

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS

ESCOAMENTO COM ONDAS DE FRENTE ABRUPTA

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, Dezembro, 1991.

ESCOAMENTO COM ONDAS DE FRENTE ABRUPTA

Dissertação apresentada ao Instituto de  
Pesquisas Hidráulicas da UFRGS/RS  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Mestre em  
Ciências em Engenharia Hidráulica.

Autor: Hugo Dario Pasinato

Orientador: Professor Carlos Eduardo Morelli Tucci

## Resumo

Devido a mudanças súbitas da vazão num escoamento gradualmente variado num rio ou canal, apresentam-se ondas abruptas ou zonas de fluxo rapidamente variado. O tema apresenta interesse no aspecto prático em engenharia -como no caso do fluxo ocasionado pela ruptura de uma barragem- e teórico por tratar dos efeitos devido à não-linearidade do escoamento.

Neste estudo, fazendo uso da teoria de águas pouco profundas, analisou-se as características gerais do fenômeno e desenvolveu-se um programa computacional com as equações de Saint Vénant na forma conservativa, integradas numericamente com o esquema implícito de diferenças finitas de Preissmann.

Foram simulados experimentos observados em laboratório e problemas de ondas abruptas com solução analítica, em regime de fluxo subcrítico e supercrítico.

Do estudo são obtidas conclusões sobre o método de tipo "shock fitting" empregado e do esquema numérico implícito de diferenças finitas, para os casos de mudança de regime fluxo. São obtidas também conclusões, baseadas na estabilidade e precisão numérica da solução, sobre a necessidade ou não de iterar na resolução do sistema não-linear resultante das equações em diferenças, sobre os parâmetros de peso do esquema numérico e sobre os números de Courant mais apropriados ao cálculo.

## Abstract

Steep front waves or shockwaves occur when rapid, significant flow change take place in channels and rivers with otherwise gradually varied flow. The topic is important for its engineering aspects such as dambreak, and nonlinear effects of flow.

This study analyzes the general feature of the phenomenon and develops a model using the Saint Venant conservative form differential equations numerically solved with Preissmann implicit scheme.

Laboratory experiments and steep front waves with analytical solution in subcritical and supercritical flow regimes were solved.

Some conclusions about the shock fitting method and implicit scheme used when flow regime changes occur are discussed. The need to have, or not, an iterative Gauss resolution for resulting nonlinear difference equation, Preissmann parameters value and Courant numbers value, for accuracy and stability of solution, is also commented at some length.

## AGRADECIMENTOS

Desejo expressar minha sincera gratidão a meu orientador o Dr. Carlos E. Tucci pela sugestão do tema, orientação, deferência e tempo dispensado no desenvolvimento deste estudo.

À sociedade brasileira, mais precisamente aos anônimos trabalhadores brasileiros que, através da Instituição Governamental CAPES, tem me fornecido os recursos financeiros necessários para realizar este estudo, assim como todo o curso de Mestrado.

Ao corpo de Professores do Instituto de Pesquisas Hidráulicas da UFRGS pelo apoio e esclarecimento de dúvidas durante o Curso de Mestrado.

A meus colegas de curso que, com interesse, aceitaram a troca de idéias na discussões de temas técnicos.

A todo o corpo administrativo e funcionários do Instituto de Pesquisas Hidráulicas pela atenção e deferência na solução de problemas em relação a meu trabalho; em especial à Secretária do Curso de Pós-Graduação, Sra. Lygia Ourives Campos.

Ao meu prévio orientador ante o Conselho Nacional de Investigações Científicas e Técnicas da Argentina, Lic. Bernardo Falczuk, por ter facilitado o início deste estudo de Pós-graduação.

Por último, a meu irmão Humberto por seu leal apoio.

## Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Justificativa .....	1
1.2. Objetivos.....	2
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1. Introdução geral sobre fluxo com descontinuidades.....	3
2.2. Pesquisas e estudos na solução de problemas de fluxo com descontinuidades.....	5
2.3. Trabalhos aplicados na hidráulica.....	6
3. SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	11
3.1. Introdução.....	11
3.2. Equações de Saint Vénant na forma divergente .....	13
3.3. Equações de Saint Vénant na forma característica.....	16
3.4. Relações através de descontinuidades.....	20
4. ONDAS ABRUPTAS.....	27
4.1. Principais características das ondas abruptas.....	27
4.1.1. Campo de trajetórias características das ondas positivas e negativas.....	31
4.1.2. Evolução das ondas positivas e negativas.....	34
4.2. Solução de problemas de fluxo com descontinuidades.....	37
4.3. Problema de ruptura total e instantânea de barragem.....	42
5. MODELO NUMÉRICO.....	47
5.1.1. Forma discreta do sistema de equações divergentes de Saint Vénant .....	47
5.1.2. Formas discretas do sistema de equações características de Saint Vénant .....	47
5.2. Resolução do sistema de equações em diferenças .....	49
5.3. Solução numérica de descontinuidades .....	52
5.4. Estabilidade, consistência e convergência do esquema de Preissmann .....	56

6.RESULTADOS .....	58
6.1.Objetivos e limitações dos testes numéricos .....	58
6.2.Onda senoidal num canal com atrito e declividade.....	58
6.3.Problema de ruptura total e instantâneo de barragem .....	63
6.4.Ondas de frente abrupta com solução algébrica .....	65
6.5.Ondas abruptas de laboratório .....	71
7.CONCLUSÕES .....	77
-BIBLIOGRAFIA .....	79
-ANEXO A: Forma discreta das equações de Saint Venant .....	88
A1.Formas discretas das equações diferenciais divergentes .....	88
A2.Formas discretas das equações diferenciais características ....	90
A3.Relação através de uma descontinuidade.....	92
-ANEXO B:Comentário sobre a linearização do sistema de equações em diferenças resultante da discretização das equações de Saint Venant pelo esquema de Preissmann .....	93
-ANEXO C:Intensidade da propriedade energia mecânica num escoamento unidimensional num canal .....	95

LISTA DE SÍMBOLOS

$\underline{A}$ ,	matriz de coeficientes das equações de Saint Vénant
$A$ ,	área de uma seção de canal transversal ao escoamento
$a_i(t)$ ,	ponto no eixo $x$ que representa um plano vertical transversal ao escoamento, que contém as mesmas partículas de fluido em todo o tempo
$\underline{B}$ ,	vetor com termos independentes das equações de Saint Vénant
$b$ ,	largura a fio da água de uma seção transversal ao fluxo
$C^+, -$ ,	trajetórias características positivas e negativas
$c$ ,	celeridade de uma pequena perturbação superficial
$Cr$	número de Courant $\left[ (u \pm c) \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]$
$df$ ,	diferencial total de uma função ou variável $f$
$\Delta f$ ,	incremento de uma função ou variável $f$
$\xi(t)$ ,	ponto no eixo $x$ que representa um plano vertical transversal ao escoamento e que contém uma descontinuidade
$e$ ,	energia mecânica das partículas de fluido numa seção transversal ao fluxo
$E$ ,	energia mecânica total num sistema
$f$ ,	função de fluxo; velocidade, vazão, etc.
$f_{a, f}$ ,	função de fluxo atrás (a) ou na frente (f) de uma descontinuidade
$F_i$ ,	equação em diferenças; conservação da massa, quantidade de movimento linear, etc
$F$	número de Froude $\left[ \frac{u}{(gh)^{1/2}} \right]$
$\phi$ ,	parâmetro de peso no espaço do esquema numérico de Preissmann
$g$ ,	aceleração da gravidade
$G(f)$ ,	fluxo da propriedade $f$ ; massa, quantidade de movimento linear, etc.
$h$ ,	tirante hidráulico numa seção transversal ao fluxo
$h_0$ ,	tirante hidráulico característico num sub-trecho de canal
$\eta$ ,	variável que representa uma altura intermediária numa seção transversal, $0 < \eta < h$
$I_1$ ,	força correspondente à pressão hidrostática, nas eq. de Saint Vénant, numa seção transversal ao fluxo
$I_2$ ,	força correspondente à pressão hidrostática nas laterais do canal, nas eq. de Saint Vénant, devido a efeitos de expansão-contração da seção transversal
$\underline{I}$ ,	matriz identidade



