

## Simulação da onda superficial provocada pelo fechamento de comportas utilizando uma aproximação inercial da Equação de Saint-Venant

*Surface waves caused by gates closure simulation with an inertial approximation of Saint-Venant Equation*

Leonardo Romero Monteiro, Fernando Mainardi Fan, Walter Collischonn  
e Edith Beatriz Camaño Schettini

Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil  
leonardoromeromonteiro@gmail.com, fernando.fan@ufrgs.br; collischonn@iph.ufrgs.br, bcamano@iph.ufrgs.br

Recebido: 15/06/15 - Revisado: 24/07/15 - Aceito: 28/08/15

### RESUMO

Na simulação numérica de escoamento, a simplificação da equação dinâmica pode ser útil, tanto em relação à estabilidade da solução numérica quanto ao ganho computacional. Tendo em vista esta preocupação, este trabalho avalia o uso de um modelo obtido ao se desconsiderar o termo advectivo da equação de Saint-Venant, denominado de modelo inercial local, ou simplesmente modelo inercial, na simulação de escoamentos influenciados por fechamentos de comportas, com enfoque na onda superficial provocada por estes fechamentos. Os resultados do modelo inercial são comparados com os resultados do modelo HEC-RAS, que utiliza uma solução da equação de Saint-Venant completa, a fim de se verificar no que a simplificação do termo convectivo acarreta. Os resultados obtidos com o modelo inercial se assemelharam aos do modelo HEC-RAS dependendo do tipo de onda formada, da vazão, e da altura do escoamento. Para escoamentos com a mesma vazão e altura, a validade do modelo inercial pode ser identificada utilizando adimensionais que relacionam características da onda com a altura do escoamento. Entretanto, para escoamentos expressivamente diferentes, estes adimensionais não indicaram a validade da simulação pelo modelo inercial, devendo-se analisar o peso dos termos da equação dinâmica. Observa-se que o código do programa com a aproximação inercial possui menos oscilações numéricas, quando se adota uma malha grosseira, do que o código do programa com as equações completas. Com o aumento da declividade do canal não foi identificado se importância do termo advectivo da equação dinâmica é maior ou menor. A partir deste trabalho, acredita-se que os testes realizados para ondas geradas pelo fechamento de comportas podem se estender para ondas superficiais formadas por outras fontes.

**Palavras chave:** Modelo Inercial. Comporta. Onda Superficial. HEC-RAS

### ABSTRACT

In a numerical flow simulation, the simplification of partial equations can be useful for numerical solution stability and computational effort. This study evaluates the model obtained from the Saint-Venant equation simplification, which ignores the advective term, called inertial model in flow simulation influenced by closing gates, focusing on the surface wave caused by this closure. Inertial model results are compared with HEC-RAS model results, which use full Saint-Venant equation. For different problems, an inertial model can be appropriately used depending on wave type, flow rate and flow height. For similar flows (similar flow rate and height) the simulation validity can be verified by wave steepness, but for different flows, wave steepness should not be used and analysis of dynamic equation terms should be done. It is observed that inertial approximation code has less numerical oscillations than the HEC-RAS code. Channel slope does not indicate if the advective term is or not important. It is thought that waves generated by closing gate tests may be extend to surface waves generated by other sources.

**Keywords:** Inertial Model. Gate. Surface Wave. HEC-RAS

## INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de fenômenos hidráulicos com o auxílio das aproximações discretas de derivadas e integrais tem crescido com a evolução da computação. E mesmo que a evolução do processamento de informação dos computadores tenha crescido exponencialmente nos últimos anos, ainda existe a preocupação com o custo computacional da modelagem numérica.

Como exemplo, canais de irrigação são quase sempre simulados considerando a hipótese de escoamento permanente; porém, existem situações em que os efeitos dinâmicos são importantes, como no caso de abertura ou fechamento de comportas e de início ou fim de bombeamento. Os autores Litrico et al. (2005) validaram com sucesso uma metodologia de controle de canais de irrigação baseada na equação de Saint-Venant, mostrando a aplicabilidade deste tipo de equação para a problemática da distribuição de água para irrigação.

Um dos maiores desafios na dinâmica dos fluidos computacional é encontrar aproximações para os termos convectivos que não introduzam distorções na solução numérica, na forma de difusão e/ou dispersão artificial (FORTUNA, 2012). Assim, os termos não lineares de equações dinâmicas de escoamentos, que constituem a parcela hiperbólica e convectiva da equação, podem provocar soluções indesejadas caso não se realize uma análise da estabilidade da solução numérica.

Para a simulação de escoamentos, a simplificação da equação dinâmica pode ser útil, tanto em relação à estabilidade da solução numérica quanto ao ganho computacional. Em muitos casos como em sistemas de alerta em tempo real, em sistemas de controle de irrigação, ou em modelos hidrológicos-hidráulicos capazes de representar estruturas hidráulicas, o desejo é que as simulações forneçam soluções com baixo custo computacional, pois resultados rápidos são necessários.

Em vista desta preocupação, este trabalho avalia o uso de um modelo inercial obtido a partir da simplificação das equações de Saint-Venant proposto por Bates, Horritt e Fewtrell (2010), para a simulação de escoamentos influenciados pelo fechamento de comportas, com enfoque na amplitude e período da onda superficial provocada por este fechamento.

## METODOLOGIA

A seguir, são apresentadas as particularidades do método inercial, uma breve revisão sobre ondas e sobre comportas.

### Equacionamento do modelo inercial

Um dos modelos matemáticos mais utilizados para simular escoamentos unidimensionais é a equação de Saint-Venant, definida pela equação dinâmica:

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} + \underbrace{\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{h} \right)}_{\text{aceleração advectiva}} + \underbrace{gA \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{pressão hidrostática}} = \underbrace{gAS_0}_{\text{declividade de fundo}} - \underbrace{gAS_f}_{\text{declividade da linha de energia}} \quad (1)$$

junto à equação da continuidade

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

em que  $Q$  é a vazão,  $t$  é o tempo,  $A$  é a área molhada da seção transversal do rio,  $h$  é a profundidade da lâmina de água,  $B$  é a largura do canal,  $x$  é a distância longitudinal ao escoamento do rio,  $g$  representa a aceleração da gravidade,  $S_0$  é a declividade do fundo do rio e  $S_f$  é a declividade da linha de energia do escoamento.

Nota-se que a equação da continuidade (eq. 2) não possui um termo que considera as contribuições laterais no escoamento. Assim as hipóteses para adoção destas equações são: (i) que a seção transversal é sempre retangular, (ii) que não existem contribuições laterais ao escoamento, (iii) que a pressão pode ser considerada como sendo apenas hidrostática, e (iv) que não existem variações significantes da massa específica nem da viscosidade do fluido ao longo do tempo e do espaço. É possível encontrar soluções utilizando aproximações numéricas destas equações, pois estas duas constituem um sistema de duas equações com duas incógnitas ( $Q$  e  $h$ ). Nota-se que  $A$  não foi considerada como incógnita, pois  $A = f(h)$ .

