

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise de métodos de integração numérica para problemas com
descontinuidade fraca no XFEM**

Jamile Maria Araujo Tavares

Porto Alegre

2021

JAMILE MARIA ARAUJO TAVARES

**ANÁLISE DE MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA
PROBLEMAS COM DESCONTINUIDADE FRACA NO XFEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre

2021

CIP - Catalogação na Publicação

Tavares, Jamile Maria Araujo
Análise de métodos de integração numérica para
problemas com descontinuidade fraca no XFEM / Jamile
Maria Araujo Tavares. -- 2021.
96 f.
Orientador: Rodrigo Rossi.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,
BR-RS, 2021.

1. XFEM. 2. integração numérica. 3. interface
fraca. 4. subelementos. 5. polinômio equivalente. I.
Rossi, Rodrigo, orient. II. Título.

JAMILE MARIA ARAUJO TAVARES

**ANÁLISE DE MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA
PROBLEMAS COM DESCONTINUIDADE FRACA NO XFEM**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 16 de abril de 2021

Prof. Rodrigo Rossi
Dr. Eng. Mec. pela Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador

Nilo Cesar Consoli
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Inacio Benvengnu Morsch (UFRGS)
Dr. Eng. Civil pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Eduardo Bittencourt (UFRGS)
Dr. Eng. Civil pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Felício Bruzzi Barros (UFMG)
Dr. Eng. Civil pela Universidade Federal de São Paulo

RESUMO

TAVARES, J. M. A. **Análise de métodos de integração numérica para problemas com descontinuidade fraca no XFEM.** 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre.

O método dos elementos finitos estendidos, *eXtended Finite Element Method* (XFEM), é baseado no método de partição da unidade, *Partition of Unity* (PU), que permite enriquecimento local extrínseco do espaço de aproximação, para capturar os efeitos descontínuos causados pelas interfaces, evitando a necessidade das interfaces estarem conformadas com a malha e o refinamento massivo para adaptar a malha. Nesta dissertação foi feita uma comparação entre algumas estratégias de integração numérica para funções com descontinuidades fracas usadas no XFEM como enriquecimento para modelos de interface bimaterial. A primeira estratégia de integração é o método da quadratura padrão de Gauss. A segunda usa subelementos conformados com a interface gerados através da triangulação de Delaunay, os pontos de Gauss são aplicados nos subelementos e transformados para o domínio do elemento. Estas duas primeiras estratégias são técnicas convencionais aplicadas ao XFEM. A terceira técnica substitui a função de enriquecimento por um polinômio equivalente que elimina a necessidade de usar subelementos e a quadratura padrão de Gauss é aplicada diretamente sobre o elemento. Os resultados numéricos obtidos, para os casos considerados neste trabalho, demonstram que o uso da estratégia do polinômio equivalente produz similar convergência quando comparados as estratégias convencionais de integração.

Palavras-chave: XFEM; integração numérica; descontinuidade fraca; subelementos; polinômio equivalente.

ABSTRACT

TAVARES, J. M. A. **Análise de métodos de integração numérica para problemas com descontinuidade fraca no XFEM.** 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre.

The extended finite element method (XFEM) is a partition of unity (PU) based method that allows local extrinsic enrichment of the approximation space to capture the discontinuous effects caused by the interfaces, avoiding the need of conforming interface-body meshes and massive adaptive mesh refinement. In this dissertation a comparison between some numerical integration strategies for weak discontinuity functions used in XFEM as enrichment to bi-material interface models is performed. The first integration strategy presented is the standard Gauss quadrature method. The second strategy uses sub-elements conformed to the interface, generated by the Delaunay triangulation, the Gauss points are applied to the sub-elements and transformed to the element domain. These first two strategies are conventional techniques applied to XFEM. The third technique replaces the enrichment function with an equivalent polynomial that eliminates the need to use sub-elements and the standard Gaussian quadrature is applied directly to the element. The obtained numerical results, for the cases considered in this dissertation, demonstrates that the use of an equivalent polynomial strategy yields to similar convergence when compared to conventional integration strategies.

Key-words: XFEM; numerical integration; weak discontinuity; sub-elements; equivalent polynomial.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema de contorno de grãos discretizado (a) modelo XFEM com a malha não conforme e estruturada e (b) modelo de malha conforme para o FEM	20
Figura 2 – Malhas com diferentes densidades para o FEM (a) malhas compatíveis regular e irregular; (b) malhas não compatíveis	21
Figura 3 – Geração de subpolígonos para a quadratura da forma fraca em: (a) elementos cortados por fratura. Os polígonos (b) formados pela intersecção da fratura com a geometria do elemento são triangularizados em (c) para criar subdomínios dos elementos	21
Figura 4 – Modelo de descontinuidade forte e fraca no FEM enriquecido: (a) Definição das interfaces internas, Γ_{d_1} interface bimaterial e Γ_{d_2} interface de fratura no domínio Ω , (b) malha uniforme em que os nós destacados tem GL adicional e funções enriquecidas	26
Figura 5 – Tipos de descontinuidades no XFEM (a) forte e (b) fraca em uma interface.	26
Figura 6 – Função distância assinalada.	28
Figura 7 – Campo de enriquecimento para uma interface bimaterial no centro de um elemento quadrilátero bilinear com: (a) a função rampa $N_1(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) $; (b) a função rampa deslocada $N_1(\mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_1))$	29
Figura 8 – Tipos de elementos e nós no XFEM.	30
Figura 9 – Campo de enriquecimento para um nó enriquecido do elemento de mistura quadrilátero bilinear com: (a) a função rampa $N_2(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) $; (b) a função rampa deslocada $N_2(\mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_2))$	30
Figura 10 – Procedimento de triangulação para determinar a posição dos pontos de Gauss. (a) Elemento com interface; (b) sub-triangulação; (c) Pontos de Gauss dos sub-triângulos; (d) Pontos de Gauss finais do elemento quadrilátero	33
Figura 11 – Triangulação de Delaunay em dois quadriláteros e os circuncírculos de cada triângulo construído.	33
Figura 12 – Transformação de coordenadas: Sub-triângulos Ω_{sub-e} em um elemento Q4 Ω_e que contém uma interface Γ	34
Figura 13 – Mapeamento inverso.	35
Figura 14 – Algoritmo para a integração com subelementos triangulares.	38
Figura 15 – Elemento finito quadrilateral interceptado por uma interface (a) lados adjacentes; (b) lados opostos	44

Figura 16 – Polinômios equivalentes e funções descontínuas (a) \tilde{Q} e Q (b) \tilde{H} e H .	51
Figura 17 – Algoritmo para a integração com polinômios equivalentes.	52
Figura 18 – Barra sob tensão q com uma zona de transição FGM representada pela altura h (a) antes da deformação; (b) depois da deformação; (c) depois da deformação para uma fronteira bimaterial sem zona de transição FGM.	55
Figura 19 – Situação A: Malha de uma barra bimaterial sob tensão modelada por elementos planos com uma interface bimaterial.	57
Figura 20 – Malha com os subelementos triangulares.	57
Figura 21 – Valor da função distância assinalada $\phi(\mathbf{x})$ pelo método <i>Level Set</i> .	57
Figura 22 – Parcela enriquecida do campo de deslocamento para os elementos enriquecido e de mistura do problema da barra.	58
Figura 23 – Campo de deslocamento e as parcelas padrão e enriquecida do campo para o problema da barra sob tensão com 3 elementos com a interface em $x = 30$.	58
Figura 24 – Erro relativo para o GL \mathbf{a} que faz parte do campo de deslocamento em função do número de pontos de integração no elemento.	60
Figura 25 – Situação B: Malha de uma barra bimaterial sob tensão modelada por elementos planos com três interfaces bimaterial com diferentes inclinações.	62
Figura 26 – Situação C: Malha de uma barra bimaterial sob tensão modelada por elementos planos com três interfaces bimaterial com diferentes inclinações.	63
Figura 27 – Erro relativo para a norma de Frobenius da matriz de rigidez do elemento enriquecido (elemento 2 da malha) para as situações B e C com as interfaces 1, 2 e 3.	63
Figura 28 – Erro relativo para a norma de Frobenius do campo de deslocamento para as situações B e C com as interfaces 1, 2 e 3.	64
Figura 29 – Situação D: Malha de uma barra bimaterial com 1220 elementos planos sob tensão.	65
Figura 30 – Barra bimaterial deformada com seu campo de deslocamento calculado por meio da integração com subelementos (a) u_y ; (b) u_x .	65
Figura 31 – Barra bimaterial com Poisson nulo.	66
Figura 32 – Malhas para a barra bimaterial com interface em $b = 0$ e (a) 05x05; (b) 11x11; (c) 21x21 e (d) 41x41 elementos.	67
Figura 33 – Deslocamento u_y e deformação ε_{yy} nos pontos de integração para as malhas com 05x05, 11x11, 21x21 e 41x41 elementos calculados pelo método de integração (a) Gauss padrão; (b) Subelemento triangular; (c) Polinômio equivalente.	68

Figura 34 – Deformação ε_{yy} nos pontos de integração para os métodos de integração em relação as malhas com (a)05x05; (b)11x11; (c)21x21 e (d)41x41 elementos.	69
Figura 35 – Deslocamento u_y (a) Gauss padrão; (b) Polinômios equivalentes; (c) Subelementos triangulares.....	70
Figura 36 – Convergência da norma de erro para energia, e_E	71
Figura 37 – Convergência da norma de erro para o deslocamento, e_{L_2}	71
Figura 38 – Erros para a norma de energia para a malha de 41x41 elementos pelo método de integração (a) Gauss padrão; (b) Polinômios equivalentes.....	72
Figura 39 – Erros para a norma L_2 do deslocamento para a malha de 41x41 elementos pelo método de integração (a) Gauss padrão; (b) Polinômios equivalentes.....	72
Figura 40 – Variação na localização da interface dentro do elemento enriquecido da malha de 05x05 elementos.	73
Figura 41 – Erro para a norma de deslocamento com a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 1000 passos.....	73
Figura 42 – Erro para a norma de energia com a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 1000 passos.....	74
Figura 43 – Campo de enriquecimento para uma interface bimaterial no elemento quadrilátero bilinear com: (a) a função rampa $N_1(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) $; (b) a função rampa deslocada $N_1(\mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_1))$	75
Figura 44 – Campo de deslocamento e as parcelas padrão e enriquecida do campo para o problema da barra sob tensão com 3 elementos com a interface em $x=38$	76
Figura 45 – Erro para a norma de deslocamento com a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 100 passos.....	76
Figura 46 – Erro para a norma de energia com a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 100 passos.....	77
Figura 47 – PVC bimaterial, placa com inclusão circular de diferente material.....	78
Figura 48 – Malha do PVC com inclusão circular com subelementos triangulares criados nos elementos enriquecidos por uma interface através da triangulação de Delaunay (a)08x08; (b)16x16; (c)32x32; (d)64x64; (e) 128x128.....	80
Figura 49 – Curvas de nível (<i>Level Set</i>).	81
Figura 50 – Norma de erro para deslocamento e_{L_2}	81
Figura 51 – Norma de erro para energia e_E	82

Figura 52 – À esquerda estão os erros para a norma de energia por elemento com a integração de Gauss e à direita com os polinômios que substituem a função de enriquecimento para as malhas (a)08x08; (b)16x16; (c)32x32; (d)64x64; (e) 128x128.....	83
Figura 53 – À esquerda estão os erros para a norma L_2 do deslocamento por elemento com a integração de Gauss e à direita com os polinômios que substituem a função de enriquecimento para as malhas (a)08x08; (b)16x16; (c)32x32; (d)64x64; (e) 128x128.....	85
Figura 54 – Campo de deslocamento para a malha de 128x128 elementos (a) deslocamento horizontal, u_x ; (b) deslocamento vertical, u_y ; (c) módulo do deslocamento, $ u $	86
Figura 55 – Campo de deformação para a malha de 128x128 elementos, com o método de integração pela quadratura padrão de Gauss (a) ε_{xx} ; (b) ε_{yy} ; (c) ε_{xy} .	87
Figura 56 – Campo de deformação para a malha de 128x128 elementos, para o método de integração com os polinômios equivalente (a) ε_{xx} ; (b) ε_{yy} ; (c) ε_{xy}	87
Figura 57 – Campo de tensão para a malha de 128x128 elementos, com o método de integração pela quadratura padrão de Gauss (a) σ_{xx} ; (b) σ_{yy} ; (c) σ_{xy}	88
Figura 58 – Campo de tensão para a malha de 128x128 elementos, para o método de integração com os polinômios equivalentes (a) σ_{xx} ; (b) σ_{yy} ; (c) σ_{xy}	89
Figura 59 – Elemento quadrilátero bilinear (Q4).	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Continuidade das funções de integração para problemas de descontinuidade material	41
Tabela 2 – Erro relativo para o GL a , tendo como referência a integração com subelementos triangulares através da norma de Frobenius.	59
Tabela 3 – Erro relativo percentual dos componentes da matriz de rigidez do elemento enriquecido para a integração com o método padrão de Gauss.	61
Tabela 4 – Erro relativo percentual nos componentes da matriz de rigidez do elemento enriquecido para a integração com os polinômios equivalentes a função de enriquecimento.	61

LISTA DE SIGLAS

CST – *Constant Strain Triangle*
EPD – Estado Plano de Deformação
EPT – Estado Plano de Tensão
FEM – *Finite Element Method*
FGM – *functionally graded materials*
FORTRAN – Formula Translation System
GFEM – *Generalized Finite Element Method*
GL – Grau de liberdade
LSM – *level set Method*
LSmXFEM – *Linear Smoothed eXtended Finite Element Method*
MEF – Método dos Elementos Finitos
PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
PU – *Partition of Unity*
PUFEM – *Partition of Unity Finite Element Method*
Q4 – elemento quadrilátero bilinear de quatro nós
SmXFEM – *Smoothed eXtended Finite Element Method*
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
XFEM – *eXtended Finite Element Method*

LISTA DE SÍMBOLOS

I – LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$N_i(\mathbf{x})$ – Funções de forma para interpolação do FEM

\mathbf{K}_e – Matriz de rigidez de um elemento

\mathbf{E} – Matriz constitutiva do material

\mathbf{B}_{prd} – Matriz com as derivadas das funções de forma

\mathbf{B}_{enr} – Matriz com as derivadas das funções de forma, que foram utilizadas como PU, e do enriquecimento, a função distância assinalada

\mathbf{N}_{prd} – Matriz com as derivadas das funções de forma

\mathbf{N}_{enr} – Matriz com as derivadas das funções de forma, que foram utilizadas como PU, e o enriquecimento

\mathbf{J} – Matriz Jacobiana da transformação

\mathbf{J}_{sub-e} – Matriz Jacobiana da transformação do subelemento

M – Ponto no plano cartesiano

M' – Ponto no plano natural

\mathbf{I} – Matriz identidade

L_i – Trabalho virtual interno

H – Função de Heaviside

\tilde{Q} – Polinômio que substitui a função distância absoluta

\tilde{H} – Polinômio que substitui a função de Heaviside no enriquecimento

\mathbf{A} – Matriz de área do elemento quadrilátero Q4

\mathbf{G} – Matriz gradiente com as derivadas da função de forma

\mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 – Pontos onde a interface intercepta um elemento

\mathbf{K}_{aa} – Matriz de rigidez referente aos GL devido ao enriquecimento

\mathbf{K}_{au} e \mathbf{K}_{ua} – Matriz de rigidez referente aos GL padrão e enriquecido

\mathbf{K}_{uu} – Matriz de rigidez referente aos GL padrão

\mathbf{E}_m – Média da matriz constitutiva dos materiais em uma interface

$\Delta\mathbf{E}$ – Diferença entre a matriz constitutiva dos materiais em uma interface

E – Módulo de Young (módulo de elasticidade)

\mathfrak{E} – Notação simplificada para a matriz com o gradiente da função distância assinalada

\mathfrak{F} – Notação simplificada para a matriz com o valor da distância absoluta nos nós do elemento

$K_{e_{ij}}^{sub}$ – Componentes da matriz de rigidez para a integração com subelementos do elemento e

$K_{e_{ij}}$ – Componentes da matriz de rigidez do elemento e

$\|K\|_F$ – Norma de Frobenius para a matriz de rigidez

$\|u_{sub}\|_F$ – Norma de Frobenius para o campo de deslocamento

II – LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

f_{PU} – Conjunto de funções que formam uma Partição da Unidade

\mathbf{x} – Vetor com coordenadas de um ponto

$\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$ – Campo de deslocamento, soma do campo padrão e enriquecido

\mathbf{u}_i – Deslocamento nodal para o GL associado ao FEM padrão, no campo contínuo da aproximação $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$

\mathbf{a}_j – Deslocamento nodal para o GL associado ao enriquecimento do XFEM, campo descontínuo da aproximação $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$

\mathbf{f}_e – Vetor de força

$\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_a$ – Vetor de força, respectivamente, nos GL padrão e enriquecido

(x, y) – Coordenadas no plano cartesiano

(r, s) – Coordenadas naturais do triângulo CST

d_i – Distância entre a interface e os nós do elemento (função distância assinalada)

q_i – Coeficientes do polinômio definido como \tilde{Q}

h_i – Coeficientes do polinômio definido como \tilde{H}

\mathbf{n} – Vetor normal

$\|u_i\|_F$ – Norma de Frobenius para o deslocamento

e_F – Erro relativo para a norma de Frobenius

$\|\mathbf{u}\|_E$ – Norma de energia

$\|\mathbf{u}\|_{L_2}$ – Norma de deslocamento

$\|e\|_E^2$ – Erro para a norma de energia

$\|e\|_{L_2}^2$ – Erro para a norma de deslocamento

ν – Coeficiente de Poisson

u_{xi} – GL horizontal para o FEM padrão no nó i

u_{yi} – GL vertical para o FEM padrão no nó i

ax_i – GL horizontal para o enriquecimento no nó i

ay_i – GL vertical para o enriquecimento no nó i

%e – erro relativo porcentual

III – LETRAS GREGAS

Ω – Domínio

$\psi(\mathbf{x})$ – Função de enriquecimento

Ω_A e Ω_B – Domínios divididos por uma interface

Γ_d – Interface com descontinuidade

$\varphi(\mathbf{x})$ – Função distância assinalada

\mathbf{n}_{Γ_d} – Vetor normal da interface Γ_d

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ – Campo de deformação

$\boldsymbol{\sigma}$ – Campo de tensão

(ξ, η) – Coordenadas naturais do elemento Q4

ξ_m – Coordenadas do ponto M' no plano natural

∇ – Operador gradiente

$|\varphi(\mathbf{x})|$ – Função distância absoluta, enriquecimento para descontinuidade material

$\nabla_\varepsilon |\varphi(\mathbf{x})|$ – Gradiente da função distância absoluta

ξ_1 e ξ_2 – Coordenadas naturais para descontinuidade em lados opostos do elemento

ξ_1 e η_2 – Coordenadas naturais para descontinuidade em lados adjacentes do elemento

$\bar{\mathbf{E}}_{q_n}$ – Campo vetorial da função distância absoluta

$\partial\Omega$ – Contorno de um domínio

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos.....	23
1.2	Justificativa	23
1.3	Divisão da dissertação	24
2	FORMULAÇÃO DO XFEM	25
2.1	Descontinuidades forte e fraca	26
2.2	Método das curvas de nível e função distância assinalada	27
2.3	Elementos de mistura, enriquecidos e padrão	29
2.4	Discretização do XFEM	30
3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR SUBELEMENTOS	32
3.1	Formulação da integração com subelementos triangulares	34
3.2	Programação da integração por subelementos	38
4	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR POLINÔMIOS EQUIVALENTES	39
4.1	Formulação da matriz de rigidez	39
4.2	Matriz de rigidez regularizada	42
4.3	Polinômios para o elemento quadrilátero bilinear	43
4.4	Programação da integração por polinômios equivalentes	52
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	53
5.1	Barra tracionada com interface bimaterial	54
5.1.1	<i>Situação A – Elemento sem distorção e interface no centro sem inclinação</i>	<i>56</i>
5.1.2	<i>Situação B – Elemento sem distorção e interface com inclinação</i>	<i>62</i>
5.1.3	<i>Situação C – Elemento com distorção e interface com inclinação</i>	<i>62</i>

5.1.4	<i>Situação D – Malha refinada sem distorção com 1220 elementos</i>	65
5.2	Problema plano bimaterial com Poisson nulo	66
5.2.1	<i>Análise do campo de deslocamento e deformação</i>	68
5.2.2	<i>Normas para medidas de erro da barra bimaterial com Poisson nulo</i>	70
5.2.3	<i>Análise da variação na localização da interface dentro do elemento</i>	72
5.3	Placa com inclusão circular	77
5.3.1	<i>Normas para medidas de erro da placa com inclusão circular</i>	81
5.3.2	<i>Deslocamento, tensão e deformação da placa com inclusão circular</i>	85
6	CONCLUSÃO	90
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	90
	REFERÊNCIAS	92
	APÊNDICE A	95

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) clássico, do inglês *Finite Element Method* (FEM), foi desenvolvido nas décadas de 1950 e 1960 para solucionar equações diferenciais parciais com aplicações na engenharia. Para utilizar o FEM um domínio é particionado em um número finito de elementos e uma solução aproximada é procurada no espaço finito de polinômios por parte definidos em relação aos elementos. Dessa forma, a qualidade dos resultados depende da discretização, tamanho dos elementos (geralmente simbolizado pelo índice h), grau do polinômio subjacente no espaço dos elementos finitos (denotado pelo índice p) e a regularidade da solução (índice k) exata (RABCZUK, *et al.*, 2020).

O FEM se tornou popular e evoluiu rapidamente nas décadas de 1970 e 1980 devido a popularização dos computadores. Apesar do aumento na capacidade dos computadores, certos problemas como a propagação de fraturas, problemas multiescala e com contornos complexos continuam caros, do ponto de vista computacional, de serem resolvidos satisfatoriamente pelo FEM clássico. Por isso recursos como não usar malha ou usar uma malha simples para discretizar o domínio e escolher espaços de aproximação que não sejam polinomiais foram sendo utilizados, esses métodos são conhecidos como método *meshless* ou *meshfree* (RABCZUK, *et al.*, 2020).

O método dos elementos finitos padrão é aproximado por polinômios diferenciáveis que não são adequados para problemas com descontinuidades fortes e fracas, por exemplo, fratura e bimatéria. Para obter precisão com esse tipo de descontinuidade, a malha de elementos finitos é conformada com a interface descontínua. Isso provoca uma dificuldade maior para descontinuidades móveis que podem ocorrer em problemas com fraturas (RABCZUK, *et al.*, 2020).

Altos gradientes aparecem no FEM próximos a interfaces e requerem um refinamento apropriado da malha, o que provoca um crescimento alto no custo computacional (FRIES e BELYTSCHKO, 2010).

Na década de 1990, Melenk e Babuska (1996) introduziram o conceito do método de partição da unidade para o FEM, *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), mas que de acordo

com Rabczuk, *et al.* (2020) não pode ser visto como um método *meshless*, mas sim um trabalho geral que abrange o FEM clássico e alguns métodos *meshless*.

Quase simultaneamente a essas publicações de Melenk e Babuska (1996), os trabalhos de Duarte e Oden (1995 e 1996) utilizaram partições da unidade para criar o método *h-p clouds*, que eles definem como uma nova família para o método *meshless* para resolver problemas de valor de contorno (PVC).

Ainda no final da década de 1990, foi publicado o artigo de Belytschko e Black (1999) onde o FEM clássico é utilizado com funções de enriquecimento em uma interface originando o método dos elementos finitos estendido, originalmente *eXtended Finite Element Method* (XFEM), que também pode ser visto como um integrante do PUFEM.

Em paralelo ao desenvolvimento do XFEM foram publicados os artigos Strouboulis, Copps e Babuska (2000) e Strouboulis, Zhang e Babuska (2003) que introduziram o termo *Generalized Finite Element Method* (GFEM), como sendo um método que combina o FEM padrão ao método de partição da unidade.

O XFEM é uma aproximação de elementos finitos apropriada para tratar de descontinuidades forte e fraca. Baseado em um enriquecimento extrínseco local da partição da unidade, *Partition of Unity* (PU), o XFEM foi inicialmente desenvolvido nos trabalhos de Belytschko e Black (1999), e de Moës, Dolbow e Belytschko (1999), para ser utilizado em descontinuidade forte. Em seguida, o conceito do XFEM foi estendido para interfaces com descontinuidade fraca no trabalho de Sukumar, *et al.*, (2001). Os tipos de descontinuidades são definidos na seção 2.1.

Também é comum utilizar a expressão GFEM/XFEM ou G/XFEM para se referir a ambos os métodos, o GFEM e o XFEM. No trabalho de Fries e Belytschko (2010), é defendido que as diferenças entre os métodos são difusas e por isso são métodos quase idênticos.

A base das aproximações dos métodos *meshfree* e do enriquecimento dos métodos XFEM e GFEM é a partição da unidade, PU. Em um domínio Ω uma PU é um conjunto de funções f_{PU} que obedece a eq. (1) (BELYTSCHKO, GRACIE e VENTURA, 2009).

$$\sum_{\forall I} f_{PU}(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1)$$

Essa propriedade da PU é utilizada para reproduzir qualquer função a partir do seu produto.

O XFEM pode simplificar a solução de muitos problemas em modelagem de materiais como a propagação de trincas, a evolução de deslocamentos, modelos de contorno de grãos e a evolução de contornos. A vantagem do método é que a malha de elementos finitos pode ser completamente independente da morfologia desses problemas (BELYTCHKO, GRACIE e VENTURA, 2009).

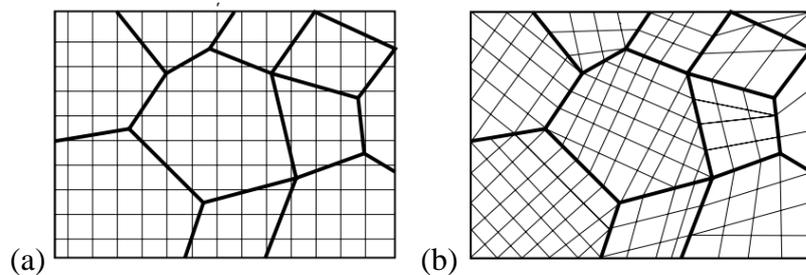


Figura 1 – Problema de contorno de grãos discretizado (a) modelo XFEM com a malha não conforme e estruturada e (b) modelo de malha conforme para o FEM (BELYTCHKO, GRACIE e VENTURA, 2009).

Devido as características da malha, o XFEM pode facilitar a modelagem de geometrias complicadas e a evolução de geometrias, particularmente quando combinada com o método das curvas de nível, *Level Set Method* (LSM), descrito na seção 2.2, (BELYTCHKO, GRACIE e VENTURA, 2009).

A malha não conforme utilizada no XFEM possui pontos no encontro entre a interface e as faces do elemento que não coincidem com os nós da malha, e também não são considerados nós porque o deslocamento não é calculado nesses pontos. Esse tipo de malha difere das malhas compatíveis irregulares e não compatíveis do FEM, porque, segundo Cho, *et al.*, (2004), em uma malha compatível regular o deslocamento possui continuidade ao longo de uma interface da malha entre elementos diferentes, e para uma malha compatível irregular a continuidade do deslocamento nos nós que não possuem continuidade com os nós do elemento vizinho é dada de forma indireta restringindo os nós restritos aos nós irrestritos, definidos na Figura 2. Enquanto em uma malha compatível existe uma dificuldade em identificar a correlação entre os nós restritos e irrestritos e por isso é comum utilizar um procedimento *master-slave*.

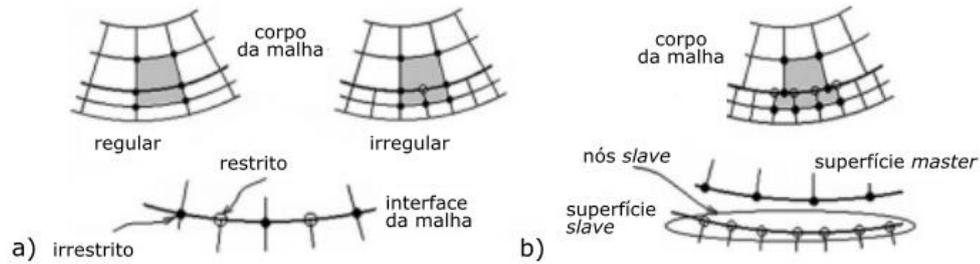


Figura 2 – Malhas com diferentes densidades para o FEM (a) malhas compatíveis regular e irregular; (b) malhas não compatíveis. Adaptado de (CHO, *et al.*, 2004).

A quadratura de Gauss padrão na forma fraca, como usada frequentemente no FEM, requer integrandos com suavidade. Porém, na presença de saltos e picos, que ocorrem nas interfaces do XFEM, a sua precisão que assume suavidade decresce (FRIES e BELYTSCHKO, 2010).

Por isso, a integração numérica é um dos pontos de estudo do XFEM quando se trata da sua implementação, porque o resultado produzido pela quadratura de Gauss não possui precisão suficiente devido a presença de função descontínua no integrando (SEABRA, *et al.*, 2012).

Em uma das primeiras publicações sobre XFEM, apesar do termo não ser utilizado, Moës, Dolbow e Belytschko, (1999) tratam da necessidade de alterar as rotinas de quadratura porque a quadratura padrão de Gauss não é adequada para integrar campos descontínuos. Então, é apresentada a integração numérica utilizando elementos dos subdomínios que são a soma do conjunto de subpolígonos que estão alinhados com a geometria da fratura. Essa integração proposta não adiciona graus de liberdade associados aos elementos dos subdomínios. Na Figura 3, os triângulos mostrados são os subdomínios.

