Malha da viga e armadura.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Foi então aplicada a técnica de incorporação de elementos como mostrado na Figura 73, onde a viga de CRFA é o elemento hospedeiro (em rosa) e as barras de aço são os elementos incorporados (em vermelho), formando assim toda a estrutura para a simulação.

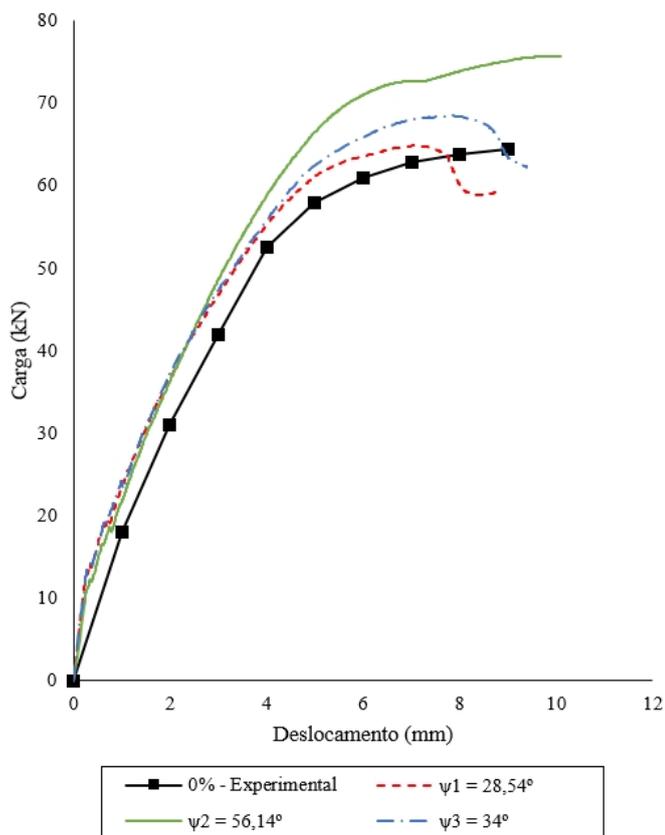
Figura 73 – Aplicação da técnica de incorporação de elementos.



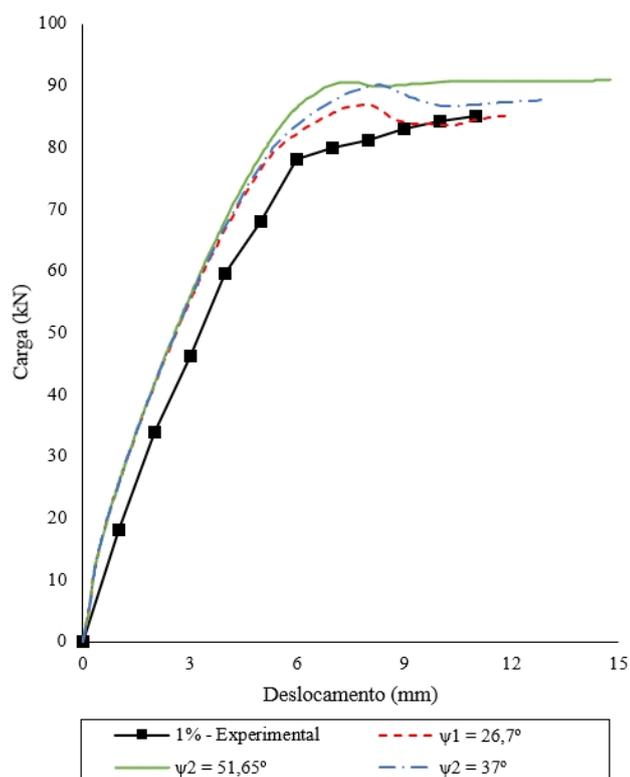
Fonte – Elaborado pelo autor.

Desta forma, foram procedidas as simulações, e os resultados de forças de reação do sistema plotados em função do deslocamento do vão central da viga foram registrados, como mostrados nas figuras 74, 75 e 76. As reações para a viga foram geradas a partir de um deslocamento aplicado no ponto de carregamento do teste e flexão. Optou-se por essa aproximação pois o uso de cargas concentradas poderia gerar uma grande concentração de tensões, o que viria a interferir nos resultados de resistência do elemento. Além disso, a aplicação de deslocamentos ao invés da carga permite a determinação do comportamento pós-pico da curva tensão-deformação para as vigas. Assim, a partir das forças reativas nos nós que compõem a condição de contorno do apoio ($U_2 = 0$) e do deslocamento desenvolvido por um nó no vão central da viga, é possível formar o diagrama força-deslocamento.

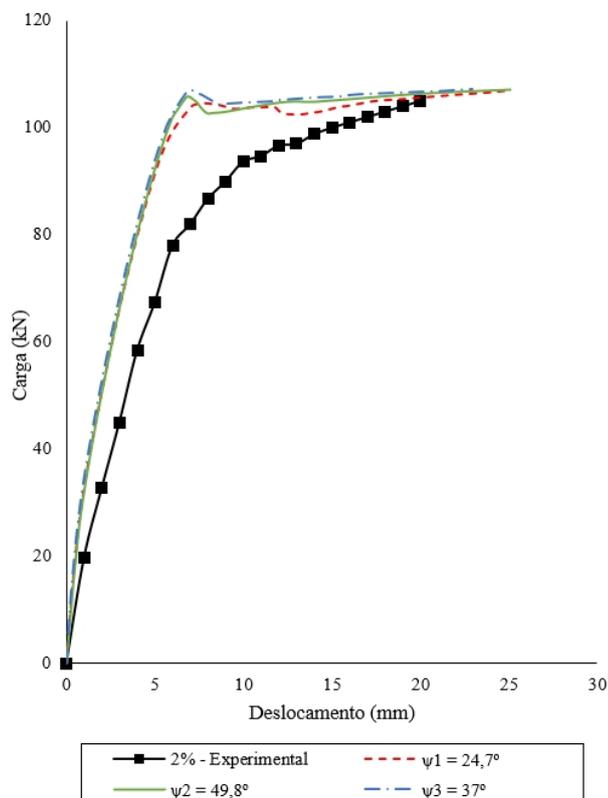
Este processo de simulação foi repetido para as três configurações de cálculo do ψ apresentadas, de forma a avaliar o impacto deste parâmetro em uma análise mais complexa, a nível de tensões multiaxiais, e com a incorporação de outro componente estrutural no modelo, no caso, a armadura de aço.

Figura 74 – Resultado dos testes para $f=0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 75 – Resultado dos testes para $f=1\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 76 – Resultado dos testes para $f=2\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Para todas as configurações, os modelos numéricos mostram-se um pouco mais rígidos que os reais, fato provavelmente atribuído ao tipo de elemento finito aplicado ao modelo ou a definição do módulo de elasticidade do CRFA. Além disso, nas simulações não foram considerados os carregamentos devido ao peso próprio dos elementos testados, fator que poderia reduzir a rigidez dos resultados numéricos.

O peso próprio causa o aparecimento de pequenas tensões nos materiais. No caso do concreto sob esforços de tração devido à esse peso próprio, tal característica pode corresponder a uma parcela significativa da resistência à tração do concreto, que geralmente não é muito elevada, acarretando o início de um processo fissuração devido a este fato, que pode ocasionar numa diminuição da resistência ou ductibilidade do elemento simulado. Porém, o modelo numérico apresenta um comportamento semelhante à viga real, chegando a determinado patamar de plastificação e com um leve endurecimento após este ponto até atingir sua resistência última.

Observa-se que as configurações 1 e 3 para o ψ são as que geram melhores resultados. A configuração 2, com os valores de ângulo de atrito calculados a partir da equação proposta por Proença (1988 apud DUTRA, 2012), gera um valor bem elevado para o ângulo de dilatância. Este módulo mais elevado influencia na resistência e rigidez do modelo, fazendo com que a viga numérica seja mais rígida e resistente, quando comparada à real.

Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) determinam que, para o CDP, o ângulo de dilatância deve ser $\psi \leq 56,31^\circ$. Dependendo então da abordagem de cálculo para obtenção da resistência à tração e a compressão do material, a configuração 3 fornece valores superiores, de acordo com os limites impostos pelo CDP, para o ψ , principalmente para as misturas sem reforço de fibras nas quais este parâmetro tende a ser mais elevado.

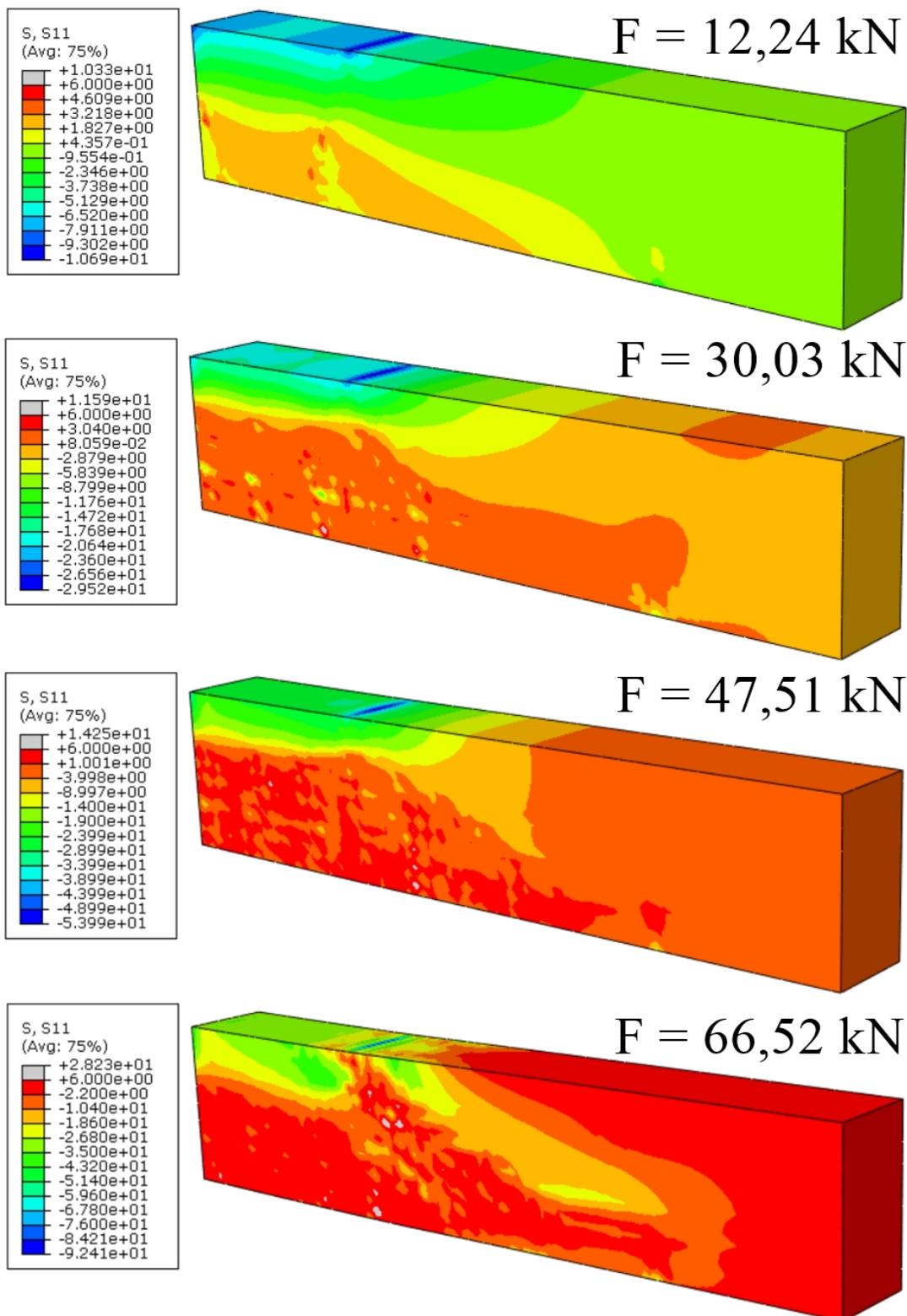
Então, em determinados casos, esta relação leva a aplicação do valor máximo possível para o ângulo de dilatância do modelo CDP, o que comprovadamente interfere nos resultados. Assim, a possibilidade de cálculo 2 é descartada para esta análise.

O método de cálculo 1, apesar de gerar resultados bons/regulares, faz com que a resistência da viga caia ao atingir sua carga de plastificação, principalmente nas misturas com reforços de fibras. E por ser uma característica bem marcante nos resultados experimentais, opta-se por não adotar a configuração 1 para a análise de dados.

Por fim, tem-se a configuração 3, com os valores propostos por Proença (1988) para o CRFA ($\psi = 37^\circ$) e por Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) para o concreto comum ($\psi = 34^\circ$), que mostra-se menos suscetível a erros inerentes à formulações e aproximações por ser um valor fixado. Além disso, os resultados numéricos com esta saída de cálculo mostram-se bem mais condizentes com os resultados experimentais que os obtidos com os métodos de cálculo 1 e 2 para ψ . Sendo, dessa forma, a configuração adotada para a análise de tensões e padrão de fissuração no elemento estrutural.

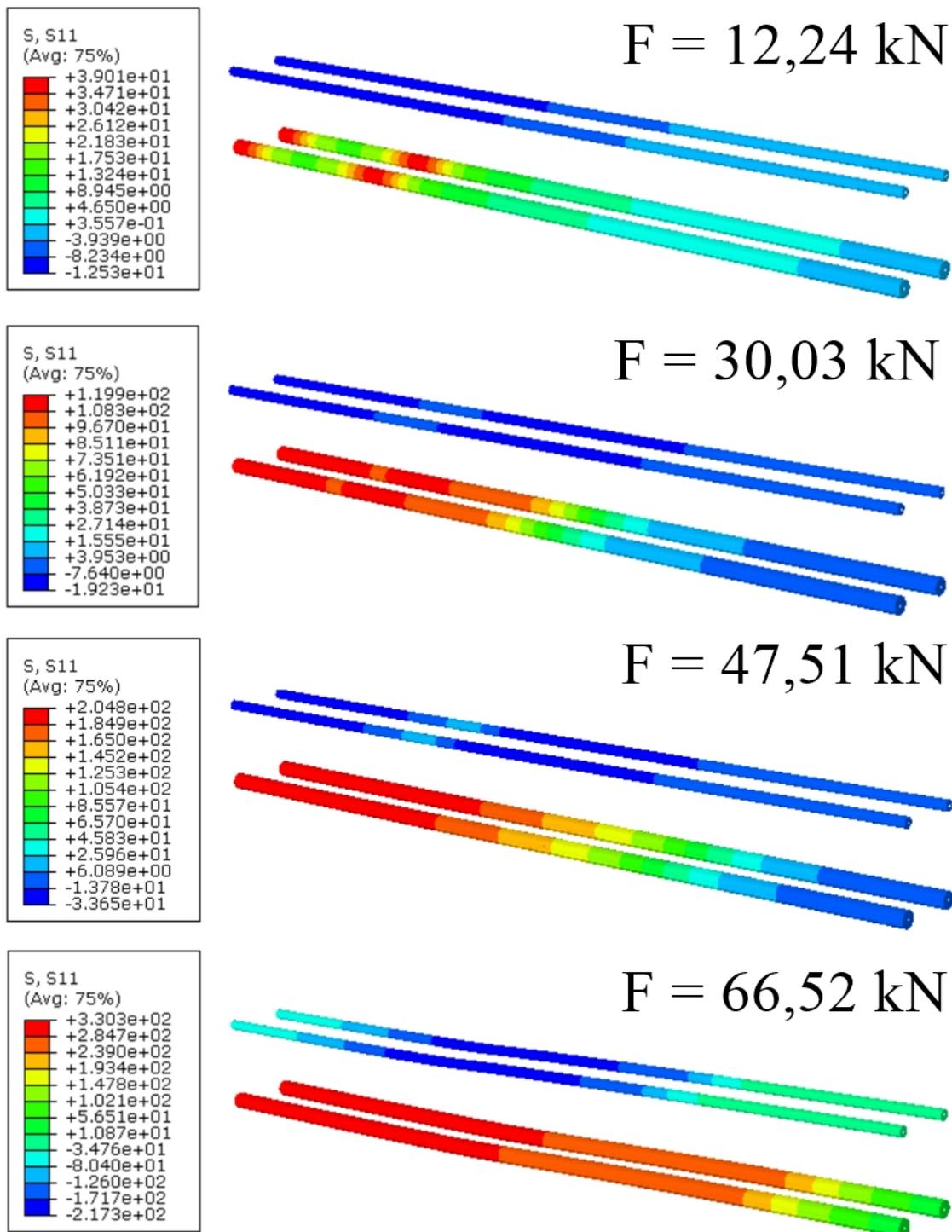
As figuras 77 a 85 mostram o desenvolvimento das tensões na matriz de concreto, tensões na armadura e dano à tração para cada porcentagem de fibra analisada.

Figura 77 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=0\%$, em MPa.



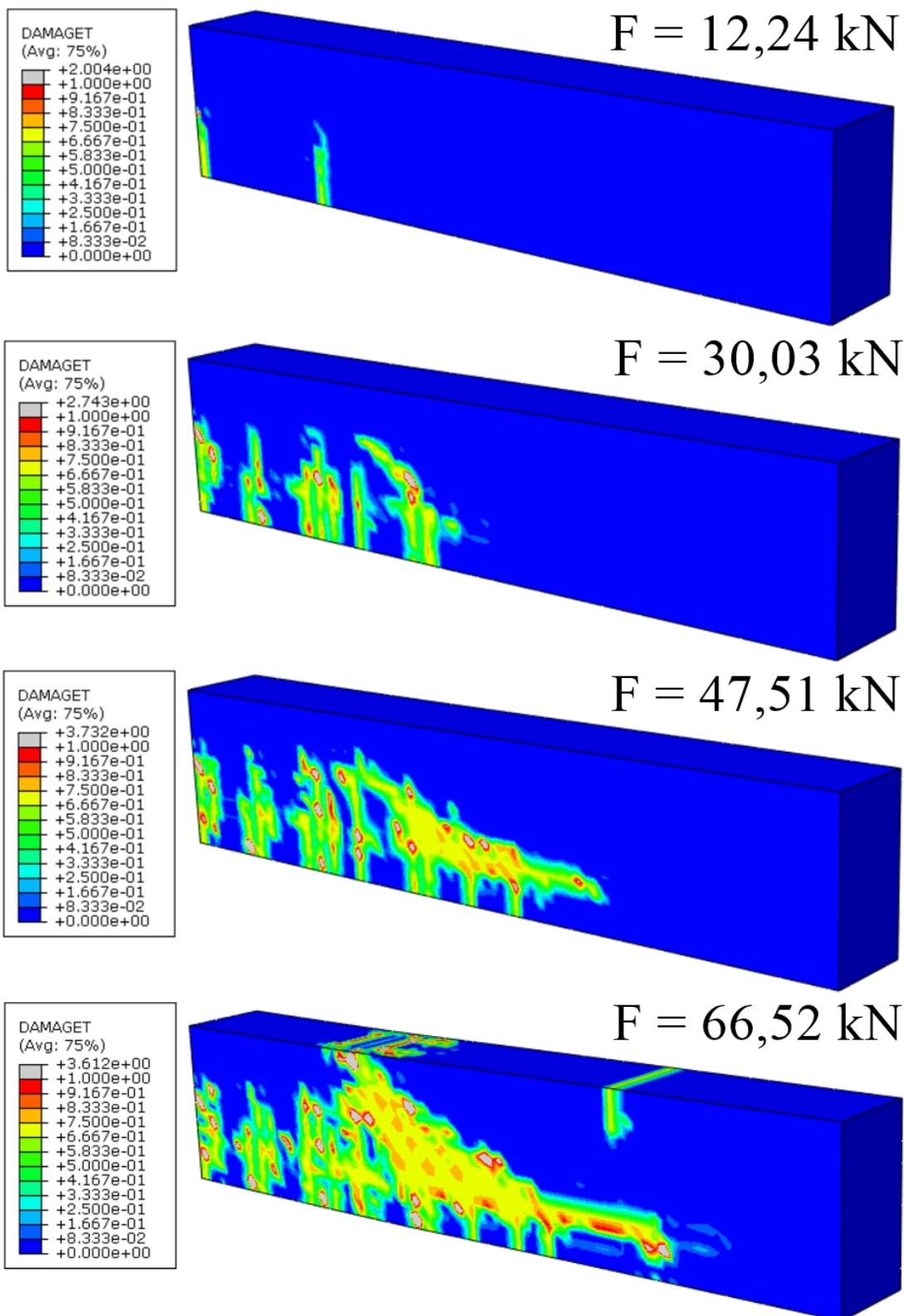
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 78 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=0\%$, em MPa.



