UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

Simetrias de Equações Diferenciais Fracionárias

Eduardo Tremea Casali

Porto Alegre, RS
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

Simetrias de Equações Diferenciais Fracionárias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Física, do Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como um dos pré-requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Eduardo Tremea Casali

Orientador: Pr. Dr. Sílvio Renato Dahmen

Porto Alegre
2009

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho está dividido em quatro partes: na primeira apresentamos de forma sucinta o cálculo fracionário, o qual trata de operadores lineares que generalizam as operações de derivação e integração. Na segunda parte abordamos brevemente as aplicações destes operadores em sistemas estocásticos. Após isto introduziremos o método do prolongamento devido a Sophus Lie para obter grupos de simetrias de equações diferenciais e, na parte final do trabalho, vamos discutir a implementação deste método para equações diferenciais fracionárias.

No primeiro capítulo "Operadores Fracionários" começamos com um exemplo para motivar o uso de operadores fracionários, seguido de uma breve introdução histórica, definições de integral e derivada fracionária assim como algumas de suas propriedades. No fim do capítulo retornaremos ao exemplo inicial para resolvê-lo utilizando o cálculo fracionário.

O capítulo seguinte traz dois exemplos de equações fracionárias: As equações de Fokker-Planck fracionárias no tempo e no espaço, que surgem em sistemas estocásticos nos quais as probabilidades de transição não tem uma forma gaussiana e decaem com uma lei de potência.

No capítulo "Simetrias de Equações Diferenciais" o conceito de grupo de simetria é definido rigorosamente e o método do prolongamento de Sophus Lie é desenvolvido desde o início, dentro da linguagem diferencial-geométrica de equações diferenciais.

No capítulo final discutiremos o único trabalho encontrado na literatura [1] que trata de grupos de simetrias de equações fracionárias.

Capítulo 2

Operadores Fracionários

2.1 Motivação

Suponha que temos uma represa, figura 2.1, e gostaríamos de controlar o fluxo de água que passa por uma abertura em sua superfície, ou seja, temos o fluxo água $Q(h)$ que é uma função conhecida da altura h da abertura. Queremos saber qual a forma da abertura $f(h)$ que nos fornece o fluxo desejado [2].

Colocaremos o plano yz transversal à velocidade do fluído e o eixo x apontando na mesma direção do fluxo tal que $x = 0$ denote a posição da abertura como na figura 2.2.

Então, se $y = f(z)$ nos dá a forma da abertura, o elemento de área é $\mathrm{d}A = f(z)\,\mathrm{d}z$, figura 2.3, e o fluxo por um elemento infinitesimal de área é $\mathrm{d}Q = Vf(z)\,\mathrm{d}z$, onde V é a velocidade do fluído no ponto.

Para calcular essa velocidade considere um elemento do fluido num ponto I com coordenadas (x_0, y_0, z_0), muito longe da abertura, e este mesmo elemento quando chega até à abertura no ponto II de coordenadas $(0, y_0, z_0)$. Pelo princípio de Bernoulli temos que

$$P_I + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho V_I^2 = P_{II} + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho V_{II}^2. \tag{2.1}$$

Como I está muito longe da abertura podemos tomar $V_I = 0$, neste caso

$$P_I - P_{II} = \frac{\rho}{2} V_{II}^2, \tag{2.2}$$

porém $P_I = P_{at} + \rho g(h - z_0)$ e $P_{II} = P_{at}$, onde h é a altura da superfície da água com relação ao fundo da abertura e P_{at} é a pressão atmosférica. Deste modo

$$V_{II} = \sqrt{2g}(h - z_0)^{1/2} \tag{2.3}$$

e o elemento de fluxo $\mathrm{d}Q$ é

$$\mathrm{d}Q = V\,\mathrm{d}A = 2Vf(z)\,\mathrm{d}z = 2\sqrt{2g}(h - z)^{1/2} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.4}$$

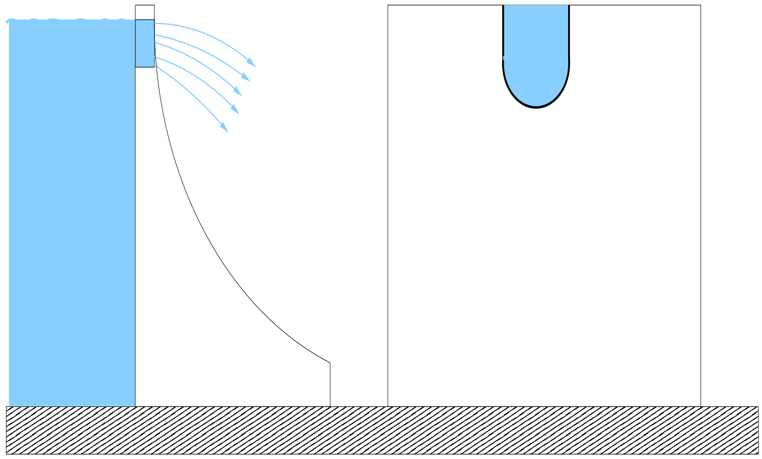

Figura 2.1: Represa vista por um corte transversal e pela frente [2].

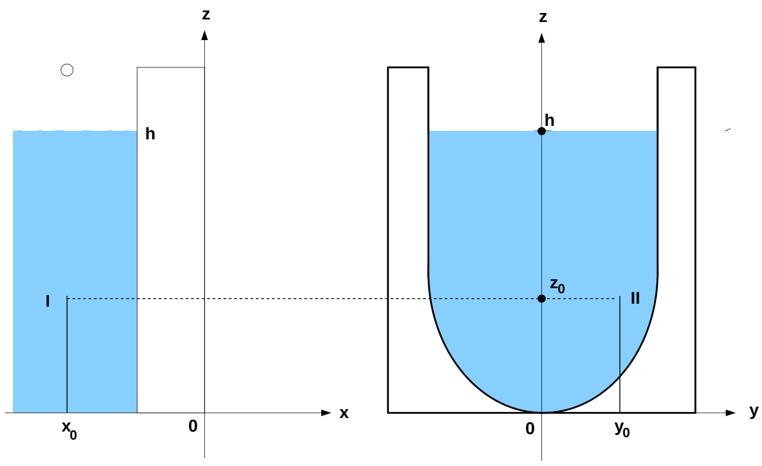

Figura 2.2: Ponto I com coordenadas (x_0, y_0, z_0) e ponto II com coordenadas $(0, y_0, z_0)$ [2].