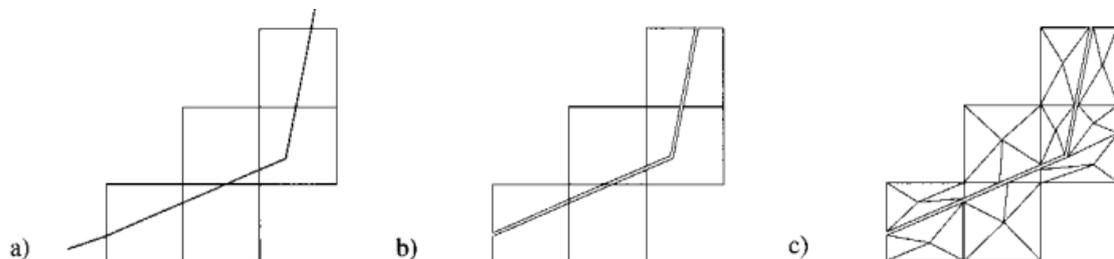


Figura 3 – Geração de subpolígonos para a quadratura da forma fraca em: (a) elementos cortados por fratura. Os polígonos (b) formados pela intersecção da fratura com a geometria do elemento são triangularizados em (c) para criar subdomínios dos elementos (MOËS, DOLBOW e BELYTSCHKO, 1999).

Fries e Belytschko (2010) propõe uma integração com decomposição do elemento em subelementos¹ alinhados com a descontinuidade, semelhante ao que é o padrão no FEM. De acordo com Natarajan, Mahapatra e Bordas (2010) e Seabra, *et al.*, (2012) essa subdivisão dos elementos é o convencional no XFEM, mas os autores utilizam esse tipo de integração apenas para comparar seus resultados com os obtidos para novas estratégias. Esse tipo de integração é utilizado por Kästner, *et al.*, (2012), também por Béchet *et al.*, (2005) para que as funções integradas sejam contínuas em cada subelemento. Ventura (2005) diz que essa é uma técnica comum, mas procura um método para que ela não seja necessária.

A técnica de integração desenvolvida por Ventura (2005) substitui as funções de enriquecimento descontínuas por polinômios na matriz de rigidez. No texto de Benvenuti, Tralli e Ventura (2006) é defendido que seu uso pode melhorar a eficiência computacional do *Regularized XFEM*, método onde as funções de deslocamento enriquecido descontínuo são substituídas por uma versão regularizada. Também é utilizado em Benvenuti (2008) onde em comparação com a quadratura padrão de Gauss e uma quadratura adaptativa se mostrou a técnica mais eficiente para descontinuidades fortes.

Existem ainda outras variações do XFEM como o XFEM suavizado, *Smoothed eXtended Finite Element Method* (SmXFEM), que é baseado na suavização da deformação, e é utilizado no trabalho de Natarajan, Bordas e Mahapatra (2010) para ser comparado com o XFEM associado a um método onde os domínios poligonais de integração são mapeados pela técnica de *Schwarz-Christoffel*.

E o *fully smoothed XFEM*, em tradução livre XFEM totalmente suavizado, onde sempre que há um integrando indefinido, seja na matriz de rigidez ou de massa, ele é combinado com o teorema do divergente e a integral é realizada no contorno do domínio, o artigo Wan, *et al.*, (2016) aborda esse método para problemas bimatéria, ou seja, problemas com dois materiais modelados por interfaces.

No trabalho de Kästner, *et al.*, (2012) é construído um campo de deformação suave para problemas de magnetismo, também pelo teorema do divergente. O objetivo do autor é evitar as

¹ O termo “subelementos” é utilizado em alguns trabalhos como, por exemplos, Fries e Belytschko (2010), Khoei (2015) e Béchet, *et al.*, (2005). Em outros trabalhos como Natarajan, Mahapatra e Bordas (2010), Ventura (2005), Seabra, *et al.*, (2012) e Kästner, *et al.*, (2012) é utilizado o termo “célula”, ou “subcélulas”. Independente do termo utilizado essa técnica não acrescenta graus de liberdade ao problema.

derivadas das funções descontínuas usadas como enriquecimento que surgem na matriz de rigidez.

Babuška e Banerjee (2012), desenvolveram o GFEM estável, do inglês *Stable* GFEM (SGFEM), onde o condicionamento da matriz de rigidez é melhorado.

Outro método é o XFEM suavizado linear, originalmente *Linear Smoothed* XFEM (LSm-XFEM), que foi primeiro publicado por Francis, *et al.*, (2017) e na publicação de Surendran, *et al.*, (2017) é comparado com o SmXFEM.

Para conhecer melhor o método dos elementos finitos estendidos é possível encontrar literaturas abrangentes sobre o XFEM como os livros dos autores Khoei (2015), Mohammadi (2008), Zhuang, *et al.*, (2014) e Rabczuk, *et al.*, (2020).

1.1 Objetivos

- Realizar uma análise numérica dos métodos de integração de Gauss-Legendre no XFEM tradicional, do método da subelementação e da integração Gauss-Legendre usando a técnica do polinômio equivalente, implementando tais métodos na linguagem de programação FORTRAN;
- Avaliar métodos de integração numérica para descontinuidade fraca no XFEM;
- Analisar os métodos de integração através de problemas com solução analítica;
- Comparar os métodos de integração com a norma de deslocamento;
- Fazer comparações também usando a norma de energia.

1.2 Justificativa

O tema desta dissertação é a integração numérica no XFEM porque esse é um dos objetos de estudo recorrente na literatura do XFEM, porém para problemas com descontinuidade material há menos estudos se comparado aos que abordam a descontinuidade forte (trincas). Além disso, o estudo, análise e implementação numérica de métodos de regularização da representação da

interface e de sua comparação com o método usual de representação é uma contribuição para o desenvolvimento contínuo do XFEM.

1.3 Divisão da dissertação

No primeiro capítulo foi escrito um breve contexto histórico sobre o desenvolvimento do FEM até o surgimento do XFEM e sobre métodos ainda mais recentes baseados no XFEM. E também foram apresentados os objetivos da dissertação.

No segundo capítulo há a formulação matemática do XFEM, uma explicação sobre os tipos de interfaces que são objeto de estudo do método, uma discussão sobre a função distância assinalada, uma apresentação dos tipos de elementos que fazem parte de uma mesma malha e a descrição do método com notação matricial.

O terceiro capítulo é dedicado à integração numérica por subelementos, especialmente os triangulares gerados pela triangulação de Delaunay, e um pseudocódigo com a sua implementação computacional.

No quarto capítulo é abordado o método de Ventura (2005) que substitui as funções descontínuas por polinômios na matriz de rigidez, ao longo desta dissertação eles são chamados de polinômios equivalentes. Para ele é desenvolvida a equação da matriz de rigidez e os polinômios para o elemento quadrilátero bilinear. Ao final desse capítulo está o pseudocódigo do algoritmo que foi implementado.

No capítulo 5 estão três problemas. O primeiro de uma barra com uma interface que separa dois materiais, seguido pelo problema de uma placa quadrada com o Poisson nulo, o último é uma placa com uma inclusão circular modelada por uma interface.

Por último, no capítulo 6, estão as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

2 FORMULAÇÃO DO XFEM

O método dos elementos finitos estendido, ou *eXtended Finite Element Method* (XFEM), é um método de partição da unidade em que funções enriquecidas são adicionadas ao FEM convencional através das suas funções de aproximação para capturar o comportamento descontínuo de uma interface interna (KHOEI, 2015).

O campo da aproximação enriquecida extrinsecamente pode ser generalizado por:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \text{termos de enriquecimento}, \quad (2)$$

onde I é o conjunto de todos os nós do elemento, $N_i(\mathbf{x})$ são as funções de forma padrão.

Para a modelagem de apenas uma interface a aproximação enriquecida assume a eq. (3):

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i}_{\text{parcela do FEM padrão}} + \underbrace{\sum_{i \in I^*} N_i^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i}_{\text{parcela de enriquecimento}}, \quad (3)$$

onde $N_i^*(\mathbf{x})$ é utilizada como PU no enriquecimento, são as mesmas funções de forma utilizadas na parcela do FEM padrão, mas também poderia ser uma outra função. A variável \mathbf{u}_i são os graus de liberdade associados a aproximação padrão de elementos finitos, \mathbf{a}_i é o grau de liberdade nodal correspondente a função enriquecida, $\psi(\mathbf{x})$ é a função de enriquecimento, I^* é o subconjunto com os nós enriquecidos do elemento, $I^* \subset I$.

Na eq. (3) o campo de deslocamento, $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$, é a soma entre uma parcela do FEM com uma parcela que é incorporada na aproximação do campo de deslocamento para acrescentar o enriquecimento através de uma PU. Na Figura 4 pode ser observado que o enriquecimento varia a cada nó e muitos nós não necessitam de enriquecimento.

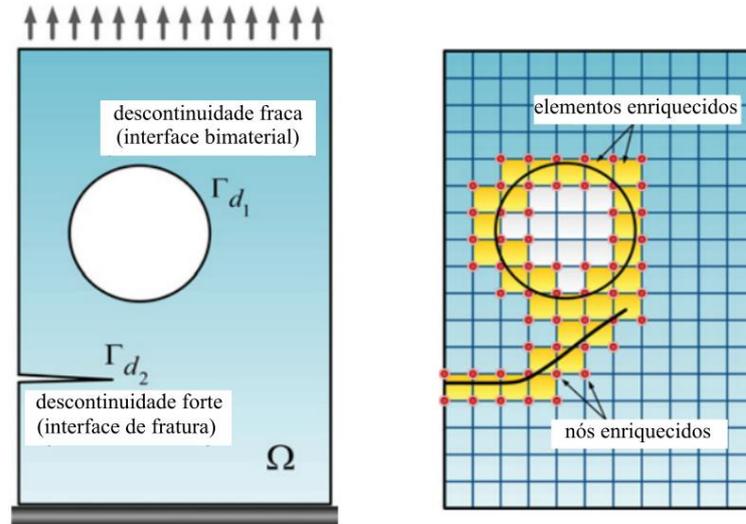


Figura 4 – Modelo de descontinuidade forte e fraca no FEM enriquecido: (a) Definição das interfaces internas, Γ_{d_1} interface bimaterial e Γ_{d_2} interface de fratura no domínio Ω , (b) malha uniforme em que os nós destacados tem GL adicional e funções enriquecidas. Adaptado de Khoei (2015).

2.1 Descontinuidades forte e fraca

As funções de enriquecimento dependem do tipo de descontinuidade, por isso a escolha dessas funções para aproximar o deslocamento varia de acordo com as condições do problema (KHOEI, 2015). Modelos com descontinuidades fortes possuem saltos na interface enquanto modelos com descontinuidades fracas possuem um pico na interface (FRIES e BELYTCHKO, 2010).

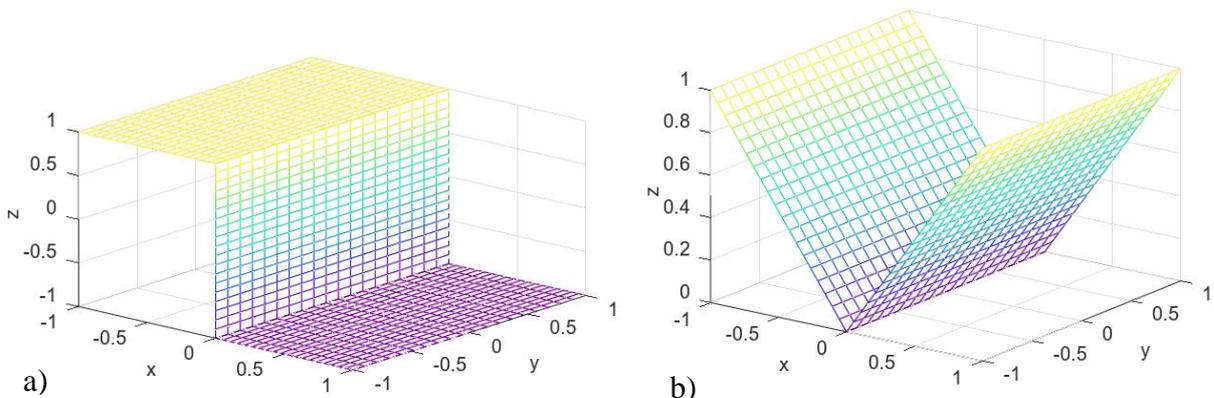


Figura 5 – Tipos de descontinuidades no XFEM (a) forte e (b) fraca em uma interface.

No FEM clássico são utilizadas aproximações polinomiais e sua precisão é ótima para soluções suaves. Para elementos com saltos e picos internos a precisão decresce drasticamente. Por isso, no FEM as arestas dos elementos coincidem com as interfaces das descontinuidades fortes e fracas (FRIES e BELYTSCHKO, 2010).

A função salto de Heaviside, Figura 5(a), é utilizada para modelar descontinuidades fortes presentes em um domínio do XFEM, por exemplo os elementos que são completamente cortados por uma fratura, com essa função é possível capturar o salto através da fratura. Enquanto a ponta da trinca é enriquecida com modelos singulares de ponta de trinca (PATHAK, SINGH e SINGH, 2011).

Para descontinuidades fracas, Figura 5(b), que estão relacionadas com uma interface entre dois materiais de propriedades diferentes em um domínio, são utilizadas funções de enriquecimento através do método *Level Set* (PATHAK, SINGH e SINGH, 2011).

2.2 Método das curvas de nível e função distância assinalada

O método das curvas de nível, *Level Set Method* (LSM) é utilizado para representar implicitamente a geometria das interfaces. Nesse método as interfaces são modeladas por funções implícitas, a interface é o conjunto *level zero* de uma função que possui uma dimensão a mais do que a dimensão da interface (STOLARSKA, *et al.*, 2001).

Seja um domínio Ω dividido nos domínios Ω_A e Ω_B por uma interface, Figura 6. Essa interface chamada de Γ_d pode ser uma interface aberta ou fechada. Se for uma interface fechada, isso quer dizer que está completamente dentro do domínio e pode representar diferentes materiais. Enquanto uma interface aberta possui um começo e um fim dentro do domínio, um exemplo é uma trinca (KHOEI, 2015).

A função *level set* utilizada foi a função de distância assinalada, que é definida pela representação da posição da interface, de acordo com a eq. (4), (RODRIGUEZ, 2019).

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}^* \in \Gamma_d} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \text{sinal}(\mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)), \quad (4)$$

onde \mathbf{x}^* é o ponto de projeção de \mathbf{x} ortogonal a interface Γ_d , \mathbf{n}_{Γ_d} é o vetor normal da interface Γ_d ao ponto \mathbf{x}^* . O símbolo $\|\cdot\|$ define a norma Euclidiana, onde $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|$ é a distância do ponto \mathbf{x} até a descontinuidade Γ_d .

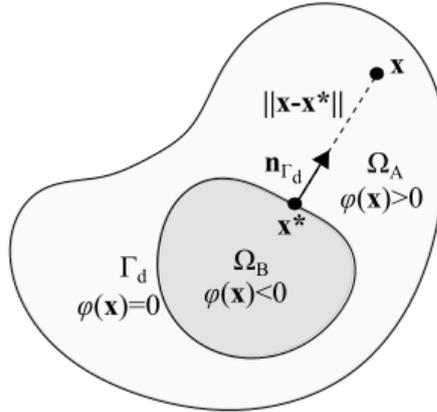


Figura 6 – Função distância assinalada.

Computacionalmente, a eq. (4) é aplicada apenas para calcular seu valor nos pontos nodais do elemento, para os outros pontos no domínio do elemento em que é necessária, como nos pontos de integração, a distância assinalada é determinada por interpolação com as funções de forma, nesse caso ela é conhecida como função rampa.

Observe que na eq. (4) o sinal é diferente em cada lado da interface. Assim, a descontinuidade é representada implicitamente como a curva de nível zero, como mostrado na eq. (5).

$$\varphi(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_A, \\ = 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_d, \\ < 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_B. \end{cases} \quad (5)$$

Então, o campo de deslocamento para os problemas com interface material, onde a descontinuidade é fraca, assume a eq. (6),

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i}_{\text{parcela do FEM padrão}} + \underbrace{\sum_{i \in I^*} N_i^*(\mathbf{x}) (|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_i)|) \mathbf{a}_i}_{\text{parcela de enriquecimento}}, \quad (6)$$

onde $|\varphi(\mathbf{x})|$ é a função rampa no ponto de interesse e $|\varphi(\mathbf{x}_i)|$ é o valor da função distância assinalada no ponto nodal i . Então, a função de enriquecimento $\psi(\mathbf{x})$ vale a subtração

$(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_i)|)$, que é a função rampa deslocada, no inglês *shifted ramp function*. Essa correção é necessária, para que nos nós o campo $N_i(\mathbf{x})(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_i)|)$ seja nulo e, conseqüentemente, a função de enriquecimento represente a descontinuidade fraca sem incorporar qualquer valor aos nós.

A Figura 7 (a) mostra a PU multiplicada pela função rampa, $N_1(\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x})|$, este campo possui no nó 1 o valor da função distância assinalada enquanto em (b) é plotada a PU multiplicada pela função rampa deslocada, $N_1(\mathbf{x})(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_1)|)$, onde há a correção e por isso o valor do campo é nulo nos nós do elemento.

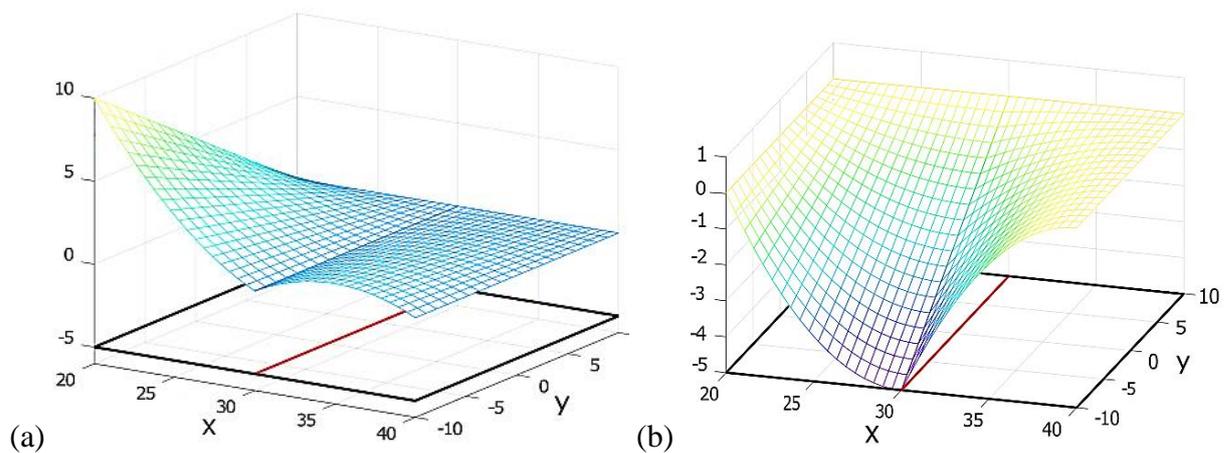


Figura 7 – Campo de enriquecimento para uma interface bimaterial no centro de um elemento quadrilátero bilinear com: (a) a função rampa $N_1(\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x})|$; (b) a função rampa deslocada $N_1(\mathbf{x})(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_1)|)$.

2.3 Elementos de mistura, enriquecidos e padrão

Na Figura 8 estão os nós e os elementos associados ao FEM padrão, os nós e os elementos enriquecidos, e também os elementos de mistura.

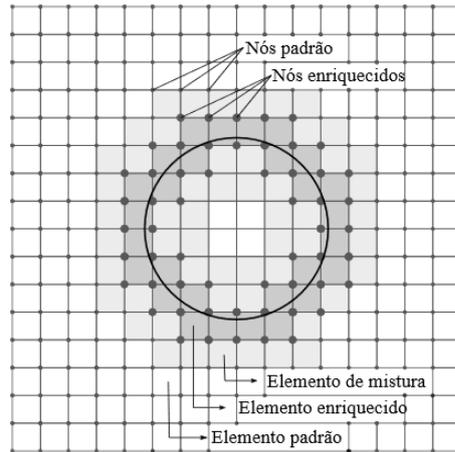


Figura 8 – Tipos de elementos e nós no XFEM.

Os elementos que conectam os elementos enriquecidos aos elementos padrão, são chamados de elementos de mistura (*blending elements*). Nesses elementos existem nós com graus de liberdade extras devido ao enriquecimento e também nós sem enriquecimento (KHOEI, 2015).

Para os nós enriquecidos do elemento de mistura o campo de deslocamento, eq. (6), possui a parcela de enriquecimento composta pelo produto entre e PU e a função rampa, ver Figura 9.

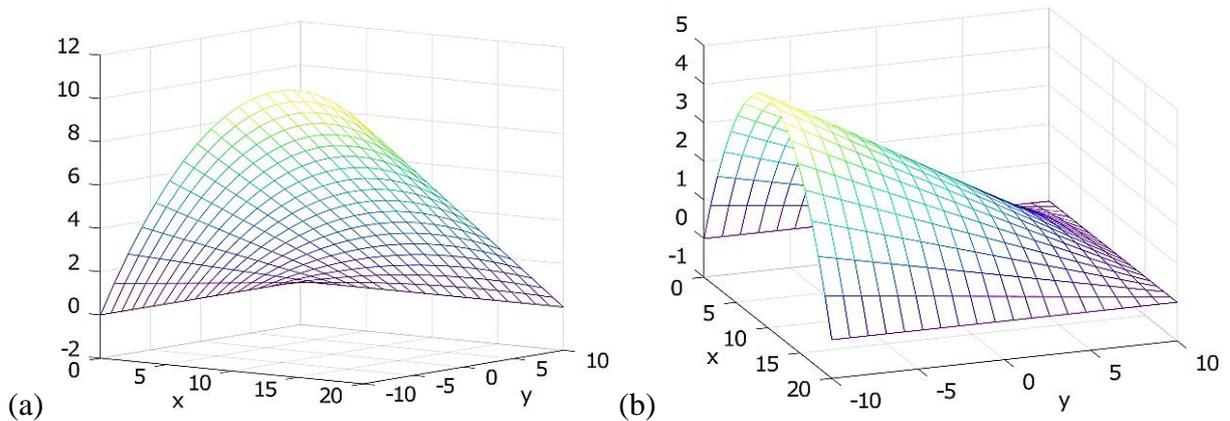


Figura 9 – Campo de enriquecimento para um nó enriquecido do elemento de mistura quadrilátero bilinear com: (a) a função rampa

$N_2(\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x})|$; (b) a função rampa deslocada $N_2(\mathbf{x})(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_2)|)$.

2.4 Discretização do XFEM

O sistema discreto do XFEM, no nível do elemento, pode ser escrito como:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e. \quad (7)$$

Também pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu} & \mathbf{k}_{ua} \\ \mathbf{k}_{au} & \mathbf{k}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_a \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Enquanto, a matriz \mathbf{K}_e é calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{pdr}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{pdr} & \mathbf{B}_{pdr}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{enr} \\ \mathbf{B}_{enr}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{pdr} & \mathbf{B}_{enr}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{enr} \end{bmatrix} d\Omega, \quad (9)$$

Sendo \mathbf{E} a matriz constitutiva do material e \mathbf{B}_{pdr} e \mathbf{B}_{enr} as matrizes das derivadas das funções de forma, que podem ser definidas conforme a eq. (13) e a eq. (14):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial N_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_j)) + N_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_j)) \right] \mathbf{a}_j, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{pdr} \mathbf{u} + \mathbf{B}_{enr} \mathbf{a}. \quad (11)$$

E o vetor força:

$$\mathbf{f}_e = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_{I_e}} (\mathbf{N}_{pdr}^T) \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}_{pdr}^T) \mathbf{b} d\Omega \\ \int_{\Gamma_{I_e}} (\mathbf{N}_{enr}^T) \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}_{enr}^T) \mathbf{b} d\Omega \end{array} \right\}. \quad (12)$$

Sendo \mathbf{E} a matriz constitutiva do material e \mathbf{B}_{pdr} e \mathbf{B}_{enr} as matrizes das derivadas das funções de forma, que podem ser definidas conforme a eq. (13) e a eq. (14):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial N_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_j)) + N_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_j)) \right] \mathbf{a}_j, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{pdr} \mathbf{u} + \mathbf{B}_{enr} \mathbf{a}. \quad (14)$$

3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR SUBELEMENTOS

Frequentemente uma decomposição em duas dimensões é útil, como em triângulos e quadriláteros, onde a quadratura de Gauss vai ser empregada para possibilitar a integração exata de polinômios até certa ordem no elemento de referência. Essa propriedade é mantida apenas para elementos cortados por uma descontinuidade se eles forem decompostos em subelementos triangulares, os subelementos quadriláteros fornecem resultados bons pela quadratura de Gauss, mas não exatos. Por isso, algumas vezes é preferível decompor o elemento quadrilátero em triângulos e usar interpolação linear em cada triângulo (FRIES e BELYTCHKO, 2010).

O trabalho apresentado por Akhondzadeh, Khoei e Broumand (2016) utiliza na integração numérica pontos de integração de Gauss 8×8 para os elementos padrão e aplica um método de *sub-grids* retangulares para os elementos enriquecidos, em que cada elemento enriquecido é dividido em 10×10 *sub-grids* com quatro pontos de Gauss em cada sub-retângulo.

Diferentemente da técnica de subelementos, na técnica que emprega *sub-grids* retangulares não é necessário conformar os retângulos criados com a interface e em cada um deles são utilizados os pontos de Gauss de forma independente (KHOEI, 2015).

A integração proposta por Bouhala, *et al.*, (2013) divide os elementos quadriláteros cortados por fratura e por interface bimaterial em seis sub-triângulos conforme a geometria da descontinuidade.

Para alguns casos a intercessão da fratura com o elemento forma um triângulo, quando a interface não atravessa arestas opostas, assim uma subdivisão factível do elemento é em triângulos. Também, como apresentado em Seabra, *et al.*, (2012) a triangulação é comumente utilizada no XFEM.

A sub-triangulação de elementos cruzados por uma descontinuidade é uma das regras mais utilizadas no XFEM, existem diversas estratégias possíveis que consistem em dividir o elemento em triângulos de acordo com a configuração da malha para aplicar as regras de Gauss dentro do elemento. Esta técnica difere de remalhar porque os triângulos são apenas usados para a determinação das coordenadas dos pontos de Gauss dentro do elemento. Também tem a

vantagem de ser facilmente implementado com a divisão do elemento obtida pela triangulação de Delaunay (SEABRA, *et al.*, 2012).

Na Figura 10 é apresentado um exemplo de triangulação.

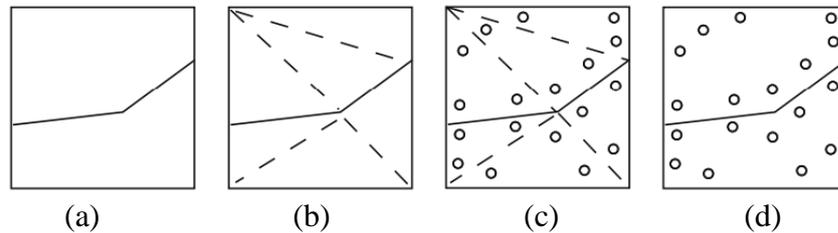


Figura 10 – Procedimento de triangulação para determinar a posição dos pontos de Gauss. (a) Elemento com interface; (b) sub-triangulação; (c) Pontos de Gauss dos sub-triângulos; (d) Pontos de Gauss finais do elemento quadrilátero. Adaptado de SEABRA, *et al.*, (2012).

Para evitar a subdivisão do elemento, uma estratégia é utilizar uma grande quantidade de pontos de Gauss cuja posição é fixa no elemento e não se ajusta a posição da descontinuidade no elemento. Para descontinuidade forte, essa estratégia é computacionalmente mais cara que a subdivisão, pois necessita de uma grande quantidade de pontos de Gauss para obter a mesma precisão (SEABRA, *et al.*, 2012).

A triangulação de Delaunay pode ser utilizada em um conjunto com três ou mais pontos distintos, assumindo-se que os pontos não são colineares. Tem a propriedade de que para cada triângulo gerado seu circuncírculo não contém nenhum ponto do conjunto em seu interior. Por isso, o ângulo mínimo para todos os triângulos na triangulação é maximizado. Para consultar as provas dessa técnica pode-se utilizar a referência Lee e Schachter (1980).

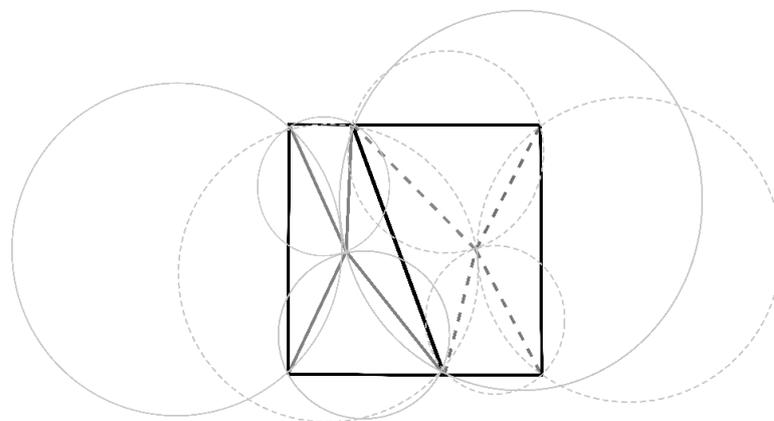


Figura 11 – Triangulação de Delaunay em dois quadriláteros e os circuncírculos de cada triângulo construído.

Nesta dissertação, a subelementação com triângulos é uma das técnicas de integração que foi analisada para o XFEM. Para a triangulação dos elementos foi utilizado o pacote GEOMPACK que contém rotinas em Fortran 77 para a geração de malhas triangulares bidimensionais e tetraedros tridimensionais desenvolvido por Barry (1991). Esse pacote inclui a sub-rotina DTRIS2, que para um dado conjunto de vértices, constrói a triangulação de Delaunay, sendo os vértices pertencentes a um polígono convexo, este é decomposto em triângulos.

