

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Topologia de rede e conformidade social em dinâmica  
de opinião de confiança limitada

Teo Victor Resende da Silva

Porto Alegre, RS, Brasil

Junho de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Topologia de rede e conformidade social em dinâmica  
de opinião de confiança limitada

Teo Victor Resende da Silva

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física sob orientação do Prof. Dr. Sebastián Gonçalves e co-orientação do Dr. Bruno Requião da Cunha.

Porto Alegre, RS, Brasil

Junho de 2021

*Para Vânia Marco* (in memoriam), professora até o fim (precoce devido ao mal de nosso tempo), musicista por amor e grande responsável por meu entusiasmo com a ciência.

# Agradecimentos

Agradeço a Hemerson Pablo, que me recepcionou em Porto Alegre e foi meu guia na UFRGS. Ao duas vezes colega de profissão Bruno Cunha, que me apresentou ao campo de pesquisa e co-orientou este trabalho. Ao professor Sebastián, orientador de ótimo profissionalismo e rara paciência. Ao professor Sérgio Vieira, pela fundamental colaboração no início do curso. Nomes fundamentais sem os quais nenhuma dessas páginas teria sido escrita.

Também a Cássia, pelo incentivo e companheirismo. A Dâmaris pela parceria e pelo poder computacional fornecido quando o meu foi insuficiente. A Fernanda Pessoa, pela amizade improvável e imerecida numa hora difícil.

Ainda, a Tiago Burin e Bruno Dallagnol, pela ajuda em momentos fundamentais e a meus colegas de turma e de grupo de pesquisa.

Por fim, por tradição, a Hansi Kürsch (et al.), Jon e Cris Oliva (*in memoriam*) pelas músicas que me deram a tranquilidade necessária para escrever.

*An idea is like a virus, resilient, highly contagious. The smallest seed of an idea can grow.*

- Cobb

# Resumo

Modelos de dinâmica de opinião utilizando redes complexas têm sido usados para explicar fenômenos sociais complexos através de interações simples entre pares. Utiliza-se neste trabalho o modelo de dinâmica de opinião de Deffuant-Weisbuch, onde as interações entre indivíduos são limitadas por um parâmetro de confiança. Com base no conceito de conformidade social proposto por Asch, adiciona-se ao modelo a interação de um indivíduo com seus vizinhos imediatos. Observa-se que, ao se aplicar a dinâmica de conformidade, redes com diferentes elementos estruturais têm consenso facilitado, isto é, alcança-se o estado de equilíbrio com apenas um grupo de opinião para valores menores do parâmetro de confiança. Também é demonstrado que redes com condições iniciais tendendo a um drástico extremismo têm na conformidade um meio de atingir mais facilmente um estado final com ampla maioria de opiniões moderadas. Tal resultado pode ser aplicado ao estudo de populações com intensa polarização entre grupos de opiniões gerais conflitantes.

**Palavras-chave:** redes complexas, conformidade social, dinâmica de opinião.

# Abstract

Opinion dynamics models using complex networks have been used to explain complex social phenomena through simple pairwise interactions. This research uses the Deffuant-Weisbuch model of opinion dynamics, where the interactions between individuals are bounded by a confidence parameter. The interaction of an individual with its immediate neighbors is added to the model using the social conformity concept as proposed by Asch. Consensus in networks with conformity is facilitated, meaning that a steady state of just one opinion group is reached for smaller values of the confidence parameter in networks with different structural elements. Also, networks with initial conditions tending to a drastic extremism have in conformity a way to reach more easily a state with wide majority of moderate opinions. This result can be applied to the study of populations with intense polarization between general groups of conflicting opinions.

**Key-words:** complex networks, social conformity, opinion dynamics

# Lista de figuras

Figura 1 – Duas redes construídas com o modelo LFR variando-se o parâmetro de mistura $\mu_{LFR}$ , fornecido como condição inicial para execução do algoritmo gerador. Em cada casa, a saída corresponde a duas redes com modularidade $Q$ distintas, inversamente proporcional ao parâmetro. Neste trabalho, os grupos isolados da figura da direita seriam conectados formando um agregado único, com pequena alteração do valor de $Q$ . . . . .	20
Figura 2 – Detecção de comunidades com o algoritmo Louvain: rede original (esq.) e com as comunidades identificadas por cores (dir.). O método não garante o ganho máximo possível de modularidade global, e um revisor humano (aida outro método ou outra execução do próprio algoritmo Louvain) poderia resultar em um particionamento diferente. Entretanto, o resultado garante que não haverão novos ganhos de modularidade após a definição resultante das comunidades caso um vértice tenha comunidade alterada. . . . .	21
Figura 3 – Evolução temporal utilizando DW para 1000 indivíduos em um grafo completo com dois diferentes valores de $d$ (0.25 e 0.5), com $\mu = 0.5$ . . . . .	25
Figura 4 – Típicos cartões dos testes de conformidade, conforme descrição e figura de Solomon Asch (1956). . . . .	26
Figura 5 – Formação de consenso para diferentes topologias em função do parâmetro $d$ . Analisados em conjunto, o tamanho do maior grupo (MG) dividido pelo tamanho da rede e o número médio de grupos indicam quando a rede converge para um grupo único. Para redes SF, $\gamma = 1.2$ , $\langle k \rangle \approx 1$ e $Q \approx 0.9$ . Nas redes ER, $p = 0.035$ , $\langle k \rangle \approx 34$ e $Q \approx 0.15$ . Os valores de $\langle k \rangle$ e $Q$ , como visto posteriormente, são mais relevantes para a dinâmica que o paradigma de rede (ER ou SF). . . . .	32
Figura 6 – Largura média do maior grupo de opiniões em redes modulares do tipo LFR de $N = 1000$ com variação de $Q$ (esquerda) e $\langle k \rangle$ (direita), com parâmetro de confiança fixo em $d = 0.5$ . . . . .	33
Figura 7 – Tempo até o equilíbrio em função do grau médio ( $d = 0.5$ ) e para diferentes $\langle k \rangle$ variando-se $d$ em redes geradas com o paradigma LFR de $N = 1000$ . O equilíbrio para valores pequenos de $\langle k \rangle$ e $d$ não significa consenso. . . . .	34
Figura 8 – Tamanho do maior grupo de opiniões (cima) e número médio de grupos de opinião (baixo) em redes modulares LFR ( $N = 1000$ ) com $Q \approx 0.75$ , para diferentes valores de $\langle k \rangle$ . . . . .	34

Figura 9 – Histogramas iniciais ( <b>A</b> para $\mu_D = 0.2$ e <b>C</b> para $\mu_D = 0.7$ ) e finais ( <b>B</b> e <b>D</b> ) de duas distribuições normais de opiniões em um grafo completo de $N = 1000$ , utilizando $d = 0.5$ . . . . .	35
Figura 10 – Opinião média final em função da opinião média inicial para grafo completo, rede regular retangular ( $10 \times 100$ ) e redes ER ( $p = 0.035$ ) e SF ( $\gamma = 1.2$ ). Todas as redes com $N = 1000$ , e a dinâmica ocorre com parâmetro $d = 0.5$ . O modelo corresponde a Equação 4.1, sendo $\beta$ a inclinação da reta. . . . .	36
Figura 11 – Opinião média final em função da opinião média inicial em todas as topologias testadas. Todas as redes têm $N = 1000$ . A rede regular tem formato $10 \times 100$ . Para as redes livres de escala, $\gamma = 1.2$ , e para os grafos aleatórios Erdos-Renyi, $p = 0.035$ . O modelo é o da Equação 4.1	37
Figura 12 – Evolução temporal das opiniões em uma rede modular de tamanho $N = 1000$ , $\langle k \rangle = 9.48$ e $Q \approx 0.82$ , utilizando $d = 0.5$ com o modelo DW original (esq.) e com conformidade (dir.). . . . .	39
Figura 13 – Tempo médio de consenso para redes modulares LFR ( $N = 1000$ ), com $d = 0.5$ , em função do grau médio após aplicação do modelo DW original e com conformidade. O modelo LFR permite definir um $\langle k \rangle$ aproximado arbitrário. A mesma rede é então submetida à dinâmica original e à modificada com conformidade. . . . .	40
Figura 14 – Largura média do maior grupo da distribuição final de opiniões para redes modulares do modelo LFR ( $N = 1000$ ) em função do grau médio após aplicação do modelo DW original e com conformidade, com $d = 0.5$ .	40
Figura 15 – Tempo de equilíbrio para redes modulares ( $N = 1000$ ) em função da modularidade, no modelo DW original e com conformidade. . . . .	41
Figura 16 – Tempo médio de equilíbrio para redes modulares LFR de tamanho $N = 1000$ , com e sem conformidade, em função da modularidade. Uma forma de rerepresentar os dados da Figura 15 por faixas de modularidade $Q$ . Em todas as redes, $\langle k \rangle = 4$ . Os ajustes são exponenciais. . . . .	41
Figura 17 – Tempo médio de equilíbrio em função da modularidade para redes modulares de tamanho $N = 100$ , sem e com parâmetro conformidade ativo. O efeito no tempo é relativamente menor para redes pequenas, mas ainda observável. Em todas as redes, $\langle k \rangle = 4$ . . . . .	42
Figura 18 – Tempo até o equilíbrio em redes com $N = 1000$ e $N = 100$ para dinâmica original e com parâmetro de Asch aplicado em função de $1 - Q$ . O tempo diverge conforme $Q \rightarrow 1$ . Em geral, o tempo para o equilíbrio parece seguir uma lei de potência na forma da Equação 4.2. Em todas as redes, $\langle k \rangle = 4$ . . . . .	43

Figura 19 – Medidas de consenso em função da variação do parâmetro $d$ em redes modulares do modelo LFR de tamanho $N = 1000$ e grau médio $\langle k \rangle = 10$ para dinâmica de opinião com e sem conformidade. . . . .	44
Figura 20 – Tempo até o equilíbrio das redes reais para DW original e DW com conformidade. A condição inicial é uma distribuição uniforme. Para a conformidade aplicada, $p_{asch} = 0.6$ . As variações pontuais discrepantes que indicam um tempo maior para a dinâmica com conformidade podem ser explicadas pelo pequeno tamanho da amostra. Especialmente no caso do Facebook, o problema é computacionalmente custoso. . . . .	46
Figura 21 – Número de grupos de opinião (esq) e tamanho do maior grupo de opinião normalizado pelo tamanho da rede (dir) para quatro redes reais. Para a conformidade aplicada, $p_{asch} = 0.6$ . As medidas apresentadas indicam em média uma facilitação do consenso para o parâmetro aplicado. . . . .	47
Figura 22 – Histograma da distribuição inicial de opiniões aplicadas à rede de blogs políticos gerada com a Equação 4.3. Nota-se que o grupo mais próximo o valor de opinião $x = 1$ é mais numeroso. . . . .	49
Figura 23 – Indicadores do estado de consenso para o modelo DW original e com conformidade para a rede Polblogs em função do parâmetro $d$ . Para a conformidade aplicada, $p_{asch} = 0.6$ . . . . .	50
Figura 24 – Opinião média final para o modelo DW original e com conformidade para a rede Polblogs em função do parâmetro $d$ . Para a conformidade aplicada, $p_{asch} = 0.6$ . . . . .	50
Figura 25 – Indicadores do estado de equilíbrio com variação da probabilidade $p_{asch}$ na rede Polblogs, com $d$ fixo em 0.5. A linha tracejada indica o valor médio de referência para dinâmica sem conformidade. . . . .	51
Figura 26 – Opinião média final com variação da probabilidade $p_{asch}$ na rede Polblogs. O parâmetro $d$ é mantido fixo em 0.5. A linha tracejada indica o valor médio para dinâmica sem conformidade. . . . .	52
Figura 27 – Evolução temporal das opiniões na rede Polblogs para $d = 0.625$ com o modelo DW original (superior) e com conformidade (inferior, sombra cinza). O cenário em A corresponde a 65% das execuções da rede Polblogs com distribuição inicial na forma da Equação 4.3. . . . .	53

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados de experimentos de Asch repetidos em diferentes lugares e datas. Baseado na compilação feita por Bond e Smith (1990) . . . . .	27
Tabela 2 – Parâmetros topológicos básicos das redes sociais reais utilizadas neste trabalho. . . . .	46

# Lista de abreviaturas e siglas

$d$	Distância máxima para interação no modelo DW
DW	Modelo Deffuant-Weisbuch de dinâmica de opinião
ER	Grafos aleatórios tipo Erdős-Rényi
$k_i$	Grau do vértice $i$
LFR	Redes modulares Lancichinetti-Fortunato-Radicchi de referência
$\mu$	Parâmetro de convergência do modelo DW
$\mu_D$	Média da distribuição normal
$\mu_{LFR}$	Parâmetro de redes LFR
$N$	Número de nodos em uma rede
$p_{asch}$	Probabilidade da conformidade social
$P(k)$	Distribuição de graus
$Q$	Modularidade de uma rede
SF	Redes invariantes em escala tipo Barabási-Albert
$x_i$	Opinião do indivíduo correspondente ao vértice $i$
$x_v$	Opinião média da vizinhança de um indivíduo

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>REDES COMPLEXAS</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Estrutura de redes</b>	<b>17</b>
2.1.1	Atributos de vértices	18
<b>2.2</b>	<b>Redes modulares</b>	<b>19</b>
2.2.1	Deteção de comunidades com o algoritmo <i>Louvain</i>	19
2.2.2	Deteção de comunidades por atributos do vértice	21
<b>3</b>	<b>DINÂMICA DE OPINIÃO</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>O modelo de Deffuant-Weisbuch</b>	<b>23</b>
<b>3.2</b>	<b>Conformidade social e o experimento de Asch</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>29</b>
<b>4.1</b>	<b>Influências Estruturais</b>	<b>30</b>
4.1.1	Efeitos da topologia de rede	31
4.1.2	Redes modulares	32
<b>4.2</b>	<b>A Influência das Condições Iniciais</b>	<b>34</b>
4.2.1	Estado final como uma função da média da distribuição normal inicial	35
<b>4.3</b>	<b>Efeitos da Conformidade</b>	<b>37</b>
4.3.1	Conformidade e o grau médio	38
4.3.2	Conformidade e a modularidade	40
4.3.3	Conformidade e o parâmetro de confiança	44
<b>4.4</b>	<b>Redes reais</b>	<b>44</b>
4.4.1	Conformidade em redes reais	46
4.4.2	Polblogs: conformidade e condições iniciais	47
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>58</b>

# 1 Introdução

Eventos que até recentemente seriam dados como improváveis, como o Brexit [1] ou os resultados de recentes eleições presidenciais norte-americana [2] e brasileira, aconteceram a partir de uma profunda polarização político-social. Essa constatação torna relevante o estudo da dinâmica de opiniões, isto é, como as opiniões evoluem em uma dada população para um estado de relativo equilíbrio. De modo geral, o estudo dessa dinâmica consiste a princípio na busca dos parâmetros chave que governam como se atinge esse estado.

Não se trata de uma tarefa trivial. A complexidade das relações sociais humanas pessoais, seja abordada no aspecto psicológico ou da bioquímica, tornam a análise da evolução temporal da opinião custosa se estendida para um número grande de indivíduos. Avanços da Psicologia Social, entretanto, buscam uma abordagem estatística para fenômenos sociais que envolvem opinião. Entre os mais importantes estudos da área, destacam-se os experimentos de Asch [3] sobre a pressão de uma maioria e os de Milgram [4] sobre a obediência à autoridade.

Tais estudos usam interações simples, como a escolha de duas figuras iguais ou a execução de um comando trivial como apertar um botão, pouco significativos se vistos como ações humanas individuais, mas que revelam padrões sociais relevantes quando muitas pessoas participam do experimento [5].

Modelos que descrevem interações simples entre as partes constituintes de um sistema para construir explicações adequadas de fenômenos complexos são prevalentes na Física [6, 7]. A aplicação desse tipo de modelo físico à dinâmica de opinião remonta à década de 1970, quando soluções análogas ao modelo de Ising surgiram para estudar a dinâmica de uma população de  $N$  indivíduos com opinião binária [8]. Neste contexto, a opinião do indivíduo tem função equivalente à do *spin* nos modelos de magnetismo da Física Estatística.

Variações e adaptações, ainda com um espectro de duas opiniões possíveis, derivaram do modelo de Ising. A discretização da opinião é útil para explicar a formação de opinião em contextos de escolha entre alternativas fixas, como eleições, posições políticas em assuntos específicos e compra/venda no mercado de ações [9]. Posteriormente, modelos com um espectro contínuo de opiniões permitiram representar situações opinativas ou comportamentais que escapam a simplificações dicotômicas, abrindo a possibilidade de um indivíduo se localizar em qualquer ponto dentro de um intervalo de opiniões extremas [10, 11, 12].

Em paralelo ao desenvolvimento dos modelos de dinâmica de opinião, outra disciplina que utilizou os métodos físicos para a modelagem de sistemas complexos por meio

de relações simples entre seus constituintes foi a Ciência de Redes e seu estudo das redes complexas, estruturas compostas por uma teia de itens e suas interconexões [13, 14].

Um dos principais resultados desta área multidisciplinar é a emergência de princípios iguais para governar redes similares que descrevem a construção de campos distintos da natureza ou da tecnologia humana. Assim, o comportamento de redes interconectadas sem qualquer relação direta, como a coparticipação de atores em filmes e a interação entre proteínas, segue regras básicas parecidas [6].

Dentre as redes que receberam considerável atenção na literatura científica recente estão as redes complexas sociais, fornecendo um ambiente adequado para o estudo da propagação de opinião enquanto fenômeno social [7]. Além das regras que governam como o indivíduo molda sua posição intelectual a respeito de um tópico através da interação com outros indivíduos ou com o grupo, a estrutura de redes permite aliar a esta análise a observação dos efeitos da topologia básica da rede, ou seja, da maneira como os indivíduos se conectam no nível estrutural [15].

Pessoas são separadas pela geografia e por fatores contextuais alheios à formação de opinião individual mas que cooperam para o estado final da distribuição de opiniões na população. Aliar os dois estudos foi um passo natural nas últimas décadas, e tem permitido uma modelagem adequada e mais próxima da realidade sócio-político-cultural.

Uma aplicação emergente de física estatística e redes complexas é o estudo de redes criminais [16, 17], principalmente visando seu mapeamento [18, 19] e também estratégias de ataque [20] e disrupção [21, 22].

A propagação da disposição criminosa em redes já foi abordada no passado com uma análise epidêmica [23]. A ideia implícita neste trabalho é a de dinâmica de opinião em torno da existência de indivíduos com opiniões favoráveis a um conceito, em uma rede com opiniões contínuas, distribuídas entre valores que podem significar absoluto desinteresse em tomar posição em relação ao tópico, total discordância ou total concordância com o que uma ideia professa. Nesse contexto, portanto, não se trata diretamente da ação física em si, mas da ideia favorável à ação, e para onde um grupo de ideias iniciais converge. A conexão da ideia com a ação criminosa, que envolveria uma nova dimensão de rede, foge do escopo deste texto.

Para lidar com os temas introduzidos, este trabalho se estrutura em uma breve introdução teórica de redes complexas, sua descrição básica, principais características e a identificação de sub-comunidades em sua estrutura, topologicamente e por atributos de seus componentes. Posteriormente, traz o modelo de dinâmica de opinião de confiança limitada de Deffuant-Weisbuch e resume o clássico experimento de Solomon Asch sobre conformidade social.

A seguir, apresenta resultados de dinâmica de opinião original do modelo DW em

---

considerações topológicas, e respectivas comparações com um modelo modificado para incluir efeitos da conformidade social conforme prevista pelos estudos de Asch. Por fim, aplica as dinâmicas estudadas em redes reais, em cenários semelhantes aos anteriores e também aplicando condições iniciais altamente polarizadas. Encerra com conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Redes complexas

De modo geral e qualitativo, uma rede é composta por itens chamados vértices (ou nodos) e por conexões entre os vértices chamadas arestas (ou ligações) [14, 24]. A nomenclatura é a mesma da teoria de grafos [25], de onde o estudo de redes complexas deriva, sendo uma rede, formalmente, um grafo  $G = \{V, A\}$  definido a princípio por seus  $N$  vértices  $V_1, V_2, \dots, V_N$  e por seu conjunto  $A$  de arestas, cada uma delas ligando dois vértices do conjunto  $V$  [6].