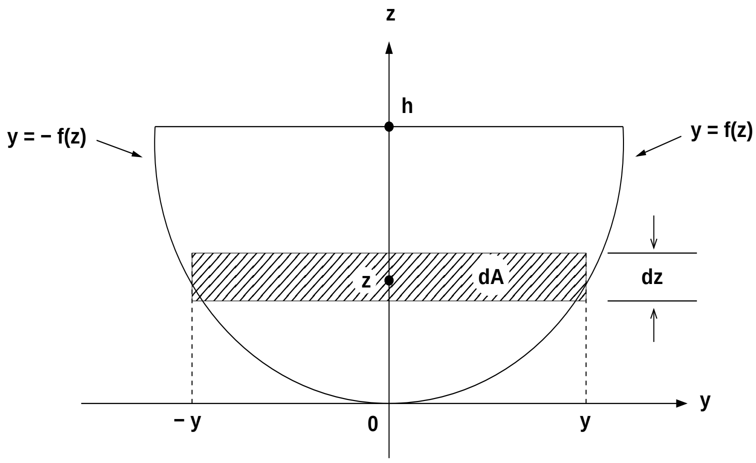

Figura 2.3: Elemento de área que deve ser entregado para obter o fluxo pela abertura [2].

Integrando do fundo da abertura até a altura da água e explorando a simetria de reflexão em torno do eixo z, obtemos

$$Q(h) = \int_0^h 2\sqrt{2g}(h-z)^{1/2} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{2.5}$$

ou seja, temos uma equação integral para f em termos do fluxo total Q conhecido. Esse operador integral tem uma conexão direta com cálculo fracionário de Riemann-Liouville que introduziremos abaixo. Retornaremos a esse problema para reinterpretá-lo e solucioná-lo à luz das ferramentas que introduziremos.

2.2 Resumo histórico

Quando nos deparamos em cálculo com expressões como $\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ ou $\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax}$ definidas para $m, n \in \mathbb{N}$ é comum indagar se ainda fazem sentido caso n, m sejam quaisquer reais ou complexos, ou ainda, se existe algo como uma meia derivada tal que a propriedade usual das derivadas, $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} = \frac{d}{dx}$, continue válida. Foi à partir destas considerações que se iniciou o que é hoje conhecido por cálculo íntegro-diferencial fracionário que, apesar do nome, lida com generalizações de derivadas e integrais para quaisquer expoentes em $\mathbb{C}$.

A questão de expoentes diferentes de inteiros para derivadas vem logo após o desenvolvimento do cálculo por Newton e Leibniz e é levantada em correspondências entre o último e Bernoulli. A pergunta sobre o significado de $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ aparece específicamente em correpondências entre Leibniz e L'Hopital onde o primeiro conjectura sobre seu significado mas sem fazer um desenvolvimento maior destas idéias. Posteriormente Euler, Lagrange, Lacroix e Fourier, durante seus estudos, mencionam possíveis generalizações para o conceito de derivada inclusive obtendo fórmulas para esses operadores fracionários em casos especiais[2, 3].

Apesar do interesse acadêmico em tais operadores eles ainda não haviam sido utilizados em aplicações até o estudo de Abel acerca do problema da tautócrona, que consistia em achar a forma da curva tal que o tempo de descida de uma partícula vinculada à esta curva fosse o mesmo, independente de sua posição inicial. Durante a resolução do problema Abel encontrou equações integrais do tipo $k = \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t)dt$, onde k é uma constante. O lado direito é um caso particular de uma integral de ordem $-1/2$; aplicando o operador de derivada de ordem $1/2$ em ambos os lados temos a solução para a função f como a derivada de ordem $1/2$ da constante k que, contrariamente à derivada comum, não é necessariamente zero. A solução deste problema fica em função de um certo operador de derivação aplicada à uma constante

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^1/2}{dx^{1/2}} k. \tag{2.6}$$

Após Abel, Liouville foi o primeiro a dedicar-se mais a fundo ao estudo do cálculo fracionário em vários trabalhos publicados em sucessão, onde deu duas definições de derivadas fracionárias; uma para funções do tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$; $\mathfrak{Re}\,(a_n) > 0$ e outra para polinômios;

$$D^\mu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\mu e^{a_n x} \tag{2.7}$$

$$D^\mu x^{-a} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(a+\mu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\mu}, \tag{2.8}$$

Liouville também foi o primeiro a utiliza-lás para resolver equações diferenciais oriundas de problemas físicos.

Durante os anos seguintes outros matemáticos trabalharam com cálculo fracionário. Entre eles destacamos Riemann, cuja definição de integração fracionária é bem próxima da versão atual do operador de Riemann-Liouville e também Heaviside, que utilizava-se de um cálculo operacional pouco rigoroso, mas com bons resultados. O estudo de Heaviside sobre circuitos elétricos acabou por despertar o interesse dos matemáticos para a análise desses operadores generalizados.

Mais recentemente houve um ressurgimento no interesse pelo cálculo fracionário devido ao aparecimento destes operadores na modelagem de alguns sistemas físicos com propriedades não-locais ou com memória temporal.

2.3 Definições

2.3.1 Integral fracionária

Começaremos dando uma motivação para a definição mais usual de integral fracionária investigando a integral iterada n vezes [2]:

$$ {}_cD_x^{-n}f(x) \equiv \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} \mathrm{d}x_2 ... \int_c^{x_{n-1}} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.9} $$

onde o operador ${}_cD_x^{-n}$ é definido pelo lado esquerdo ada equação.

Queremos achar um núcleo $K_n(x,t)$ tal que

$$ {}_cD_x^{-n}f(x) = \int_c^x K_n(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.10} $$

Observando que a função a ser integrada depende apenas de t, podemos simplificar as integrações utilizando

$$ \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \int_t^x \mathrm{d}x_1 = \int_c^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.11} $$

repetidas vezes para simplificar as integrais duas de cada vez.

Num segundo passo

$$ \begin{aligned} \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_c^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} (x_1-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \int_t^x (x_1-t)\,\mathrm{d}x_1 &= \int_c^x f(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.12} $$

então supondo que $K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ é válido temos para n+1

$$ \begin{aligned} {}_cD_x^{-n-1}f(x) &= \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_c^{x_2} \mathrm{d}x_3 ... \int_c^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} K_n(x_1,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_c^x \mathrm{d}x_1 \int_c^{x_1} \frac{(x_1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_c^x \mathrm{d}t \int_t^x \frac{(x_1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x K_{n+1}(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.13} $$

Portanto K_n fica definido para $n \in \mathbb{N}$

$$ {}_cD_x^{-n}f(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.14} $$

A integral acima faz sentido mesmo que n não seja natural. Podemos utilizá-la assim para definir o operador integral fracionário permitindo que $n \in \mathbb{C}$; $\mathfrak{Re}\,(n) > 0$. Quando $c = 0$ temos a integral fracionária de Riemann-Liouville

$$ {}_0D_x^{-\mu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1}f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.15} $$

esse operador tem a propriedade

$$ {}_0D_x^{-\mu}\,{}_0D_x^{-\nu} f(x) = {}_0D_x^{-\mu-\nu} f(x) \tag{2.16} $$

e obedeçe à uma fórmula de integração fracional por partes

$$ \int_a^b \phi(x)({}_0D_x^{-\mu}\psi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)({}_xD_b^{-\mu}\phi)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.17} $$

Por exemplo se $f(t) = t^\nu$ sua integral de ordem μ é

$$ {}_0D_t^{-\mu} t^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} t^{\nu+\mu}, \qquad \mu > 0,\ \nu > -1,\ t > 0. \tag{2.18} $$

Outra integral fracionária comum na literatura é a de Weyl [3]

$$ {}_xW_\infty^{-\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^\infty (x-t)^{\mu-1} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.19} $$

A questão dos espaços onde esses operadores estão definidos é abordada rigorosamente em [3]. Por simplicidade podemos supor que todas as funções são de classe C^w, ou seja, analíticas e definidas num conjunto compacto, tanto para os operadores integrais como para os diferenciais.