$K$ ,	coeficiente de condução
$\lambda^{(i)}$ ,	autovalor $i$ , $i=1$ corresponde a $C^+$ , $i=2$ a $C^-$
$\ell^{(i)}$ ,	autovetor $i$ à esquerda, $i=1,2$ ; segundo os autovalores $\lambda^1, \lambda^2$
$n$ ,	coeficiente de rugosidade na equação de Manning
$\mathbf{n}$ ,	vetor externo unitário normal a uma superfície
$Q$ ,	vazão numa seção transversal de fluxo
$ql$ ,	vazão de entrada lateral
$\theta$ ,	parâmetro de peso no tempo do esquema numérico de Preissmann
$R$ ,	raio hidráulico
$\nu^{(i)}$ ,	autovetor $i$ à direita, $i=1, 2$ segundo os autovalores $\lambda^1$ e $\lambda^2$
$r(\dots)$ ,	invariante de Riemann correspondente $C^+$
$s(\dots)$ ,	invariante de Riemann correspondente a $C^-$
$S_0$ ,	declividade de fundo do canal
$S_f$ ,	declividade da linha de energia
$t$ ,	variável tempo
$b(\dots)$ ,	variável que representa a largura do canal
$u$ ,	velocidade média do fluxo numa seção transversal
$W$ ,	celeridade de uma descontinuidade ou "shock"
$x$ ,	variável de comprimento

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. Justificativa

Nas últimas duas décadas têm-se incrementado os esforços para compreender as características e prever o fenômeno de deslocamento de ondas abruptas em rios e canais.

Embora no âmbito de interesse da hidráulica outros escoamentos apresentem o fenômeno de formação e deslocamento de frentes abruptas, o problema de ruptura de barragem é aquele que mais tem concentrado pesquisas no tema.

Ainda que as barragens, em geral, sejam construídas com alto índice de segurança, nenhuma está isenta de um acidente. A ruptura súbita de uma barragem produz uma onda ou frente abrupta a jusante da mesma com regime, em alguns casos, supercrítico nos primeiros estágios.

A importância do fenômeno consiste em que, o escoamento devido a uma onda abrupta no vale de inundação, a jusante da barragem apresenta características pouco usuais quanto a velocidades, vazões e níveis máximos atingidos. Em geral a cheia pode produzir uma catástrofe de grandes proporções com perda de vidas e danos materiais.

Porém, um conhecimento "a priori" das características do fenômeno de deslocamento de ondas abruptas para um possível caso de ruptura de uma barragem tem muita importância. Estes resultados podem ser utilizados no zoneamento racional do vale de inundação devido à ruptura total ou para diferentes hipóteses de grau de ruptura, determinação do efeito da ruptura de uma barragem sobre outra a jusante, determinação dos custos associados ao grau de ruptura, com o fim de planejar evacuação, etc.

Observa-se que legislações de determinados países, principalmente os Estados Unidos e França, exigem estudos sobre hipóteses de ruptura na execução de projetos de vulto. No Brasil, embora exista um considerável número de barragens, não existe uma legislação específica sobre o tema.

Nesse sentido, a previsão de níveis e vazões a jusante de uma barragem, usando modelação matemática, é importante para se alcançar maior nível de segurança social e econômica. Neste estudo é feita a abordagem do problema de previsão das características do fenômeno do deslocamento de ondas abruptas do ponto de vista da hidráulica computacional.

## 1.2. Objetivos

O estudo está orientado para o fenômeno de deslocamento de frentes abruptas -ou descontinuidades num fluxo- ocasionadas por variações súbitas da vazão em rios e canais. O mesmo compreende o tratamento unidimensional das equações da hidráulica.

Faz-se uso da teoria geral de escoamento não-permanente para estudar e melhorar a compreensão e previsão do fenômeno de deslocamento de ondas abruptas em canais. Com esse objetivo foram revisados os conceitos que envolvem o problema e desenvolvido um modelo computacional de resolução numérica das equações de Saint Vénant com consideração do tratamento numérico de descontinuidades no escoamento.