O início do estudo matemático de grafos data do século XVIII, proposto por Euler [13]. Durante as décadas seguintes e no século XIX, o foco da área se manteve principalmente em estruturas regulares como grades e grafos totalmente conectados, isto é, com todos os vértices ligados a todos os outros. Um salto importante na teoria de grafos foi o desenvolvimento da teoria de grafos aleatórios nos anos 1940 e 1950, principalmente por Paul Erdős e Alfréd Rényi [25]. No modelo proposto por Erdős e Rényi, em um grafo com  $N$  vértices, cada par é conectado com uma probabilidade  $p$ , gerando  $p \frac{N(N-1)}{2}$  arestas.

Uma das principais descobertas no estudo de grafos aleatórios é a transição de fase [25], termo emprestado da Física, entre uma fase de pequenas componentes desconexas a uma fase com componente gigante. No mesmo espírito, a aplicação do método físico de explicar um sistema pelas interações simples de seus componentes se tornou onipresente na ciência de redes complexas posterior [6].

O uso de redes complexas para explicar fenômenos e sistemas reais se expande desde a rede mundial de computadores [26] e redes de distribuição de energia elétrica [27] até exemplos biológicos, como a rede neural do verme *C. Elegans* [28], e sociais, como redes de relacionamento [29] e redes criminais [30, 31].

A análise de redes complexas abrange as propriedades que emergem de sua estrutura, analisadas na próxima seção, e também sua dinâmica e aplicação [6, 14], fragmentação e resistência a ataques [32].

### 2.1 Estrutura de redes

Além do número de vértices  $N$  e de seu conjunto de arestas, outra propriedade das redes é sua distribuição de graus  $P(k)$ , uma função que informa a probabilidade de um vértice aleatório ter  $k$  arestas [6]. Nas redes livres de escala (*scale-free*, abreviadas como SF), propostas inicialmente por Barabási e Albert [27], a distribuição de graus toma uma forma peculiar em lei de potência

$$P(k) \approx k^{-\gamma}. \quad (2.1)$$

Redes SF se tornaram úteis na modelagem de redes como a de citações de artigos científicos, a Internet e redes metabólicas [14], com propriedades definidas em função do expoente  $\gamma$  da Equação 2.1. Assim como no caso das pequenas variações na probabilidade de conexão nos grafos aleatórios, pequenas variações de  $\gamma$  podem levar a mudanças abruptas [6].

Em relação à maioria das redes complexas reais, uma característica frequente é a de mundos pequenos (*small worlds*) [28]. Sumariamente, isso significa que mesmo em redes grandes o caminho entre dois vértices é relativamente curto. Trata-se de um assunto estudado antes da existência do campo de redes, e mesmo à parte dele. Um exemplo primitivo é o estudo de Stanley Milgram nos anos 1960 a respeito da interconectividade de pessoas distantes, separadas socialmente por um pequeno número de contatos [4].

Outro aspecto das redes, principalmente as sociais [14], é a tendência à clusterização, atingida quando um grupo próximo de vértices é especialmente interconectado, podendo ser medida pelo coeficiente de clusterização  $C$  [28]. Dado um vértice  $i$  aleatório e suas  $k_i$  arestas que o ligam a  $k_i$  outros vértices, e o número de arestas  $A_i$  existentes entre todos os  $k_i$  vértices, o coeficiente de clusterização  $C_i$  do vértice  $i$  é dado por [6]

$$C_i = \frac{2A_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (2.2)$$

Por sua vez, a clusterização de uma rede é dada pela média dos  $N$  coeficientes de clusterização [14],

$$C = \frac{1}{N} \sum_i^N C_i. \quad (2.3)$$

Uma representação de redes de uso frequente é pela matriz de adjacência  $A$  que, para uma rede de  $N$  vértices, tem  $N \times N$  elementos. Dados dois vértices  $i$  e  $j$ , o elemento de matriz  $A_{ij} = A_{ji} = 1$  se  $i$  e  $j$  estão conectados, e zero se não houver conexão entre eles [6].

### 2.1.1 Atributos de vértices

As características e medidas apresentadas acima consideram a estrutura básica da rede, formada pelos vértices e suas conexões. Entretanto, os vértices podem ter atributos vinculados, existindo modelos que visam estudar a dinâmica da interação entre atributos de vértices e a estrutura de rede [33, 34].

Atributos são característicos em redes sociais, onde informações como gênero e idade, vinculadas ao indivíduo representado pelo vértice no grafo, podem ter efeitos estruturais na geração ou evolução da rede [33].

Outro atributo relevante do indivíduo (vértice da rede) é a sua opinião [15], a qual pode evoluir no tempo conforme as interações do modelo que o governa [7]. Por um lado, a topologia da rede, mesmo estática, desempenha um papel nessa evolução [8]. Por outro, a mudança do estado do vértice, representado pelos atributos deste, pode influenciar suas conexões na rede. Dessa forma, dinâmica e topologia se entrelaçam. Posteriormente, discutimos esse tópico com maior detalhe.

## 2.2 Redes modulares

Muitas redes possuem grupos de vértices densamente conectados entre si, mas com poucas conexões com outros grupos, formando estruturas modulares ou de comunidades [35]. A definição formal de comunidade ou módulo numa rede é uma questão variável, de acordo com as necessidades específicas de um dado problema, bem como os algoritmos de detecção da estrutura modular [36].

A complexidade computacional do problema leva a abordagens heurísticas na detecção de comunidades, com métodos específicos funcionando adequadamente apenas em alguns tipos de grafos e não em outros [37], gerando a necessidade de *benchmarks*, revisões e expansões dos algoritmos [38, 39]

Uma medida geralmente aceita para auxiliar na detecção de comunidades é a chamada modularidade  $Q$ . Consiste na diferença entre as arestas localizadas dentro de um grupo numa rede e o número esperado de arestas dentro de um grupo numa rede com conexões definidas aleatoriamente [40]. Formalmente, a modularidade  $Q$  é dada por [13]

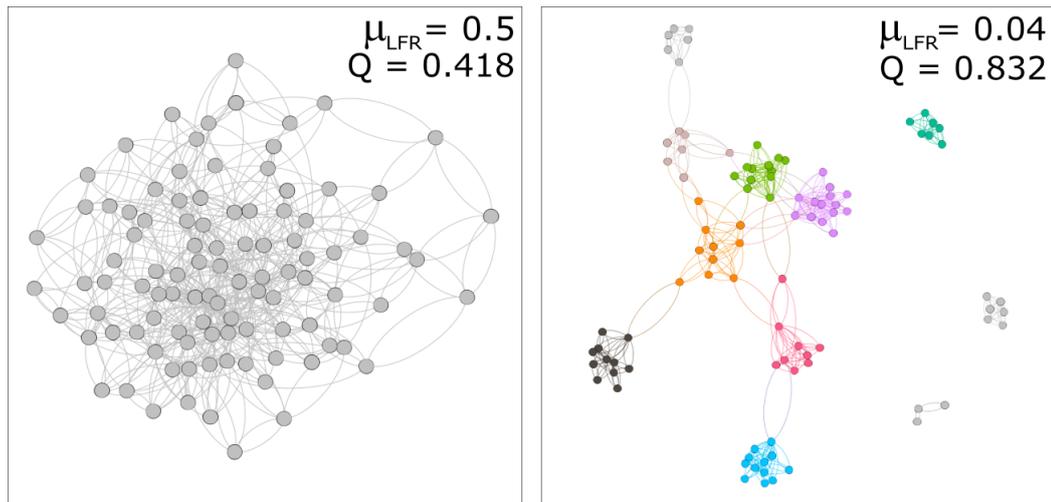
$$Q = \sum_{c=1}^{n_c} \left[ \frac{1}{2V} \sum_{(i,j) \in C_c} (A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2V}) \right], \quad (2.4)$$

onde  $V$  é o número de vértices da rede e  $C_c$  é uma das  $n_c$  comunidade distintas de vértices, definidas por algum método prévio.

O método utilizado para geração de redes modulares é o previsto no modelo LFR [38]. A modularidade é uma função inversa do parâmetro de mistura  $\mu_{LFR}$ , uma das condições iniciais da execução do algoritmo. Pode-se assim gerar uma rede com com uma modularidade aproximada baseada na informação de um  $\mu_{LFR}$  específico. A Figura 1 mostra dois exemplos de redes geradas pelo modelo LFR.

### 2.2.1 Detecção de comunidades com o algoritmo *Louvain*

Tanto pela alta performance quanto pela qualidade das comunidades detectadas, o algoritmo *Louvain* [41] se destaca como método para detecção de comunidades, sendo utilizado nas simulações deste trabalho. O algoritmo original consiste em duas fases,



**Figura 1** – Duas redes construídas com o modelo LFR variando-se o parâmetro de mistura  $\mu_{LFR}$ , fornecido como condição inicial para execução do algoritmo gerador. Em cada casa, a saída corresponde a duas redes com modularidade  $Q$  distintas, inversamente proporcional ao parâmetro. Neste trabalho, os grupos isolados da figura da direita seriam conectados formando um agregado único, com pequena alteração do valor de  $Q$ .

descritas abaixo para uma rede de  $N$  vértices, e utiliza a otimização da modularidade (Equação 2.4) como fundamento do método.

### Fase 1

1. Cada vértice  $i$  é designado para uma comunidade distinta (isto é, há  $N$  comunidades nesta etapa).
2. Para cada vértice  $i$ , o algoritmo calcula o ganho de modularidade de mover  $i$  para a comunidade de cada um de seus vizinhos  $j$ .
3. O vértice  $i$  é colocado na comunidade do vértice  $j$  onde o ganho positivo é máximo. Se não houver ganho possível,  $i$  permanece na mesma comunidade.

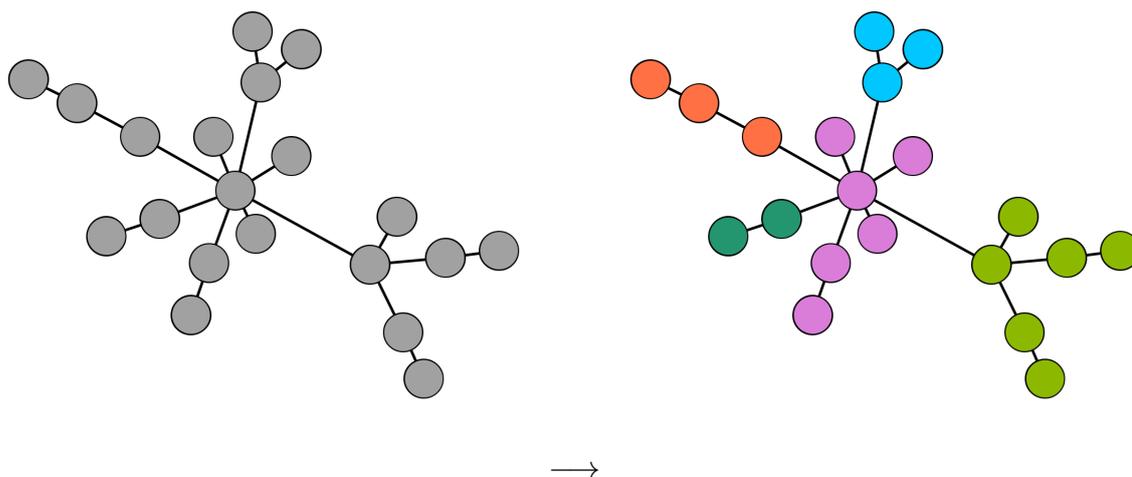
A Fase 1 se repete múltiplas vezes e se completa quando não há mais ganho possível de modularidade na rede ao se atingir um máximo local. Após a conclusão da fase, o algoritmo continua para a Fase 2.

### Fase 2

1. As comunidades encontradas no Passo 1 são redefinidas como os vértices de uma nova rede.
2. As arestas dos vértices de uma comunidade com vértices com outras comunidades são consideradas as novas ligações entre os vértices do item anterior, e as arestas internas da comunidade são auto-ligações na nova rede.

Após essa redefinição, aplica-se na nova rede a Fase 1.

A Figura 2 mostra uma pequena rede pré e pós-deteção de comunidades com o algoritmo Louvain. A rede tem  $N = 20$ , e o método identificou cinco subdivisões, diferenciadas por cores distintas na imagem. Existe mais de uma solução possível para o particionamento, mas ao final da execução do algoritmo há a garantia que mover um vértice para outra comunidade não resultaria em ganho de modularidade.



**Figura 2** – Deteção de comunidades com o algoritmo Louvain: rede original (esq.) e com as comunidades identificadas por cores (dir.). O método não garante o ganho máximo possível de modularidade global, e um revisor humano (ajuda outro método ou outra execução do próprio algoritmo Louvain) poderia resultar em um particionamento diferente. Entretanto, o resultado garante que não haverão novos ganhos de modularidade após a definição resultante das comunidades caso um vértice tenha comunidade alterada.

Em relação ao K-Means [42], outro método comumente utilizado para deteção de comunidades, o método Louvain guarda certas vantagens. Uma delas é o desempenho, exigindo menos recursos computacionais. Outra, bastante relevante, é que o número de agregados é definido pelos dados em si mesmos, enquanto no K-Means a quantidade de partições da rede em comunidades é pré-definida [43].

### 2.2.2 Deteção de comunidades por atributos do vértice

Além das comunidades que emergem da estrutura da rede, isto é, seus vértices e suas interconexões, podemos subdividir uma rede pela categorização dos atributos de cada vértice, ou por uma classificação mista de estrutura e atributos [44].

É possível definir os atributos como uma dimensão composicional de um grafo, definindo características dos vértices ou arestas, acima da dimensão topológica, que define as conexões entre os vértices. [45].

A análise de particionamento de grafos em comunidades é interessante especialmente para redes sociais humanas, principalmente porque os atributos de um vértice podem definir parâmetros fundamentais, como o papel de determinada pessoa em um grupo social ou preferências que determinarão relacionamentos futuros ou a revisão de relacionamentos passados [46].

Diferentes métodos propostos na literatura, como por exemplo os propostos por Zhou [47] e por Friedman [48] buscam aliar a dimensão topológica e a composicional para melhor identificação de comunidades de interesse.

Dessa forma, as diferentes maneiras de particionar uma rede complexa e suas representações topológicas que indicam indivíduos e suas conexões com seu entorno social correspondem ao ambiente estrutural onde ocorre a dinâmica de opinião, discutida no capítulo a seguir.

## 3 Dinâmica de opinião

Diversos modelos físicos e matemáticos usados para prever comportamento social ou explicar fenômenos sociais emergiram nas últimas décadas [8]. A dinâmica de opinião, em particular, é o foco de muitas tentativas de capturar a complexidade da evolução de opiniões humanas em grupos sociais [9]. Modelos discretos como o de Ising [49], o do votante e o de Sznajd [50], todos adaptados da Mecânica Estatística e usando o *spin* como uma analogia para uma opinião particular em um universo de duas opções possíveis, foram os primeiros a receber atenção e produzir resultados.

Mais recentemente, modelos baseados em opiniões contínuas, onde o indivíduo numa população pode ter uma opinião pertencente a um intervalo de números reais, como a abordagem de Deffuant-Weisbuch (DW) [10], expandiram o escopo de fenômenos sujeitos a este tipo de análise de dinâmica. Nesses modelos, indivíduos podem interagir se suas opiniões não estiverem mais distantes que um limite estabelecido. Por esse motivo, são chamados de modelos de confiança limitada.

O modelo de DW e suas modificações, juntamente com outros modelos de dinâmica de opinião de confiança limitada, como o de Hegselmann-Krause [11], foram objeto de intenso escrutínio nos últimos quinze anos. Alguns resultados previstos pelo modelo original estão de acordo com achados da Psicologia Social e no confronto com dados reais [7]. Extremismo [51] e difusão de propaganda em mídias sociais [52] são alguns exemplos relevantes.

### 3.1 O modelo de Deffuant-Weisbuch

O modelo original de DW se baseia na interação de pares de indivíduos limitada por um parâmetro de confiança  $d$  ( $\epsilon$  em alguns textos). Cada indivíduo  $i$  em uma população de  $N$  indivíduos tem uma opinião  $x_i \in [0, 1]$ . A cada passo temporal  $t$ , dois indivíduos conectados  $i$  e  $j$  interagem se o módulo da diferença de suas opiniões for menor que o parâmetro de confiança, isto é, se  $|x_i - x_j| < d$ . A interação consiste na convergência de suas opiniões:

$$x_i = x_i + \mu(x_j - x_i) \tag{3.1a}$$

$$x_j = x_j + \mu(x_i - x_j), \tag{3.1b}$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de convergência constante, mantido ao longo de todo este trabalho em 0.5. Algumas modificações do modelo incluem a dinâmica de discordância [53], um

modelo DW heterogêneo onde o limite de confiança como uma função da opinião atual do indivíduo [54] e líderes de opinião [55].

Tanto o modelo original quanto suas variações estudam a evolução da distribuição inicial para um estado de equilíbrio, em geral buscando os parâmetros para a convergência das opiniões [56]. Soluções de *mean-field* podem envolver o modelo original ou, como aplicado mais recentemente, considerar variações topológicas da rede [57].

Modificações e adições podem ampliar o grau de realismo do modelo. A dinâmica com líderes de opinião poderia ser útil especialmente em um contexto de fluxo de informação circulando majoritariamente a partir de influenciadores em redes sociais, por exemplo. Entretanto, excluindo-se considerações topológicas de rede, as modificações citadas não são tratadas neste texto. Permite-se assim que o efeito em estudo, a conformidade social, explanada na seção seguinte, seja testado em comparação com o modelo DW original. Trata-se de uma escolha por simplicidade do modelo, o que pode facilitar a análise.

O modelo original sem alterações resulta na convergência de opinião na forma de consenso, polarização ou na formação dos chamados agregados (ou grupos, ou ainda *clusters*) de opinião quando aplicado a um grafo completo. A fragmentação grupos para esse caso segue a regra

$$c \approx \frac{1}{2d} \quad (3.2)$$

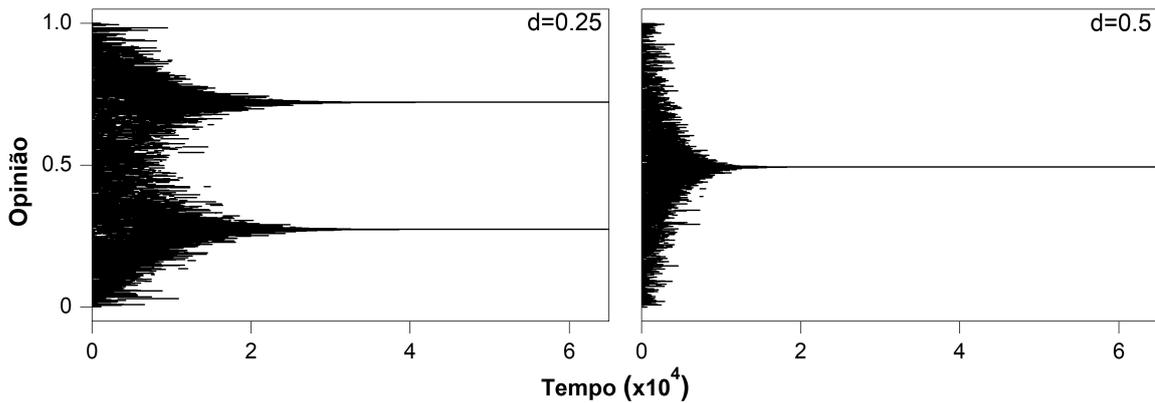
onde  $c$  é o número de agregados de opinião formados no estado final de equilíbrio do sistema.

A Figura 3 mostra a típica evolução temporal para um conjunto de  $N$  indivíduos sob ação do modelo DW. A formação de dois grupos de opiniões para  $d = 0.25$  e um para  $d = 0.5$  segue a regra da Equação 3.2. A presença ocasional de alguns indivíduos extremos na distribuição final, formando um pequeno grupo distante dos grandes grupos de opinião, é uma característica residual do modelo que surge eventualmente [9], podendo ser observado em alguns gráficos de evolução temporal.