Os autores Fan et al. (2014) realizaram uma breve revisão sobre diferentes simplificações da equação de Saint-Venant e avaliaram o método em que as forças convectivas não são consideradas. Esta simplificação é denominada na literatura de modelo inercial local, ou mais simplesmente modelo inercial (BATES; HORRITT; FEWTRELL, 2010) e a equação do movimento considerada é

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gAS_0 - gAS_f, \quad (3)$$

em que foi desconsiderado o termo advectivo.

De acordo com Cunge, Holly e Verwey (1980), o termo de perda de energia pode ser aproximado utilizando a equação de Manning, onde o próprio termo de perda de energia é a declividade da linha de energia. Assim o modelo inercial é reescrito como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gAS_0 - gA \frac{Q|Q|n^2}{A^2 R_h^{4/3}}, \quad (4)$$

em que  $R_h$  é o raio hidráulico da seção transversal e  $n$  é o coeficiente de Manning. O artifício do produto  $Q|Q|$  permite dar a direção da força de resistência do fundo, podendo representar ondas de retorno provocadas pelo fechamento de comportas e remansos.

A simplificação do termo convectivo da equação dinâmica reduz os termos não lineares a serem resolvidos. Isso implica na redução da complexidade dos cálculos, pois os termos não lineares geralmente aumentam a instabilidade numérica da solução.

A pergunta a se responder é: quais são os limites impostos ao modelo quando se assume esta simplificação? Qual é a magnitude do erro ao se desconsiderar os termos não lineares, como na equação 3?

## Condições de contorno e iniciais

Como condição de contorno para aplicação do modelo inercial é necessário que se tenha uma vazão ou altura de lâmina de água na seção inicial e final do trecho simulado. Aconselha-se, por questões de estabilidade, que se adote uma vazão para a seção inicial e uma profundidade para seção final. A vazão de entrada é prescrita, ou seja, é fornecida pelo usuário e a condição de saída é a de saída livre ( $\partial h / \partial x = 0$ ).

As condições iniciais são obtidas pela simulação do trecho de interesse como escoamento permanente a partir de uma vazão ou profundidade pré-estabelecida. Assim, como condição inicial é necessária a vazão e a altura da lâmina de água para todas as seções do trecho.

## Ondas superficiais

A diferença do comportamento matemático para diferentes tipos de ondas é um fato estudado intensamente na engenharia oceânica, naval e costeira. Nos estudos de ondas, equações analíticas foram propostas para cada tipo específico de onda. Nos últimos anos, a modelagem numérica ganhou força e também é utilizada para a simulação de ondas, como se pode observar em Gotoh, Okayasu e Watanabe (2013). Para estas simulações normalmente são utilizadas as equações de Saint-Venant ou as de Navier-Stokes em conjunto com a equação da continuidade.

Ondas de diferentes comprimentos ( $\lambda$ ) e períodos ( $T$ ) são formadas ou propagadas por mecanismos físicos diferentes. As ondas mais curtas ( $T \lesssim 0,1$  s) são dominadas pela tensão superficial, ondas de tamanho intermediário são dominadas por efeitos gravitacionais, e as ondas mais longas ( $T > 24$  horas) são governadas pela aceleração de Coriolis (NIELSEN, 2009).

A propagação da onda depende do adimensional referente à profundidade relativa  $h/\lambda$ . A proximidade com o fundo do canal faz com que as ondas se propaguem de diferentes formas, podendo se definir as regiões de águas profundas ( $h/\lambda \geq 0,5$ ), águas intermediárias ( $0,5 > h/\lambda \geq 0,05$ ) e águas rasas ( $h/\lambda < 0,05$ ) (LE MÉHAUTÉ, 1976).

Em relação ao movimento, as ondas podem ser diferenciadas em lineares e não lineares. Para representar analiticamente ondas não lineares, são utilizadas as teorias da onda cnoidal e da onda solitária. A figura 1 apresenta os limites de linearidade de uma onda em função da sua altura ( $h_{onda}$ ).

Mei (1983) menciona que o termo “linearidade da onda” infere que, no desenvolvimento analítico, a linearização das condições de contorno cinemática e dinâmica eliminam os termos não lineares. Esta linearização é válida para as condições impostas pelos seguintes adimensionais:

$$\mu \equiv kh \ll 1 \quad e \quad \varepsilon \equiv \frac{h_{onda}}{2h} \ll 1, \quad (5)$$

em que  $k$  é o número de onda, definido como  $k = 2\pi/\lambda$ . Também, entende-se como onda não linear a onda que não pode ser mais representada pela teoria da onda de Stokes de primeira ordem.

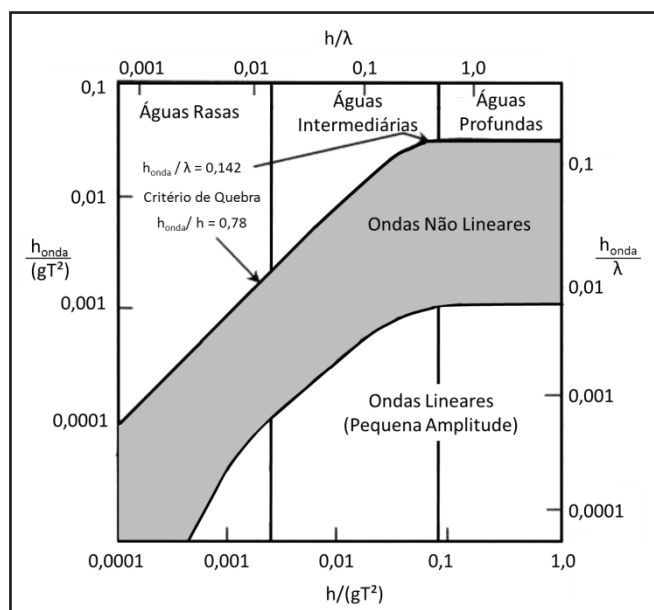


Figura 1 - Limites de linearidade da onda, em função de sua altura ( $h_{onda}$ ) e da lâmina de água ( $h$ )  
Fonte: Adaptado de Le Méhauté (1976)

De acordo com Kamphuis (2010), um dos grandes responsáveis pela não linearidade de ondas é a amplitude. Para amplitudes pequenas, a teoria linear pode ser adequadamente utilizada. Entretanto, com o aumento da amplitude, a teoria não linear passa a dominar o escoamento mesmo quando ocorre a quebra da onda.

Ou autores Dean e Dalrymple (1991) discutem a validade da teoria de ondas não lineares e mencionam que, surpreendentemente, existem casos em que a teoria linear pode se adequar às ondas não lineares provenientes de águas intermediárias, mesmo para ondas em que a condição imposta pela relação da equação 5 não é atendida.

Ainda, de acordo com Marshall et al. (1997) e Monteiro (2014), modelos que simplificam a pressão aproximando o comportamento da pressão como somente hidrostática, que é o caso da equação de Saint-Venant, não representam adequadamente ondas provenientes de águas profundas e podem fornecer resultados insatisfatórios para águas intermediárias.