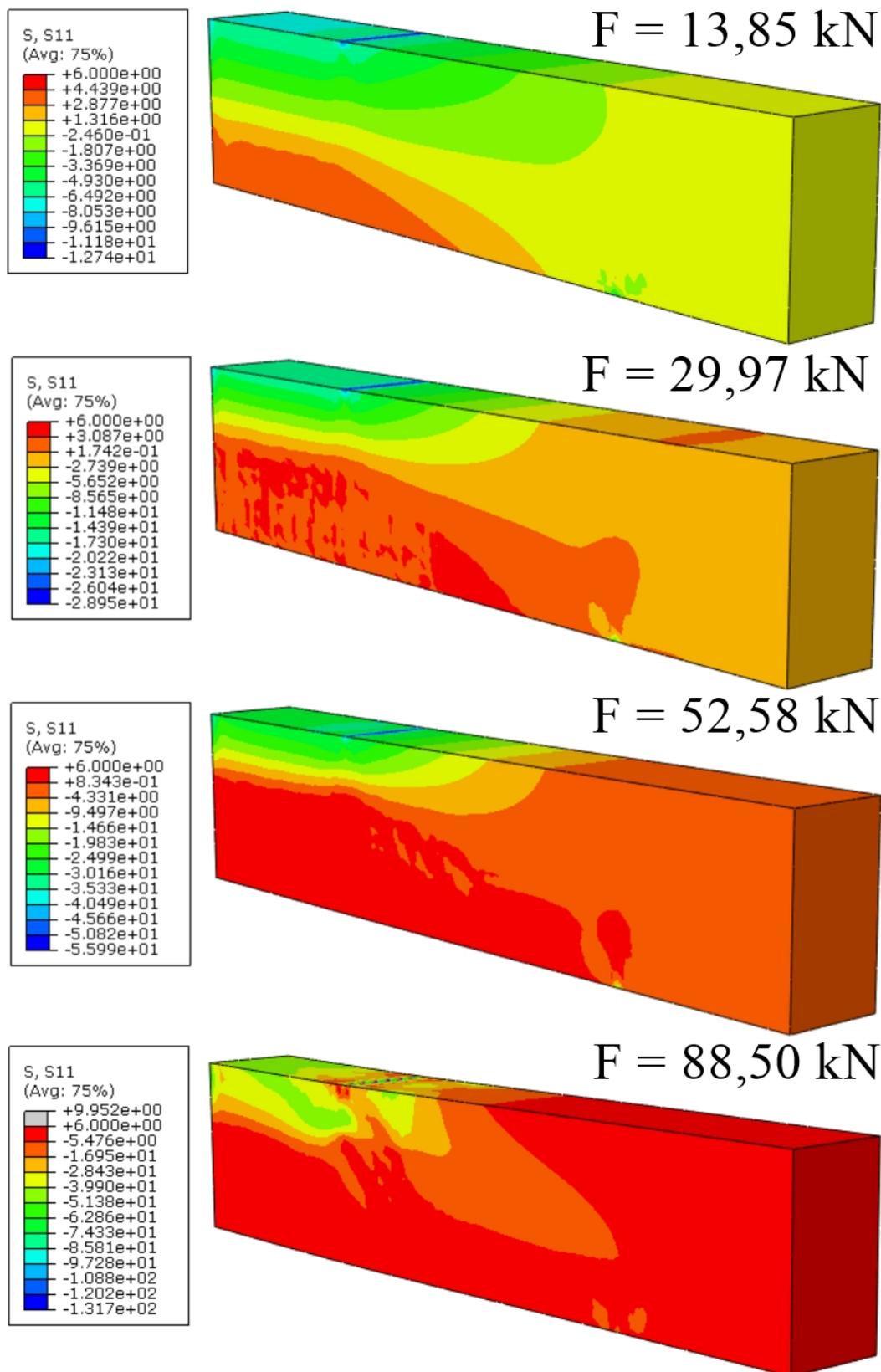
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 79 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=0\%$.



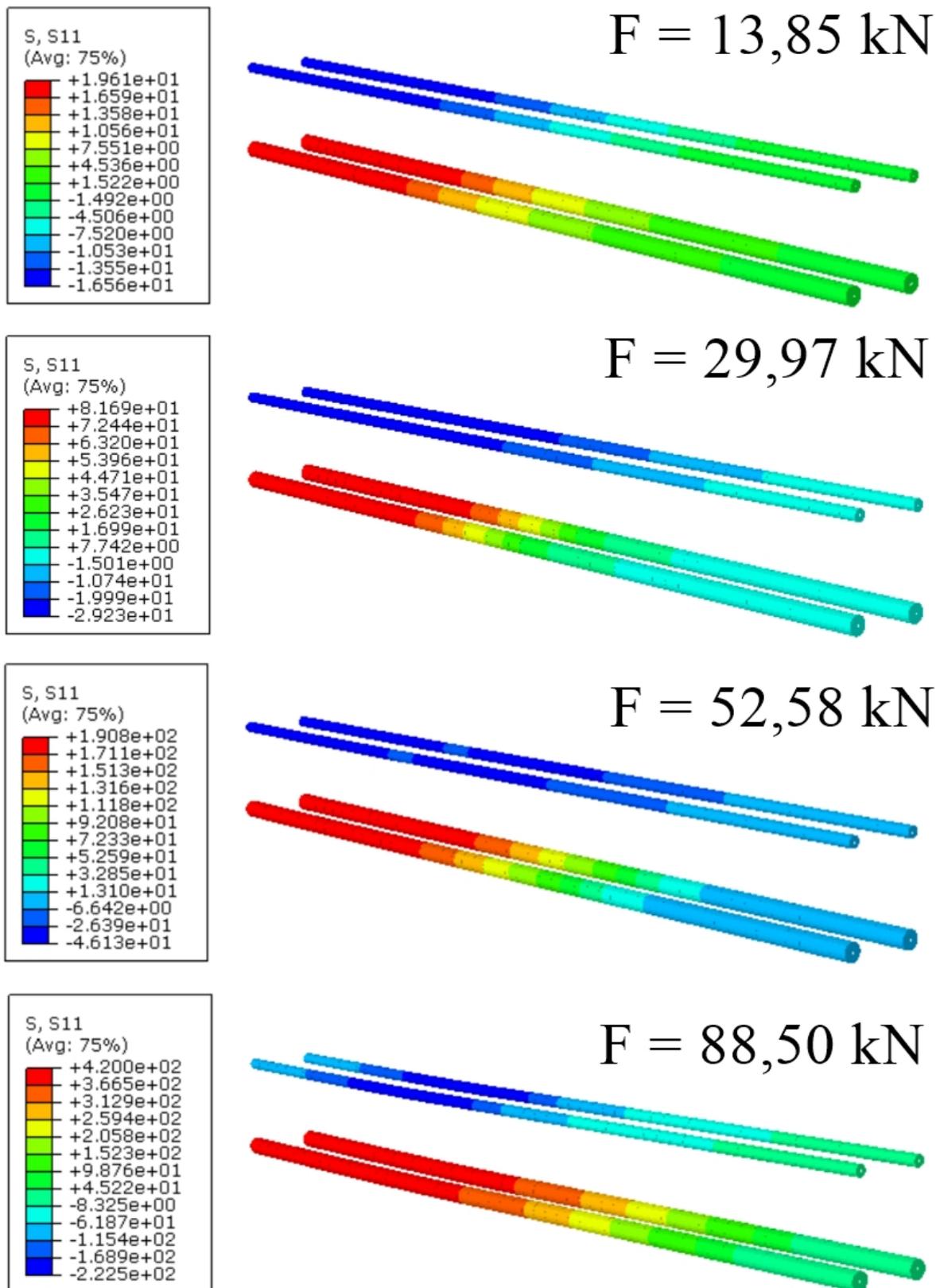
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 80 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=1\%$, em MPa.

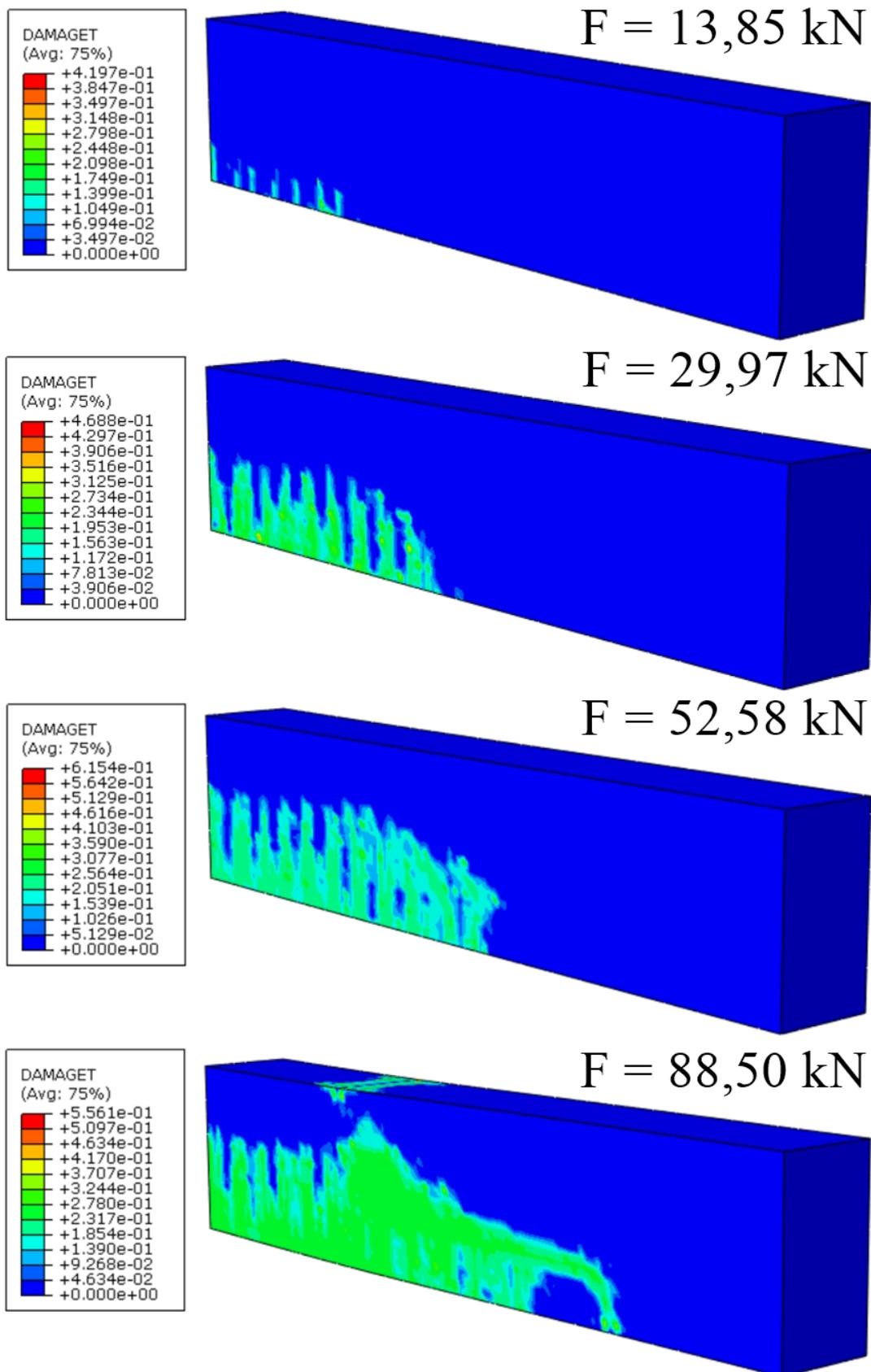


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 81 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=1\%$, em MPa.

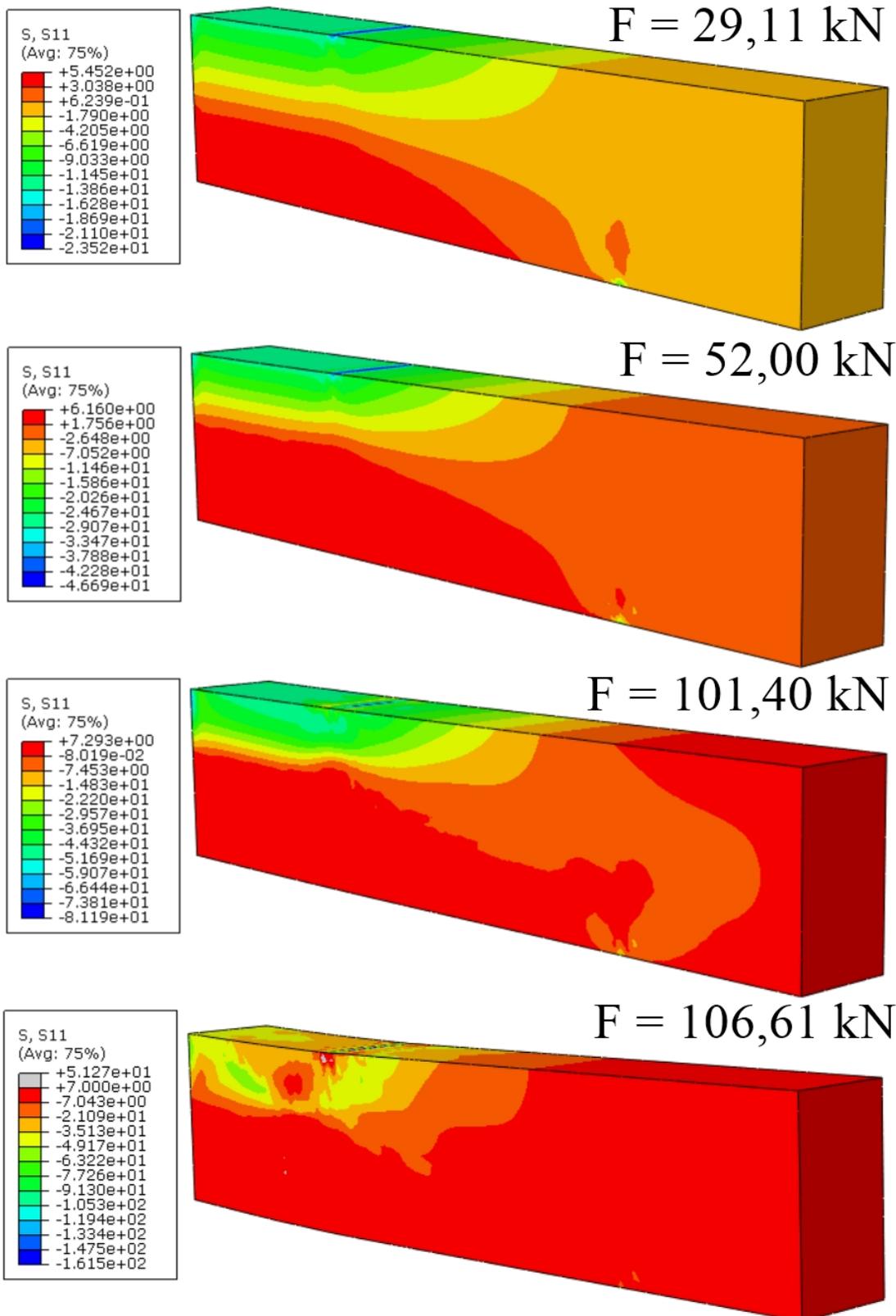


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 82 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=1\%$.

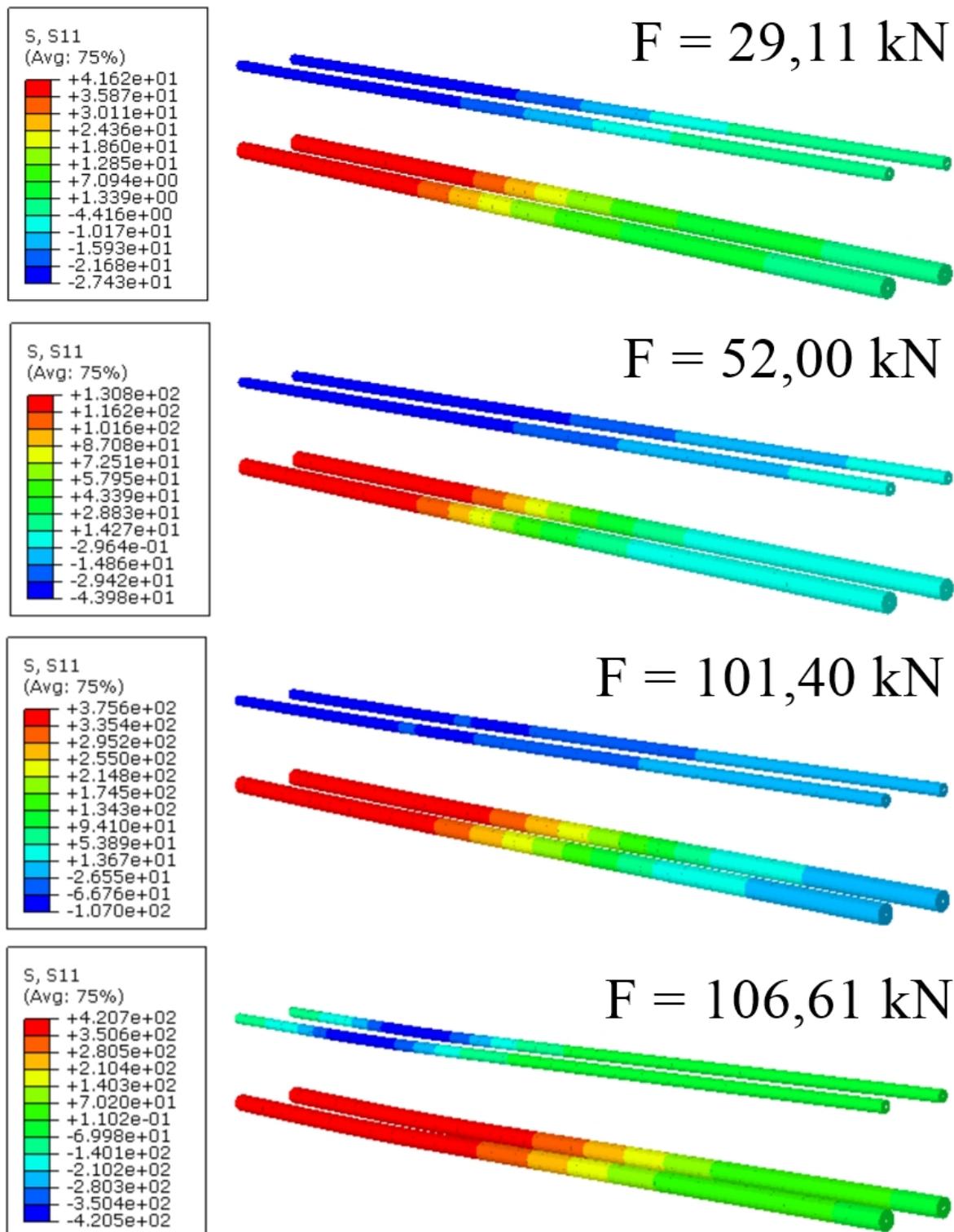
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 83 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=2\%$, em MPa.

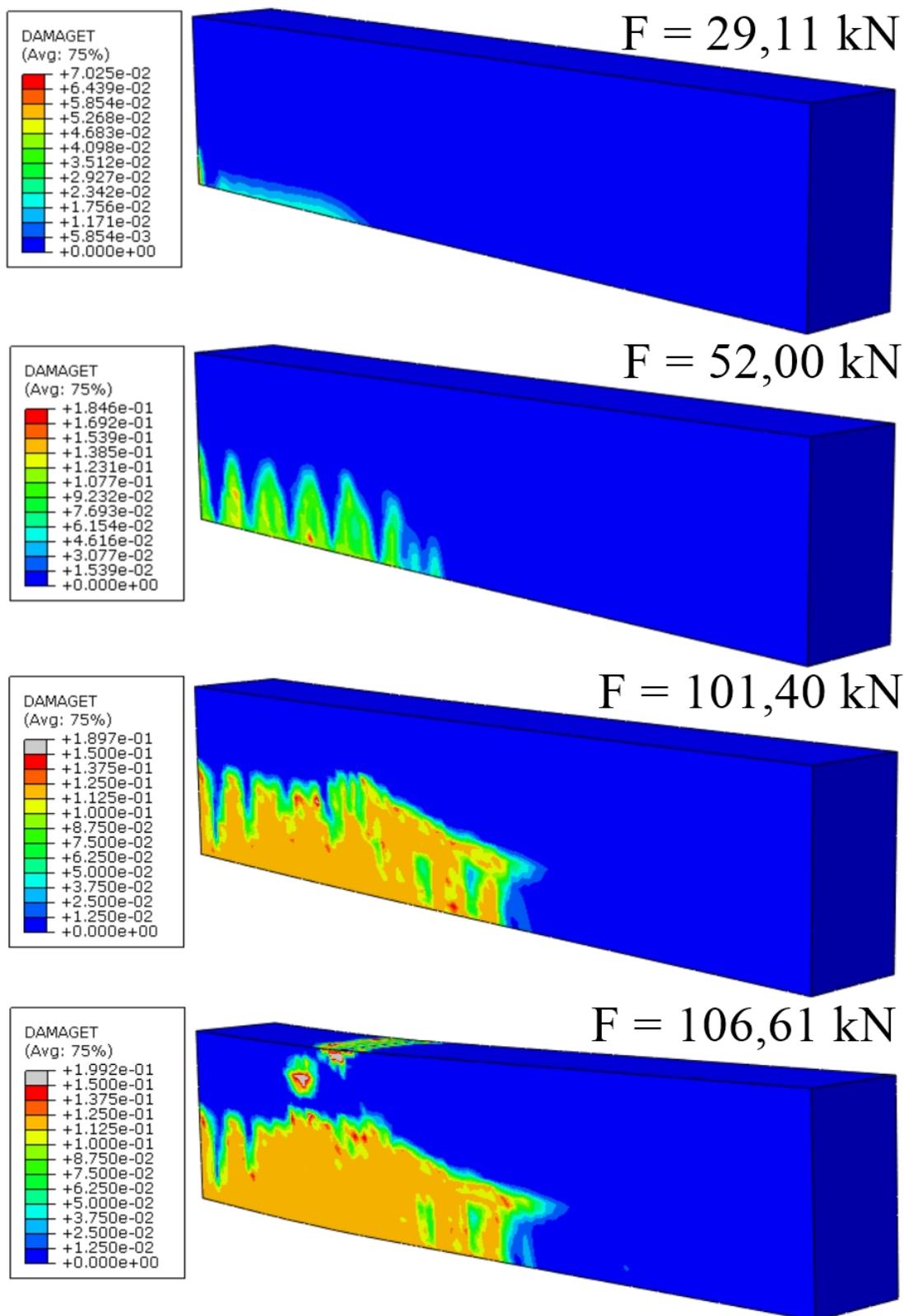


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 84 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=2\%$, em MPa.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 85 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=2\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Para as tensões, percebe-se, na condição de carregamento aplicada, que as fibras inferiores da matriz cimentícia são tracionadas enquanto as superiores são comprimidas. À medida que

este carregamento aumenta, as tensões de tração na viga evoluem, evidenciando a subida da linha neutra, deixando as fibras superiores, entre os pontos de carregamento, cada vez mais comprimidas.