A dinâmica de opinião no modelo DW original se dá com um grafo completo representando uma população de  $N$  indivíduos e as condições iniciais são geradas por uma distribuição uniforme de  $N$  opiniões no intervalo contínuo  $[0, 1]$ .

A Figura 3 é o resultado da impressão da distribuição de opiniões no eixo vertical a cada passo de iteração ou após um número dado de iterações. Como a cada iteração o modelo seleciona apenas dois nodos da rede, a tendência é que todos os nodos da rede sejam selecionados a cada  $N/2$  iterações e interajam, considerando-se o parâmetro  $d$ .

Esse tipo de visualização, portanto, pode ser gerada como uma sequência de registros da distribuição de opiniões a cada  $N/L$  passos, sendo que, como  $N$  é mantido



**Figura 3** – Evolução temporal utilizando DW para 1000 indivíduos em um grafo completo com dois diferentes valores de  $d$  (0.25 e 0.5), com  $\mu = 0.5$ .

constante,  $L$  possibilita definir a precisão da exibição da distribuição gráfica. Isto é, alterar  $L$  permite definir que o estado do sistema só será registrado a cada certo número de iterações. É possível exibir a distribuição a cada  $N/L$  passos sem perdas significativas para uma análise conceitual e qualitativa da forma geral da evolução temporal, permitindo enxergar o processo de colapso da distribuição inicial em consenso ou grupos de opinião, bem como estimar a diferença entre os tempos de consenso para mais de uma execução completa.

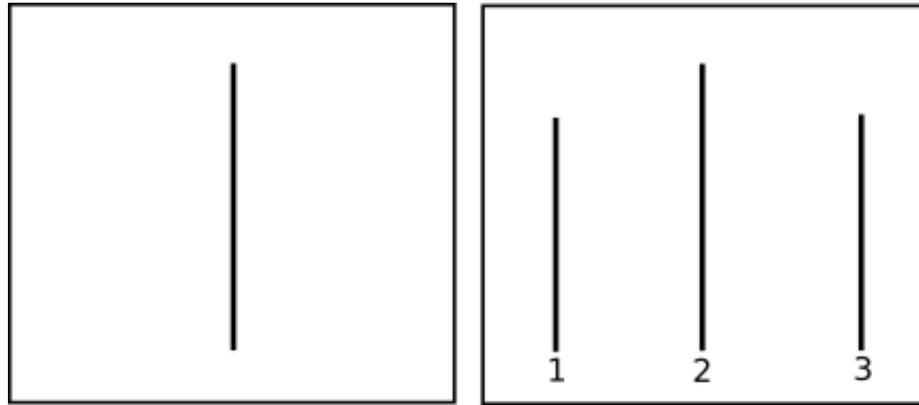
A aplicação em diferentes topologias de rede mostra que há um limite universal próximo a  $d = 0.5$  no qual todos os modelos convergem para consenso completo [15]. Carro, et al., [58] apresentam os efeitos da distribuição inicial no modelo de DW, mostrando que numa abordagem sem ruído para a dinâmica, as condições iniciais têm grande relevância no estado final do sistema.

## 3.2 Conformidade social e o experimento de Asch

Os experimentos realizados por Solomon Asch na década de 1950 [3] se tornaram a referência básica para a conformidade social, sendo repetidos ao longo das décadas seguintes com confirmações e conclusões semelhantes, embora com resultados numéricos específicos dependentes de fatores como contexto sócio-político [59] e idade dos sujeitos examinados [60].

O método do experimento envolve a participação de sete a nove pessoas, previamente informadas que se trata de um teste psicológico. O teste consiste em mostrar aos participantes do experimento dois cartões semelhantes ao da Figura 4, um deles com uma linha vertical guia e outro com três linhas verticais numeradas, uma delas idêntica em comprimento à do cartão inicial. As outras linhas do segundo cartão são de comprimentos visivelmente distintos da guia.

As pessoas são instruídas a escolherem a linha do segundo cartão que tem comprimento idêntico à linha guia. Na versão original do estudo, o avaliador solicita que os participantes declararem publicamente sua escolha citando o número correspondente da linha que entendem ser igual à de referência [5]. O desafio é construído para ser de fácil identificação visual, sendo que a distinção, como mostra a Figura 4, é evidente.



**Figura 4** – Típicos cartões dos testes de conformidade, conforme descrição e figura de Solomon Asch (1956).

Contudo, todos os participantes, exceto um, são instruídos previamente pelo pesquisador a responderem incorretamente a partir de certo ponto do teste de maneira unânime. A principal variável é o tamanho da maioria, isto é, o número de pessoas que responde incorretamente sob instrução. O indivíduo não solicitado a responder erroneamente é o sujeito do estudo.

Os resultados, comparados com os de um grupo de controle, são consistentes em mostrar que uma parcela das respostas da população estudada adere à opção incorreta da maioria. Bond e Smith, em ampla revisão de experimentos de conformidade realizados em vários países ao longo de mais de três décadas, mostraram que o tamanho da parcela de indivíduos que adere ao erro, bem como o tamanho da maioria necessário para se atingir o máximo do efeito de conformidade variam regional e temporalmente [61], sugerindo um elemento sociocultural no processo.

A Tabela 1 traz resultados de diferentes estudos de conformidade realizados em diversos países e datas. O estudo original de Asch mostrou que contra uma maioria de tamanho dois ou no confronto do sujeito estudado contra apenas um indivíduo previamente instruído, os erros dos sujeitos do estudo são menores que contra uma maioria formada por três opositores. Entretanto, o estudo também demonstrou que conforme a maioria cresce acima de três o percentual de erros permanece estável [5].

Modelos de dinâmica de opinião em que um indivíduo é influenciado ao mesmo tempo por todos os seus vizinhos não são novidade. Em 1974 DeGroot [62] propôs um modelo de consenso de opiniões em que o indivíduo assumia como opinião uma média ponderada das opiniões de seus vizinhos em uma rede, onde as arestas têm um peso  $w_{ij}$ ,

Estudo	Ano	Local	Maioria	Fração de erros
Asch	1951	EUA	2	0.13
Asch	1951	EUA	3	0.33
Asch	1952	EUA	8	0.33
Brassard	1986	EUA	3	0.28
Abrams et. al	1990	Reino Unido	12	0.58
Chandra	1973	Fiji	8	0.36
Chandra	1973	Fiji (nativos)	8	0.58
Whittaker & Meade	1967	Brasil	8	0.34
Rodrigues	1982	Brasil	Não informado	0.35

**Tabela 1** – Resultados de experimentos de Asch repetidos em diferentes lugares e datas. Baseado na compilação feita por Bond e Smith (1990)

que podem ser entendidas como uma medida de afinidade entre os vizinhos  $i$  e  $j$ . Nesse modelo, portanto, a opinião  $x_i$  do indivíduo  $i$  é dada por

$$x_i = \frac{w_{ii}x_i + \sum_{j \in N_i} w_{ij}x_j}{w_{ii} + \sum_{j \in N_i} w_{ij}} \quad (3.3)$$

onde  $N_i$  são os vizinhos do nodo  $i$  na rede. Em uma rede sem peso nas arestas,  $w$  sempre tem valor 1 e o modelo se torna uma atualização por média simples.

Entretanto, o modelo proposto por DeGroot não replica os resultados de Asch [63]. O caminho inverso, de utilização de resultados da Psicologia Social em modelos matemáticos, tem sido aplicado constantemente. Um exemplo é o uso de conceitos como homofilia e dissonância [64, 65] para complementar a dinâmica de Deffuant-Weisbuch original, em paralelo ao modelo.

Outros modelos relacionados a uma influência social difusa sobre uma população abordam o efeito manada (*herding*) [66]. É comum a aplicação do efeito manada a contextos socioeconômicos como, por exemplo, comportamento de consumidor no mercado financeiro [67] e em adoção de inovações [68].

Há diferença conceitual na adoção de um modelo de conformidade ou de manada. Compreende-se nas Ciências Sociais que a conformidade pode ser um mecanismo local para explicar o efeito difuso de manada na população [69]. Entretanto não é o único mecanismo possível, nem sua presença é obrigatória para que ocorra o efeito manada [70]. Uma característica da conformidade é que a adesão à maioria é feita como um ato consciente em regra e, embora o efeito manada possa derivar de escolhas ativas, esse nem sempre é o caso concreto.

Portanto, um modelo de efeito manada poderia, em tese, replicar os resultados da conformidade. Entretanto, o que se busca neste trabalho é o resultado final em uma população da conformidade aplicada em grupos locais. Esse resultado poderia levar a alguma espécie de efeito manada como um resultado derivado, difuso e estatístico, explicado

pelo mecanismo previsto numericamente nos estudos de Asch e repetições posteriores.

Isto é, analogamente, a conformidade seria a dinâmica microscópica para o efeito macroscópico de manada. Ambas as abordagens podem produzir resultados compatíveis, mas adotamos a primeira para produzir os resultados do próximo capítulo.

## 4 Resultados

Para os resultados apresentados abaixo, utilizamos a dinâmica de opinião de Deffuant *et al.* [10], para diferentes topologias e parâmetros, observando características do estado de equilíbrio em função da estrutura da rede e das condições iniciais. Ainda, estudamos a aplicação do modelo DW em conjunto com um fator de conformidade social baseado nos experimentos de Asch, comparando com o modelo original sem conformidade.

Os programas para implementar e fazer simulações com o modelo DW e variantes nas diversas topologias foram desenvolvidos em linguagem R e o código está disponível para download ou *git pull* em <https://gitlab.com/teovictor/mestrado-teo>. Para gerar os dados analisados, utilizou-se múltiplas execuções para cada caso. A geração de redes modulares foi feita através do modelo LFR para referência [38].

Nas seções a seguir, começa-se a apresentação dos resultados pelas influências estruturais em redes de diferentes topologias na dinâmica de opinião (4.1). Posteriormente se trata da influência das condições iniciais sobre o estado final de opiniões (4.2). Segue-se então a aplicação da conformidade de Asch a redes modulares (4.3) e, por fim, a dinâmica de opinião em redes reais (4.4).

Uma parte da análise se concentra no transiente, ou seja o tempo até o equilíbrio, definido como um estado em que as opiniões são praticamente as mesmas, ou divididas em grupos densos separados por uma distância maior que  $d$ , em conjunto ou não com a topologia de rede, de forma em que as interações convergentes do modelo DW se tornam raras ou inexistentes. O tempo até o equilíbrio varia de acordo com fatores aleatórios da própria dinâmica de opinião. Logo, nos interessa o tempo de equilíbrio médio ou mais provável.

Convém lembrar que o tempo tratado nos resultados é relativo aos passos de iteração do modelo DW, sendo uma variável adimensional, não uma medida do tempo físico real que uma rede de indivíduos reais de tamanho semelhante levaria para atingir os estados correspondentes aos simulados. Entretanto, embora não permita uma estimativa numérica do tempo, a comparação entre duas simulações pode indicar qual seria temporalmente mais demorada.

Outra parte do estudo foca na distribuição de opiniões no estado de equilíbrio, e sua divisão em grupos de opinião, na forma de um grupo densamente povoado em torno de uma opinião média (consenso), a formação de dois grupos densos em torno de dois pontos distintos na distribuição (polarização) ou o surgimento de múltiplos grupos menores de opinião (fragmentação). Para certos valores extremos dos parâmetros, é possível ainda que a rede nem sequer se fragmente, mantendo-se com uma distribuição quase uniforme de

opiniões devido à não interação ou escassa interação dos indivíduos.

Além da formação de grupos e sua análise a respeito do número de grupos, também tratamos do tamanho do grupo e sua dispersão em torno do ponto médio. No modelo DW original, os grupos atraem a grande maioria ou a totalidade das opiniões para um ponto bastante denso. Condições iniciais ou estruturais que levem a um resultado que diverge do modelo DW original são significativas.

É necessário ressaltar que a divisão dos vértices que compõe a rede em grupos de opinião decorre exclusivamente da opinião atribuída a cada um deles e identifica apenas a adesão dos indivíduos a determinada opinião. Isto é, tal separação se baseia meramente em atributos, não havendo considerações topológicas na definição dos grupos. Contudo, como se vê mais adiante, a topologia tem influência no resultado final, embora não seja usada no particionamento do estado final de opiniões.

Por isso, utilizamos a expressão grupos de opinião ao invés de agregados para evitar a confusão entre dois conceitos distintos. Neste trabalho, agregado é um subgrafo, isto é, uma divisão modular de uma rede que pode ser entendido como uma comunidade numa rede social. Dois indivíduos podem ter a mesma opinião estando separados na rede e tendo evoluído suas opiniões independentemente. Assim, os grupos de opinião não necessariamente incluem indivíduos diretamente conectados ou no mesmo agregado. Enquanto o termo agregado é intercambiável para os dois conceitos na literatura [33], fazemos essa distinção no presente texto para evitar ambiguidades.

Em outras palavras, agregados topologicamente separados que eventualmente evoluam para a mesma opinião média serão considerados como pertencentes ao mesmo grupo de opinião.

Lembramos ainda que a dinâmica de opinião pode ter efeito estrutural na rede no caso de exclusão da aresta para indivíduos previamente conectados que se tornam excessivamente divergentes. Tal possibilidade já é tratada na literatura [71, 72], mas foge do escopo do trabalho atual.

As comunidades podem ser identificadas considerando-se ao mesmo tempo a estrutura da rede e os atributos dos vértices [33], mas neste trabalho e seguindo a linha descrita acima, consideramos apenas comunidades topológicas.

## 4.1 Influências Estruturais

Aplicamos o modelo DW nas condições originais, isto é, em um grafo completo, como referência. O uso de um grafo completo, no modelo original de DW, é prático, mas pouco realista em comparação com uma rede real. Para modelos progressivamente mais realistas, utilizamos redes com topologias distintas: grade regular, Erdős-Rényi (ER) e

livre de escala (SF), semelhantemente a outras análises no mesmo contexto [15, 58].

Carro *et al.*, [58] realizaram análises do modelo DW aplicado nos mesmos tipos de redes mencionadas acima, embora focando a análise no tamanho do maior grupo de opiniões. Fortunato [15] analisou a probabilidade de consenso em função do parâmetro  $d$ , estabelecendo um limite para o consenso universal em cada topologia de rede. Amblar e Deffuant [73] estudaram o efeito da topologia na propagação do extremismo. Observe também na literatura a aplicação do modelo DW a redes SF visando observação de resultados como consenso [74, 75] ou o efeito da discretização do intervalo de opiniões, quando apenas certos valores dentro do intervalo  $[0, 1]$  são permitidos [76].

Acrescentamos ainda u

ma análise de redes modulares. Esta é uma forma de explorar a estrutura ainda mais próxima de certos tipos de redes reais, como certos modelos de redes sociais.

#### 4.1.1 Efeitos da topologia de rede

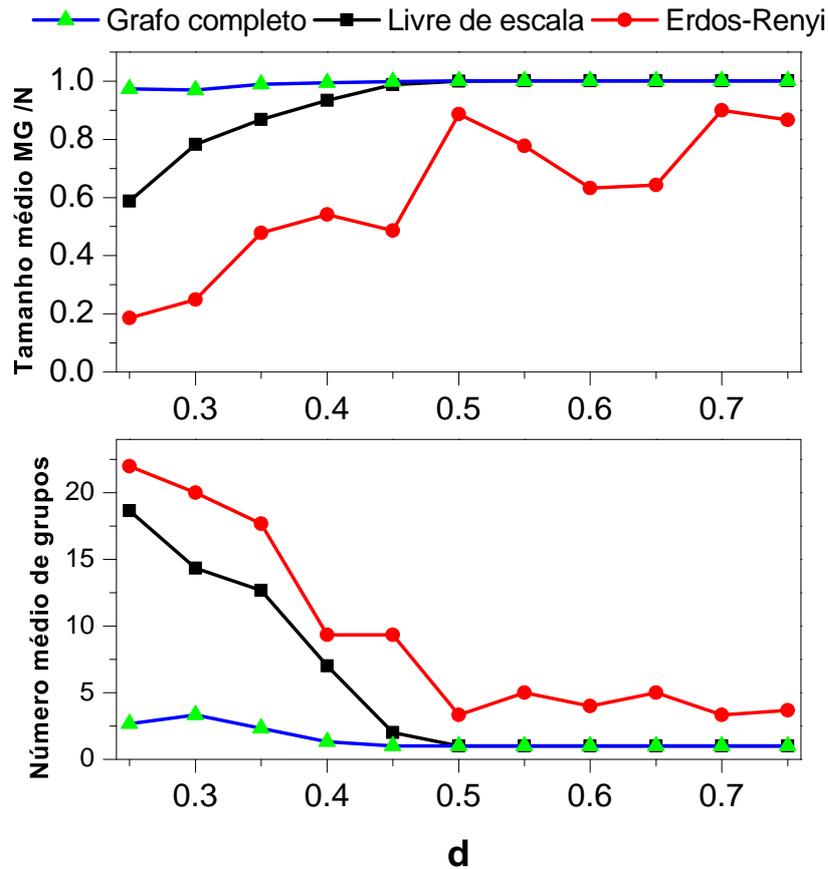
Os resultados originais do modelo DW, condensados na relação  $c \approx (2d)^{-1}$  (Eq. 3.2) para a relação entre o parâmetro de confiança  $d$  e o número de grupos de opiniões diferentes  $c$ , valem apenas para o caso de um grafo completo. Interessamos agora estudar outras topologias onde tal relação pode não se verificar.

Definimos primeiro o que chamamos de grupo de opinião no restante do trabalho. Com o intervalo de opiniões dividido em 100 faixas, consideramos preenchida a faixa que possui mais de  $N/200$  opiniões individuais, sendo  $N$  o número de vértices na rede. Abaixo desse limite, consideramos que a faixa é composta por indivíduos de opinião isolada de grupos. Essa definição depende de  $N$  de maneira linear, mas a simplicidade é útil no contexto deste trabalho, já que  $N$  é sempre pequeno ( $< 5000$ ). Faixas contíguas são consideradas um grupo de opinião. Ou seja, um grupo de opinião seria facilmente identificado visualmente num histograma. O método aqui descrito apenas automatiza a análise.

Analisamos também o tamanho relativo (ou fração do sistema) do grupo de opinião, isto é, o número de indivíduos no grupo dividido por  $N$ . Redes em consenso tendem a um grupo único de opinião de tamanho relativo igual a um.

Para diferentes topologias, a Figura 5 mostra esses dois parâmetros (número de grupos e tamanho do maior grupo de opinião) no estado final da dinâmica de DW para diferentes valores de  $d$ .

As redes invariantes em escala tendem para o resultado original no grafo completo apenas para  $d > 0.45$ , conforme já notado em trabalhos anteriores [15]. Os resultados em grafos Erdős-Rényi com os parâmetros escolhidos divergem do padrão original do



**Figura 5** – Formação de consenso para diferentes topologias em função do parâmetro  $d$ . Analisados em conjunto, o tamanho do maior grupo (MG) dividido pelo tamanho da rede e o número médio de grupos indicam quando a rede converge para um grupo único. Para redes SF,  $\gamma = 1.2$ ,  $\langle k \rangle \approx 1$  e  $Q \approx 0.9$ . Nas redes ER,  $p = 0.035$ ,  $\langle k \rangle \approx 34$  e  $Q \approx 0.15$ . Os valores de  $\langle k \rangle$  e  $Q$ , como visto posteriormente, são mais relevantes para a dinâmica que o paradigma de rede (ER ou SF).

modelo DW significativamente. Mesmo para valores grandes de  $d$  observamos a presença de mais de um grupo de opinião. Como se vê mais adiante, o grau médio  $\langle k \rangle$  da rede possui efeito determinante nessas medidas. Redes ER iniciadas com certos valores de  $p$  podem gerar redes com alto  $\langle k \rangle$  e pequeno valor de modularidade, evoluindo rapidamente para o consenso. Tais resultados são relevantes para calibragem e referência da solução computacional utilizada.