## Comportas

Diversas publicações apresentam estudos sobre o efeito de comportas no escoamento. Nos anos setenta alguns autores apresentaram desenvolvimentos e soluções analíticas da problemática de comportas (CAULK, 1976; ISHII; IMAICHI; TAKEMOTO, 1977; RITCHIE, 1976). Nas últimas décadas foram publicados estudos numéricos e experimentais que apresentam a influência de diversos fenômenos no escoamento com comportas, como o da turbulência (CASSAN; BELAUD, 2012; KIM, 2007; LIN; YEN; TSAI, 2002; ROTH; HAGER, 1999).

Ainda assim, muito pouco foi desenvolvido sobre o estudo de comportas dinâmicas, ou seja, quando estas estão em movimento. E justamente um dos efeitos que a dinâmica das comportas pode provocar é o aparecimento de ondas superficiais.

Este é um problema típico presente em sistemas de comportas.

Na modelagem matemática, as comportas geralmente são simuladas como condição de contorno do trecho de rio discretizado, e podem ser consideradas como condições de entrada, de saída ou ainda como condição de contorno interna em modelos. De acordo com USACE-HEC (2010), a operação da comporta tipo eclusa (sluice gate) (Figura 2) é representada pela expressão:

$$Q = CWB\sqrt{2gH}, \tag{6}$$

em que  $C$  é o coeficiente de descarga da comporta (normalmente de 0,5 a 0,7),  $W$  e  $B$  são a largura e a altura de abertura da comporta e  $H$  é a diferença das cotas das lâminas de água antes da comporta ( $Z_U$ ) e depois da comporta ( $Z_D$ ).

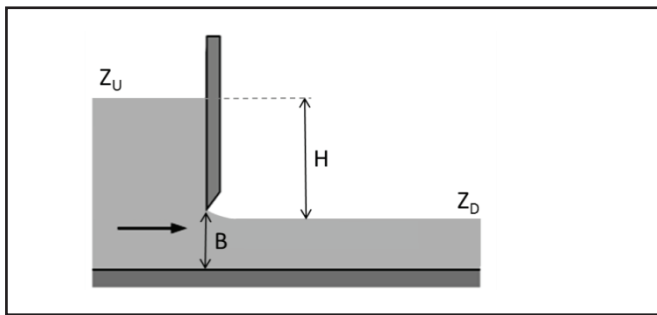


Figura 2 – Esquema de uma comporta tipo eclusa

### Solução numérica do modelo inercial

A solução numérica do modelo inercial utilizada neste trabalho foi implementada na linguagem Fortran 90 usando o compilador GNU Compiler Collection. Foi utilizado um esquema de malha deslocada, onde a vazão é calculada nos pontos intermediário da malha como  $Q_{i+1/2}$  e a profundidade do canal em cada nó da malha como  $h_i$ .

O arranjo deslocado possui a vantagem de reduzir significativamente as oscilações numéricas na pressão (representada pela altura da pressão hidrostática,  $h$ ) e na vazão ( $Q$ ), além de melhorar a convergência das iterações computacionais (GOTOH; OKAYASU; WATANABE, 2013).

Na equação dinâmica (eq. 4), para aperfeiçoar o código, aumentar a estabilidade, e reduzir oscilações espúrias da profundidade, os autores Almeida et al. (2012) propuseram uma aproximação da derivada temporal, adotando um método semi-implícito, com possibilidade de isolamento dos termos em  $k + 1$ . Este esquema foi adotado no presente trabalho. A derivada temporal  $\partial Q/\partial t$  é aproximada utilizando um método baseado no esquema difusivo de Lax, que introduz uma difusão numérica pouco expressiva que ajuda na estabilidade das soluções, dado por:

$$Q_{i+1/2}^{k+1} = \theta Q_{i+1/2}^k - \frac{1-\theta}{2} (Q_{i-1/2}^k + Q_{i+3/2}^k) + \Delta t f(Q_{i+1/2}^{k+1}), \tag{7}$$

em que  $\Delta t$  é o intervalo de tempo,  $i$  é o índice referente à discretização espacial,  $k$  é o índice referente à discretização tem-

poral e  $\theta$  é um fator ponderador, em que se  $\theta = 1$  se obtém um esquema semi-implícito, e se  $\theta = 0$  o esquema de Lax original é representado. No presente trabalho foi utilizado o valor de  $\theta = 0,9$ , baseado nos resultados apresentados por Almeida et al. (2012).

Foi empregado um esquema de primeira ordem para as derivadas espaciais, da forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cong \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x}, \tag{8}$$

em que  $\Delta x$  é a variação da distância longitudinal ao escoamento do rio. Assim, pode-se discretizar a equação 4 da forma:

$$\frac{Q_{i+1/2}^{k+1} - [\theta Q_{i+1/2}^k - \frac{1-\theta}{2} (Q_{i-1/2}^k + Q_{i+3/2}^k)]}{\Delta t} + g A_{i+1/2}^k \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} = g A_{i+1/2}^k S_0 - g A_{i+1/2}^k \frac{|Q_{i+1/2}^k| Q_{i+1/2}^{k+1} (n)^2}{(A_{i+1/2}^k)^2 (R h_{i+1/2}^k)^{4/3}} \tag{9}$$

Com um pouco de algebrismo, isola-se a incógnita  $Q_{i+1/2}^{k+1}$  e obtém-se:

$$Q_{i+1/2}^{k+1} = \frac{[\theta Q_{i+1/2}^k - \frac{1-\theta}{2} (Q_{i-1/2}^k + Q_{i+3/2}^k)] + g \Delta t A_{i+1/2}^k (S_0 - \frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x})}{1 + \frac{g \Delta t |Q_{i+1/2}^k| (n)^2}{A_{i+1/2}^k (R h_{i+1/2}^k)^{4/3}}} \tag{10}$$

Na equação 10 existe um termo de  $h_{i+1/2}^k$  implicitamente na área  $A_{i+1/2}^k$ . Como a profundidade é calculada apenas nos nós de subíndice  $i$  inteiro, necessita-se de uma adaptação para esta variável. Foi utilizada a adaptação da área para que esta seja considerada nos pontos intermediários da malha, em que:

$$A_{i+1/2}^k = \max[A_i^k; A_{i+1}^k]. \tag{11}$$

Para a discretização da equação da continuidade (eq. 2), considera-se uma aproximação de Euler implícita, em que as derivadas são aproximadas por:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \cong \frac{A_i^{k+1} - A_i^k}{\Delta t}, \tag{12}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \cong \frac{Q_{i+1/2}^{k+1} - Q_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x}, \tag{13}$$

formando a aproximação discreta

$$\frac{A_i^{k+1} - A_i^k}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1/2}^{k+1} - Q_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x} = 0. \tag{14}$$

Isolando a incógnita temos

$$A_i^{k+1} = A_i^k - \Delta t \frac{Q_{i+1/2}^{k+1} - Q_{i-1/2}^{k+1}}{\Delta x}. \tag{15}$$

Os valores da vazão no tempo  $k + 1$  são calculados com a equação dinâmica (eq. 10). Por fim, calculam-se os valores do raio hidráulico ( $R h_{i+1/2}^{k+1}$ ) e da profundidade ( $h_i^{k+1}$ ) para o próximo tempo, já que os valores das áreas já são conhecidos ao se utilizar a equação 15.