O tema abrange aspectos teóricos e de aproximação que surgem da modelação de escoamento com zonas de fluxo rapidamente variado, mudança de regime de fluxo, etc., os quais são abordados segundo as necessidades na resolução de casos práticos.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. Introdução geral sobre fluxo com descontinuidades

Estes problemas tratam de escoamentos nos quais existem zonas caracterizadas por gradientes muito altos ou variações bruscas das funções de fluxo como velocidade, pressão, etc., imersas num escoamento mais "ordenado". Nos problemas de fluxo em geral, essas funções são contínuas, apresentando variações suaves, em contraste com o caso de fluxo com descontinuidades nos quais as mesmas são descontínuas.

Matematicamente o deslocamento de ondas em fluidos ou gases é representado por equações diferenciais hiperbólicas, lineares ou não lineares. Uma pequena perturbação no escoamento é representada por equações lineares e as grandes perturbações, ou mudanças bruscas, por equações não lineares. Quando existe uma descontinuidade nas condições iniciais de um problema linear, esta descontinuidade se translada no domínio da solução, sem alteração. Mas, uma descontinuidade nas condições iniciais de um problema não linear origina a formação de um "shock" ou onda de rarefação, segundo o caso.

A solução destes problemas de fluxo com descontinuidades requer uma definição mais geral de solução e de condições suplementares. Esta definição mais geral estabelece que a solução em uma singularidade deverá cumprir as relações através de descontinuidades, também denominadas relações de Rankine-Hugoniot. As soluções satisfazendo estas relações são denominadas soluções generalizadas ou fracas e não necessitam cumprir com a propriedade de serem contínuas. Não entanto, ocorre que um problema de fluxo com presença de descontinuidades -ou singularidades- apresenta mais de uma solução generalizada, necessitando-se condições suplementares para definir a solução real. Assim, de todas as soluções matematicamente possíveis, será solução real do problema aquela solução generalizada que satisfaça uma condição a mais denominada condição de entropia.

Desde o ponto de vista físico e matemático, o tema de descontinuidades num fluxo começou a ser abordado desde o século XIX. Uma síntese histórica das abordagens mais notáveis é apropriada. Existem na literatura (Tokaty, 1971;

Friedrichs-Courant, 1948<sup>1</sup>), interessantes resenhas históricas dos principais trabalhos nessa época das quais, a seguir, comenta-se um resumo.

Poisson (1808) achou a solução de uma onda simples para a equação de fluxo de um gás isotérmico. Posteriormente Challis (1948) observou que para esse problema não existia uma única solução para a velocidade, em todo tempo. Stokes (1948) introduziu a idéia de descontinuidade na velocidade quando na equação diferencial o termo  $\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \infty$  e, argumentou que uma descontinuidade não podia fisicamente acontecer devido a que os efeitos viscosos dissipariam quaisquer tendências nesse sentido.

Earnshaw (1958) achou a solução de uma onda simples num gás que satisfazia uma lei da pressão em função da densidade do mesmo. Ele intuiu o fato de que uma singularidade poderia acontecer nesse fluxo, já que numa onda de compressão aumentava a velocidade e com ela a densidade, o que levaria a uma variação não contornada da velocidade em algum ponto da onda.

Em forma independente Riemann (1860) redescobriu totalmente a teoria sobre descontinuidades. Ele foi quem primeiro tratou de relacionar os estados das variáveis nos dois lados de um "shock". Mas, assumiu que a transição através de uma singularidade era um processo adiabático e reversível. Logo Rankine (1869) demonstrou que o processo através de um "shock" era um processo não-adiabático. Hugoniot (1887 e 1889) foi o pesquisador que juntou todas as partes espalhadas sobre o fenômeno de "shock" em gases; ele esclareceu o que fisicamente ocorre numa descontinuidade, o caráter de processo irreversível de um "shock", além de apresentar as relações através de descontinuidades numa forma prática mais simples.

Mach (1889), Rayleigh (910) e Hadamart (1903), principalmente este último, podem-se considerar entre os últimos autores dessa série de importantes trabalhos que contribuíram à fundamentação do tratamento de descontinuidades em dinâmica de gases.

---

1 As referências bibliográficas desses trabalhos não são incluídas neste estudo, no entanto, cita-se o ano correspondente das publicações para dar idéia da cronologia dos fatos.