2.3.2 Derivada fracionária

A partir da propriedade acima para integrais fracionárias podemos definir a derivada fracionária. Seja $\nu \in \mathbb{C}$; $\mathfrak{Re}\,(\nu) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \mathfrak{Re}(\nu) < n$; se $\mathfrak{Re}(\nu) = n - \mu$, temos

$$ {}_0D_x^\nu f(x) = {}_0D_x^n\,{}_0D_x^{-\mu} f(x). \tag{2.20} $$

Identificando o operador ${}_0D_x^n$ como a derivada de ordem inteira n e sabendo a forma do operador ${}_0D_x^{-\mu}$, temos a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville

$$ {}_0D_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.21} $$

se $f \in C^n$ temos uma a defnição alternativa obtida derivando a integral

$$ {}_0D_x^\nu f(x) = {}_0D_x^n\,{}_0D_x^{-\mu} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(\mu-n+k+1)} x^{\mu-n+k} \tag{2.22} $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{x^\mu} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x - t^{1/\mu})\,\mathrm{d}t. \tag{2.23} $$

Assim como no cálculo $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$ e em geral $\int_0^x \frac{\partial}{\partial t} f(t)\,\mathrm{d}t \neq f(x)$, os operadores fracionários de derivação e integração não comutam. Esse fato é expresso pelas relações abaixo

$$ {}_0D_x^{\nu}\,{}_0D_x^{-\nu} f(x) = f(x) \tag{2.24} $$

$$ {}_0D_x^{-\nu}\,{}_0D_x^{\nu} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\nu-k-1}}{\Gamma(\nu-k)} f(0)_{n-\nu}^{(n-k-1)}. \tag{2.25} $$

A fórmula de integração por partes continua válida para $0 < \mathfrak{Re}\,(\nu) < 1$

$$ \int_a^b \phi(x)({}_0D_x^{\nu}\psi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)({}_xD_b^{\nu}\phi)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.26} $$

Por exemplo, se $f(t) = t^{\mu}$ sua derivada de ordem ν é

$$ {}_0D_t^{\nu} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} t^{\mu-\nu}, \qquad \mathfrak{Re}(\nu) > 0,\ \mu > -1,\ t > 0. \tag{2.27} $$

Outra definição útil é a de Riesz

$$ \frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}} f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} \left\{ |k|^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx'} f(x')\,\mathrm{d}x' \right\} \mathrm{d}k \tag{2.28} $$

que tem a seguinte relação com a derivada de Riemann-Liouville

$$ ({}_{\infty}D_x^{\alpha} + {}_xD_{\infty}^{\alpha}) f(x) = -2\cos\frac{\pi\alpha}{2} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}} f(x) \tag{2.29} $$

$$ ({}_{\infty}D_x^{\alpha} - {}_xD_{\infty}^{\alpha}) f(x) = -2\sin\frac{\pi\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}} f(x). \tag{2.30} $$

Para uma introdução mais completa, na mesma linha da feita acima, sugere-se o livro [2] ou [4]. Os detalhes mais técnicos da teoria de operadores fracionários podem ser encontrados em [3].

2.4 Motivação revisitada

Voltemos agora ao problema da determinação da forma da curva $f(z)$ dado um fluxo $Q(z)$ de água que desejamos que passe pela abertura. Havíamos obtido uma equação integral para f da forma

$$ Q(h) = \int_0^h 2\sqrt{2g}(h-z)^{1/2} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.31} $$

Tendo agora em mãos as definições de integral e derivada fracionárias podemos interpretar esse operador como a integral de ordem $3/2$ da função f

$$ Q(h) = \Gamma(3/2) 2\sqrt{2g} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^h (h-z)^{1/2} f(z) dz = \sqrt{2g\pi}\,{}_0D_h^{-3/2} f(h). \tag{2.32} $$

Podemos “inverter” a equação aplicando o operador de derivada de ordem 3/2 em ambos os lados da equação

$$ {}_0D_h^{3/2} Q(h) = \sqrt{2g\pi}\, {}_0D_h^{3/2} ({}_0D_h^{-3/2} f(h)) = \sqrt{2g\pi} f(h), \tag{2.33} $$

assim f fica expresso em termos da derivada de ordem 3/2 do fluxo de água

$$ f(z) = \frac{1}{\sqrt{2g\pi}} {}_0D_h^{3/2} Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2g\pi}\Gamma(1/2)} \frac{d^2}{dh^2} \int_0^h (z-t)^{-1/2} Q(t)\, \mathrm{d}t. \tag{2.34} $$

Por exemplo, se o fluxo tem uma dependência polinomial com a altura, $Q(z) = kz^\lambda$, a forma de f é

$$ f(z) = \frac{1}{\sqrt{2g\pi}} {}_0D_h^{3/2} (kz^\lambda) = \frac{k}{\sqrt{2g\pi}} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-1/2)} z^{\lambda-3/2}, \tag{2.35} $$

para $\lambda = 2$ temos uma abertura com a forma de uma parábola, se $\lambda = 5/2$ teremos uma abertura triangular.

Capítulo 3

Aplicações em Sistemas Estocásticos

3.1 Aplicações

Uma das mais importantes ferramentas no estudo de sistemas estocásticos é a Equação de Fokker-Planck (EFP), que pode ser obtida a partir da equação de Langevin (3.1) quando se faz a suposição de que a distribuição de probabilidade correspondente ao termo de ruído seja gaussiana.

$$\frac{d}{dt}x = f(x(t), t) + g(x(t), t)\xi(t) \tag{3.1}$$

Onde $\xi(t)$ é o termo de ruído branco, $g(x(t), t)$ é o termo de ruído multiplicativo e $f(x(t), t)$ pode ser interpretado como um termo de força externa [5].

Alguns autores preferem a equação de Langevin por considerá-la mais transparente do ponto de vista físico, uma vez que se trata de uma equação para a evolução temporal da variável sujeita a um ruído. A equação de Fokker-Planck (3.2), por outro lado, é uma equação determinística para a distribuição de probabilidade da variável em questão. A escolha da distribuição de probabilidade do ruído é motivada pelo teorema do limite central, que nos assegura que sob certas condições a distribuição da média de variáveis aleatórias assume a forma gaussiana.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)P(x,t) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}g^2(x,t)P(x,t) \tag{3.2}$$

Quando consideramos modelos estatísticos cuja probabilidade de transição não é necessariamente gaussiana os operadores de ordem fracionária aparecem naturalmente, mais especificamente, quando a probabilidade de transição pertence a uma classe de distribuições chamada distribuições de Lévy α-estáveis. Estas distribuições são caracterizadas por decaírem com uma lei de potência e, portanto, seus momentos maiores não são finitos. Apesar de não existirem formas fechadas para essas distribuições exceto em casos especiais, existe uma forma fechada para sua função característica [5]:

$$S_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \exp[ik\delta - \gamma^\alpha |k|^\alpha (1 - i\beta sgn(k)\Xi)] \tag{3.3}$$

$$\Xi = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2) & \text{se } \gamma \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\log(|t|) & \text{se } \gamma = 1 \end{cases}$$

Nesta expressão $\alpha \in (0,2]$ é o parâmetro de estabilidade, $\beta \in [-1,1]$ assimetria, $\gamma > 0$ escala e $\delta \in \mathbb{R}$ localização.