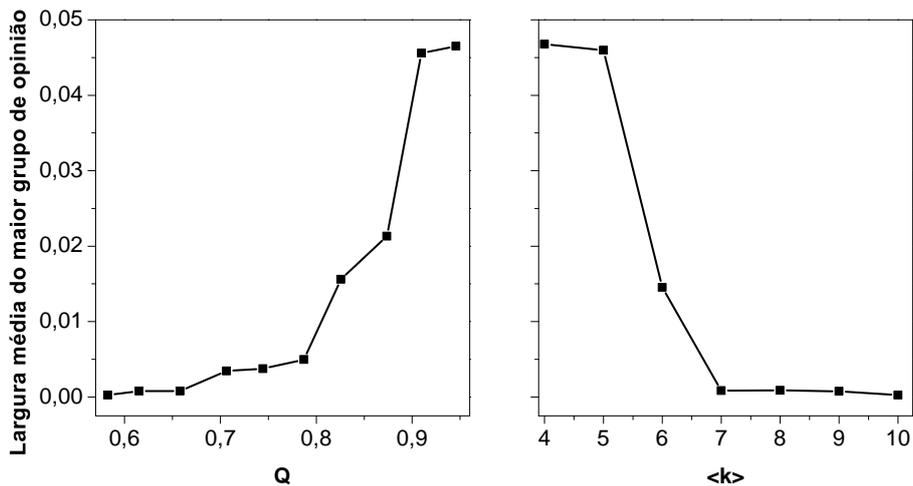
#### 4.1.2 Redes modulares

Para a análise nas redes modulares, observamos o efeito da variação do parâmetro de confiança  $d$  em redes LFR, variando o grau médio  $\langle k \rangle$  e a modularidade  $Q$ . A primeira medida estudada é a largura da distribuição final de opiniões do maior grupo de opinião. Dado o intervalo entre as opiniões extremas, 0 e 1, uma largura igual a 1 indica largura máxima.

Larguras menores indicam opiniões mais concentradas e um resultado progressivamente mais compatível com o alcançado pelo modelo DW nas condições originais.

Para a variação de  $Q$ , fixamos  $\langle k \rangle = 5$  e variamos a modularidade entre 0.58 e 0.94. Para a variação de  $\langle k \rangle$ , mantivemos  $Q \approx 0.75$ , e variamos o grau médio entre 4 e 10. Como visto posteriormente na Seção 4.4, essa variação de parâmetros é compatível com os valores comumente observados em redes reais.

Na Figura 6, apresentamos os resultados para as medidas de largura do grupo central de opiniões nessas duas situações. O grupo de opinião é definido conforme o proposto na Subseção 4.1.1, e a largura é, dado um grupo qualquer, a diferença entre valor máximo de opinião dentro do grupo e o valor mínimo correspondente. Notamos o alargamento do maior grupo para o aumento da modularidade, e um leve efeito de estreitamento conforme o grau médio  $\langle k \rangle$  cresce. Isto significa que, para redes modulares, altos valores

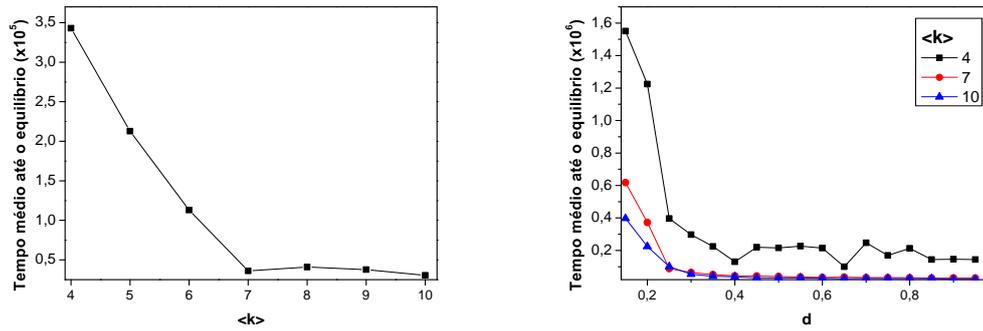


**Figura 6** – Largura média do maior grupo de opiniões em redes modulares do tipo LFR de  $N = 1000$  com variação de  $Q$  (esquerda) e  $\langle k \rangle$  (direita), com parâmetro de confiança fixo em  $d = 0.5$ .

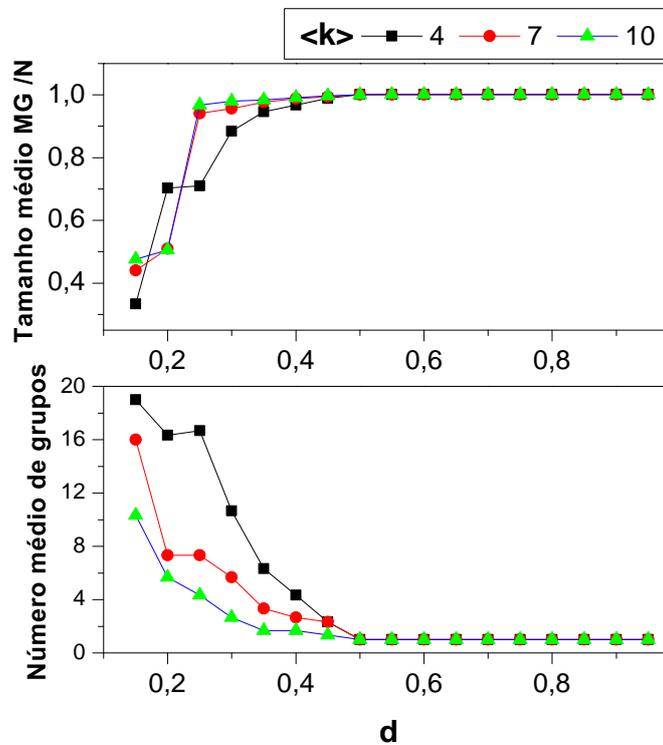
de modularidade significam um estado de equilíbrio com opiniões mais distantes do ponto central. Já para o grau médio, o efeito é o inverso.

Para as medidas de consenso, iniciamos com o grau médio. O tempo até o estado de equilíbrio decresce com o grau médio e com  $d$ , este de maneira consistente ao longo da variação de  $d$ , conforme mostra a Figura 7.

As medidas do maior grupo de opinião e do número de grupo de opiniões em função de  $d$  demonstram um limite para consenso próximo de  $d = 0.5$ , consistente com o limite universal [15]. A Figura 8 mostra como diferentes valores de grau médio convergem para um mesmo ponto onde o número esperado de grupos de opinião é 1, de tamanho tendendo a  $N$ .



**Figura 7** – Tempo até o equilíbrio em função do grau médio ( $d = 0.5$ ) e para diferentes  $\langle k \rangle$  variando-se  $d$  em redes geradas com o paradigma LFR de  $N = 1000$ . O equilíbrio para valores pequenos de  $\langle k \rangle$  e  $d$  não significa consenso.



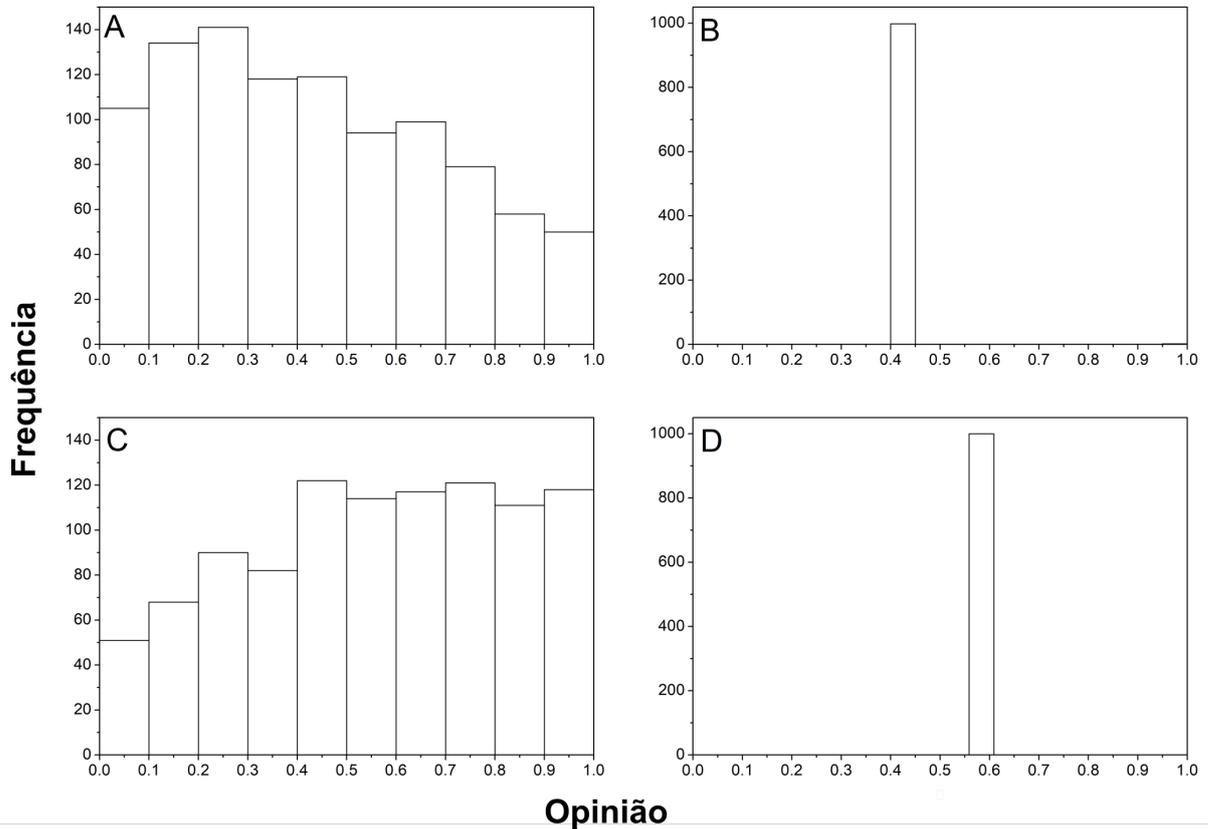
**Figura 8** – Tamanho do maior grupo de opiniões (cima) e número médio de grupos de opinião (baixo) em redes modulares LFR ( $N = 1000$ ) com  $Q \approx 0.75$ , para diferentes valores de  $\langle k \rangle$ .

## 4.2 A Influência das Condições Iniciais

O modelo original de DW utiliza uma distribuição uniforme como estado inicial de opiniões. Para estudar o efeito da distribuição inicial no resultado final, alteramos as condições iniciais na forma de uma distribuição normal de  $N$  opiniões com média  $\mu_D$  variável e desvio padrão igual a 1. A distribuição é logicamente truncada pois  $x_i \in [0, 1]$ .

As alterações na distribuição inicial mudam a posição da maioria da população em relação às opiniões extremas 0 e 1. Nesta configuração, se a média  $\mu_D$  é diferente de 0.5

a maioria pode estar a esquerda ou direita do ponto médio do intervalo, dependendo da média inicial. Contudo, a maioria é significativamente menos polarizada e menos distante do centro da distribuição, como nos casos das distribuições testadas por Carro [58], apesar dos típicos histogramas desbalanceados, como visto na Figura 9.



**Figura 9** – Histogramas iniciais (**A** para  $\mu_D = 0.2$  e **C** para  $\mu_D = 0.7$ ) e finais (**B** e **D**) de duas distribuições normais de opiniões em um grafo completo de  $N = 1000$ , utilizando  $d = 0.5$ .

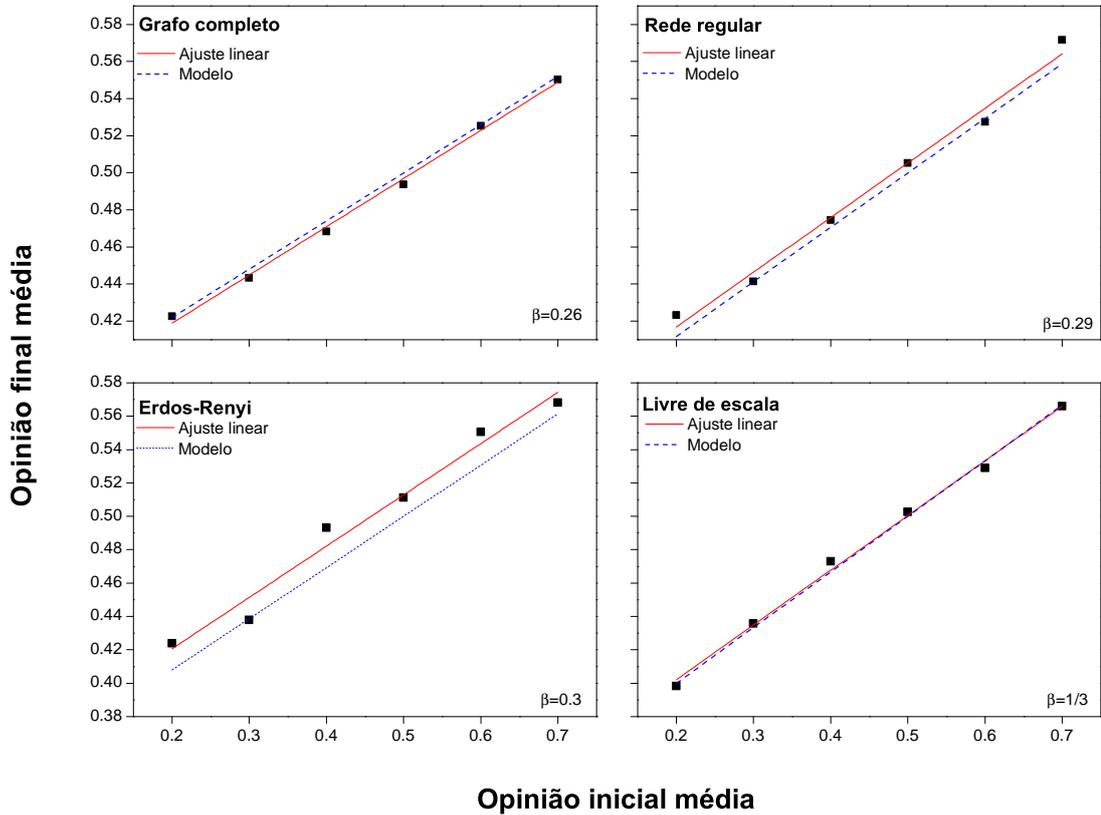
Busca-se, dessa forma, observar os efeitos da aplicação do modelo DW em uma maioria em leve desequilíbrio em relação a um ponto central, onde há prevalência de um lado da distribuição, à esquerda ou direita do ponto médio, mas de forma que a fração de  $N$  com opinião do lado oposto não seja irrelevante. Na Figura 9A,  $\mu_D = 0.2$ , e na Figura 9C,  $\mu_D = 0.7$ .

Não se trata obviamente de um cenário de polarização, mas um em que a “normalidade” da opinião é deslocada para um lado ou outro do espectro. Efeitos de uma polarização próxima aos extremos serão estudados mais adiante.

#### 4.2.1 Estado final como uma função da média da distribuição normal inicial

As alterações nas condições iniciais são consistentemente responsáveis por mudanças no resultado final. A Figura 9 mostra como as distribuições finais são afetadas pela inicial.

A relação da média final das opiniões com a média da distribuição normal inicial é aparentemente linear, conforme Figura 10. Cada modelo de rede tem uma inclinação bem definida, com exceção das redes ER.



**Figura 10** – Opinião média final em função da opinião média inicial para grafo completo, rede regular retangular ( $10 \times 100$ ) e redes ER ( $p = 0.035$ ) e SF ( $\gamma = 1.2$ ). Todas as redes com  $N = 1000$ , e a dinâmica ocorre com parâmetro  $d = 0.5$ . O modelo corresponde a Equação 4.1, sendo  $\beta$  a inclinação da reta.

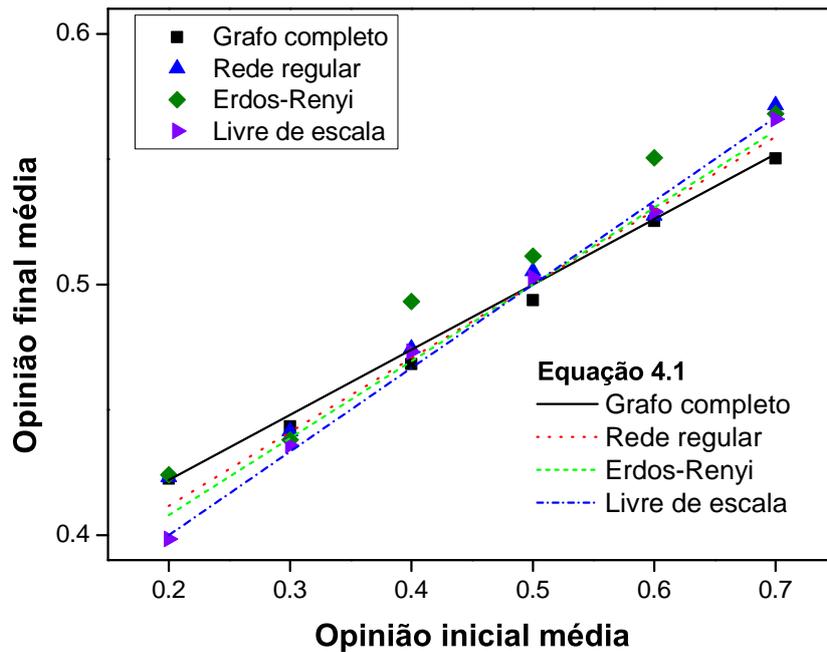
Para este caso, mantivemos  $d$  fixo em 0.5. A dependência do ponto médio do intervalo e do parâmetro  $d$  do modelo DW permanece evidente. A população ainda caminha para um consenso, conforme previsto pelo modelo DW, mas a posição do grupo majoritário se determina em parte pela maioria inicial.

Para redes com uma distribuição normal de opiniões como condição inicial, a opinião final média é dada pela expressão

$$\langle x_f \rangle = x_m - \beta(x_m - \mu_D) \tag{4.1}$$

onde  $x_m$  é a opinião média do intervalo, dada por  $(x_{max} - x_{min})/2$ ,  $\mu_D$  é a média da distribuição normal e  $\beta$  é a inclinação da reta, variável conforme a topologia da rede. Para

o caso em que  $x \in [0, 1]$ ,  $x_m = 0.5$ . Os valores são ligeiramente diferentes para todas as topologias testadas (Figura 10), ficando próximo de  $\beta = \frac{1}{3}$  para redes com topologia, e mais próximo a  $\beta = \frac{1}{4}$  para grafos completos e grades regulares. O resultado, portanto, mostra que a variação devida às condições iniciais é semelhante em todas as topologias de rede testadas (Figura 11).



**Figura 11** – Opinião média final em função da opinião média inicial em todas as topologias testadas. Todas as redes têm  $N = 1000$ . A rede regular tem formato  $10 \times 100$ . Para as redes livres de escala,  $\gamma = 1.2$ , e para os grafos aleatórios Erdos-Renyi,  $p = 0.035$ . O modelo é o da Equação 4.1

### 4.3 Efeitos da Conformidade

Para observar os efeitos da conformidade em uma rede modular, executamos nas mesmas redes o modelo de dinâmica de opinião DW original e com o fator de conformidade aplicado, baseado nos estudos originais de Asch discutidos anteriormente.

O modelo DW é fundado em interações pareadas. A inclusão do fator de conformidade acrescenta a chance de uma influência social difusa entre o indivíduo e sua vizinhança imediata. A evolução temporal segue acontecendo de acordo as Equações 3.1, com a modificação da conformidade sendo apenas mais uma variável no processo estocástico.

A aplicação do fator de conformidade se dá de maneira que a cada passo temporal um indivíduo aleatório  $i$  tem a chance  $p_{asch}$  de assumir a opinião média  $x_v$  de seus  $k_i$

indivíduos adjacentes em caso de consenso entre os vizinhos. A opinião do indivíduo  $i$  assume o valor  $x_v$  mesmo que  $|x_i - x_v| > d$ , ignorando o parâmetro de confiança.