Para as armaduras, observa-se que as tensões ao longo das barras aumentam de forma proporcional ao carregamento, evidenciando o comportamento resistivo das armaduras inferiores, que trabalham à tração, e das barras superiores, resistindo à esforços compressivos. Confirmando o comportamento esperado em testes de flexão como o ensaiado. Para as vigas reforçadas com fibras de aço ($f = 1\%$ e $f = 2\%$), observou-se que as barras de aço chegam a atingir as tensões equivalentes ao patamar de escoamento do aço utilizado, diferente da viga com $f = 0\%$.

Este comportamento destaca a maior resistência da matriz cimentícia reforçada com fibras ao conseguir suportar maiores tensões e transferir parte desta tensão para a armadura sem falhar totalmente, diferentemente do que ocorre com o concreto sem reforço de fibras.

Na análise de fissuração, a propagação de dano à tração na matriz mostra o padrão de fissuração esperado para o elemento analisado. Para os valores de $d_t > 0$ o concreto começa a fissurar, aspecto relacionado ao desenvolvimento de deformações plásticas à tração que o torna cada vez menos resistente até o ponto em que o CRFA não contribui mais para a resistência à tração do elemento e, desta forma, transfere totalmente as tensões de tração para a armadura de aço.

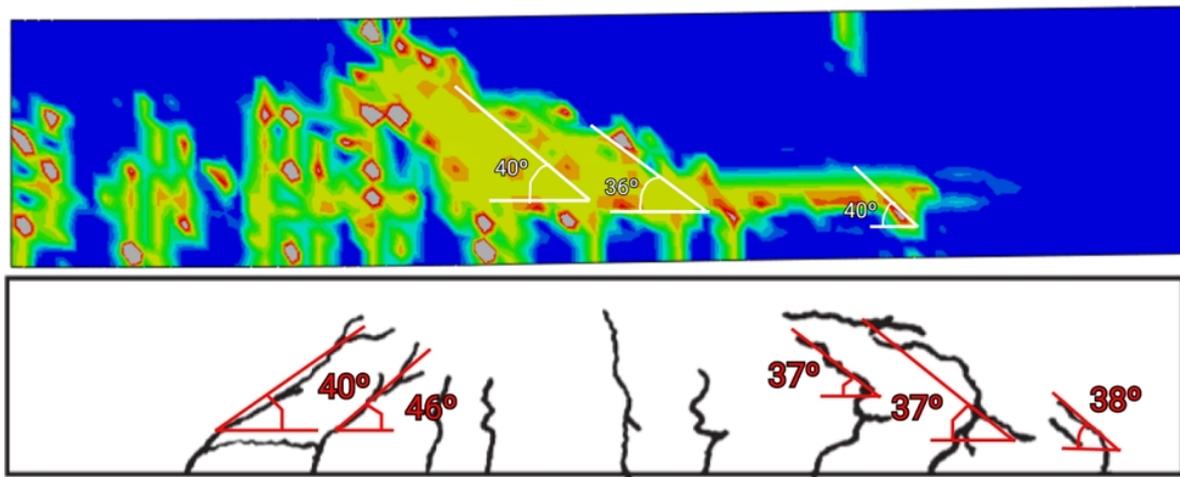
Além dos resultados dos testes de flexão de 4 pontos, Lim e Oh (1999) apresentaram os padrões de fissuração das vigas testadas. Essas representações foram comparadas com os resultados obtidos através do desenvolvimento do dano à tração do material. Verificou-se uma boa convergência entre os resultados analíticos e experimentais, com ângulos de inclinação das fissuras iguais ou bem semelhantes às fissuras mais próximas aos apoios e fissuras mais verticalizadas na parte central da viga. As comparações são apresentadas nas figuras 86 a 88.

No trabalho apresentado, Lim e Oh (1999) avaliam a inserção de fibras na matriz de concreto como uma forma de reforço a esforços cisalhantes, comprovando experimentalmente que quanto maior a taxa volumétrica de fibras metálicas na matriz maior será a capacidade resistiva ao cisalhamento do elemento estrutural. Uma forma de avaliar esta característica é através da propagação de dano à tração nas vigas modeladas. Sabe-se que um indício de que a viga falhou, devido à esforços de cisalhamentos, é a presença de fissuras inclinadas na região entre o ponto de carregamento e os apoios da viga.

Assim, como mostrado também nas figuras de 86 a 88, percebe-se que à medida que o volume de fibras na matriz aumenta, as fissuras da região danificada mais próxima ao apoio tendem a uma verticalização do seu sentido. O elemento começa a adquirir mais resistência ao cisalhamento e demonstra que a falha se dá devido à flexão, devido a presença de fissuras mais verticalizadas e centralizadas na viga.

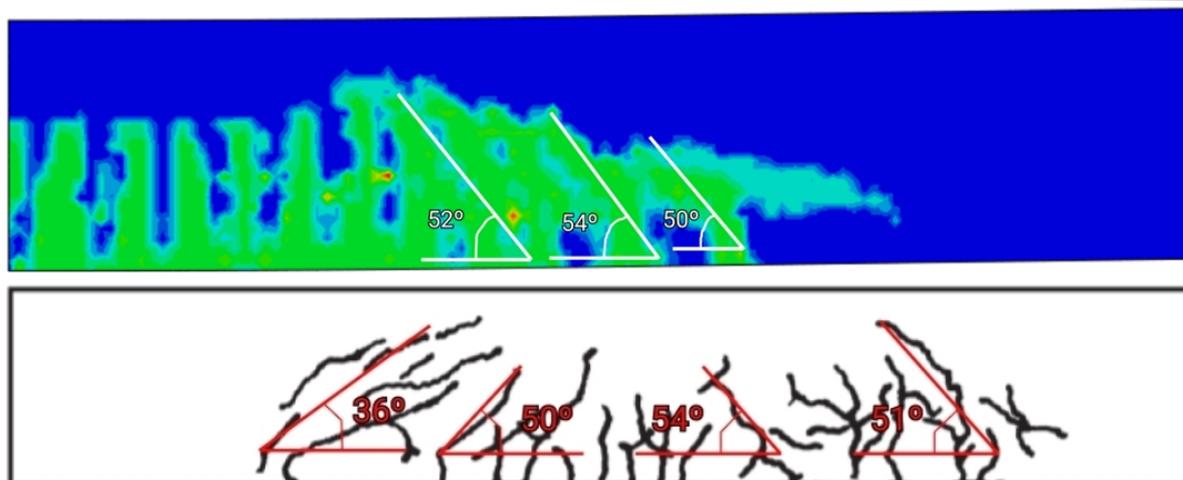
Com a análise apresentada, é possível afirmar que os resultados numéricos com entradas analíticas, com base no modelo *Concrete Damaged Plasticity* e resistências calculadas pelo modelo proposto por Dutra (2012), é capaz de representar de forma satisfatória o comportamento do CRFA baseado nas misturas apresentadas por Lim e Oh (1999).

Figura 86 – Comparação entre fissuras para $f = 0\%$.

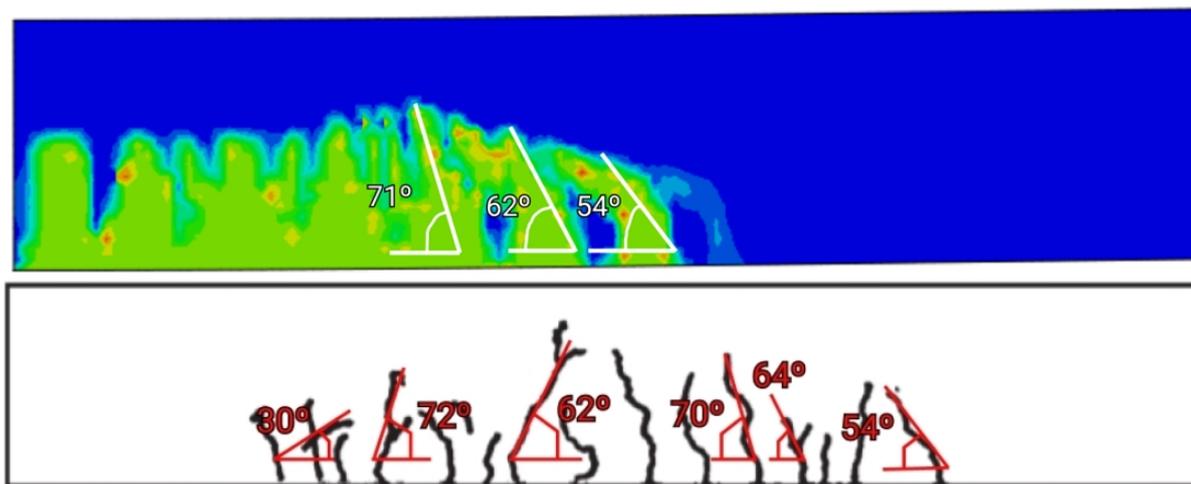


Fonte – Adaptado de Lim e Oh (1999).

Figura 87 – Comparação entre fissuras para $f = 1\%$.



Fonte – Adaptado de Lim e Oh (1999).

Figura 88 – Comparação entre fissuras para $f = 2\%$.

Fonte – Adaptado de Lim e Oh (1999).

5.2.2 Vigas de Kovács e Balázs (2003)

No trabalho apresentado por Kovács e Balázs (2003), foram ensaiadas experimentalmente vigas em CRFA armadas com a finalidade de verificar a capacidade resistente com a substituição parcial ou total dos estribos por fibras de aço. Optou-se então por modelar as vigas do primeiro grupo da segunda série apresentadas pelos autores, vigas sem estribos, reforçadas com fibras de aço ancoradas nas extremidades. Onde a primeira, A1, não tem nenhum reforço transversal, concreto sem reforço de fibras e com armadura longitudinal convencional, enquanto as vigas A2 e A3 são reforçadas transversalmente por fibras de aço com volumes de 0,5% e 1,0%, respectivamente. As configurações de armação são apresentadas na Figura 89.

Para as barras longitudinais, foram adotadas duas barras de 16 mm, distando 3 cm da borda inferior, para armadura à tração, e duas barras de 6 mm, distando 2 cm da borda superior, para armadura à compressão. Ambas as armaduras apresentam tensão de escoamento de 50 kN/cm², tensão última de 55 kN/cm² e módulo de elasticidade 20000 kN/cm².

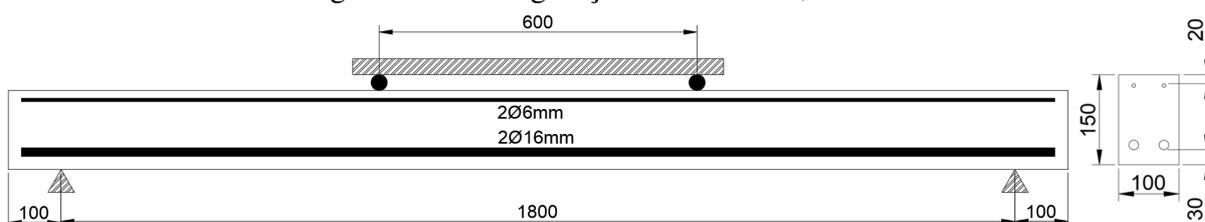
As fibras de aço empregadas têm denominação comercial Dramix ZC 30/0,5, com fator de forma 60, extremidade em gancho, comprimento de 30 mm e diâmetro de 0,5 mm, e resistência à tração de 120 kN/cm². A resistência do concreto empregado apresenta variações para cada viga, apresentadas na Tabela 32, e os resultados dos ensaios de flexão são apresentados na Figura 90.

Tabela 32 – Resistências das dosagens empregadas.

Espécime	Resistência à compressão uniaxial - f_{cm} (MPa)
A1	37,60
A2	39,90
A3	38,60

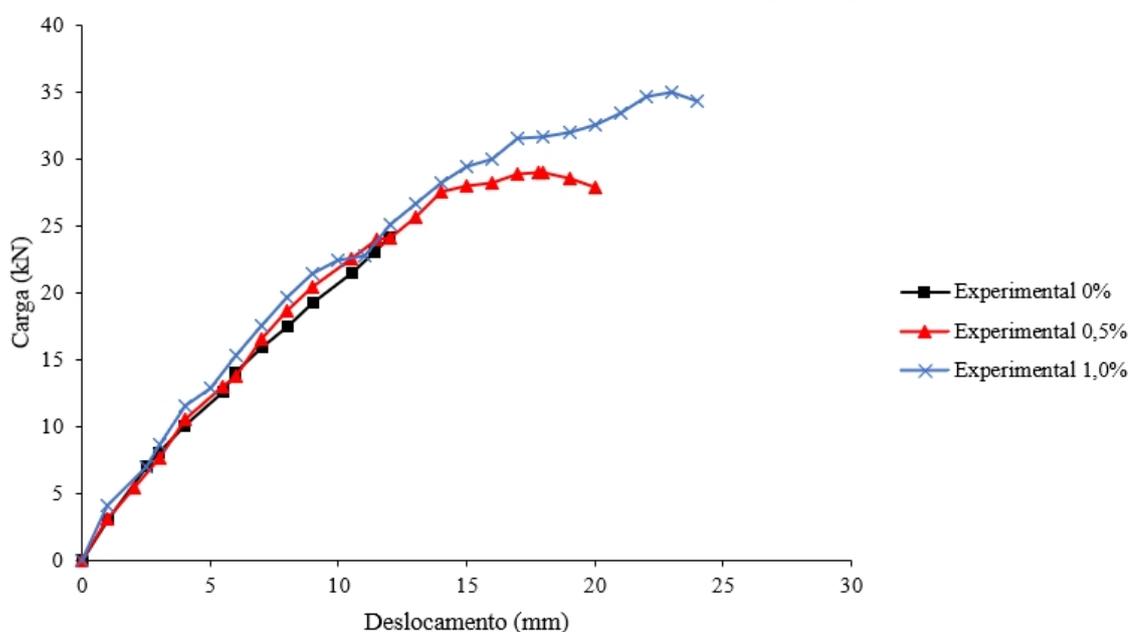
Fonte – Kovács e Balázs (2003).

Figura 89 – Configuração de armadura, em mm.



Fonte – Adaptado de Kovács e Balázs (2003).

Figura 90 – Resultados ensaios de flexão de quatro pontos.



Fonte – Adaptado de Kovács e Balázs (2003).

5.2.2.1 Tensões Uniaxiais

Como na seção anterior, foram determinadas as resistências analíticas com base nas equações do Capítulo 3 e nos dados apresentados pelos autores do experimento e resultados apresentados na Tabela 33.

Tabela 33 – Resistências analíticas.

f (%)	Resistência à compressão uniaxial analítica - (MPa)	Resistência à tração uniaxial analítica - (MPa)	Resistência à compressão biaxial analítica - (MPa)	Módulo de Elasticidade analítico - (MPa)
0	37,60	3,36	43,61	33432.4
0,5	40,90	3,56	47,40	34310.9
1,0	44,00	3,73	51,00	35195.8

Como avaliado anteriormente, são definidos os parâmetros de entrada para o CDP, apresentados na Tabela 34.

Tabela 34 – Resumo dos parâmetros CDP para o CRFA.

PARÂMETRO	$f = 0\%$	$f = 0,5\%$	$f = 1,0\%$
σ_{cb0}/σ_{c0}	1,16	1,16	1,16
K_c	1	1	1
ψ	27,65°	26,65°	28,85°
	56,6°	53,66°	50,11°
	34°	37°	37°
e	0	0	0
μ	0,0001	0,0001	0,0001

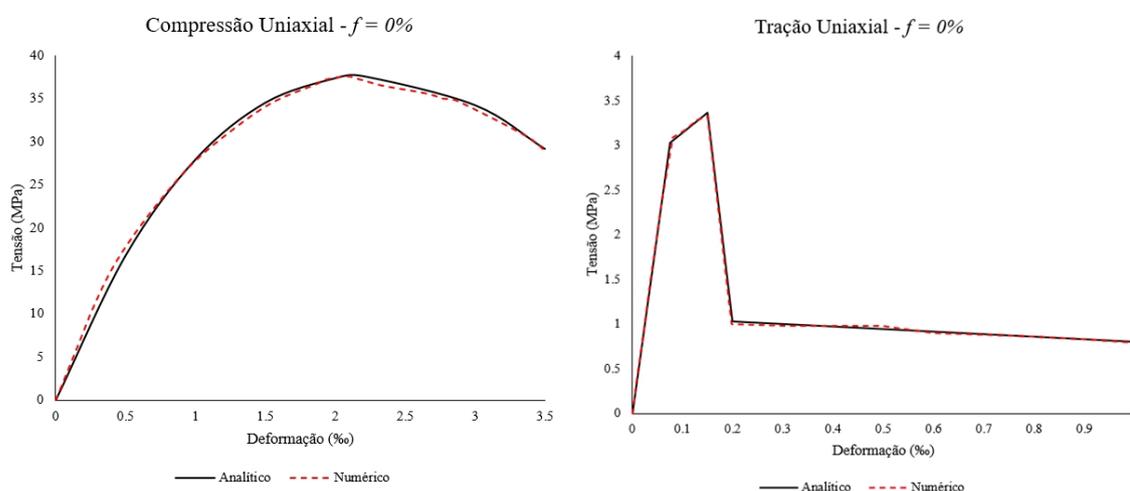
Para todas as frações volumétricas de fibras, foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. O modelo de corpo de prova cilíndrico aplicado na análise anterior (Figura 63) foi utilizado para a avaliação dos dados de entrada apresentados.

As resistências residuais $f_{R,1}$ e $f_{R,3}$, utilizadas para a determinação das resistências à tração uniaxial f_{Fts} e f_{Ftu} , de acordo com as relações propostas por Venkateshwaran, Tan e Li (2018), são apresentadas na Tabela 35.

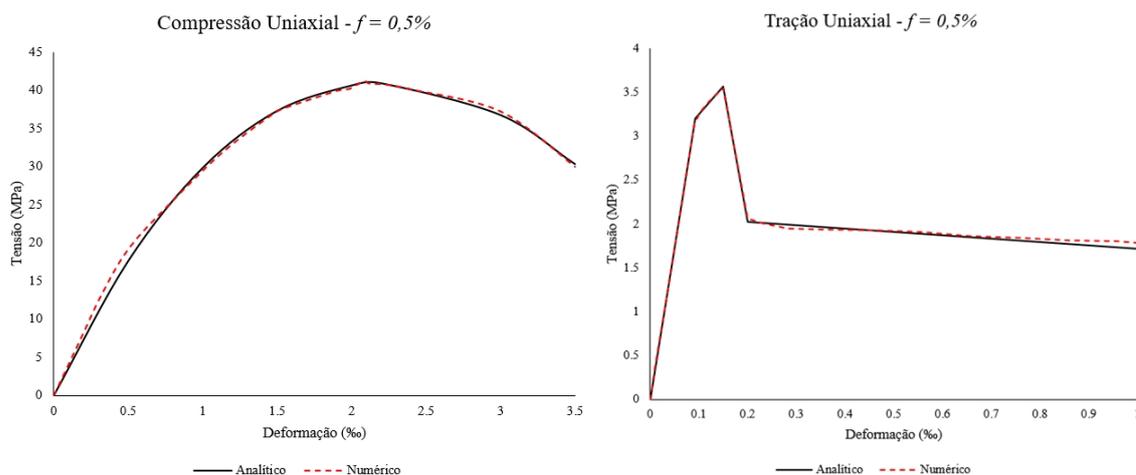
Tabela 35 – Resistências residuais, de serviço e última.

f (%)	$f_{R,1}$ (MPa)	$f_{R,3}$ (MPa)	f_{Fts} (MPa)	f_{Ftu} (MPa)
0	2,27	2,52	1,02	0,69
0,5	4,49	5,22	2,02	1,71
1	6,70	7,91	3,01	2,61

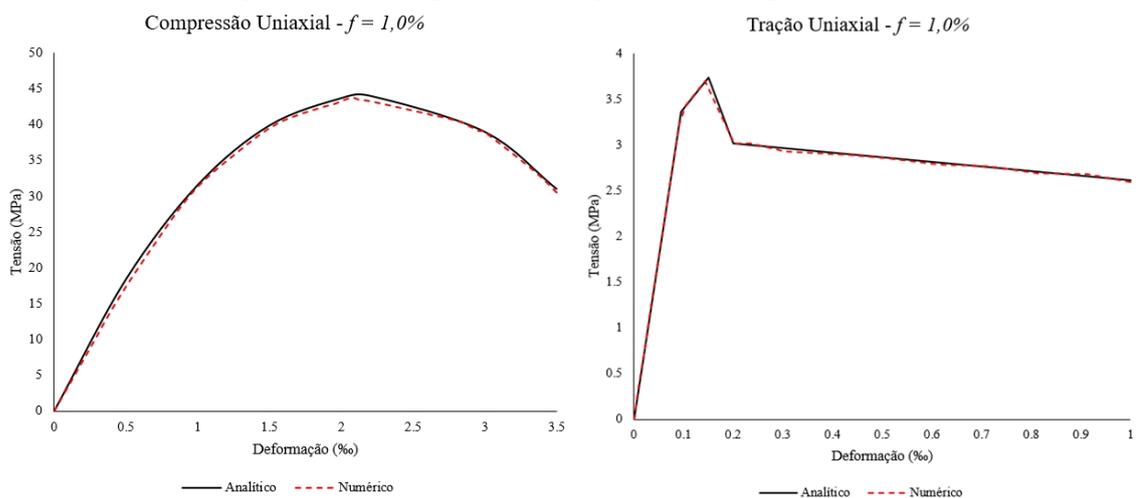
As respostas foram então comparadas com as equações analíticas dos modelos constitutivos, como ilustrado nas figuras de 91 a 93.

