

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DA RAZÃO DE BLOQUEIO EM UM  
ESCOAMENTO LAMINAR AO REDOR DE UM CILINDRO USANDO  
MÉTODO *LATTICE*-BOLTZMANN**

por

Pedro Matzembacher

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, maio de 2021

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO  
CIP - Catalogação na Publicação

MATZEMBACHER, PEDRO

ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DA RAZÃO DE BLOQUEIO EM UM ESCOAMENTO LAMINAR AO REDOR DE UM CILINDRO USANDO MÉTODO LATTICE-BOLTZMANN / PEDRO MATZEMBACHER. -- 2021.

24 f.

Orientador: Guilherme Henrique Fiorot.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-RS, 2021.

1. escoamento ao redor de um cilindro. 2. razão de bloqueio. 3. coeficiente de arrasto. 4. método de lattice Boltzmann. 5. número de Reynolds moderado. I. Fiorot, Guilherme Henrique, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pedro Matzembacher

**ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DA RAZÃO DE BLOQUEIO EM UM  
ESCOAMENTO LAMINAR AO REDOR DE UM CILINDRO USANDO  
MÉTODO *LATTICE*-BOLTZMANN**

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Escolher uma das áreas de concentração: Energia e Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Guilherme Henrique Fiorot

Comissão de Avaliação:

Prof./Prof<sup>ª</sup>. Cirilo Seppi Bresolin

Prof./Prof<sup>ª</sup>. Sérgio Viçosa Möller

Prof./Prof<sup>ª</sup>. Paulo Smith Schneider

Porto Alegre, maio de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA  
MECÂNICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2021

**ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DA RAZÃO DE BLOQUEIO EM UM  
ESCOAMENTO LAMINAR AO REDOR DE UM CILINDRO USANDO  
MÉTODO LATTICE-BOLTZMANN**

**Pedro Matzembacher**  
pmatzem@hotmail.com

**Resumo.** Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo numérico da influência da razão de bloqueio nos coeficientes de arrasto e sustentação e no número de Strouhal de um escoamento laminar entre placas planas ao redor de um corpo cilíndrico. O método numérico utilizado para obtenção dos campos fluidodinâmicos dos escoamentos foi o método de lattice Boltzmann. Diferentes casos foram simulados em dependência com o número de Reynolds (entre 20 e 90), para diferentes razões de bloqueio: 0,4, 0,5 e 0,6. Os resultados obtidos com as simulações demonstram que a razão de bloqueio aumenta os valores do coeficiente de arrasto, do número de Reynolds crítico para transição do regime permanente para o regime de desprendimento de vórtices periódico, e que retardam a convergência para o estado de desprendimento de vórtice periódico. Em seguida, os dados obtidos foram utilizados juntamente com o caso da literatura para escoamento livre para se determinar uma expressão simplificativa para o coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds e da razão de bloqueio.

**Palavras-chave:** escoamento ao redor de um cilindro, razão de bloqueio, coeficiente de arrasto, método de lattice Boltzmann, número de Reynolds moderado

**Study of blockage ratio effects on a laminar flow around a cylinder via lattice Boltzmann method**

**Abstract.** This work aims to perform a numerical study of the influence of the blockage ratio on the drag and lift coefficient and Strouhal number, for a laminar flow between flat plates around a cylindrical body. The numerical method used to obtain the pressure and velocity field was the lattice Boltzmann method. In order to compare the results flow with Reynolds number of 20, 40, 60, 75 and 90 were simulated for three different blockage ratios, 0,4, 0,5 and 0,6. The results obtained with the simulations show that the blockage ratio increases the drag coefficient, the critical Reynolds number to the transition of the steady state to the periodic vortex shedding state, and that it delays the convergence to the periodic vortex shedding state. Next the drag coefficient results obtained from the simulations with different Reynolds number and blockage ratios were used to extrapolate the influence of the blockage ratios tending to zero in the drag coefficient.

**Keywords:** flow around a cylinder, blockage ratio, drag coefficient, lattice Boltzmann method, moderate Reynolds number.

## NOMENCLATURA

### Símbolos

$c_i$	Conjunto de velocidades discretas	[–]
$C_D$	Coefficiente de arrasto	[–]
$C_L$	Coefficiente de sustentação	[–]
$c_s$	Velocidade do som na rede	[ <i>unidade de distância/</i> <i>unidade de tempo</i> ]
$D$	Diâmetro do cilindro	[ <i>unidade de distância</i> ]
$f_i$	Função de distribuição de velocidades discretas	[ <i>unidade de massa/</i> <i>(unidade de distância)<sup>2</sup></i> ]
$f_i^{eq}$	Função de distribuição de velocidades discretas em equilíbrio	[ <i>unidade de massa/</i> <i>(unidade de distância)<sup>2</sup></i> ]
$f_i^{neq}$	Função de distribuição de velocidades discretas não em equilíbrio	[ <i>unidade de massa/</i> <i>(unidade de distância)<sup>2</sup></i> ]
$f_i^*$	Função de distribuição de velocidades discretas pós colisão	[ <i>unidade de massa/</i> <i>(unidade de distância)<sup>2</sup></i> ]
$f_s$	Frequência de desprendimento de vórtice	[Hz]
$\mathbf{F}$	Vetor força	[N]
$Ma$	Número de Mach	[–]
$N_t$	Correção de momento transversal	[–]
$p$	Campo escalar de pressão	[N/ <i>(unidade de distância)<sup>2</sup></i> ]
$Re$	Número de Reynolds	[–]
$St$	Número de Strouhal	[–]
$t$	Tempo	[ <i>unidade de tempo</i> ]
$\mathbf{t}$	Vetor unitário tangente ao contorno	[ <i>unidade de distância</i> ]
$\mathbf{u}$	Campo vetorial de velocidade	[ <i>unidade de distância/</i> <i>unidade de tempo</i> ]
$U_\infty$	Velocidade média de escoamento livre	[ <i>unidade de distância/</i> <i>unidade de tempo</i> ]
$\mathbf{x}$	Vetor posição	[ <i>unidade de distância</i> ]
$w_i$	Coefficientes de ponderação	[–]
$H$	Distância entre as paredes laterais	[ <i>unidade de distância</i> ]

## Símbolos Gregos

$\beta$	Razão de bloqueio	[—]
$\nu$	Viscosidade cinemática	$[(\textit{unidade de distância})^2 / \textit{unidade de tempo}]$
$\rho$	Massa específica	$[\textit{unidade de massa} / (\textit{unidade de distância})^2]$
$\mu$	Viscosidade Dinâmica	$[(N / (\textit{unidade de distância})^2) \textit{unidade de tempo}]$
$\tau$	Tempo de relaxação	$[\textit{unidade de tempo}]$
$\Omega$	Operador de Colisão	[—]

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	5
1.1 Objetivo .....	6
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	6
2.1. Escoamento ao redor de um cilindro .....	6
2.2. Coeficiente de arrasto e sustentação .....	7
2.3 Número de Strouhal.....	8
2.4 Razão de Bloqueio.....	8
3. METODOLOGIA.....	8
3.1 Método de <i>lattice</i> Boltzmann .....	8
3.1.1 Passo temporal.....	10
3.1.2 Condições de contorno .....	10
3.1.2.1 Condição de não-deslizamento: <i>Bounce Back Link-wise</i> .....	11
3.1.2.2 Condição de não deslizamento: <i>NEBB</i> .....	11
3.1.2.3 Condição de contorno aberto: <i>entrada</i> .....	12
3.1.2.4 Condição de contorno aberto: <i>saída</i> .....	12
3.1.3 Método da troca de momento .....	12
3.1.4. Convergência e estabilidade .....	12
3.1.5. Independência de malha e validação do código .....	13
3.2. Número de Strouhal.....	14
3.3. Obtenção de propriedades fora dos pontos do <i>lattice</i> .....	14
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	15
4.1 Validação numérica .....	15
4.2. Campos de velocidade .....	16
4.3 Parâmetros do escoamento .....	17
5. CONCLUSÃO.....	20

## 1. INTRODUÇÃO

O escoamento através de corpos rombudos é um problema clássico da dinâmica de fluidos, especialmente através cilindros circulares. Este problema pode ser encontrado em uma série de aplicações práticas da engenharia, como na instrumentação de sensores que obstruem a escoamento livre de um fluido para obtenção de alguma propriedade do escoamento, na mensuração de forças hidrodinâmicas exercidas sobre canalizações *off-shore* e em estruturas de sustentação, em processos industriais que envolvam transferência de calor e mistura de fluidos.