3.1 Formulação da integração com subelementos triangulares

Para a transformação do elemento em subelementos triangulares é necessário dividir a sua geometria em triângulos, a triangulação de Delaunay foi utilizada para essa divisão. Esses triângulos possuem suas coordenadas \mathbf{x}_i conhecidas no plano cartesiano (x, y) e para a integração são utilizados os pontos e pesos de Gauss para o triângulo normalizado, no sistema de eixo (r, s) , esses pontos podem ser facilmente transformados para o plano cartesiano através das equações de transformação isoparamétrica do elemento triangular conhecido como *Constant Strain Triangle (CST)*, eq. (15).

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)r + (x_3 - x_1)s + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1)r + (y_3 - y_1)s + y_1. \end{aligned} \quad (15)$$

A Figura 12, apresenta um subelemento triangular e a sua transformação de coordenadas.

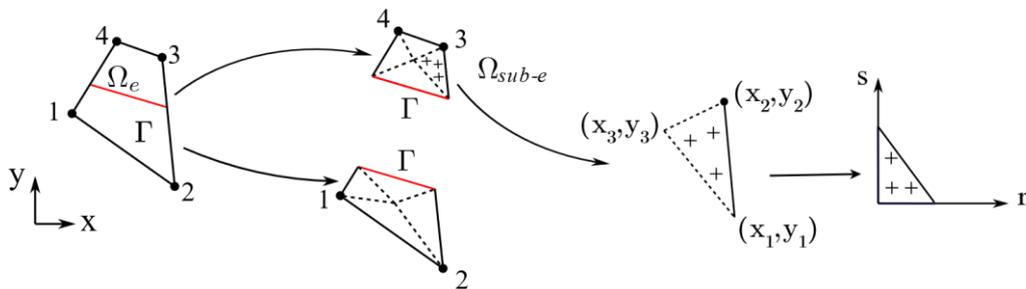


Figura 12 – Transformação de coordenadas: Sub-triângulos Ω_{sub-e} em um elemento Q4 Ω_e que contém uma interface Γ .

O jacobiano dessa transformação segue na eq. (16),

$$J_{sub-e} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Um problema que surge é que uma vez conhecidos os pontos de integração no plano cartesiano é necessário transformar esses pontos para o sistema padrão ou natural do elemento quadrilateral (ξ, η) . O mapeamento isoparamétrico de coordenadas locais (ξ, η) , para o plano cartesiano (x, y) :

$$\mathbf{x} = \sum_i N_i(\xi, \eta) \cdot \mathbf{x}_i. \quad (17)$$

A inversa desse mapeamento, $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, não é simples porque envolve um sistema não linear de equações cuja solução não pode ser obtida analiticamente. Desta forma, uma aproximação numérica é necessária. Para evitar resolver o sistema não linear de equações por um método numérico, como o método de Newton-Raphson, sem nenhum tipo de condicionamento (ou informação *a priori* que acelere a busca) foi utilizado o método desenvolvido por Murti e Valliappan (1985).

Em Murti e Valliappan (1985) a iteração para determinar o mapeamento inverso foi melhorada pela intersecção de uma linha definida que passa através de um ponto M , no interior do elemento, de coordenadas \mathbf{x}_m no plano cartesiano e um ponto P de coordenada local conhecida, ξ_p , como um nó que seja vértice do elemento.

No problema, o ponto M é o ponto de Gauss que precisa ser determinado em termos das coordenadas locais, ξ_m e corresponde ao ponto M' , essas variáveis estão indicadas na Figura 13.

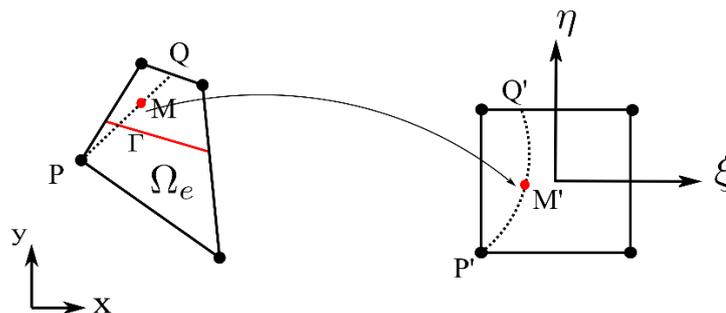


Figura 13 – Mapeamento inverso.

O segmento \overline{PQ} no plano cartesiano pode ser determinado através da equação da reta que liga os pontos P e M . Esse segmento está associado com a curva $P'Q'$ no plano de coordenadas locais e que passa através do ponto M' . Dessa forma, a coordenada do ponto M' , ξ_m , pode ser determinada de modo mais eficiente se comparado com um método numérico que não usa nenhum conhecimento a priori do problema.

Para determinar o ponto M' sobre a curva $P'Q'$ foi utilizado o método numérico da falsa posição, como sugeriu Lim, *et al.*, (1992). Os autores Murti e Valliappan (1985) utilizaram o método da bissetão, mas o número de iterações para esse método foi maior.

O ponto P não pode ser qualquer vértice do elemento. Ele deve ser escolhido de modo que a curva $P'Q'$ esteja definida em todo elemento, ou seja, ela deve percorrer todo o eixo η no intervalo $[-1, +1]$. No presente trabalho quando isto não ocorre o ponto P é redefinido como o vértice oposto ao anterior, enquanto Murti e Valliappan (1985) escolheu renumerar os nós do elemento, assim há uma transformação do eixo η em ξ .

Matematicamente, o primeiro passo foi determinar a reta que contém o segmento \overline{PQ} , isto é:

$$\overline{PQ} \equiv y = ax + c, \quad (18)$$

onde:

$$a = \frac{y_m - y_p}{x_m - x_p}, \quad (19)$$

$$c = y_p - ax_p. \quad (20)$$

Substituindo as funções de forma (17) em (18), chega-se na eq. (21).

$$N_i y_i = a(N_i x_i) + c. \quad (21)$$

Que pode ser simplificada pela eq. (22).

$$N_i y_i - c = 0. \quad (22)$$

Como γ_i e c são constantes para os pontos M e P , a eq. (22) pode ser organizada de acordo com a eq. (23).

$$A\xi^2 + B\xi + C = 0. \quad (23)$$

Nesta última equação A , B e C são funções $f(\gamma_i, \eta, c)$. Essas constantes variam de acordo com o número de nós do elemento quadrilateral. Para o elemento quadrilateral de 4 nós, as constantes encontradas são fornecidas nas equações:

$$A = 0, \quad (24)$$

$$B = \frac{1}{4}((\gamma_2 - \gamma_1)(1 - \eta) + (\gamma_3 - \gamma_4)(1 + \eta)), \quad (25)$$

$$C = \frac{1}{4}(-(\gamma_1 + \gamma_2)(-1 + \eta) + (\gamma_3 + \gamma_4)(1 + \eta)) - c. \quad (26)$$

Como apenas uma raiz é solução, ela pode ser determinada quando, na iteração η , for obtida a tolerância adotada, δ_n .

$$\delta_n \geq \mathbf{x}_m - N_i(\xi_m^n). \quad (27)$$

Obtidos os pontos de integração no eixo (ξ, η) . A matriz de rigidez pode ser integrada em cada subelemento triangular utilizando a eq. (28).

$$\mathbf{K}_{sub-e} = \int_{\Omega_{sub-e}} \det[\mathbf{J}_{sub-e}] \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \simeq \sum_{i=1}^n w_i \det[\mathbf{J}_{sub-e}] \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega. \quad (28)$$

Onde, n é a quantidade de pontos de Gauss utilizados, w_i é o peso de Gauss. E as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{E} que estão em função das variáveis ξ e η , são integradas nos pontos (ξ_i, η_j) , que são os pontos de Gauss do subelemento triangular transformados para esse sistema de coordenadas.

A matriz de rigidez do elemento \mathbf{K}_e é a soma das matrizes de rigidez de cada subelemento \mathbf{K}_{sub-e} obtidas através da integração numérica.

$$\mathbf{K}_e = \sum_{sub-e}^{nk} \mathbf{K}_{sub-e} . \quad (29)$$

onde nk é o número total de subelementos do elemento Ω_e .

3.2 Programação da integração por subelementos

A linguagem utilizada para realizar a integração com subelementos triangulares foi FORTRAN. Havia uma estrutura com o XFEM desenvolvida pelo grupo de pesquisa, mais recente por Rodriguez (2019), e nela foi acrescentada a programação com outros métodos de integração.

O pseudocódigo segue:

Algoritmo “rigidez do elemento enriquecido com subelementos triangulares”

Início

Pegar os pontos dos polígonos formados entre os nós do elemento e da interface

Realizar a triangulação de Delaunay

Determinar o valor da função LS

Loop sobre o nº de subelementos (índice j)

Loop sobre o nº de pontos de integração no subelemento (índice i)

Calcular os pontos de integração do subelemento no plano natural através do mapeamento inverso (ξ_i, η_i)

Calcular a matriz constitutiva do material, \mathbf{E}

Calcular a matriz do Jacobiano, \mathbf{J}_j^{sub}

Calcular a matriz das derivadas, \mathbf{B}

Calcular a matriz de rigidez no ponto de integração, \mathbf{K}_i

Fim do loop sobre o nº de pontos de integração no subelemento

Calcular a matriz de rigidez no subelemento, $\mathbf{K}_j^{sub} = \sum_{i=1} \mathbf{K}_i$

Fim do loop sobre o nº de subelementos

Calcular a matriz de rigidez do elemento, $\mathbf{K}_e = \sum_{j=1} \mathbf{K}_j^{sub}$

Fim algoritmo

Figura 14 – Algoritmo para a integração com subelementos triangulares.

4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR POLINÔMIOS EQUIVALENTES

Esse método, que foi inicialmente desenvolvido por Ventura (2005), apresenta a formulação de polinômios que substituídos nas funções descontínuas da forma fraca da matriz de rigidez geram um resultado após a integração que equivalem a integração com as funções de enriquecimento. Porém, com a substituição pelos polinômios, a integração da forma fraca da matriz de rigidez não é comprometida caso os pontos da quadratura estejam sobre a descontinuidade.

4.1 Formulação da matriz de rigidez

No XFEM o deslocamento para um problema de interface bimaterial pode ser escrito de acordo com a eq. (6). De forma mais específica, para o elemento quadrilátero bilinear pode-se utilizar uma notação com matriz e vetores onde f_e é a função de enriquecimento, eq. (30).

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}\mathbf{u}_e + \mathbf{N}f_e\mathbf{a}_e. \quad (30)$$

A função $\varphi(\mathbf{x})$ é a função distância assinalada, do ponto \mathbf{x} até a interface Γ , assim o deslocamento pode ser reescrito conforme a eq. (31),

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}\mathbf{u}_e + \mathbf{N}\left(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(x_j)|\mathbf{I}\right)\mathbf{a}_e, \quad (31)$$

onde $|\varphi(x_j)|\mathbf{I}$ é a função distância assinalada nos nós do elemento em uma matriz identidade.

O campo de deformação possui a forma da eq. (32).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}_e + |\varphi(\mathbf{x})|\mathbf{B}\mathbf{a}_e + (\nabla_\varepsilon |\varphi(\mathbf{x}_j)|)\mathbf{N}\mathbf{a}_e - \mathbf{B}\left(|\varphi(\mathbf{x}_j)|\mathbf{I}\right)\mathbf{a}_e. \quad (32)$$

Sendo a tensão dada por $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$, o trabalho virtual interno do elemento segue a eq. (33).

$$L_i = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega. \quad (33)$$

Substituindo $\boldsymbol{\varepsilon}$ da eq. (32) em (33):

$$L_i = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}\mathbf{u}_e + |\varphi(\mathbf{x})|\mathbf{B}\mathbf{a}_e + (\nabla_\varepsilon |\varphi(\mathbf{x})|)\mathbf{N}\mathbf{a}_e - \mathbf{B}(|\varphi(\mathbf{x}_j)|\mathbf{I})\mathbf{a}_e)^T \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u}_e + |\varphi(\mathbf{x})|\mathbf{B}\mathbf{a}_e + (\nabla_\varepsilon |\varphi(\mathbf{x})|)\mathbf{N}\mathbf{a}_e - \mathbf{B}(|\varphi(\mathbf{x}_j)|\mathbf{I})\mathbf{a}_e) d\Omega. \quad (34)$$

Para simplificar a notação, substitui-se $|\varphi(\mathbf{x})|$ por $H\varphi$, $\nabla_\varepsilon |\varphi(\mathbf{x})|$ por $H\boldsymbol{\varepsilon}$ e $|\varphi(\mathbf{x}_j)|\mathbf{I}$ pelo símbolo \mathcal{F} , e chega-se na equação:

$$L_i = \int_{\Omega_e} (\mathbf{u}_e^T \mathbf{B}^T + \mathbf{a}_e^T H\varphi \mathbf{B}^T + \mathbf{a}_e^T \mathbf{N}^T (H\boldsymbol{\varepsilon})^T - (\mathbf{a}_e^T (\mathcal{F})^T \mathbf{B}^T)) \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u}_e + H\varphi \mathbf{B}\mathbf{a}_e + (H\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N}\mathbf{a}_e - \mathbf{B}(\mathcal{F})\mathbf{a}_e) d\Omega. \quad (35)$$

A função de enriquecimento $|\varphi(\mathbf{x})|$ pode ser definida como:

$$|\varphi(\mathbf{x})| = \text{abs}(\varphi(\mathbf{x})) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) & \text{se } \varphi(\mathbf{x}) \geq 0, \\ -\varphi(\mathbf{x}) & \text{se } \varphi(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \quad (36)$$

Enquanto a função de Heaviside:

$$H(\mathbf{x}) = \text{sinal}(\varphi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(\mathbf{x}) \geq 0, \\ -1 & \text{se } \varphi(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \quad (37)$$

Após expandir a eq. (35) obtém-se a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \\ (H\varphi)\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} + \mathbf{N}^T (H\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{E} \mathbf{B} - (\mathcal{F})^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}^T \mathbf{E} (H\varphi)\mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{E} (H\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N} - \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} (\mathcal{F}) \\ H\varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E} (H\varphi)\mathbf{B} + \mathbf{N}^T (H\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{E} (H\varphi)\mathbf{B} + H\varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E} (H\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N} \\ 0 & +\mathbf{N}^T (H\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{E} (H\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N} + (\mathcal{F})^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} (\mathcal{F}) - H\varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} (\mathcal{F}) \\ -\mathbf{N}^T (H\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{E} \mathbf{B} (\mathcal{F}) - (\mathcal{F})^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} (H\varphi)\mathbf{B} - (\mathcal{F})^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} (H\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega. \quad (38)$$

A matriz constitutiva do material pode ser escrita como na eq. (39).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + H(\mathbf{x})\Delta\mathbf{E}. \quad (39)$$

onde $\mathbf{E}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B)$ e $\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_A - \mathbf{E}_B)$. As matrizes \mathbf{E}_A e \mathbf{E}_B representam as matrizes constitutiva do material com as propriedades de cada um dos materiais.

Então, substituindo a eq. (39) na eq. (38) da matriz de rigidez, a matriz \mathbf{K}_e pode ser escrita de modo a depender de \mathbf{E}_m e $\Delta\mathbf{E}$, como mostra a eq. (40):

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} & 0 \\ H \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + H \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & H \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + H \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} - \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ \varphi^2 \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \varphi \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \\ 0 & + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m H \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - H \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ & - H \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - H \varphi \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} - H \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega \quad (40)$$

$$\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} H \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \\ \varphi \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} - H \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & \varphi \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} - H \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ H \varphi^2 \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} + H \varphi \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} + H \varphi \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \\ 0 & + H \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + H \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \varphi \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ & - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \varphi \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \mathbf{B} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega.$$

As funções que aparecem na matriz de rigidez foram separadas em contínua e diferenciável, contínuas e diferenciável por partes e descontínuas na Tabela 1.

Tabela 1 – Continuidade das funções de integração para problemas de descontinuidade material

Contínua e diferenciável	Contínua e diferenciável por partes	Descontínua
H^2	$H\varphi$	H
φ	$H^3\varphi$	H^3
φ^2		$H^3\varphi^2$
$H^2\varphi$		
$H^2\varphi^2$		

4.2 Matriz de rigidez regularizada

Separando a matriz de rigidez da eq. (40) de acordo com as parcelas contínuas, diferenciáveis e descontínuas, obtêm-se a eq. (41):

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e = & \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} & 0 \\ \varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & \varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + H^2 \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} - \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ \varphi^2 \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \varphi \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ 0 & -\varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \varphi \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} H \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \\ H \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + H \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} - H \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & H \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + H \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} - H \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ H \varphi^2 \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + H \varphi \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + H \varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + H \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + H \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ 0 & -H \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - H \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - H \varphi \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} - H \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega.
\end{aligned} \tag{41}$$

Substituindo a função de Heaviside H e o módulo da função rampa $H\varphi$, respectivamente, pelos polinômios equivalentes \tilde{H} e \tilde{Q} , nas parcelas descontínuas da matriz de rigidez, chega-se na eq. (42).

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_e = & \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} & 0 \\ \varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & \varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + H^2 \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} - \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ \varphi^2 \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \varphi \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \varphi \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ 0 & -\varphi \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \varphi \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} - \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \tilde{H} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \\ \tilde{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \tilde{H} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} - \tilde{H} \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} d\Omega + \\
& \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} + \tilde{H} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} - \tilde{H} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ \tilde{H} \varphi^2 \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + \tilde{Q} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} + \tilde{Q} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \tilde{H} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} + \tilde{H} \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} \\ 0 & -\tilde{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \tilde{H} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} \boldsymbol{\mathcal{F}} - \tilde{Q} \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \mathbf{B} - \tilde{H} \boldsymbol{\mathcal{F}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \end{bmatrix} d\Omega.
\end{aligned} \tag{42}$$

Os polinômios \tilde{H} e \tilde{Q} são diferentes para cada elemento do FEM, pois dependem das suas funções de aproximação. Na seção 4.3, os polinômios são desenvolvidos para o elemento quadrilátero bilinear que será utilizado nos problemas numéricos estudados.

Essa substituição da função descontínua H e do módulo da função rampa $H\varphi$, que é de classe C^0 , pelos polinômios equivalentes, que são de classe C^∞ , tem o objetivo de regularizar o integrando da matriz de rigidez para que quando a quadratura gaussiana seja aplicada não haja pontos de integração sobre a inflexão do módulo da função rampa ou na descontinuidade da função de Heaviside, o que pode diminuir a precisão do método.

Com o integrando da matriz de rigidez regularizado através dos polinômios, a sua integração deve fornecer um resultado melhor se comparado com aplicar a quadratura de Gauss diretamente sem realizar a substituição.

4.3 Polinômios para o elemento quadrilátero bilinear

A função distância assinalada utilizada por Ventura (2005) é representada através das funções de interpolação:

$$\varphi(\xi, \eta) = N_I d_I = \frac{1}{4} \left[d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \xi(-d_1 + d_2 + d_3 - d_4) + \eta(-d_1 - d_2 + d_3 + d_4) + \xi\eta(d_1 - d_2 + d_3 - d_4) \right]. \quad (43)$$

No trabalho de Ventura (2005), o polinômio Q foi calculado considerando o elemento sem distorção, neste caso a parcela com $\xi\eta$ pode ser retirada e utilizar a simplificação $d_3 = -d_1 + d_2 + d_4$,

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [(1 + \xi)d_2 + (1 + \eta)d_4 - (\xi + \eta)d_1]. \quad (44)$$

Os pontos da interface interceptam o elemento nos pontos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 . Para o elemento sem distorção pode-se utilizar a eq. (45) para o caso em que a descontinuidade intercepta lados adjacentes.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}, -1 \right) \\ \mathbf{P}_2 &= (\xi_2, \eta_2) = \left(-1, \frac{d_1 + d_4}{d_1 - d_4} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

E a eq. (46) quando a descontinuidade intercepta lados opostos.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}, -1 \right) \\ \mathbf{P}_2 &= (\xi_2, \eta_2) = \left(\frac{d_2 + 2d_4 - d_1}{d_1 - d_2}, +1 \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Para determinar \tilde{Q} que substitui a função de enriquecimento $|\varphi(\xi, \eta)|$ é necessário distinguir se a interface atravessa o elemento em lados adjacentes ou oposto.

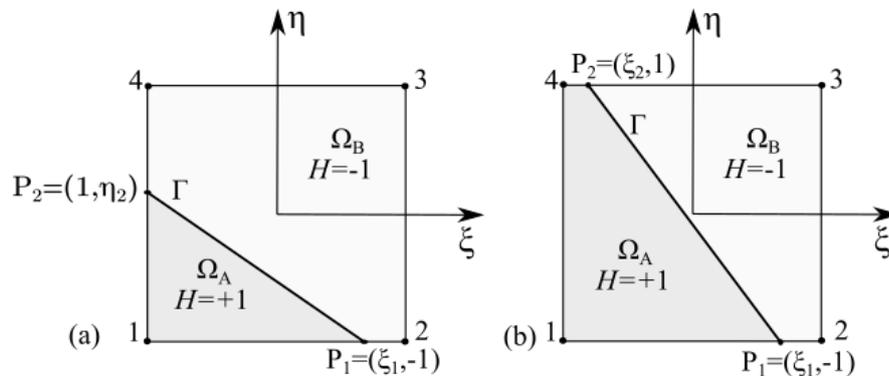


Figura 15 – Elemento finito quadrilateral interceptado por uma interface (a) lados adjacentes; (b) lados opostos.

Os polinômios para o caso do elemento sem distorção com a interface cruzando lados adjacentes e opostos são apresentados por Ventura (2005), mas para o caso geral, onde a equação (43) é utilizada, não foi desenvolvida. Por isso, segue esse desenvolvimento.

O gradiente da função de enriquecimento $\nabla_\varepsilon |\varphi(\mathbf{x})|$ foi substituído por $H\mathfrak{E}$ para simplificar a notação, enquanto o gradiente de $\nabla_\varepsilon \varphi(\mathbf{x})$ foi substituído por \mathfrak{E} , e pode ser definido como

$$\mathfrak{E} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \partial_\xi \varphi & 0 \\ \partial_\eta \varphi & 0 \\ 0 & \partial_\xi \varphi \\ 0 & \partial_\eta \varphi \end{bmatrix}, \quad (47)$$

Onde \mathbf{A} é a matriz de área do elemento quadrilátero definida no APÊNDICE A.

A matriz $|\varphi(\mathbf{x}_j)|\mathbf{I}$ também denotada pelo símbolo \mathfrak{F} para simplificação:

$$\mathfrak{F} = \mathbf{I} \cdot \left[|d_1| \quad |d_1| \quad |d_2| \quad |d_2| \quad |d_3| \quad |d_3| \quad |d_4| \quad |d_4| \right]^T. \quad (48)$$

O polinômio \tilde{H} é multiplicado por polinômio de quarto grau completo enquanto a função \tilde{Q} é multiplicada por um polinômio quadrático incompleto. Por isso, o polinômio \tilde{H} satisfaz o sistema de equações,

$$\int_{\Omega_e} \tilde{H} \xi^i \eta^j d\Omega = \int_{\Omega_A} H \xi^i \eta^j d\Omega + \int_{\Omega_B} H \xi^i \eta^j d\Omega \quad i, j = [0, \dots, 4]. \quad (49)$$

Enquanto o polinômio \tilde{Q} satisfaz o sistema de equações:

$$\int_{\Omega_e} \tilde{Q} \xi^i \eta^j d\Omega = \int_{\Omega_A} \varphi \xi^i \eta^j d\Omega - \int_{\Omega_B} \varphi \xi^i \eta^j d\Omega \quad i, j = [0, 1, 2]. \quad (50)$$

Dessa forma os polinômios equivalentes valem de modo geral:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & h_1 + h_2 \xi + h_3 \eta + h_4 \xi \eta + h_5 \xi^2 + h_6 \eta^2 + h_7 \xi^2 \eta + h_8 \xi \eta^2 \\ & + h_9 \xi^3 + h_{10} \eta^3 + h_{11} \xi^3 \eta + h_{12} \xi \eta^3 + h_{13} \xi^2 \eta^2 + h_{14} \xi^4 + h_{15} \eta^4, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\tilde{Q} = q_1 + q_2 \xi + q_3 \eta + q_4 \xi \eta + q_5 \xi^2 + q_6 \eta^2 + q_7 \xi^2 \eta + q_8 \xi \eta^2. \quad (52)$$

Para calcular as integrais da eq. (49), que formam o sistema para determinar os coeficientes $h_1, h_2, \dots, h_{14}, h_{15}$ do polinômio \tilde{H} foi utilizada a eq. (53) da reta que divide os domínios Ω_A e Ω_B para o caso do elemento com a interface em lados adjacentes.

$$\xi_{função} = \frac{(\eta_2 \xi_1 - 1) - (\xi_1 + 1)\eta}{\eta_2 + 1}. \quad (53)$$

Os coeficientes do polinômio para o caso (a) da Figura 15:

$$\begin{aligned} h_1 = & \frac{1}{256} \left(-300 - 63\eta_2^4 (1 + \xi_1) + 63\eta_2^5 (1 + \xi_1) + 2\eta_2^3 (1 + \xi_1) (-31 + 5(-4 + \xi_1)\xi_1) + \right. \\ & \left. 6\eta_2^2 (17 + \xi_1 (27 - 5(-1 + \xi_1)\xi_1)) + 3\eta_2 (1 + \xi_1) (-2 + \xi_1 (46 + \xi_1 (8 + 21(-2 + \xi_1)\xi_1))) + \right. \\ & \left. \xi_1 (-6 + \xi_1 (102 + \xi_1 (-62 + 63(-1 + \xi_1)\xi_1))) \right), \\ h_2 = & -\frac{3}{32} (1 + \eta_2) (1 + \xi_1) \left(3 + \eta_2 (7 - 3\xi_1) + \eta_2^2 (-4 + \xi_1) + 7(-1 + \xi_1)^2 \xi_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= -\frac{3}{32}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(3+7(-1+\eta_2)^2\eta_2+7\xi_1-3\eta_2\xi_1+(-4+\eta_2)\xi_1^2\right), \\
h_4 &= -\frac{3}{64}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(-34+7\eta_2^3(-5+\xi_1)-21\eta_2^2(-3+\xi_1)+\right. \\
&\quad \left.\xi_1(-16+7(9-5\xi_1)\xi_1)+\eta_2(-16+\xi_1(38+7(-3+\xi_1)\xi_1))\right), \\
h_5 &= -\frac{15}{128}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(-8+\eta_2^2(5+(-4+\xi_1)\xi_1)-2\eta_2(3+\xi_1(-5+2\xi_1))+\right. \\
&\quad \left.\xi_1(8+\xi_1(19+21(-2+\xi_1)\xi_1))\right), \\
h_6 &= -\frac{15}{128}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(-8+\eta_2(8+\eta_2(19+21(-2+\eta_2)\eta_2))-6\xi_1+2(5-2\eta_2)\eta_2\xi_1+(5+(-4+\eta_2)\eta_2)\xi_1^2\right), \\
h_7 &= \frac{3}{32}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(-7+3(7-4\xi_1)\xi_1+\eta_2(8+3(-3+\xi_1)\xi_1)\right), \tag{54} \\
h_8 &= \frac{3}{32}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(-7+3\eta_2(7+\eta_2(-4+\xi_1)-3\xi_1)+8\xi_1\right), \\
h_9 &= \frac{35}{32}(1+\eta_2)(-1+\xi_1)^2\xi_1(1+\xi_1), \\
h_{10} &= \frac{35}{32}(-1+\eta_2)^2\eta_2(1+\eta_2)(1+\xi_1), \\
h_{11} &= \frac{35}{64}(1+\eta_2)(-1+\eta_2(-1+\xi_1)-5\xi_1)(-1+\xi_1)^2(1+\xi_1), \\
h_{12} &= \frac{35}{64}(-1+\eta_2)^2(1+\eta_2)(-1+\eta_2(-5+\xi_1)-\xi_1)(1+\xi_1), \\
h_{13} &= \frac{45}{128}(1+\eta_2)(1+\xi_1)\left(-1+\xi_1(-6+5\xi_1)+\eta_2^2(5+(-4+\xi_1)\xi_1)-2\eta_2(3+\xi_1(-5+2\xi_1))\right), \\
h_{14} &= \frac{105}{256}(1+\eta_2)(-1+\xi_1)^2(1+\xi_1)(-1+7\xi_1^2), \\
h_{15} &= \frac{105}{256}(-1+\eta_2)^2(1+\eta_2)(-1+7\eta_2^2)(1+\xi_1).
\end{aligned}$$

Para o caso do elemento com a interface em lados opostos, utilizou-se a eq. (55).

$$\xi_{função} = \frac{(\xi_1 + \xi_2) + (-\xi_1 + \xi_2)\eta}{2}. \tag{55}$$

Por fim, os coeficientes do polinômio \tilde{H} foram determinados para o caso (b) da Figura 15:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{1}{128}\left(63\xi_1^5 + 63\xi_1^4\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2(-65 + 21\xi_2^2) + \xi_1^3(-155 + 63\xi_2^2) +\right. \\
&\quad \left.3\xi_1(75 - 65\xi_2^2 + 21\xi_2^4) + \xi_2(225 - 155\xi_2^2 + 63\xi_2^4)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= -\frac{3}{16} \left(15 + 7\xi_1^4 + 7\xi_1^3\xi_2 - 16\xi_2^2 + 7\xi_2^4 + \xi_1\xi_2(-18 + 7\xi_2^2) + \xi_1^2(-16 + 7\xi_2^2) \right), \\
h_3 &= \frac{3}{16} \left(3\xi_1^3 + \xi_1^2\xi_2 - 3\xi_2(-2 + \xi_2^2) - \xi_1(6 + \xi_2^2) \right), \\
h_4 &= \frac{3}{16} \left(-25\xi_1^2 + 14\xi_1^4 + 7\xi_1^3\xi_2 + 25\xi_2^2 - 7\xi_1\xi_2^3 - 14\xi_2^4 \right), \\
h_5 &= -\frac{15}{64} \left(21\xi_1^5 + 21\xi_1^4\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2(-17 + 7\xi_2^2) + \xi_1^3(-47 + 21\xi_2^2) + \right. \\
&\quad \left. \xi_1(35 - 51\xi_2^2 + 21\xi_2^4) + \xi_2(35 - 47\xi_2^2 + 21\xi_2^4) \right), \\
h_6 &= -\frac{15}{32} (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1 + \xi_2), \\
h_7 &= -\frac{3}{16} \left(9\xi_1^3 + 10\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2 - 9\xi_2^3 - \xi_1(10 + 3\xi_2^2) \right), \\
h_8 &= \frac{3}{8} (\xi_1 - \xi_2)^2, \\
h_9 &= \frac{35}{16} \left(\xi_1^4 + \xi_1^3\xi_2 + \xi_1^2(-2 + \xi_2^2) + \xi_1\xi_2(-2 + \xi_2^2) + (-1 + \xi_2^2)^2 \right), \\
h_{10} &= 0, \\
h_{11} &= -\frac{35}{16} \left(-3\xi_1^2 + 2\xi_1^4 + \xi_1^3\xi_2 + 3\xi_2^2 - \xi_1\xi_2^3 - 2\xi_2^4 \right), \\
h_{12} &= 0, \\
h_{13} &= \frac{45}{32} (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1 + \xi_2), \\
h_{14} &= \frac{105}{128} \left(7\xi_1^5 + 7\xi_1^4\xi_2 + \xi_1^3(-15 + 7\xi_2^2) + \xi_1^2\xi_2(-15 + 7\xi_2^2) + \right. \\
&\quad \left. \xi_1(9 - 15\xi_2^2 + 7\xi_2^4) + \xi_2(9 - 15\xi_2^2 + 7\xi_2^4) \right), \\
h_{15} &= 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

Já para o cálculo das integrais na eq. (50), que formam o sistema para encontrar os coeficientes $q_1, q_2 \dots q_8$ do polinômio \tilde{Q} , estas foram transformadas em integrais de contorno para serem dependentes apenas dos pontos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 da interface. Pois, uma vez que a função que equivale a $|\varphi(\mathbf{x})|$ não pode ser definida analiticamente esse foi o modo utilizado por Ventura (2005) para a integração.