Figura 91 – Compressão e tração uniaxiais para $f=0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 92 – Compressão e tração uniaxiais para $f=0,5\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

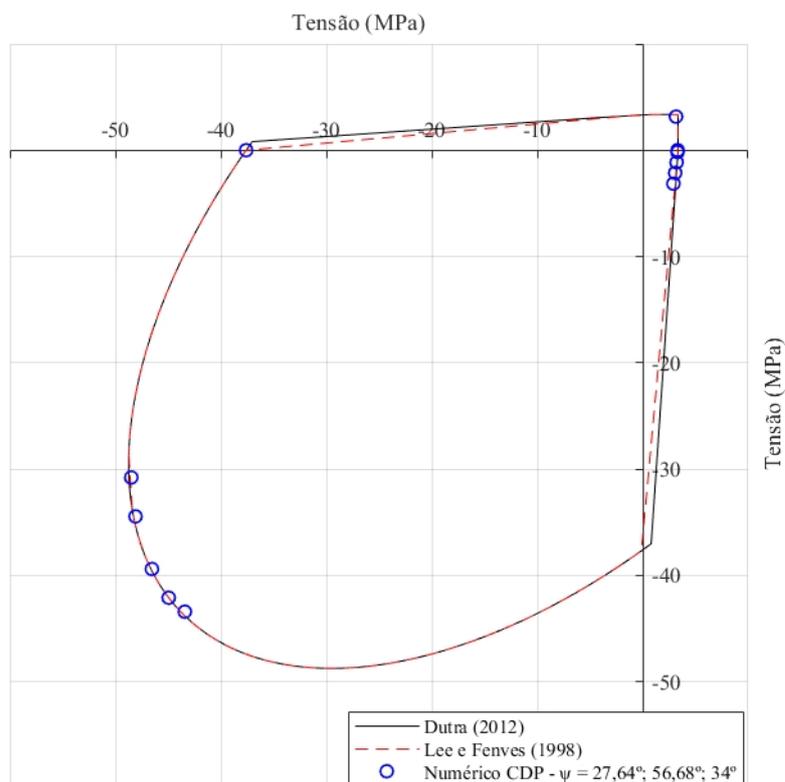
Figura 93 – Compressão e tração uniaxiais para $f=1,0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

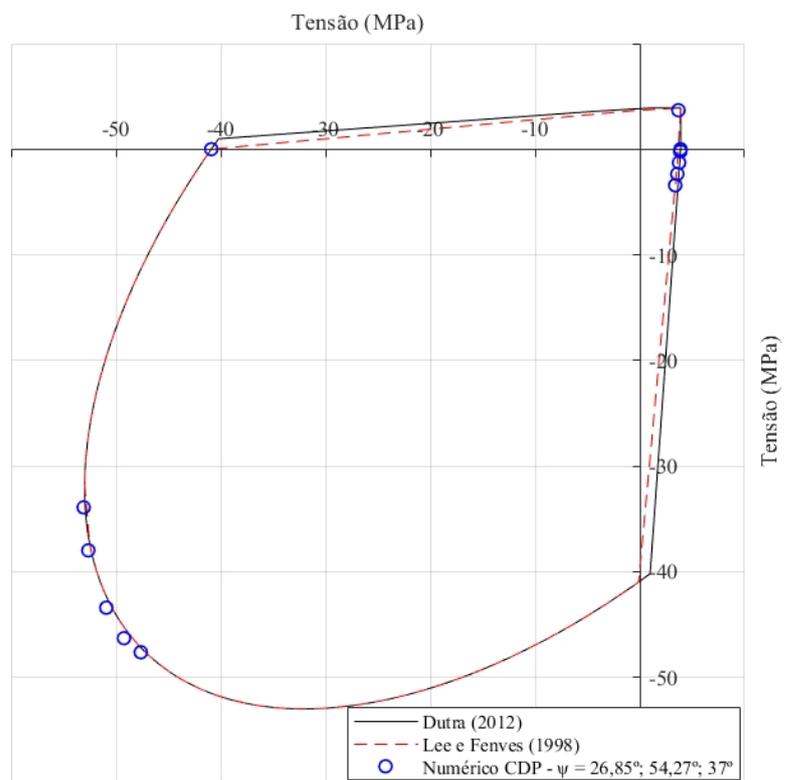
A variação dos valores de ψ também não interferiu na resposta uniaxial dos modelos. Observa-se também uma ótima concorância entre os resultados numéricos e as entradas analíticas para a avaliação dos modelos constitutivos. Assim, segue-se para a próxima etapa de verificação relacionada ao estado plano de tensões do compósito.

5.2.2.2 Tensões Biaxiais

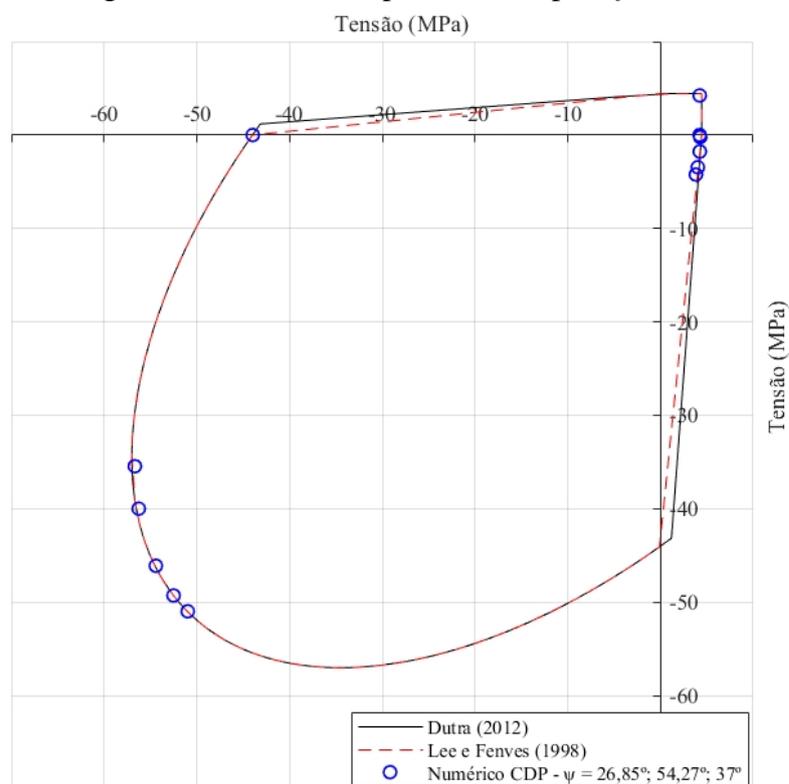
Aplicando o modelo de placa (Figura 67), foram avaliadas e registradas as respostas do modelo sob solicitações biaxiais, sob as mesmas doze configurações de carregamentos apresentadas na Tabela 31. Os resultados foram plotados junto às curvas das equações analíticas propostas por Dutra (2012) e por Lee e Fenves (1998) para fins de comparação, como apresentado nas figuras 94 a 96.

Figura 94 – Curva de ruptura biaxial para $f=0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 95 – Curva de ruptura biaxial para $f=0,5\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 96 – Curva de ruptura biaxial para $f= 1,0\%$.

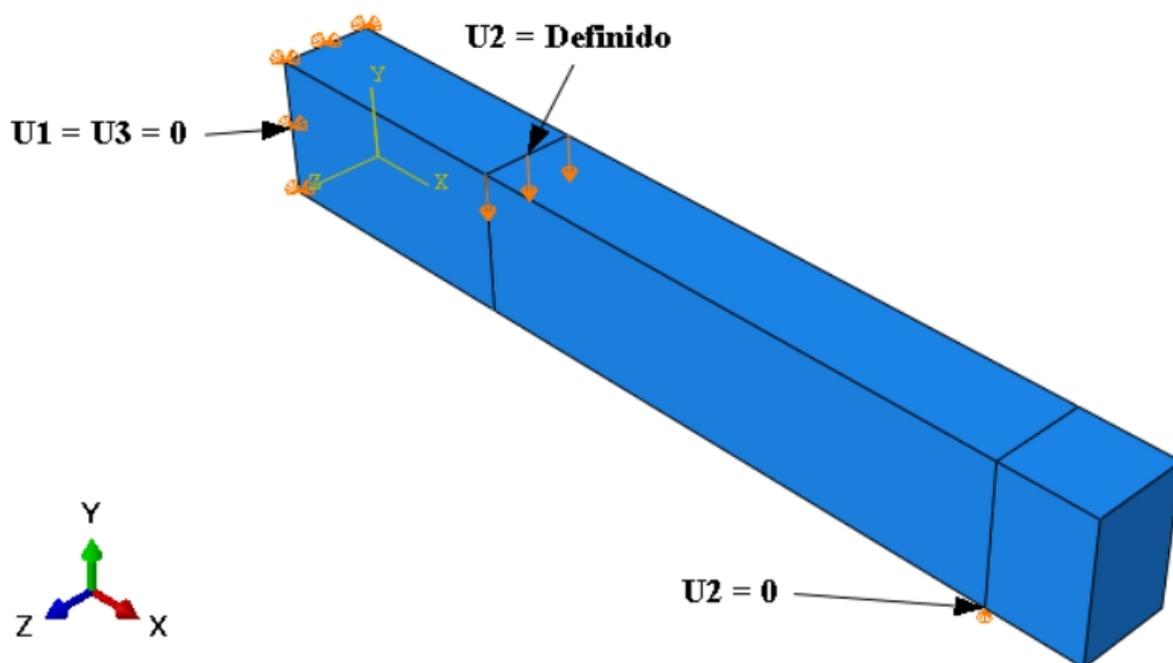
Fonte – Elaborado pelo autor.

Pôde-se avaliar que o modelo numérico é coerente com a equação analítica proposta pelo CDP. Os resultados também mostram-se compatíveis com o modelo de curva de ruptura biaxial proposta por Dutra (2012), pois os pontos obtidos na simulação encontram-se dentro da envoltória, ou seja, estão a favor da segurança. Tomam-se esses parâmetros para a próxima etapa de análise deste trabalho, aplicando o CDP para a análise das vigas testadas por Kovács e Balázs (2003).

5.2.2.3 Resposta do Modelo de Viga

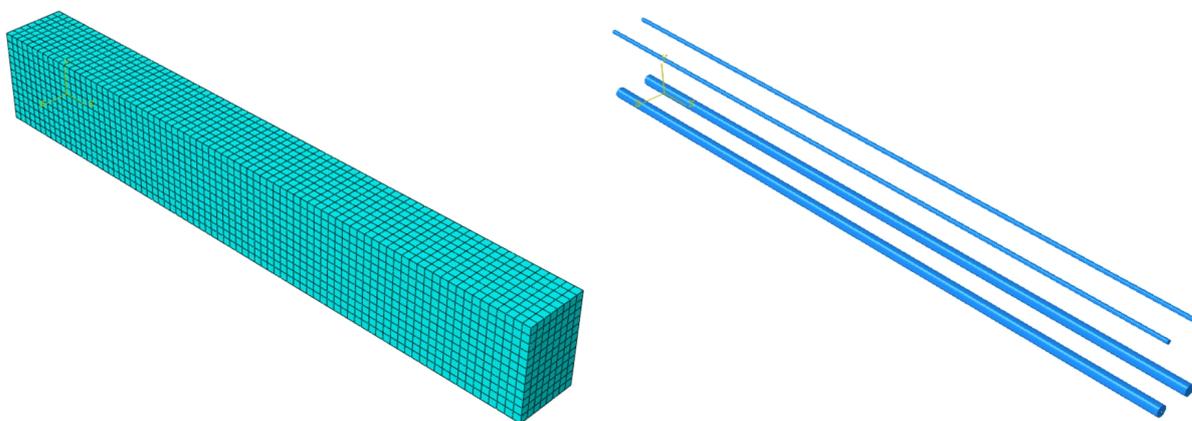
Adotou-se a simetria da viga, modelando metade do elemento estrutural e estabelecendo as condições de contorno apresentadas na Figura 97. Como ilustrado na Figura 98, para a viga de CRFA foi desenvolvida uma malha de elementos hexaédricos com tamanho global de 12,5 mm, totalizando 7680 elementos. Para a armadura, foi desenvolvida uma malha com elementos lineares com tamanho global de 12,5 mm, totalizando 312 elementos.

Figura 97 – Condições de contorno para a viga modelada.



Fonte – Elaborado pelo autor.

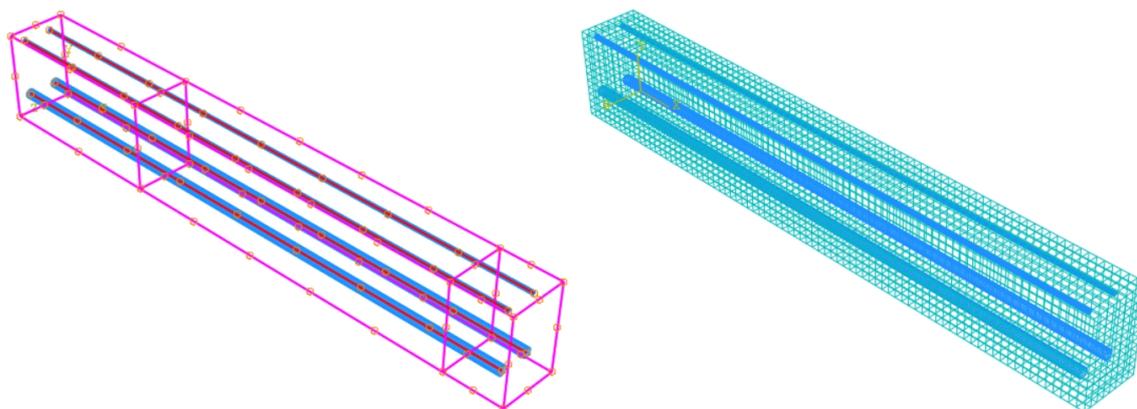
Figura 98 – Malha da viga e armadura.



Fonte – Elaborado pelo autor.

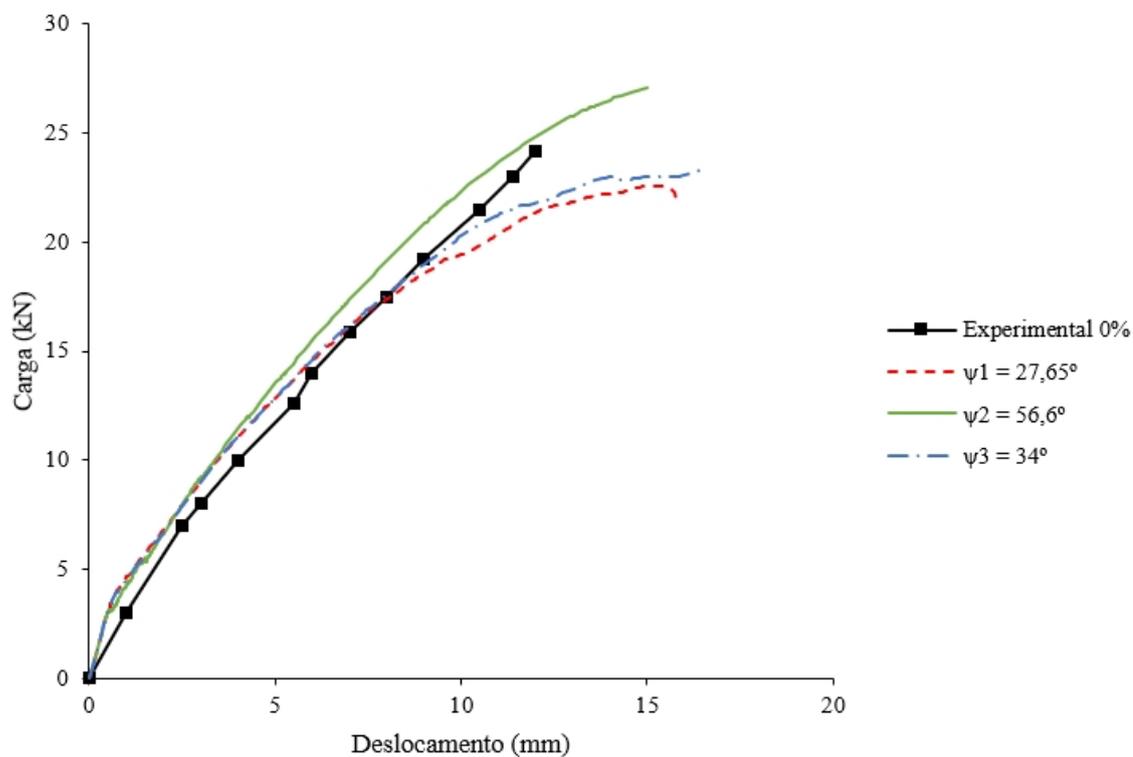
Aplicou-se a técnica de incorporação de elementos como mostrado na Figura 99, com a viga como elemento hospedeiro (em rosa) e as barras de aço os elementos incorporados (em vermelho), formando assim a estrutura final para a simulação.

Figura 99 – Aplicação da técnica de incorporação de elementos.

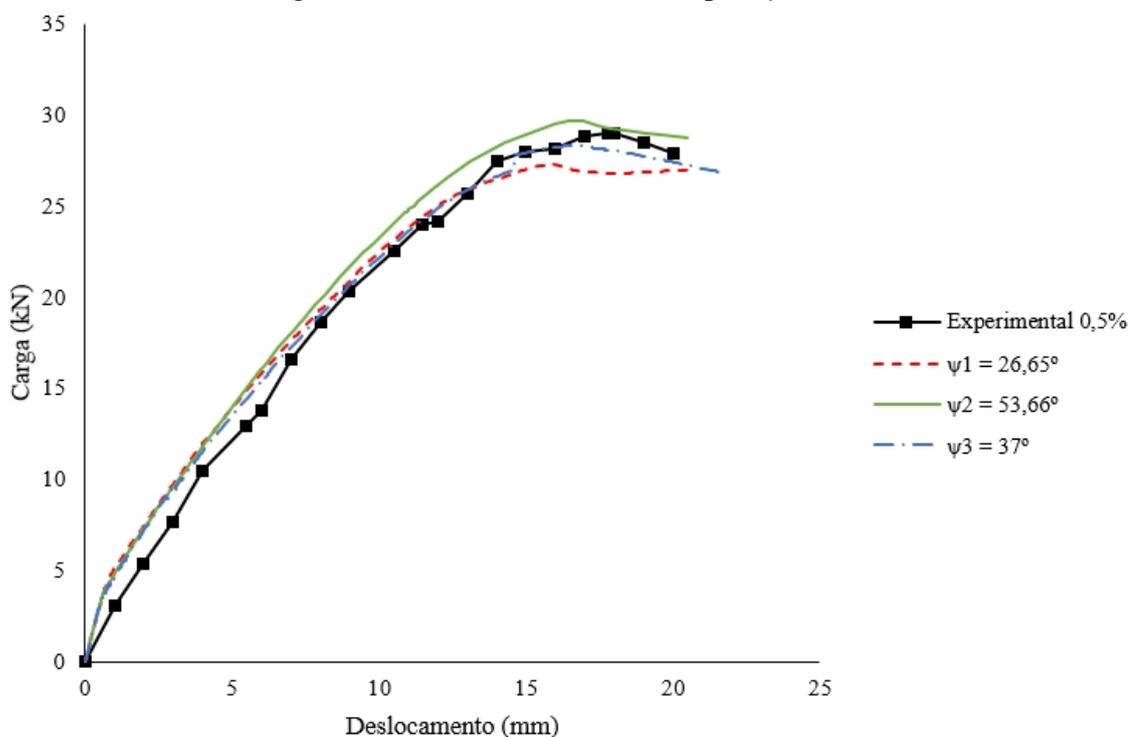


Assim, foram realizadas as simulações, e os resultados de forças de reação na viga em função do deslocamento do vão central da viga, como mostrados nas figuras 74, 75 e 76. Da mesma forma que realizado anteriormente, as reações para a viga são geradas a partir de um deslocamento aplicado no ponto de carregamento do teste e flexão, de forma a evitar grandes concentrações de tensões que venham a interferir no resultado. As forças reativas nos nós da condição de contorno do apoio ($U_2 = 0$) e o deslocamento de um nó no vão central da viga são registrados e montados os gráficos. Também foram realizadas as simulações para os três valores de ψ encontrados para cada caso, a fim de avaliar a melhor saída para o módulo deste parâmetro.