A frequência (número de Strouhal) e amplitude (coeficiente de sustentação) das oscilações da força de sustentação atuando no corpo rombudo devido ao início do desprendimento de vórtices pode ser um fator crítico do ponto de vista de engenharia, uma vez que estas oscilações podem gerar ruído e também induzir vibração no corpo rombudo. Ao mesmo tempo que o regime de desprendimento de vórtices pode ser prejudicial de um ponto de vista estrutural, do ponto de vista de transferência de calor e massa ele é benéfico, uma vez que este regime aumenta a eficiência de troca de calor entre fluido e sólido ou entre dois ou mais fluidos, e também promove um aumento da mistura em escoamentos multifásicos (particulado-fluido e fluido-fluido). Desta maneira, é de interesse conhecer formas de modificar as características dinâmicas do escoamento para favorecer ou mitigar um fenômeno de interesse.

Existem duas maneiras de modificar as características dinâmicas de um escoamento: ativa e passivamente. Alguns exemplos de maneiras ativas de controle das características dinâmicas do escoamento são escoamento de sucção, oscilação da posição do cilindro no escoamento, escoamento de entrada pulsante e controle da camada limite. Todas estas técnicas citadas conseguem modificar a dinâmica do escoamento, mas necessitam de instrumentos de medição em tempo real para uma resposta ativa ao comportamento do escoamento e não são de fácil implementação em problemas de engenharia. A utilização de maneiras passivas se trata do uso do conhecimento dos parâmetros de escoamento e de como eles influenciam a dinâmica do escoamento para projetar uma configuração que atenda aos requisitos de engenharia necessários e que suprima ao máximo os efeitos indesejados do escoamento.

De acordo com o efeito das paredes que delimitam o domínio do escoamento, o escoamento sobre corpos rombudos pode ser dividido em dois grupos: escoamentos livres e escoamentos internos. Quando comparadas as características dinâmicas entre eles, nota-se que para os escoamentos internos tais características não dependem unicamente da geometria do corpo rombudo e do número de Reynolds, pois a razão de bloqueio  $\beta = D/H$ , onde  $D$  é o diâmetro do cilindro, e  $H$  distância entre as paredes laterais, passa a ter influência sobre tais características.

No caso de escoamentos internos, a razão de bloqueio pode ser considerada um parâmetro de controle, pois ela tem influência significativa na dinâmica do escoamento se tratando de desprendimento de vórtices, coeficiente de sustentação e de arrasto. Além disso, ela contribui para a identificação do número de Reynolds crítico que caracteriza o início das esteiras de von Kármán e posteriormente a tridimensionalização das mesmas atrás do obstáculo. Neste sentido, Chakraborty (2004), por exemplo, realizou simulações numéricas para várias razões de bloqueio ( $\beta < 0,65$ ) e números de Reynolds ( $0.1 < Re < 200$ ) a fim de avaliar a mudança no comportamento hidrodinâmico do escoamento em função destes parâmetros. Ele constatou que o coeficiente de arrasto aumenta com o aumento da razão de bloqueio para um mesmo número de Reynolds.

Posteriormente, Singha (2010) estudou os mesmos efeitos da razão de bloqueio ( $0,125 \leq \beta \leq 0,5$ ) para escoamentos em canal ao redor de um cilindro, para casos com



números de Reynolds de 45, 100, 150, 200 e 250. Naquele estudo, o autor mostrou que o número de Strouhal e o coeficiente de arrasto aumentam significativamente com o aumento da razão de bloqueio, e que a partir de uma determinada razão de bloqueio estes parâmetros deixam de ser dependentes do número de Reynolds. Além disso, ele demonstrou que a amplitude do coeficiente de sustentação diminui consideravelmente com o aumento da razão de bloqueio, e que da mesma forma os ângulos de separação também diminuem, reduzindo o tamanho geral da zona de recirculação atrás do cilindro.

Aumentando a complexidade do problema, Prasad e Paramane (2011) estudaram o efeito da razão de bloqueio ( $0 \leq \beta \leq 0,5$ ) para escoamentos em um canal ao redor de um cilindro ( $37 < Re < 170$ ) quando o mesmo apresenta rotação prescrita e paredes a uma temperatura constante. Os autores concluíram que com o aumento da razão de bloqueio o número de Strouhal também aumenta, apontando que tais efeitos adicionais não alteram o comportamento de Strouhal em função de  $\beta$ . Além disso, os autores constataram que o aumento da razão de bloqueio aumenta significativamente o fator de acréscimo da transferência de calor entre o as paredes do cilindro e o escoamento.

Já em estudos com alta razão de bloqueio, Mishra (2021) avaliou os efeitos da razão de bloqueio em um escoamento ao redor de um cilindro para o caso crítico de  $\beta = 0,9$ , e números de Reynolds entre 4 e 100. Ele constatou que a uma alta razão de bloqueio atua como um estabilizador do escoamento e também como um agente retardante das transições essenciais de regime. Neste mesmo estudo, o autor também demonstrou que o decaimento do coeficiente de arrasto para escoamento com alta razão de bloqueio ocorre muito mais rapidamente do que em escoamentos onde a razão de bloqueio tende a zero.

## 1.1 Objetivo

O presente trabalho tem por objetivo estudar numericamente o comportamento das características dinâmicas do escoamento interno ao redor de um corpo rombudo cilíndrico para diferentes razões de bloqueio e diferentes números de Reynolds, em condições laminares, empregando método de *lattice* Boltzmann.

Mais especificamente, este trabalho pretende atingir o objetivo geral através das seguintes tarefas:

- Simulação dos escoamentos variando número de Reynolds e razão de bloqueio;
- Obtenção dos coeficientes de sustentação e arrasto a partir das simulações;
- Análise temporal do coeficiente de sustentação para obtenção do número de Strouhal.

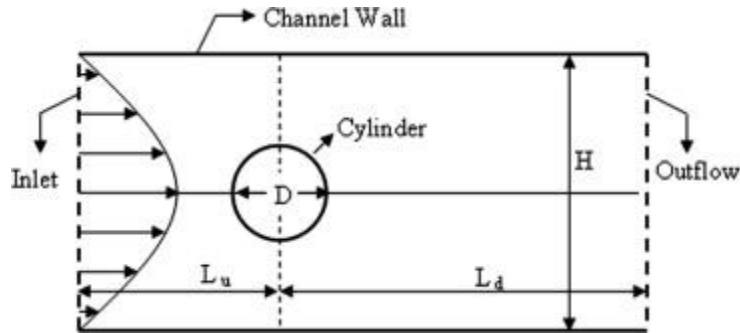
Após a obtenção dos dados para todas as configurações de interesse, entender e mensurar a influência da razão de bloqueio nas características dinâmicas do escoamento e propor uma função que identifica o comportamento destas características com dependência da razão de bloqueio.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. Escoamento ao redor de um cilindro

O problema estudado é o escoamento bidimensional, confinado entre duas placas planas, sobre um cilindro, em regime laminar oscilatório de desprendimento de vórtices. Este fenômeno será avaliado em diferentes configurações, variando a razão de bloqueio,  $\beta$ , e o número de Reynolds,  $Re$ . A Tabela 1 mostra a combinação de razão de bloqueio e número de Reynolds de cada caso estudado, e também o valor da velocidade máxima do perfil parabólico utilizado em cada um dos casos.

Figura 1: Domínio do problema



Fonte: KRÜGER et al., 2017.

O escoamento laminar de um determinado fluido, de massa específica  $\rho$  e viscosidade dinâmica  $\mu$ , com velocidade média de entrada  $\bar{U}$ , de tamanho característico  $D$ , possui um parâmetro característico que determina a configuração de diferentes regimes: o número de Reynolds,

$$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu} \quad (1)$$

onde  $\nu = \rho/\mu$  é a viscosidade cinemática do fluido escoante.