### Critério de Convergência

A condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é utilizada como critério de convergência para métodos eulerianos e explícitos. Esta condição indica que a distância percorrida pelas partículas de fluido seja maior do que um  $\Delta x$  em um passo de tempo. Isto implica que

$$\frac{|u_{m\acute{a}x}|}{\Delta x/\Delta t} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq |u_{m\acute{a}x}|. \quad (16)$$

em que  $u_{m\acute{a}x}$  é a velocidade máxima do escoamento e  $\Delta x/\Delta t$  é a velocidade da malha. Bates, Horritt e Fewtrell (2010) afirmam que, para casos de águas rasas, quando o termo advectivo é ignorado se tem que

$$u_{m\acute{a}x} = \sqrt{gh}, \quad (17)$$

ou seja,  $u_{m\acute{a}x}$  refere-se à celeridade de ondas com pequena amplitude. A equação 16 fornece uma condição necessária, mas não suficiente, para produzir simulações mais estáveis, podendo ser escrita como

$$\Delta t_{m\acute{a}x} = \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{gh}}, \quad (18)$$

onde  $\alpha$  é um coeficiente que varia de 0,2 a 0,7, onde 0,2 é utilizado para canais com planície de inundação expressiva e 0,7 para canais sem planície de inundação.

### EXPERIMENTOS REALIZADOS

O modelo inercial foi verificado por Fan et al. (2014) para rios com diferentes declividades, com barragem, remanso e com controle da vazão a jusante. Os testes foram bem sucedidos se comparados aos resultados obtidos com o programa HEC-RAS, que utiliza uma solução das equações unidimensionais completas de Saint-Venant com a aproximação de Preissmann para as derivadas (USACE-HEC, 2010).

No presente estudo não foram realizadas validações com modelos experimentais ou estudos de casos reais. Para comparar os resultados das aplicações do modelo inercial, as mesmas simulações foram realizadas com o HEC-RAS. Ou seja, o trabalho possui interesse em identificar se o modelo inercial se compara a um modelo com a equação completa de Saint-Venant. A verificação do modelo inercial ocorreu com testes focados em ondas superficiais provocadas pelo fechamento de comportas.

Quatro testes foram realizados para verificar o uso do modelo inercial para a problemática de ondas causadas por comportas. Foram testados diferentes comprimentos de ondas (Teste 1), diferentes discretizações espaciais (Teste 2), diferentes declividades do canal (Teste 3) e diferentes vazões (Teste 4). Os detalhes e os resultados de cada um dos testes são apresentados a seguir. Todos os testes foram realizados para canais retilíneos, com seção retangular e vazão de entrada constante.

### Teste 1: Influência da distância entre as comportas

Duas comportas que fecham simultaneamente em um canal foram reproduzidas (Figura 3). Neste teste, foram simulados quatro casos diferentes (1A, 1B, 1C e 1D) variando somente a distância entre as comportas ( $L_c$ ). Na tabela 1 são apresentados os parâmetros físicos e numéricos adotados.

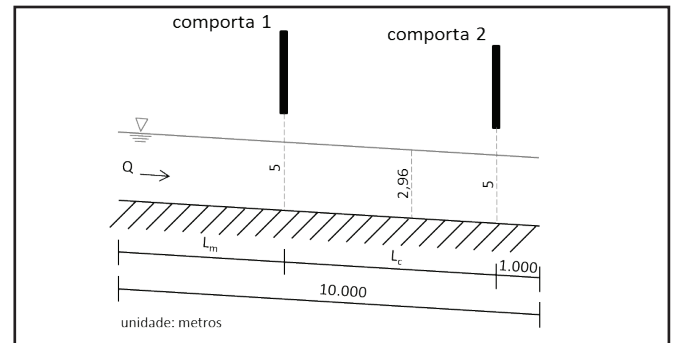


Figura 3 – Configuração das simulações do teste 1

Tabela 1 – Parâmetros do teste 1

$\Delta x = 20 \text{ m}$	$S_0 = 0,0001 \text{ m/m}$	$C = 0,5$
$L = 10 \text{ km}$	$Q = 400 \text{ m}^3/\text{s}$	$L_c = 5.000 \text{ m}$ (Caso 1A)
$n = 0,03$	$\Delta t = 1 \text{ s}$	$L_c = 1.000 \text{ m}$ (Caso 1B)
$b = 200 \text{ m}$	$t_s = 240 \text{ min}$	$L_c = 500 \text{ m}$ (Caso 1C)
$h_0 = 2,96 \text{ m}$	$T_f = 5 \text{ m/min}$	$L_c = 100 \text{ m}$ (Caso 1D)

em que  $L$  é o comprimento total do rio,  $b$  é a largura do rio,  $h_0$  é a profundidade da lâmina de água inicial,  $t_s$  é o tempo simulado total,  $t_f$  é a velocidade de fechamento da comporta e  $L_m$  é a distância entre o início do canal e a primeira comporta, calculada como  $L_m = 9.000 \text{ m} - L_c$ .

Como o comprimento da onda formada depende unicamente de  $L_c$ , diferentes tipos de ondas foram geradas para cada caso. A tabela 2 apresenta as características de cada onda para cada caso simulado, em que  $h_{onda}^*$  é a altura da primeira onda formada. Nos resultados, a semelhança entre a amplitude e o período da onda de cada caso variou expressivamente com a distância entre as comportas (Figura 4).

Tabela 2 – Características da onda do teste 1

Caso	$\mu; \varepsilon$ (eq. 5)	$\lambda$ (m)	$h_{ONDA}^*$ (m)	$T$ (min)
1A	$2 \times 10^{-3};$ $1 \times 10^{-1}$	10.000	$\approx 0,6$	$\approx 28$
1B	$1 \times 10^{-2};$ $1 \times 10^{-1}$	2.000	$\approx 0,7$	$\approx 6,5$
1C	$2 \times 10^{-2};$ $1 \times 10^{-1}$	1.000	$\approx 0,7$	$\approx 3,5$
1D	$9 \times 10^{-2};$ $7 \times 10^{-2}$	200	$\approx 0,4$	$\approx 0,4$