## 2.2. Pesquisas e estudos na solução de problemas de fluxo com descontinuidades

Nos primeiros trabalhos de cálculos em grande escala em dinâmica dos fluidos para escoamentos com descontinuidades foi usado o método de "shock fitting". Este método consiste numa localização da descontinuidade em cada passo de tempo na malha de discretização solucionando, em forma separada, a zona de fluxo "ordenada" da zona da singularidade. No caso unidimensional, com presença de um "shock" de certa grandeza e para o qual é conhecido a posição em  $t=0$ , este método é muito satisfatório sendo que, para mais de uma dimensão, o procedimento de cálculo se torna complexo ( Richtmyer, 1960).

Em anos mais recentes surgiram idéias baseadas em princípios físicos dando origem a métodos de resolução geral sem localização das descontinuidades. Estes métodos fazem uso dos efeitos dissipativos que existem num "shock" devido à viscosidade e transferência de calor nessa zona. Uma explicação aproximada desses fatos é que nos fenômenos de escoamento de fluidos, embora com baixa viscosidade  $\mu$  e baixa condutividade de calor  $\lambda$ , um "shock" é dissipado, tendo as funções de fluxo variações súbitas mas não descontinuas. Isto levou a fazer conjeturas matemáticas, logo demonstradas, no sentido que a solução de um problema com as equações de fluxos quando  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  tendem a uma função limite, que é também solução de problemas de fluxo nos quais os efeitos dissipativos da viscosidade, transferência de calor, etc., estão ausentes e no qual surgem descontinuidades. Porém, os efeitos dissipativos de termos agregados -ou implícitos- numa equação em diferenças, permitem obter a solução generalizada real, num problema de fluxo com descontinuidade, para um sistema de equações de lei de conservação escritos na forma conservativa. Segundo os termos que representam esses efeitos sejam agregados às equações diferenciais parciais ou sejam usados esquemas numéricos com propriedades nesses sentido, os métodos denominam-se "pseudoviscosity methods" ou "through methods", respectivamente.

Um dos primeiros trabalhos, nos quais foram expostos os conceitos acima comentados, correspondeu a Hopf (1950) que apresentou a solução para uma equação diferencial do tipo,  $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$ . Ele demonstrou o fato da solução dessa equação para o limite de  $\mu \rightarrow 0$  ser também solução da equação homogênea equivalente. Esse fato expressa que o modelo viscoso aproxima aquele não-viscoso quando  $\mu \rightarrow 0$ , sendo a solução da equação "parabólica" -a qual é

continua- uma solução débil da equação hiperbólica -a qual é descontínua. Essa equação foi previamente utilizada por Burgers (1948) que descreveu analogias deste modelo com um fluxo compressível unidimensional, atribuindo o termo  $\mu U_{xx}$  aos efeitos dissipativos devido à viscosidade e expressando em forma intuitiva o passo ao limite que logo Hopf provou analiticamente. Alguns dos trabalhos mais importantes sobre o assunto correspondem a Oleinik (1959 e 1963)<sup>2</sup>, Kruzkov (1969), Cole (1951), Germain e Backer (1953), entre muitos outros.

A idéia original do "pseudoviscosity method" em análise numérica correspondeu a Von Neumann e Richtmyer (1949) que apresentaram resultados para uma equação em particular. Lax (1954 e 1957) apresentou a teoria de soluções generalizadas e a teoria de lei de conservação, além de um esquema numérico para solucionar escoamento compressível com descontinuidades ou "shock", sem necessidade de localizar o mesmo. Nestes dois últimos trabalhos é apresentado um tratamento mais completo para o problema de fluxo com descontinuidade. Outros trabalhos importantes nesta época são Lax e Wendroff (1960) e Godunov (1959).

Outro método para escoamento com descontinuidades está baseado num trabalho publicado por Glimm (1965), para o qual Chorim (1975) apresentou um algoritmo numérico de resolução. O mesmo é muito usado na atualidade, sendo apropriado, em sua apresentação original, para equações hiperbólicas quase-lineares homogêneas.

### 2.3. Trabalhos aplicados na hidráulica

Dentro do campo de interesse da hidráulica, a formação e deslocamento de ondas abruptas, como ocorre na ruptura de um represa, é o problema equivalente à formação de "shock" num fluxo em dinâmica de gases.