Para utilizar o teorema do divergente, primeiro determinou-se os campos vetoriais $\Xi_{q1}, \dots, \Xi_{q8}$ que equivalem ao divergente da eq. (43) multiplicada por cada termo do polinômio Q .

$$\begin{aligned}
\Xi_{q_1} &= \begin{bmatrix} a\xi/2 + b\xi^2/2 + d\xi^2\eta/4 \\ a\eta/2 + c\eta^2/2 + d\xi\eta^2/4 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_1} &= \varphi(\xi, \eta) \\
\Xi_{q_2} &= \begin{bmatrix} a\xi^2/2 + b\xi^3/3 + c\xi^2\eta/4 + d\xi^3\eta/3 \\ c\xi\eta^2/4 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_2} &= \varphi(\xi, \eta)\xi \\
\Xi_{q_3} &= \begin{bmatrix} b\xi^2\eta/4 \\ a\eta^2/2 + b\xi\eta^2/4 + c\eta^3/3 + d\xi\eta^3/3 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_3} &= \varphi(\xi, \eta)\eta \\
\Xi_{q_4} &= \begin{bmatrix} a\xi^2\eta/4 + b\xi^3\eta/3 + d\xi^3\eta^2/6 \\ a\xi\eta^2/4 + c\xi\eta^3/3 + d\xi^2\eta^3/6 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_4} &= \varphi(\xi, \eta)\xi\eta \\
\Xi_{q_5} &= \begin{bmatrix} 0 \\ a\xi^2\eta + b\xi^3\eta + c\xi^2\eta^2/2 + d\xi^3\eta^2/2 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_5} &= \varphi(\xi, \eta)\xi^2 \\
\Xi_{q_6} &= \begin{bmatrix} a\eta^2\xi + b\xi^2\eta^2/2 + c\eta^3\xi + d\xi^2\eta^3/2 \\ 0 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_6} &= \varphi(\xi, \eta)\eta^2 \\
\Xi_{q_7} &= \begin{bmatrix} c\xi^3\eta^2/3 \\ a\xi^2\eta^2/2 + b\xi^3\eta^2/2 + d\xi^3\eta^3/3 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_7} &= \varphi(\xi, \eta)\xi^2\eta \\
\Xi_{q_8} &= \begin{bmatrix} 0 \\ a\xi^2\eta^2/2 + b\xi^3\eta^2/3 + c\xi^2\eta^3/2 + d\xi^3\eta^3/3 \end{bmatrix}; & \nabla \cdot \Xi_{q_8} &= \varphi(\xi, \eta)\xi\eta^2
\end{aligned} \tag{57}$$

onde:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{4}(+d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \\
b &= \frac{1}{4}(-d_1 + d_2 + d_3 - d_4), \\
c &= \frac{1}{4}(-d_1 - d_2 + d_3 + d_4), \\
d &= \frac{1}{4}(+d_1 - d_2 + d_3 - d_4).
\end{aligned} \tag{58}$$

As integrais de contorno são:

$$\int_{\Omega_e} \tilde{Q} \xi^i \eta^j d\Omega = \oint_{\partial\Omega_A} \Xi_{q_n} \cdot \mathbf{n} ds - \oint_{\partial\Omega_B} \Xi_{q_n} \cdot \mathbf{n} ds \quad i, j = [0, 1, 2], \quad n = [1, \dots, 8]. \tag{59}$$

Então, os coeficientes $q_1, q_2 \dots q_8$ que definem o polinômio \tilde{Q} foram calculados em função das coordenadas ξ_1 e η_2 onde a descontinuidade intercepta lados adjacentes do elemento.

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{192} \left(-6a(34 - 8\xi_1 - 5\xi_1^2 + 5\xi_1^3 - 5\eta_2^2(1 + \xi_1) + \right. \\
&\quad \left. 5\eta_2^3(1 + \xi_1) + \eta_2(-8 - 18\xi_1 - 5\xi_1^2 + 5\xi_1^3)) - \right. \\
&\quad \left. (1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(2b(-7 + \eta_2(21 - 9\xi_1) + 3\eta_2^2(-4 + \xi_1) + 17\xi_1 - 18\xi_1^2 + 9\xi_1^3) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2c(-7 - 18\eta_2^2 + 9\eta_2^3 + 21\xi_1 - 12\xi_1^2 + \eta_2(17 - 9\xi_1 + 3\xi_1^2)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. d(14 + 3\eta_2^3(-5 + \xi_1) - 9\eta_2^2(-3 + \xi_1) - 24\xi_1 + 27\xi_1^2 - 15\xi_1^3 + \eta_2(-24 + 22\xi_1 - 9\xi_1^2 + 3\xi_1^3)) \right) \right) \\
q_2 &= \frac{1}{2240} \left(-210a(1 + \eta_2) \left(3 + \eta_2(7 - 3\xi_1) + \eta_2^2(-4 + \xi_1) \right) (1 + \xi_1) - \right. \\
&\quad \left. 70b(24 - 6\xi_1 + 3\xi_1^2 + \xi_1^3 - 3\eta_2(8 + 4\xi_1 - 3\xi_1^2 + \xi_1^3) + \eta_2^3(10 + 6\xi_1 - 3\xi_1^2 + \xi_1^3)) - \right. \\
&\quad \left. 3\eta_2^2(2 - \xi_1^2 + \xi_1^3) \right) - 3(1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(35c(-1 + \eta_2)^2(-1 + \eta_2(-5 + \xi_1) - \xi_1) + \right. \\
&\quad \left. 2d(19 + 3\xi_1 - 16\xi_1^2 + 5\eta_2^3(15 - 5\xi_1 + \xi_1^2) - 5\eta_2^2(25 - 13\xi_1 + 4\xi_1^2) + \eta_2(29 - 47\xi_1 + 29\xi_1^2)) \right) \\
q_3 &= \frac{1}{2240} \left(-105b(1 + \eta_2) \left(-1 + \eta_2(-1 + \xi_1) - 5\xi_1 \right) (-1 + \xi_1)^2 (1 + \xi_1) - \right. \\
&\quad \left. 210a(1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(3 + (7 - 3\eta_2)\xi_1 + (-4 + \eta_2)\xi_1^2 \right) - \right. \\
&\quad \left. 2(35c(24 - 24\xi_1 - 6\xi_1^2 + 10\xi_1^3 + \eta_2^2(3 + 9\xi_1 + 3\xi_1^2 - 3\xi_1^3)) + \right. \\
&\quad \left. 6\eta_2(-1 - 2\xi_1 + \xi_1^3) + \eta_2^3(1 - 3\xi_1 - 3\xi_1^2 + \xi_1^3) \right) + \\
&\quad \left. 3d(1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(19 + 29\xi_1 - 125\xi_1^2 + 75\xi_1^3 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \eta_2(3 - 47\xi_1 + 65\xi_1^2 - 25\xi_1^3) + \eta_2^2(-16 + 29\xi_1 - 20\xi_1^2 + 5\xi_1^3) \right) \right) \\
q_4 &= \frac{1}{80} \left(15a(1 + \eta_2) \left(5 + \eta_2(-3 + \xi_1) - 3\xi_1 \right) (1 + \xi_1) + \right. \\
&\quad \left. 2(3c(1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(-9 + \eta_2(7 - 3\xi_1) + \eta_2^2(-4 + \xi_1) + 6\xi_1 \right) + \right. \\
&\quad \left. 3b(1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(-9 + 7\xi_1 - 4\xi_1^2 + \eta_2(6 - 3\xi_1 + \xi_1^2) \right) + \right. \\
&\quad \left. d(-21 + 3\xi_1 - 6\xi_1^2 + 10\xi_1^3 + \eta_2^3(10 + 6\xi_1 - 3\xi_1^2 + \xi_1^3)) - \right. \\
&\quad \left. 3\eta_2^2(2 - \xi_1^2 + \xi_1^3) + \eta_2(3 - 3\xi_1 + 6\xi_1^3) \right) \\
q_5 &= \frac{1}{64} \left((1 + \eta_2)(1 + \xi_1) \left(-14c + 17d + 16c\eta_2 - 15d\eta_2 + 30a(-1 + \xi_1)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 42c\xi_1 - 21d\xi_1 - 18c\eta_2\xi_1 + 13d\eta_2\xi_1 - 24c\xi_1^2 + 27d\xi_1^2 + 6c\eta_2\xi_1^2 - 9d\eta_2\xi_1^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 15d\xi_1^3 + 3d\eta_2\xi_1^3 + 2b(-16 + 17\xi_1 - 18\xi_1^2 + 9\xi_1^3) \right) \right)
\end{aligned} \tag{60}$$

$$q_6 = \frac{1}{64}(1+\eta_2)(1+\xi_1)(-32c+17d+30a(-1+\eta_2)^2+34c\eta_2-21d\eta_2-36c\eta_2^2+27d\eta_2^2+18c\eta_2^3-15d\eta_2^3-15d\xi_1+13d\eta_2\xi_1-9d\eta_2^2\xi_1+3d\eta_2^3\xi_1+2b(-7+\eta_2(21-9\xi_1)+3\eta_2^2(-4+\xi_1)+8\xi_1))$$

$$q_7 = \frac{3}{448}(1+\eta_2)(1+\xi_1)(14a(-7+21\xi_1-12\xi_1^2+\eta_2(8-9\xi_1+3\xi_1^2))+7b(17-21\xi_1+27\xi_1^2-15\xi_1^3+\eta_2(-15+13\xi_1-9\xi_1^2+3\xi_1^3))+2(7c(\eta_2^2(5-4\xi_1+\xi_1^2)-2\eta_2(3-5\xi_1+2\xi_1^2))+2(2-8\xi_1+5\xi_1^2))+d(-39+51\xi_1-75\xi_1^2+45\xi_1^3+\eta_2(41-45\xi_1+39\xi_1^2-15\xi_1^3)+\eta_2^2(-32+23\xi_1-12\xi_1^2+3\xi_1^3))))$$

$$q_8 = \frac{3}{448}(1+\eta_2)(1+\xi_1)(119c-78d-147c\eta_2+102d\eta_2+189c\eta_2^2-150d\eta_2^2-105c\eta_2^3+90d\eta_2^3-105c\xi_1+82d\xi_1+91c\eta_2\xi_1-90d\eta_2\xi_1-63c\eta_2^2\xi_1+78d\eta_2^2\xi_1+21c\eta_2^3\xi_1-30d\eta_2^3\xi_1-64d\xi_1^2+46d\eta_2\xi_1^2-24d\eta_2^2\xi_1^2+6d\eta_2^3\xi_1^2+14a(-7+\eta_2(21-9\xi_1)+3\eta_2^2(-4+\xi_1)+8\xi_1)+14b(4-6\xi_1+5\xi_1^2+\eta_2^2(10-4\xi_1+\xi_1^2)-2\eta_2(8-5\xi_1+2\xi_1^2)))$$

Os coeficientes $q_1, q_2 \dots q_8$ que definem o polinômio Q , dessa vez em função das coordenadas ξ_1 e ξ_2 onde a descontinuidade intercepta lados opostos do elemento.

$$q_1 = \frac{1}{48}(-3a(\xi_1+\xi_2)(-18+5\xi_1^2+5\xi_2^2)-b(9+9\xi_1^4+9\xi_1^3\xi_2-16\xi_2^2+9\xi_2^4+\xi_1\xi_2(-22+9\xi_2^2)+\xi_1^2(-16+9\xi_2^2))+(\xi_1-\xi_2)(d(\xi_1+\xi_2)(-5+6\xi_1^2+3\xi_1\xi_2+6\xi_2^2)+c(-10+9\xi_1^2+12\xi_1\xi_2+9\xi_2^2))))$$

$$q_2 = \frac{1}{280}(3d(\xi_1-\xi_2)^3+35b(\xi_1+\xi_2)^3+105a(-2+\xi_1+\xi_2)(2+\xi_1+\xi_2))$$

$$q_3 = \frac{1}{560}(-3d(35+55\xi_1^4+25\xi_1^3\xi_2-84\xi_2^2+55\xi_2^4+3\xi_1^2(-28+5\xi_2^2)+\xi_1\xi_2(-42+25\xi_2^2))+35(3a(\xi_1-\xi_2)(-6+3\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+3\xi_2^2)+(\xi_1+\xi_2)(c(18-7\xi_1^2+4\xi_1\xi_2-7\xi_2^2)+3b(\xi_1-\xi_2)(-3+2\xi_1^2+\xi_1\xi_2+2\xi_2^2))))$$

$$q_4 = \frac{1}{20}(\xi_1^2(-15a-9b\xi_1+7d\xi_1)+3(-b+d)\xi_1^2\xi_2+3(5a+(b+d)\xi_1)\xi_2^2+(9b+7d)\xi_2^3+6c(-5+2\xi_1^2+\xi_1\xi_2+2\xi_2^2)) \quad (61)$$

$$q_5 = \frac{1}{16}(15a(\xi_1+\xi_2)(-2+\xi_1^2+\xi_2^2)+b(-15+9\xi_1^4+9\xi_1^3\xi_2-10\xi_2^2+9\xi_2^4+\xi_1^2(-10+9\xi_2^2))+\xi_1\xi_2(-10+9\xi_2^2))-(\xi_1-\xi_2)(d(\xi_1+\xi_2)(-5+6\xi_1^2+3\xi_1\xi_2+6\xi_2^2)+c(-10+9\xi_1^2+12\xi_1\xi_2+9\xi_2^2))$$

$$q_6 = -\frac{1}{8}(\xi_1-\xi_2)(4c+b(-\xi_1+\xi_2)+2d(\xi_1+\xi_2))$$

$$q_7 = -\frac{3}{112}(d(35-33\xi_1^4-15\xi_1^3\xi_2+28\xi_2^2-33\xi_2^4+\xi_1\xi_2(14-15\xi_2^2))+\xi_1^2(28-9\xi_2^2))+7(a(\xi_1-\xi_2)(-10+9\xi_1^2+12\xi_1\xi_2+9\xi_2^2)+(\xi_1+\xi_2)(c(10-7\xi_1^2+4\xi_1\xi_2-7\xi_2^2)+b(\xi_1-\xi_2)(-5+6\xi_1^2+3\xi_1\xi_2+6\xi_2^2)))$$

$$q_8 = \frac{3}{56}(\xi_1-\xi_2)((7b-9d)\xi_1^2+7a(\xi_1-\xi_2)-10d\xi_1\xi_2-(7b+9d)\xi_2^2-14c(\xi_1+\xi_2))$$

Para um elemento quadrilátero linear com interface atravessando lados opostos nos pontos $\xi_1=0$ e $\xi_2=0$, o polinômio e a descontinuidade possuem o aspecto mostrado na Figura 16.

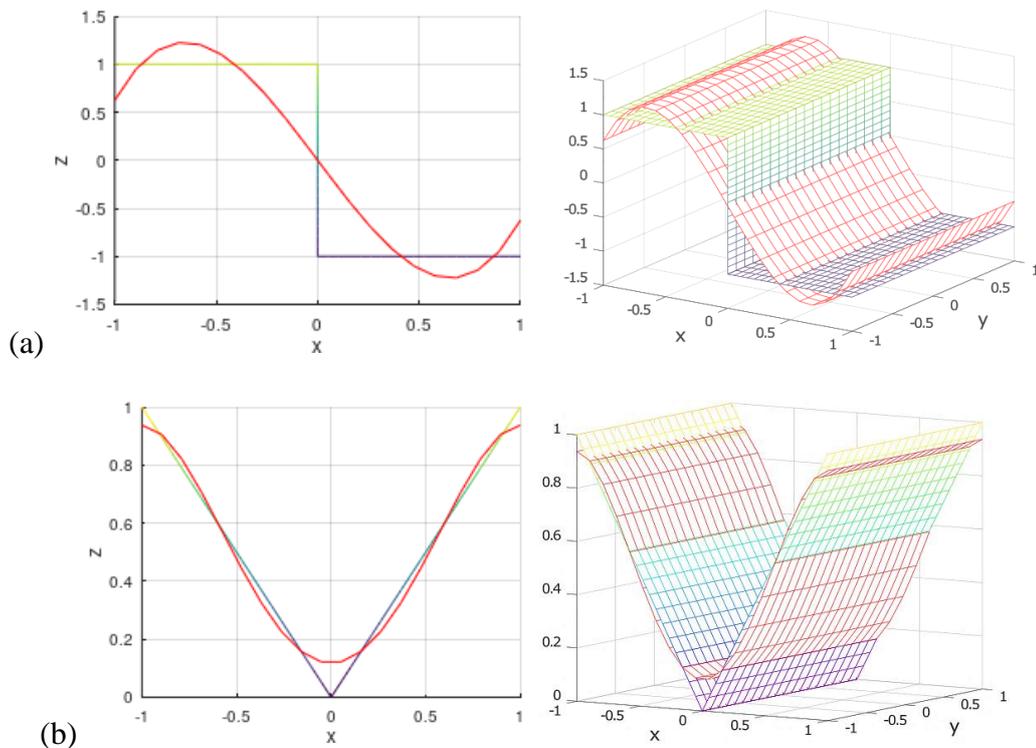


Figura 16 – Polinômios equivalentes e funções descontínuas (a) \tilde{Q} e Q (b) \tilde{H} e H .

4.4 Programação da integração por polinômios equivalentes

A programação deste método também foi realizada em linguagem FORTRAN para a mesma estrutura de XFEM.

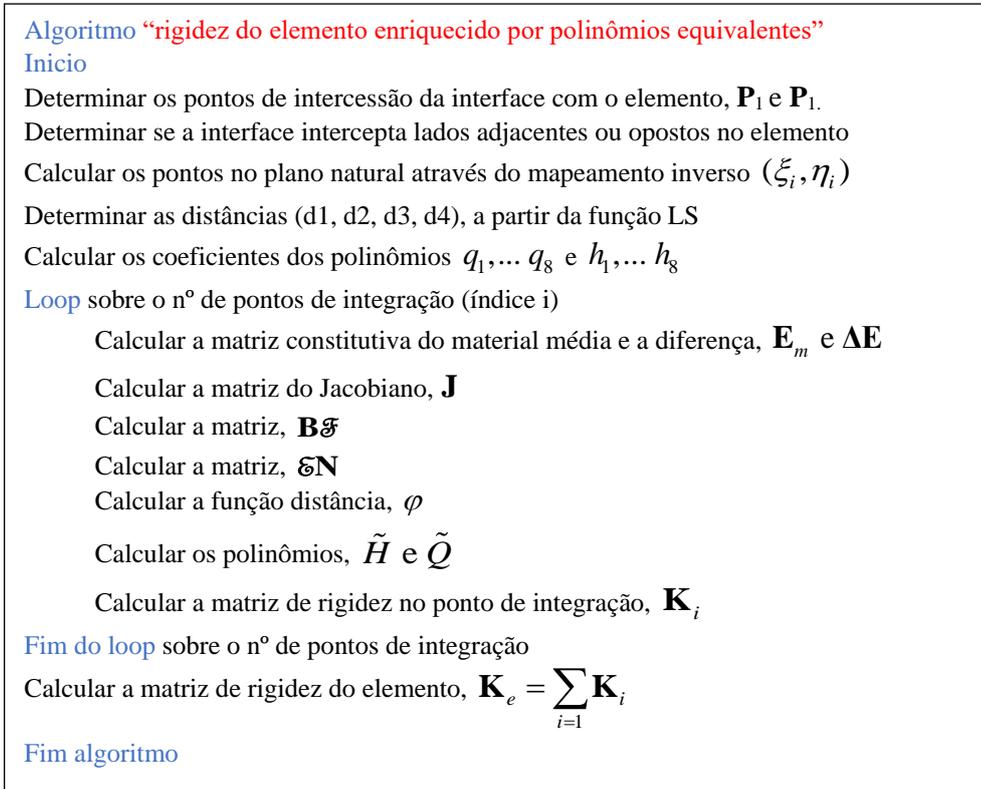


Figura 17 – Algoritmo para a integração com polinômios equivalentes.

Observação: Após montada a matriz de rigidez global, $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_e$, os graus de liberdade são calculados via $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$. Como a substituição dos polinômios na forma fraca da matriz de rigidez dos elementos preserva o seu resultado após a integração, no pós-processamento é suposto que os deslocamentos nos pontos de integração, bem como as deformações e os outros resultados que dependem desta, podem ser recuperados com a equação do campo de deslocamento original, eq. (6).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção foram estudados três problemas com interface bimaterial que são caracterizadas como descontinuidade fraca. O primeiro problema é uma barra sob tensão com uma interface que separa dois materiais e não possui solução analítica. O objetivo da análise deste problema é demonstrar as oscilações que ocorrem com a integração padrão de Gauss na solução do sistema $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$, os erros relativos para a integração da forma fraca da matriz de rigidez, a relação entre a distorção do elemento enriquecido e a inclinação da interface com os métodos de integração e a deformação da barra com a solução do XFEM. Também, devido a simplicidade do problema, são apresentadas figuras para ilustrar a teoria que foi desenvolvida, como a função distância assinalada sobre a barra e o pico que ocorre sobre a interface na solução do campo de deslocamento. Embora este problema não tenha solução analítica, ele tem sido analisado por alguns autores que publicaram os resultados em termos da matriz de rigidez esperada os elementos do problema em questão.

O segundo problema é uma barra com Poisson nulo, deslocamento prescrito e que possui solução analítica. Neste problema as soluções para o campo de deslocamento e de deformação são analisadas nos pontos de integração com o intuito de demonstrar o aumento da instabilidade nos resultados quanto mais próximos os pontos estão da descontinuidade fraca.

O terceiro e último problema, trata-se de uma placa com interface no contorno de uma inclusão circular de outro material, e também possui solução analítica. Esse problema por ser mais complexo foi analisado através da norma de energia e deslocamento.

Para comparar os resultados dos problemas que foram selecionados para serem avaliados nesta dissertação e que possuíam solução analítica, utilizou-se cada um dos métodos de integração para calcular os erros com as normas de energia e deslocamento.

A norma de energia para o problema é calculada por,

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega, \quad (62)$$

e o respectivo erro para essa norma é dado por,

$$\|e\|_E^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega, \quad (63)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é a tensão obtida via solução analítica do problema e $\boldsymbol{\sigma}_h$ a tensão obtida pelos métodos de integração numérica. As tensões nas equações acima estão organizadas em formato vetorial.

A norma L_2 do deslocamento é calculada por:

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega, \quad (64)$$

e o respectivo erro para essa norma é:

$$\|e\|_{L_2}^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) d\Omega, \quad (65)$$

onde \mathbf{u} é o deslocamento obtido via solução analítica do problema e \mathbf{u}_h é o deslocamento obtido nos pontos de integração para cada um dos métodos de integração apresentados neste trabalho.

5.1 Barra tracionada com interface bimaterial

Nesta seção são analisados os resultados para uma barra com interface bimaterial sob tração para diferentes malhas e posição da interface, a fim de averiguar a influência que a distorção dos elementos e a inclinação da interface tem sobre a integração da forma fraca da matriz de rigidez.

Foram criadas quatro situações para esse problema. Na situação A, a interface é reta e a malha possui três elementos sem distorção, ver Figura 19. Na situação B que está na Figura 25, são estudadas três interfaces com diferentes inclinações e a malha possui três elementos sem distorção. Na situação C, Figura 26, são avaliadas as mesmas três interfaces da situação B e a malha possui três elementos com distorção. Por último, na situação D, a interface é reta e a malha está mais refinada com 1220 elementos sem distorção, ver Figura 29.

Em todas as situações que serão analisadas os dados são: dimensão $L=20\text{cm}$, coeficiente de Poisson $\nu=0.3$, módulo de Young $E= 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, para o material à esquerda da interface e $0.5E$ para o material à direita, o carregamento $q=2 \times 10^4 \text{ kg/cm}$.

Para o problema da barra tracionada não foi encontrada uma resposta analítica para comparar com os resultados numéricos. O artigo de Chu, *et al.*, (2015) sobre materiais graduados, chamados na literatura de *functionally graded materials* (FGM), mostra na Figura 18 (b) o problema de uma barra bimaterial depois da deformação onde é possível notar uma descontinuidade entres as componentes de deslocamento/deformação na barra deformada.

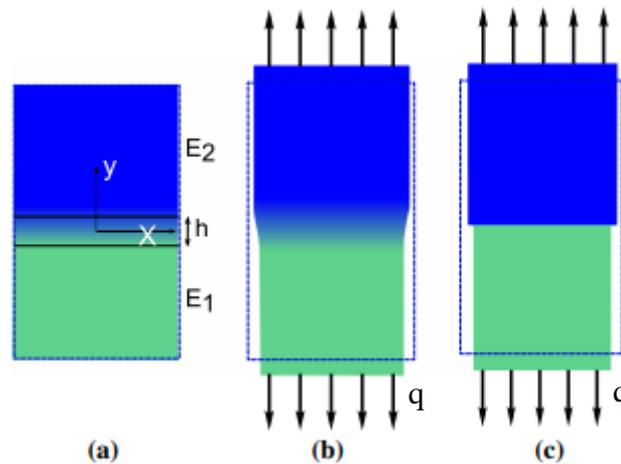


Figura 18 – Barra sob tensão q com uma zona de transição FGM representada pela altura h (a) antes da deformação; (b) depois da deformação; (c) depois da deformação para uma fronteira bimaterial sem zona de transição FGM (CHU, *et al.*, 2015).

Para avaliar os métodos vai ser utilizada a norma de Frobenius para a matriz de rigidez e para o campo de deslocamento tendo como referência a integração com subelementos.

A integração com subelementos foi utilizada como o resultado de referência para o cálculo da norma de Frobenius porque esse método evita a integração sobre a interface além de ser a mais comum no XFEM e é utilizada em outros trabalhos para validar novas estratégias de integração, por exemplo em Ventura (2005).

Para calcular o erro relativo da matriz de rigidez foram utilizadas as eqs. (66), (67) e (68).

$$\|K_{e_{ij}}^{sub}\|_F = \left(\sum_{i=0}^n (K_{e_{ij}}^{sub})^2 \right)^{1/2}. \quad (66)$$

$$\|K_{e_{ij}}^{sub} - K_{e_{ij}}\|_F = \left(\sum_{i=0}^n (K_{e_{ij}}^{sub} - K_{e_{ij}})^2 \right)^{1/2}. \quad (67)$$

onde $K_{e_{ij}}$ é cada componente da matriz de rigidez, \mathbf{K}_e , do elemento enriquecido e $K_{e_{ij}}^{sub}$ as componentes da matriz de rigidez para a integração com o método dos subelementos triangulares.

Os erros relativos foram calculados para a norma de Frobenius como:

$$e_F = \frac{\|K_{e_{ij}}^{sub} - K_{e_{ij}}\|_F}{\|K_{e_{ij}}^{sub}\|_F}. \quad (68)$$

Para o erro relativo do campo de deslocamento foram usadas as equações (69), (70) e (71):

$$\|u_{sub}\|_F = \left(\sum_{i=0}^n (u_{sub})^2 \right)^{1/2}, \quad (69)$$

$$\|u_{sub} - u_i\|_F = \left(\sum_{i=0}^n (u_{sub} - u_i)^2 \right)^{1/2}, \quad (70)$$

$$e_F = \frac{\|u_{sub} - u_i\|_F}{\|u_{sub}\|_F}, \quad (71)$$

onde u_i é o deslocamento em módulo das componentes x e y para a integração padrão de Gauss e com os polinômios equivalentes e u_{sub} é a norma do vetor de deslocamento das componentes x e y, calculado com o método dos subelementos triangulares.