A desconsideração do parâmetro  $d$  é compatível com os resultados de Asch, tendo em vista que o indivíduo assumia uma posição extrema e visivelmente discrepante para se conformar à maioria, dependendo do tamanho desta. Ainda para manter a consonância com os estudos originais, o tamanho da maioria é levado em conta, e  $p_{asch}$  é reduzido por um fator se o tamanho da maioria é menor que três, em consonância com os resultados observados nos estudos listados na Tabela 1.

Definimos que a vizinhança está em consenso se o desvio padrão das opiniões da vizinhança  $\sigma_v$  é menor que uma fração do limite  $d$ . Para as simulações a seguir, usamos  $\sigma_v < d/20$ . Como já dito, a chance  $p_{asch}$  é considerada na totalidade para maioria maior ou igual a três indivíduos vizinhos em consenso. Para dois vizinhos,  $p_{asch}$  é reduzida em um terço, e pela metade para apenas um vizinho. Evidentemente, o caso de conformidade com apenas um vizinho não pode ser chamado com correção semântica e numérica de efeito “da maioria”, mas é uma espécie de confronto abordada e com efeitos observáveis desde os primeiros estudos relacionados ao efeito [3, 5].

Abordagens anteriores já propuseram uma dinâmica de opinião mista, considerando no mesmo modelo a interação do indivíduo com um par conectado e com seu meio social, com foco na transição de fase fora do equilíbrio [77], embora não usando o modelo DW. Em um trabalho recente, Cheng e Yu analisaram a pressão social sobre a opinião de um indivíduo utilizando o modelo de Hegselmann-Krause [78].

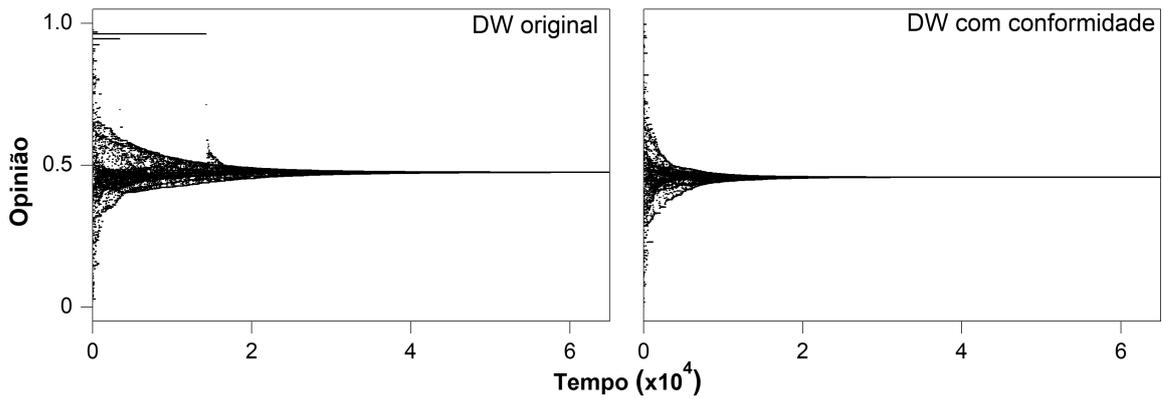
Na evolução temporal, em geral, não há diferença óbvia para os gráficos de evolução das opiniões em função do tempo (Figura 12). A evolução das opiniões de uma população apresenta a mesma forma em direção ao equilíbrio, diferindo apenas pela velocidade com que isso acontece. Como se vê adiante, a pressão social diminui o tempo para alcançar o estado de equilíbrio.

Abaixo, testamos o efeito da conformidade em associação com dois parâmetros de redes, o grau médio e a modularidade, no estado final de equilíbrio da rede. Após, variamos o parâmetro  $d$  e fazemos comparações em relação ao consenso.

### 4.3.1 Conformidade e o grau médio

Variamos o grau médio  $\langle k \rangle$  da rede entre os valores 4 e 10. Resultados de estudos anteriores com redes sociais reais indicam valor de grau médio em redes criminais entre 4 e 6 [79], no espalhamento de vírus por e-mail igual a 3.38 [80] e na rede de co-autoria de artigos científicos em Física igual a 9.7 [81]. Tais exemplos mostram que o valor usado nas simulações é compatível com dados de redes reais.

Aplicamos o modelo de dinâmica de opinião original e com o fator de conformi-



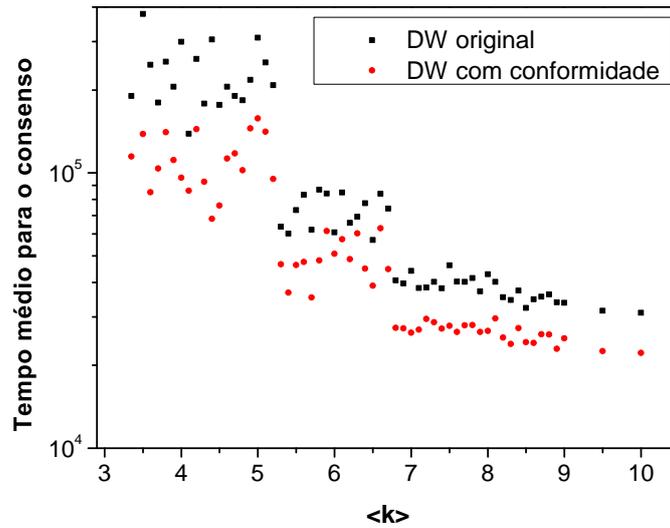
**Figura 12** – Evolução temporal das opiniões em uma rede modular de tamanho  $N = 1000$ ,  $\langle k \rangle = 9.48$  e  $Q \approx 0.82$ , utilizando  $d = 0.5$  com o modelo DW original (esq.) e com conformidade (dir.).

dade na faixa de graus médios mencionada. Todas as redes têm tamanho  $N = 1000$  e modularidade em média próxima de  $Q = 0.75$ , com pequenas variações. A amostra é de dez redes para cada valor de  $\langle k \rangle$ . Tais redes modulares foram obtidas com o LFR de referência utilizando os valores correspondentes para  $\langle k \rangle$  e com  $\mu_{LFR} = 0.25$ . O parâmetro de conformidade, quando aplicado, foi mantido constante em  $p_{asch} = 0.6$ , próximo do maior valor de probabilidade de adesão à maioria observado em estudos de Asch, buscando assim uma fácil visualização do efeito sobre a dinâmica de opinião nas redes estudadas.

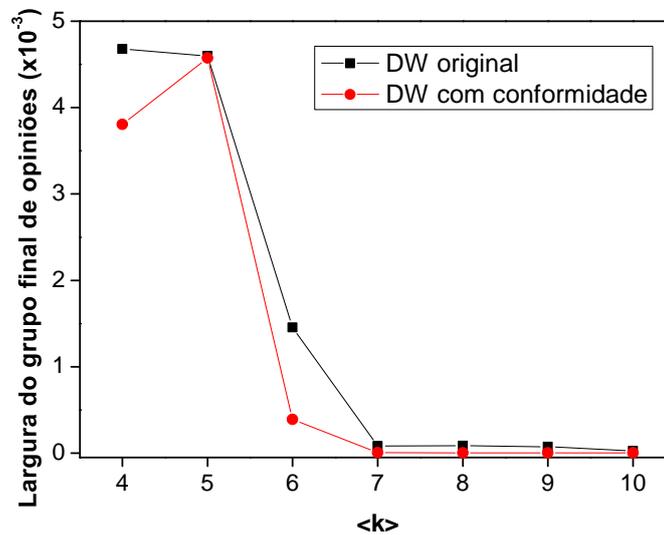
Tanto para os resultados com o modelo original quanto para os com conformidade, o efeito da variação de  $\langle k \rangle$  é evidente, com quedas pronunciadas em certos valores de  $\langle k \rangle$ . Redes com conformidade são consistentemente mais eficientes para o alcance do equilíbrio em relação a redes sem o fator de conformidade aplicado, conforme mostrado na Figura 13.

Há reduções drásticas do tempo até equilíbrio em redes com e sem conformidade nas proximidades de  $\langle k \rangle = 5.1$  e  $\langle k \rangle = 6.8$ , de maneira muito parecida nos dois casos. O tempo para equilíbrio parece variar aleatoriamente ao redor de um ponto médio em faixas de valores de  $\langle k \rangle$  até os valores indicados acima, sofrendo uma transição para o próximo valor médio.

Em relação ao estado de equilíbrio da distribuição de opiniões, há uma tendência dos grupos mais próximos do ponto médio do intervalo de opiniões serem mais compactos em torno do ponto central quando se aplica o parâmetro de conformidade, como visível na Figura 14, que mostra a medida da largura do maior grupo de opiniões. A diferença máxima relativa é próxima de um fator maior que 10, embora ocorra para valores muito pequenos de diferença (da ordem de  $10^{-5}$ ), e parece se estabilizar após  $\langle k \rangle \geq 7$ .



**Figura 13** – Tempo médio de consenso para redes modulares LFR ( $N = 1000$ ), com  $d = 0.5$ , em função do grau médio após aplicação do modelo DW original e com conformidade. O modelo LFR permite definir um  $\langle k \rangle$  aproximado arbitrário. A mesma rede é então submetida à dinâmica original e à modificada com conformidade.



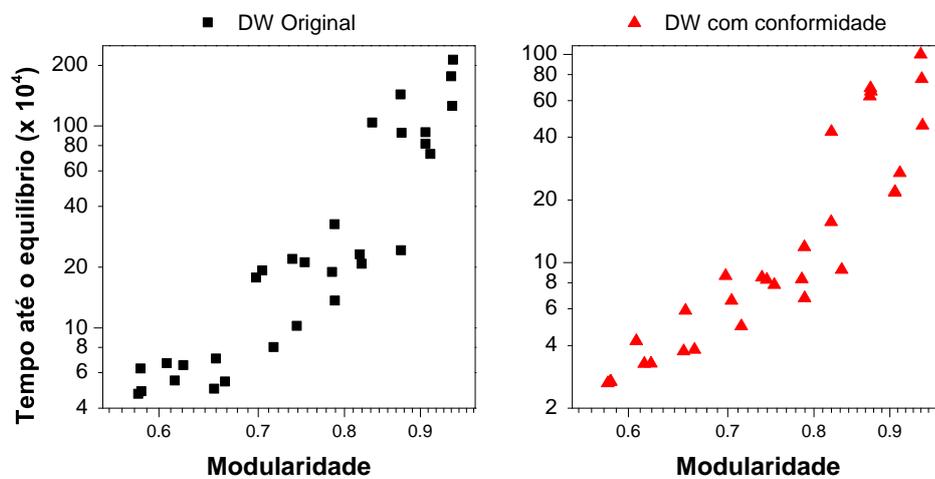
**Figura 14** – Largura média do maior grupo da distribuição final de opiniões para redes modulares do modelo LFR ( $N = 1000$ ) em função do grau médio após aplicação do modelo DW original e com conformidade, com  $d = 0.5$ .

### 4.3.2 Conformidade e a modularidade

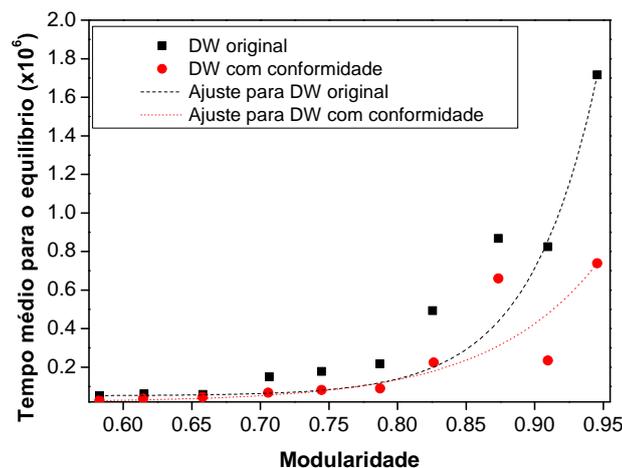
Como visto na Seção 2.2, a modularidade de uma rede do LFR de referência é alterada através do parâmetro de mistura  $\mu_{LFR}$ , que é uma das condições iniciais do algoritmo de geração das redes. Variamos  $\mu_{LFR}$  entre 0.05 e 0.5. A modularidade é uma

função inversa desse parâmetro, e com isso tivemos redes com valor de  $Q$  variando entre aproximadamente 0.55 e 0.95. Mantivemos para esta seção o grau médio  $\langle k \rangle$  em 5, e o mesmo parâmetro de conformidade  $p_{asch} = 0.6$ , quando cabível.

A Figura 15 mostra que o tempo de equilíbrio no modelo de DW (original ou com conformidade) aumenta de forma notável com a modularidade. Na Figura 16 mostramos em um único painel os dois conjuntos de dados da Figura 15, em média por faixa de valor de  $Q$ . Nessa figura, além de reforçar a notável dependência aparentemente exponencial do tempo em relação a  $Q$ , vemos que o efeito da conformidade, mais uma vez, é de reduzir o tempo de equilíbrio.



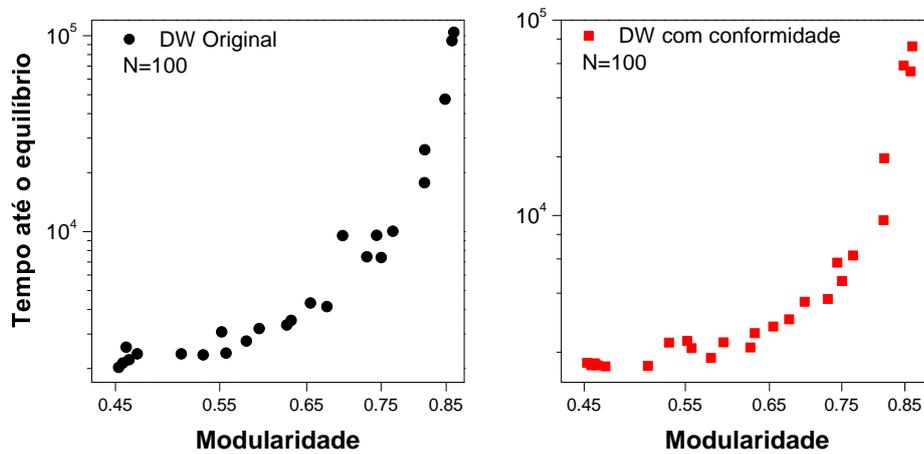
**Figura 15** – Tempo de equilíbrio para redes modulares ( $N = 1000$ ) em função da modularidade, no modelo DW original e com conformidade.



**Figura 16** – Tempo médio de equilíbrio para redes modulares LFR de tamanho  $N = 1000$ , com e sem conformidade, em função da modularidade. Uma forma de reaperar os dados da Figura 15 por faixas de modularidade  $Q$ . Em todas as redes,  $\langle k \rangle = 4$ . Os ajustes são exponenciais.

Apesar do efeito no tempo até o estado de equilíbrio, uma vez que o estado é atingido não há diferenças significativas no tamanho do maior grupo de opiniões ou no número de grupos formados entre redes com e sem conformidade. As redes convergem para um consenso para pequenos valores de  $d$ , com o número de indivíduos no grupo principal tendendo a  $N$ , e a aplicação do parâmetro de Asch afeta apenas o tempo levado para que isso ocorra.

A influência da conformidade se mantém para redes com outros valores de  $N$ . Em simulações com redes modulares pequenas ( $N=100$ ), observamos resultados semelhantes, tanto na tendência de crescimento do tempo para equilíbrio em função da modularidade quanto na tendência de tempo menor para o estado de equilíbrio com o uso do parâmetro de Asch, conforme Figura 17. Como se nota, quanto menor a rede menor o efeito. Ao



**Figura 17** – Tempo médio de equilíbrio em função da modularidade para redes modulares de tamanho  $N = 100$ , sem e com parâmetro conformidade ativo. O efeito no tempo é relativamente menor para redes pequenas, mas ainda observável. Em todas as redes,  $\langle k \rangle = 4$ .

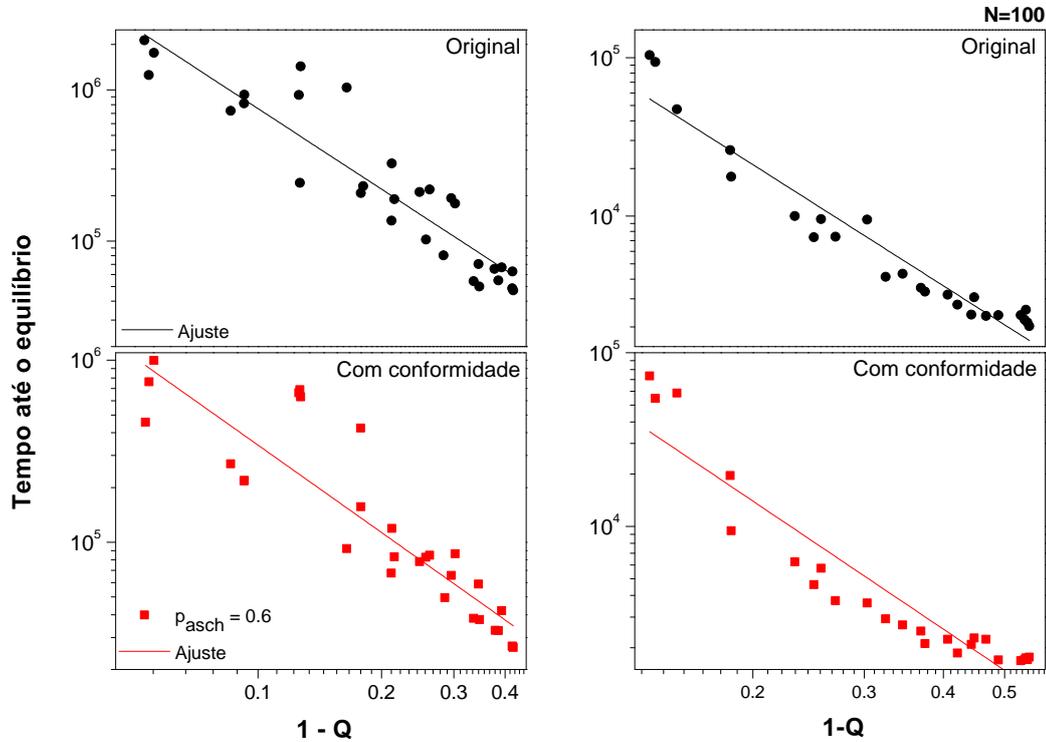
contrário do que acontece com a variação do grau médio, a diferença relativa com a qual a variação da modularidade afeta o tempo de consenso nos dois modelos de dinâmica de opinião é menos pronunciada.

Em soma, redes com maior modularidade apresentam tempo médio até o equilíbrio maior, tanto no modelo DW original, quanto no modelo com conformidade. Mais uma vez, o fator de conformidade produz tempos de equilíbrio ligeiramente inferiores.

Enquanto o tempo de equilíbrio em função de  $\langle k \rangle$  tem faixas estáveis entre pontos de transição, o tempo em função de  $Q$  tem uma forma aparente de lei de potência, divergindo para  $Q = 1$  (Figura 18), conforme a Equação 4.2:

$$t = 10^a(1 - Q)^{-\gamma} \quad (4.2)$$

sendo que  $a \approx 4$  para casos com e sem conformidade em redes com  $N = 1000$ . O expoente, por sua vez, difere. Para redes com a dinâmica original,  $\gamma \approx 1.77$ . Com a conformidade considerada,  $\gamma \approx 1.60$ . Em redes com  $N = 100$ ,  $a \approx 2.5$  e  $\gamma \approx 2.54$  na dinâmica original e  $\gamma \approx 2.45$  com o parâmetro de Asch considerado.



**Figura 18** – Tempo até o equilíbrio em redes com  $N = 1000$  e  $N = 100$  para dinâmica original e com parâmetro de Asch aplicado em função de  $1 - Q$ . O tempo diverge conforme  $Q \rightarrow 1$ . Em geral, o tempo para o equilíbrio parece seguir uma lei de potência na forma da Equação 4.2. Em todas as redes,  $\langle k \rangle = 4$ .