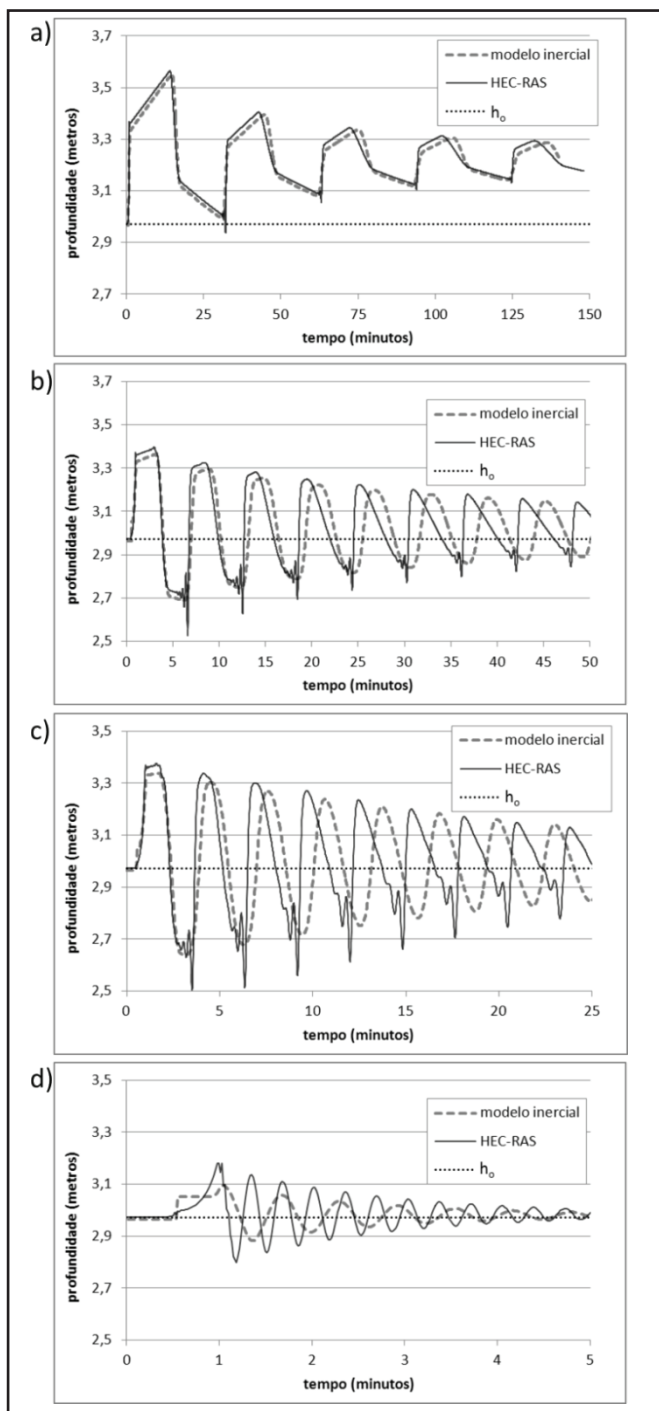


Figura 4 – Resultados do modelo inercial e do HEC-RAS no ponto localizado 20 metros a montante da comporta 2, para espaçamentos entre as comportas de a)  $L_c=5.000$  m, b)  $L_c=1.000$  m, c)  $L_c=500$  m, d)  $L_c=100$  m

Observou-se que quando as comportas se fecham é criado um reservatório com uma onda que oscila. Esta onda, com comprimento  $2L_c$ , se dissipa ao longo do tempo por causa do atrito imposto pelo coeficiente de Manning, tanto no modelo inercial quanto no HEC-RAS.

Para o caso 1A (Figura 4a) os dois modelos representam alturas máximas e mínimas similares para todas as ondas, assim como os formatos e as frequências. Para o caso 1B (Figura 4b),

ainda existiu similaridade de amplitude, mas a diferença entre os períodos foi visualmente perceptível. O resultado do HEC-RAS apresenta ondas mais assimétricas e os resultados do modelo inercial deformam menos a onda. Ainda, observou-se oscilações no vale da onda nos resultados do HEC-RAS, ausentes no modelo inercial, as quais são discutidas posteriormente.

Um fenômeno similar ocorreu no caso 1C (Figura 4c), mas com a discrepância entre os resultados ocorrendo mais cedo. As oscilações nos resultados do HEC-RAS foram maiores, enquanto que estas não aparecem nos resultados do modelo inercial. Distinto de todos os outros casos, no caso 1D (Figura 4d) os resultados entre os modelos foram muito diferentes, tanto na amplitude quanto no período da onda. As oscilações no vale da onda dos resultados do HEC-RAS não foram mais observadas. Assim, considera-se que o modelo inercial não consegue representar adequadamente a onda formada no teste 1D.

Estes resultados indicam que o modelo inercial foi adequado até um determinado nível de não linearidade apontado pelo adimensional  $\mu$  (eq. 5). O caso A, com  $\mu$  na ordem de  $10^{-3}$ , forneceu bons resultados, enquanto que para os casos 1B e 1C, que possuem  $\mu$  da ordem de  $10^{-2}$ , foram fornecidos períodos de onda diferentes. Já para o caso 1D, que possui  $\mu$  da ordem entre  $10^{-2}$  entre  $10^{-1}$ , os resultados foram diferentes tanto para a altura da onda quando para o seu período.

### Teste 2: Sensibilidade da malha espacial

O teste de sensibilidade da malha, também conhecido como teste de convergência da malha, trabalha com a variação da discretização espacial com o intuito de identificar qual seria a malha ideal para a solução do problema. Além disso, e como principal ponto investigado neste teste, pretendeu-se identificar qual dos métodos avaliados é mais sensível à variação da malha do ponto de vista da estabilidade e da difusão numérica.

Para este teste foi utilizado como referência o caso 1B. Decidiu-se utilizar o caso 1B ao invés do 1A, que possui melhor aderência entre os resultados, para identificar se a diferença entre as profundidades é provocada por uma malha mal empregada ou pela simplificação que é o modelo inercial. A discretização espacial foi variada considerando 4 casos diferentes (Tabela 3). Como mostra a condição CFL para métodos explícitos, o caso 2D é instável.

Tabela 3 – Características do teste 2

Caso	$\Delta x$ (m)	$\Delta t$ (s)	CFL (eq. 16)	CFL Relativo (ao Caso 2A)
2A	40	1	0,1	1
2B	20	1	0,3	2
2C	10	1	0,5	4
2D	5	1	1,1	8

Os resultados do HEC-RAS e do modelo inercial são apresentados nas figuras 5 e 6, respectivamente. Para o HEC-RAS (Figura 5), as oscilações numéricas foram reduzidas com o refinamento da malha, até não aparecerem mais para um  $\Delta x=5$  m. Estas oscilações variaram nos resultados expressivamente,

demonstrando a sensibilidade da estabilidade deste modelo em relação à mudança da discretização da malha.

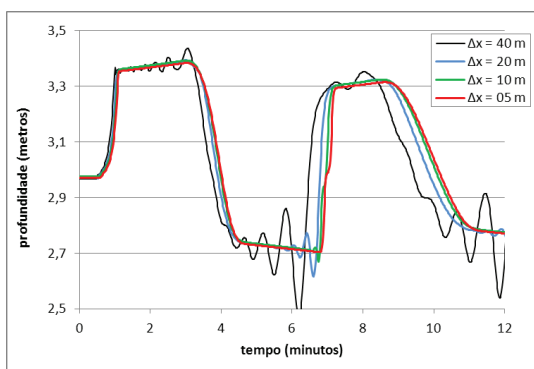


Figura 5 – Altura da lâmina de água em função do tempo, 40 metros a montante da comporta 2, no HEC-RAS, para diferentes  $\Delta x$

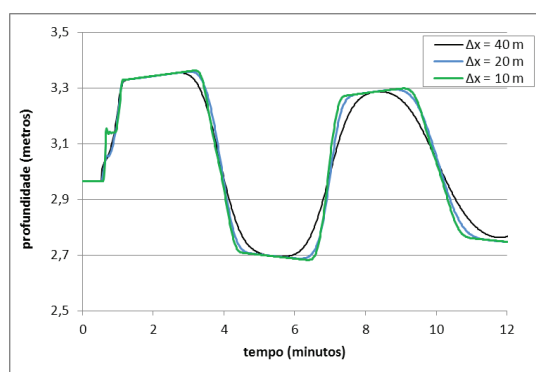


Figura 6 – Altura da lâmina de água em função do tempo, 40 metros a montante da comporta 2, no modelo inercial, para diferentes  $\Delta x$

No modelo inercial (Figura 6), as oscilações não apareceram, mesmo para a malha mais grosseira testada. O que foi possível de identificar foi a difusão numérica, quase que já eliminada para uma malha de  $\Delta x = 20$  m. Como previsto, a simulação de  $\Delta x = 5$  m divergiu, já que a condição imposta pela equação 18 ( $\Delta t_{\text{máx}} < 0,6$  s) não foi respeitada. Nota-se que o resultado do HEC-RAS não divergiu para esta malha possivelmente porque utiliza um esquema implícito mais estável.