Na hidráulica, estes problema começaram a ser estudados com diferentes metodologias -experimental ou analítica- desde o século passado. Os

---

<sup>2</sup> As publicações oriundas da URSS aparecem em geral na referência bibliográfica com as datas das traduções desses trabalhos ao inglês, as quais, em certos casos, são muito posteriores às publicações dos originais em russo.

primeiros e mais importantes trabalhos são os de Saint Vénant (1871), Ritter (1892), Schoklitsh (1917), Dressler (1952), Waitham (1955) e Stoker (1953 e 1957), entre outros. Nas últimas décadas começaram a ser empregadas as novas metodologias numéricas desenvolvidas sobre as idéias expostas acima. Nesta linha os trabalhos pioneiros, no campo da hidráulica, correspondem a Preissmann (1965), Preissmann e Cunge (1961), Cunge et al. (1980), Abbott et al. (1969), Abbott (1975 e 1979), Vasiliev (1965 e 1970) entre muitos outros.

No período das últimas duas décadas foi publicada uma grande variedade de trabalhos de simulação numérica de ondas abruptas. O primeiro destes, nesse período, corresponde a Terzidis e Strelkoff (1970) que resolveram vários exemplos de ondas abruptas com os esquemas numéricos explícitos de Lax e Lax-Wendroff. Eles mostram a comparação de resultados de um exemplo previamente resolvido por Vasiliev e Gladyshev (1965) com um esquema implícito de dois passos, achando que os esquemas explícitos apresentaram melhor desempenho, além de serem mais simples de implementar.

Martin e Zovne (1971) empregaram também diferenças finitas para simular o rompimento de barragem num canal, sem rugosidade nem declividade e, compararam com a solução obtida por Stoker (1948), com resultados satisfatórios.

Katopodes e Strelkoff (1978), Chen e Druffel (1977) e Chen (1980) empregaram o método das características para ruptura total e instantânea de barragem achando, em geral, bons resultados.

Rajar (1978), com o objetivo de esclarecer os erros que são numéricos e aqueles ocasionados por violações das hipóteses de Saint Vénant, no problema de ruptura de barragem, comparou resultados de modelos matemáticos com dados obtidos em modelos físicos. Ele empregou os esquemas de Lax e Lax-Wendroff. Sua principal conclusão foi a necessidade de empregar ambos esquemas com termos dissipativos em canais irregulares com expansões e contrações da seção transversal, as quais produzem instabilidades numérica. O primeiro esquema apresentou resultados pouco precisos. Ele também observou que os maiores erros correspondem às hipóteses como: (a) pressão hidrostática, (b) escoamento unidimensional quando existe extravazamento da calha principal ou contração-expansão da seção transversal, as quais são violadas nas equações de Saint Vénant.

Outro método usado na resolução de problemas com descontinuidades é o método de Glimm (1965). Este exige como condição conhecer as soluções



primeiros e mais importantes trabalhos são os de Saint Vénant (1871), Ritter (1892), Schoklitsh (1917), Dressler (1952), Waitham (1955) e Stoker (1953 e 1957), entre outros. Nas últimas décadas começaram a ser empregadas as novas metodologias numéricas desenvolvidas sobre as idéias expostas acima. Nesta linha os trabalhos pioneiros, no campo da hidráulica, correspondem a Preissmann (1965), Preissmann e Cunge (1961), Cunge et al. (1980), Abbott et al. (1969), Abbott (1975 e 1979), Vasiliev (1965 e 1970) entre muitos outros.

No período das últimas duas décadas foi publicada uma grande variedade de trabalhos de simulação numérica de ondas abruptas. O primeiro destes, nesse período, corresponde a Terzidis e Strelkoff (1970) que resolveram vários exemplos de ondas abruptas com os esquemas numéricos explícitos de Lax e Lax-Wendroff. Eles mostram a comparação de resultados de um exemplo previamente resolvido por Vasiliev e Gladychiev (1965) com um esquema implícito de dois passos, achando que os esquemas explícitos apresentaram melhor desempenho, além de serem mais simples de implementar.

Martin e Zovne (1971) empregaram também diferenças finitas para simular o rompimento de barragem num canal, sem rugosidade nem declividade e, compararam com a solução obtida por Stoker (1948), com resultados satisfatórios.

Katopodes e Strelkoff (1978), Chen e Druffel (1977) e Chen (1980) empregaram o método das características para ruptura total e instantânea de barragem achando, em geral, bons resultados.