As diferentes configurações de regimes laminares que ocorrem em um escoamento ao redor de um cilindro para o caso em que as paredes do domínio não tem influência nos campos fluidodinâmicos do escoamento são: escoamento laminar rastejante ( $0 < Re < 4$ ), escoamento laminar com separação uniforme ( $4 < Re < 48$ ), escoamento laminar com desprendimento de vórtice periódico ( $48 < Re < 180$ ), regime de transição onde a instabilidades tridimensionais da turbulência começam a aparecer ( $180 < Re < 400$ ) (BLEVINS, 1998).

## 2.2. Coeficiente de arrasto e sustentação

A força exercida sobre um corpo devido ao escoamento de um fluido pode ser calculada com integral de todas as tensões atuando na superfície do corpo,

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \{-p\mathbf{I} + \rho\nu[(\nabla:\mathbf{u}) + (\nabla:\mathbf{u})^T]\} \quad (2)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor normal unitário em relação a superfície  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{u}$  é o campo vetorial das velocidades,  $p$  é o campo de pressão e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

A partir desta força, é possível decompô-la em componentes nos sentidos tangente ao escoamento ( $F_x$ ) e perpendicular ao escoamento ( $F_y$ ), e calcular os coeficientes de arrasto  $C_D$  e sustentação  $C_L$  através das Eq. (3) e (4):

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2 A_f} \quad (3)$$

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 A_f} \quad (4)$$

onde  $A_f$  é a área de projeção frontal do corpo rombudo.

### 2.3 Número de Strouhal

O número de Strouhal (Eq. (5)) é um parâmetro adimensional comumente utilizado para mensurar a frequência de desprendimento  $f_s$  de vórtices no escoamento a partir do cilindro.

$$St = \frac{f_s D}{\bar{U}} \quad (5)$$

### 2.4 Razão de Bloqueio

A razão de bloqueio,  $\beta$ , para o caso de um escoamento ao redor de um cilindro em um canal é dada pela Equação 6. A influência da razão de bloqueio nos campos fluidodinâmicos do escoamento várias de acordo com a magnitude da razão de bloqueio, Zdravkovich (2007) classificou os efeitos da razão de bloqueio nos campos fluidodinâmicos do escoamento da seguinte maneira.

- $\beta \leq 0,1$ : a influência da razão de bloqueio não precisa ser levada em consideração;
- $0,1 < \beta \leq 0,6$ : os efeitos da razão de bloqueio devem ser levados em consideração e é necessária utilização de fatores de correção nos parâmetros calculados.
- $0,6 < \beta \leq 1$ : os efeitos da razão de bloqueio são muito acentuados e não faz sentido a utilização de fatores de correção para os parâmetros calculados.

$$\beta = \frac{D}{H} \quad (6)$$

## 3. METODOLOGIA

### 3.1 Método de *lattice* Boltzmann

O método de *lattice* Boltzmann possui uma base física robusta, pois a sua derivação é feita a partir da equação de Boltzmann, que descreve a dinâmica de gases na escala mesoscópica. Existe uma série de métodos para relacionar as propriedades mesoscópicas com propriedades macroscópicas, e o mais utilizado é a análise de Chapman-Enskog (KRÜGER, 2017), que demonstra que a resolução da equação de *lattice* Boltzmann corresponde a resolução da equação de Navier-Stokes.

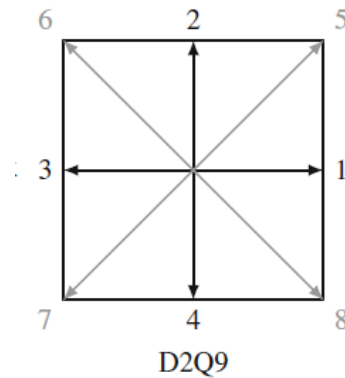
A variável básica da equação de *lattice* Boltzmann é a função de distribuição de velocidades discretas  $f_i(\mathbf{x}, t)$ , também chamada de população de partículas. Da mesma forma que a função de distribuição da equação de Boltzmann, ela representa a densidade de partículas com velocidade  $\mathbf{c}_i = (c_{ix}, c_{iy}, c_{iz})$  na posição  $\mathbf{x}$  e tempo  $t$ . A massa específica e o momento linear em  $(\mathbf{x}, t)$  são obtidas através da soma e da soma ponderada da função de distribuição de velocidade discretas, respectivamente:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

As velocidades discretas  $\mathbf{c}_i$  junto com o conjunto correspondente de coeficientes de ponderação  $w_i$ , formam o conjunto de velocidades. Diferentes conjuntos de velocidade servem para diferentes propósitos. Neste trabalho será utilizado o conjunto D2Q9, onde D2 representa o número de dimensões espaciais do problema, e Q9 o número de velocidades discretas.

Figura 2: Velocidade discreta D2Q9



Fonte: KRÜGER et al., 2017.

Tabela 1: Coeficiente de ponderação e sentido componente de velocidade para cada sentido

$I$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	4/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/36	1/36	1/36	1/36
$c_{ix}$	0	1	0	-1	0	1	-1	-1	1
$c_{iy}$	0	0	1	0	-1	1	1	-1	-1

A equação de Boltzmann, após ser discretizada no espaço das velocidades, no espaço físico e no tempo, resulta na equação de *lattice* Boltzmann:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega(\mathbf{x}, t) \quad (9)$$

O operador de colisão  $\Omega(\mathbf{x}, t)$  representa fisicamente a tendência da população  $f_i$  se aproximar do estado de equilíbrio  $f_i^{eq}$  após um tempo  $\tau$  (tempo de relaxação), e sua propriedade mais importante é garantir a conservação de massa e momento. O operador de colisão mais simples possível é uma função linear de  $f_i$  e  $f_i^{eq}$ , conhecido como operador de colisão *Bhatnagar-Gross-Krook* (BGK), devido ao nome de seus inventores (BHATNAGAR; GROSS; KROOK, 1954), conforme identifica a Eq. (10).

$$\Omega_i = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau} \quad (10)$$

Finalmente, equação de *lattice* Boltzmann com o operador BGK pode ser escrita como:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau} \quad (11)$$

onde a função de equilíbrio é dada por:

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left( 1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_i}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_i)^2}{2c_s^4} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right) \quad (12)$$

A constante  $c_s^2$  na equação de lattice Boltzmann isotérmica pode ser determinada através da relação  $p = c_s^2 \rho$ , e  $c_s^2 = 1/3$ . Com os parâmetros estabelecidos, pode-se relacioná-los com a viscosidade cinemática através de:

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \quad (13)$$

### 3.1.1 Passo temporal

A equação de *lattice* Boltzmann BGK pode ser dividida em duas etapas sucessivas: colisão e propagação.

A colisão é uma operação local e puramente algébrica, na qual  $f_i^*(\mathbf{x}, t)$  representa a população após a colisão:

$$f_i^*(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau} \quad (14)$$

Na etapa de propagação as populações pós colisão são propagadas ao longo de suas velocidades  $\mathbf{c}_i$  até os pontos de rede vizinhos, conforme indica a Eq. (15).

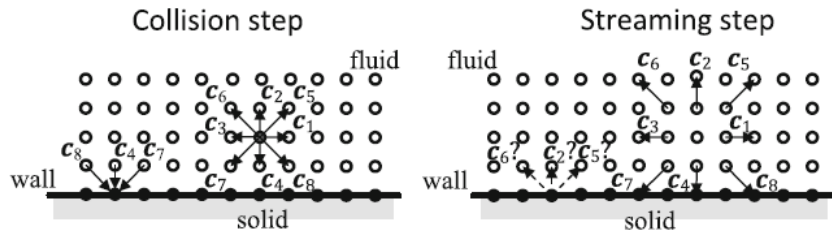
$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

### 3.1.2 Condições de contorno

Na equação de *lattice* Boltzmann, as condições de contorno devem ser aplicadas nos nós de fronteira que tenham pelo menos uma ligação com um nó sólido e um nó fluido. Diferentemente das condições de contorno aplicadas nas equações de Navier-Stokes, definir apenas as variáveis macroscópicas de interesse não é suficiente, pois a condições de contorno da equação de *lattice* Boltzmann deve ser aplicada nas populações  $f_i$ , que possuem mais graus de liberdade que o conjunto de variáveis macroscópicas.