Ainda, para a variação da discretização espacial, destaca-se que os resultados do modelo inercial e do HEC-RAS se assemelham mais para a discretização espacial pequena, de  $\Delta x = 10$  m (Figura 7), do que para  $\Delta x = 20$  m (Figura 4b) ou maior. Assim, quanto mais refinada for a malha espacial, melhor o modelo inercial representará o fenômeno, desde que respeitada a condição de estabilidade.

Assim, no Teste 2, identificou-se que a desconsideração do termo advectivo faz com que o modelo seja mais estável para malhas menos refinadas, evitando oscilações numéricas indesejáveis.

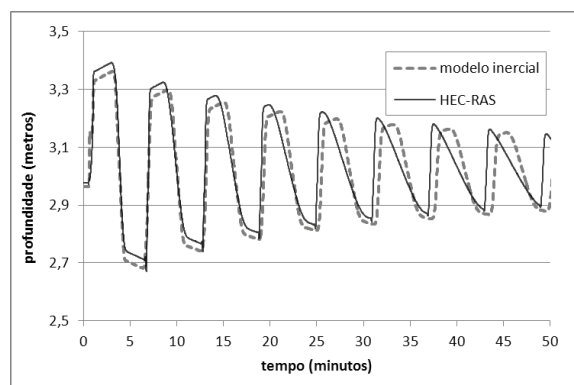


Figura 7 – Caso 2C: Altura da lâmina de água em função do tempo, 40 metros a montante da comporta 2, para  $\Delta x = 10$  m e declividade de  $0,0001$  m/m

### Teste 3: Influência da declividade do canal

Caso um escoamento seja subcrítico, o aumento da declividade do canal faz com que uma mesma vazão escoe com mais energia, aumentando o número de Froude, a velocidade do escoamento aumenta e a altura da lâmina de água diminui. A força gravitacional da equação 4, representada pelo primeiro termo à direita, aumenta, fazendo com que os outros termos da equação sejam modificados para compensar este aumento. As equações completas de Saint-Venant (eq. 1) possuem o termo advectivo que pode ser influenciado de alguma maneira ao se variar a declividade do canal. Portanto, a questão que motivou este teste foi: a importância do termo advectivo é mais relevante se a força gravitacional aumenta?

Para responder a esta pergunta foi realizado o teste tendo como base a simulação do caso 2C. Uma nova simulação foi realizada aumentando de declividade de  $0,0001$  m/m para  $0,001$  m/m e a altura da lâmina de água inicial,  $h$ , passou de  $2,96$  m para  $1,48$  m.

Comparando os resultados para as duas diferentes declividades (Figuras 7 e 8), o período da onda aumentou de  $6,5$  minutos para  $8,5$  minutos. O aumento no período foi provocado pela redução da celeridade, já que a altura da coluna de água é menor. Os valores máximos e mínimos foram representados

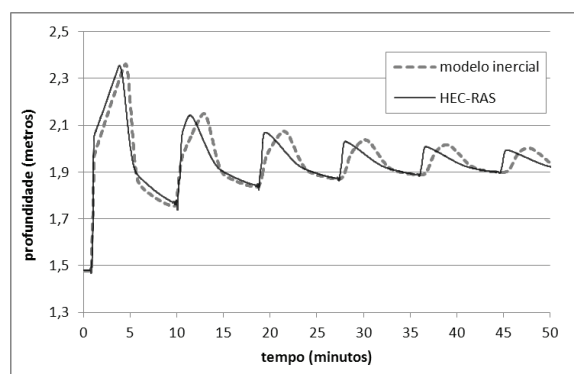


Figura 8 – Resultados de desnível a 40 metros a montante da comporta 2 no HEC-RAS e no modelo inercial para declividade de  $0,001$  m/m

mais adequadamente neste novo teste pelo modelo inercial, porém os tempos em que estes valores ocorrem não foram aprimorados, assim como a simetria da onda.

Acredita-se aqui que a importância do termo advectivo é diferente para uma maior declividade, mas não se pode concluir se esta importância é maior ou menor dependendo unicamente da declividade. A água entre as comportas forma um “reservatório” e caso a declividade aumentar, a água deixa de estar presente em todas as seções que representam este reservatório, necessitando de um modelo mais complexo de ondas para simular esta condição adequadamente. Por este motivo, outras simulações com declividades mais acentuadas não foram realizadas.

**Teste 4: Diferentes vazões**

O último teste foi realizado com base no Caso 1B. Duas novas vazões foram simuladas, formando três casos (Tabela 4), alterando-se apenas a própria vazão e a altura inicial do escoamento.

**Tabela 4 – Características do teste 4**

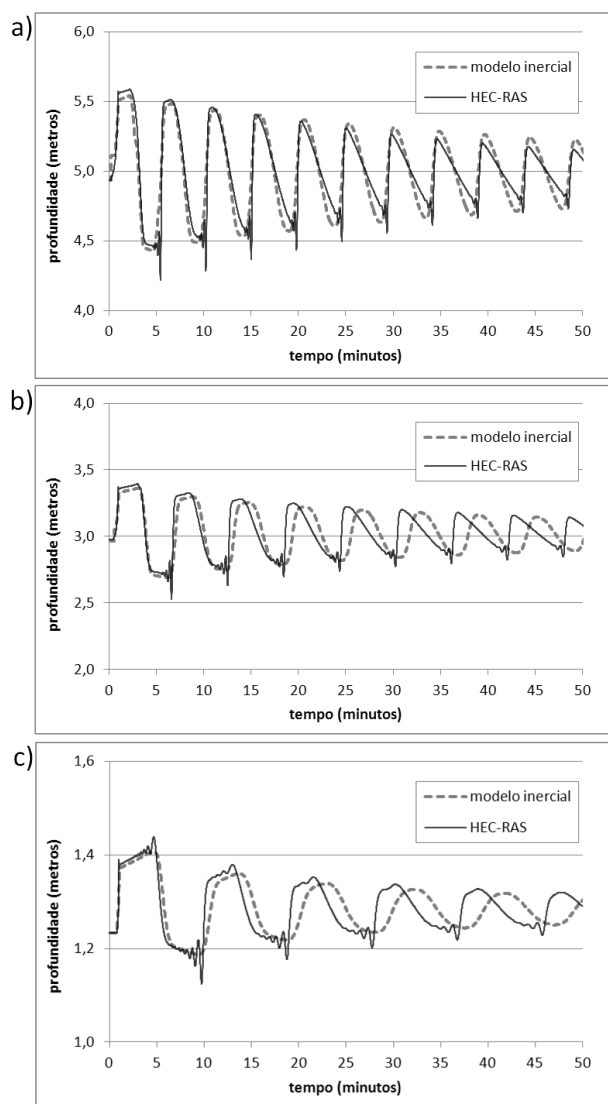
Caso	Q (m³/s)	h (m)
4A	800	4,93
4B	400	2,96
4C	100	1,23