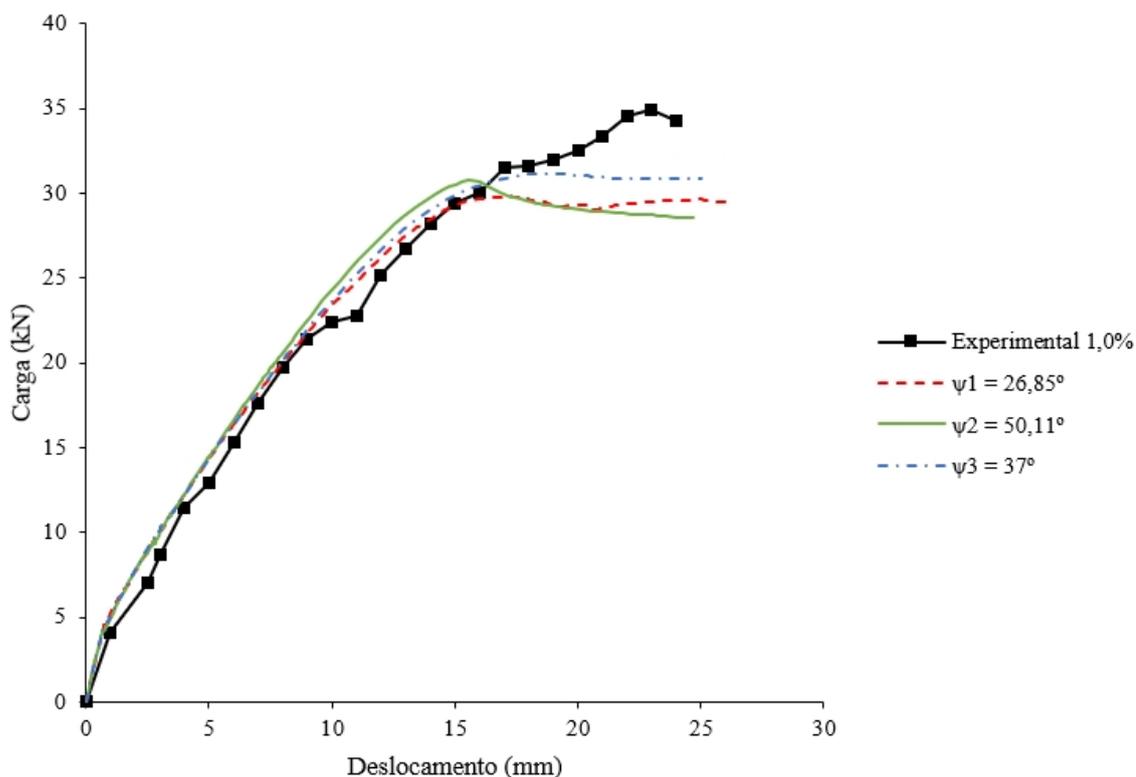
Os resultados dos modelos numéricos e suas variações foram plotados em conjunto com os resultados experimentais para fins de comparação e validação do modelo, como mostrado nas figuras de 100 a 102.

Figura 100 – Resultado dos testes para $f=0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 101 – Resultado dos testes para $f=0,5\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 102 – Resultado dos testes para $f=1,0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Para todas as configurações, os modelos numéricos mostram-se sutilmente mais rígidos que os reais, diferenças bem menores, quando comparadas as registradas pela análise anterior, nos modelos de viga de Lim e Oh (1999).

O modelo numérico apresenta um comportamento semelhante às vigas reais, chegando a determinado patamar de plastificação, para os casos com $f = 0,5\%$ e $f = 1,0\%$, até atingir sua resistência última após um sutil amolecimento, e, para $f = 0\%$, chegando a sua resistência máxima sem plastificação evidente.

Observa-se que, para este modelo, a variação do coeficiente ψ ocasionou leves alterações de resistências apenas para o caso em que $f = 0\%$, onde as configurações 1 e 3 geram menores valores para a resistência última da viga. Para as demais frações volumétricas, pequenas diferenças foram notadas entre os modelos, diferenças que ocorreram basicamente no ramo pós carga de plastificação do elemento estrutural.

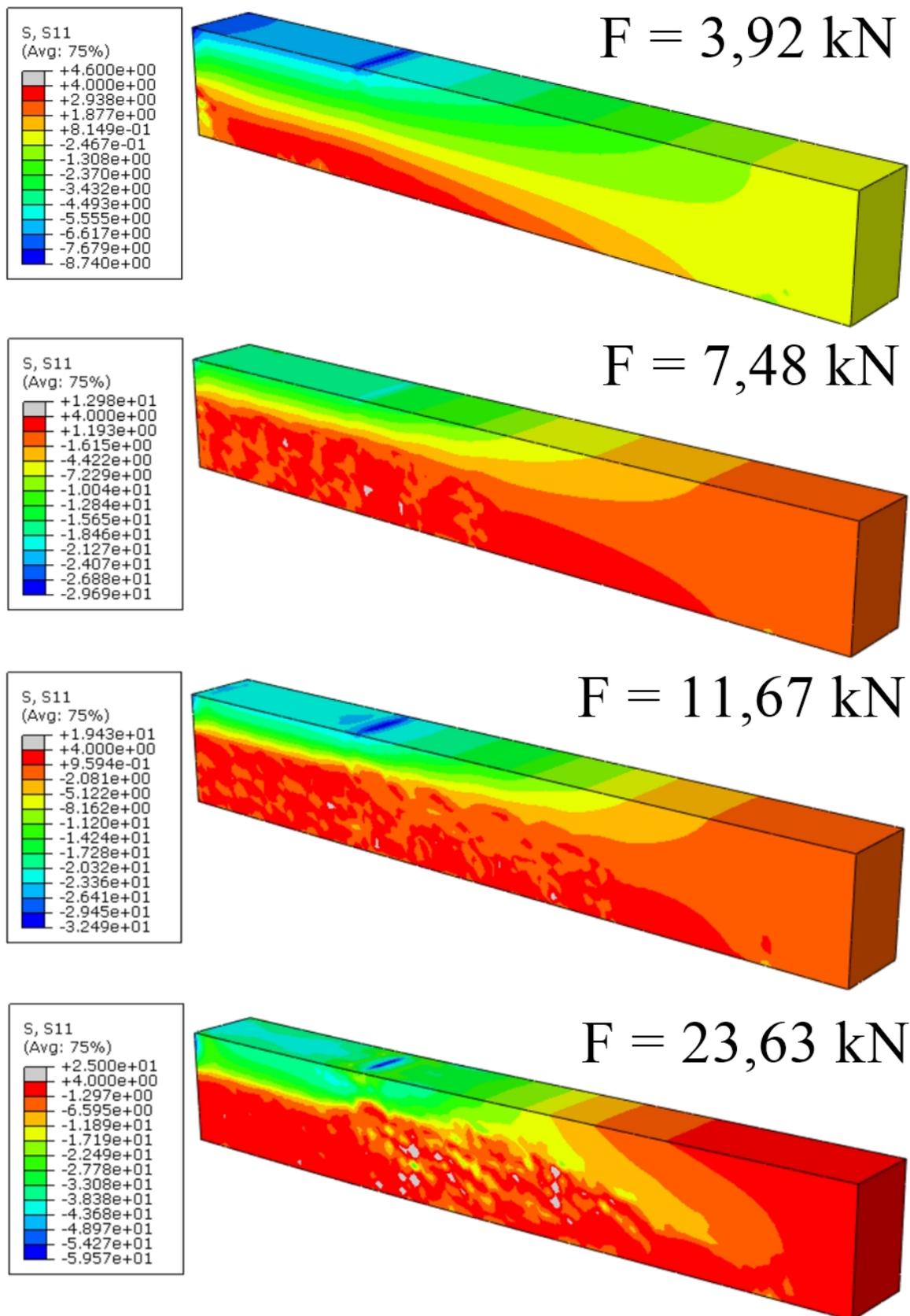
Com a abordagem da configuração 2, com os valores de ângulo de atrito calculados a partir da equação proposta por Proença (1988 apud DUTRA, 2012), quando $f = 0\%$ obtém-se como resultado um valor superior para o $\psi \leq 56,31^\circ$, determinado pelas configurações do CDP no Abaqus SE, sendo adotado então $\psi = 56,31^\circ$ para o concreto sem reforço de fibras.

A configuração 3, com os valores propostos por Proença (1988) para o CRFA ($\psi = 37^\circ$) e por

Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) para o concreto comum ($\psi = 34^\circ$), mais uma vez mostra-se como uma saída mais viável por gerar respostas bem próximas da real, além de uma menor suscetibilidade a erros inerentes à formulações e aproximações por ser um valor fixado. Assim, foram utilizados os modelos com os parâmetros obtidos através do modo de cálculo 3 para ψ a fim de desenvolver uma análise mais aprofundada de tensões e padrão de fissuração no elemento estrutural.

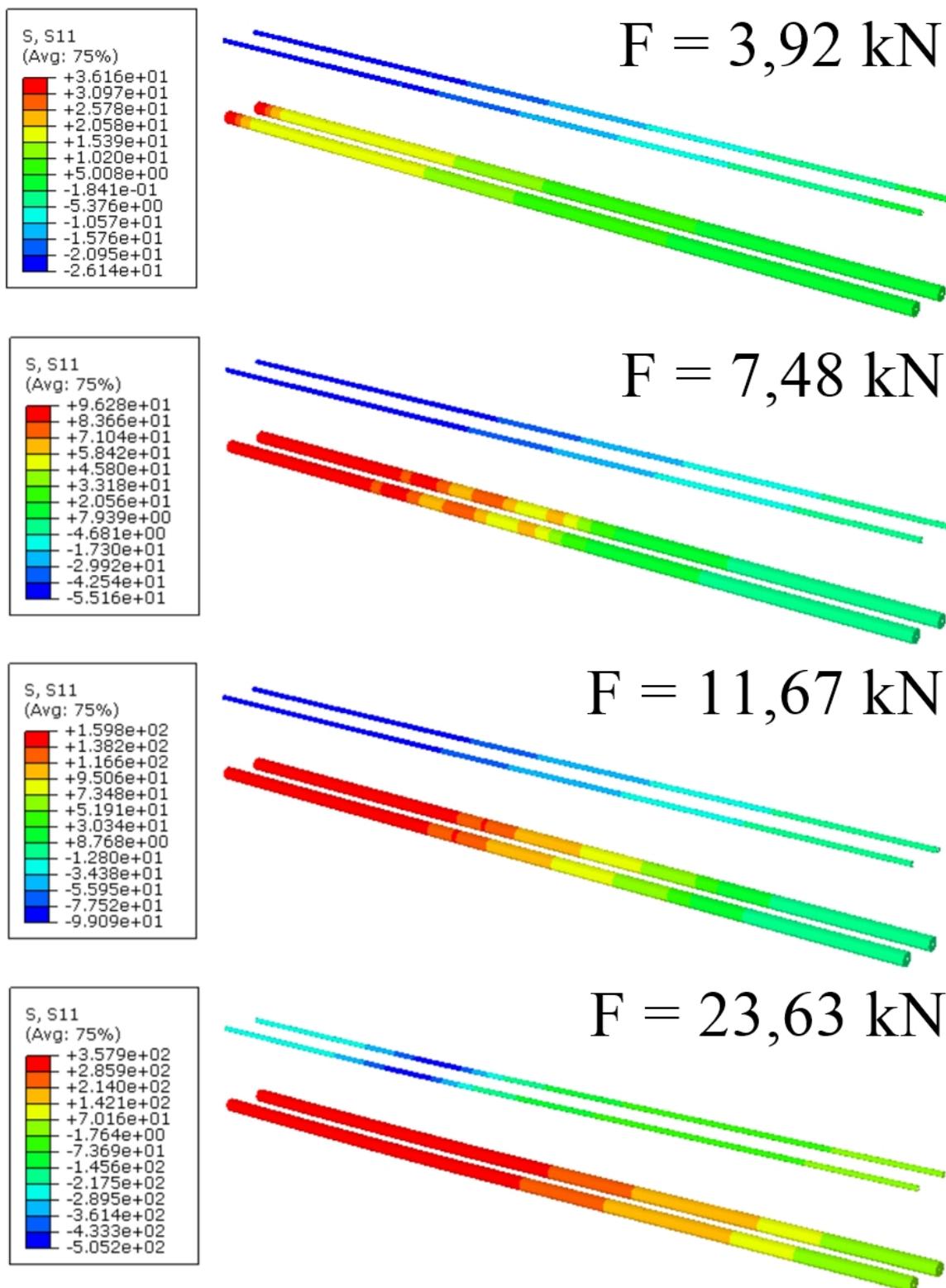
As figuras a seguir, de 103 a 111, mostram o desenvolvimento das tensões na matriz de concreto, tensões na armadura e dano à tração para cada fração volumétrica de fibra analisada.

Figura 103 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=0\%$, em MPa.

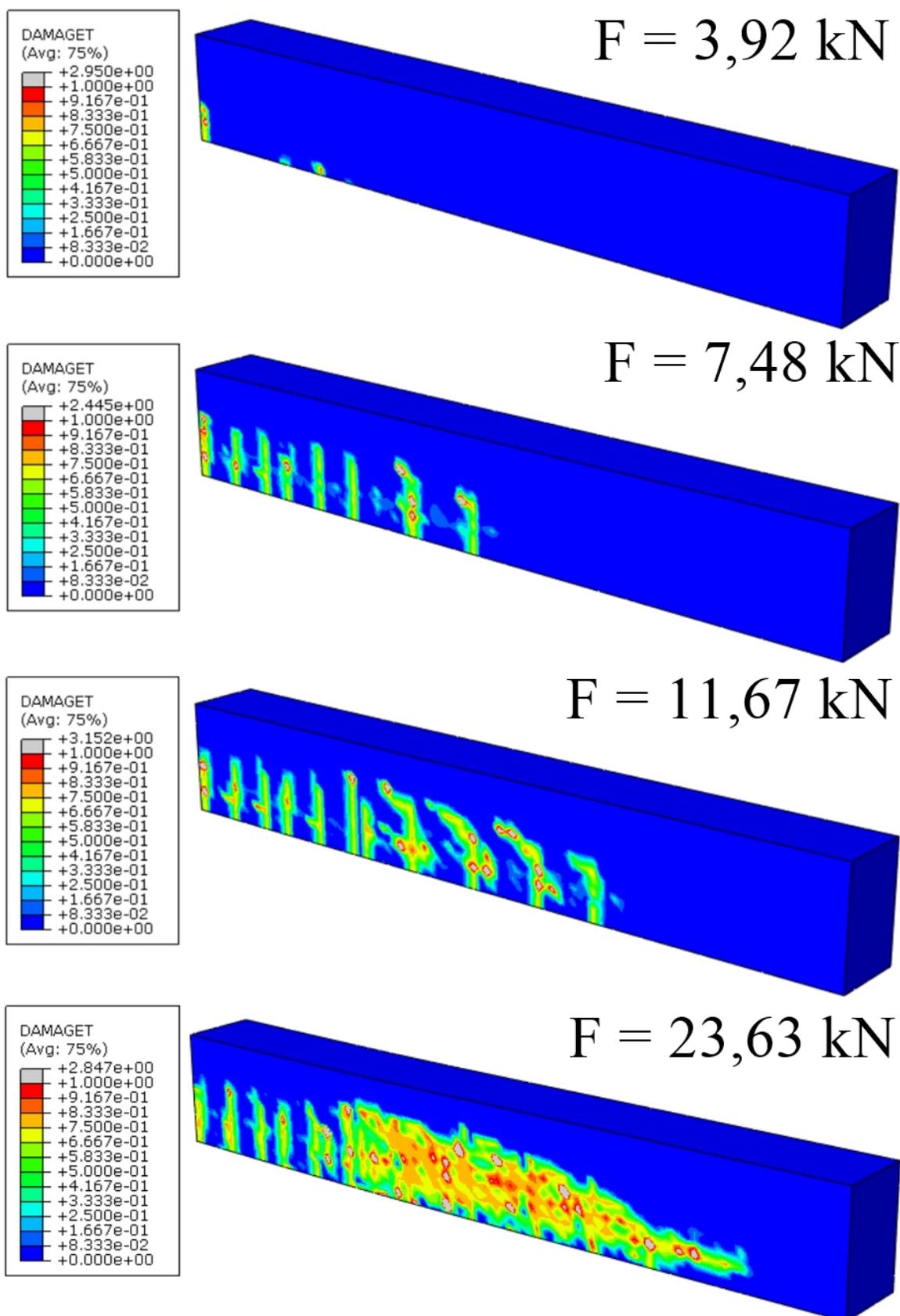


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 104 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=0\%$, em MPa.

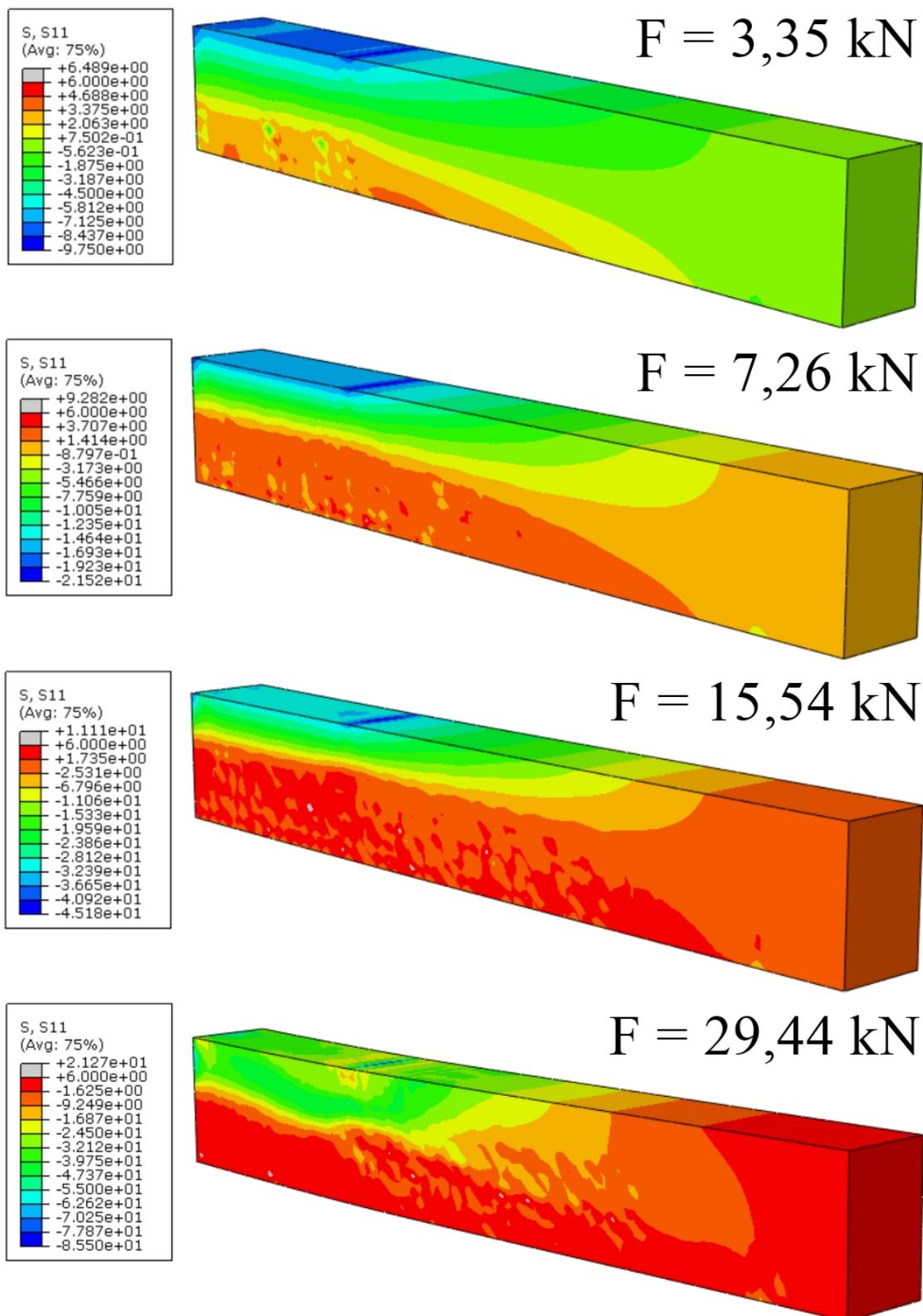


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 105 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=0\%$.