A grande dificuldade com os nós de contorno é que após a propagação, as populações que apontam em direção ao domínio não são especificadas, como ilustra a figura 4. Em razão disso, estas populações devem ser tratadas de maneira especial e determinadas por um grupo diferente de regras.

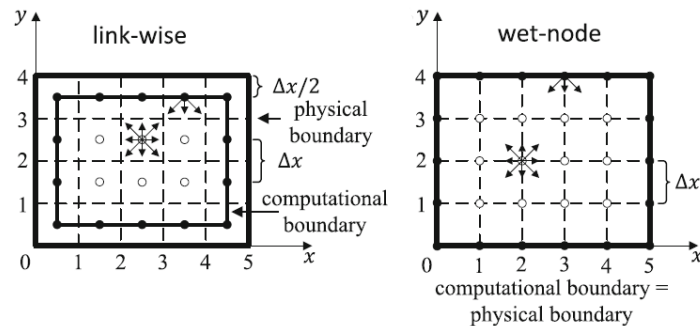
Figura 3: Colisão e propagação das populações



Fonte: KRÜGER et al., 2017.

Além disso, as condições de contorno podem ser divididas em duas categorias no que diz respeito à sua localização da fronteira entre sólido e fluido, como ilustra a figura 5.

- *Link-wise*: o contorno se encontra na ligação dos *lattices*;
- *Wet-node*: o contorno se encontra no nós dos *lattices*.

Figura 4: Diferença entre condições de contorno *link-wise* e *wet-node*

Fonte: KRÜGER et al., 2017.

### 3.1.2.1 Condição de não-deslizamento: *Bounce Back Link-wise*

A ideia básica da condição de *bounce-back* é que as populações que atingem a parede durante a propagação devem ser refletidas para onde elas vieram originalmente. A condição de *bounce-back* nas paredes implica zero fluxo de momento através do contorno, e a população retornar ao local de origem ao invés de ser refletida para frente implica zero movimento relativo transverso entre o contorno e o fluido.

Para as populações onde a condição de *bounce-back* é imposta, a propagação é substituída por:

$$f_i(\mathbf{x}_b, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

### 3.1.2.2 Condição de não deslizamento: *NEBB*

A condição de contorno *Non-Equilibrium Bounce-Back* (NEBB) é do tipo *wet-node* e foi proposta por Zou e He (1997), comumente sendo referenciada pelo nome de seus inventores (condição de Zou-He).

A base desta condição de contorno é fornecer valores para as populações desconhecidas no contorno aplicando o método de *bounce-back* para a porção de não-equilíbrio  $f_i^{neq}$ :

$$f_i^{neq}(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

$$f_i^{neq}(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

Para garantir que a velocidade tangencial à parede obtenha o valor desejado é necessário adicionar um termo que correlacione às propriedades macroscópicas da parede com as populações do contorno. Este novo termo é chamado de correção de momento transversal  $N_t$ , onde  $\mathbf{t}$  é o vetor unitário tangente ao contorno, que corrige a população:

$$f_i^{neq}(\mathbf{x}, t) = f_i^{neq}(\mathbf{x}, t) - \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{c}_i}{|\mathbf{c}_i|} N_t \quad (19)$$

### 3.1.2.3 Condição de contorno aberto: entrada

Para condições de contorno do tipo *wet-node*, a aplicação de condições de contorno de velocidade de entrada pode ser feita utilizando o mesmo método utilizado para aplicar condição de não deslizamento. Desta maneira, para aplicação da condição de contorno de velocidade prescrita na entrada é utilizado o método *Non-Equilibrium Bounce-Back* (NEBB).

### 3.1.2.4 Condição de contorno aberto: saída

Para condição de contorno de saída é utilizada a condição *Non-Equilibrium Extrapolation Method*, que extrapola a parte de não equilíbrio do nó fluido mais próximo para o contorno, da seguinte maneira:

$$f_i(\mathbf{x}_b, t) = f_i^{eq}(\mathbf{x}_b, t) + \left( f_i(\mathbf{x}_f, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}_f, t) \right) \quad (20)$$

### 3.1.3 Método da troca de momento

Utilizar o método de integração das tensões ao longo da superfície do cilindro para obtenção da força total sendo exercida no cilindro devido ao escoamento de um fluido não é abordagem mais precisa e nem a mais fácil quando o método de *lattice Boltzmann* é empregado para obtenção dos campos hidrodinâmicos, como mostrado por Yu *et al* (2003). Uma nova abordagem para obtenção das forças atuando em um corpo devido ao escoamento passando ao redor do mesmo, exclusiva para o método de *lattice Boltzmann*, foi desenvolvida por Ladd (2001), o método da troca de momento. Neste método, a força atuando em um corpo devido ao escoamento de um fluido é dada por:

$$\mathbf{F} = \sum_{\text{all } \mathbf{x}_b} \sum_{i>0} \mathbf{c}_i [f_i^*(\mathbf{x}_b, t) + f_i^*(\mathbf{x}_b + \mathbf{c}_i \Delta t, t)] [1 - w(\mathbf{x}_b + \mathbf{c}_i \Delta t)] \quad (21)$$

onde  $w(\mathbf{x}_b + \mathbf{c}_i \Delta t)$  é um indicador, que assume o valor de 0 quando  $\mathbf{x}_b + \mathbf{c}_i \Delta t = \mathbf{x}_f$  e 1 quando  $\mathbf{x}_b + \mathbf{c}_i \Delta t = \mathbf{x}_b$ .

### 3.1.4. Convergência e estabilidade

Assim como todos os métodos numéricos, o método de *lattice Boltzmann* deve atender uma série de requisitos para garantir a convergência e precisão dos resultados obtidos. Para o operador de colisão BGK, uma condição suficiente para a estabilidade da

simulação é que a função de distribuição de equilíbrio de todas as populações seja maior que zero (KRÜGER, 2017), e isso pode ser obtido garantindo que  $\tau/\Delta t > 1/2$ . Outra maneira de compreender esta condição de estabilidade é analisando as propriedades macroscópicas ao invés das funções de distribuição de equilíbrio, uma vez que as funções de equilíbrio são funções das velocidades macroscópicas. Desta maneira, tem-se uma condição de estabilidade para o operador de colisão BGK D2Q9 em que:

$$|\mathbf{u}_{max}| < \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad (22)$$

Outro parâmetro fundamental para garantir a estabilidade do método de *lattice* Boltzmann é a ordem de grandeza do número de Mach, pois as equações apresentadas até o momento consideram um escoamento incompressível. O número de Mach do *lattice*, definido como  $Ma = U_{\infty}/c_s^2$ , é considerado pequeno quando  $Ma < 0,3$ . Desta forma é garantido que os erros devido a compressibilidade do fluido podem ser desconsiderados.

### 3.1.5. Independência de malha e validação do código

Para garantir a validade dos resultados obtidos com as simulações numéricas é necessário garantir que estes resultados sejam independentes das dimensões da malha. A simulação base utilizada para realizar o estudo dos efeitos do refino da malha é a simulação do escoamento sem o corpo cilíndrico (Poiseuille plano) com número de Reynolds igual a 100. As condições de contorno para esta simulação estão apresentadas na tabela 2.