3.1.1 EFP fracionária no espaço

Partindo deste modo da mesma equação de Langevin, mas supondo que a função característica da distribuição de probabilidade do ruído corresponda a uma distribuição de Lévy $S_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, obtém-se uma equação íntegro-diferencial para a probabilidade que generaliza a de Fokker-Planck e reduz-se a esta no limite apropriado [5].

Utilizando a definição de Riemann-Liouville para operadores fracionários a equação obtida pode ser interpretada em termos do cálculo fracionário:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P(t) = &- \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)P(x,t) - \frac{\gamma}{2\cos(\pi\alpha/2)} \\ &\times [(1+\beta)_\infty D_x^\alpha + (1-\beta)_x D_\infty^\alpha] g^\alpha(x,t)P(x,t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

No limite $\alpha \to 2$ a equação acima reduz-se à de Fokker-Planck, pois a distribuição de Levy, para este caso, coincide com uma gaussiana. É mais fácil tomar esse limite expressando a equação acima em termos da derivada de Riesz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P(t) = &- \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)P(x,t) + \gamma\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha}g^\alpha(x,t)P(x,t) \\ &+ \gamma\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial|x|^{\alpha-1}}g^\alpha(x,t)P(x,t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Neste caso é fácil constatar que quando $\alpha \to 2$ o segundo termo à direita reduz-se à uma derivada de segunda ordem e o terceiro termo anula-se, dado que $\tan\pi = 0$. Recupera-se assim a EFP tradicional.

3.1.2 EFP fracionária no tempo

A EFP fracionária no tempo pode ser obtida de várias maneiras equivalentes, uma delas é através de um modelo de random walk com tempo contínuo (CTRW), onde a probabilidade de transição no tempo tem o comportamento de uma distribuição de Lévy para tempos muito grandes. A equação obtida tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}P = {}_0D_t^{1-\alpha}K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}P \tag{3.6}$$

Sua dedução pode ser encontrada em [6].

Esse tipo de equação aparece em modelos de difusões em substratos fractais e sistemas com desordem.

3.2 Interpretação Física

Apesar de bem fundamentada do ponto de vista matemático, a interpretação física dos operadores íntegro-diferenciais ainda é obscura. Há trabalhos na literatura que abordam este ponto para alguns exemplos específicos, como a integral fracionária no tempo interpretada em termos de uma função resposta em teoria de sinais [7], ou como a integral fracionária no espaço em certos tipos de difusão [8]. Não há porém uma interpretação mais abrangente que possa auxiliar na construção de modelos físicos.

Capítulo 4

Simetrias de Equações Diferenciais

4.1 Grupos de Simetrias

Primeiro definiremos o que queremos dizer quando falamos que uma função admite um grupo de simetria. Trataremos aqui apenas de simetrias contínuas excluíndo por exemplo reflexões que, embora importantes, não podem ser tratadas pelo método infinitesimal que será desenvolvido.

Um conjunto G junto com uma função $(\,\cdot\,) : G \times G \to G$ chamada de multiplicação é um grupo se e somente se a função obedeçe aos seguintes axiomas:

Associatividade. Se $g, k, h \in G$ então

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k. \tag{4.1}$$

Identidade. Existe um elemento $e \in G$ chamado identidade, com a propriedade que $\forall g \in G$

$$e \cdot g = g = g \cdot e. \tag{4.2}$$

Inversas. Para cada $g \in G$ existe uma inversa, g^{-1}, com a propriedade

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g. \tag{4.3}$$

Como estamos interessados em simetrias contínuas é natural que trabalhemos com Grupos de Lie, que foram introduzidos por Sophus Lie quando este estudava simetrias de equações diferenciais. Antes de definir grupos de Lie precisamos do conceito de variedade diferenciável.

Uma *variedade C^k-diferenciável de dimensão m* é um conjunto M junto com uma coleção contável de subconjuntos $U_\alpha \subset M$ e homeomorfismos $\chi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ em subconjuntos abertos e conexos $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, tal que:

Os subconjuntos U_α formam uma cobertura de M

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M. \tag{4.4}$$

Na intersecção de dois subconjuntos $U_\alpha \cap U_\beta$ a composta

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{4.5}$$

é uma função de classe C^k com inversa de classe C^k.

Apesar de uma variedade ser um conjunto mais geral que o $\mathbb{R}^m$ podemos trabalhar localmente como se estivéssemos neste; ao identificarmos um ponto p na variedade com sua coordenada $x = \chi_\alpha(p)$ podemos fazer uso das ferramentas do cálculo em $\mathbb{R}^m$ sem que seja necessario reformulá-las para espaços mais abstratos. Por simplicidade assumiremos que todas as variedades com que trabalharemos são conexas e infinitamente diferenciáveis.

4.1.1 Grupos de Lie

Um grupo de Lie de r parâmetros é um grupo G que possui uma estrutura de variedade diferencial de dimensão r de forma que, tanto o mapa de multiplicação, $m(g, h) = g \cdot h$, quanto o mapa de inversa, $i(g) = g^{-1}$, são funções diferenciáveis entre variedades. Por simplicidade trabalharemos com grupos de Lie locais, ou seja, definidos apenas em abertos conexos $V \subset \mathbb{R}^r$ que contenham a origem.

Em geral grupos de Lie aparecem como grupos de transformações de uma variedade, como por exemplo o grupo de rotações num plano, denominado SO(2), ou o grupo de Poincaré, que é o grupo de isometrias do espaço de Minkowski. Portanto definiremos como um grupo de Lie age localmente sobre uma variedade.

Seja M uma variedade diferenciável. Um *grupo local de transformações* agindo em M é dado por um grupo de Lie local, um subconjunto aberto $\mathcal{U}$, com

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M \tag{4.6}$$

o domínio da definição da ação do grupo, e um mapa $\Psi : \mathcal{U} \to M$ de classe C^∞, tal que:

Se $(h, x) \in \mathcal{U}$, $(g, \Psi(h, x)) \in \mathcal{U}$, e $(g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$, então

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x). \tag{4.7}$$

Para todo $x \in M$ temos

$$\Psi(e, x) = x. \tag{4.8}$$

Se $(g, x) \in \mathcal{U}$

$$(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U} \tag{4.9}$$

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x \tag{4.10}$$

Por simplicidade denotaremos a ação do grupo $\Psi(g, x) = g \bullet x$. Pela última propriedade cada transformação por um elemento do grupo é um difeomorfismo.