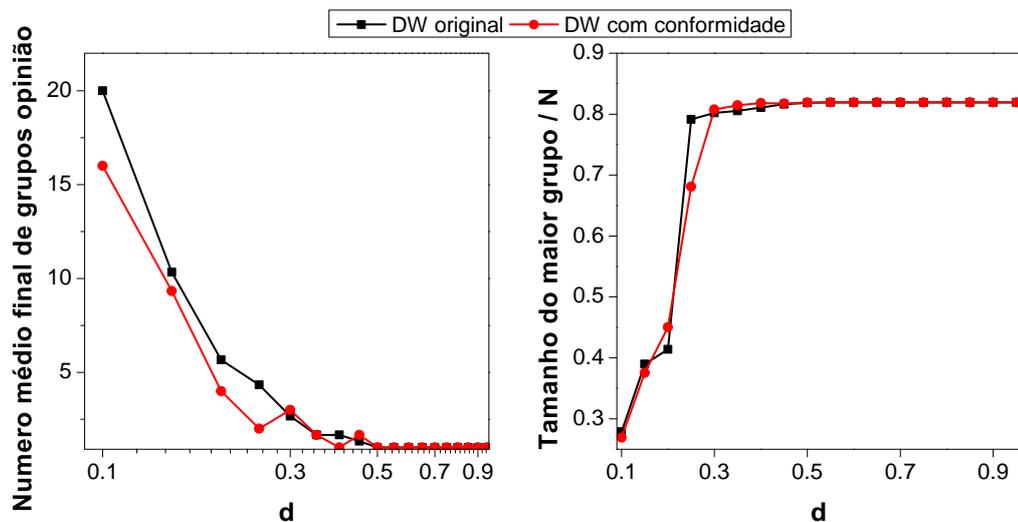
Esse efeito pode ser explicado pela estrutura modular e pela dinâmica do fator de Asch. A interconexão dessas pequenas comunidades dificulta o processo de formação da maioria através da evolução temporal do modelo DW mas facilita a seleção de vizinhos em consenso para o processo de conformidade social. Um processo acaba interferindo assim na dinâmica do outro.

Em conjunto com o alargamento dos grupos de opinião visto anteriormente ser uma função da modularidade  $Q$  (Figura 6), a dificuldade de consenso conforme a modularidade cresce, mesmo em cenários facilitados pela conformidade, pode levar a uma pulverização de opiniões, onde os grupos são heterogêneos e pouco coesos. Tendo como extremo o cenário onde cada cabeça (nodo  $i$ ) é uma sentença (opinião  $x_i$ ).

### 4.3.3 Conformidade e o parâmetro de confiança

Na variação do parâmetro de confiança, a conformidade gera o consenso para valores ligeiramente menores de  $d$  (Figura 19). Na comparação do número de grupos de opinião após o equilíbrio, o efeito no tamanho do maior grupo de opinião não tem diferenças significativas nos dados analisados.

Após um valor limite próximo a  $d = 0.5$ , as diferenças no consenso não mais existem e as populações com ambas as dinâmicas evoluem de maneira semelhante, independentemente da aplicação da probabilidade de acompanhamento da opinião da maioria.



**Figura 19** – Medidas de consenso em função da variação do parâmetro  $d$  em redes modulares do modelo LFR de tamanho  $N = 1000$  e grau médio  $\langle k \rangle = 10$  para dinâmica de opinião com e sem conformidade.

## 4.4 Redes reais

Passamos a uma aplicação da dinâmica discutida até aqui em redes reais. Há uma análise anterior utilizando redes reais e o modelo de DW feita no trabalho de Jalili [82]. Entretanto, a modificação aplicada no trabalho mencionado incluiu o conceito de poder social do indivíduo e usou redes reais do tipo invariante em escala.

Usamos redes disponibilizadas por trabalhos anteriores, de tamanhos compatíveis com as redes artificiais das seções prévias. Todas são não direcionadas e sem peso nas arestas. Caso o conjunto de dados original contenha peso, ele é sempre ignorado, e consideramos apenas a existência de conexão entre os indivíduos representados pelos vértices.

As redes escolhidas são redes sociais, que é o habitat natural das opiniões. Algumas são redes sociais *online*, isto é, onde a interação se dá através de redes como a Web ou a Internet, e outras *offline*, quando a interação se dá de maneira pessoal ou analógica. Os dados tratados são anonimizados.

As redes são: uma amostra de círculos sociais da rede social Facebook [83, 84], indivíduos que trocaram e-mails em uma instituição de pesquisa na Europa [85, 86], amigos de estudantes adolescentes [87], membros da máfia italiana Ndrangheta [88] e um mapeamento da relação entre blogs políticos dos EUA [89]. Listamos abaixo as redes com mais detalhes.

1. **Facebook**: uma pequena amostra de um conjunto de amigos interconectados na rede social Facebook. Cada vértice é um perfil pessoal e as arestas são as relações de amizade. Rede com alta modularidade (0.83).
2. **E-mail**: cada vértice é um membro de uma instituição de pesquisa europeia, e suas conexões representam a existência de troca de e-mails entre dois membros. Os dados são anônimos, e não incluem o conteúdo das mensagens. O conjunto de dados original era direcionado, mas para este trabalho desconsideramos a direção das arestas. Rede com alto grau médio em relação às demais (50.9).
3. **Adolescentes**: dados sobre relações de amizade entre estudantes adolescentes, segundo questionários respondidos por eles mesmos. Rede com o menor valor de grau médio do conjunto estudado (10.2)
4. **Ndrangheta**: relações entre membros da organização criminosa italiana Ndrangheta inferidas a partir da coparticipação em reuniões do grupo. Os dados originais foram extraídos de um processo criminal na justiça da Itália. Da rede original, excluímos vértices desconectados, reduzindo o tamanho do mapeamento original. Menor rede analisada ( $N = 151$ ), com modularidade baixa (0.44).
5. **Polblogs**: mapeamento de blogs na Web focados na política americana. Os dados originais incluem os endereços dos blogs e o alinhamento binário com um dos partidos dominantes, o Democrata e o Republicano. Os dados tratados para este trabalho incluem apenas a estrutura da rede e as posições divergentes iniciais. Removemos os vértices desconectados, reduzindo o tamanho original do conjunto de dados.

Conforme listado, as redes são de tipos distintos de interação humana: *online* (1, 2 e 5) e *offline* (3, 4), abertas (1, 3, 5) e fechadas (2, 4). As redes escolhidas variam também significativamente os parâmetros estudados nas seções anteriores, conforme mostram as informações relativas à estrutura de cada rede na Tabela 2.

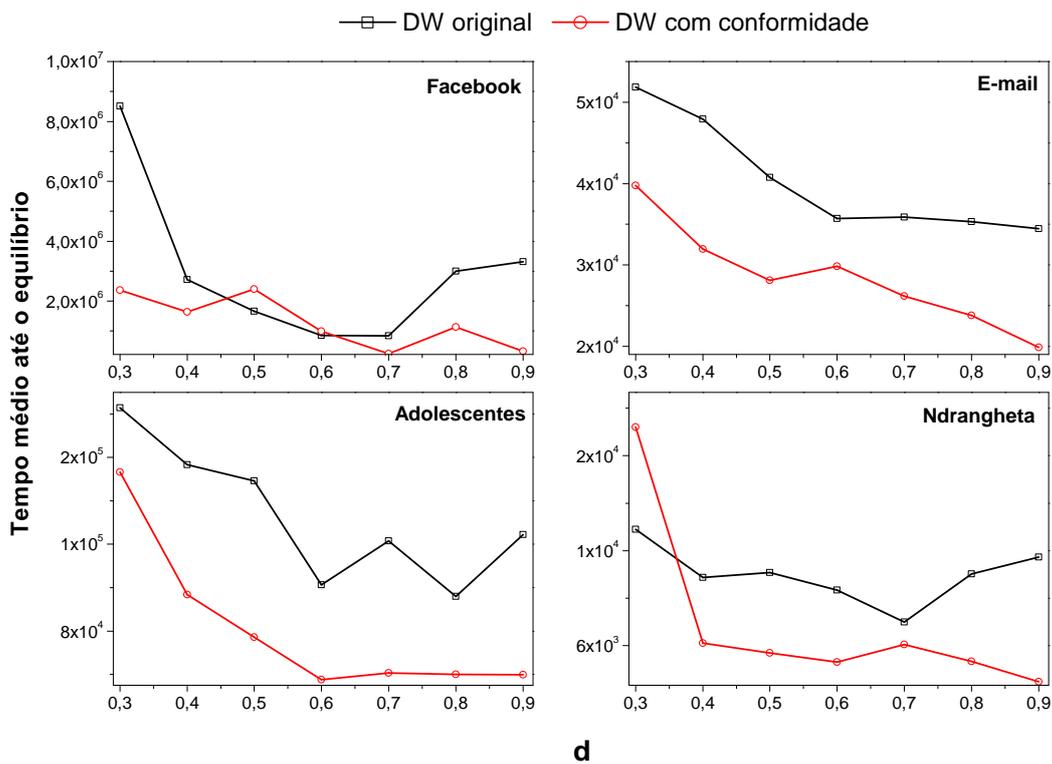
Utilizamos as redes 1 a 4 da Tabela 2 na análise de conformidade em relação ao parâmetro  $d$ . A rede 5 abordamos posteriormente no tratamento da aplicação da conformidade em condições iniciais não uniformes.

#	Rede	$N$	$A$	$\langle k \rangle$	$Q$	Online	Aberta
1	Facebook	4039	88234	43.7	0.83	S	S
2	E-mail	1005	25571	50.9	0.43	S	N
3	Adolescentes	2539	12969	10.2	0.65	N	S
4	Ndrangheta	151	1619	21.4	0.44	N	N
5	Polblogs	1222	16725	27.4	0.43	S	S

**Tabela 2** – Parâmetros topológicos básicos das redes sociais reais utilizadas neste trabalho.

### 4.4.1 Conformidade em redes reais

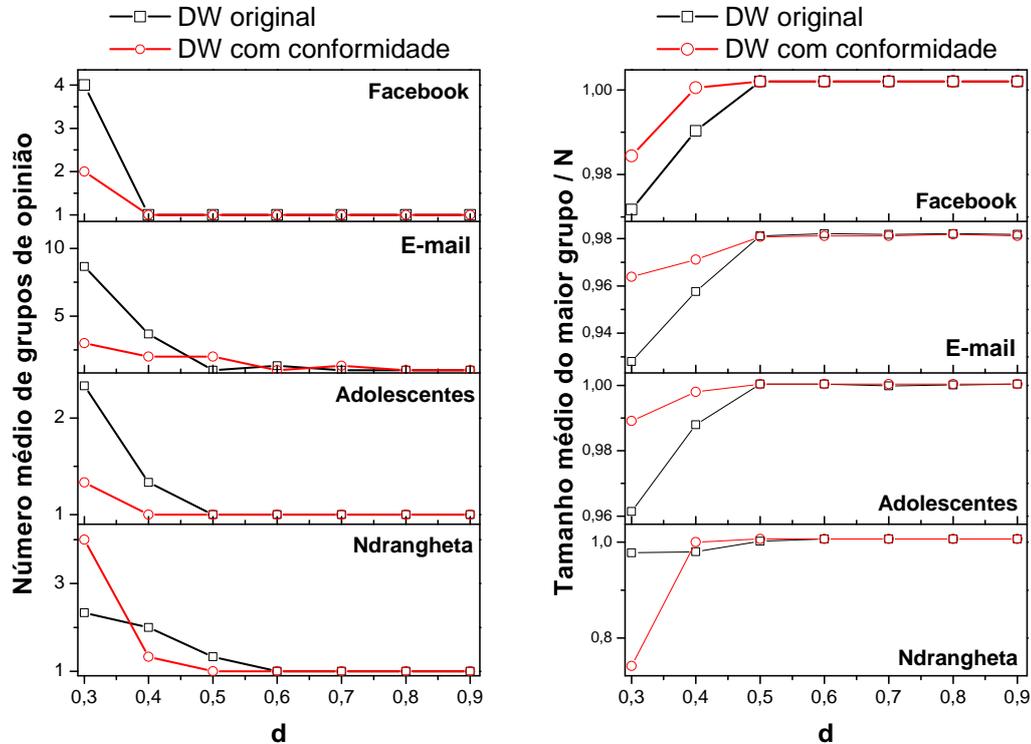
Nas redes reais verificamos o mesmo efeito da conformidade observado nas redes artificiais. Isto é, iniciando-se com uma distribuição uniforme de opiniões, o tempo até o equilíbrio é menor quando incluímos conformidade, conforme a Figura 20.



**Figura 20** – Tempo até o equilíbrio das redes reais para DW original e DW com conformidade. A condição inicial é uma distribuição uniforme. Para a conformidade aplicada,  $p_{asch} = 0.6$ . As variações pontuais discrepantes que indicam um tempo maior para a dinâmica com conformidade podem ser explicadas pelo pequeno tamanho da amostra. Especialmente no caso do Facebook, o problema é computacionalmente custoso.

Em relação ao equilíbrio, também há uma tendência a redes com conformidade atingirem o consenso para valores menores de  $d$ . Na Figura 21 se observa que as redes

com conformidade têm seu número de grupos tendendo a 1 para parâmetros de confiança menores que suas contrapartes usando o modelo DW original. Também, o tamanho do grupo majoritário de opiniões tende a  $N$  mais rapidamente.



**Figura 21** – Número de grupos de opinião (esq) e tamanho do maior grupo de opinião normalizado pelo tamanho da rede (dir) para quatro redes reais. Para a conformidade aplicada,  $p_{asch} = 0.6$ . As medidas apresentadas indicam em média uma facilitação do consenso para o parâmetro aplicado.

É visível que os resultados em redes reais se aproximam mais dos resultados de redes invariantes em escala demonstrados em seções anteriores. Os resultados apontam também similaridade com o que se viu em redes artificiais: a conformidade torna o consenso mais provável para valores menores que o  $d$  crítico do modelo DW original, e é atingido em um menor tempo.

#### 4.4.2 Polblogs: conformidade e condições iniciais

No conjunto de dados original [89], cada vértice representa um blog, e cada ligação um *hyperlink* entre blogs. Os vértices possuem como atributo um número 0 ou 1, representando, respectivamente, apoio ao partido Republicano e ao partido Democrata. Partindo desses dados, após remover vértices desconectados, tratamos cada vértice como uma pessoa, portadora de uma opinião e sujeita à dinâmica de DW. Pela natureza dos blogs à época, intrinsecamente vinculados aos fenômenos conhecidos como *citizen journalism* ou ainda *citizen commentary* [90], a natureza pessoal e quase personalíssima de blogs permite que essa analogia seja feita sem perda de precisão.

Para distribuir opiniões contínuas a partir da atribuição binária de grupos 0 e 1, fizemos das opiniões uma função das conexões entre blogs pertencentes ao grupo oposto. A ideia básica é que mais conexões com vértices do grupo divergente indicam maior propensão a uma posição ao centro do espectro. Como o modelo de DW envolve um parâmetro de *confiança*, e como  $d$  pode ser compreendido como uma medida de *tolerância*, possuir mais ligações com indivíduos do grupo oposto pode indicar uma posição mais ao centro, enquanto a ausência de conexões com a divergência resultará em um isolamento no extremo.

Portanto, a opinião  $x_i$  de um indivíduo  $i$  recebe inicialmente o valor

$$x_i = x_m + \gamma T_i, \quad (4.3)$$

onde  $x_m$  é a posição extrema do grupo ao qual  $i$  pertence (como são dois grupos, republicanos e democratas no caso estudado, os valores são 0 ou 1),  $\gamma$  é um multiplicador unitário que indica a direção do centro da distribuição (1 e -1, respectivamente) e  $T$  é uma taxa de tolerância dada por

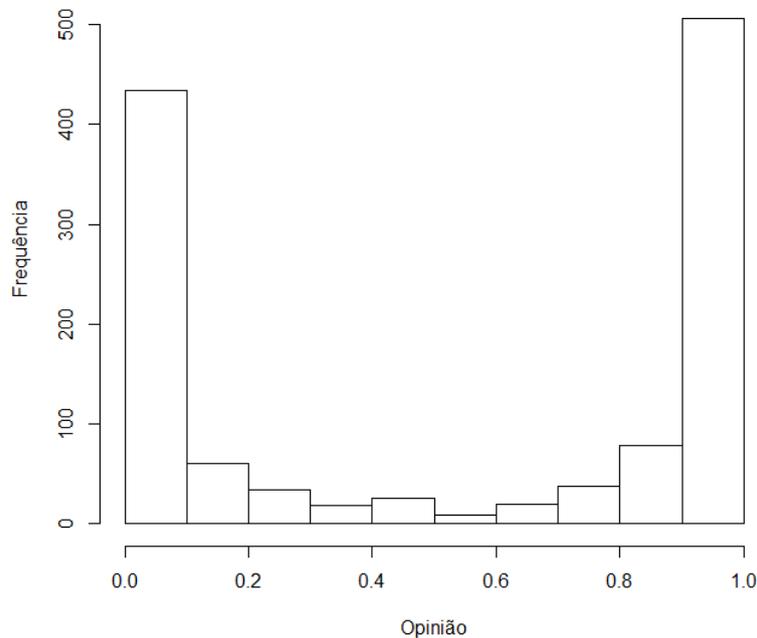
$$T_i = \frac{A_i^o}{A_i}, \quad (4.4)$$

onde  $A_i$  é o número de vértices adjacentes a  $i$ , enquanto  $A_i^o$ , os adjacentes do grupo oposto.

O resultado numérico é a distribuição contínua em formato de U da Figura 22, com grande número de indivíduos em posições extremas e um centro pouco populoso, que indica dois grupos densamente conectados entre si e esparsamente conectados com o exterior, num cenário de polarização extrema. Essa distribuição é atribuída à rede de blogs políticos como condição inicial em todos os resultados a seguir.

Não nos interessa na análise que a posição seja política, ou mesmo que seja alinhada a esta ou aquela posição particular no espectro político, nos dizendo respeito apenas a estrutura da rede e suas condições iniciais, construídas a partir de dados reais. De fato, qualquer tipo de opinião poderia ter como distribuição inicial o histograma da Figura 22 - poderíamos tratar um lado da distribuição  $i$  como a tendência a uma opinião favorável a um aspecto artístico, e o outro lado como seu oposto, por exemplo.

É importante, também, deixar expresso que não há obrigatoriamente julgamento moral relativo à posição na distribuição. Embora o termo extremismo tenha normalmente uma conotação negativa em certos ambientes, especialmente em alguns círculos de análise política, não há necessariamente juízo de valor quanto à quantidade numérica que representa a opinião, nem um veredito negativo quanto aos pontos extremos, muito menos positivo quanto a uma posição mediana no intervalo possível. O estudo focará na dinâmica, que pode ser qualquer espécie de opinião - se uma aplicação política poderia entender, por exemplo, que um extremo do intervalo equivale ao marxismo-leninismo e o outro ao nazifascismo, a dinâmica temporal após aplicação dos algoritmos em estudo levaria a resultados semelhantes



**Figura 22** – Histograma da distribuição inicial de opiniões aplicadas à rede de blogs políticos gerada com a Equação 4.3. Nota-se que o grupo mais próximo o valor de opinião  $x = 1$  é mais numeroso.