Tabela 2: Condições de contorno utilizadas na simulação do escoamento de Poiseuille

<b>Região do domínio</b>	<b>Condição de contorno utilizada</b>
Paredes do canal (não deslizamento)	<i>Non-Equilibrium Bounce-Back</i>
Entrada (velocidade prescrita)	<i>Non-Equilibrium Bounce-Back</i>
Saída (pressão prescrita)	<i>Non-Equilibrium Extrapolation Method</i>

O parâmetro de referência para o estudo do efeito de malha foi o erro relativo percentual, dado pela Eq. 23. O erro é calculado entre a velocidade longitudinal máxima do perfil parabólico na entrada  $\hat{u}_{in}$ , que é imposta por uma condição de contorno e calculada utilizando a Eq. 24, e a velocidade máxima do perfil parabólico na saída  $\hat{u}_{out}$ , que é calculada na simulação. A tabela 3 mostra as configurações de malha que foram utilizadas.

$$Erro\ relativo = 100 \frac{|\hat{u}_{in} - \hat{u}_{out}|}{\hat{u}_{in}} \quad (23)$$

$$\hat{u}_{in} = \frac{3 Re \nu}{H} \quad (24)$$

Tabela 3: Dimensões das malhas utilizadas no estudo de independência de malha.

Malha 1	200 x 50
Malha 2	400 x 100



Malha 3	600 x 150
Malha 4	800 x 200

Para fins de validação do código, o escoamento de Poiseuille é simulado para quatro números de Reynolds diferentes (1, 20, 50 e 100) utilizando a malha selecionada no estudo de independência de malha. O parâmetro de referência utilizado para validação do código é o mesmo utilizado no estudo de independência de malha, o erro relativo percentual entre a velocidade máxima do perfil parabólico na entrada (condição de contorno) e a velocidade máxima do perfil parabólico na saída.

### 3.2. Número de Strouhal

A frequência de desprendimento de vórtice é obtida com uma análise dos valores temporais do coeficiente de sustentação em um intervalo de 3000 mil unidades de tempo adimensional após a convergência da simulação. Para obtenção desta frequência é utilizada a transformada rápida de Fourier, onde os valores de coeficiente de sustentação são convertidos do seu domínio original (tempo adimensional) para o domínio frequência. Após a obtenção da frequência de desprendimento de vórtice, a Eq. 5 é utilizada para calcular o número de Strouhal.

### 3.3. Obtenção de propriedades fora dos pontos do *lattice*

Para obtenção dos valores das propriedades macroscópicas ( $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ) fora dos pontos do *lattice* ( $\mathbf{x}_{int}$ ) é utilizado um esquema de interpolação, onde as propriedades macroscópicas dos quatro pontos ( $\mathbf{x}_{N1}$ ,  $\mathbf{x}_{N2}$ ,  $\mathbf{x}_{N3}$ ,  $\mathbf{x}_{N4}$ ) da rede mais próximos do ponto de interpolação são medianizadas com relação a distância deles do ponto de interpolação, conforme a Eq. (22).

$$\varphi(\mathbf{x}_{int}) = \frac{\sum_{i=1}^4 [\sqrt{2} - \|\mathbf{x}_{int} - \mathbf{x}_{Ni}\|]^2 \varphi(\mathbf{x}_{Ni})}{\sum_{i=1}^4 [\sqrt{2} - \|\mathbf{x}_{int} - \mathbf{x}_{Ni}\|]^2} \quad (25)$$

O fator  $\sqrt{2}$  é utilizado pois é a maior distância possível entre dois pontos de rede, e  $\varphi$  é a propriedade macroscópica genérica que está sendo interpolada.

As propriedades próximas a superfície do cilindro são interpoladas em pontos igualmente espaçados distribuídos ao longo de uma circunferência de raio igual ao raio do cilindro mais 5 unidades de comprimento ( $\mathbf{x}_{int,circ}$ ). Esse acréscimo no raio de interpolação é feito para suavizar as flutuações das propriedades macroscópicas próximo a superfície do cilindro, devido ao tipo de discretização espacial utilizada para representar o cilindro.

### 3.4. Casos de estudo

A Tabela 4 mostra a combinação de razão de bloqueio e número de Reynolds de cada caso estudado, e também o valor da velocidade máxima do perfil parabólico utilizado em cada um dos casos. Para todas as simulações são utilizadas as mesmas dimensões do domínio, e este domínio é tratado de forma adimensional. Para possibilitar a variação dos valores de razão de bloqueio é modificado o diâmetro do cilindro.

Tabela 4 – Valores de velocidade máxima para os perfis parabólicos de entrada para cada um dos números de Reynolds e razões de bloqueio estudados.

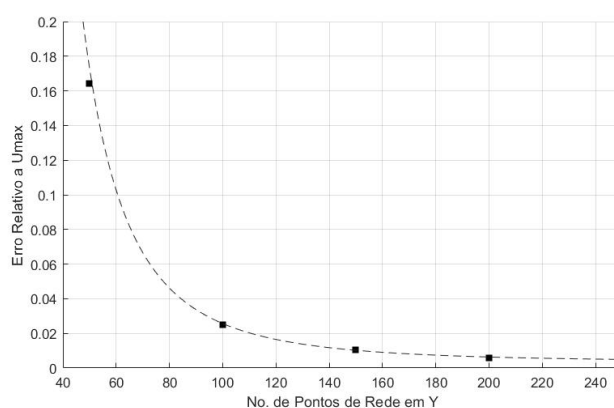
$\beta \backslash Re$	20	40	60	75	90	100
0,4	0,05125	0,10251	0,15376	0,19169	0,22962	
0,5	0,04100	0,08201	0,12301	0,15376	0,18452	0,20502
0,6	0,03485	0,06868	0,10251	0,12810	0,15376	

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Validação numérica

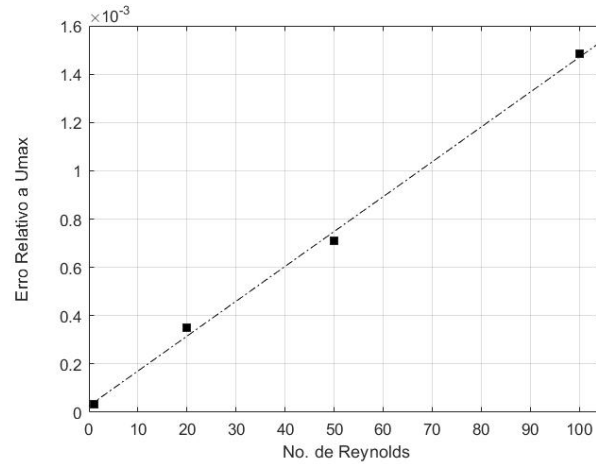
Os resultados do estudo de independência estão mostrados na Figura 5. Percebe-se que a redução do erro relativo entre a configuração de malha 3 e 4 não é grande, em razão disso considera-se que configuração de malha 4 é suficientemente refinada para garantir que os resultados obtidos com as simulações são independentes da discretização do domínio físico.

Figura 5: Erro relativo entre as velocidades máximas dos perfis parabólicos de entrada e saída em função das dimensões da malha utilizada para discretizar o domínio físico para um escoamento de Poiseuille.



Utilizando a configuração de malha 4, foi realizada um estudo de validação da implementação do código desenvolvido neste trabalho. Os resultados dos erros relativos para os diferentes números de Reynolds estão mostrados na Figura 6. Analisando a Figura 6, percebe-se que o erro relativo para o caso mais crítico,  $Re = 100$ , está na ordem de  $10^{-3}$ . Desta forma, é possível garantir a validade dos resultados das simulações do escoamento de Poiseuille, e estender esta validação para o problema estudado, o escoamento ao redor de um cilindro, uma vez que a malha e as condições de contorno são idênticas.

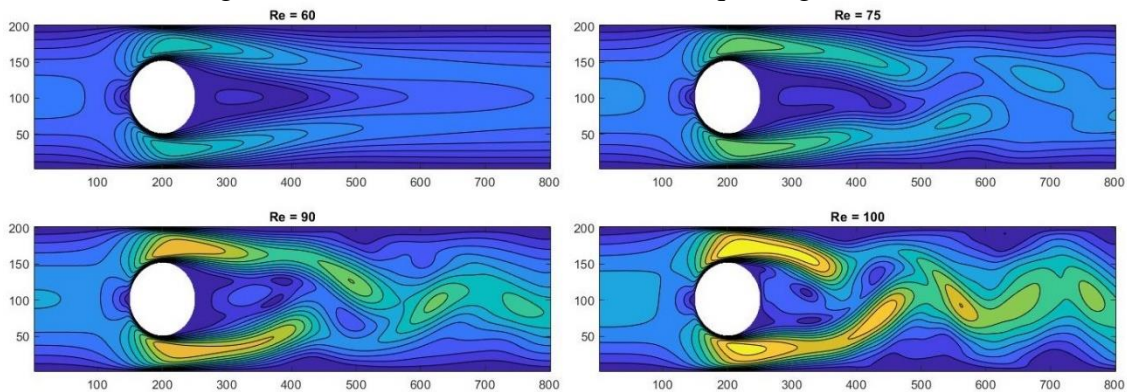
Figura 6: Erro relativo entre as velocidades máximas dos perfis parabólicos de entrada e de saída em função do número de Reynolds para um escoamento de Poiseuille.