A simplicidade e o poder dos grupos de Lie vêm de uma propriedade muito útil de certos campos vetoriais sobre eles definidos, que nos permite usar um critério de invariância infinitesimal e linear que é muito mais simples de estudar do que a ação completa dos elementos do grupo sobre a variedade $\Psi(g, x)$. Para isso precisaremos do conceito de álgebra de Lie.

4.1.2 Álgebras de Lie

Seja G um grupo de Lie e $g \in G$ qualquer, definimos a *multiplicação à direita* $R_g : G \to G$ por:

$$R_g(h) = h \cdot g \tag{4.11}$$

Seja $\mathbf{v}$ um campo vetorial em G, $\mathbf{v}$ é dito *invariante à direita* se

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}, \quad \forall g, h \in G. \tag{4.12}$$

Onde dR_g é o diferencial de R_g e, portanto, é uma função linear que mapeia $TG|_h$ em $TG|_{R_g(h)}$ onde h é um ponto em G. Como o mapa da multiplicação é um difemorfismo dR_g mapeia campos vetoriais em campos vetoriais, assim $dR_g(\mathbf{v})$ é um campo vetorial bem definido sobre G.

Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são campos invariantes à direita, pela linearidade do diferencial d, temos que $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ também é invariante à direita e o conjunto de todos os campos invariantes à direita formam um espaço vetorial. Além disso temos que o campo definido pelos colchetes de Lie $\mathbf{u} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ também é um campo invariante à direita, motivando então a seguinte definição de álgebra de Lie.

A *Álgebra de Lie* de um grupo de Lie G denotada por $\mathfrak{g}$ é o espaço vetorial de todos os campos invariantes à direita em G junto com uma operação $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfazendo os seguintes axiomas:

Bilinearidade

$$\begin{aligned} [a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u}] &= a[\mathbf{v}, \mathbf{u}] + b[\mathbf{w}, \mathbf{u}] \\ [\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}] &= a[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + b[\mathbf{u}, \mathbf{w}] \end{aligned} \tag{4.13}$$

Antissimetria

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \tag{4.14}$$

Identidade de Jacobi

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0 \tag{4.15}$$

Cada $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ é univocamente determinado pelo seu valor na identidade, pois $\mathbf{v}|_g = dR_g(\mathbf{v}|_e)$ e, reciprocamente, cada vetor tangente à G em e determina univocamente um campo vetorial invariante à direita. Assim podemos identificar a álgebra de Lie com o espaço tangente na identidade $\mathfrak{g} \simeq TG|_e$, portanto $\mathfrak{g}$ tem a mesma dimensão que seu grupo de Lie correspondente.

Existe um correspondência unívoca entre subespaços unidimensionais de $\mathfrak{g}$ e subgrupos conexos de um parâmetro de G que é dado pelo fluxo gerado pelos elementos de $\mathfrak{g}$ à partir da identidade. Para $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$

$$g_\epsilon = \exp(\epsilon \mathbf{v})e \equiv \exp(\epsilon \mathbf{v}) \tag{4.16}$$

com as propriedades; $g_{\epsilon+\delta} = g_\epsilon \cdot g_\delta$, $g_0 = e$ e $g_\epsilon^{-1} = g_{-\epsilon}$, sendo estes subgrupos isomorfos a $\mathbb{R}$, ou SO(2).

Dado $g \in G$ suficientemente perto da origem ele pode ser escrito como

$$g = \exp(\epsilon^1 \mathbf{v}_1) \exp(\epsilon^2 \mathbf{v}_2) \cdots \exp(\epsilon^r \mathbf{v}_r) \tag{4.17}$$

onde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ é uma base para a álgebra de Lie e $\epsilon^j \in \mathbb{R}$. Com isso a invariância frente à um elemento do grupo se reduz à invariância frente aos seus subgrupos de um parâmetro.

Os campos vetoriais que geram a álgebra de Lie também são chamados de geradores infinitesimais do grupo G, pois podemos reconstruir o grupo à partir deles a menos de aspectos globais. Como exemplo podemos tomar os grupos SO(3) e SU(2), que possuem os mesmos 3 geradores, que em quântica são identificados com os operadores de momento angular, com as mesmas relações dadas pelos colchetes de Lie. Ambos possuem assim a mesma álgebra, mas são grupos distintos globalmente; enquanto o SU(2) é simplesmente conexo, o SO(3) não o é.

Se $\mathfrak{g}$ for de dimensão finita então existe um único grupo de Lie G^* conexo e simplesmente conexo que tem $\mathfrak{g}$ como sua álgebra de Lie. Se G for um outro grupo grupo de Lie conexo com a mesma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ então existe um homomorfismo $\pi : G^* \to G$, assim G^* e G são localmente isomorfos; G^* é chamado de grupo de recobrimento de G. No exemplo anterior SU(2) é o grupo de recobrimento de SO(3) e o mapa π é um homomorfismo biunívoco.

Voltando para a ação do grupo de transformações local G sobre uma variedade M, existe uma ação infinitesimal da álgebra de Lie deste grupo sobre a variedade se $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ podemos definir $\psi : \mathfrak{g} \to TM$, tal que $\psi(\mathbf{v})$ é um campo vetorial em M cujo fluxo coincide com a ação do subgrupo de um parâmetro $\exp(\epsilon \mathbf{v})$ de G em M. Então $\forall x \in M$,

$$\psi(\mathbf{v})|_x = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Psi(\exp(\epsilon \mathbf{v}), x) = d\Psi_x(\mathbf{v}|_e) \tag{4.18}$$

com $\Psi_x(g) \equiv \Psi(g, x)$. ψ nos dá um homomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e a álgebra de campos vetoriais em M

$$[\psi(\mathbf{v}), \psi(\mathbf{w})] = \psi([\mathbf{v}, \mathbf{w}]); \;\; \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}. \tag{4.19}$$

Por simplicidade vamos denotar os campos induzidos na variedade pela ação do grupo $\psi(\mathbf{v})$ apenas por $\mathbf{v}$.

A ação dos subgrupos de um parâmetro sobre M pode ser obtida atráves do fluxo do seu gerador $\mathbf{v}$ utilizando o mapa exponencial apresentado acima que, em coordenadas locais, pode ser expresso por uma séria de potências conhecida como série de Lie. Seja $x \in M$ $g \in G$ o fluxo

$$\Psi(g, x) = \exp(\epsilon \mathbf{v})x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{v}^k(x) \tag{4.20}$$

define a ação do subgrupo G onde x é interpretada como a função coordenada sobre a variedade e $\mathbf{v}(x)$ é a ação de derivação dos vetores no espaço de funções sobre a variedade.