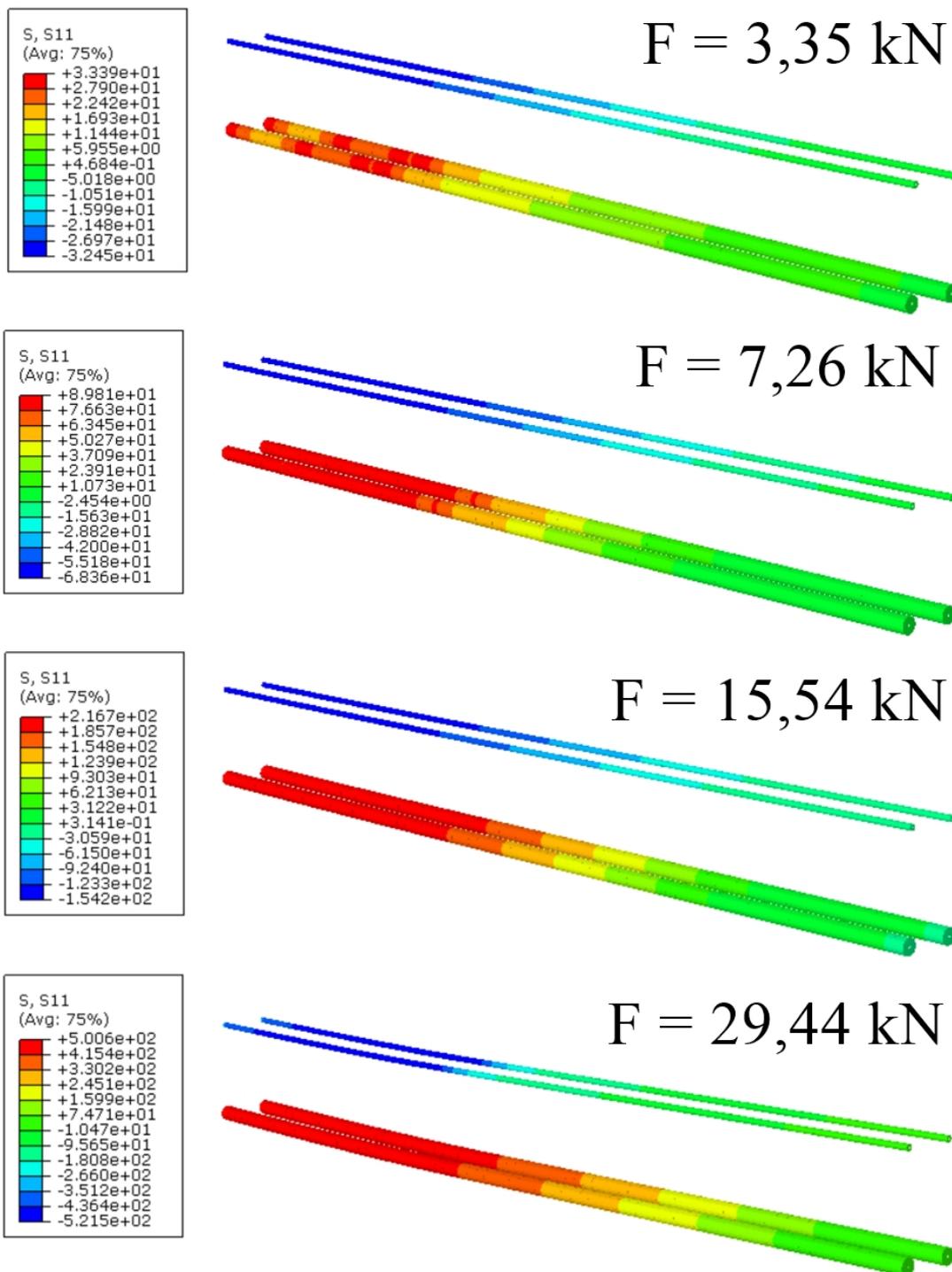
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 106 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=0,5\%$, em MPa.

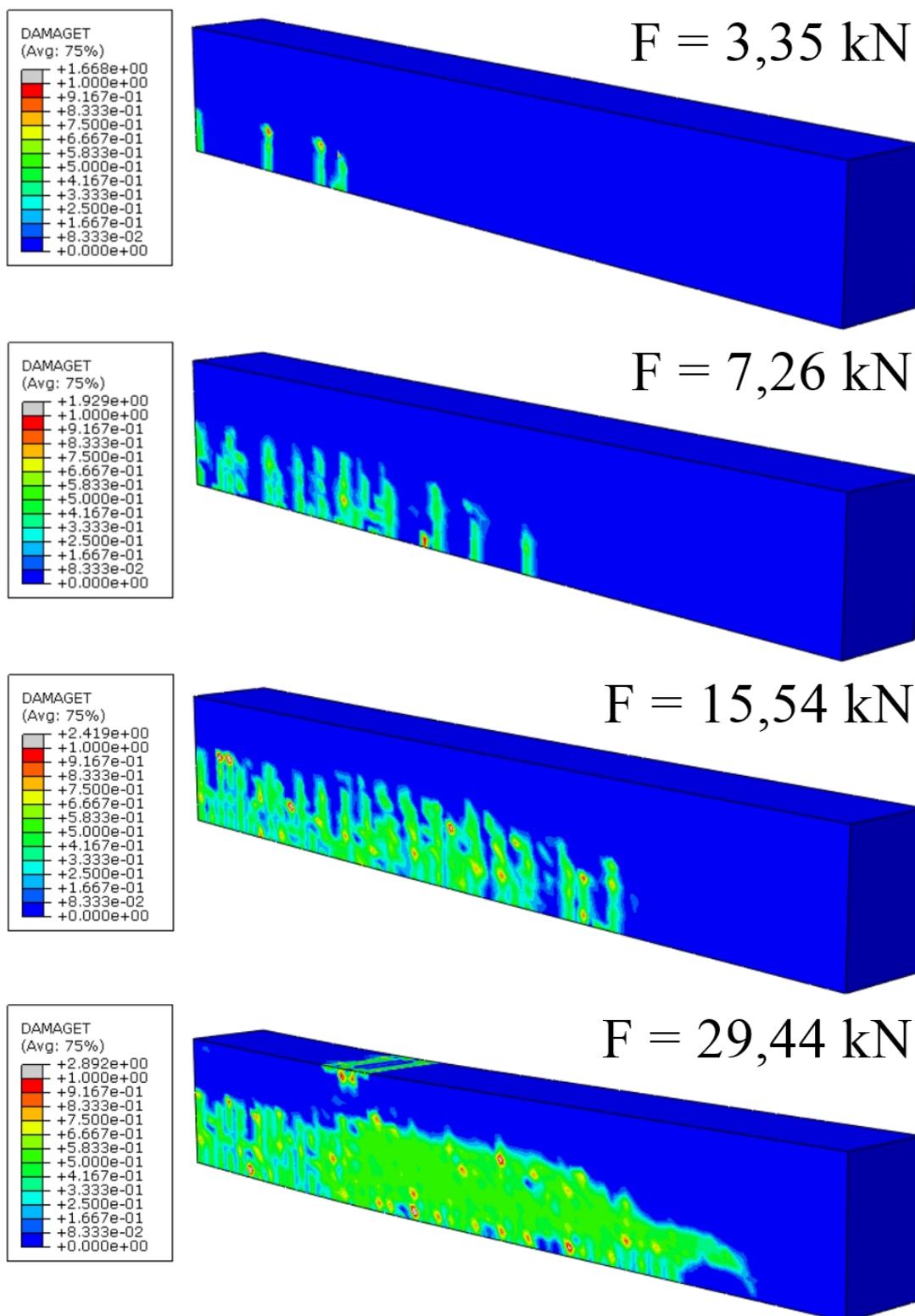


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 107 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=0,5\%$, em MPa.

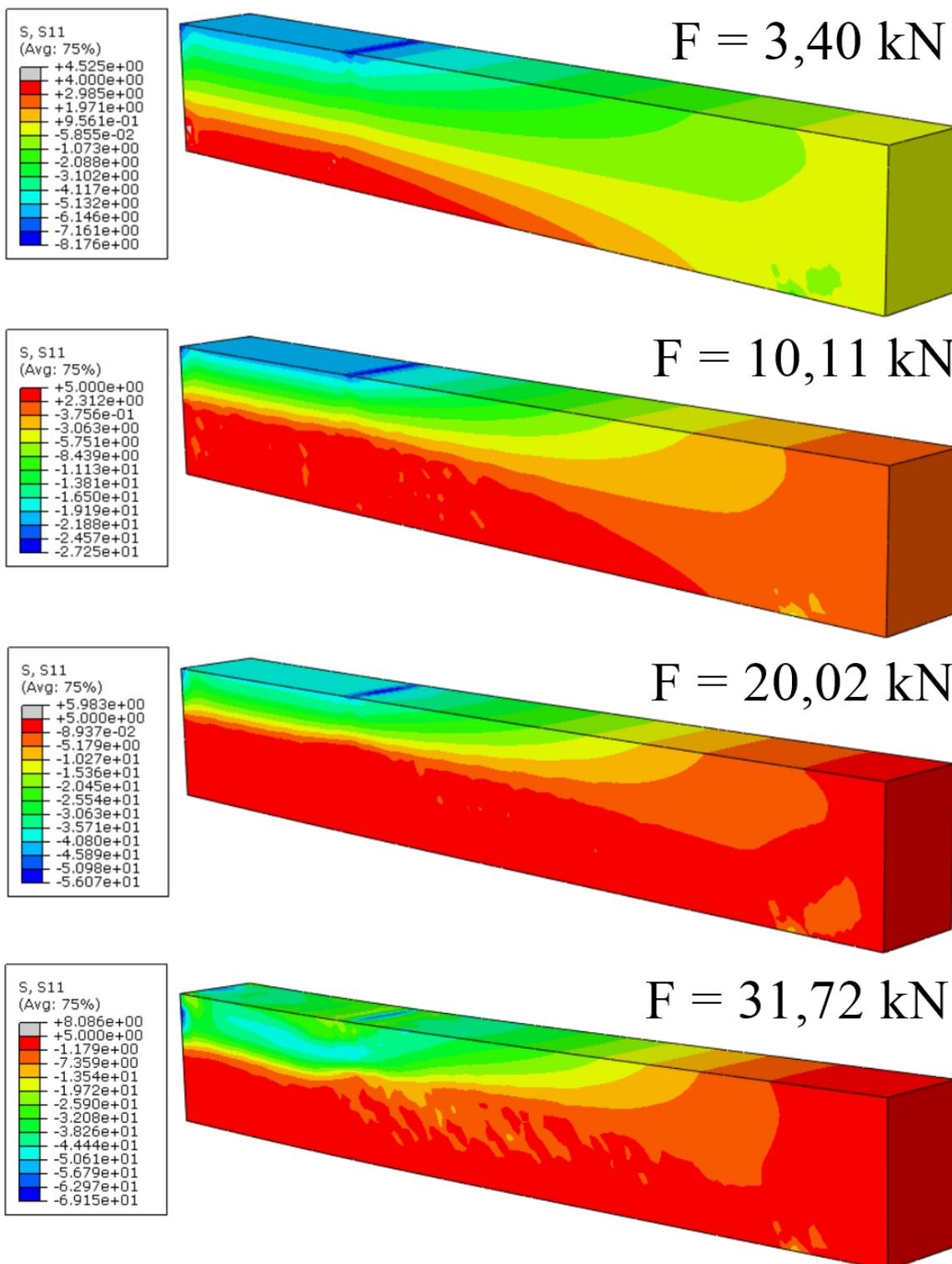


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 108 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=0,5\%$.

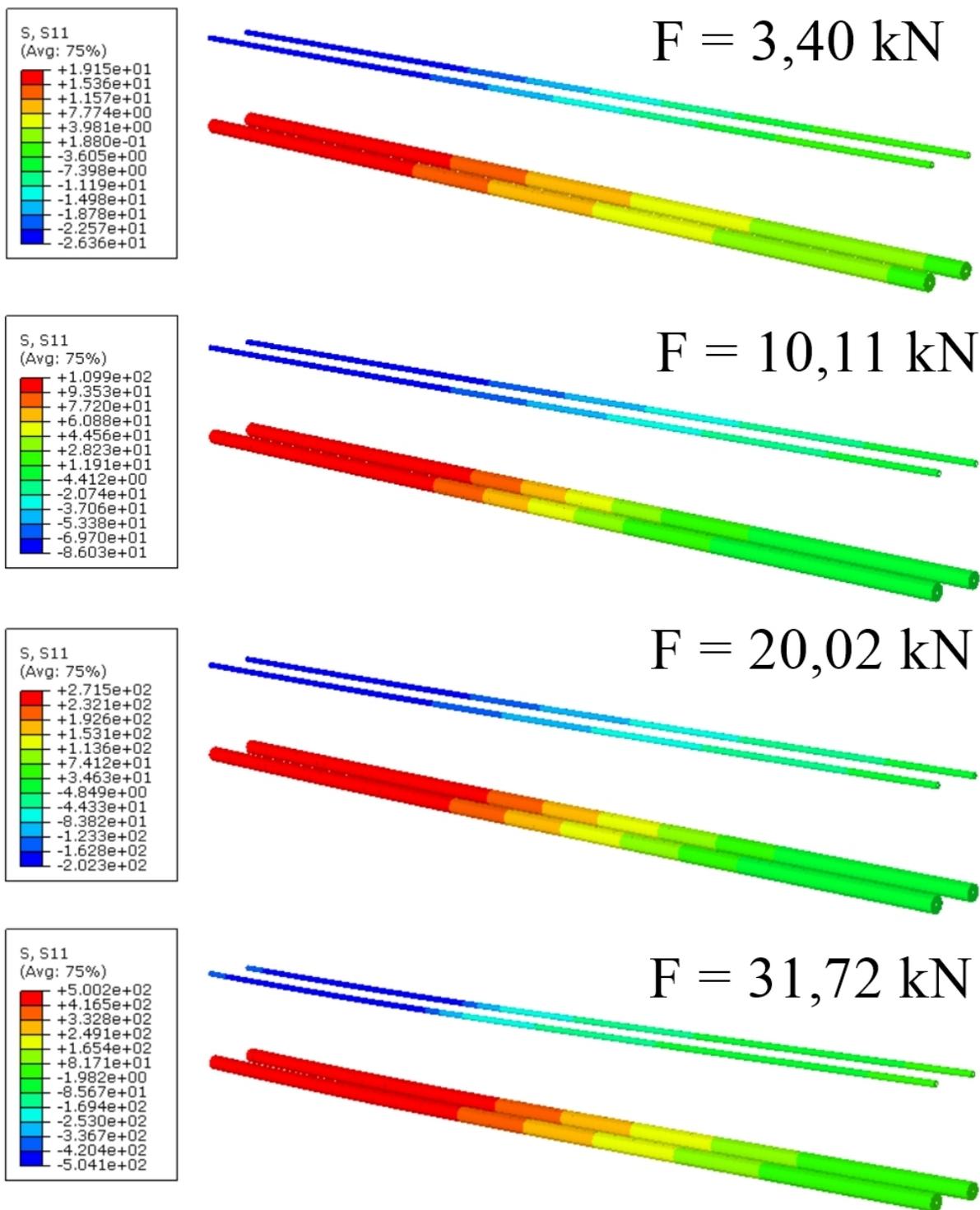
Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 109 – Desenvolvimento das tensões σ_x na matriz para $f=1,0\%$, em MPa.

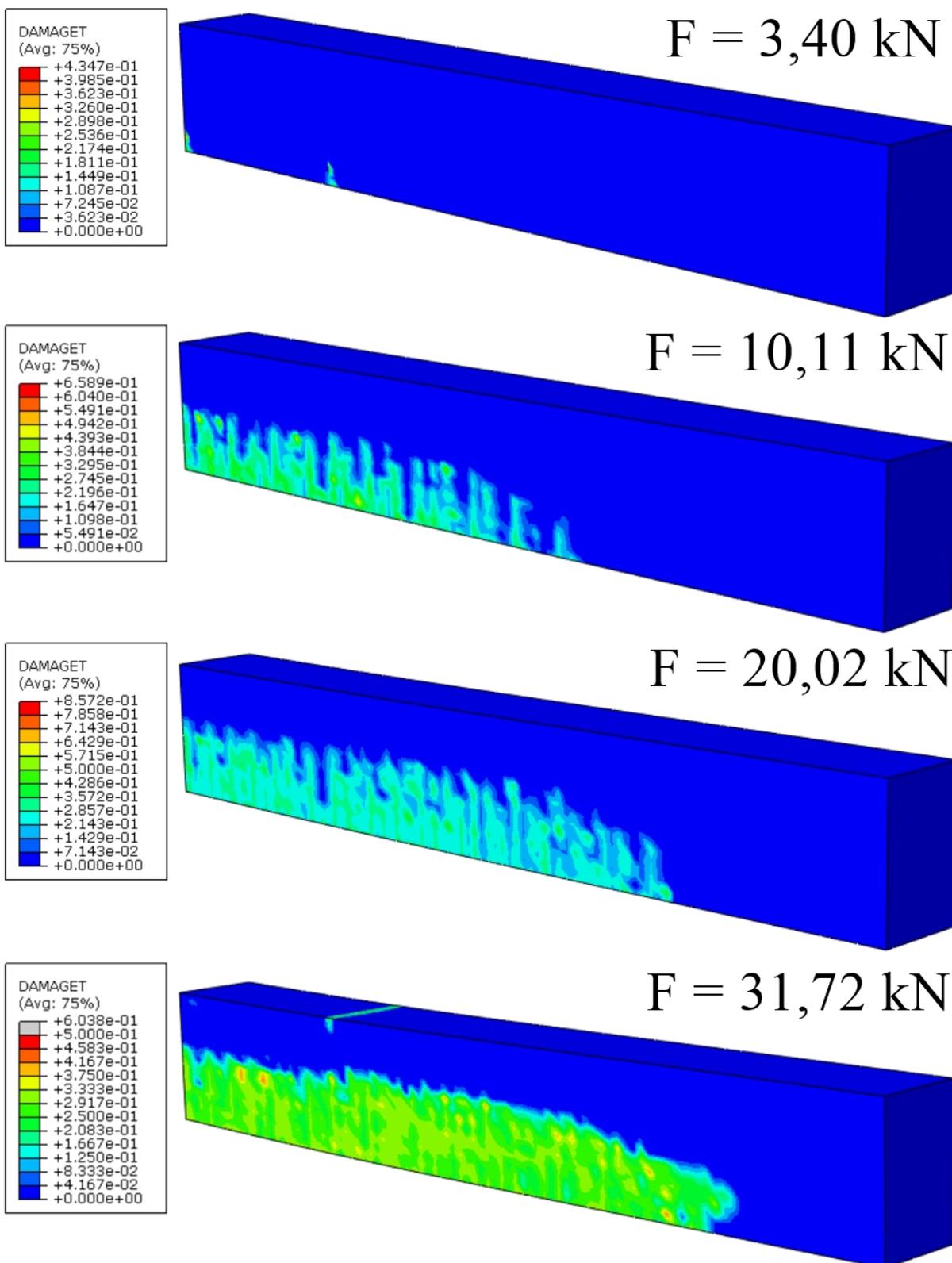


Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 110 – Desenvolvimento das tensões σ_x na armadura para $f=1,0\%$, em MPa.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 111 – Desenvolvimento do dano à tração para $f=1,0\%$.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Ao analisar as tensões na matriz, percebe-se que na condição de carregamento inicial, as fibras

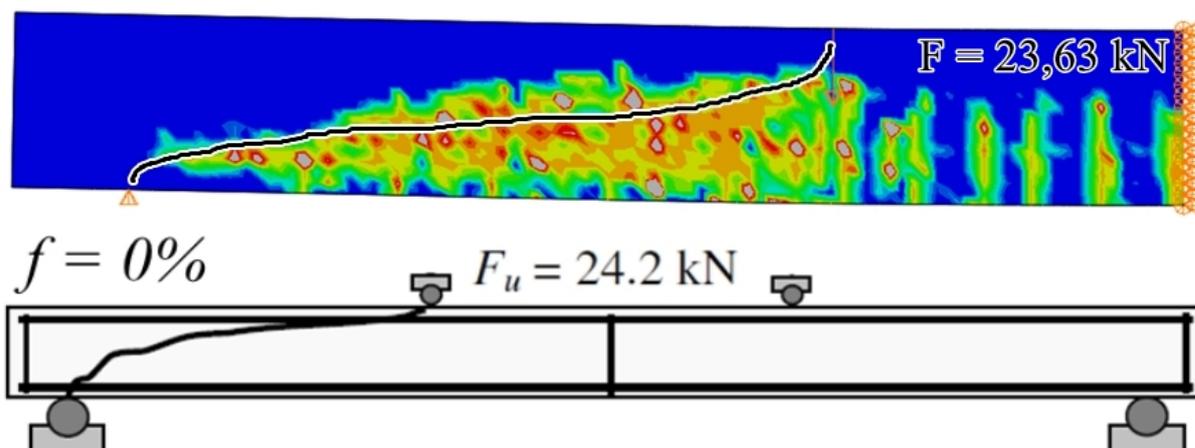
inferiores da matriz cimentícia são tracionadas enquanto as superiores são comprimidas. À medida que este carregamento aumenta, as tensões de tração na viga evoluem, evidenciando a subida da linha neutra, deixando as fibras superiores cada vez mais comprimidas à medida que as fibras mais centrais são tracionadas. Este comportamento é observado em todas as frações volumétricas de fibras e no concreto sem reforço de fibras.