Rajar (1978), com o objetivo de esclarecer os erros que são numéricos e aqueles ocasionados por violações das hipóteses de Saint Vénant, no problema de ruptura de barragem, comparou resultados de modelos matemáticos com dados obtidos em modelos físicos. Ele empregou os esquemas de Lax e Lax-Wendroff. Sua principal conclusão foi a necessidade de empregar ambos esquemas com termos dissipativos em canais irregulares com expansões e contrações da seção transversal, as quais produzem instabilidades numérica. O primeiro esquema apresentou resultados pouco precisos. Ele também observou que os maiores erros correspondem às hipóteses como: (a) pressão hidrostática, (b) escoamento unidimensional quando existe extravazamento da calha principal ou contração-expansão da seção transversal, as quais são violadas nas equações de Saint Vénant.

Outro método usado na resolução de problemas com descontinuidades é o método de Glimm (1965). Este exige como condição conhecer as soluções

pelos autores desse trabalho é comparado o tempo de deslocamento de uma frente para diferentes condições iniciais, observando-se que esses resultados não concordam com os que são obtidos empregando as relações através das descontinuidades nessa frente. Nos casos como do exemplo apresentado por Bellos e Sakkas<sup>3</sup> nesse trabalho, no qual o tirante do estado não perturbado a jusante da frente abrupta é muito pequeno, o estado constante a montante da mesma é muito estreito. Mas, em todos os casos o fluxo nessa zona depende do estado a jusante da descontinuidade, daí que para diferentes níveis a jusante existem diferentes níveis a montante do "shock", fato que não é observado na apresentação dos resultados do teste comentado, criando dúvidas sobre a eficácia da resolução numérica.

Um das pesquisas mais abrangentes quanto a métodos de resolução em ruptura de barragem corresponde a Wurbs (1987). Ele apresentou um trabalho comparativo sobre modelos em uso nos EUA para o problema de escoamento por ruptura de barragem, fazendo uma avaliação das seguintes metodologias selecionadas: National Weather Service(DAMBRK), U.S. Army Corps of Engineers South Western Division(FLOW SIM 1 e 2), U.S. Army Corps of Engineers Hydrologic Engineering Center (HEC-1), Soil Conservation Service(TR 66), o modelo do NWS simplificado (SMPDBK) e o procedimento gráfico adimensional do HEC. Ele concluiu que: (a) existe instabilidade e divergência nos modelos em caso de fluxo supercrítico e mudanças rápidas da geometria do vale de inundação; (b) não foi possível simular mudanças de regime ; (c) os modelos com as equações completas de Saint Vénant são os mais versáteis e aptos; (d) fluxo supercrítico e discretização espacial são fatores importantes na estabilidade numérica; (e) erosão e sedimentação são elementos importantes para incorporar ao problema.

Um trabalho experimental muito empregado na literatura na avaliação de metodologias numéricas corresponde ao Army Corps of Engineers (1960 e 1961). Os experimentos foram feitos num canal retangular com declividade para condições de mínima e máxima rugosidade. A barragem foi localizada na metade

---

3 O segundo autor desse trabalho é um dos pesquisadores que mais tem aportado ao tema de ruptura de barragem, (Sakka e Strelkoff, 1973 e 1976; e Sakkas, 1980). Esses trabalhos estão orientados à solução do problema em forma analítica usando expressões de escoamento adimensionais.

do canal, para assim observar tanto a onda negativa como a onda positiva.

Os trabalhos feitos no Brasil, no tema de ruptura de barragem, correspondem todos à presente década. Na literatura não existem publicações de estudos analíticos ou experimentais. Têm-se feito estudos numéricos sobre deslocamento da cheia no vale de inundação e sobre a modelagem de formação da brecha em barragem de terra por Silva e Mascarenhas (1983), Lou (1983), Silva (1986), Mascarenhas (1990) e Nogueira (1984). Neste último trabalho é apresentado um modelo de base física para simular a formação gradual de uma brecha numa barragem de terra por erosão, em função do escoamento através da mesma. O modelo é logo avaliado para simular a formação da brecha na barragem natural do rio Montaro, no Peru, concluindo-se que seu desempenho foi bom.