4.2 Método do Prolongamento

4.2.1 Invariância de soluções

Seja $\mathcal{S}$ um sistema de equações diferenciais com p variáveis independentes $x = (x^1, x^1, ..., x^p)$, $x \in X$ e q variáveis dependentes $u = (u^1, u^2, ...u^q)$, $u \in U$. Um grupo de simetria de $\mathcal{S}$ é um grupo de Lie local de transformações tal que, se f é uma solução de $\mathcal{S}$ então $\widetilde{f} = g \bullet f$ com $g \in G$ também é uma solução do sistema de equações diferenciais. Vamos definir o que está implícito na expressão $\widetilde{f} = g \bullet f$. Começamos por indentificar f com seu gráfico; seja $\Omega \in X$ o domínio de definição de f

$$\Gamma_f = \{(x, f(x) : x \in \Omega)\} \subset X \times U, \tag{4.21}$$

se $\Gamma_f \in M_g$, onde M_g é o subconjunto onde a ação de g está definida, então

$$g \bullet \Gamma_f = \{(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = g \bullet (x, u) : (x, u \in \Gamma_f)\}. \tag{4.22}$$

Considerando elementos suficientemente perto da identidade $g \bullet \Gamma_f = \Gamma_{\widetilde{f}}$ será o gráfico de alguma função unívoca $\widetilde{u} = \widetilde{f}(\widetilde{x})$.

Para obter o critério infinitesimal de invariância de equações diferenciais vamos reformular a noção de sistema de equações diferenciais de forma mais geométrica, prolongando o espaço base $X \times U$ para um espaço que contenha as derivadas.

Dada uma função real de classe C^∞, $f : X \to U$, com q componentes $f^\alpha(x) = f^\alpha(x^1, x^2, ..., x^p)$ e de p variáveis, existe $p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$ derivadas parciais de ordem k de cada componente

$$\partial_J f^\alpha(x) = \frac{\partial^k f^\alpha(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \cdots \partial x^{j_k}} \tag{4.23}$$

onde $J = (j_1, j_2, .., j_k)$ é uma k-tupla de inteiros não ordenados. Existe então no total qp_k derivadas de ordem k.

Definimos $U_k \equiv \mathbb{R}^{qp_k}$ com coordenadas u_J^α representando as derivadas de todas as funções f de ordem k, então $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ é o espaço de todas as derivadas até a ordem n. Um ponto em $U^{(n)}$ será denotado $u^{(n)}$ com $q\binom{p+n}{n} \equiv qp^{(n)}$ coordenadas u_J^α.

O espaço $X \times U^{(n)}$ é chamado de n-ésimo jet-space da variedade base $X \times U$, como geralmente trabalhamos com funções definidas apenas num subespaço $M \subset X \times U$ definimos $M^{(n)} = M \times U \times \cdots \times U_n$. Portanto se $\Gamma_f \subset M$ então $\Gamma_{\mathrm{pr}^{(n)} f} \subset M^{(n)}$, onde $\mathrm{pr}^{(n)} f(x) = u^{(n)}$ é uma função induzida chamada de n-ésimo prolongamento de $f(x)$ definida por $u^\alpha_J = \partial_J f^\alpha(x)$, assim $\mathrm{pr}^{(n)} : X \to U^{(n)}$.

Um sistema de equações diferenciais $\mathcal{S}$ dado em termos de equações da forma

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, ..., l \tag{4.24}$$

pode ser vista como uma função $\Delta : X \times U^{(n)} \to \mathbb{R}^l$. Se Δ for de posto máximo, ou seja, quando a matriz jacobiana $J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u^\alpha_J}\right)$ de Δ tem posto l quando $\Delta = 0$, o sistema $\mathcal{S}$ determina uma subvariedade $\mathcal{S}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$.

Se $f(x)$ é uma solução do sistema de equações diferenciais então o gráfico de $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ deve ser um subconjunto da subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$, ou seja

$$\Gamma^{(n)}_f \equiv \{(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\} \subset \mathcal{S}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}))\} = 0. \tag{4.25}$$

Assim podemos tomar um sistema de equações diferenciais como sendo uma subvariedade de $X \times U^{(n)}$ e suas soluções como as funções cujos gráficos de seus respectivos prolongamentos estão totalmente nessa subvariedade.

Agora que aumentamos nosso espaço para incluir as derivadas das funções, podemos prolongar a ação de grupos que agem no espaço base $X \times U$. Seja $(x_0, u^{(n)}_0)$ um ponto de $M^{(n)}$ e f uma função definida numa vizinhança de x_0 cujo gráfico pertence à M e tem derivadas $u^{(n)}_0 = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0)$. Se $g \in G$ é próximo o suficiente da identidade, a função $g \bullet f$ está definida numa vizinhança do ponto $(\widetilde{x}_0, \widetilde{u}_0) = g \bullet (x_0, u_0)$ e é possível definir a ação da transformação prolongada, $\mathrm{pr}^{(n)} g$, no ponto $(x_0, u^{(n)}_0)$ por

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \bullet (x_0, u^{(n)}_0) = (\widetilde{x}_0, \widetilde{u}^{(n)}_0) \quad \text{onde } \widetilde{u}^{(n)}_0 \equiv \mathrm{pr}^{(n)}(g \bullet f)(\widetilde{x}_0). \tag{4.26}$$

Para prolongar a ação de um grupo para $M^{(n)}$ basta transformar uma função representativa para $g \bullet f$ e avaliar suas derivadas no ponto transformado $(\widetilde{x}_0, \widetilde{u}^{(n)}_0)$. Reinterpretando geometricamente um sistema de equações diferenciais, o problema de avaliar se ele é invariante frente a ação de um grupo é equivalente a saber se uma subvariedade no jet-space é invariante à ação do prolongamento desse grupo.

Para obter um critério infinitesimal de invariância, vamos prolongar os campos vetoriais definidos sobre $X \times U$ para $X \times U^{(n)}$ de forma que os geradores de G sejam prolongados para geradores de $\mathrm{pr}^{(n)} G$.

Seja $M \subset X \times U$ aberto e $\mathbf{v}$ um campo vetorial em M com um grupo local de um parâmetro $\exp(\epsilon \mathbf{v})$. O n-ésimo prolongamento de $\mathbf{v}$, denotado por $\mathrm{pr}^{(n)} \mathbf{v}$, é definido como o campo vetorial em $M^{(n)}$ que é o gerador do grupo prolongado de um parâmetro $\mathrm{pr}^{(n)}[\exp(\epsilon \mathbf{v})]$, ou seja

$$\mathrm{pr}^{(n)} \mathbf{v}|_{(x, u^{(n)})} = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathrm{pr}^{(n)}[\exp(\epsilon \mathbf{v})](x, u^{(n)}), \quad \forall (x, u^{(n)}) \in M^{(n)}. \tag{4.27}$$

Então partindo de um campo vetorial $\mathbf{v}$, que em coordenadas locais é expresso por

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{4.28}$$

obtemos seu prolongamento

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J(x,u)\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \tag{4.29}$$

Os coeficientes ϕ_α^J são determinados pelos coeficientes ξ^i e ϕ_α que dependem apenas das variáveis (x,u).

Podemos agora formular o critério infinitesimal de invariância para sistemas de equações diferenciais.Seja $\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0$ um sistema de equações diferenciais de posto máximo definido em $M \subset X \times U$. Se G é um grupo local de transformações agindo em M e

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_\nu(x,u^{(n)})] = 0, \quad \nu = 1,...,l \quad \text{quando} \quad \Delta(x,u^{(n)}) = 0 \tag{4.30}$$

para cada gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ de G, então G é um grupo de simetrias do sistema de equações diferenciais.