Para os métodos que aplicam somente a quadratura de Gauss e os que substituem as funções descontínuas por polinômios, foram utilizados 16 pontos de integração e no método com subelementos foram utilizados 3 pontos de integração em cada triângulo.

5.1.1 Situação A – Elemento sem distorção e interface no centro sem inclinação

Para esta primeira situação e tendo como objetivo comparar os diferentes tipos de integração, utilizou-se o problema bimaterial de uma barra sob tensão modelada por elementos planos com uma interface apresentado por Khoei (2015).

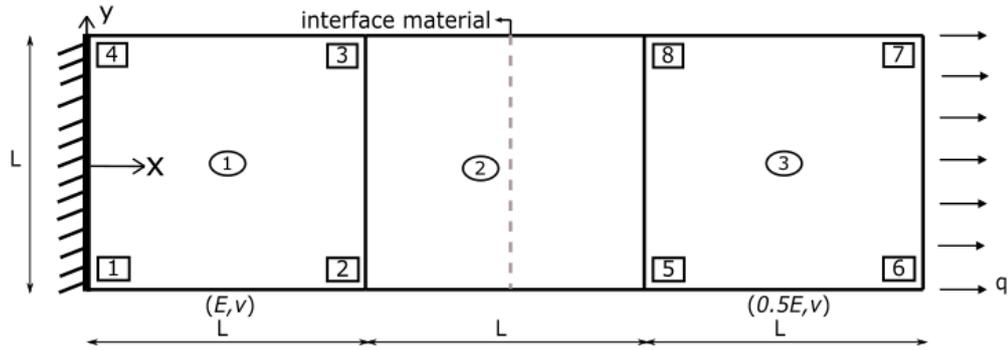


Figura 19 – Situação A: Malha de uma barra bimaterial sob tensão modelada por elementos planos com uma interface bimaterial.

Para essa primeira malha os subelementos que foram gerados pela triangulação de Delaunay estão na Figura 20 e os valores da função distância assinalada, que é baseada no método *Level Set*, na Figura 21.

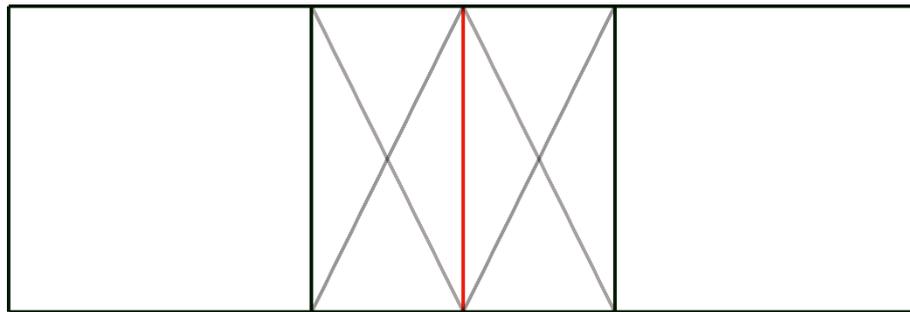


Figura 20 – Malha com os subelementos triangulares.

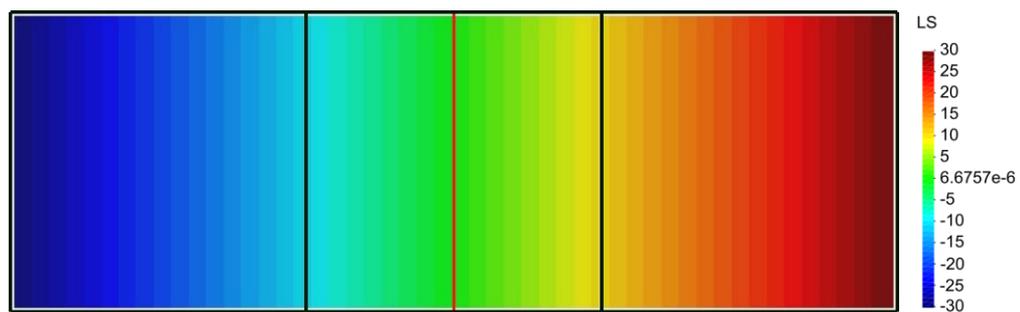


Figura 21 – Valor da função distância assinalada $\varphi(\mathbf{x})$ pelo método *Level Set*.

Para esse problema resolvido através da integração com polinômios equivalentes, a parcela enriquecida do campo de deslocamento, eq. (6), foi plotada para toda barra, incluindo o elemento enriquecido e os de mistura, na Figura 22. O mais importante nesta figura é observar a descontinuidade fraca sobre a interface e como a parcela de enriquecimento do campo de

deslocamento se comporta nos limites do elemento de mistura indo à zero para manter a continuidade com elementos padrões vizinhos, quando estes existem.

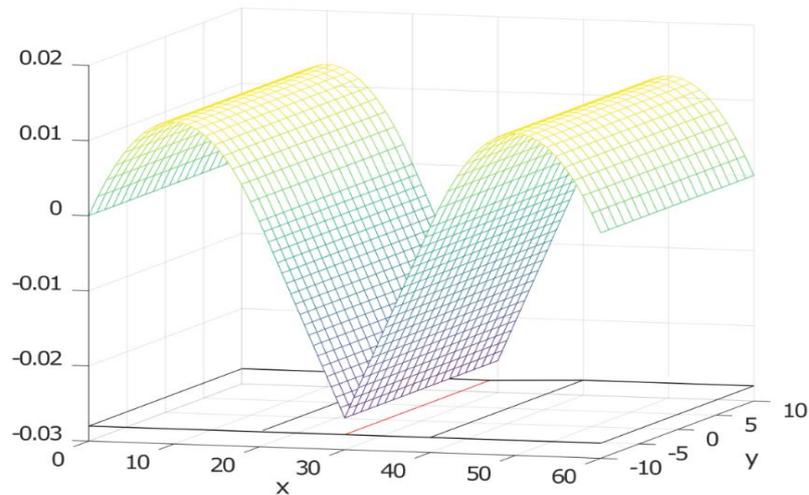


Figura 22 – Parcela enriquecida do campo de deslocamento para os elementos enriquecido e de mistura do problema da barra.

Em seguida, na Figura 23, foram plotados o campo de deslocamento, a parcela do FEM padrão e a do enriquecimento.

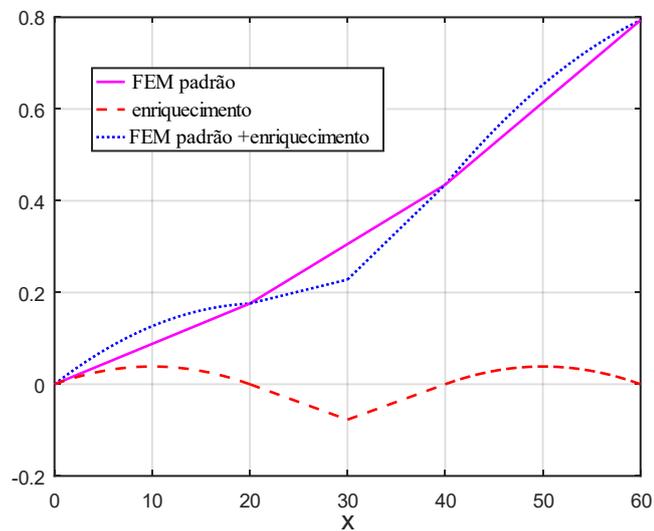


Figura 23 – Campo de deslocamento e as parcelas padrão e enriquecida do campo para o problema da barra sob tensão com 3 elementos com a interface em $x = 30$.

Com o objetivo de mostrar a influência da localização e quantidade dos pontos de integração sobre o elemento enriquecido foi calculado o erro relativo para o vetor \mathbf{a} , que faz parte da

parcela enriquecida do campo de deslocamento, utilizando a integração com os polinômios descritos em Ventura (2005) e o padrão de Gauss.

$$\|a_{sub}\|_F = \left(\sum_{i=0}^n (a_{sub})^2 \right)^{1/2}. \quad (72)$$

$$\|a_{sub} - a_i\|_F = \left(\sum_{i=0}^n (a_{sub} - a_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (73)$$

Os erros relativos foram calculados para a norma de Frobenius como:

$$e_F = \frac{\|a_{sub} - a_i\|_F}{\|a_{sub}\|_F}, \quad (74)$$

onde a_{sub} é o deslocamento obtido com a integração por subelementos triangulares, a_i é o deslocamento obtido pelo método padrão de Gauss ou pelo método com polinômios equivalentes.

Na Tabela 2 estão os erros para cada quantidade de pontos de Gauss.

Tabela 2 – Erro relativo para o GL \mathbf{a} , tendo como referência a integração com subelementos triangulares através da norma de Frobenius.

Nº de pontos de integração	Erro relativo para o GL \mathbf{a} – Norma de Frobenius	
	Gauss padrão	Polinômios Ventura (2005)
16 – 4x4	0.140215871	0.012607168
25 – 5x5	0.988280237	0.012607168
36 – 6x6	0.061792691	0.012607168
49 – 7x7	0.754820299	0.012607168
64 – 8x8	0.033699290	0.012607168
81 – 9x9	0.616508633	0.012607168
100 – 10x10	0.021034079	0.012607168

Para melhor interpretar os resultados da Tabela 2 foi plotado o gráfico:

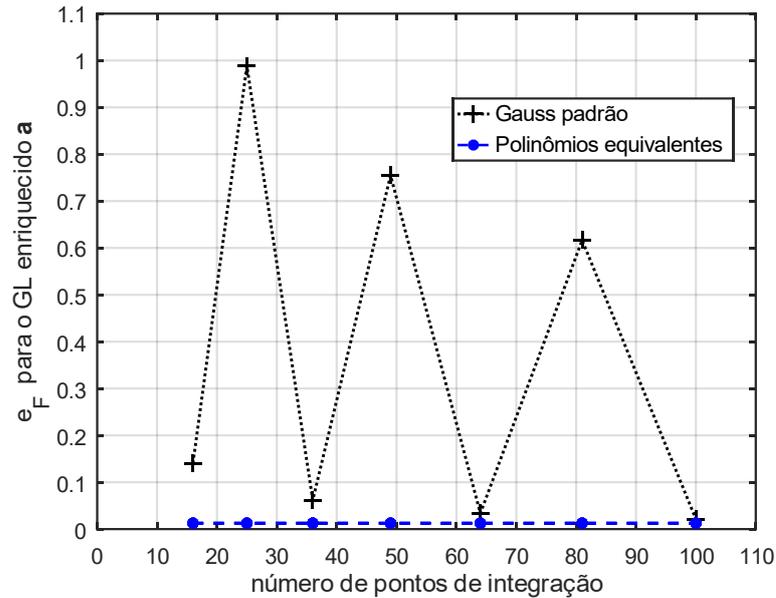


Figura 24 – Erro relativo para o GL **a** que faz parte do campo de deslocamento em função do número de pontos de integração no elemento.

No gráfico verifica-se a imprecisão que pode ocorrer ao utilizar a integração padrão de Gauss em descontinuidades. Para malhas onde a interface possui uma geometria difícil de prever a localização dos pontos de Gauss pode ocorrer esse tipo de imprecisão nos resultados.

Como a proposta de utilizar os polinômios \tilde{Q} e \tilde{H} é integrar a forma fraca da matriz de rigidez sem necessitar de subelementos, que é o método mais empregado no XFEM, foi calculado o erro relativo utilizando a quadratura padrão de Gauss e os polinômios tendo como referência os resultados para os subelementos triangulares.

Os erros relativos foram calculados como:

$$\%e = \frac{\|K_{e_{ij}}^{sub} - K_{e_{ij}}\|}{\|K_{e_{ij}}^{sub}\|} 100\%, \quad (75)$$

onde $K_{e_{ij}}^{sub}$ são as componentes da matriz de rigidez para a integração com subelementos triangulares e $K_{e_{ij}}$ são as componentes da matriz de rigidez para a integração com o método padrão de Gauss ou pelo método com polinômios equivalentes.

Na Tabela 3 e Tabela 4 estão os erros relativos para cada componente da matriz de rigidez do elemento enriquecido (elemento que possui a interface material) do problema apresentado na Figura 19. Observe que para o elemento que foi utilizado, o Q4, a matriz de um elemento enriquecido apresenta 16 GL, 8 GL devido a parte do FEM padrão (u) e os 8 GL que são acrescentados por causa do enriquecimento (a).

Tabela 3 – Erro relativo percentual dos componentes da matriz de rigidez do elemento enriquecido para a integração com o método padrão de Gauss.

Erro relativo - Método de Gauss padrão																
	ux2	uy2	ux5	uy5	ux8	uy8	ux3	uy3	ax2	ay2	ax5	ay5	ax8	ay8	ax3	ay3
ux2	0.22	0.61	0.00	21.27	0.00	0.15	2.13	0.61	23.61	140.36	15.36	25.52	10.28	3.93	6.41	2.06
uy2	0.61	0.69	1.93	0.00	0.14	0.00	0.61	0.96	12.76	3.71	0.98	2.52	3.08	6.58	3.75	0.43
ux5	0.00	1.93	0.25	0.85	1.06	0.85	0.00	0.14	8.87	1.16	11.43	20.42	21.61	3.65	33.99	4.70
uy5	21.27	0.00	0.85	1.03	0.85	1.75	0.15	0.00	12.76	1.34	48.49	8.25	12.76	6.14	6.38	8.95
ux8	0.00	0.14	1.06	0.85	0.25	0.85	0.00	1.93	33.99	4.70	21.61	3.65	11.43	20.42	8.87	1.16
uy8	0.15	0.00	0.85	1.75	0.85	1.03	21.27	0.00	6.38	8.95	12.76	6.14	48.49	8.25	12.76	1.34
ux3	2.13	0.61	0.00	0.15	0.00	21.27	0.22	0.61	6.41	2.06	10.28	3.93	15.36	25.52	23.61	140.36
uy3	0.61	0.96	0.14	0.00	1.93	0.00	0.61	0.69	3.75	0.43	3.08	6.58	0.98	2.52	12.76	3.71
ax2	23.61	12.76	8.87	12.76	33.99	6.38	6.41	3.75	4.58	43.43	10.75	7.01	18.13	14.08	3.43	43.43
ay2	140.36	3.71	1.16	1.34	4.70	8.95	2.06	0.43	43.43	5.08	4.29	2.58	11.68	36.43	43.43	8.82
ax5	15.36	0.98	11.43	48.49	21.61	12.76	10.28	3.08	10.75	4.29	9.09	58.65	7.14	58.65	18.13	11.68
ay5	25.52	2.52	20.42	8.25	3.65	6.14	3.93	6.58	7.01	2.58	58.65	11.50	58.65	51.25	14.08	36.43
ax8	10.28	3.08	21.61	12.76	11.43	48.49	15.36	0.98	18.13	11.68	7.14	58.65	9.09	58.65	10.75	4.29
ay8	3.93	6.58	3.65	6.14	20.42	8.25	25.52	2.52	14.08	36.43	58.65	51.25	58.65	11.50	7.01	2.58
ax3	6.41	3.75	33.99	6.38	8.87	12.76	23.61	12.76	3.43	43.43	18.13	14.08	10.75	7.01	4.58	43.43
ay3	2.06	0.43	4.70	8.95	1.16	1.34	140.36	3.71	43.43	8.82	11.68	36.43	4.29	2.58	43.43	5.08

Tabela 4 – Erro relativo percentual nos componentes da matriz de rigidez do elemento enriquecido para a integração com os polinômios equivalentes a função de enriquecimento.

Erro relativo - Método com Polinômios Equivalentes																
	ux2	uy2	ux5	uy5	ux8	uy8	ux3	uy3	ax2	ay2	ax5	ay5	ax8	ay8	ax3	ay3
ux2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
uy2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ux5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
uy5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ux8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
uy8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ux3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
uy3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ax2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.23	0.00	0.45	0.00	1.19	0.00	0.57	0.00
ay2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.05	0.00	0.17	0.00	0.18
ax5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.45	0.00	0.23	0.00	0.54	0.00	1.19	0.00
ay5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.04	0.00	0.52	0.00	0.17
ax8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.19	0.00	0.54	0.00	0.23	0.00	0.45	0.00
ay8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.00	0.52	0.00	0.04	0.00	0.05
ax3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.57	0.00	1.19	0.00	0.45	0.00	0.23	0.00
ay3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.17	0.00	0.05	0.00	0.03

Os resultados para o problema estudado demonstram que substituir os polinômios nas funções descontínuas que aparecem na matriz de rigidez pode fornecer um resultado de integração melhor que aplicar diretamente o método de Gauss. Pois, o uso dos polinômios equivalentes forneceu um resultado muito próximo ao da integração com subelementos triangulares, conforme a Tabela 4 onde o erro relativo percentual maior foi de 1,19%.

5.1.2 Situação B – Elemento sem distorção e interface com inclinação

Nesta situação as três interfaces no elemento 2, elemento do centro, é o que configura o elemento enriquecido enquanto os elementos 1 e 3 são de mistura. As interfaces possuem diferentes inclinações e são avaliadas separadamente. Ver a Figura 25.

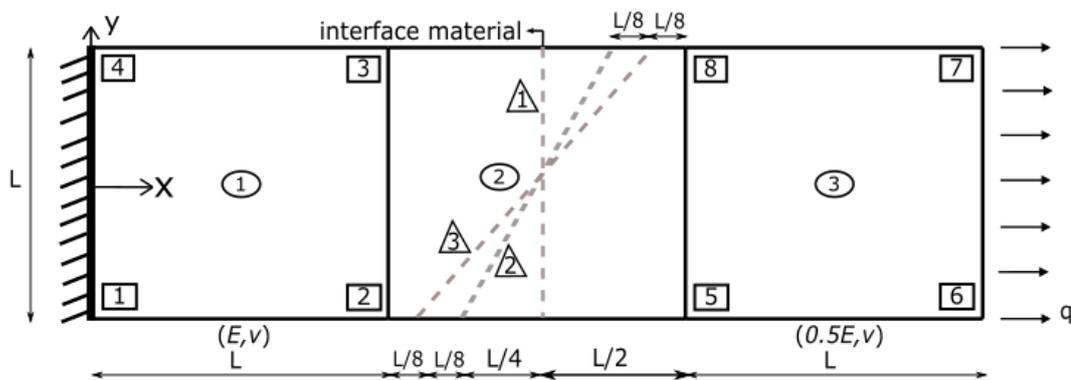


Figura 25 – Situação B: Malha de uma barra bimaterial sob tensão modelada por elementos planos com três interfaces bimaterial com diferentes inclinações.

Esta situação será analisada em comparação com a situação C na subseção seguinte.

5.1.3 Situação C – Elemento com distorção e interface com inclinação

Na situação C os elementos da malha diferem da situação B pela distorção dos elementos. Ver a Figura 26.

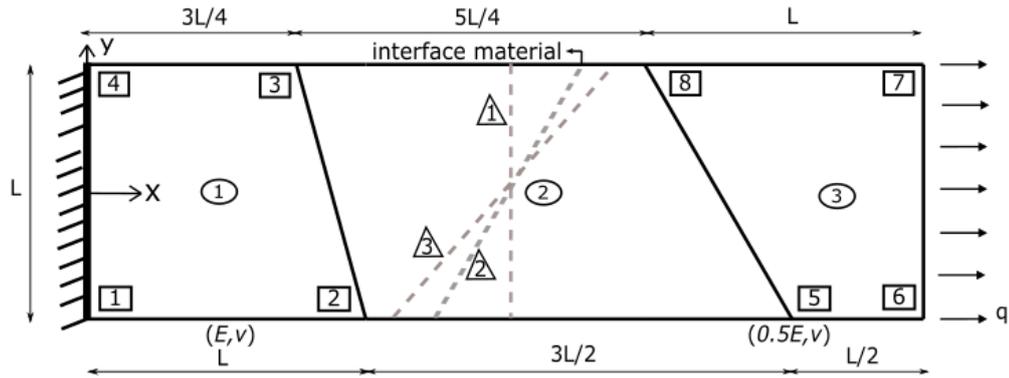


Figura 26 – Situação C: Malha de uma barra bimaterial sob tensão modelada por elementos planos com três interfaces bimaterial com diferentes inclinações.

Para os problemas que estão nas situações B e C foi calculado o erro relativo para a matriz de rigidez através da norma de Frobenius, segue na Figura 27.

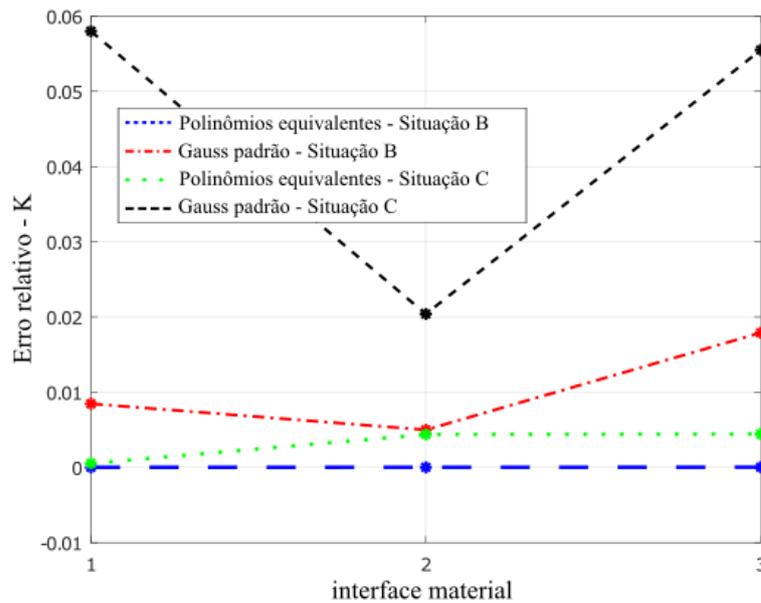


Figura 27 – Erro relativo para a norma de Frobenius da matriz de rigidez do elemento enriquecido (elemento 2 da malha) para as situações B e C com as interfaces 1, 2 e 3.

Do gráfico da Figura 27 pode-se concluir que para o elemento sem distorção (situação B) os erros foram menores se comparados com o elemento distorcido (situação C) para o mesmo método de integração. Quanto aos métodos de integração, os erros foram menores para o método que substitui o enriquecimento por polinômios do que quando a quadratura de Gauss é

utilizada diretamente. Também, para a integração de Gauss, os valores dos erros possuem uma maior variação a depender da inclinação da interface, essa imprecisão é típica da técnica quando não aplicada em integrandos contínuos.

Ainda foi observado que a inclinação da interface não tem uma relação direta com o erro. A posição da interface no elemento influencia no cálculo do erro mais pela sua localização diante dos pontos de Gauss do que quanto a inclinação.

Também foi calculado o erro relativo para o campo de deslocamento, eq. (6), através da norma de Frobenius, segue no gráfico da Figura 28.

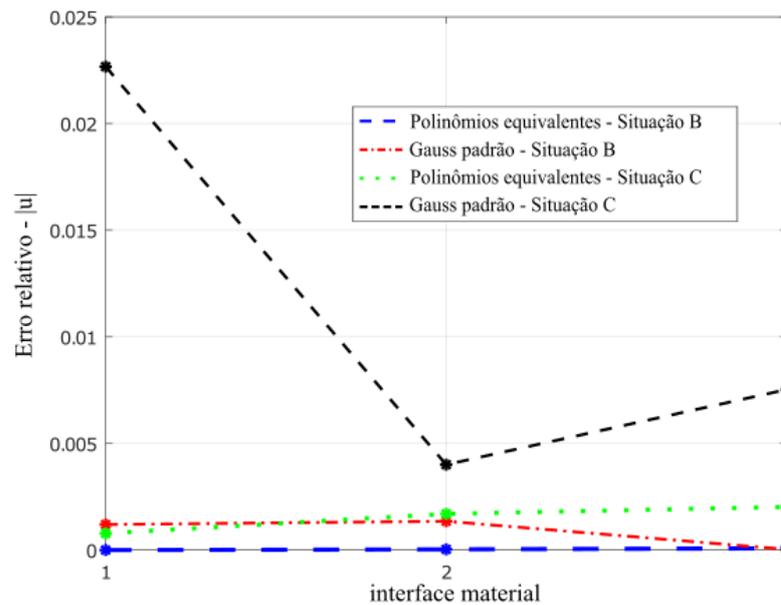


Figura 28 – Erro relativo para a norma de Frobenius do campo de deslocamento para as situações B e C com as interfaces 1, 2 e 3.

O erro relativo para o campo de deslocamento também foi menor para o método de integração com os polinômios equivalentes. E para a técnica padrão de Gauss ocorreram maiores flutuações nos erros de modo semelhante ao que foi observado para os erros na integração da rigidez.

Ressalta-se que esses erros, para a matriz de rigidez e para o campo de deslocamento, foram calculados tendo como referência a integração com subelementos triangulares, por isso, a principal conclusão neste capítulo é que a técnica com os polinômios \tilde{H} e \tilde{Q} possui valores mais próximos da integração com subelementos se comparada com a integração padrão de Gauss.

5.1.4 Situação D – Malha refinada sem distorção com 1220 elementos

Para demonstrar a deformação de uma barra bimaterial sob tração foi feita uma malha de 61×20 , totalizando 1220 elementos. Segue na Figura 29.

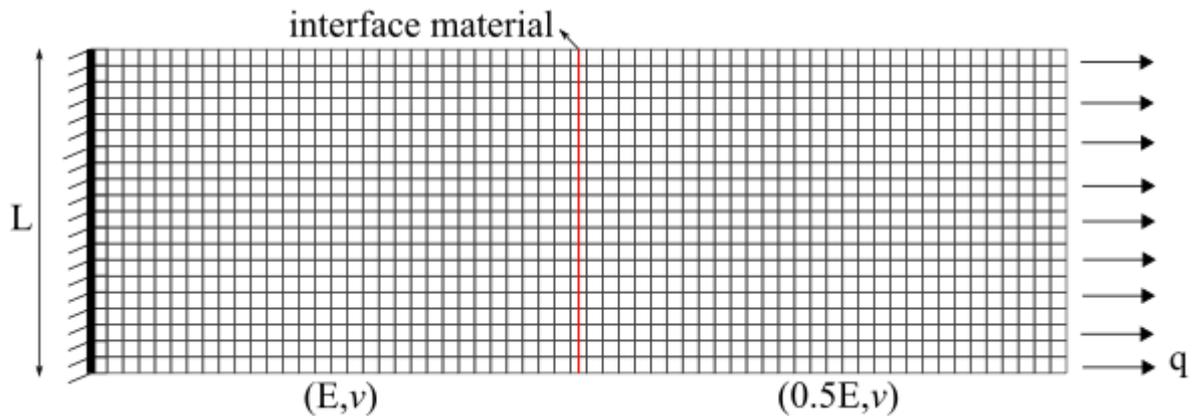


Figura 29 – Situação D: Malha de uma barra bimaterial com 1220 elementos planos sob tensão.

A Figura 30 apresenta a barra deformada para o método de integração com subelementos triangulares.

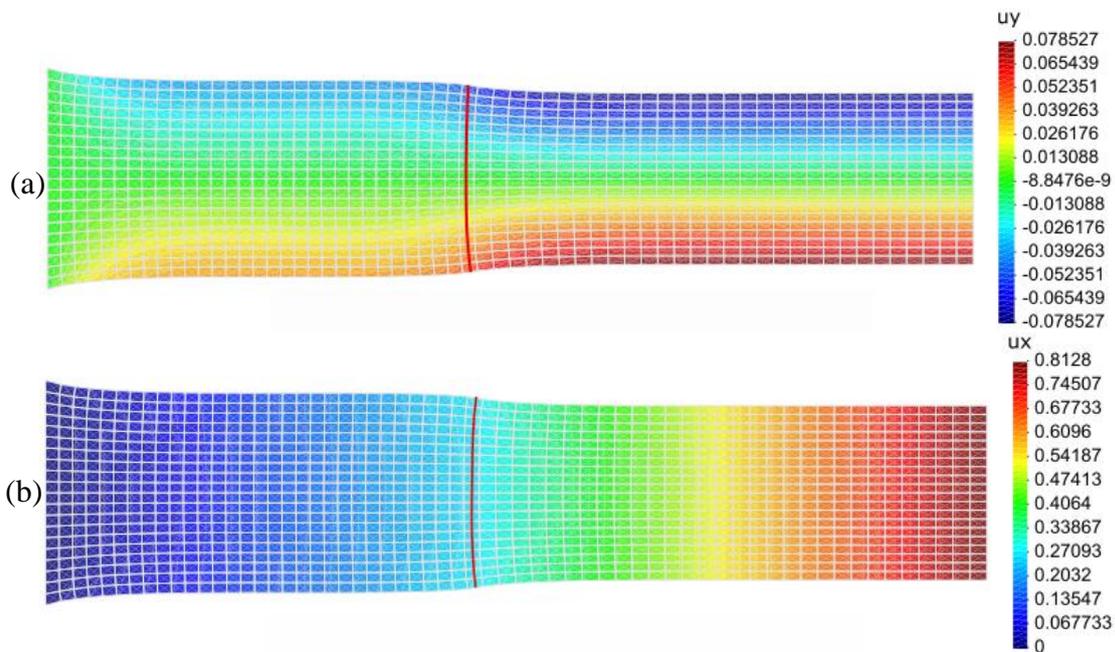


Figura 30 – Barra bimaterial deformada com seu campo de deslocamento calculado por meio da integração com subelementos (a) u_y ; (b) u_x .