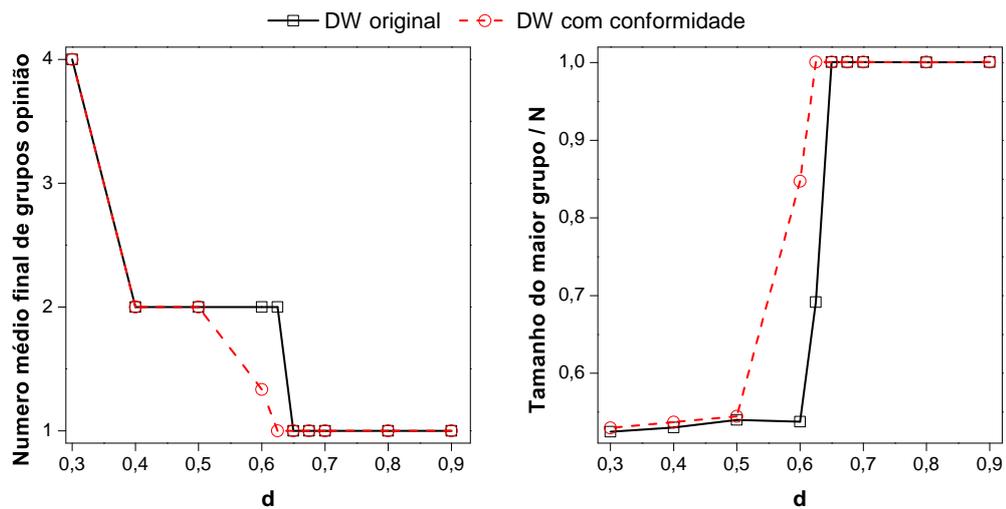
se aplicadas a posições extremas a respeito da adesão à hidroxicloroquina como tratamento para COVID-19.

Aplicando a dinâmica de opinião nessa configuração, os resultados indicam que para pequenos valores de  $d$ , o sistema é pouco alterado, conforme esperado. Conforme  $d$  cresce, os indivíduos moderados do centro desaparecem gradualmente e, por conseguinte, os grupos extremos crescem. Para  $d$  entre 0.4 e 0.6 há uma situação estável onde apenas os dois grupos extremos persistem.

Entretanto, próximo de  $d=0.625$  há uma transição abrupta, e os dois grupos de opinião colapsam em um grupo único próximo ao centro da distribuição de opiniões, levemente superior a 0.5, isto é, com ligeira tendência à opinião do maior grupo inicial, que é o grupo próximo ao valor extremo tendendo a 1.

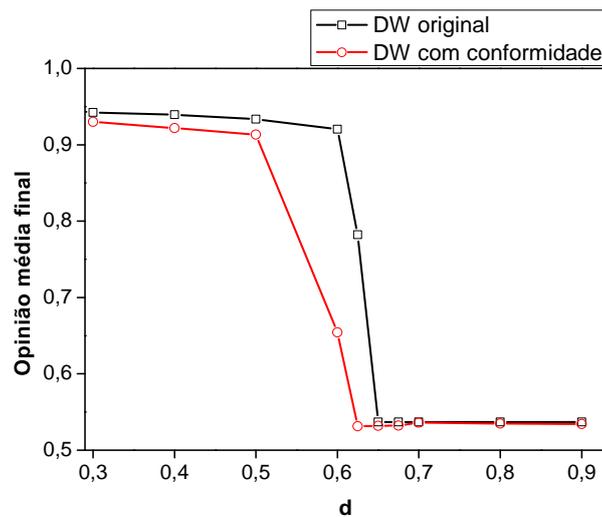
A conformidade, testada com  $p_{asch} = 0.6$ , leva ao estado de consenso, isto é, equilíbrio com grupo único, para valores ligeiramente menores de  $d$  em relação ao modelo original, próximo de  $d = 0.6$ , o que é demonstrado na Figura 23.

A opinião final média para a situação com o parâmetro de Asch ativo é mais próxima do centro por uma pequena margem, como se vê na Figura 24. Também, assim como visto nas seções anteriores, o tempo de consenso segue sendo menor em média para



**Figura 23** – Indicadores do estado de consenso para o modelo DW original e com conformidade para a rede Polblogs em função do parâmetro  $d$ . Para a conformidade aplicada,  $p_{asch} = 0.6$ .

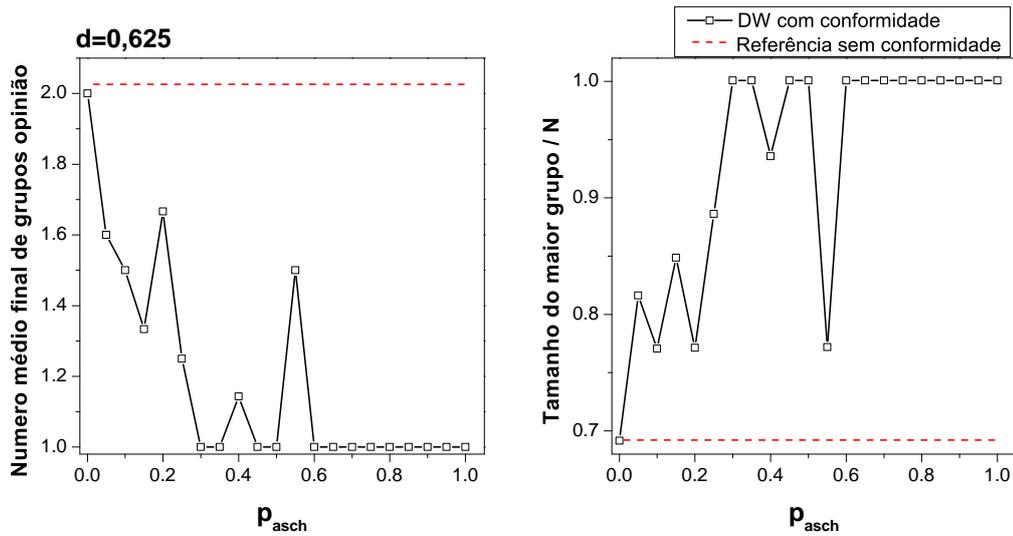
redes com conformidade.



**Figura 24** – Opinião média final para o modelo DW original e com conformidade para a rede Polblogs em função do parâmetro  $d$ . Para a conformidade aplicada,  $p_{asch} = 0.6$ .

Na variação da probabilidade de conformação à opinião da maioria próximo ao ponto crítico, surge um padrão claro de consenso facilitado para qualquer valor de  $p_{asch}$ . Há picos locais de dificuldade do processo de consenso antes de  $p_{asch} = 0.6$ , como se vê nos pontos  $p_{asch} = 0.4$  e  $0.55$  na Figura 25. Para valores maiores que o limite  $p_{asch} = 0.6$  o consenso se estabiliza.

A opinião média final da população também tende a um valor mais próximo do ponto médio do intervalo de opiniões para qualquer valor de  $p_{asch}$ . Na Figura 26 vemos a



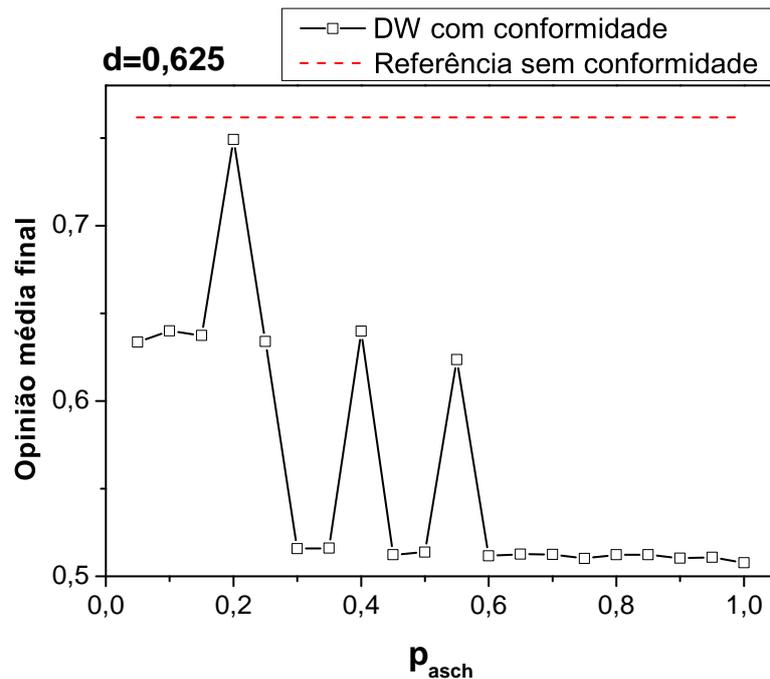
**Figura 25** – Indicadores do estado de equilíbrio com variação da probabilidade  $p_{asch}$  na rede Polblogs, com  $d$  fixo em 0.5. A linha tracejada indica o valor médio de referência para dinâmica sem conformidade.

variação da posição da opinião média frente ao aumento de  $p_{asch}$ . Até o valor  $p_{asch} = 0.6$  a opinião média flutua entre a opinião centralizada e valores próximos do extremo  $x = 1$ . Para  $p_{asch} > 0.6$ , os valores da opinião média tendem a se estabilizar nas proximidades de  $x = 0.5$ , o ponto médio do intervalo de opiniões. Os picos para o alto no número de grupos e para baixo no tamanho do maior grupo se formam para os mesmos valores de  $p_{asch}$ , conforme Figura 25.

A presença de flutuações das opiniões vistas na Figura 26 e das medidas de consenso na Figura 25 são um efeito ainda não explicado. Flutuações e oscilações em opiniões no modelo DW já foram observadas no trabalho recente de Li [91], em outro contexto de resultado, mas, possivelmente não por coincidência, em uma dinâmica que envolve conformidade em certo grau: estudando dinâmicas de anti-conformidade. No mencionado estudo, além de flutuações de resultados em função da variação de certos parâmetros, se observou oscilações temporais na evolução das opiniões.

Como na prática há duas dinâmicas em ação concomitante, uma possível explicação seria um padrão de interferência, no caso aplicado aqui sempre destrutiva, no sentido de dificultar o consenso. A dinâmica de Asch ignora o parâmetro  $d$ , mas há uma dependência da evolução temporal de DW para o consenso.

Na análise da evolução temporal da distribuição de opiniões a diferença entre os modelos com e sem a aplicação da probabilidade é visível, conforme Figura 27. Para  $d = 0.625$ , um valor nas proximidades do ponto crítico onde ocorre a transição para o consenso, a dinâmica original de DW pode evoluir para duas situações distintas. Uma delas é a rápida evolução para um estado de coexistência de dois grupos extremos 0 e 1, com diferença de opiniões  $|\langle x_0 \rangle - \langle x_1 \rangle| > d$ , conforme Figura 27A. A outra é a permanência



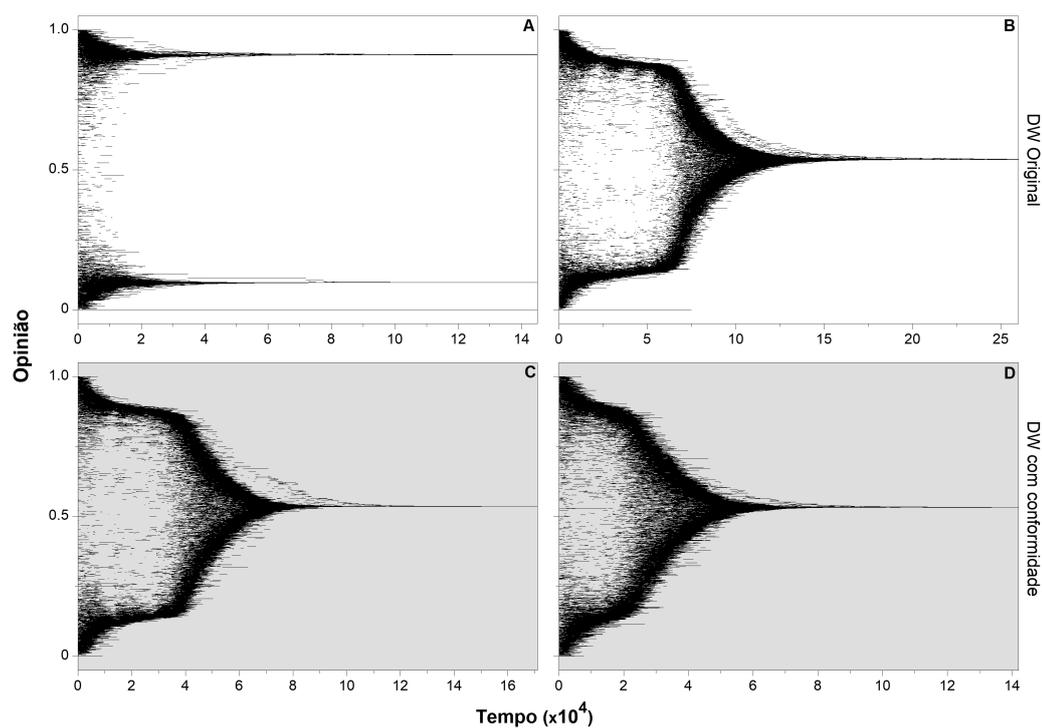
**Figura 26** – Opinião média final com variação da probabilidade  $p_{asch}$  na rede Polblogs. O parâmetro  $d$  é mantido fixo em 0,5. A linha tracejada indica o valor médio para dinâmica sem conformidade.

temporária de polarização em dois grupos, com posterior colapso em um grupo central (Figura 27B). A condição expressa na Figura 27A é a mais comum, ocorrendo em 65% das execuções.

Para a conformidade aplicada, o colapso para um grupo único ocorre de maneira mais veloz: os dois grupos são menos densos, menos distintos e coexistem por um tempo menor em regra, como na Figura 27C. Não há polarização como estado final em cem por cento dos casos quando há conformidade em ação. A população não só chegou ao consenso mais rapidamente como também não experimentou a existência de polarização intensa por um tempo longo antes do estado de equilíbrio.

A observação mais relevante nesse contexto é que a polarização extrema e constante após o equilíbrio ocorreu em cerca de 65% das execuções para a dinâmica original de Deffuant, considerando principalmente o valor elevado do parâmetro de confiança ( $d = 0,625$ ) e uma modularidade relativamente baixa para a rede Polblogs ( $Q = 0,43$ ). A inclusão do parâmetro de adesão à opinião majoritária dos vizinhos promove um efeito distribuído em toda a população, garantindo o consenso. A conformidade, assim, leva à homogeneização opinativa quando há 60% de probabilidade de adesão à maioria.

Essa garantia de um estado final de equilíbrio homogêneo não se mantém com valores menores do parâmetro de adesão à maioria, mas o consenso segue facilitado. Para  $p_{asch} = 0,4$ , houve formação de grupo único no estado de equilíbrio em 80% dos casos. Leva-se em conta ainda que  $p_{asch} = 0,4$  é um valor onde há pico de consenso dificultado,



**Figura 27** – Evolução temporal das opiniões na rede Polblogs para  $d = 0.625$  com o modelo DW original (superior) e com conformidade (inferior, sombra cinza). O cenário em A corresponde a 65% das execuções da rede Polblogs com distribuição inicial na forma da Equação 4.3.

conforme mostra a Figura 26. Mesmo assim, o consenso completo ocorreu em mais que o dobro de vezes em comparação com a dinâmica original.

## 5 Conclusões

Diferentes modelos de dinâmica de opinião buscam há décadas formalizar ou até mesmo prever como as opiniões de grupos humanos evoluem ao longo do tempo através das interações entre indivíduos. Modelos distintos são aplicados para contextos específicos: escolhas discretizadas encontram representação em modelos adaptados da analogia do *spin*, como o proposto por Sznajd-Sznajd [50].

Modelos com dinâmica de adesão ao grupo datam da década de 1970, como o estabelecido por DeGroot. Em paralelo, certas situações demandam a representação da opinião como um valor real dentro de um intervalo contínuo. Em conjunto com um limite de tolerância para a opinião divergente, na virada do século XXI foram propostos os modelos de dinâmica de opinião de confiança limitada, como o de Deffuant-Weisbuch e o de Hegselmann-Krause.

Além da dinâmica do modelo de opinião em si, pareada ou difusa na rede, o desenvolvimento da área de redes complexas deu um substrato topológico para o estudo da evolução opinativa em diferentes tipos de redes, com diferentes distribuições de vértices (indivíduos) e arestas (vínculos pessoais). O avanço do uso das redes sociais por uma colossal parcela da população mundial provê uma fonte de dados de redes complexas de contatos pessoais em um território onde as opiniões circulam em regime quase monopólico.

Assim, partindo do modelo de Deffuant-Weisbuch para a dinâmica de opinião, investigamos a topologia e as condições iniciais como variáveis que interferem na distribuição final de opiniões, e também a modificação do modelo para inclusão do efeito da conformidade social conforme proposta nos experimentos de Asch.

Como considerações topológicas, vimos que as redes invariantes em escala tendem para o resultado original correspondente ao grafo completo apenas para  $d > 0.45$ . O grau médio  $\langle k \rangle$  da rede possui efeito determinante nas medidas de consenso. Altos valores de modularidade levam ao equilíbrio com opiniões mais distantes do ponto central da distribuição inicial de opiniões, como acontece no modelo DW original. Já para o grau médio, o efeito é o inverso. Tais resultados eram conhecidos e serviram como marco de referência do trabalho.

Relacionando-se a topologia aos parâmetros do modelo DW, o tempo até o estado de equilíbrio diminui com o grau médio e com  $d$ , este de maneira consistente ao longo da variação de  $d$ . As medidas do maior grupo de opinião e do número de grupo de opiniões em função de  $d$  demonstram um limite para consenso próximo de  $d = 0.5$ . Diferentes valores de grau médio convergem para um mesmo estado final onde o número esperado de grupos de opinião é 1, de tamanho tendendo a  $N$ .

A dependência do ponto médio do intervalo inicial de opiniões e do parâmetro  $d$  do modelo restaram bem estabelecidas. Em uma distribuição inicial dentro do intervalo  $[0, 1]$ , mas com a média da distribuição diferente de 0.5, ainda há consenso como estado final, conforme previsto pelo modelo DW, mas a posição do grupo majoritário no estado de equilíbrio se determina em parte pelo deslocamento da maioria inicial. A variação devida às condições iniciais ocorre em todas as topologias de rede testadas.

Como ponto central do trabalho, estudamos a pressão social na forma da conformidade de Asch. A evolução temporal das opiniões de uma população caminha em direção ao equilíbrio nos casos com e sem conformidade, diferindo na velocidade com que se atinge o dito equilíbrio.

Em casos com e sem conformidade, o efeito da variação de  $\langle k \rangle$  é evidente, com quedas notáveis em certos valores de  $\langle k \rangle$ . Redes com o modelo DW modificado para conformidade são mais eficientes para o alcance de equilíbrio em relação a redes com a dinâmica de DW original.

Observamos reduções grandes no tempo até o equilíbrio em redes com e sem conformidade para valores de grau médio no intervalo  $\langle k \rangle = 5.1$  e  $\langle k \rangle = 6.8$ , de maneira muito parecida em ambas as dinâmicas. O tempo até o equilíbrio parece oscilar aleatoriamente ao redor de um ponto médio para certas faixas de valores de  $\langle k \rangle$ , havendo uma aparente transição para o próximo valor médio.

Há uma tendência dos grupos mais próximos do ponto médio do intervalo de opiniões se apresentarem mais compactos quando se aplica o parâmetro de conformidade. Isto é, a distribuição dos grupos de opinião se afasta menos do ponto médio do grupo, tornando a medida de largura do grupo menor.

A diferença relativa entre a largura do maior grupo de opiniões para o resultado final da dinâmica com e sem conformidade pode chegar a ser maior que um fator de 10. Entretanto, isso ocorre em uma faixa de valores muito pequenos (da ordem de  $10^{-5}$ ), e sofre aparente estabilização após  $\langle k \rangle \geq 7$ . Apesar desse efeito, o tamanho do maior grupo de opiniões e o número de grupos formados não difere entre redes com e sem conformidade.

Em outra consideração topológica relacionada, observamos redes de diferentes tamanhos  $N$ . Redes com diferentes valores de modularidade  $Q$  mas de mesmo  $N$  e mesmo  $\langle k \rangle$  tendem a ter tempo de equilíbrio maior em função direta de  $Q$ . A conformidade também reduz o tempo de consenso nesse contexto. Com ou sem a dinâmica de conformidade, o tempo de equilíbrio em função de  $\langle k \rangle$  tem faixas onde se apresenta aparente estabilidade entre pontos de transição. Já o tempo em função de  $Q$  tem a forma aparente de lei de potência, divergindo para  $Q = 1$ .

A conformidade ainda gera o consenso para valores ligeiramente menores do parâmetro de confiança  $d$  (Figura 19). Porém, após um valor limite próximo a  $d = 0.5$ , as

diferenças no consenso desaparecem e as populações submetidas às dinâmicas diferentes evoluem de maneira semelhante, restando apenas a diferença temporal e de coesão dos grupos.