## 4.2. Campos de velocidade

Partindo agora para a análise dos resultados obtidos para as simulações do problema de interesse deste trabalho, o escoamento em canal ao redor de um cilindro, observa-se que os campos fluidodinâmicos obtidos com as simulações na Figura 7.

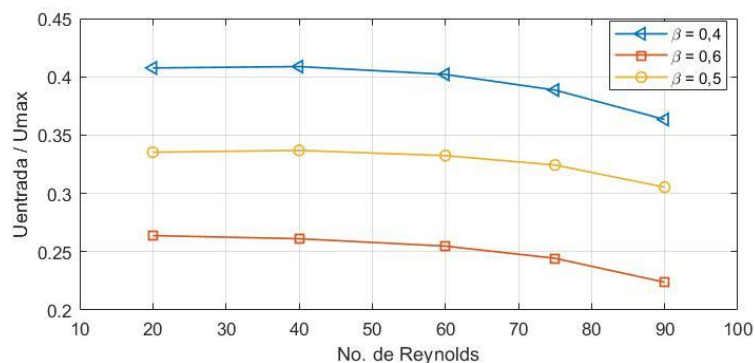
Figura 7: Contornos dos campos de velocidade dos casos com números de Reynolds iguais a 60, 75, 90 e 100 e razão de bloqueio igual a 0,5.



É percebida a formação de vórtice próximos as paredes que delimitam o domínio, de acordo com a Figura 7. Estas estruturas no campo hidrodinâmico são consequência da alta razão de bloqueio, pois em escoamentos que a razão de bloqueio tende a zero estas estruturas não se manifestam. Ainda, nota-se o aumento da velocidade do escoamento ao atravessar a região entre o cilindro e as paredes, para uma velocidade máxima  $\hat{u}$ . Este efeito parecer apresentar dependência de  $Re$ .

Buscando verificar a influência de  $Re$  e  $\beta$  sobre o campo de velocidade, avaliou-se a razão  $\hat{u}_{in}/\hat{u}$ . Analisando a figura 8 percebe-se que a razão  $\hat{u}_{in}/\hat{u}$  diminui quanto maior  $\beta$ , apontando um aumento significativo da velocidade máxima na região de estrangulamento devido ao aumento da razão de bloqueio. Percebe-se ainda que o aumento do  $Re$  acentua a influência da razão de bloqueio na velocidade máxima na região de estrangulamento, e que para  $Re < 60$ , ele possui pouca influência sobre  $\hat{u}_{in}/\hat{u}$ .

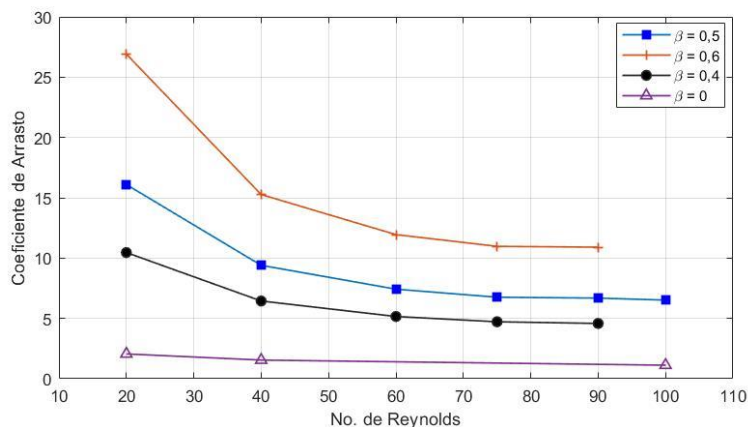
Figura 8: Curvas da razão  $\hat{u}_{in}/\hat{u}$  para os casos de razão de confinamento de 0,4 até 0,6 e número de Reynolds de 20 até 90.



### 4.3 Parâmetros do escoamento

Os primeiros resultados obtidos com as simulações numéricas são os valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação. O efeito da razão de bloqueio no coeficiente de arrasto pode ser analisado através da Figura 9, onde o eixo das abcissas é representado pelo número de Reynolds, calculado com a equação 1, e o eixo das ordenadas é o coeficiente de arrasto, e cada uma das curvas plotadas representa uma razão de bloqueio diferente. A curva do coeficiente de arrasto para o caso em que a razão de confinamento é igual a zero está plotada junto na Figura 9 para mostrar a influência da razão de bloqueio neste parâmetro.

Figura 9: Curvas de coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds para razões de bloqueio iguais a 0, 0,4, 0,5 e 0,6.



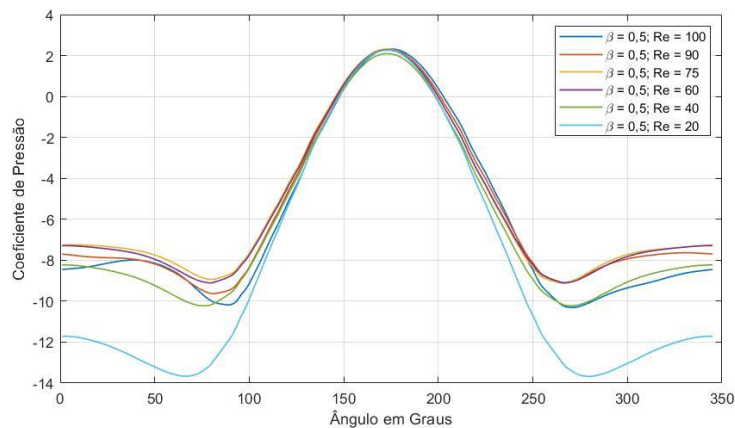
O primeiro aspecto que pode ser observado com o Figura 9 é que o bloqueio do escoamento resulta em um acréscimo no coeficiente de arrasto, o que já era esperado, uma vez que o bloqueio do escoamento implica em uma maior aceleração do escoamento livre. Além disso, é notado que os efeitos do bloqueio são mais acentuados em número de Reynolds mais baixos, uma vez que os coeficientes de arrasto para o número de Reynolds de 20 variam por um fator de 2,5 para razões de bloqueio de 0,6 para 0,4, enquanto para o número de Reynolds de 90 variam por um fator de 2.

Utilizando o coeficiente de pressão é possível obter a influência da razão de bloqueio na distribuição de pressão ao longo do cilindro. A Figura 10 demonstra o comportamento

da distribuição de pressão para diferentes números de Reynolds e uma razão de bloqueio de 0,5.

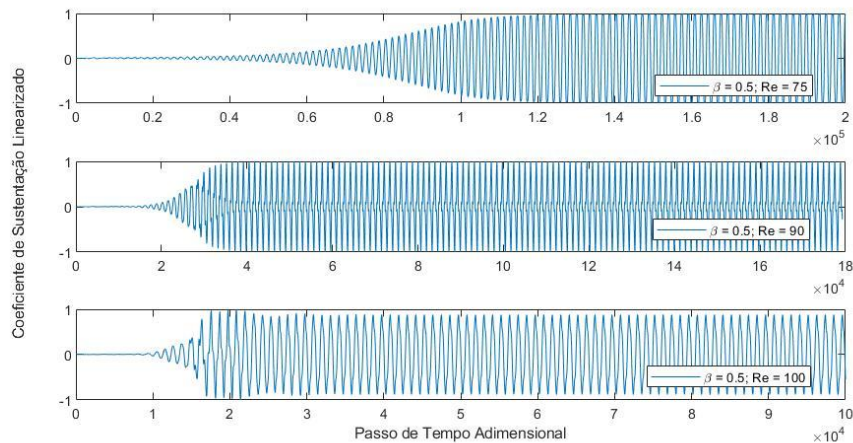
Analisando a Figura 10 percebe-se que a razão de bloqueio tem grande influência sobre a distribuição de pressão ao longo do cilindro em número de Reynolds menores. Desta maneira é possível concluir que a proximidade entre as paredes do domínio e o cilindro faz com que a pressão tenha uma maior influência na dinâmica do fenômeno mesmo em números de Reynolds mais baixos.