5.2 Problema plano bimaterial com Poisson nulo

Como mostrado no problema da barra bimaterial apresentado na subseção 5.1, a existência de uma interface bimaterial provoca uma solução não homogênea, mesmo para um problema aparentemente simples, impossibilitando a determinação de uma solução analítica. A fim de poder analisar com mais detalhes a construção do espaço de aproximação bidimensional no XFEM e as características quanto à integração da forma fraca, é proposta a análise de um problema de estado plano bastante simples. Trata-se de uma placa quadrada em estado plano de tensões com condições de contorno e de carregamento de deslocamento prescrito que juntamente com o Poisson nulo permite uma solução linear de deslocamentos em cada região, isto é, tem deformações constantes em cada uma das regiões separadas pela interface. Este problema parece ter sido primeiro analisado por Bordas, *et al.*, (2011), o qual apresenta uma solução analítica.

Considere uma barra bimaterial discretizada com elementos quadriláteros, um domínio quadrado de lado $L=2$, com a união $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ dada pela interface Γ localizada em b . As propriedades do material em $\Omega_A = [b, 1] \times [-1, 1]$ são $E_A = 10$ e $\nu_A = 0$, e no subdomínio $\Omega_B = [-1, b] \times [-1, 1]$ são $E_B = 1$ e $\nu_B = 0$. A barra não possui forças externas e o deslocamento prescrito é $u_y = 0$ em $y = -1$ e $u_y = 1$ em $y = 1$.

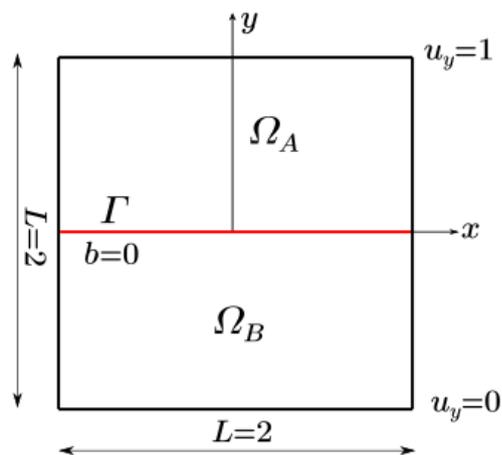


Figura 31 – Barra bimaterial com Poisson nulo.

A solução exata para o deslocamento do problema:

$$u(y) = \begin{cases} (y+1)\alpha, & -1 \leq y \leq b \\ 1 + \frac{E_B}{E_A}(y-1)\alpha, & b \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (76)$$

onde,

$$\alpha = \frac{E_A}{E_A(b+1) - E_B(b-1)}. \quad (77)$$

E para a deformação:

$$\varepsilon_{yy} = \begin{cases} \alpha, & -1 \leq y \leq b \\ \frac{E_B}{E_A}\alpha, & b \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (78)$$

Foram feitas quatro malhas para avaliar esse problema com a interface localizada em $b = 0$, ver Figura 32.

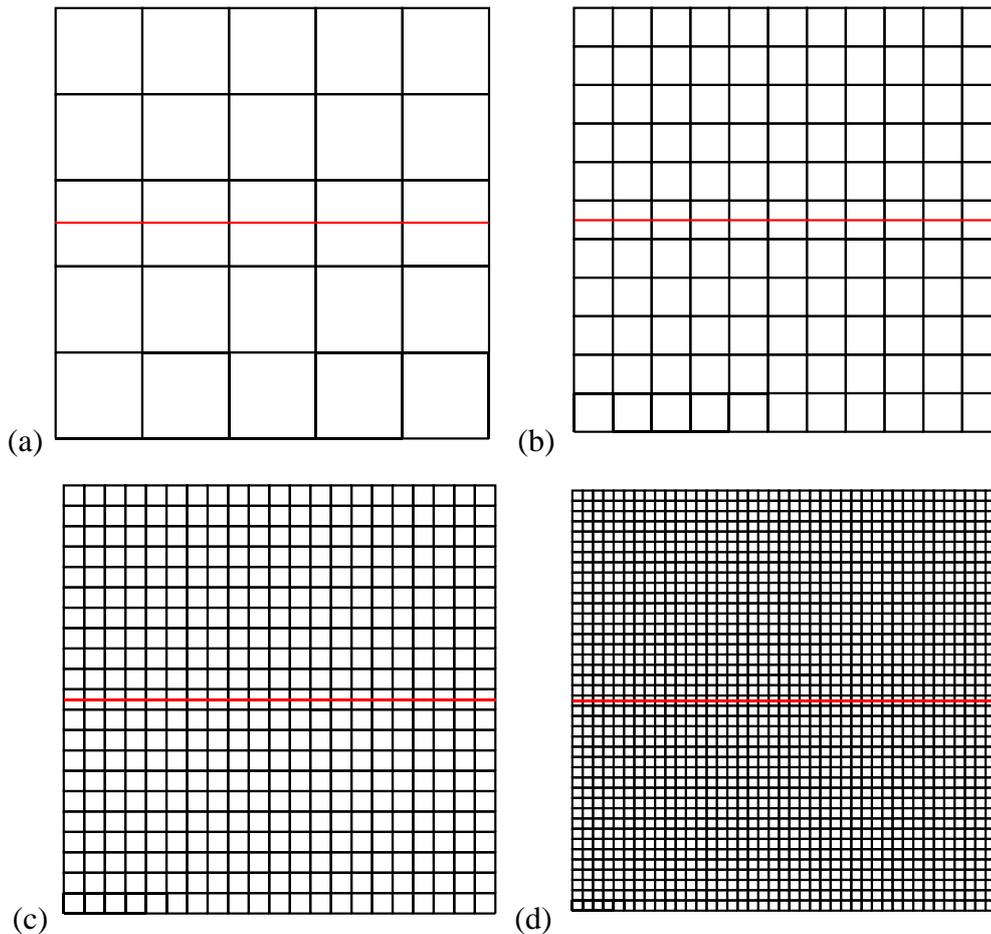


Figura 32 – Malhas para a barra bimaterial com interface em $b = 0$ e (a) 05x05; (b) 11x11; (c) 21x21 e (d) 41x41 elementos.

5.2.1 Análise do campo de deslocamento e deformação

Para a descontinuidade material em $b=0$ os resultados do campo de deslocamento e deformação obtidos nos pontos de integração para os três métodos de integração e para as cinco malhas analisadas estão na Figura 33.

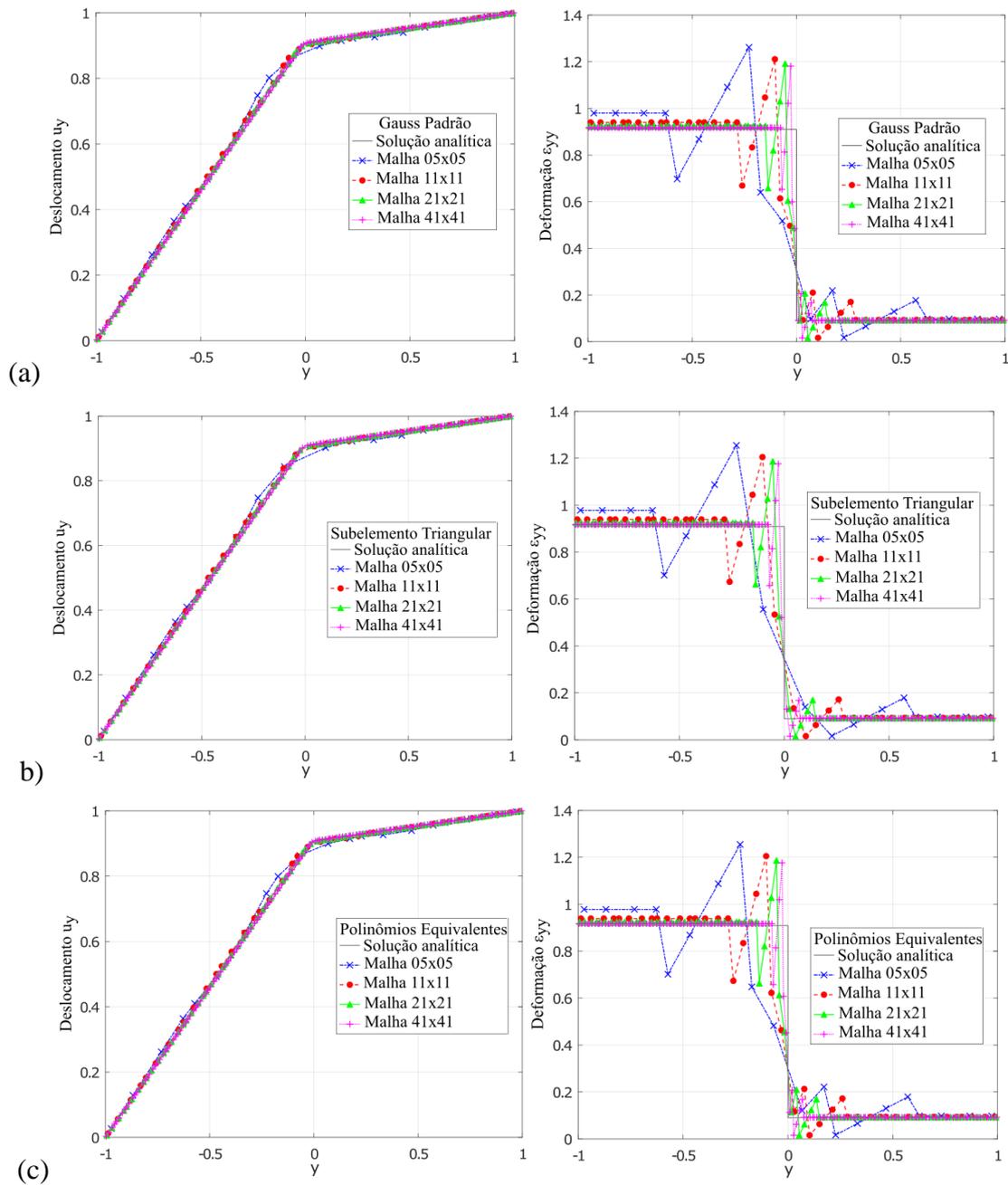


Figura 33 – Deslocamento u_y e deformação ϵ_{yy} nos pontos de integração para as malhas com 05x05, 11x11, 21x21 e 41x41 elementos calculados pelo método de integração (a) Gauss padrão; (b) Subelemento triangular; (c) Polinômio equivalente.

Como o campo de deslocamento analítico é do tipo C^0 , os três métodos de integração forneceram um resultado próximo ao da solução exata. Enquanto a deformação, que é uma função descontínua, apresentou grandes flutuações. Porém, apesar das flutuações, quanto maior o refino da malha, os resultados numéricos convergem para a resposta analítica. Essa análise representa os três métodos de integração na Figura 33.

Agora, comparando-se os mesmos resultados para o campo de deslocamento e deformação para uma mesma malha com os três métodos diferentes de integração, ver Figura 34.

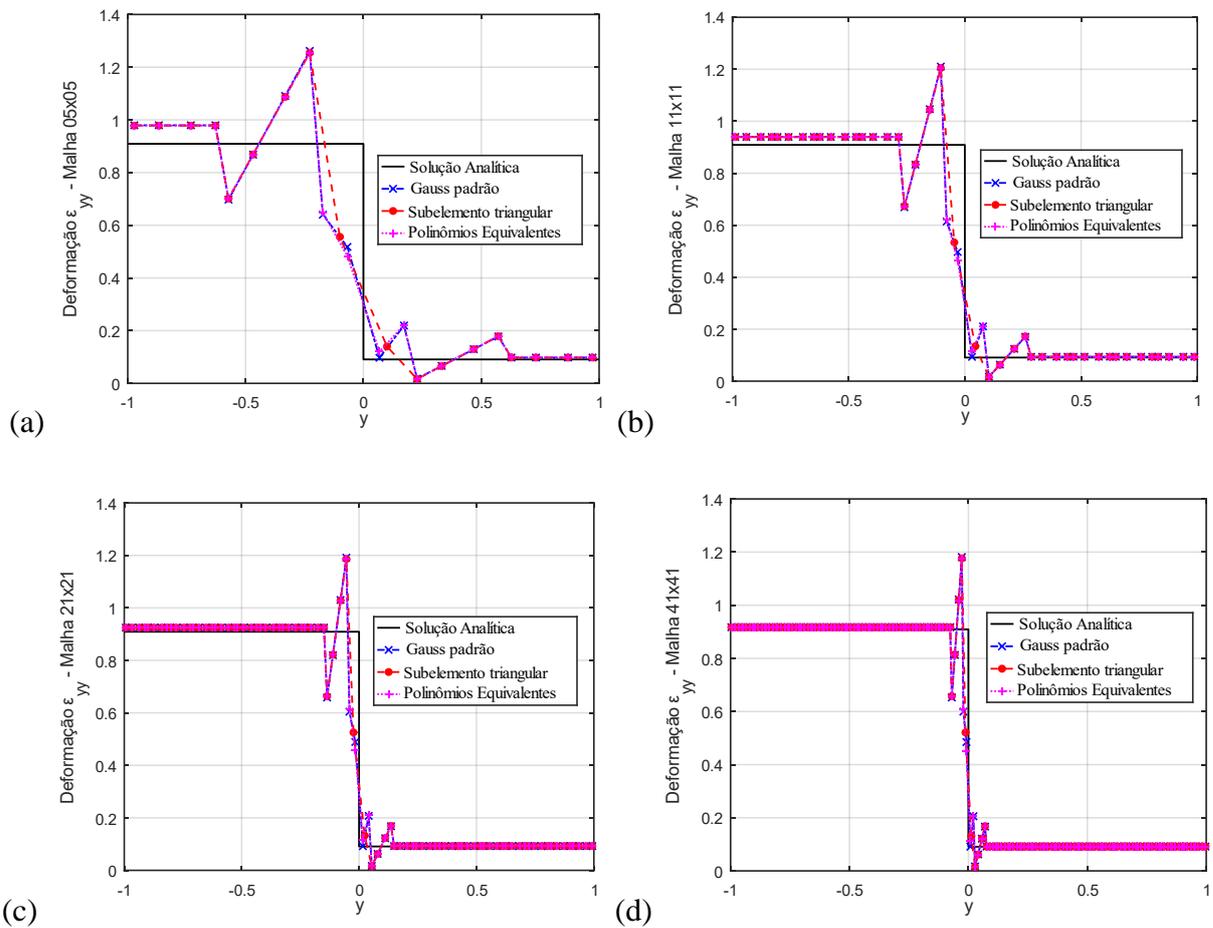


Figura 34 – Deformação ϵ_{yy} nos pontos de integração para os métodos de integração em relação as malhas com (a)05x05; (b)11x11; (c)21x21 e (d)41x41 elementos.

A análise por malha para cada método de integração, na Figura 34, demonstra que as soluções para o campo de deslocamento e deformação são bastante próximas. O método de integração com os subelementos triangulares divergiu um pouco dos outros métodos porque a localização

dos pontos de integração, onde foram feitos os cálculos dos resultados, difere dos outros dois métodos que aplicam os pontos diretamente no elemento.

O campo de deslocamento u_y na barra é mostrado na Figura 35, visualmente não foi possível perceber diferenças entre os métodos de integração para este resultado.

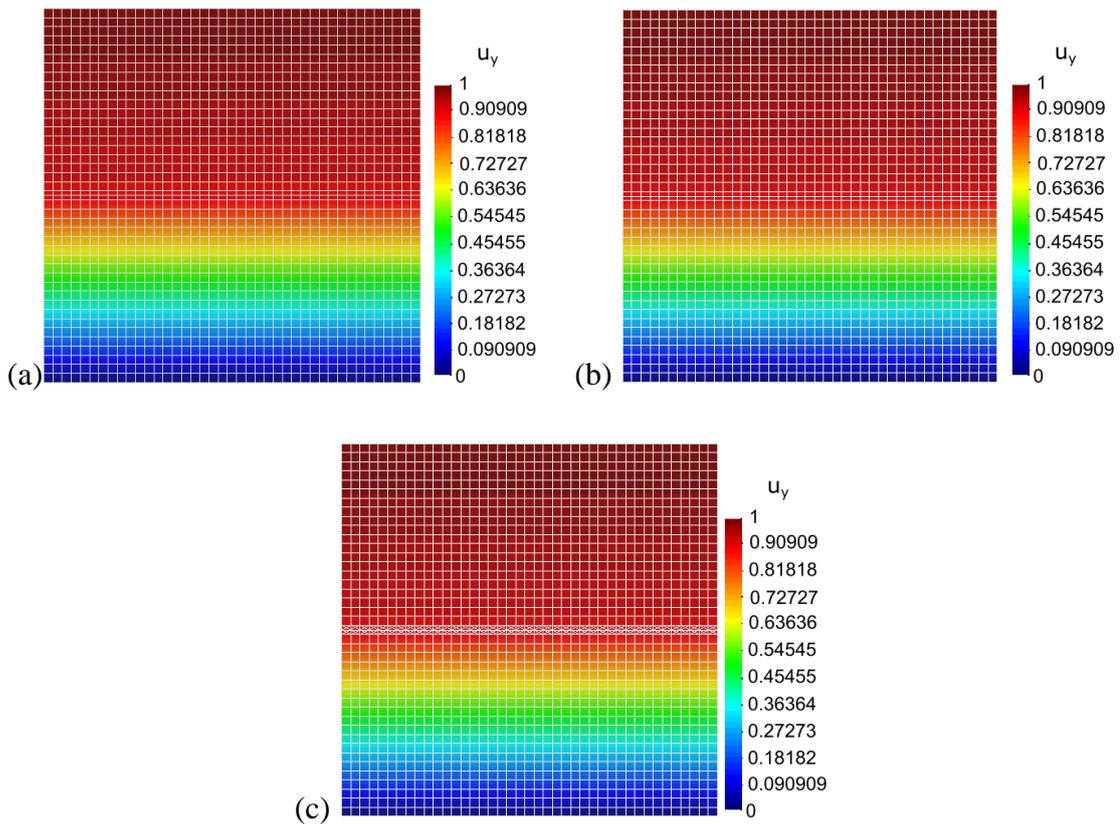


Figura 35 – Deslocamento u_y (a) Gauss padrão; (b) Polinômios equivalentes; (c) Subelementos triangulares.

5.2.2 Normas para medidas de erro da barra bimaterial com Poisson nulo

O erro para as normas de energia e deslocamento foram calculados, respectivamente, com a Eq. (63) e a Eq. (65), para o problema da barra em relação ao tamanho do lado L do elemento em cada malha, seguem na Figura 36 e Figura 37. O método de integração com os polinômios equivalentes apresentou o menor erro para a norma de deslocamento enquanto para a norma de energia o menor erro ocorreu para a técnica de Gauss. Quanto a integração com subelementos triangulares se manteve entre os outros dois métodos para a norma de energia e de

deslocamento. Os três métodos de integração analisados apresentaram bons resultados com o refino da malha.

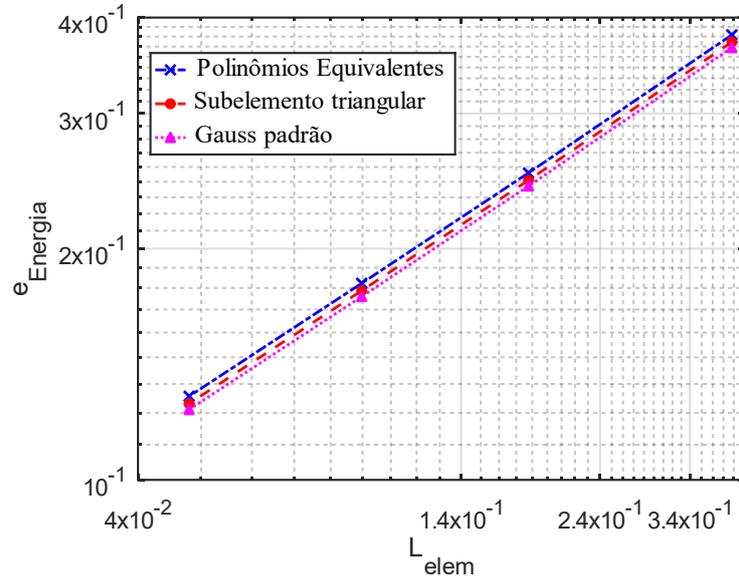


Figura 36 – Convergência da norma de erro para energia, e_E .

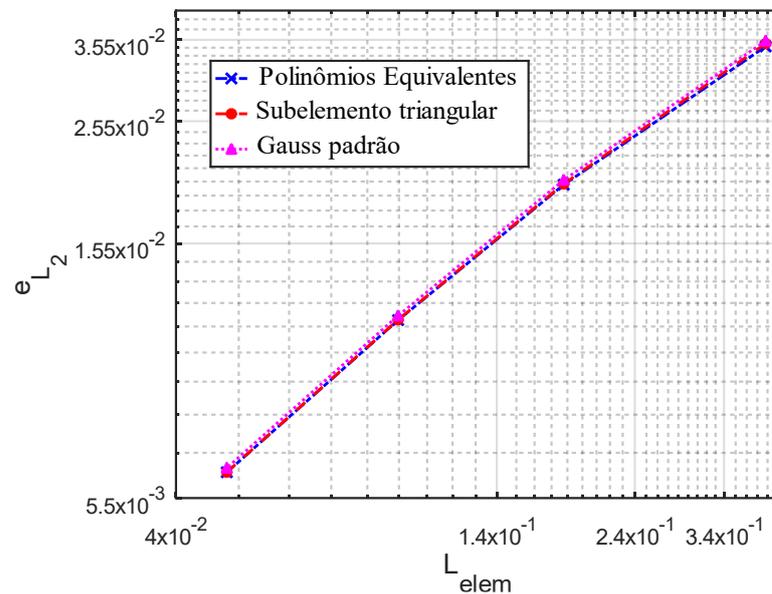


Figura 37 – Convergência da norma de erro para o deslocamento, e_{L_2} .

Os erros para a norma de energia para a integração com a técnica dos polinômios equivalentes e o padrão de Gauss para a malha mais refinada segue na Figura 38.

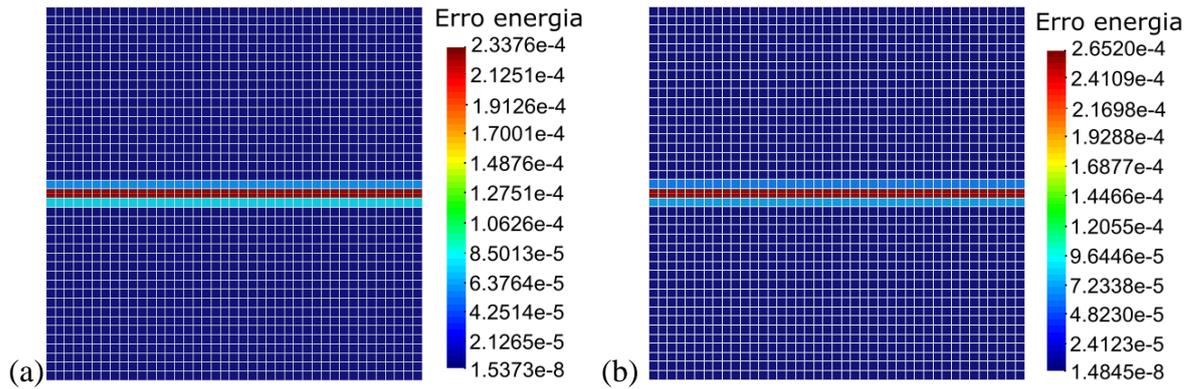


Figura 38 – Erros para a norma de energia para a malha de 41x41 elementos pelo método de integração (a) Gauss padrão; (b) Polinômios equivalentes.

Os erros para a norma L_2 do deslocamento para a integração com a técnica dos polinômios equivalentes e a técnica padrão de Gauss para a malha mais refinada segue na Figura 39.

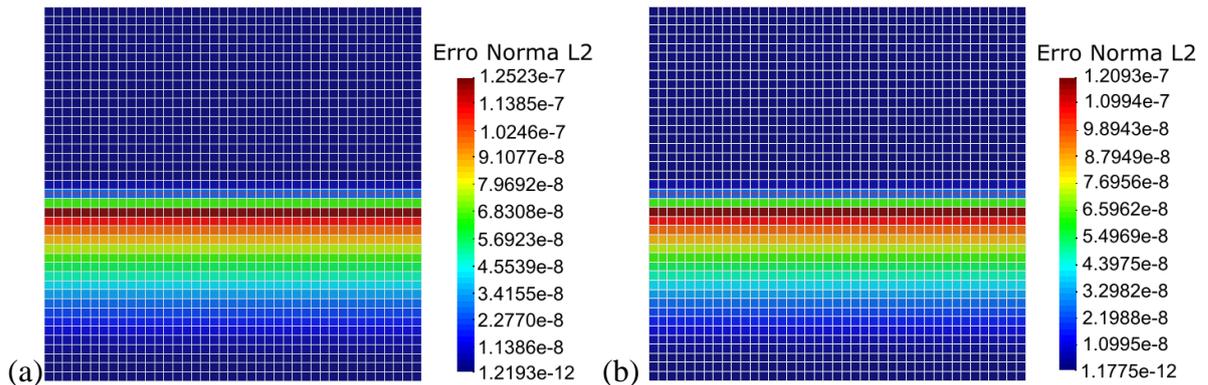


Figura 39 – Erros para a norma L_2 do deslocamento para a malha de 41x41 elementos pelo método de integração (a) Gauss padrão; (b) Polinômios equivalentes.

Da Figura 38 e Figura 39 pode-se observar que os maiores erros estão nos elementos enriquecidos e nos elementos de mistura, conforme o esperado.

5.2.3 Análise da variação na localização da interface dentro do elemento

Para analisar a relação entre a localização da interface no elemento enriquecido com os pontos de integração, as normas de erro para energia e deslocamento, respectivamente, Eq. (63) e Eq. (65), foram calculadas com para a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 1000 passos para

a malha com 05x05 elementos. A Figura 40, ilustra as variações da interface dentro do elemento.

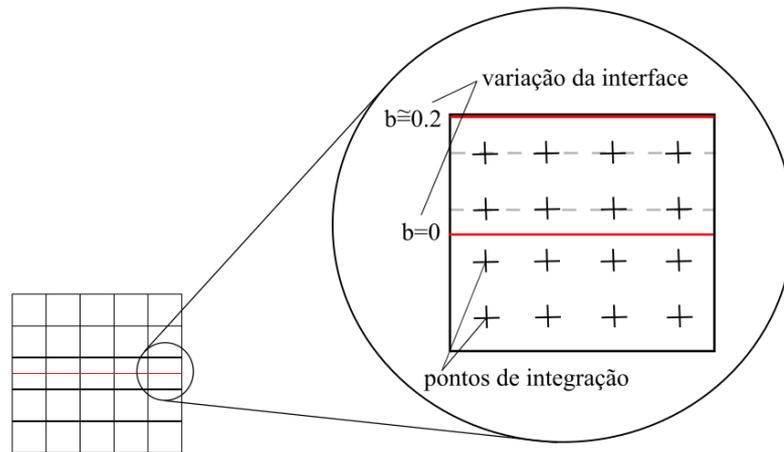


Figura 40 – Variação na localização da interface dentro do elemento enriquecido da malha de 05x05 elementos.

Na Figura 41 é apresentado o gráfico para a norma do erro em deslocamentos e na Figura 42 para a norma de energia.

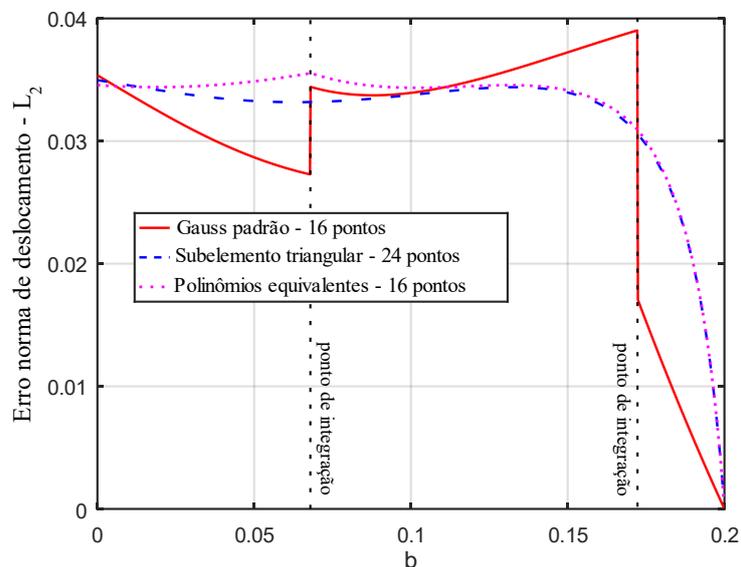


Figura 41 – Erro para a norma de deslocamento com a interface variando de $b = 0$ à $b \approx 0.2$ em 1000 passos.

Comparando a norma de erro de deslocamento, os métodos de integração com subelemento triangular e com os polinômios equivalentes foram os mais estáveis, pois, não ocorreram

oscilações como ocorreu para o método padrão de Gauss quando a interface estava sobre os pontos de integração.

A depender da localização da interface houve uma variação do método com menor erro. Para a interface localizada entre os pontos de integração, o menor erro ocorreu para os subelementos triangulares, enquanto para a interface antes e depois dos pontos, os menores erros ocorreram para o método de Gauss.