Avaliando-se as barras de aço incorporadas à matriz, é possível notar que a tensão longitudinal nas barras aumenta à medida que o carregamento progride, evidenciando a transferência de tensões da matriz para a armadura. Para $f = 1,0\%$ e $f = 0,50\%$, as barras superiores atingem a tensão de escoamento à compressão e as inferiores à tração, comportamento esperado da armadura neste teste de flexão. Enquanto que para $f = 0\%$ a armadura à compressão atinge sua tensão de escoamento, diferentemente da armadura inferior.

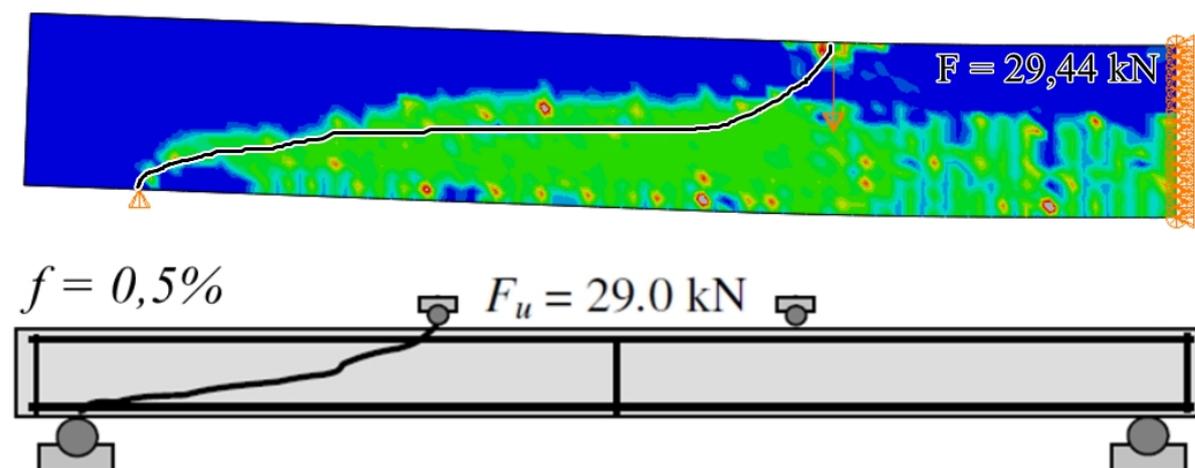
A evolução das tensões nas barras de aço em conjunto com a distribuição de dano na matriz, que mostram o desenvolvimento de fissuras verticais na parte central entre os pontos de aplicação de carga, comprovam a falha dos modelos de viga devido à esforços de flexão.

Kovács e Balázs (2003) ressaltam que as vigas testadas têm como principal agente de ruína os esforços cisalhantes resultantes das cargas aplicadas. Assim, a análise da propagação de dano nas vigas seria a característica avaliada para a determinação deste modo de falha. Os autores também apresentam os esquemas das principais fissuras geradas pelo teste que levaram à ruína das vigas.

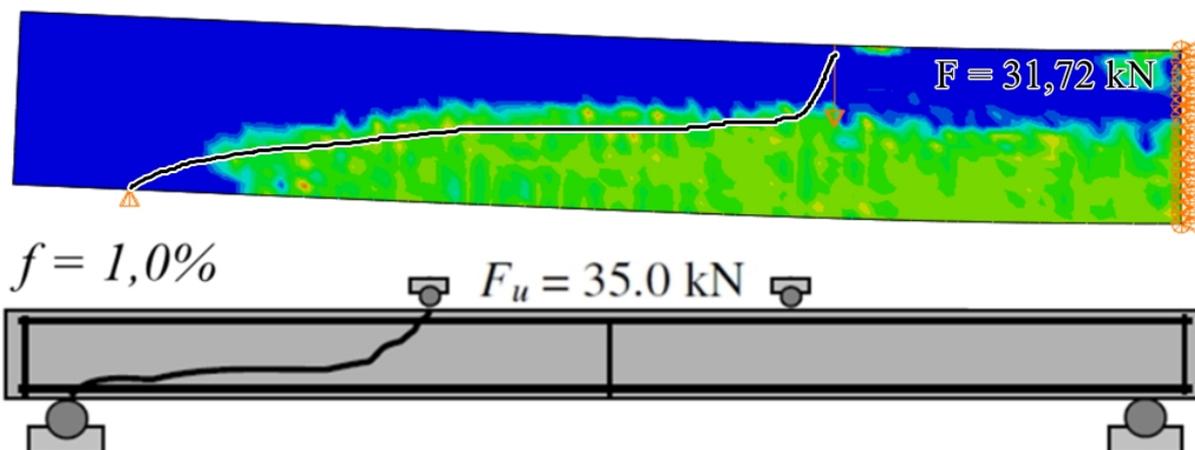
De forma geral, sabe-se que vigas prismáticas de seção retangular sofrem falha por cisalhamento ao apresentar fissuras inclinadas na região entre a aplicação das cargas e os apoios. Assim, para os valores de $d_t > 0$ o concreto começa a fissurar, essas fissuras, como apresentado nas figuras 105, 108 e 111, apresentam maiores módulos de dano na região entre o carregamento aplicado e os apoios. Estas características evidenciam que a viga falha também devido à esforços cisalhantes, desta forma, toma-se como causa da ruína nos modelos de viga o flexo-cisalhamento como apontado pelos autores do experimento e apresentado nas figuras de 112 a 114.

Figura 112 – Modo de ruína para $f=0\%$.

Fonte – Adaptado de Kovács e Balázs (2003).

Figura 113 – Modo de ruína para $f=0,5\%$.

Fonte – Adaptado de Kovács e Balázs (2003).

Figura 114 – Modo de ruína para $f=1,0\%$.

Fonte – Adaptado de Kovács e Balázs (2003).

Assim, com a detalhada avaliação apresentada, observa-se uma boa coerência entre os resultados experimentais apresentados por Kovács e Balázs (2003) e os modelos numéricos simulados neste documento.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, avaliou-se o comportamento de elementos estruturais de CRFA através do Método dos Elementos Finitos. Foi utilizada como ferramenta de simulação o Abaqus SE, uma ferramenta computacional capaz de realizar detalhadas análises estáticas em estruturas e concreto armado levando em consideração a não-linearidade física inerente ao material.

O modelo de dano plástico disponível neste *software*, o *Concrete Damaged Plasticity*, foi aplicado para esta análise. Para isso, foi necessário definir os parâmetros de entrada do modelo e determinar os modelos constitutivos específicos que seriam capazes de reproduzir o efeito das fibras metálicas na matriz cimentícia e desta forma realizar as simulações para fins de validação.

Neste capítulo então são apresentadas as conclusões obtidas a partir das definições analíticas e simulações numéricas efetuadas, cujo resultados foram apresentados no capítulo anterior, além das sugestões para trabalhos futuros baseados no que foi abordado neste documento.

6.1 CONCLUSÕES

Para as resistências, experimentalmente, a adição de fibras à matriz provoca um aumento das resistências à compressão uniaxial e biaxial do compósito, características que também são comprovadas pelos resultados analíticos. Para a superfície de ruptura biaxial, o modelo de Drucker-Prager modificado mostrou boa concordância com os resultados experimentais, apresentado maiores diferenças para frações volumétricas de fibras maiores que $f = 2\%$, como é possível constatar a partir da comparação entre os resultados analíticos e experimentais apresentados no item 5.1, como o caso de Bao et al. (2018).

Tendo em vista que as relações propostas por Dutra (2012) apresentaram resultados bem congruentes com os esperados, partiu-se para a seguinte etapa da análise que seria a definição do modelo para análise em elementos finitos. O modelo utilizado para avaliar o desempenho mecânico dos elementos estruturais moldados com concreto reforçado com fibras de aço foi o *Damaged Concrete Plasticity*. O CDP necessita de cinco parâmetros para a determinação do comportamento do material estudado num estado multiaxial de tensões. Neste trabalho, quatro destes cinco parâmetros tiveram seus resultados previamente fixados para uma melhor correlação com o modelo proposto por Dutra (2012), já que o modelo para curva de ruptura biaxial adotado pelo CDP é o proposto por Lee e Fenves (1998).

Desta forma, os parâmetros razão entre as resistências biaxial e uniaxial à compressão, razão entre os meridianos de tração e compressão, excentricidade e viscosidade (f_{cbm}/f_{cm} , K , e e μ , respectivamente) tiveram seus valores determinados restando a definição apenas do ângulo de

dilatância (ψ) para o CRFA, o quinto parâmetro de entrada para o CDP.

Para isto, foram abordadas três saídas para a determinação do ψ de acordo com o que foi encontrado na literatura chegando à conclusão que, entre as três opções, por estar menos suscetível a erros inerentes à formulações e aproximações, seria melhor adotar os valores indicados por Proença (1988), que foram obtidos experimentalmente. Além disso, percebe-se que o valor definido pelo autor para ψ encontra-se dentro do intervalo determinado por Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012) para avaliações com o concreto ($32^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$) utilizando o CDP.

Para as respostas a tensões uniaxiais do CRFA foram adotados os modelos propostos pela Código Modelo para Estruturas de Concreto - *fib* 2010 (2013) para a tração e compressão uniaxiais. Como apresentado no item 5.2, as respostas numéricas dos modelos constitutivos não são afetadas pelas definições de ψ para tensões uniaxiais. O modelo de corpo de prova utilizado para avaliar essas regras de evolução de tensões foi capaz de reproduzir de forma excelente os dados de entrada analíticos tanto para a compressão uniaxial quanto para tração uniaxial. Com isto, passou-se para a seguinte etapa de avaliação do modelo adotado, as respostas à tensões biaxiais.

Para as respostas no plano, foi adotado um modelo de placa variando as condições de carregamento em doze diferentes situações. As respostas para os trechos de tração-tração, tração-compressão e compressão-compressão foram condizentes com a equação analítica do modelo, a curva de Lee e Fenves (1998), e também não exibiram dependência ao variar o ângulo de dilatância. Além disso, mostrou-se que a curva de Lee e Fenves (1998) é bem semelhante a curva de ruptura biaxial proposta por Dutra (2012), diferindo apenas nos trechos tração-compressão, onde os resultados numéricos obtidos com o CDP mostram-se a favor da segurança por se encontrarem dentro da curva proposta por Dutra (2012).

Por fim, foram simulados dois modelos de vigas ensaiadas por Lim e Oh (1999) e por Kovács e Balázs (2003) e seus resultados foram validados com o apoio dos resultados experimentais. Lim e Oh (1999) apresentaram vigas armadas com três diferentes frações volumétricas de fibras. Estas três misturas foram simuladas com três valores diferentes para o ângulo de dilatância cada, calculados da forma explanada no item 4.1.4. Para este experimento, a variação do ψ_m , diferentemente do que aconteceu para as tensões uni e biaxiais, mostrou-se preponderante no estado multiaxial de tensões para determinação da rigidez e resistência do elemento. De forma geral, os resultados numéricos mostraram-se levemente mais rígidos que os experimentais, o que pode ser explicado por três motivos.

A primeira causa seria o tipo de elemento finito aplicado na simulação. Apesar de ser o elemento hexaédrico mais refinado disponibilizado pelo *software*, de acordo com Hibbit, Karlsson e Sorensen (2012), o C3D20 tende a gerar uma maior rigidez no modelo para análises de flexão em estruturas mais delgadas. O segundo motivo pode estar relacionado às definições relativas ao módulo de elasticidade do material. Apesar de ter sido aplicada a relação proposta por Dutra

(2012) para encontrar esta grandeza, ainda há muita divergência entre autores para a determinação do módulo de elasticidade para CRFA, o que notoriamente afeta o resultado final da análise. Por fim, nas simulações realizadas não foram considerados os carregamentos devido ao peso próprio dos elementos estruturais. Este fator, por sua vez, também influencia na rigidez das vigas ao acrescentar uma pequena carga que, para a resistência à tração do material, pode gerar um impacto considerável na viga, diminuindo sua resistência à flexão e sua rigidez total.

Em seguida, foram apresentados por Kovács e Balázs (2003) resultados experimentais de vigas moldadas com CRFA em três diferentes volumes de fibras metálicas. Assim como anteriormente, foram analisadas três ajustes de ângulo de dilatação para cada volume de fibra simulado. De forma distinta ao que foi observado para as vigas de Lim e Oh (1999), o valor de ψ demonstrou não ter grande influência na rigidez e resistência do modelo. Além disso, os resultados numéricos apresentaram uma boa conformidade com os resultados experimentais, tanto para previsão de resistência do elemento quanto sua rigidez.

Assim, de forma geral, o modelo de previsão de Dutra (2012), em conjunto com as relações constitutivas adotadas e o modelo CDP, é capaz de gerar bons resultados para previsão de resistência de elementos estruturais em CRFA no âmbito numérico. As análises apresentadas mostram que estas ferramentas geram respostas numéricas levemente menos resistentes e menos dúcteis que as reais, resultando em um certo fator de segurança as investigações realizadas computacionalmente.

Apesar dos bons resultados apresentados pelo modelo, o CDP mostra-se uma ferramenta muito sensível a mudanças devido à grande quantidade de parâmetros a serem determinados para entrada. Ao optar por este modelo para reproduzir o CRFA, deve-se tomar bastante cuidado na determinação do comportamento constitutivo do material e dos parâmetros de entrada. É recomendado que, ao menos, tenham-se resultados de ensaios de curvas para tensões uniaxiais do CRFA para validação dos valores de entrada no modelo e a fim de inserir resultados mais próximos aos reais na determinação da estrutura a ser simulada. Pois, como discutido no trabalho, sensíveis mudanças nas condições de entrada do modelo podem gerar interferências nos resultados.

6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

A elaboração deste trabalho revelou também algumas lacunas na literatura inerentes ao CRFA. Quantitativamente, estudos experimentais acerca deste compósito têm crescido ao longo dos anos, porém, uma análise qualitativa desses trabalhos mostra a necessidade da realização de certos estudos experimentais para melhor caracterização estrutural deste material. Um obstáculo encontrado neste trabalho foi a escassez ou ausência de análises experimentais do CRFA sob solicitações biaxiais, principalmente para tração-compressão e tração-tração, e resultados

experimentais de tensão-deformação para tensões uniaxiais à tração, sendo essa a primeira sugestão apresentada: uma análise experimental mais aprofundada e abrangente para o CRFA sob solicitações uniaxiais e biaxiais.

No âmbito da micromecânica, tem-se como sugestão a continuação da análise proposta por Dutra (2012) em seu trabalho. A autora desenvolveu sua formulação baseada na teoria da homogeneização e assumindo que as fibras metálicas do compósito estivessem orientadas perpendicularmente entre si e situadas nos eixos principais do elemento de matriz cimentícia. Como proposta de desenvolvimento desta formulação, têm-se o desenvolvimento do modelo para o caso real, no qual as fibras encontram-se aleatoriamente dispostas na matriz cimentícia, e, com isto, desenvolver a mesma análise deste documento para fins de comparação e validação do modelo desenvolvido.

Sabendo também que a aplicação de fibras na matriz cimentícia não se restringe a fibras metálicas, é apresentado como ideia uma análise do modelo de Dutra (2012) para fibras de outras naturezas, realizando as considerações e adaptações necessárias no modelo e então proceder para uma análise numérica de elementos estruturais através do Método dos Elementos Finitos e validação através de resultados experimentais.

Neste trabalho, é possível também verificar que o Abaqus SE se destaca como uma ferramenta extremamente potente e útil para a simulação e previsão de comportamento em elementos estruturais de forma geral com seus próprios modelos. Trazendo uma nova perspectiva para o estudo de compósitos com características especiais, como é o caso do CRFA. Assim, outra proposição para estudos futuros seria uma análise mais sensível e controlada dos parâmetros envolvidos no modelo *Concrete Damaged Plasticity* para a avaliação do CRFA, com uma validação desta análise tendo como base o comportamento mecânico de estruturas reais.

Vale ressaltar que poucos modelos constitutivos têm sido propostos para simular a resposta mecânica do CRFA sob o estado multiaxial de tensões e deformações. Desta forma, por fim, têm-se como sugestão o desenvolvimento de novos modelos para abordagem constitutiva do concreto reforçado com fibras e aço. Uma análise composta por investigações experimentais e reproduções numéricas para fins de validação e avaliação dos modelos propostos, abordando também as características relativas aos tipos de fibras aplicadas ao concreto estudado.

REFERÊNCIAS

- ABDALLAH, S.; FAN, M. Anchorage mechanisms of novel geometrical hooked-end steel fibres. *Materials and Structures*, Springer, v. 50, n. 2, p. 1–11, 2017. Citado na página 84.
- ALVES FILHO, A. *Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE: análise não linear*. [S.l.]: São Paulo: Érica, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *ACI 544.4R-88:Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete*. Michigan, (1999), (2009 Reapproved). Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- ATTARD, M.; SETUNGE, S. Stress-strain relationship of confined and unconfined concrete. *Materials Journal*, v. 93, n. 5, p. 432–442, 1996. Citado na página 36.
- BAO, J. et al. Combined effects of steel fiber and strain rate on the biaxial compressive behavior of concrete. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 187, p. 394–405, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 13, 106, 107, 108 e 163.
- BARROS, J. A. Avaliação da capacidade de absorção de energia de betões reforçados com fibras de aço. *Portugal*, 1999. Citado na página 33.
- BARROS, J. A. O. Estado-da-arte dos betões reforçados com fibras. Universidade do Minho. Departamento de Engenharia Civil (DEC), 1996. Citado na página 34.
- BATHE, J. *Finite Element Procedures*. 2. ed. Massachusetts: [s.n.], 2016. Citado na página 86.
- BELYAKOV, N. et al. Numerical simulation of the mechanical behavior of fiber-reinforced cement composites subjected dynamic loading. *Applied Sciences*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 3, p. 1112, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- BENTUR, A.; MINDESS, S. *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. 2. ed. London: Taylor and Francis, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 22, 29, 30, 31, 32 e 54.
- BRANDT, A. M. *Cement-based Composites: Materials, Mechanical Properties and Performance*. 2. ed. London: Chapman Hall, 2009. Citado na página 30.
- CARMO, L. d. *Ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alta resistência reforçadas com fibras metálicas: Análise via Método dos Elementos Finitos*. 2005. 188 f. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)—Escola de Engenharia Civil . . . , 2005. Citado na página 69.
- CARRILLO, J.; RAMIREZ, J.; LIZARAZO-MARRIAGA, J. Modulus of elasticity and poisson's ratio of fiber-reinforced concrete in colombia from ultrasonic pulse velocities. *Journal of Building Engineering*, Elsevier, v. 23, p. 18–26, 2019. Citado na página 37.
- CASPER, v. d. K. *The Structural Potential of Steel Fibres in 3D-Printed Concrete: Exploring Nonlinear Numerical Strategies for the Analysis of Hardened Fibre Reinforced 3D-printed Concrete Structures*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Eindhoven University of Technology, 2017. Citado na página 57.

CHEN, W.-F. *Plasticity in reinforced concrete*. [S.l.]: J. Ross Publishing, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 71.

CHEN, W.-F.; SALEEB, A. F. *Constitutive equations for engineering materials: Elasticity and modeling*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 72.

CHI, Y. et al. Finite element modeling of steel-polypropylene hybrid fiber reinforced concrete using modified concrete damaged plasticity. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 148, p. 23–35, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 64, 65, 71 e 72.

CHIEW, S. et al. Behaviour of plain concrete and steel fibre reinforced concrete (sfrc) under biaxial stresses—a review. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. [S.l.: s.n.], 2018. v. 431, p. 042006. Citado na página 36.

CHRISTOFORO, A. L.; CARVALHO, R. C. et al. Calibration of concrete damaged plasticity model parameters for shear walls. *Matéria (Rio de Janeiro)*, SciELO Brasil, v. 26, 2021. Citado na página 71.

DE BUHAN, P. Homogenisation en calcul a la rupture: Le cas du materiau composite multicouche. 1983. Citado na página 44.

DE BUHAN, P.; TALIERCIO, A. A homogenization approach to the yield strength of composite materials. Gauthier-Villars: 15 rue Gossin, 92543 Montrouge Cedex France: 011 33 1 40 . . . , 1991. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

DOBBIN JÚNIOR, E. S.; ROCHA, L. F. S. *Estudo de concreto com adição de fibra de polipropileno para controle da fissuração*. 2011. Monografia, Universidade da Amazônia, Belém. Citado na página 22.

DUTRA, V. F. P. *Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras via teoria da homogeneização*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Citado 42 vezes nas páginas 7, 8, 23, 24, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 68, 69, 93, 94, 98, 100, 105, 108, 113, 114, 115, 121, 123, 127, 139, 143, 145, 149, 163, 164, 165 e 166.

EARIJ, A. et al. Nonlinear three-dimensional finite-element modelling of reinforced-concrete beams: Computational challenges and experimental validation. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier, v. 82, p. 92–115, 2017. Citado na página 71.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. *Test method for metallic fibered concrete - Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual)*. Brussels, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 34, 35, 78, 83 e 84.

FANELLA, D. A.; NAAMAN, A. E. Stress-strain properties of fiber reinforced mortar in compression. In: *Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1985. v. 82, n. 4, p. 475–483. Citado na página 33.

FARIA, T. M. Estudo numérico em concreto reforçado com fibras de aço utilizando o método dos elementos finitos e modelos constitutivos. 2017. Citado na página 70.