À partir deste critério de invariância podemos obter um procedimento para deduzir os grupos de simetria admitidos por certo sistema de equações diferenciais, mas antes precisamos de uma última definição.

Seja $P(x,u^{(n)})$ uma função definida em um aberto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. A *derivada total* de P com respeito a x^i é a única função $D_iP(x,u^{(n+1)})$ definida em $M^{(n+1)}$ com a propriedade de que se $u = f(x)$, então

$$D_iP(x,\mathrm{pr}^{(n+1)}f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\{P(x,\mathrm{pr}^{(n)}f(x))\}, \tag{4.31}$$

ou seja D_iP é obtida de P derivando-a com respeito a x^i considerando os u_J^α como funções de x. Em coordenadas locais D_iP pode ser obtida pela expressão

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} u_{J,i}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha}, \quad u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}. \tag{4.32}$$

Derivadas totais de ordens mais altas são definidas por $D_J = D_{j_1}D_{j_2}\cdots D_{j_k}$ onde $J = (j_1, j_2, ..., j_k)$ é multi-índice de ordem k.

Seja agora

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{4.33}$$

um campo vetorial definido num aberto $M \subset X \times U$. Seu n-ésimo prolongamento é o campo

$$\mathrm{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{4.34}$$

definido no espaço correspondente $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, onde $J = (j_1, ..., j_k)$, e $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq p$. Os coeficientes ϕ_α^J são dados pela fórmula

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha. \tag{4.35}$$

O procedimento para calcular os grupos de simetria admitidos por um sistema de equações diferenciais $\mathcal{S}$ é algoritmico, embora trabalhoso. Começamos com um sistema de equações diferenciais $\mathcal{S}$ e um grupo de um parâmetro local de transformações G que age num aberto $M \subset X \times U$ com gerador (4.33). Prolongamos o gerador para o espaço $M^{(n)}$ pela fórmula do prolongamento (4.35) e usando o critério de invariância infinitesimal (4.30) aplicamos (4.34) sobre a variedade definida por S. Assim obtemos um sistema simples de equações diferenciais para os coeficientes dos geradores ϕ_J^α. Ao resolver este sistema obtemos os geradores dos grupos de simetria de S e com eles podemos reconstruir os grupos.

As provas das afirmações acima podem ser encontradas em [9] assim como outros usos e extensões do método de prolongamento. Uma abordagem sem a utilização explícita dos conceitos geométricas é feita em [10].

Para finalizar o capítulo apresentaremos um exemplo de como obter os grupos de simetria de uma equação diferencial, mais particularmente da equação de condução de calor em uma dimensão $u_t = u_{xx}$ [9]. Sendo uma equação parcial de ordem 2, de acordo com a teoria introduzida podemos considerar que a equação do calor define uma subvariedade em $X \times U^{(2)}$ por $\Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0$.

Seja

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.36}$$

um campo vetorial em $X \times U$. Para determinar os possíveis grupos de simetria da equação temos que prolongar a ação de $\mathbf{v}$ para o segundo jet-space. Com o auxílio de (4.34) temos

$$\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \tag{4.37}$$

onde os coeficientes são calculados utilizando (4.35)

$$\begin{aligned}
\phi^x =& D_x(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} \\
=& \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t \qquad (4.38) \\
\phi^t =& D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} \\
=& \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 \qquad (4.39) \\
\phi^{xx} =& D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
=& \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 \\
& - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} \\
& \qquad (4.40) \\
\phi^{xt} =& D_x D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxt} + \tau u_{xxt} \\
=& \phi_{xt} + (\phi_{tu} - \xi_{xt}) u_x + (\phi_{xu} - \tau_{xt}) u_t + (\phi_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu}) u_x u_t \\
& - \xi_{tu} u_x^2 - \tau_{xu} u_t^2 - \xi_t u_{xx} - \tau_x u_{tt} + (\phi_u - \xi_x - \tau_t) u_{xt} - 2\xi_u u_{xt} u_x \\
& - \xi_u u_{xx} u_t - \tau_u u_{tt} u_x - 2\tau_u u_{xx} u_t - \xi_{uu} u_x^2 u_t - \tau_{uu} u_t^2 u_x \qquad (4.41) \\
\phi^{tt} =& D_t^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xtt} + \tau u_{ttt} \\
=& \phi_{tt} + (2\phi_{tu} - \tau_{tt}) u_t - \xi_{tt} u_x + (\phi_{uu} - 2\tau_{tu}) u_t^2 - 2\xi_{tu} u_x u_t - \tau_{uu} u_t^3 \\
& - \xi_{uu} u_t^2 u_x + (\phi_u - 2\tau_t) u_{tt} - 2\xi_t u_{xt} - 3\tau_u u_t u_{tt} - \xi_u u_x u_{tt} - 2\xi_u u_t u_{xt} \\
& \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

e os sub-índices denotam derivadas parciais.

Aplicando $\mathrm{pr}^{(2)}\mathbf{v}$ à $\Delta(x, t, u^{(2)})$ obtemos o critério infinitesimal de invariância da subvariedade

$$\phi^t = \phi^{xx} \qquad (4.43)$$

que deve ser satisfeito sempre que $u_t - u_{xx} = 0$. Substituíndo as expressões para os coeficientes no critério de invariância obtemos

$$\begin{aligned}
\phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 =& \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_{xx} + \\
& (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_{xx} - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} \\
& - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - 2\tau_u u_x u_{xt}. \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes dos monômios encontramos um sistema de equações diferenciais:

monômios	coeficientes
$u_x u_{xt}$	$0 = -2\tau_u$
u_{xt}	$0 = -2\tau_x$
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$
$u_x^2 u_{xx}$	$0 = -\tau_{uu}$
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u$
u_{xx}	$\phi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x$
u_x^3	$0 = -\xi_{uu}$
u_x^2	$\phi_{uu} - 2\xi xu = 0$
u_x	$-\xi_t = 2\phi_{xu} - \xi_{xx}$
1	$\phi_t = \phi_{xx}$

Resolvendo este sistema obtemos as expressões para os coeficientes do gerador

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt; \tag{4.45}$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2; \tag{4.46}$$

$$\phi = (c_3 + c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t) \tag{4.47}$$

onde $c_1, \ldots, c_6$ são constantes e $\alpha(x,t)$ é uma solução arbitrária da equação de calor. Substituindo os coeficientes na expressão para o gerador e pondo em evidência cada constante, pois elas representam os parâmetros dos subgrupos unidimensionais, deduzimos que existem seis geradores da álgebra de Lie