Os resultados variaram expressivamente de acordo com a vazão imposta. Quanto maior foi a vazão, melhor foi a aproximação do modelo inercial. Diferente dos resultados obtidos no Teste 1, quanto menores foram as taxas de comprimento (Tabela 5), mais defasados foram os resultados entre os dois modelos (Figura 9). Isso sugere que, as taxas de comprimento podem ser utilizadas para identificar se a aproximação do modelo inercial para uma simulação é válida (de acordo com o HEC-RAS) somente quando se comparam simulações com alturas e vazões semelhantes.

**Tabela 5 – Parâmetros da onda do teste 4**

Caso	$\mu ; \varepsilon$ (eq. 5)	$\lambda$ (m)	$h_{ONDA}^*$ (m)	T (min)
4A	$2 \times 10^{-2}; 1 \times 10^{-1}$	2.000	$\approx 1,2$	$\approx 4,7$
4B	$9 \times 10^{-2}; 1 \times 10^{-1}$	2.000	$\approx 0,7$	$\approx 6,5$
4C	$4 \times 10^{-3}; 8 \times 10^{-2}$	2.000	$\approx 0,2$	$\approx 9,7$

Assim, acredita-se que quando as vazões e alturas são muito diferentes necessita-se de outra forma de análise. Neste caso, procurou-se investigar a validade do modelo inercial pela comparação entre os resultados do Teste 4 avaliando a relação de peso que os termos advectivo possuem dentro da própria equação de Saint-Venant. Foram utilizadas aproximações de primeira ordem para as derivadas espaciais e temporais para estimar os valores de cada termo da equação dinâmica (eq. 1) utilizando os resultados do HEC-RAS. São apresentados na



**Figura 9 – Resultados de desnível do HEC-RAS e do modelo inercial a 20 metros a montante da comporta 2 para o a) Caso 4A (Q=800 m³/s e h=4,93 m), b) Caso 4B (Q=400 m³/s e h=2,96 m), e c) Caso 4C ( Q=100 m³/s e h=1,23 m )**

**Tabela 6 – Peso dos termos da equação dinâmica em m³/s², Teste 4**

Caso	$\frac{\partial Q}{\partial t}$	$\frac{\partial(Q/A)^2}{\partial x}$	$gA \frac{\partial h}{\partial x}$	$gAS_0$	$gAS_f$
4A	$1 \times 10^2$	$2 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^2$	$1 \times 10^0$	$9 \times 10^{-1}$
4B	$5 \times 10^1$	$8 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^1$	$7 \times 10^{-1}$	$6 \times 10^{-1}$
4C	$2 \times 10^1$	$7 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-1}$	$3 \times 10^{-1}$	$2 \times 10^{-1}$

**Tabela 7 – Peso relativo do termo de pressão aos termos da equação dinâmica ao, Teste 4**

Caso	$\frac{gA \frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial t}}$	$\frac{gA \frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial(Q/A)^2}{\partial x}}$	$\frac{gA \frac{\partial h}{\partial x}}{gAS_0}$	$\frac{gA \frac{\partial h}{\partial x}}{gAS_f}$
4A	$1 \times 10^0$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^2$	$1 \times 10^2$
4B	$1 \times 10^0$	$5 \times 10^3$	$7 \times 10^1$	$7 \times 10^1$
4C	$2 \times 10^{-2}$	$9 \times 10^1$	$2 \times 10^0$	$2 \times 10^0$



tabela 6 os valores máximos dentro dos 50 minutos de evento simulado. A tabela 7 foi criada para a comparação entre todos os termos da equação de Saint-Venant com o termo de pressão, facilitando o entendimento da importância deste termo.

Entende-se que, mesmo que o valor máximo do termo advectivo tenha aumentado consideravelmente (de duas a cinco vezes), o termo de pressão aumentou três ordens de grandeza (mil vezes). Ou seja, o termo de pressão aumentou muito mais, fazendo com que o termo advectivo seja menos importante. A tabela 7 mostra que do caso 4A para o caso 4B o peso relativo dos termos de pressão em comparação com o termo de advecção é igual, mesmo os resultados do modelo inercial e do HEC-RAS se assemelhando mais no caso 4A do que no caso 4B. Isso sugere que o peso relativo entre os termos pode não ser adequado para identificar a validade do modelo inercial, e deve-se observar a magnitude do valor do termo de pressão, que no caso 4A é de  $1 \times 10^2$  e no caso 4B é de  $4 \times 10^1 \text{ m}^3/\text{s}^2$ .

Assim, para profundidades maiores de escoamentos, a aproximação inercial se aproxima mais dos resultados do HEC-RAS, sem se considerar a dispersão numérica do segundo.

### Análise da equação dinâmica para o Teste 1

Depois da análise dos resultados provenientes do Teste 4, ainda surge uma dúvida: será que os termos da equação dinâmica não definem a validade da aproximação inercial no Teste 1, igualmente como no Teste 4?

Para responder a esta pergunta, o Teste 1 também foi avaliado, para os casos extremos (Caso 1A e Caso 1D), levando em consideração os pesos da equação dinâmica (Tabela 8).

**Tabela 8 – Peso dos termos da equação dinâmica, Teste 1**

Caso	$\frac{\partial Q}{\partial t}$	$\frac{\partial(Q/A)^2}{\partial x}$	$gA \frac{\partial h}{\partial x}$	$gAS_0$	$gAS_f$
1A	$5 \times 10^1$	$5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^1$	$7 \times 10^{-1}$	$6 \times 10^{-1}$
1D	$4 \times 10^1$	$4 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^1$	$6 \times 10^{-1}$	$6 \times 10^{-1}$

As diferenças entre os termos dos casos 1A e 1D, apresentados na tabela 8 foram muito pequenas para se analisar qualquer informação relevante, não se aplicando este tipo de análise o Teste 1.

## CONCLUSÕES

No presente trabalho uma aproximação das equações de Saint-Venant desconsiderando o termo advectivo foi testada em um escoamento em canal com comportas dinâmicas. Os resultados desta aproximação foram comparados com o modelo HEC-RAS, onde uma solução das equações completas de Saint-Venant é usada. O fechamento das comportas provoca ondas superficiais que dependendo da distância entre as duas comportas, da vazão, da altura e da declividade do canal, podem formar ondas de diferentes comprimentos e amplitudes.