Na aplicação da conformidade a redes reais, as tendências observadas nas redes paradigmáticas se preservaram, se aproximando significativamente dos resultados referentes às redes invariantes em escala. Ou seja, a conformidade facilita o consenso para valores pequenos de  $d$ . A conformidade com valor  $p_{asch} = 0.6$  garante o consenso para valores ligeiramente menores de  $d$  em relação ao modelo original. Como nas redes artificiais, o tempo de consenso é em média menor para a dinâmica com conformidade.

Considerando um cenário de polarização extrema na rede Polblogs, o sistema se altera pouco para pequenos valores de  $d$ . Conforme  $d$  cresce, os grupos extremos crescem, resultando no desaparecimento dos indivíduos ao centro da distribuição. Para  $d$  entre 0.4 e 0.6 há estabilidade na coexistência de dois grupos extremos. Próximo de  $d=0.625$  há uma transição abrupta e os dois extremos colapsam em um grupo único nas cercanias do centro da distribuição de opiniões, com ligeira tendência ao lado da opinião do maior grupo inicial.

Próximo a esse ponto crítico  $d=0.625$  há consenso facilitado para qualquer valor de  $p_{asch}$ , com picos locais de consenso dificultado antes de  $p_{asch} = 0.6$ , onde o consenso se estabiliza. Mesmo nos picos de consenso dificultado a conformidade apresenta medidas de consenso maiores que no caso da dinâmica de DW original. A conformidade também traz a opinião média final para valores mais próximos do ponto médio do intervalo de opiniões.

A evolução temporal na rede Polblogs nesse cenário de polarização extrema e com  $d = 0.625$  mostrou que o consenso ocorre em 35% dos casos na dinâmica original de DW, com os demais casos evoluindo para um cenário de polarização extrema no equilíbrio. Quando a conformidade é aplicada para  $p_{asch} = 0.6$ , há consenso em 100% dos casos, com uma menor permanência temporal de grupos polarizados.

Valores menores de  $p_{asch}$  nesse contexto não garantem o consenso, mas ainda o facilitam. Para 40% de adesão à maioria ( $p_{asch} = 0.4$ ), 80% dos casos apresentaram consenso na forma de um grupo de opinião denso em torno das proximidades do ponto central da distribuição de opiniões.

Como sugestão de trabalhos futuros, a aplicação de redes multicamadas [92] ao problema pode facilitar a separação entre opinião íntima e opinião pública, permitindo a inclusão de mecanismos de facilitação social na esfera pública de ação. Assim como a presente dissertação partiu de resultados da psicologia social, a discussão sociológica em torno do assunto pode trazer um ponto de partida adequado.

A presença de flutuações nas opiniões finais e nas medidas de consenso na presença de conformidade para a rede Polblogs partindo de condições iniciais intensamente pola-

rizadas é um efeito não explicado, e com possível relevância. Tal aspecto dos resultados merece investigação mais detida.

Redes dinâmicas podem adicionar uma nova camada de realismo na abordagem através da dinâmica de conexões criadas ou excluídas em função da distância das opiniões vizinhas, tema previamente já abordado na análise da formação de consenso [71]. A inclusão da conformidade no estudo desse tópico seria de especial relevância.

# Referências

- 1 VICARIO, M. D. et al. Mapping social dynamics on facebook: The brexit debate. *Social Networks*, v. 50, p. 6–16, 2017. Citado na página 14.
- 2 BOVET, A.; MAKSE, H. A. Influence of fake news in twitter during the 2016 us presidential election. *Nature Communications*, v. 10, n. 1, p. 7, 2019. Citado na página 14.
- 3 ASCH, S. E. Opinions and Social Pressure. *Nature*, v. 193, n. 4491, p. 31–5, 1955. Citado 3 vezes nas páginas 14, 25 e 38.
- 4 MILGRAM, S. The small world problem. *Psychology Today*, v. 2, n. 1, p. 60–67, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.
- 5 ASCH, S. E. Studies of independence and conformity: I. a minority of one against a unanimous majority. *Psychological monographs: General and Applied*, v. 70, n. 9, p. 1, 1956. Citado 3 vezes nas páginas 14, 26 e 38.
- 6 ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 1, p. 47, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 17 e 18.
- 7 PACHECO, A. T.; EVANS, T. *Social dynamics models on complex networks*. Dissertação (Mestrado) — Master’s thesis, Imperial College, London, Department of Physics (January 2013), 2013. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 19 e 23.
- 8 CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 591–646, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 23.
- 9 SÎRBU, A. et al. Opinion dynamics: models, extensions and external effects. In: *Participatory sensing, opinions and collective awareness*. [S.l.]: Springer, 2017. p. 363–401. Citado 3 vezes nas páginas 14, 23 e 24.
- 10 DEFFUANT, G. et al. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, v. 3, n. 01n04, p. 87–98, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 14, 23 e 29.
- 11 HEGSELMANN, R.; KRAUSE, U. et al. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social simulation*, v. 5, n. 3, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 23.
- 12 LORENZ, J. Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey. *International Journal of Modern Physics C*, v. 18, n. 12, p. 1819–1838, 2007. Citado na página 14.
- 13 BARABÁSI, A.-L.; PÓSFAL, M. *Network Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. Disponível em: <<http://barabasi.com/networksciencebook/>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 19.
- 14 NEWMAN, M. E. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 18.

- 15 FORTUNATO, S. Universality of the threshold for complete consensus for the opinion dynamics of deffuant et al. *International Journal of Modern Physics C*, v. 15, p. 1301–1307, 2004. Citado 5 vezes nas páginas [15](#), [19](#), [25](#), [31](#) e [33](#).
- 16 D’ORSOGNA, M. R.; PERC, M. Statistical physics of crime: A review. *Physics of Life Reviews*, v. 12, p. 1–21, 2015. Citado na página [15](#).
- 17 MARSHAK, C. Z. *Applications of network science to criminal networks, university education, and ecology*. Tese (Doutorado) — UCLA, 2017. Citado na página [15](#).
- 18 BERLUSCONI, G. et al. Link prediction in criminal networks: A tool for criminal intelligence analysis. *PloS One*, v. 11, n. 4, p. e0154244, 2016. Citado na página [15](#).
- 19 FERRARA, E. et al. Detecting criminal organizations in mobile phone networks. *Expert Systems with Applications*, v. 41, n. 13, p. 5733–5750, 2014. Citado na página [15](#).
- 20 LATORA, V.; MARCHIORI, M. How the science of complex networks can help developing strategies against terrorism. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 20, n. 1, p. 69–75, 2004. Citado na página [15](#).
- 21 CUNHA, B. R. da; GONÇALVES, S. Topology, robustness, and structural controllability of the brazilian federal police criminal intelligence network. *Applied Network Science*, v. 3, n. 1, p. 36, 2018. Citado na página [15](#).
- 22 ROBERTS, N.; EVERTON, S. F. Strategies for combating dark networks. *Journal of Social Structure*, v. 12, p. 2, 2011. Citado na página [15](#).
- 23 BLANCHARD, P. et al. The epidemics of corruption. *arXiv preprint physics/0505031*, 2005. Citado na página [15](#).
- 24 NEWMAN, M. E. J. *Networks: an introduction*. Oxford, New York: Oxford University Press, 2010. Citado na página [17](#).
- 25 BOLLOBÁS, B. *Modern Graph Theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 184. Citado na página [17](#).
- 26 ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. Internet: Diameter of the world-wide web. *Nature*, v. 401, n. 6749, p. 130, 1999. Citado na página [17](#).
- 27 BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *science*, v. 286, n. 5439, p. 509–512, 1999. Citado na página [17](#).
- 28 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, v. 393, n. 6684, p. 440, 1998. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [18](#).
- 29 SHAO, C. et al. Anatomy of an online misinformation network. *PloS One*, v. 13, n. 4, p. e0196087, 2018. Citado na página [17](#).
- 30 CUNHA, B. R. da; GONÇALVES, S. The web of federal crimes in brazil: topology, weaknesses, and control. *arXiv preprint arXiv:1706.03153*, 2017. Citado na página [17](#).
- 31 MORSELLI, C. *Inside criminal networks*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 8. Citado na página [17](#).

- 32 CUNHA, B. R. da; GONZÁLEZ-AVELLA, J. C.; GONÇALVES, S. Fast fragmentation of networks using module-based attacks. *PloS One*, v. 10, n. 11, p. e0142824, 2015. Citado na página 17.
- 33 YANG, J.; MCAULEY, J.; LESKOVEC, J. Community detection in networks with node attributes. In: IEEE. *2013 IEEE 13th International Conference on Data Mining*. [S.l.], 2013. p. 1151–1156. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 30.
- 34 PFEIFFER, J. J. et al. Attributed graph models: Modeling network structure with correlated attributes. In: ACM. *Proceedings of the 23rd International Conference on World Wide Web*. [S.l.], 2014. p. 831–842. Citado na página 18.
- 35 FORTUNATO, S. Community detection in graphs. *Physics Reports*, v. 486, n. 3-5, p. 75–174, 2010. Citado na página 19.
- 36 PORTER, M. A.; ONNELA, J.-P.; MUCHA, P. J. Communities in networks. *Notices of the AMS*, v. 56, n. 9, p. 1082–1097, 2009. Citado na página 19.
- 37 LESKOVEC, J.; LANG, K. J.; MAHONEY, M. Empirical comparison of algorithms for network community detection. In: ACM. *Proceedings of the 19th International Conference on World Wide Web*. [S.l.], 2010. p. 631–640. Citado na página 19.
- 38 LANCICHINETTI, A.; FORTUNATO, S.; RADICCHI, F. Benchmark graphs for testing community detection algorithms. *Physical Review E*, v. 78, n. 4, p. 046110, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 29.
- 39 GOOD, B. H.; MONTJOYE, Y.-A. D.; CLAUSET, A. Performance of modularity maximization in practical contexts. *Physical Review E*, v. 81, n. 4, p. 046106, 2010. Citado na página 19.
- 40 NEWMAN, M. E. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, v. 103, n. 23, p. 8577–8582, 2006. Citado na página 19.
- 41 BLONDEL, V. D. et al. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2008, n. 10, p. P10008, 2008. Citado na página 19.
- 42 LIKAS, A.; VLASSIS, N.; VERBEEK, J. J. The global k-means clustering algorithm. *Pattern Recognition*, v. 36, n. 2, p. 451–461, 2003. Citado na página 21.
- 43 WANG, S.; KOOPMAN, R. Clustering articles based on semantic similarity. *Scientometrics*, v. 111, n. 2, p. 1017–1031, 2017. Citado na página 21.
- 44 ZHOU, Y.; CHENG, H.; YU, J. X. Graph clustering based on structural/attribute similarities. *Proceedings of the VLDB Endowment*, v. 2, n. 1, p. 718–729, 2009. Citado na página 21.
- 45 SERRATOSA, F.; ALQUÉZAR, R.; SANFELIU, A. Synthesis of function-described graphs and clustering of attributed graphs. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, v. 16, n. 06, p. 621–655, 2002. Citado na página 21.
- 46 XU, Z. et al. A model-based approach to attributed graph clustering. In: ACM. *Proceedings of the 2012 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*. [S.l.], 2012. p. 505–516. Citado na página 22.

- 47 ZHOU, Y.; CHENG, H.; YU, J. X. Clustering large attributed graphs: An efficient incremental approach. In: IEEE. *2010 IEEE International Conference on Data Mining*. [S.l.], 2010. p. 689–698. Citado na página 22.
- 48 FRIEDMAN, J. H.; MEULMAN, J. J. Clustering objects on subsets of attributes (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, v. 66, n. 4, p. 815–849, 2004. Citado na página 22.
- 49 GALAM, S.; GEFEN, Y.; SHAPIR, Y. Sociophysics: A new approach of sociological collective behaviour. i. mean-behaviour description of a strike. *Journal of Mathematical Sociology*, v. 9, n. 1, p. 1–13, 1982. Citado na página 23.
- 50 SZNAJD-WERON, K.; SZNAJD, J. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, v. 11, n. 06, p. 1157–1165, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 54.
- 51 DEFFUANT, G. Comparing extremism propagation patterns in continuous opinion models. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 9, n. 3, 2006. Citado na página 23.
- 52 MALARZ, K.; GRONEK, P.; KULAKOWSKI, K. Zaller-deffuant model of mass opinion. *arXiv preprint arXiv:0908.2519*, 2009. Citado na página 23.
- 53 JAGER, W.; AMBLARD, F. Uniformity, bipolarization and pluriformity captured as generic stylized behavior with an agent-based simulation model of attitude change. *Computational & Mathematical Organization Theory*, v. 10, n. 4, p. 295–303, 2005. Citado na página 23.
- 54 GARGIULO, F.; MAZZONI, A. et al. Can extremism guarantee pluralism? *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 11, n. 4, p. 1–9, 2008. Citado na página 24.
- 55 KURMYSHEV, E.; JUÁREZ, H. A. What is a leader of opinion formation in bounded confidence models? *arXiv preprint arXiv:1305.4677*, 2013. Citado na página 24.
- 56 CHEN, G. et al. Convergence properties of the heterogeneous deffuant–weisbuch model. *Automatica*, v. 114, p. 108825, 2020. Citado na página 24.
- 57 FENNELL, S. C. et al. Generalized mean-field approximation for the deffuant opinion dynamics model on networks. *Physical Review E*, v. 103, n. 1, p. 012314, 2021. Citado na página 24.
- 58 CARRO, A.; TORAL, R.; MIGUEL, M. S. The role of noise and initial conditions in the asymptotic solution of a bounded confidence, continuous-opinion model. *Journal of Statistical Physics*, v. 151, n. 1-2, p. 131–149, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 25, 31 e 35.
- 59 LARSEN, K. S. The asch conformity experiment: Replication and transhistorical comparison. *Journal of Social Behavior and Personality*, v. 5, n. 4, p. 163, 1990. Citado na página 25.
- 60 WALKER, M. B.; ANDRADE, M. G. Conformity in the asch task as a function of age. *The Journal of Social Psychology*, v. 136, n. 3, p. 367–372, 1996. Citado na página 25.

- 61 BOND, R.; SMITH, P. B. Culture and conformity: A meta-analysis of studies using asch's (1952b, 1956) line judgment task. *Psychological Bulletin*, v. 119, n. 1, p. 111, 1996. Citado na página 26.
- 62 DEGROOT, M. H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, v. 69, n. 345, p. 118–121, 1974. Citado na página 26.
- 63 DAS, A.; GOLLAPUDI, S.; MUNAGALA, K. Modeling opinion dynamics in social networks. In: *Proceedings of the 7th ACM international conference on Web search and data mining*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 403–412. Citado na página 27.
- 64 GARGIULO, F.; GANDICA, Y. The role of homophily in the emergence of opinion controversies. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 20, n. 3, 2017. Citado na página 27.
- 65 ALRADDADI, E. E. et al. The role of homophily in opinion formation among mobile agents. *Journal of Information and Telecommunication*, v. 4, n. 4, p. 504–523, 2020. Citado na página 27.
- 66 WANG, T.; WANG, D.; WANG, F. Quantifying herding effects in crowd wisdom. In: *Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1087–1096. Citado na página 27.
- 67 GAROFALO, F.; IUDICE, F. L.; NAPOLETANO, E. Herding as a consensus problem. *Nonlinear Dynamics*, v. 92, n. 1, p. 25–32, 2018. Citado na página 27.
- 68 GONCALVES, S.; LAGUNA, M.; IGLESIAS, J. Why, when, and how fast innovations are adopted. *The European Physical Journal B*, v. 85, n. 6, p. 1–9, 2012. Citado na página 27.
- 69 RAAFAT, R. M.; CHATER, N.; FRITH, C. Herding in humans. *Trends in Cognitive Sciences*, v. 13, n. 10, p. 420–428, 2009. Citado na página 27.
- 70 CORAZZINI, L.; GREINER, B. Herding, social preferences and (non-) conformity. *Economics Letters*, v. 97, n. 1, p. 74–80, 2007. Citado na página 27.
- 71 KOZMA, B.; BARRAT, A. Consensus formation on adaptive networks. *Physical Review E*, v. 77, n. 1, p. 016102, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 57.
- 72 KOZMA, B.; BARRAT, A. Consensus formation on coevolving networks: groups' formation and structure. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 41, n. 22, p. 224020, 2008. Citado na página 30.
- 73 AMBLARD, F.; DEFFUANT, G. The role of network topology on extremism propagation with the relative agreement opinion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 343, p. 725–738, 2004. Citado na página 31.
- 74 STAUFFER, D.; MEYER-ORTMANN, H. Simulation of consensus model of deffuant et al. on a barabasi–albert network. *International Journal of Modern Physics C*, v. 15, n. 02, p. 241–246, 2004. Citado na página 31.
- 75 SOUSA, A. O. Consensus formation on a triad scale-free network. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 348, p. 701–710, 2005. Citado na página 31.

- 76 STAUFFER, D.; SOUSA, A.; SCHULZ, C. Discretized opinion dynamics of the deffuant model on scale-free networks. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 7, n. 3, 2004. Citado na página 31.
- 77 HOLME, P.; NEWMAN, M. E. Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions. *Physical Review E*, v. 74, n. 5, p. 056108, 2006. Citado na página 38.
- 78 CHENG, C.; YU, C. Opinion dynamics with bounded confidence and group pressure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, p. 121900, 2019. Citado na página 38.
- 79 YIP, M.; SHADBOLT, N.; WEBBER, C. Structural analysis of online criminal social networks. In: IEEE. *2012 IEEE International Conference on Intelligence and Security Informatics*. [S.l.], 2012. p. 60–65. Citado na página 38.
- 80 NEWMAN, M. E.; FORREST, S.; BALTHROP, J. Email networks and the spread of computer viruses. *Physical Review E*, v. 66, n. 3, p. 035101, 2002. Citado na página 38.
- 81 NEWMAN, M. E. Coauthorship networks and patterns of scientific collaboration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 101, n. suppl 1, p. 5200–5205, 2004. Citado na página 38.
- 82 JALILI, M. Social power and opinion formation in complex networks. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, v. 392, n. 4, p. 959–966, 2013. Citado na página 44.
- 83 LESKOVEC, J.; MCAULEY, J. J. Learning to discover social circles in ego networks. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 539–547. Citado na página 45.
- 84 LESKOVEC, J.; KREVL, A. *SNAP Datasets: Stanford Large Network Dataset Collection*. 2014. <<http://snap.stanford.edu/data>>. Citado na página 45.
- 85 LESKOVEC, J.; KLEINBERG, J.; FALOUTSOS, C. Graph evolution: Densification and shrinking diameters. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD)*, v. 1, n. 1, p. 2, 2007. Citado na página 45.
- 86 YIN, H. et al. Local higher-order graph clustering. In: ACM. *Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. [S.l.], 2017. p. 555–564. Citado na página 45.
- 87 MOODY, J. Peer influence groups: identifying dense clusters in large networks. *Social Networks*, v. 23, n. 4, p. 261–283, 2001. Citado na página 45.
- 88 CALDERONI, F. Identifying mafia bosses from meeting attendance. In: *Networks and Network Analysis for Defence and Security*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 27–48. Citado na página 45.
- 89 ADAMIC, L. A.; GLANCE, N. The political blogosphere and the 2004 us election: divided they blog. In: ACM. *Proceedings of the 3rd International Workshop on Link Discovery*. [S.l.], 2005. p. 36–43. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 47.

- 
- 90 BRUNS, A.; HIGHFIELD, T.; LIND, R. A. Blogs, twitter, and breaking news: The produsage of citizen journalism. *Producing Theory in a Digital World: The Intersection of Audiences and Production in Contemporary Theory*, v. 80, n. 2012, p. 15–32, 2012. Citado na página [47](#).
- 91 LI, F. Continuous opinion dynamics with anti-conformity behavior. *SSRN*, 2021. Citado na página [51](#).
- 92 KIVELÄ, M. et al. Multilayer networks. *Journal of Complex Networks*, v. 2, n. 3, p. 203–271, 2014. Citado na página [56](#).