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_1} &= \partial_x;\\
\mathbf{v_2} &= \partial_t;\\
\mathbf{v_3} &= u\partial_u;\\
\mathbf{v_4} &= x\partial_x + 2t\partial_t;\\
\mathbf{v_5} &= 2t\partial_x - xu\partial_u;\\
\mathbf{v_6} &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u;
\end{aligned}$$

mais a álgebra de dimensão infinita

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x,t)\partial_u.$$

Partindo do fluxo dos campos vetoriais, $\exp(\epsilon\mathbf{v}_i)(x,t,u) = (\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u})$, podemos obter a ação dos subgrupos de simetria de um parâmetro da equação do calor

$$
\begin{aligned}
&G_1 : (x+\epsilon, t, u);\\
&G_2 : (x, t+\epsilon, u);\\
&G_3 : (x, t, e^{\epsilon}u);\\
&G_4 : (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, u);\\
&G_5 : (x+2\epsilon t, t, u\exp(-\epsilon x-\epsilon^2 t));\\
&G_6 : \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t}t, u\sqrt{1-4\epsilon t}\exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right)\right);\\
&G_\alpha : (x, t, u+\epsilon\alpha(x,t)).
\end{aligned}
$$

Se $f(x,t)$ for uma solução da equação do calor podemos utilizar a ação dos grupos acima para obter outras soluções à partir de f

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= f(x-\epsilon, t);\\
u^{(2)} &= f(x, t-\epsilon);\\
u^{(3)} &= e^{\epsilon}f(x,t);\\
u^{(4)} &= f(e^{-\epsilon}x, e^{-2\epsilon}t);\\
u^{(5)} &= e^{-\epsilon x+\epsilon^2 t}f(x-2\epsilon t, t);\\
u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon t}}\exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1+4\epsilon t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\epsilon t}, \frac{t}{1+4\epsilon t}\right);\\
u^{(\alpha)} &= f(x,t)+\epsilon\alpha(x,t).
\end{aligned}
$$

G_1 e G_2 evidenciam a simetria de translação temporal e espacial, G_3 e G_α são simetrias que refletem a linearidade da equação, G_4 é uma simetria de escala e G_5 pode ser interpretada como uma certa mudança de referencial inercial. G_6 não tem uma interpretação direta mas é interessante notar que se $f(x,t)$ for uma constante $u^{(\alpha)}$ é uma gaussiana.

Capítulo 5

Simetrias e E.D. Fracionárias

No artigo [1] Buckwar e Luchko obtiveram um grupo de um parâmetro de simetrias de escala para uma equação diferencial fracionária de difusão. No lugar do método do prolongamento, estes autores fizeram uso do método de similaridade, obtendo ao final uma equação diferencial fracionária reduzida, que depende apenas de uma variável invariante à transformações de escala. A equação estudada foi um caso específico da EFP fracionária no tempo

$$ {}_0D_t^\alpha u(x,t) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{5.1} $$

onde a derivada fracionária é a de Riemann-Liouville.

Assume-se a existência de um grupo unidimensional de transformações G isomorfo à $\mathbb{R}$ que age sobre a variedade das variáveis $U \times X \times T$ tal que; $g \in G$ e $\forall x \in X,\ t \in T,\ u \in U$ temos $g \bullet (x,t,u) = (\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u}) = (e^g x, e^{bg}t, u)$ com $b \in \mathbb{R}$. Substituíndo diretamente na equação diferencial, onde $e^g = \lambda > 0$, obtemos para a parte espacial

$$ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{t}) = \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{x}^2}\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{t}) \tag{5.2} $$

e para a parte temporal, onde $n-1 < \alpha < n\ n \in \mathbb{N}$

$$ \begin{aligned} {}_0D_t^\alpha \widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{t}) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{s})\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\lambda^{nb}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{d\widetilde{t}^n}\int_0^{\widetilde{t}/\lambda^b} (\widetilde{t}\lambda^{-b}-s)^{n-\alpha-1}\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{s})\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\lambda^{b\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{d\widetilde{t}^n}\int_0^{\widetilde{t}} (\widetilde{t}-\tau)^{n-\alpha-1}\widetilde{u}(\widetilde{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \lambda^{b\alpha}{}_0D_{\widetilde{t}}^\alpha \widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{t}) \end{aligned} \tag{5.3} $$

.

Combinando as derivadas na equação diferencial

$$ \lambda^{b\alpha}{}_0D_{\widetilde{t}}^\alpha \widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{t}) = \lambda^2 K\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{x}^2}\widetilde{u}(\widetilde{x},\widetilde{t}), \tag{5.4} $$

para cada α o grupo G é um grupo de simetrias de escala desde que $b = \frac{2}{\alpha}$.

O invariante do grupo G é então $z(x,t) = xt^{-1/b} = xt^{-\alpha/2}$. Considerando então que $u(x,t) = \eta(z)$ pode-se obter uma equação diferencial fracionária ordinária para as soluções invariantes por escala

$$P_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}\eta(z) = K\frac{\partial^2}{\partial z^2}\eta(z) \tag{5.5}$$

onde $P_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}$ é o operador fracionário de Ederly-Kober[1].

Os detalhes da obtenção da equação reduzida e suas soluções podem ser encontrados em [1].

Capítulo 6

Conclusão

Não foi ainda possível desenvolver um método geral para obter os grupos de simetria de equações diferenciais fracionárias. Mais especificamente, num primeiro momento pensamos em construir um espaço de jet para derivadas fracionárias para tentar uma generalização direta do método do prolongamento, mas isso mostrou-se inviável.

Inspirados pela extensão desenvolvida em [11] para equações íntegro-diferenciais tentamos usar o mesmo método de separar a parte puramente diferencial da parte integral, tratando a parte diferencial pelo método do prolongamento e desenvolver um critério de invariância para a parte integral. O problema encontrado foi em como intepretar a ação do grupo sobre as variáveis mudas dentro da integração. Em [11] a integração é feita sobre a variedade das variáveis independentes onde a ação do grupo está bem definida enquanto este não é o caso para operadores integrais. Trabalho nesta direção se encontra em andamento.

Bibliografia

[1] Buckwar, E.; Luchko, Y.; J. of Mathematical Analysis and Applications **227**, 81-97, (1998).

[2] Miller, K.S.; Ross, B.; *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* John Wiley & Sons, INC., Nova Iorque, 1993.

[3] Samko, SG.; Kilbas, A.A.; Marichev, O.I.; *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdã, 1994.

[4] Podlubny, I.; *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[5] Denisov, S.I.; Horsthemke, W.; Hänggi, P.; Europhys. J. B. **68**, 567 (2009).

[6] Metzler, R.; Klafter, J.; Physics Reports **339**, 1-77, (2000)

[7] Moshrefi-Torbati, M.; Hammond, J.K.; J. Franklin Inst. Vol. 335B, No 6, pp. 1077-1086, (1998).

[8] Molz III, F. J.; Fix III, G. J.; Silong Lu Applied Mathematics Letters **15**, 907-911, (2002).

[9] Olver, P.J.; *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer-Verlag, Nova Iorque, Segunda edição 1993.

[10] Bluman, G. W.; Kumei, S.; *Symmetries and Differential Equations.* Springer-Verlag, Nova-Iorque, Segunda edição 1989.

[11] Zawistowski, Z. J.; Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine **43**, 263-270, (2002)