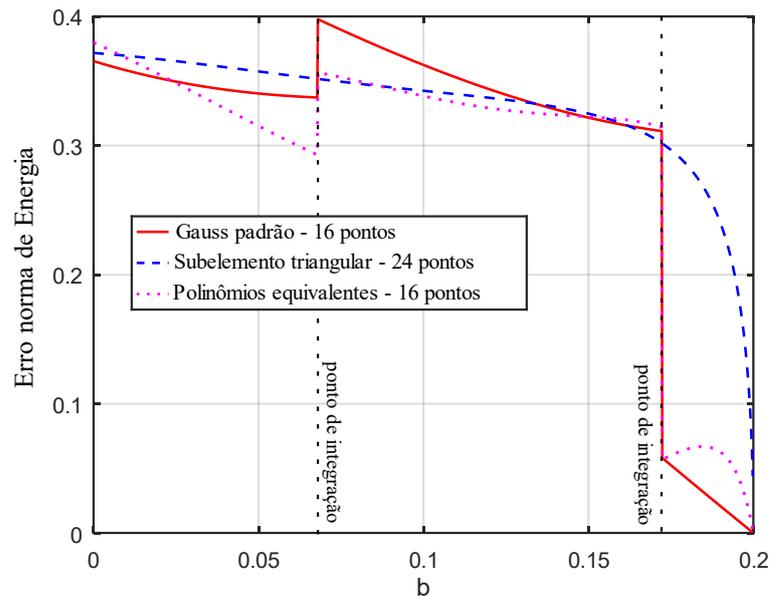


Figura 42 – Erro para a norma de energia com a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 1000 passos.

Diferentemente do erro da norma de deslocamento, para o erro da norma de energia, o método com os polinômios equivalentes apresentou uma mudança abrupta nos pontos de integração semelhante ao que ocorre com o método de Gauss.

Dos gráficos de erro para a norma de deslocamento e energia nota-se que quando a interface sai da zona, entre os pontos de integração, o erro decresce rapidamente, seja de forma suave ou abrupta. Esse comportamento tem dois pontos a serem discutidos. O primeiro, e que está relacionado principalmente ao método usual de integração de Gauss, é que há uma perda de “visibilidade” de parte da função que representa a singularidade fraca ao integrar numericamente. Quando a interface passa pelo último ponto de integração, o procedimento de integração não considera as contribuições de toda a função. Isso também é refletido no caso da integração usando polinômios equivalentes, mas de forma não tão abrupta quanto no primeiro caso. Já para a integração usando subelementação esse problema não se manifesta pois sempre

haverá pontos de integração em ambos os lados da interface, por menor que seja a área. O segundo efeito que leva ao decréscimo do erro parece estar relacionado a própria criação do espaço de enriquecimento usando as chamadas funções rampa deslocada, veja a discussão sobre na subseção 2.2 e abaixo com a Figura 43, uma vez que elas são construídas de modo a não ter contribuição quando a interface está no nó da malha. Isto faz com que quando a interface se aproxime do nó (aresta do elemento), a aproximação seja realizada, principalmente pelo espaço de aproximação de elementos finitos tradicional, essa tendência é apresentada pela Figura 44. A discussão segue abaixo onde são apresentados mais exemplos para auxiliar a elucidar tal fenômeno numérico.

A Figura 43 apresenta o campo de enriquecimento para a interface bimaterial mais próxima da face do elemento em comparação a Figura 7. Infere-se que quanto mais a interface se aproxima da face do elemento a tendência é do enriquecimento influenciar menos na solução do campo de deslocamento, porque a quina presente no campo de enriquecimento, que é chamada de descontinuidade fraca, vai suavizando.

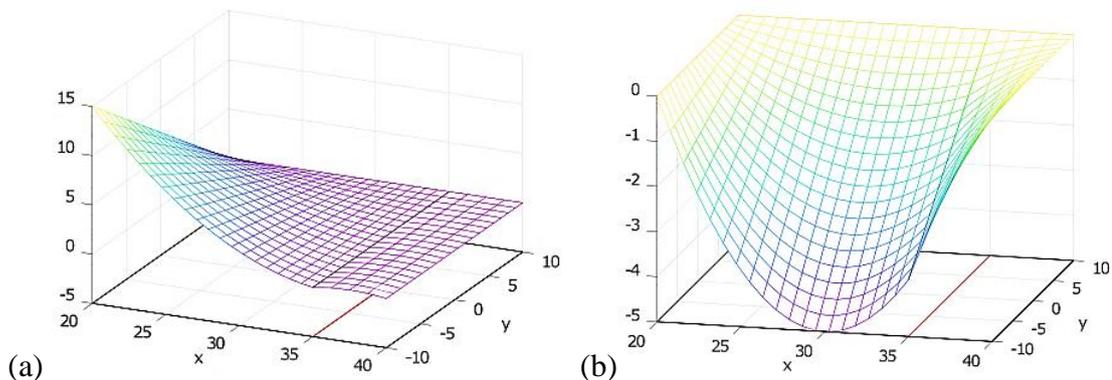


Figura 43 – Campo de enriquecimento para uma interface bimaterial no elemento quadrilátero bilinear com: (a) a função rampa $N_1(\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x})|$; (b) a função rampa deslocada $N_1(\mathbf{x})(|\varphi(\mathbf{x})| - |\varphi(\mathbf{x}_1)|)$.

Para melhor representar o campo de deslocamento quando a interface está próxima da face do elemento, a Figura 44 mostra o campo de deslocamento para o mesmo problema da Figura 23, subseção 5.1.1, porém com a interface em $x=38$. Comparando as figuras, é possível concluir que a parcela de enriquecimento diminui à medida que a interface se movimenta para a aresta do elemento.

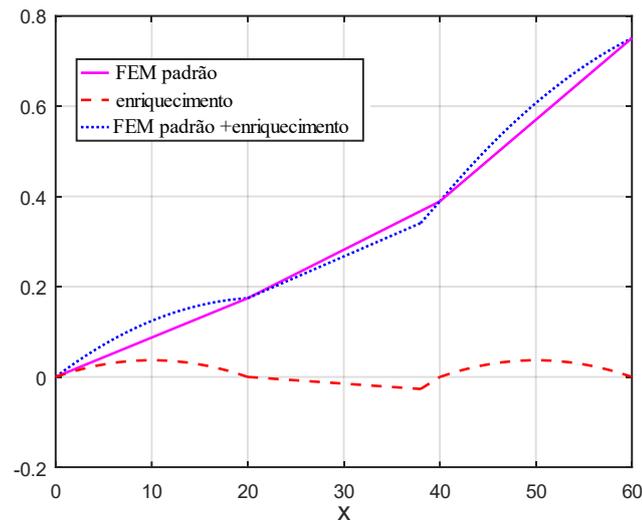


Figura 44 – Campo de deslocamento e as parcelas padrão e enriquecida do campo para o problema da barra sob tensão com 3 elementos com a interface em $x=38$.

As normas de erro foram calculadas anteriormente para 16 pontos de Gauss por serem suficientes para integrar a forma fraca. Mas, para confirmar as hipóteses levantadas sobre a variação da interface dentro do elemento, os gráficos também foram plotados para o elemento com a quadratura de 32×32 , ou 1024, pontos de integração na Figura 45 e Figura 46.

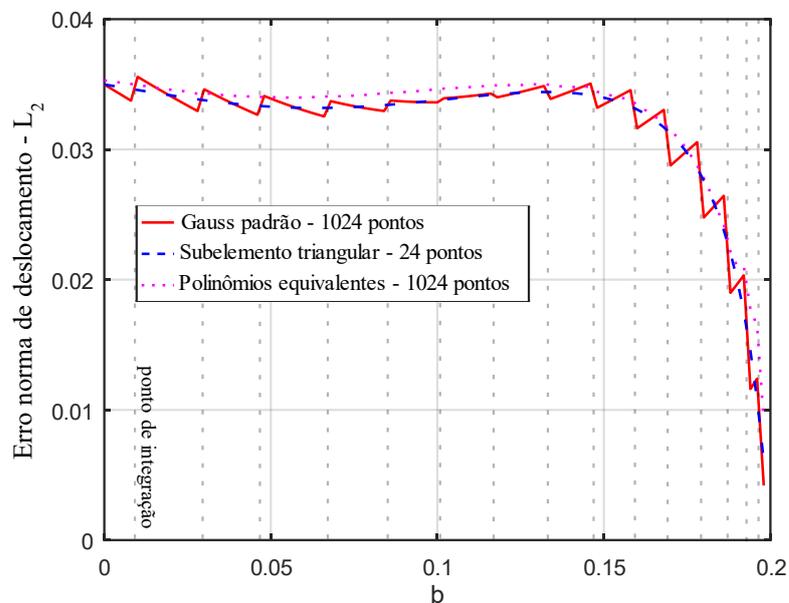


Figura 45 – Erro para a norma de deslocamento com a interface variando de $b=0$ à $b \cong 0.2$ em 100 passos.

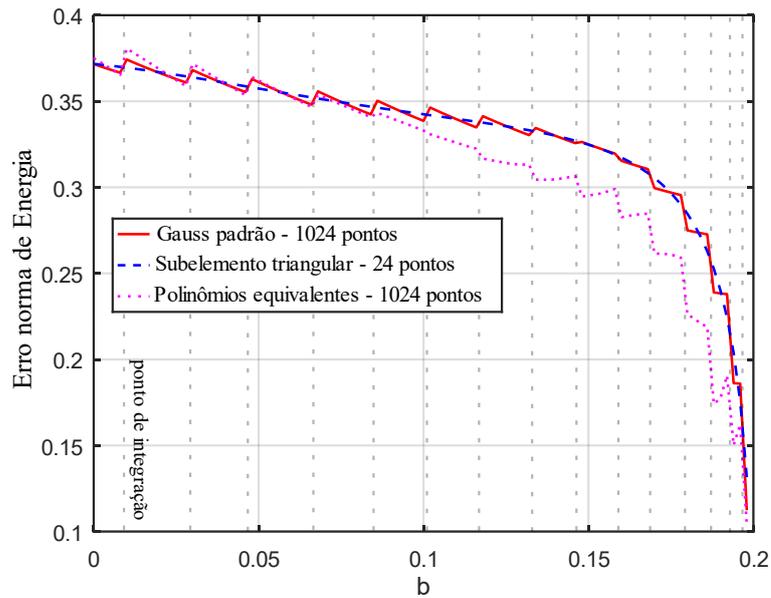


Figura 46 – Erro para a norma de energia com a interface variando de $b = 0$ à $b \cong 0.2$ em 100 passos.

Dos gráficos, pode-se confirmar que o método dos polinômios equivalentes captura bem a interface mesmo próxima a face do elemento para o campo de deslocamento, mas o mesmo não ocorre para a deformação que é descontínua. E no método de Gauss é realmente onde ocorrem mais instabilidades quando a interface está próxima aos pontos de integração.

Ressalta-se ainda que as posições e quantidades dos pontos de integração apresentadas nas Figuras 41, 42, 45 e 46 são válidas apenas para o método de Gauss e dos polinômios equivalentes. Para a integração com subelementos sempre foram utilizados 8 subelementos (4 em cada subdomínio/região do elemento) com 3 pontos de integração por subelemento que são gerados a cada passo de localização da interface. Por isso, os pontos de integração estão em localizações diferentes e difíceis de prever a cada variação da interface, inclusive este fato é uma desvantagem do método quando se pretende fazer análises nos pontos de integração.

5.3 Placa com inclusão circular

O problema de valor de contorno (PVC) bidimensional com interface bimaterial e com solução analítica apresentada por Fries (2008) foi solucionado pelas técnicas estudadas. Na Figura 47, é identificada a placa de raio b , com módulo de Young $E_A = 10$, coeficiente de Poisson $\nu_A = 0,25$ e inclusão circular de raio a , cujas constantes do material são $E_B = 1$ e $\nu_B = 0,25$.

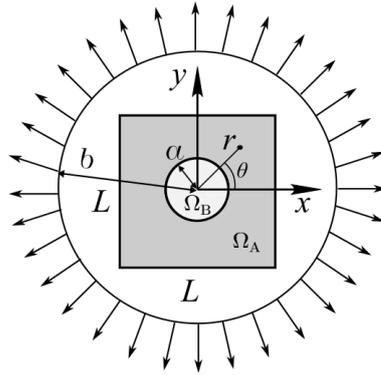


Figura 47 – PVC bimetálica, placa com inclusão circular de diferente material.

As tensões são calculadas por:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad (79)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad (80)$$

onde as constantes de Lamé, λ e μ , são substituídas para corresponder sua respectiva área do problema.

Escrita em função dos raios, a e b , também do parâmetro α , as deformações valem,

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha + \frac{b^2}{a^2}, & 0 \leq r \leq a \\ \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)\alpha - \frac{b^2}{r^2}, & a < r \leq b \end{cases} \quad (81)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha + \frac{b^2}{a^2}, & 0 \leq r \leq a \\ \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)\alpha + \frac{b^2}{r^2}, & a < r \leq b \end{cases} \quad (82)$$

E os deslocamentos:

$$u_r(r, \theta) = \begin{cases} \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha + \frac{b^2}{a^2}\right]r, & 0 \leq r \leq a \\ \left(r - \frac{b^2}{r}\right)\alpha + \frac{b^2}{r^2}, & a < r \leq b \end{cases} \quad (83)$$

$$u_{\theta}(r, \theta) = 0. \quad (84)$$

Enquanto o parâmetro α escrito vale:

$$\alpha = \frac{(\lambda_A + \mu_A + \mu_B)b^2}{(\lambda_B + \mu_B)a^2 + (\lambda_A + \mu_A)(b^2 - a^2) + \mu_B b^2}. \quad (85)$$

No modelo numérico do problema adotou-se uma placa quadrada de dimensão 2x2 para representar a placa externa de raio b e um círculo com o raio a de 0.4. O ponto central da placa quadrada está nas coordenadas (0,0). Foram utilizadas cinco malhas contendo 08x08, 16x16, 32x32, 64x64 e 128x128 elementos quadriláteros de 4 nós, em uma malha estruturada, configurando uma malha cartesiana.

Para as malhas analisadas o carregamento externo foi aplicado na fronteira da placa quadrada de dimensão 2x2 por meio da determinação do vetor tração de acordo com a solução analítica para as tensões apresentadas nas eq. (79) e (80). De posse do valor das tensões calculadas na extremidade (fronteira) da placa as trações são determinadas pela relação de Cauchy, isto é,

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \quad (86)$$

na qual \mathbf{n} é o vetor unitário normal a seção de corte que aponta para fora do domínio.

Já em termos das condições de contorno de deslocamento, o nó central foi preso em x e y enquanto os nós de coordenadas (-1,0) e (1,0) foram prescritos os deslocamentos em y ($u_y = 0$) e os nós de coordenadas (0,-1) e (0,1) tiveram prescritos os deslocamentos em x ($u_x = 0$). Isto foi feito para impedir qualquer movimento de corpo rígido do problema.

Devido ao grau dos polinômios equivalentes eram necessários 16 (04x04) pontos de Gauss para sua integração, a mesma quantidade de pontos foi utilizada para a integração com a quadratura padrão. No método que emprega subelementos foram dispostos 3 pontos em cada subelemento. Para os elementos do tipo padrão foram utilizados 9 pontos. As quantidades de pontos foram escolhidas por serem as mínimas necessárias.

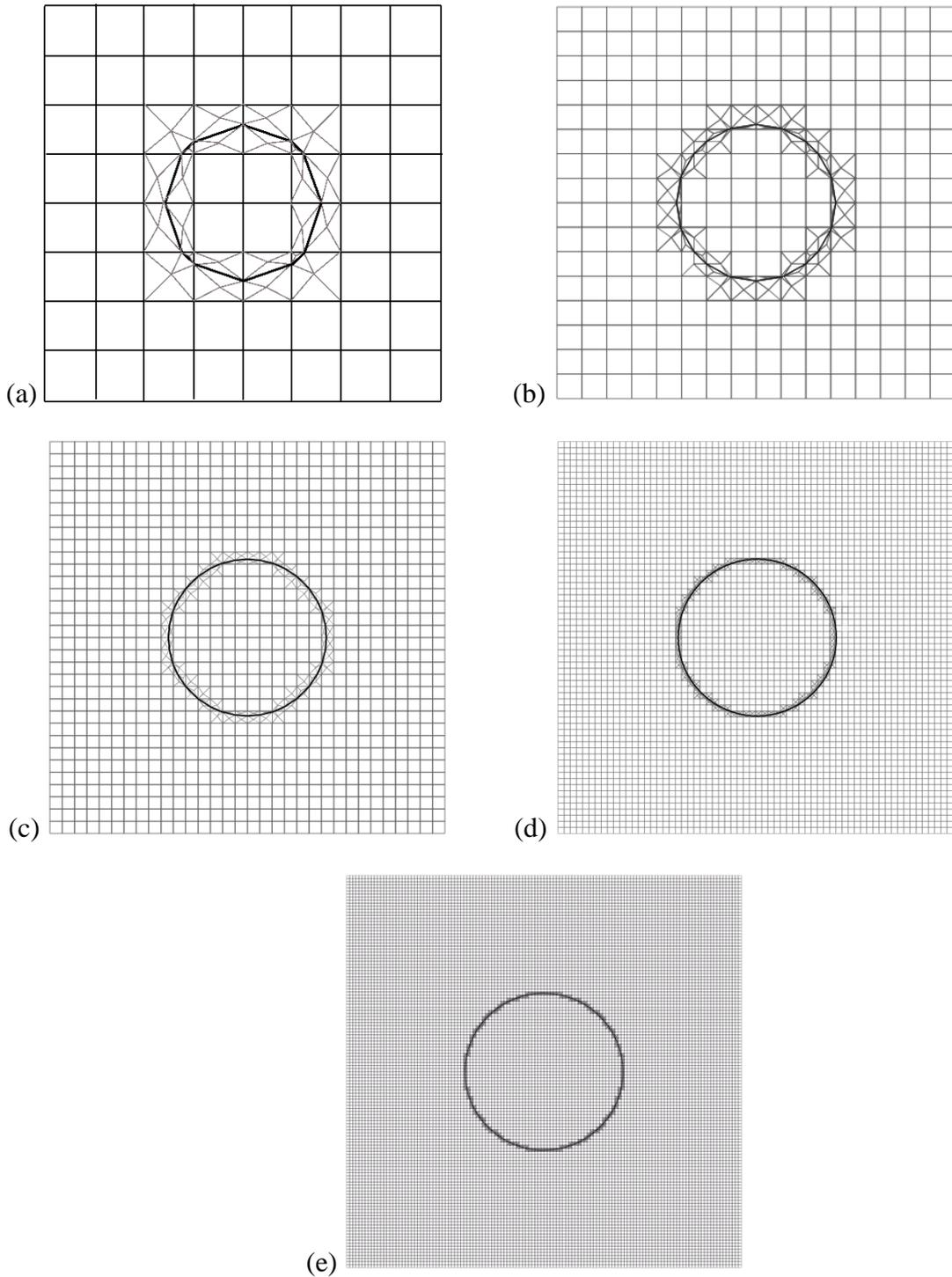


Figura 48 – Malha do PVC com inclusão circular com subelementos triangulares criados nos elementos enriquecidos por uma interface através da triangulação de Delaunay (a)08x08; (b)16x16; (c)32x32; (d)64x64; (e) 128x128.

Os valores da função distância absoluta, utilizados na função de enriquecimento da interface, são apresentados:

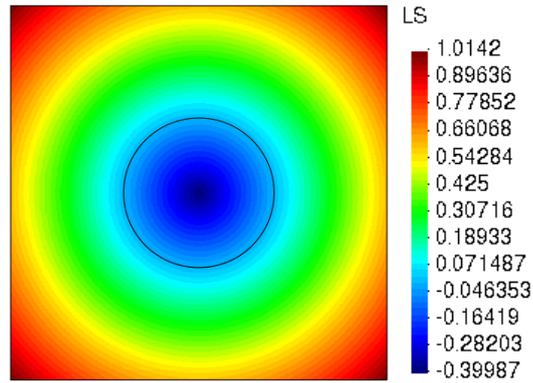


Figura 49 – Curvas de nível (*Level Set*).

5.3.1 Normas para medidas de erro da placa com inclusão circular

O erro para as normas de energia e deslocamento foram calculados, respectivamente, com a Eq. (63) e a Eq. (65). Os gráficos de erro para as normas de deslocamento e energia a depender do tamanho do lado ($L \times L$) do elemento da malha estão, respectivamente, na Figura 50 e Figura 51.

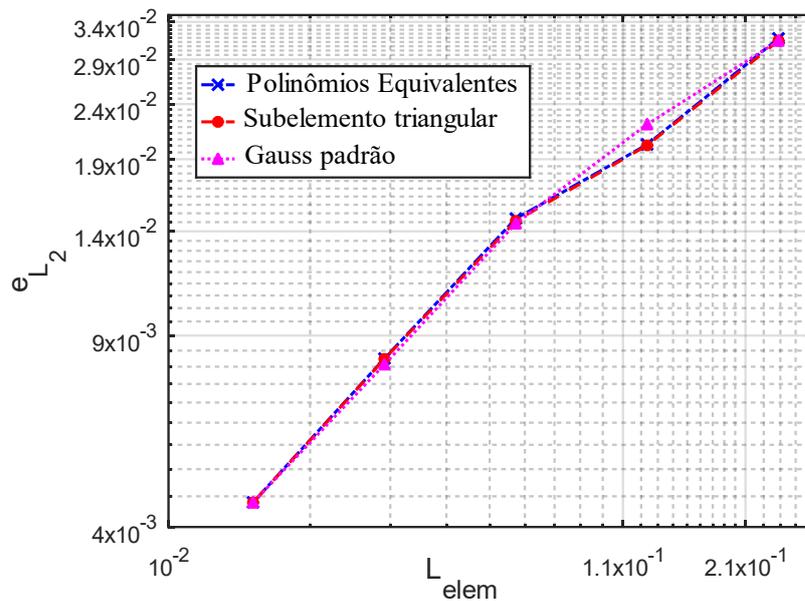


Figura 50 – Norma de erro para deslocamento e_{L_2} .

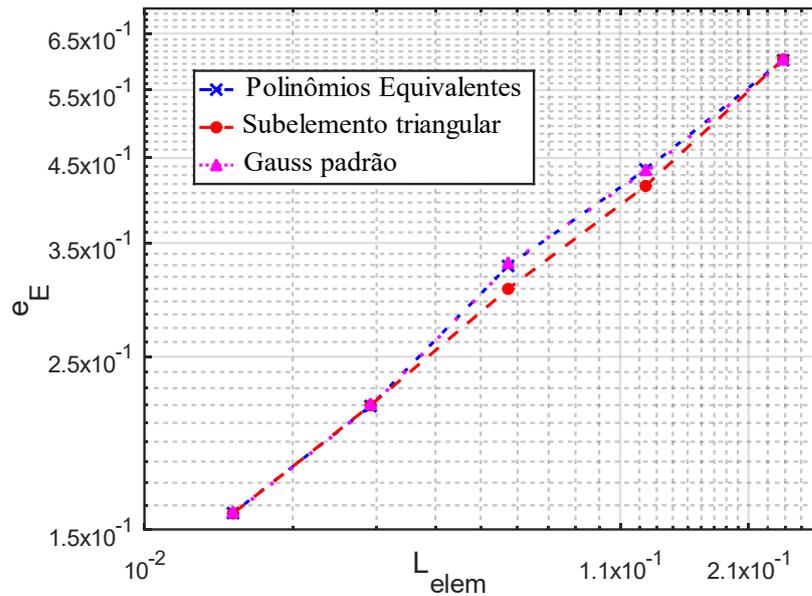
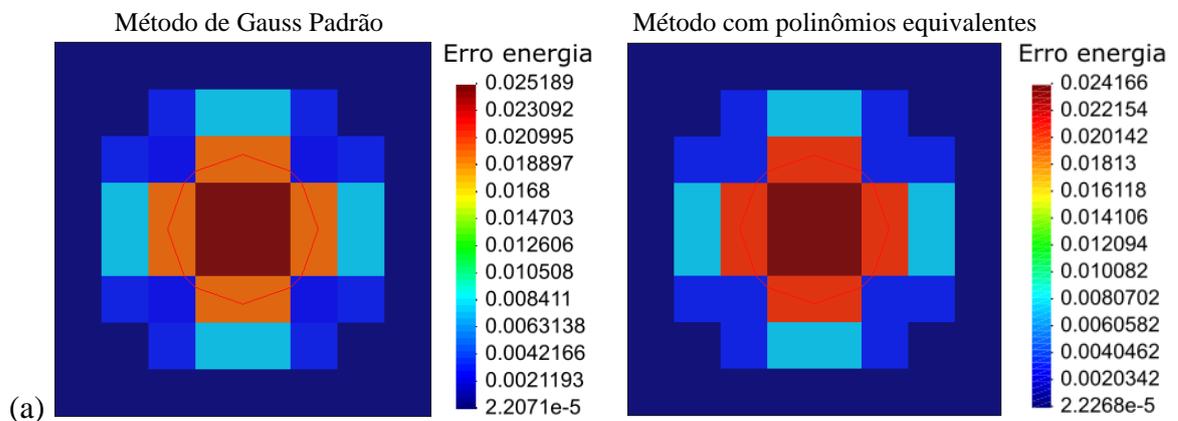


Figura 51 – Norma de erro para energia e_E .

Do cálculo das normas de erro para o deslocamento e energia do PVC com inclusão circular infere-se que os três métodos de integração estudados apresentam resultados semelhantes. Entretanto, cabe-se ressaltar que fica demonstrado por este gráfico que a estratégia proposta por Ventura (2005) produz as mesmas propriedades de convergência sem ter que recorrer a subelementação ou ter preocupações com possíveis erros quando da adoção da estratégia de integração de Gauss.

O erro na norma de energia para a integração padrão de Gauss e a com os polinômios equivalentes são comparados na Figura 52 para todas as malhas que foram construídas.



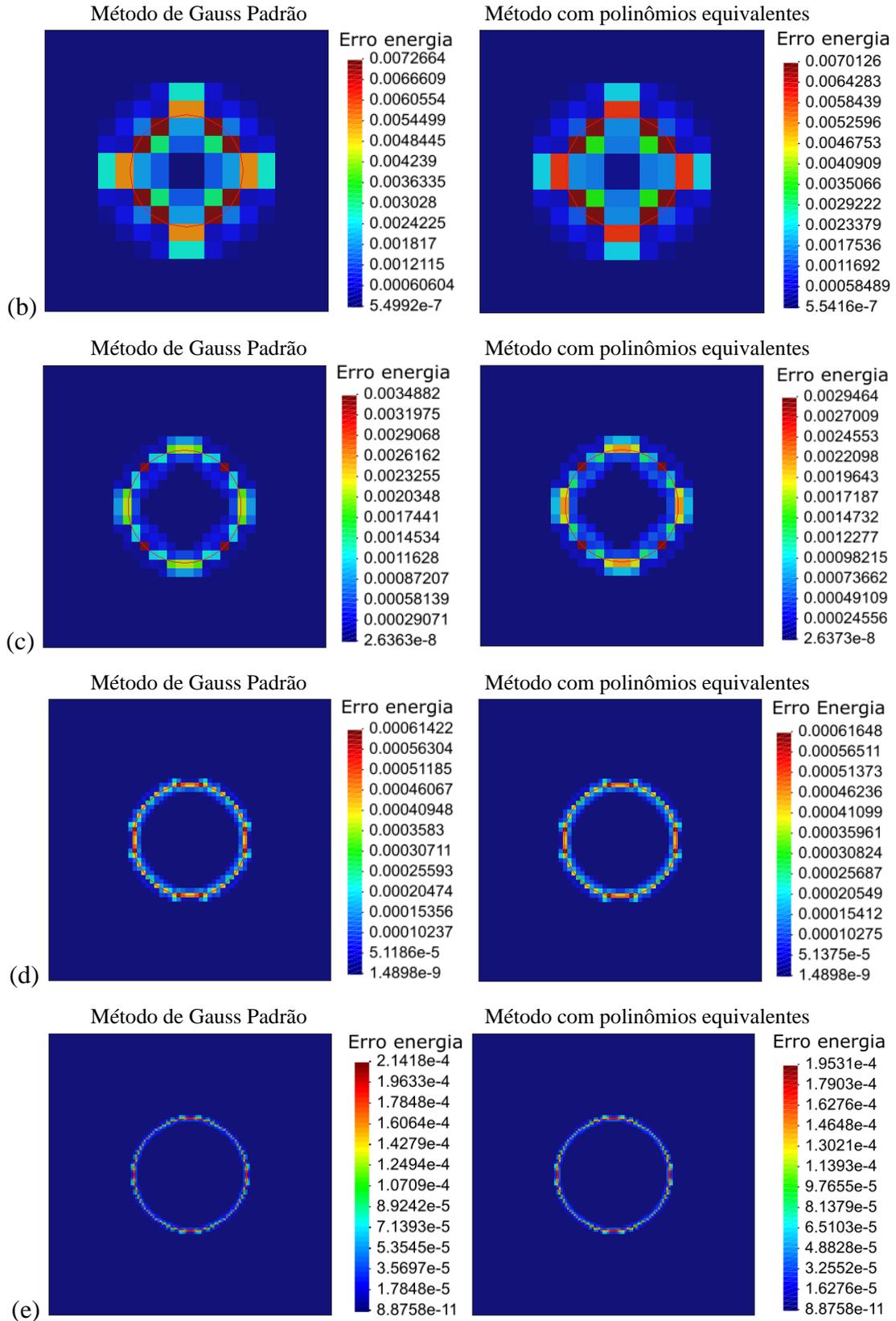
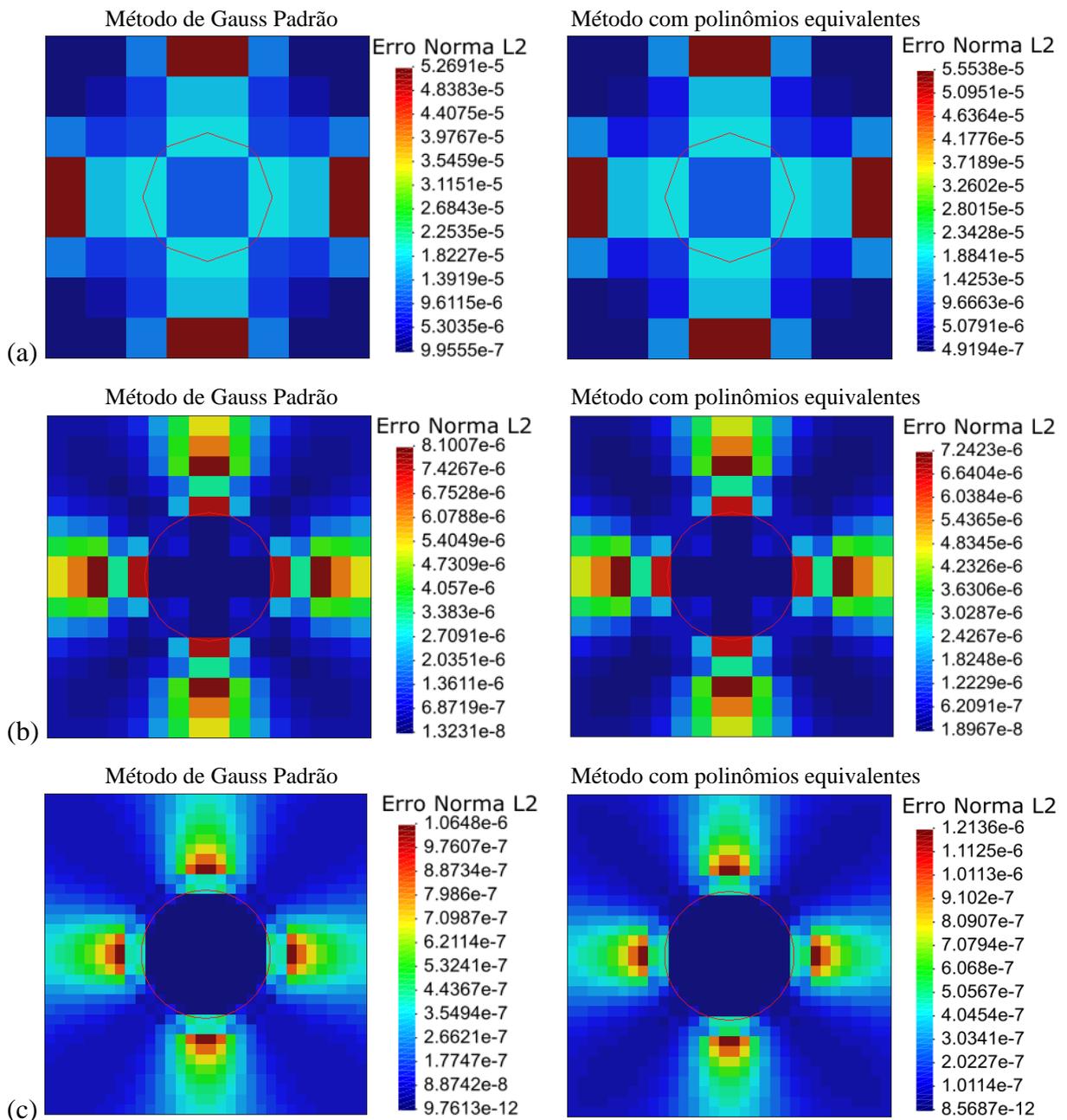


Figura 52 – À esquerda estão os erros para a norma de energia por elemento com a integração de Gauss e à direita com os polinômios que substituem a função de enriquecimento para as malhas (a) 08×08 ; (b) 16×16 ; (c) 32×32 ; (d) 64×64 ; (e) 128×128 .