Figura 10: Curvas do coeficiente de pressão em função do ângulo ao redor do cilindro para números de Reynolds de 20 até 100 e razão de confinamento igual a 0,5.



Buscando entender a dinâmica da esteira, buscou-se avaliar a partir de  $C_L$  o desprendimento dos vórtices promovido pelo corpo cilíndrico. Os coeficientes de sustentação linearizados ao longo do tempo para o caso de razão de bloqueio igual a 0,5 estão mostrados na Figura 11.

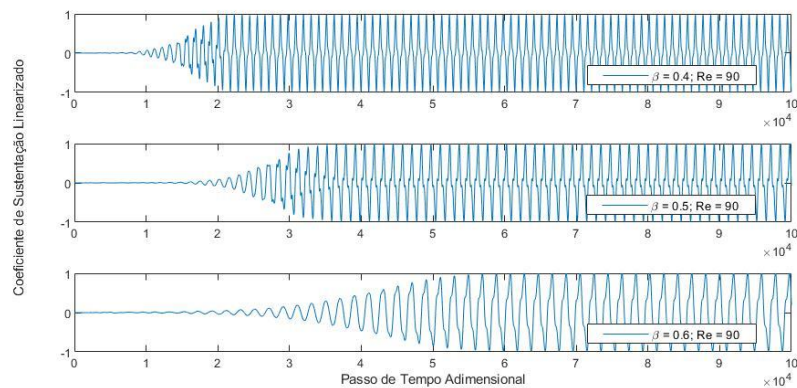
Figura 11: Curvas do coeficiente de sustentação em função do tempo para os casos com números de Reynolds 75, 90 e 100 e razão de bloqueio igual a 0,5.



Percebe-se que o tempo necessário para a convergência do fenômeno para o regime periódico de desprendimento de vórtice diminui com o aumento do número de Reynolds, como já era esperado. Além disso, a Figura 12 mostra o tempo necessário para a convergência para o regime periódico de desprendimento de vórtice para o mesmo número de Reynolds e diferentes razões de bloqueio. Analisando a Figura 12 nota-se que uma maior razão de bloqueio retarda a convergência para o regime periódico de desprendimento de vórtice, fato que contribui também para argumentação de que o

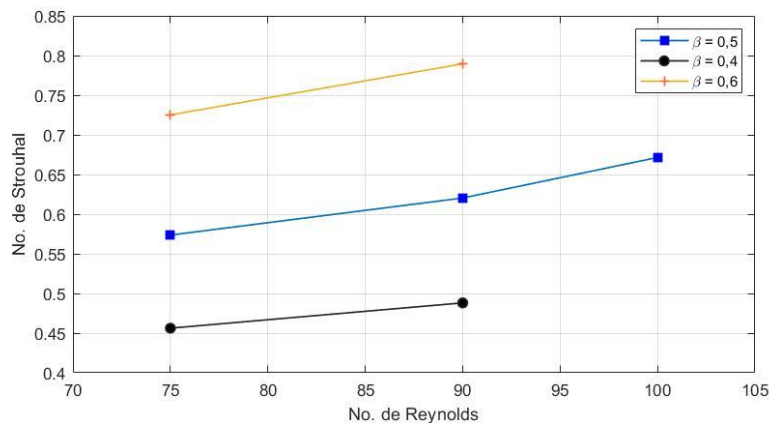
número de Reynolds crítico para a transição do regime permanente para o regime periódico de desprendimento de vórtice é aumentado com o aumento da razão de bloqueio. Este aumento no número de Reynolds crítico pode ser explicado também pelo aumento da velocidade de escoamento livre e pelas interações entre a zona de recirculação a montante do cilindro e os vórtices que se foram perto da parede.

Figura 12: Curvas de sustentação em função do tempo para casos com número de Reynolds igual a 90 e razões de confinamentos iguais a 0,4, 0,5 e 0,6.



Utilizando as curvas temporais dos coeficientes de sustentação para todos os diferentes casos de razão de bloqueio foi possível obter o número de Strouhal para cada uma das configurações, como mostra a Figura 13.

Figura 13: Curvas do número de Strouhal em função do número de Reynolds para razões de confinamento iguais a 0,4, 0,5 e 0,6.



A razão de bloqueio afeta o número de Strouhal de maneira a aumentá-lo, e isto pode ser explicado também pelo aumento da velocidade de escoamento livre. Para números de Reynolds dentro do regime permanente este aumento da velocidade de escoamento livre devido a razão de bloqueio dificulta a transição para o regime periódico de desprendimento de vórtice, porém, uma vez que a transição entre os regimes ocorre, o aumento da velocidade de escoamento livre aumenta também a frequência de desprendimento de vórtice.

Finalmente, é de interesse no âmbito da engenharia obter-se uma maneira de estimar a influência da razão de bloqueio no coeficiente de arrasto. Para isto, foram interpolados os valores de coeficientes de arrasto obtidos a partir das simulações deste trabalho, juntamente com valores de coeficiente de arrasto para escoamento livre obtidos por

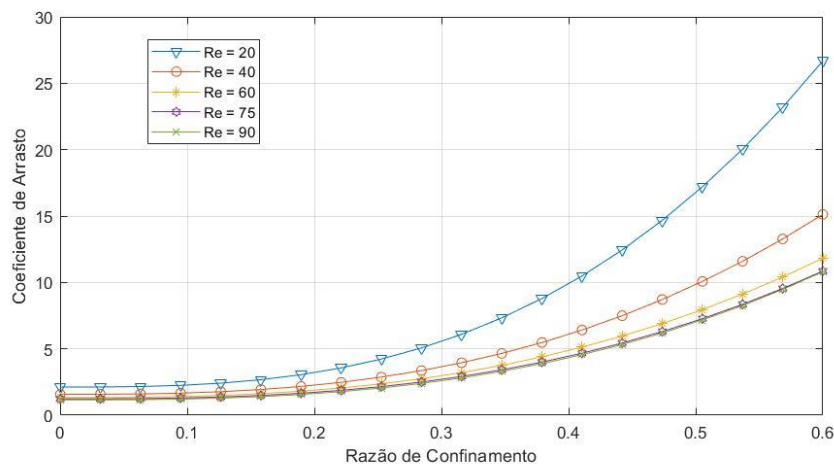
Dennis e Chang (1970), para obtenção de equações de coeficiente de arrasto para um número de Reynolds específico em função da razão de bloqueio. A equação de interpolação é apresentada pela Eq. (26) e os coeficientes de interpolação para cada um dos números de Reynolds está apresentado na tabela 5.

$$Cd(Re) = a(Re)^b + c \quad (26)$$

Tabela 5: Coeficientes de Interpolação utilizado para extrapolar os valores de coeficiente de arrasto para números de Reynolds iguais a 20, 40, 60, 75 e 90 e razões de confinamento entre 0 e 0,6.

<i>Re</i>	20	40	60	75	90
<i>a</i>	106,0	54,90	42,09	39,47	40,36
<i>b</i>	2,874	2,757	2,745	2,794	2,836
<i>c</i>	2,295	1,703	1,480	1,393	1,327

Figura 14: Curvas de extrapolação do coeficiente de arrasto em função da razão de confinamento para os números de Reynolds iguais a 20, 40, 60, 75 e 90.



A Figura 14 mostra o comportamento do coeficiente de arrasto para valores extrapolados de razão de bloqueio tendendo a zero. É possível perceber que a razão de bloqueio tem efeitos muito mais acentuados em número de Reynolds mais baixos, e também que os efeitos da razão de bloqueio tendem a ficar independentes do número de Reynolds com o aumento do mesmo.