Os resultados mostraram que o modelo inercial se adapta ao problema dependendo do tipo de onda, da vazão e

da profundidade do escoamento. O Teste 2 demonstrou que o refinamento da malha influencia nos resultados, podendo melhorar os resultados do modelo inercial.

Também se observa que para as simulações realizadas o código do programa com a aproximação inercial possui menos oscilações numéricas do que o código do programa com as equações completas. Com o modelo inercial pode-se utilizar uma malha mais grosseira para realizar as simulações, no caso estudado de  $\Delta x = 20 \text{ m}$  em que a difusão numérica ainda não é expressiva.

Com o aumento da declividade do canal não se pode afirmar que a importância do termo advectivo é maior ou menor. O que pode se observar é o aumento do período da onda com o aumento da declividade e uma melhor adequação dos valores máximos e mínimos.

Para diferentes vazões, a taxa de comprimento não se mostrou adequada para identificar se a aproximação inercial é ou não adequada. Para esta tarefa, foi realizada uma análise do peso do termo advectivo em relação aos outros termos da equação de Saint-Venant. O aumento do termo de pressão tendeu a reduzir a importância do termo advectivo. Em situações com vazões semelhantes, onde existe pouca variação dos termos máximos da equação dinâmica, a taxa de comprimento se mostrou apropriada para identificar se a aproximação inercial é ou não adequada.

Todos os testes realizados neste trabalho são referentes a ondas provocados pelo fechamento de comportas. Mas, mesmo sabendo que o fechamento de comportas é apenas uma fonte de ondas superficiais, acredita-se que os resultados apresentados podem ser considerados para problemas gerais de ondas superficiais, mesmo que estas não tenham sido geradas pelos fenômenos considerados.

As simulações realizadas foram feitas com modelos que possuem diferentes aproximações das derivadas. As análises e conclusões não levaram em consideração que as diferentes aproximações pudessem fornecer resultados substancialmente diferentes, inviabilizando estas discussões.

Este trabalho também não pretendeu esgotar todas as aplicações possíveis do modelo inercial, mas sim se focar especialmente no problema da representação de fenômenos de ondas e como este modelo se desempenha na representação destas se comparado ao modelo HEC-RAS. Para identificar limites específicos de aplicação do modelo inercial em relação às ondas, é necessário um estudo abrangente e exaustivo para diferentes tipos de ondas e diferentes tipos de escoamentos.

Como continuação deste trabalho, sugere-se a validação do código para casos reais de fechamento de comporta. Também, observa-se potencial em analisar o desempenho do modelo inercial para a problemática de rompimentos de barragens.

## AGRADECIMENTOS E COMENTÁRIOS FINAIS

Os autores deste artigo gostariam de agradecer ao editor e aos revisores deste artigo que proporcionaram comentários importantes para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Interessados no código do Modelo Inercial usado neste trabalho, implementado em linguagem Fortran 90, podem entrar em contato com o primeiro autor deste artigo.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, G. A. M.; BATES, P.; FREER, J. E.; SOUVIGNET, M. Improving the stability of a simple formulation of the shallow water equations for 2-D flood modeling. *Water Resour. Res.*, v. 48, n. 5, p. 14, May 2012.

BATES, P. D.; HORRITT, M. S.; FEWTRELL, T. J. A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modeling. *J. Hydrol.*, v. 387, n. 1-2, p. 33-45, June 2010.

CASSAN, L.; BELAUD, G. Experimental and numerical investigation of flow under sluice gates. *J. Hydraulic Engin.*, v. 138, n. 4, 367-373, Apr. 2012.

CAULK, D. A. On the problem of fluid flow under a sluice gate. *Int. J. Eng. Sci.*, v. 14, n. 12, p. 1115-1125, 1976.

CUNGE, J. A.; HOLLY, F. M.; VERWEY, A. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman, London, U.K: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

DEAN R. G.; DALRYMPLE, R. A. *Water waves mechanics for engineers and scientists*. Singapore: World Scientific, 1991.

FAN, F. M.; PONTES, P. R. M.; PAIVA, R. C. D.; COLLISCHONN, W. Avaliação de um método de propagação de cheias em rios com aproximação inercial das equações de Saint-Venant. *RBRH: revista brasileira de recursos hídricos*, v. 19, n. 4, p. 137-147, out./dez. 2014.

FORTUNA, A. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2012.

GOTOH, H.; OKAYASU, A.; WATANABE, Y. *Computational wave dynamics*. Singapore: World Scientific, 2013.

ISHII, N.; IMAICHI, K.; TAKEMOTO, S. Water waves and structural loads caused by a periodic change of discharge from sluice-gate. *Bull. JSME*, v. 20, n. 146, p. 998-1007, 1977.

KAMPHUIS, J. W. Introduction to coastal engineering and management. *Singapore World Scientific Publishing*, 2010.

KIM, D. Numerical analysis of free flow past a sluice gate. *KSCE J. Civil Eng.*, v. 11, n. 2, p. 127-132, Mar. 2007.

LE MÉHAUTÉ, B. *An introduction to hydrodynamics and water waves*. New York: Springer-Verlag, 1976.

LIN, C. H.; YEN, J. F.; TSAI, C. T. Influence of sluice gate

contraction coefficient on distinguishing condition. *J. Irrig. Drainage Eng.*, v. 128, n. 4, p. 249-252, Aug. 2002.

LITRICO, X.; FROMION, V.; BAUME, J-P; ARRANJA, C.; RIJO, M. Experimental validation of a methodology to control irrigation canals based on Saint-Venant equations. *Control Eng. Pract.*, v. 13, n. 11, p. 1425-1437, Nov. 2005.

MARSHALL, J.; HILL, C.; PERELMAN, L.; E ADCROFT, A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic and nonhydrostatic ocean modeling. *J. Geophysical Res.*, v. 102, n. C3, p. 5733-5752, Mar. 1997.

MEI, C. C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. New York: Wiley, 1983.

MONTEIRO, L. R. *Simulação numérica de escoamentos com superfície livre com aproximação não-hidrostática*. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

NIELSEN, P. *Coastal and estuarine processes*. Singapura: World Scientific Publishing, 2009.

RITCHIE, G. E. Flow of an ideal fluid through a sluice gate. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 53, n. 3, p. 471-483, Mar. 1976.

ROTH, A.; HAGER, W. H. Underflow of standard sluice gate. *Exp. Fluids*, v. 27, n. 4, p. 339-350, Sept. 1999.

USACE-HEC. *Hydraulic Reference Manual*, HEC-RAS: Technical Reference Manual. Davis, CA: U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, 2010.

## Contribuição dos autores:

Leonardo Romero Monteiro: Escrita Geral, Desenvolvimento do Modelo, Proposição dos Testes, Simulações Numéricas, Análise e Discussão dos Resultados.

Fernando Mainardi Fan: Desenvolvimento do modelo, Análise e Discussão dos Resultados e Revisão Conceitual, Gramatical e Semântica

Walter Collischonn: Concepção da ideia, Análise e Discussão dos Resultados

Edith Beatriz Camaño Schettini: Análise e Discussão dos Resultados e Revisão Conceitual, Gramatical e Semântica.