Analisando a Figura 52 de (a) à (e) percebe-se que os maiores erros sempre se concentram na região da interface e conforme a malha é refinada, eles se restringem aos elementos enriquecidos e de mistura. É possível perceber que os valores máximos de erro acontecem quase sempre para a integração de Gauss, embora os erros estejam na mesma ordem.

Também, são apresentados os erros para a norma L_2 do deslocamento para a integração com os polinômios equivalentes e a padrão de Gauss para todas as malhas analisadas.



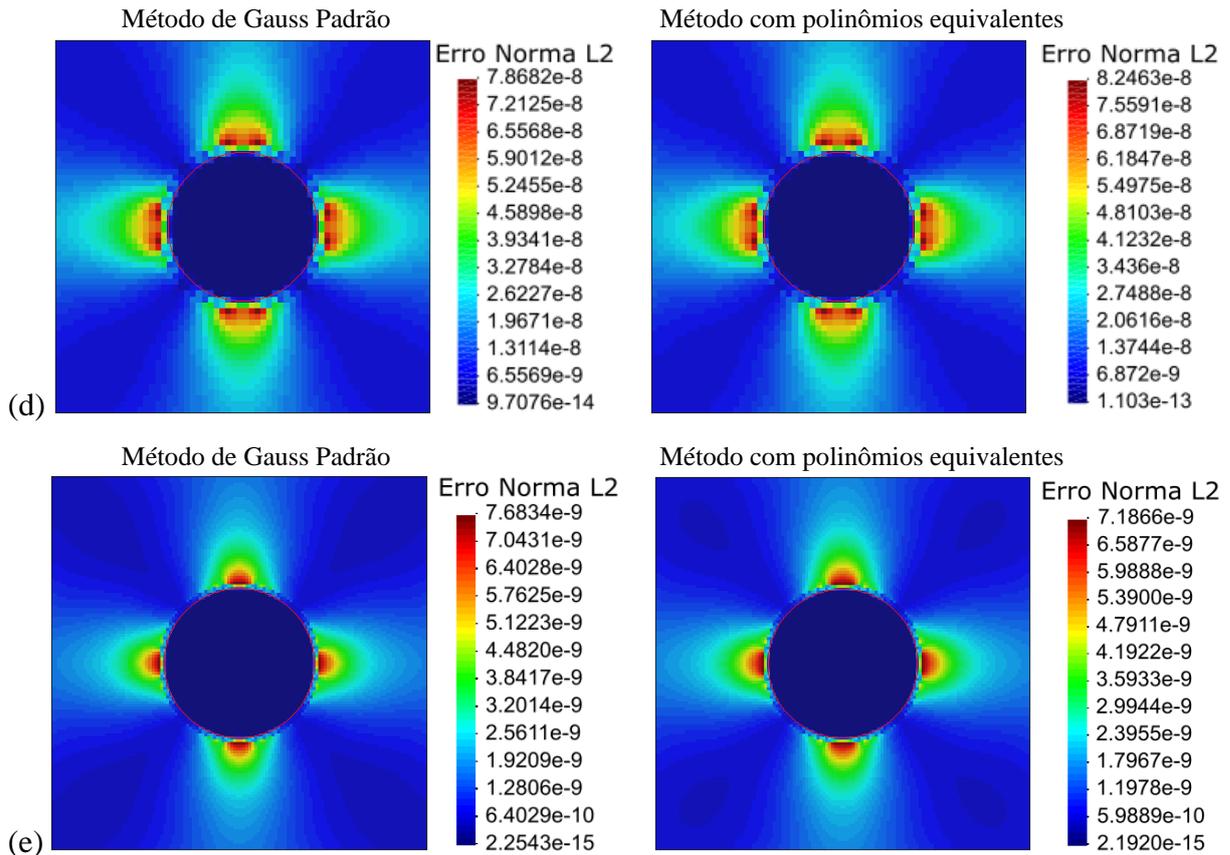


Figura 53 – À esquerda estão os erros para a norma L_2 do deslocamento por elemento com a integração de Gauss e à direita com os polinômios que substituem a função de enriquecimento para as malhas (a) 08×08 ; (b) 16×16 ; (c) 32×32 ; (d) 64×64 ; (e) 128×128 .

Da Figura 53, nota-se que para as malhas com menor refino, (a) e (b), os maiores erros se concentram no contorno do modelo. Isto é resultado da prescrição das condições de contorno essenciais do problema para evitar movimentos de corpo rígido. Porém, à medida que a malha é refinada os maiores erros convergem para próximo da interface circular, como era esperado. Aqui não há um comportamento bem claro que distinga uma tendência de melhor desempenho entre as estratégias adotadas frente ao cálculo do erro.

5.3.2 Deslocamento, tensão e deformação da placa com inclusão circular

O campo de deslocamento calculado para a malha de maior refino, 128×128 elementos, apresentou o mesmo resultado para as três técnicas de integração analisadas, segue na Figura 54.

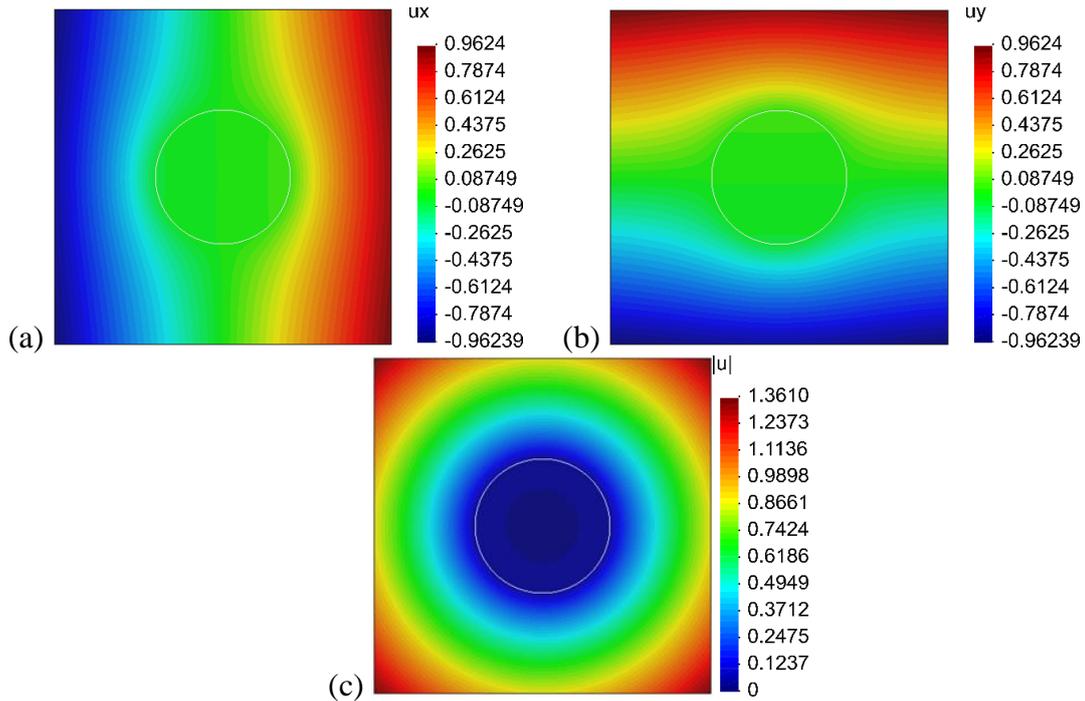
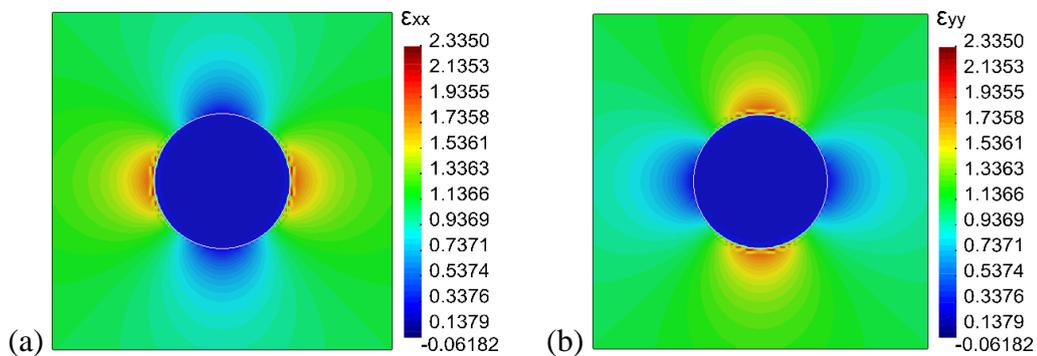


Figura 54 – Campo de deslocamento para a malha de 128x128 elementos (a) deslocamento horizontal, u_x ; (b) deslocamento vertical, u_y ; (c) módulo do deslocamento, $|u|$.

Partindo do centro da inclusão material o campo de deslocamento cresce gradualmente à medida que se aproxima da fronteira do modelo da placa, onde a tração é aplicada. Assim, os resultados estão dentro do esperado e se assemelham com a solução analítica.

O campo de deformação para a malha de 128x128 elementos segue na Figura 55 e Figura 56, respectivamente, para a integração padrão de Gauss e para os polinômios equivalentes.



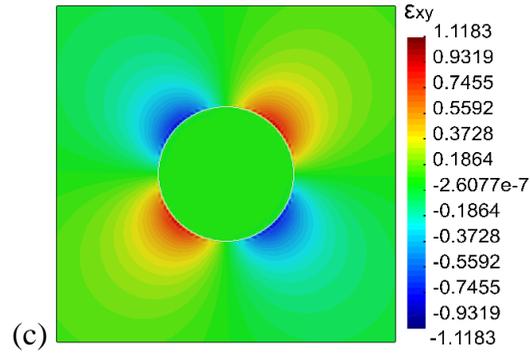


Figura 55 – Campo de deformação para a malha de 128x128 elementos, com o método de integração pela quadratura padrão de Gauss (a) ε_{xx} ; (b) ε_{yy} ; (c) ε_{xy} .

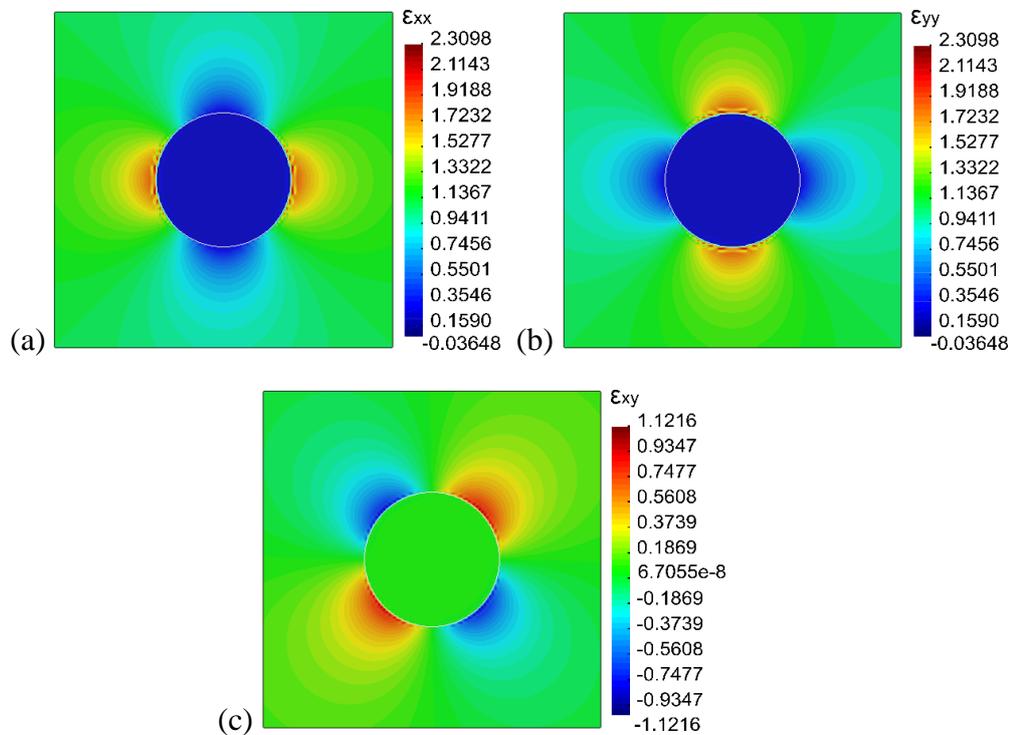


Figura 56 – Campo de deformação para a malha de 128x128 elementos, para o método de integração com os polinômios equivalente (a) ε_{xx} ; (b) ε_{yy} ; (c) ε_{xy} .

Com o resultado gráfico infere-se que as maiores deformações, ε_{xx} e ε_{yy} , ocorrem na interface entre os materiais e as menores deformações na inclusão circular. O cisalhamento, ε_{xy} , também é maior na interface. Visualmente, os resultados para os métodos de integração são bastante semelhantes.

O mapa de calor que representa o campo de tensão calculado para a malha de maior refino segue na Figura 57, para a integração com a quadratura padrão de Gauss.

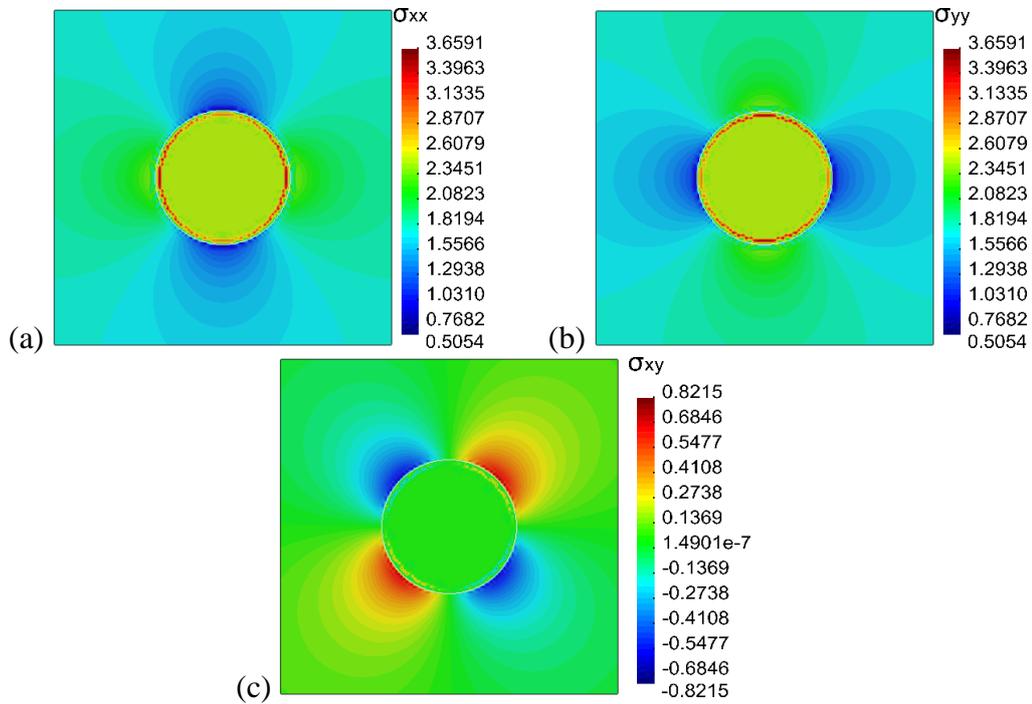
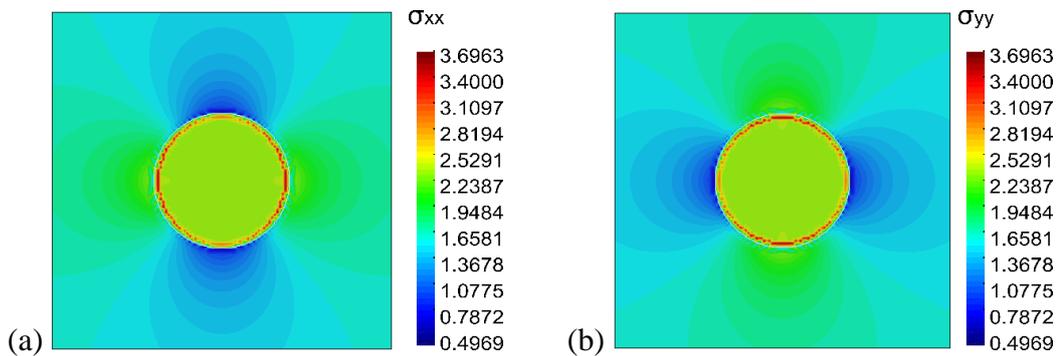


Figura 57 – Campo de tensão para a malha de 128x128 elementos, com o método de integração pela quadratura padrão de Gauss (a) σ_{xx} ; (b) σ_{yy} ; (c) σ_{xy} .

O campo de tensão calculado para a malha de maior refino para a integração com a técnica dos polinômios equivalentes segue na Figura 58.



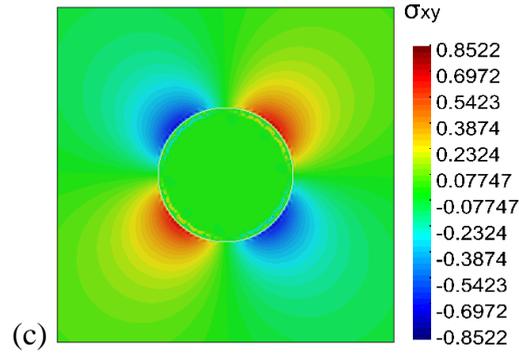


Figura 58 – Campo de tensão para a malha de 128x128 elementos, para o método de integração com os polinômios equivalentes (a) σ_{xx} ; (b) σ_{yy} ; (c) σ_{xy} .

As maiores tensões, em módulo, ocorreram próximo a interface. Comparando o comportamento da tensão para os métodos de integração, eles são bem semelhantes, como já havia sido observado através do erro para a norma de energia.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho é investigada uma técnica de regularização das funções que representam as interfaces fracas dentro do contexto do XFEM, a qual permite que a integração numérica possa ser realizada pelo método tradicional de Gauss. Esta técnica é comparada com outras duas técnicas que são consideradas as usuais para a integração da forma fraca no XFEM, que são o uso direto da integração de Gauss em integrandos descontínuos e a técnica de integração usando subelementação.

Para problemas com descontinuidade fraca, descontinuidades bimaterial neste trabalho, as três técnicas foram comparadas mediante análises de convergência em termos de normas para valores de elementos da matriz de rigidez, normas no espaço de função L_2 e de energia. Com o primeiro problema, que é um problema simples sem solução analítica, foi demonstrado que oscilações podem ocorrer quando é utilizada a integração de Gauss de forma direta. O segundo problema evidenciou essas oscilações com a variação das medidas de erro para a interface caminhando dentro do elemento. A análise do problema de uma inclusão circular em um meio infinito de material distinto, com formulação em termos de um problema de valor de contorno, mostra que o procedimento de regularização estudado apresenta as mesmas taxas de convergência do que os procedimentos usuais sem, entretanto, ter que considerar os problemas de oscilações da aplicação da quadratura de Gauss de forma direta ou da necessidade de criar uma estratégia de subelementação para integrar o problema.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Nesse tópico são sugeridas continuidades para este trabalho.

- a) Implementar no programa que está em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa a modelagem de interfaces móveis;
- b) Expandir as técnicas de integração para problemas com descontinuidade forte;
- c) Estudar outros tipos de regularização dentro do contexto de XFEM;

- d) Considerar o problema de plasticidade em interfaces bimaterias;
- e) Construir polinômios equivalentes para elementos de mais alta ordem.

REFERÊNCIAS

- AKHONDZADEH, S.; KHOEI, A. R.; BROUMAND, P. An efficient enrichment strategy for modeling stress singularities in isotropic composite materials with X-FEM technique. **Engineering Fracture Mechanics**, 11 november 2016. 201-225.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2012. 91-111.
- BARRY, J. GEOMPACK - A software package for the generation of meshes using geometric algorithms. **Advances in Engineering Software**, Edmonton, 13, 1991. 325-331.
- BÉCHET, E. et al. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 1033-1056, june 2005.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, n. 17, April 2009.
- BENVENUTI, E. A regularized XFEM framework for embedded cohesive interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 4367–4378, 2008.
- BENVENUTI, E.; TRALLI, A.; VENTURA, G. **Regularized Extended Finite Elements for Strong Discontinuities**. [S.l.]: [s.n.]. 2006.
- BORDAS, S. P. A. et al. On the performance of strain smoothing for quadratic and enriched finite element approximations (XFEM/GFEM/PUFEM). **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2011. 637-666.
- BOUHALA, L. et al. An XFEM crack-tip enrichment for a crack terminating at a bi-material interface. **Engineering Fracture Mechanics**, 18 February 2013. 51-64.
- CHO, J. R. et al. Mesh generation considering detailed tread blocks for reliable 3D tire analysis. **Advances in Engineering Software**, 2004. 105-113.
- CHU, P. et al. Two-dimensional elasticity solution of elastic strips and beams made of functionally graded materials under tension and bending. **Acta Mechanica**, p. 2235–2253, 2015.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. H-p clouds - A meshless method to solve Boundary-Value Problems. **TICAM report - Texas Institute for Computational and Applied Mathematics**, Texas, May 1995.

DUARTE, C. A.; ODENT, J. T. H-p Clouds - An h-p Meshless Method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 12, p. 673-705 , February 1996.

FRANCIS, A. et al. Linear smoothed polygonal and polyhedral finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, June 2017. 1-28.

FRIES, T.-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 503–532, 2008.

FRIES, T.-P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 23 April 2010. 253–304.

KÄSTNER, M. et al. Higher-order extended FEM for weak discontinuities – level set representation, quadrature and application to magneto-mechanical problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 19 December 2012. 1403–1424.

KHOEI, A. R. **Extended Finite Element Method: Theory and Applications**. [S.l.]: Wiley, 2015.

LEE, D. T.; SCHACHTER, B. J. Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation. **International Journal of Computer & Information Sciences**, v. 9, p. 219-242, February 1980.

LIM, I. L. et al. An improved numerical inverse isoparametric mapping technique for 2D mesh rezoning. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 41, p. 417-435, 1992.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 289-314, April 1996.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 131-150, 1999.

MOHAMMADI, S. **Extended Finite Element Method**. 1. ed. Tehran: Blackwell, 2008.

MURTI, V.; VALLIAPPAN, S. Numerical inverse isoparametric mapping in remeshing and nodal quantity contouring. **Computer & Structures**, mar. 1985. 1011-1021.

NATARAJAN, S.; MAHAPATRA, D. R.; BORDAS, S. P. A. Integrating strong and weak discontinuities without integration subcells and example applications in an XFEM/GFEM framework. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 29 January 2010. 269-294.

PATHAK, H.; SINGH, A.; SINGH, I. V. Numerical simulation of bi-material interfacial cracks using EFGM and XFEM. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, p. 9-36, 2011.

- RABCZUK, T. et al. **Extended Finite Element and Meshfree Methods**. [S.l.]: Elsevier, 2020.
- RODRIGUEZ, E. D. R. **Análise e implementação do Método de Elementos Finitos Estendido (XFEM) para problemas bidimensionais de elasticidade infinitesimal com interface bimaterial**. Porto Alegre: Trabalho de Conclusão de Curso, 2019.
- SEABRA, M. R. R. et al. Some numerical issues on the use of XFEM for ductile fracture. **Computational Mechanics**, 11 March 2012. 611–629.
- STOLARSKA, M. et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 17 Abril 2001. 943-960.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 1401–1417, 2000.
- STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; BABUSKA, I. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, p. 3109–3161, May 2003.
- SUKUMAR, N. et al. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. **Computational Methods Applied in Mechanics Engineering**, 2001. 6183-6200.
- SURENDRAN, M. et al. Linear smoothed extended finite element method. **International Journal Numerical Methods Engineering**, 8 May 2017. 1733-1749.
- VENTURA, G. On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 12 December 2005. 761–795.
- WAN, D. et al. A fully smoothed XFEM for analysis of axisymmetric problems with weak discontinuities. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, 22 September 2016. 203-226.
- ZHUANG, Z. et al. **Extended Finite Element Method**. 1. ed. Beijing: Elsevier, 2014.

APÊNDICE A

O elemento quadrilátero padrão adotado neste trabalho segue na Figura 59.

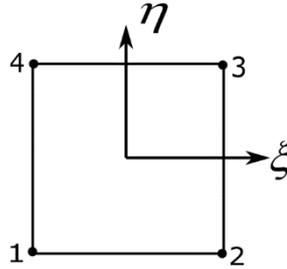


Figura 59 – Elemento quadrilátero bilinear (Q4).

As funções de forma para o elemento quadrilátero padrão, que possui quatro nós $i = [1, \dots, 4]$, podem ser determinadas como:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (87)$$

As coordenadas do elemento definidas em função das funções de forma e das coordenadas dos nós:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{aligned} \quad (88)$$

A matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J}_{std} = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y \end{pmatrix} \quad (89)$$

A área do elemento:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}_{std}]} \begin{pmatrix} \partial_\eta y & -\partial_\xi y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_\eta x & \partial_\xi x \\ -\partial_\eta x & \partial_\xi x & \partial_\eta y & -\partial_\xi y \end{pmatrix} \quad (90)$$

A matriz gradiente com as derivadas da função de forma:

$$\mathbf{G}_{std} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi} N_1 & 0 & \partial_{\xi} N_2 & 0 & \partial_{\xi} N_3 & 0 & \partial_{\xi} N_4 & 0 \\ \partial_{\eta} N_1 & 0 & \partial_{\eta} N_2 & 0 & \partial_{\eta} N_3 & 0 & \partial_{\eta} N_4 & 0 \\ 0 & \partial_{\xi} N_1 & 0 & \partial_{\xi} N_2 & 0 & \partial_{\xi} N_3 & 0 & \partial_{\xi} N_4 \\ 0 & \partial_{\eta} N_1 & 0 & \partial_{\eta} N_2 & 0 & \partial_{\eta} N_3 & 0 & \partial_{\eta} N_4 \end{pmatrix} \quad (91)$$

A matriz gradiente com a transformação:

$$\mathbf{B}_{std} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}_{std} \quad (92)$$

A matriz constitutiva do material para o Estado Plano de Deformação (EPD) dependente do módulo de Young do material E e do coeficiente de Poisson ν :

$$\mathbf{E}_{EPD} = \frac{E*(1-\nu)}{(1+\nu)*(1-2*\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} \end{pmatrix} \quad (93)$$

Por fim, a matriz de rigidez para o elemento do FEM padrão:

$$\mathbf{K}_{std} = Det[\mathbf{J}_{std}] \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{EPD} \mathbf{B} \quad (94)$$