## 5. CONCLUSÃO

A razão de bloqueio tem influência nos campos fluidodinâmicos e esta influência aumenta juntamente com o aumento da razão de bloqueio. As variações nos campos fluidodinâmicos afetam parâmetros do escoamento, como coeficientes de arrasto e sustentação, número de Reynolds crítico para transição do regime permanente para o regime periódico de desprendimento de vórtice, convergência para o regime periódico de desprendimento de vórtice e número de Strouhal.

O coeficiente de arrasto aumenta com o aumento da razão de bloqueio, e este aumento é mais significativo quanto menor o número de Reynolds. Além disso, a razão de bloqueio também atua de forma a aumentar o número de Reynolds crítico para a transição do regime permanente para o regime periódico de desprendimento de vórtice e retardar a convergência para o regime periódico de desprendimento de vórtice com o aumento da

razão de bloqueio para o mesmo número de Reynolds. O número de Strouhal também aumenta com o aumento da razão de bloqueio.

Os valores obtidos de coeficiente de arrasto para os diferentes números de Reynolds e diferentes razões de bloqueio foram utilizados como pontos de interpolação para obtenção de uma equação para extrapolar os valores de coeficiente de arrasto para razões de bloqueio maiores que 0 e menores que 0,6. As curvas obtidas com as diferentes equações obtidas com a interpolação foram plotadas em um gráfico de maneira que este gráfico pode ser utilizado como referência para estimar o grau de influência da razão de bloqueio no coeficiente de arrasto.

Para trabalhos futuros recomenda-se a implementação de uma condição de contorno para cilindro que utilize esquema de interpolação para localizar de forma mais precisa a localização geométrica da parede do cilindro em relação aos nós sólidos e fluidos da rede. Para continuação da investigação do assunto abordado neste trabalho, sugere-se estudar os efeitos da razão de bloqueio para escoamentos onde o cilindro tenha liberdade de movimento no sentido transversal ao escoamento ou liberdade de rotação, e também um estudo mais aprofundado dos números de Reynolds críticos.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. **Physics of Fluids**, [S.l.], v. 13, n. 11, out. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1399290>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [2] CHADIL, M.A; VINCENT, S; ESTIVALÈZES, J. L. Accurate estimate of drag forces using particle-resolved direct numerical simulations. **Acta Mech**, [S.l.], v. 230, p. 569–595, fev. 2019. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-018-2305-1>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [3] CHAKRABORTY, Jyoti; VERMA, N.; CHHABRA, R.P. Wall effects in flow past a circular cylinder in a plane channel: a numerical study. **Chemical Engineering and Processing: Process Intensification**, [S.l.] v. 43, n. 12, p. 1529-1537, 2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0255270104000212>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [4] D'ALESSIO, S.J.D. ; DENNIS. A vorticity model for viscous flow past a cylinder. **Computers & Fluids**, [S.l.], v. 23, n. 2, p. 279-293, 1994. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045793094900418>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [5] DHARMARAJ, A. P. *et al.* Lattice Boltzmann simulation of flow over a circular cylinder at moderate Reynolds number. **Thermal Science**, [S.l.], v. 18 n. 4, p. 1235-1246, 2014. Disponível em: Acesso em: 6 maio 2021.
- [6] DUCROCQ, Thomas *et al.* Flow and drag force around a free surface piercing cylinder for environmental applications. **Environmental Fluid Mechanics**, [S.l.], v. 17, p. 629–645, ago. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10652-016-9505-9>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [7] FIABANE, L.; GOHLKE, M.; CADOT, Olivier. Characterization of flow contributions to drag and lift of a circular cylinder using a volume expression of the fluid force. **European Journal of Mechanics - B/Fluids**, [S.l.], v. 30, n. 3, p.311-315, 2011. Disponível em: Acesso em: 6 maio 2021.
- [8] GUAN, Y. *et al.* Lattice Boltzmann simulation of flow past a spherical/non-spherical particle in a wide range of Reynolds number. **Advanced Powder Technology**, Leeds, v. 28 n. 6, p. 1486-1494, 2017. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/80840716.pdf>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [9] LADD, A.J.C.; VERBERG, R. Lattice-Boltzmann Simulations of Particle-Fluid Suspensions. **Journal of Statistical Physics**, [S.l.], v. 104, p. 1191–1251, set. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1010414013942>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [10] MEI, Renwei *et al.* Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry. **Phys. Rev. E**, [S.l.], v. 65, n. 4, abr. 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.041203>. Acesso em: 6 maio 2021.

- [11] OSTAPENKO Artem; BULANCHUK, Galina. Calculations of the drag coefficient of circular, square and rectangular cylinders using the lattice Boltzmann method with variable lattice speed of sound. **Afrika Matematika**, [S.l.], v. 29, p. 137-147, set. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s13370-017-0531-7>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [12] PERUMAL, D. Arumuga. Numerical Simulation of Viscous Flow over a Square Cylinder Using Lattice Boltzmann Method, **ISRN Mathematical Physics**, [S.l.], v. 2012, set. 2012. Disponível: <https://doi.org/10.2298/TSCI110908093A>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [13] REGULSKI, W.; SZUMBARSKI, J. Numerical simulation of confined flows past obstacles – the comparative study of Lattice Boltzmann and Spectral Element Methods. **Arch. Mech.**, [S.l.], v. 64, n. 4, p. 423-456, 2012. Disponível em: Acesso em: 6 maio 2021.
- [14] YU, D. *et al.* Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation. **Progress in Aerospace Sciences**, [S.l.], v. 39, n. 5, p. 329-367, 2003. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042103000034>. Acesso em: 6 maio 2021.
- [15] KRÜGER, Timm. **The Lattice Boltzmann Method: principles and practice**. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. 694 p. (1868-4513).
- [16] BEARMAN, P. W. Flow-Induced Vibration. By ROBERT D. BLEVINS. Van Nostrand Reinhold, 1977. 363 pp. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 89, n. 1, p. 206-207, 1978.
- [17] BHATNAGAR, P. L., GROSS, E. P.KROOK, M. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. **Physical Review**, v. 94, n. 3, p. 511-525, 1954.
- [18] ZOU, QISUHE, XIAOYI. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. **Physics of Fluids**, v. 9, n. 6, p. 1591-1598, 1997.
- [19] ZDRAVKOVICH, M. M. **Flow around circular cylinders**. Oxford: Oxford Univ. Press, 2007.
- [20] PRASAD, KAUSHAL, PARAMANE, SACHIN B.AGRAWAL, AMIT *et al.* Effect of Channel-Confinement and Rotation on the Two-Dimensional Laminar Flow and Heat Transfer across a Cylinder. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 60, n. 8, p. 699-726, 2011.
- [21] MISHRA, SHRAVAN KUMAR, SEN, SUBHANKARVERMA, AKHIL. Steady flow past a circular cylinder under large blockage. **European Journal of Mechanics - B/Fluids**, v. 87, p. 135-150, 2021.
- [22] SAMANTARAY, SAROJ KUMAR, MOHAPATRA, SOUMYA SANJEEBMUNSHI, BASUDEB. A numerical study of the wall effects for Newtonian fluid flow over a cone. **Engineering Science and Technology, an International Journal**, v. 20, n. 6, p. 1662-1675, 2017.

[23] LIU, KAI, DENG, JIANQIANGMEI, MEI. Experimental study on the confined flow over a circular cylinder with a splitter plate. **Flow Measurement and Instrumentation**, v. 51, p. 95-104, 2016.

[24] SINGHA, SINTUSINHAMAHA PATRA, K.P. Flow past a circular cylinder between parallel walls at low Reynolds numbers. **Ocean Engineering**, v. 37, n. 8-9, p. 757-769, 2010.

[25] MAHESHWARI, A., CHHABRA, R.P. BISWAS, G. Effect of blockage on drag and heat transfer from a single sphere and an in-line array of three spheres. **Powder Technology**, v. 168, n. 2, p. 74-83, 2006.