FIGUEIREDO, A. D. *Concreto com fibras de aço*. [S.l.], 2000. Citado na página 28.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto reforçado com fibras. *Concreto: Ciência e Tecnologia. IBRACON. Volume 2.*, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 22, 26, 27, 29, 33 e 74.

FURNAS, E. de. Laboratório de concreto. *Concretos massa, estrutural, projetado e compactado com rolo: ensaios e propriedades*. Pacelli de Andrade, W. ed. São Paulo, Pini, 1997. Citado na página 37.

GARCEZ, O.; CAETANO, C. Análise experimental do comportamento de concretos reforçados com fibras de aço submetidos a cargas de impacto. *Congresso Brasileiro de Concreto - 48.*, Rio de Janeiro, 2006. Citado na página 28.

HANAI, J. B. Comportamento resistente, ductilidade e confinamento. *Concreto: Ensino, pesquisa e realizações - IBRACON*, v. 1, n. 3, p. 165–200, 2005. Citado na página 21.

HIBBIT, H.; KARLSSON, B.; SORENSEN, E. Abaqus user manual - student version. *Simulia, Providence, RI*, 2012. Citado 14 vezes nas páginas 57, 59, 66, 68, 69, 71, 72, 89, 90, 91, 92, 128, 150 e 164.

HINTON, E. *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*. [S.l.]: Pineridge Press, 1988. Citado na página 77.

HU, X. D.; DAY, R.; DUX, P. Biaxial failure model for fiber reinforced concrete. *Journal of materials in civil engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 15, n. 6, p. 609–615, 2003. Citado na página 36.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIB). *fib - Model Code for Concrete Structures*. London, 2013. Citado 18 vezes nas páginas 22, 26, 34, 35, 74, 75, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 93, 94, 98, 113 e 164.

JAMAL, F. G. *Análise numérica tridimensional de túneis considerando não-linearidade do suporte de concreto projetado reforçado com aço*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos., 2013. Citado na página 61.

JU, J. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and structures*, Elsevier, v. 25, n. 7, p. 803–833, 1989. Citado na página 67.

KMIECIK, P.; KAMIŃSKI, M. Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration. *Archives of civil and mechanical engineering*, Elsevier, v. 11, n. 3, p. 623–636, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 64, 71 e 72.

KÖKSAL, F. et al. Combined effect of silica fume and steel fiber on the mechanical properties of high strength concretes. *Construction and building materials*, Elsevier, v. 22, n. 8, p. 1874–1880, 2008. Citado na página 37.

KOLLE, B. *Behaviour of steel fibre reinforced high performance concrete under biaxial loading conditions*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 13, 48 e 102.

KOVÁCS, I.; BALÁZS, G. Structural behaviour of steel fibre reinforced concrete. *Structural Concrete*, Thomas Telford Ltd, v. 4, n. 2, p. 57–63, 2003. Citado 8 vezes nas páginas 140, 141, 145, 160, 161, 162, 164 e 165.

LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 8, p. 892–900, 1998. Citado 19 vezes nas páginas 10, 58, 65, 66, 72, 93, 94, 98, 100, 105, 108, 113, 114, 115, 121, 123, 143, 163 e 164.

LI, B.-b. et al. Damage plasticity model for passively confined concrete. In: EDP SCIENCES. *MATEC Web of Conferences*. [S.l.], 2019. v. 275, p. 02016. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.

LIM, D.; OH, B. Experimental and theoretical investigation on the shear of steel fibre reinforced concrete beams. *Engineering structures*, Elsevier, v. 21, n. 10, p. 937–944, 1999. Citado 8 vezes nas páginas 115, 116, 138, 139, 140, 149, 164 e 165.

LIM, D.-H.; NAWY, E. Behaviour of plain and steel-fibre-reinforced high-strength concrete under uniaxial and biaxial compression. *Magazine of Concrete Research*, Thomas Telford Ltd, v. 57, n. 10, p. 603–610, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 13, 36, 97 e 98.

LUBLINER, J. et al. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of solids and structures*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 299–326, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 58, 63, 65, 72 e 76.

MAALEJ, M.; LI, V. C. Flexural strength of fiber cementitious composites. *Journal of materials in civil engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 6, n. 3, p. 390–406, 1994. Citado na página 33.

MALM, R. *Shear cracks in concrete structures subjected to in-plane stresses*. Tese (Doutorado) — KTH, 2006. Citado na página 67.

MARANGON, E. *Desenvolvimento e caracterização de concretos auto-adensáveis reforçados com fibras de aço, Rio de Janeiro*. Tese (Doutorado) — Dissertação (mestrado)–Programa de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006. Citado na página 28.

MEHTA, P.; MONTEIRO, P. *Concreto: Microestrutura, Propriedade e Materiais*. 3. ed. São Paulo: Ibracon, 2014. v. 3. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 27 e 28.

MICHAŁ, S.; ANDRZEJ, W. Calibration of the cdp model parameters in abaqus. In: *The 2015 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM15)*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.

MICHELS, J.; CHRISTEN, R.; WALDMANN, D. Experimental and numerical investigation on postcracking behavior of steel fiber reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 98, p. 326–349, 2013. Citado na página 33.

MOHAMED, R. et al. Steel fibre self-compacting concrete under biaxial loading. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 224, p. 255–265, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 13, 112 e 113.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, Elsevier, v. 21, n. 5, p. 571–574, 1973. Citado na página 41.

MURUGAPPAN, K.; PARAMASIVAM, P.; TAN, K. Failure envelope for steel-fiber concrete under biaxial compression. *Journal of materials in civil engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 5, n. 4, p. 436–446, 1993. Citado na página 35.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado na página 39.

OLIVEIRA, L. A. *Ligação viga-pilar em elementos pré-moldados de concreto solidarizados por concreto reforçado com fibras de aço: análise estática e dinâmica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos., 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

OTHMAN, H. Performance of ultra-high performance fibre reinforced concrete plates under impact loads. *Ryerson University*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.

PADMARAJIAH, S.; RAMASWAMY, A. A finite element assessment of flexural strength of prestressed concrete beams with fiber reinforcement. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 24, n. 2, p. 229–241, 2002. Citado na página 35.

PERES, M. V. N. d. N. *Aparatos de baixo custo para ensaios biaxiais em concretos reforçados com fibras de aço*. Tese (Doutorado) — Universidade de Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-graduação em Estruturas., 2008. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 105.

PRISCO, M. D.; PLIZZARI, G.; VANDEWALLE, L. Fibre reinforced concrete: new design perspectives. *Materials and structures*, Springer, v. 42, n. 9, p. 1261–1281, 2009. Citado na página 33.

PROENÇA, S. P. B. *Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1988. Citado 6 vezes nas páginas 69, 71, 127, 128, 149 e 164.

REWERS, I. Numerical analysis of rc beam with high strength steel reinforcement using cdp model. In: IOP PUBLISHING. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. [S.l.], 2019. v. 471, n. 2, p. 022025. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.

SANT'ANA, M. V. P. *Modelo Numérico para o Concreto Reforçado com Fibras*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2005. Citado na página 21.

SARTURI, F. D. M. Simulação computacional de estruturas de concreto reforçadas com aço e compósitos de fibra de carbono. 2014. Citado na página 62.

SHANG, H.-s.; YANG, S.-t.; NIU, X.-y. Mechanical behavior of different types of concrete under multi-axial tension–compression. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 73, p. 764–770, 2014. Citado na página 36.

SIRIJAROONCHAI, K.; EL-TAWIL, S.; PARRA-MONTESINOS, G. Behavior of high performance fiber reinforced cement composites under multi-axial compressive loading. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 62–72, 2010. Citado na página 36.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. d. S. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas Vol. 48*. [S.l.]: EdUSP, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 89.

Souza Neto, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 71.

SUKSAWANG, N.; WTAIFE, S.; ALSABBAGH, A. Evaluation of elastic modulus of fiber-reinforced concrete. 2018. Citado na página 37.

- SUQUET, P. et al. Analyse limite et homogénéisation. 1983. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- SWADDIWUDHIPONG, S.; SEOW, P. E. C. Modelling of steel fiber-reinforced concrete under multi-axial loads. *Cement and concrete research*, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 1354–1361, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 13, 99 e 100.
- THOMAS, J.; RAMASWAMY, A. Mechanical properties of steel fiber-reinforced concrete. *Journal of materials in civil engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 19, n. 5, p. 385–392, 2007. Citado na página 37.
- TRAINA, L. A.; MANSOUR, S. A. Biaxial strength and deformational behavior of plain and steel fiber concrete. *ACI Materials Journal*, v. 88, n. 4, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 13, 95 e 96.
- VELASCO, R. *Concretos auto-adensáveis reforçados com elevadas frações volumétricas de fibras de aço: propriedades reológicas, físicas, mecânicas e térmicas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- VENKATESHWARAN, A.; TAN, K. H.; LI, Y. Residual flexural strengths of steel fiber reinforced concrete with multiple hooked-end fibers. *Structural Concrete*, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 352–365, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 83, 84, 118 e 142.
- WANG, J. et al. Experimental and numerical investigation of mortar and itz parameters in meso-scale models of concrete. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 109, p. 102722, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- YIN, W. et al. Fiber-reinforced concrete under biaxial compression. 1990. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 94.
- ZANGELMI, E. *Caracterización del Comportamiento de Hormigones de Altas Prestaciones con y sin fibras Metálicas a Compresión Uniaxial*. Tese (Doutorado) — Universidad Politécnica de Catalunya, Escola Técnica Superior D’Enginyers de Camins, Canals i Ports. Barcelona, Espanha., 1999. Citado na página 33.
- ZAOUI, A. Continuum micromechanics: survey. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 128, n. 8, p. 808–816, 2002. Citado na página 40.

Apêndices

**APÊNDICE A – FUNÇÃO PARA O CÁLCULO DAS RESISTÊNCIAS
UNIAXIAL E BIAXIAL À COMPRESSÃO PARA O CONCRETO
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO DE ACORDO COM O
MODELO DE DUTRA (2012)**

```
function [fcmCRFA, fcbmCRFA, fcm, fcbm]= funcunibi(fcm, rbu, sigf, f)
% CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DO CRFA: FIBRAS E MATRIZ
%fcm= resistência à compressão uniaxial da matriz
%rbu= relação entre resistências biaxial e uniaxial a compressão
%fcbm= resistência à compressão biaxial da matriz
%sigf= resistência à tração da fibra
%f= porcentagem de fibras

% PARÂMETROS DE DRUCKER PRAGER
fcbm=rbu*fcm;
alfam=(fcbm-fcm)/(2*fcbm-fcm);
sigm=fcm*(1-alfam)/(1+alfam);
am=alfam;
sm=sigm;

% INTERVALOS DAS TENSÕES ATUANTES
sigx = linspace(-(f/300)*sigf, (f/300)*sigf, 10);
sigy = linspace(-(f/300)*sigf, (f/300)*sigf, 10);
sigz = linspace(-(f/300)*sigf, (f/300)*sigf, 10);

% NOVOS VALORES DE FC E FCB PARA O CRFA
fcmCRFA = (((2+alfam)*(f/300)*sigf+(1+alfam)*sigm)/(alfam-1));
fcbmCRFA = (((2-alfam)*(f/300)*sigf+(1+alfam)*sigm)/(2*alfam-1));

% NOVOS VALORES DE ALFA M E SIGMA M PARA O CRFA
alfam=(fcbmCRFA-fcmCRFA)/(2*fcbmCRFA-fcmCRFA);
sigm=-fcmCRFA*(1-alfam)/(1+alfam);
```

```

% CÁLCULO DA INTEGRAL E RESULTADO DA INTEGRAL
for i=1:1:numel(sigx)
    for j=1:1:numel(sigy)
        for k=1:1:numel(sigz)
            A = -1-2*alfam^2;
            B = 2*alfam*(alfam+1)*sigm;
            C = 2*(1-alfam^2);
            D = 4*(1-alfam^2);
            E = (sigm + sigx(i)+sigy(j)+sigz(k))*alfam + sigm;
            F = sigx(i)^2+sigy(j)^2+sigz(k)^2;
            G = -sigx(i)*sigy(j)-sigy(j)*sigz(k)-sigz(k)*sigx(i);
            Fc1=@(f,t) (sigx(i).*(3.*(cos (f) .* sin (t)).^2+A) +
sigy(j).*(3.*(sin (f) .* sin (t)).^2+A) + sigz(k).*(3.*(cos
(t)).^2+A) - B)./C;

            Fc2=@(f,t) (-sqrt((-sigx(i).*(3.*(cos (f) .* sin
(t)).^2+A) - sigy(j).*(3.*(sin (f) .* sin (t)).^2+A) -
sigz(k).*(3.*(cos (t)).^2+A) + B).^2 - D.*(-E.^2 +F+G)))./C;
            qu(i,j,k) =
(integral2(Fc1,0,pi,0,2*pi)+integral2(Fc2,0,pi,0,2*pi))/(2*pi^2);
        end
    end
end

```

```

for i=1:1:numel(sigx)
    for j=1:1:numel(sigy)
        for k=1:1:numel(sigz)
            A = 2*(1+2*alfam^2);
            B = 4*alfam*(alfam+1)*sigm;
            C = 2*(1-4*alfam^2);
            D = 4*(1-4*alfam^2);
            E = (sigm + sigx(i)+sigy(j)+sigz(k))*alfam + sigm;
            F = sigx(i)^2+sigy(j)^2+sigz(k)^2;
            G = -sigx(i)*sigy(j)-sigy(j)*sigz(k)-sigz(k)*sigx(i);
            Fc1=@(f,t,p) (-sigx(i).*(A -
3.*((cos(t).*cos(f).*cos(p)-sin(f).*sin(p)).^2+(-
cos(t).*cos(f).*sin(p)-sin(f).*cos(p)).^2))-sigy(j).*(A - 3.*((-
cos(t).*cos(f).*sin(p)-sin(f).*cos(p)).^2+(-
cos(t).*sin(f).*sin(p)+cos(f).*cos(p)).^2))-sigz(k).*(A -
3.*((sin(t).*cos(f)).^2+(sin(t).*sin(f)).^2))-B)./C;
            Fc2=@(f,t,p) -(sqrt((sigx(i).*(A -
3.*((cos(t).*cos(f).*cos(p)-sin(f).*sin(p)).^2+(-
cos(t).*cos(f).*sin(p)-sin(f).*cos(p)).^2)) + sigy(j).*(A - 3.*((-
cos(t).*cos(f).*sin(p)-sin(f).*cos(p)).^2+(-
cos(t).*sin(f).*sin(p)+cos(f).*cos(p)).^2))+sigz(k).*(A -
3.*((sin(t).*cos(f)).^2+(sin(t).*sin(f)).^2))+B).^2 - D.*(-
E.^2+F+G)))./C;
            qb(i,j,k) =
(integral3(Fc1,0,2*pi,0,pi,0,2*pi)+integral3(Fc2,0,2*pi,0,pi,0,2*pi
))/(4*pi^3);
        end
    end
end

```

```
disp('A resistência à compressão uniaxial do CRFA será: ')
disp(min(min(min(abs(qu))))))
disp('A resistência à compressão biaxial do CRFA será: ')
disp(min(min(min(abs(qb))))))

% NOVOS VALORES DE ALFA M E SIGMA M PARA O CRFA
fcmCRFA = min(min(min(abs(qu)))));
fcbmCRFA = min(min(min(abs(qb)))));
alfam=(fcbmCRFA-fcmCRFA)/(2*fcbmCRFA-fcmCRFA);
sigm=-fcm*(1-alfam)/(1+alfam);
```

**APÊNDICE B – FUNÇÃO PARA O CÁLCULO DAS CURVAS DE
RUPTURA BIAXIAL DE ACORDO COM O MODELO DE DUTRA
(2012)**

```
function t=funcsuprand(fcm, fcbm, fcmCRFA, fcbmCRFA, sigf, f,
ftCRFA)
% CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DO CRFA: FIBRAS E MATRIZ
% fcm= resistência à compressão uniaxial da matriz
% fcbm= resistência à compressão biaxial da matriz
% sigf= resistência à tração da fibra
% f= porcentagem de fibras
1% ftCRFA= resistência à tração do CRFA
% fcmCRFA = resistência à compressão uniaxial do CRFA
% fcbmCRFA = resistência à compressão biaxial do CRFA

alfam=(fcbm-fcm)/(2*fcbm-fcm);
sigm=fcm*(1-alfam)/(1+alfam);
am=alfam;
sm=sigm;

% CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE ÂNGULO DE ATRITO E COESÃO
sigx = -f/300*sigf;
sigz = f/300*sigf;
f7 = 3*alfam*sqrt(1-alfam^2);
f8 = sqrt(3)*(1-alfam^2);
f9 = 3*(1-alfam^2)*(1-4*alfam^2);
rf = (f7+f8)/f9;
f1 = sqrt(3)*(1-alfam^2)*(-sigx +sigz);
f2 = sqrt(1-alfam^2)*(3*alfam*(-sigx-sigz)-2*sigm*(1+alfam));
sigast = (-f1+f2)*rf;
firad = atan( -(sigast+ftCRFA)/(2*sqrt(-(sigast+ftCRFA))));
figraus = firad*180/pi;
c = -(sigast*ftCRFA)/(2*sqrt(-(sigast+ftCRFA)));
```

```

%      NOVOS VALORES DE ALFA M E SIGMA M PARA O CRFA

% CÁLCULO DOS INTERVALOS DE TENSÃO
alfam=(-fcbmCRFA+fcmCRFA)/(-2*fcbmCRFA+fcmCRFA);
sigm=-fcmCRFA*(1-alfam)/(1+alfam);
syms s
eqn = (((-ftCRFA/sigast)*s+(ftCRFA))^2 + s^2 - ((-
ftCRFA/sigast)*s+(ftCRFA))*s)^(1/2) + alfa * ((-
ftCRFA/sigast)*s+(ftCRFA)+s+sigm)+sigm == 0);
S = solve(eqn,s);
s = double(S);

% TRAÇÃO-COMPRESSÃO
a = min(s);
b = (-ftCRFA/sigast)*a+(ftCRFA);
sig11=linspace(a,0,10);
sig22=linspace(b,ftCRFA,10);
for i=1:1: numel(sig11)
    x (i) = sig11(i);
    y (i) = (-ftCRFA/sigast)*sig11(i)+(ftCRFA);
end
for i=1:1: numel(sig22)
    x (end+i) = sig22(i);
    y (end+i) = (sigast/-ftCRFA)*sig22(i)+(sigast);
end

```

```

% TRACÃO-TRACÃO
sig11=linspace(0,ftCRFA,5);
sig22=linspace(0,ftCRFA,5);
for i=1:1:numel(sig11)
    x (end+i) = sig11(i);
    y (end+i) = (ftCRFA);
end
for i=1:1:numel(sig22)
    x (end+i) = (ftCRFA);
    y (end+i) = sig22(i);
end

% COMPRESSÃO-COMPRESSÃO
sig11=linspace(sigast,0,5000);
sig22=linspace(sigast,0,5000);
for i=1:1:numel(sig11)
    for j=1:1:numel(sig22)
        F = (((sig11(i)^2+sig22(j)^2-sig11(i)*sig22(j))^(1/2))+
alfam * (sig11(i)+sig22(j)+sigm)+sigm);
        if abs(F)<= 0.0001
            x(end+i)= sig11(i);
            y(end+i)= sig22(j);
        end
    end
end
end

```

```

hold on
idx = find(x~=0);
idy = find(y~=0);
x=x(idx);
y=y(idy);
k = convhull(x,y);
plot(x(k),y (k))
grid on
grid minor
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';

```

**APÊNDICE C – FUNÇÃO PARA O CÁLCULO DAS CURVAS DE
RUPTURA BIAxIAL DE ACORDO COM O MODELO DE LEE E
FENVES (1998) – *CONCRETE DAMAGED PLASTICITY***

```

fcmCRFA = 34.0;
fcbmCRFA = 39.44;
ftCRFA = 2.4;
a = (fcbmCRFA-fcmCRFA) / (2*fcbmCRFA-fcmCRFA);
b = (1*fcmCRFA/ftCRFA) * (a -1) -(a+1);
s11 = linspace(-1.8*fcbmCRFA,0,5000); s22 =s11;
for i=1:1:numel(s11)
    for j=1:1:numel(s22)
        p = -(s11(i)+s22(j))/3;
        q = sqrt(3)*sqrt(((s11(i)-s22(j))^2+(s22(j))^2+(-s11(i))^2)/6);
        fc = (1/(1-a))*(q-3*a*p)-fcm;
        if abs(fc)<=0.001
            x(i)=s11(i);
            y(i)=s22(j);
        end
    end
end
s11 = linspace(-fcmCRFA,ftCRFA,1000);
s22 = linspace(-fcmCRFA,ftCRFA,1000);
s33 = linspace(0,0,1000);
for i=1:1:numel(s11)
    for j=1:1:numel(s22)
        p = -(s11(i)+s22(j)+s33(i))/3;
        q = sqrt(3)*sqrt(((s11(i)-s22(j))^2+(s22(j)-s33(i))^2+(s33(i)-
s11(i))^2)/6);
        F = (1/(a-1))*(q-3*a*p+b*ft)-fcm;
        if abs(F)<=0.1
            x(end+i)=s11(i);
            y(end+i)=s22(j);
        end
    end
end
end

```

```
hold on
idx = find(x~=0);
idy = find(y~=0);
x=x(idy);
y=y(idy);
k = convhull(x,y);
plot(x(k),y (k))
grid on
grid minor
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```