### 3. SISTEMA DE EQUAÇÕES

#### 3.1. Introdução

Dentro do intervalo de interesse da hidrodinâmica, os meios contínuos cumprem, com as leis gerais de conservação da massa, quantidade de movimento linear, energia e segundo princípio da termodinâmica. Adicionalmente existem leis complementares ou constitutivas que dependem de cada problema, como são a equação de estado de um gás perfeito, princípio de Newton para um fluido viscoso, etc.

No estudo de escoamentos em rios e canais é apropriado formular as três primeiras leis: conservação da massa, quantidade de movimento linear e energia mecânica; além de uma lei para expressar o atrito nos contornos.

Uma lei de conservação é expressa matematicamente como:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \, dV = \int_{V_0} \frac{\partial f}{\partial t} \, dV_0 + \int_{\partial V_0} G(f) \cdot n \, d\partial V_0 = \int_{V_0} B \, dV_0 \dots \dots \dots (3.1)$$

A mesma considera que a variação total da propriedade intensiva  $f$  dentro de um sistema  $V(t)$  muda por efeitos externos numa taxa  $\int_{V_0} B \, dV_0$ ; sendo que a variação total de  $f$  dentro de  $V(t)$  pode-se também expressar como a variação no tempo de  $f$  dentro do volume de controle  $V_0$ , mais o fluxo  $G(f)$  desta propriedade através da superfície de controle  $\partial V_0$ . Nesta expressão  $n$  é o vetor unitário normal a  $\partial V_0$  e  $ds$  é um diferencial de  $\partial V_0$ .

Aplicando o teorema da divergência na equação (3.1), levando o volume de controle a um ponto, sendo assim a integral igual ao integrando da mesma, tem-se para uma dimensão na forma divergente:

$$f_t + G(f)_x = B \dots \dots \dots (3.2)$$

a qual é válida em todos os pontos da região de interesse do problema nos quais  $f$ ,  $G(f)$  e  $B$  são contínuas. Esta equação diferencial -ou sistema- quando escrita em função da divergência do fluxo da propriedade analisada é dita expressa em forma conservativa generalizada; sendo que a mesma é estritamente conservativa quando  $B=0$ ; caso contrário existem fontes ou

sumidouros da propriedade.

Derivando a função  $G(f)$  na expressão (3.2) é obtido o sistema quase-linear equivalente à lei de conservação:

$$f_t + \frac{\partial G(f)}{\partial f} f_x = f_t + \underline{A} f_x = B \dots\dots\dots(3.3)$$

sendo  $\underline{A}$  a matriz de coeficientes do sistema. Quando esta matriz é não-linear, como acontece em hidrodinâmica, e sendo o sistema homogêneo ( $B=0$ ) em todos os casos surgem descontinuidades na função  $f$  no domínio da solução (Lax, 1973; Richtmeyer, 1978). Em hidráulica o sistema é geralmente não-homogêneo e nem sempre desenvolvem-se descontinuidades (Luskin, 1981).

O protótipo para estabelecer as leis de conservação na hidráulica é um canal no qual cumprem-se as seguintes hipóteses simplificativas: fluxo unidimensional, pressão hidrostática, ausência de aceleração vertical, fluido incompressível e não-viscoso existe. só perda de energia no atrito com os contornos rígidos, a velocidade é uniforme numa seção transversal ao fluxo<sup>1</sup>, o tirante hidráulico é relativamente pequeno em comparação com o comprimento da onda característica do fenômeno e a linha da água é horizontal numa seção transversal ao escoamento. Neste sistema físico é apropriado formular a lei de conservação da massa, quantidade de movimento linear e energia mecânica. Em regiões de fluxo nas quais algumas das hipóteses anteriores são violadas, como acontece numa zona de escoamento rapidamente variado ou com descontinuidade, é apropriado formular só as duas primeiras leis de conservação. A equação da energia converte-se, nessas zonas, numa inequação que expressa uma transformação da energia mecânica para outras formas de energia não avaliadas pela forma geral das equações da hidráulica.

Quando as leis de conservação da massa e quantidade de movimento linear são formuladas através dessas zonas, caracterizadas como descontinuidades de fluxo, tomam a denominação de relações através de descontinuidades ou relações de Rankine-Hugoniot, sendo a inequação da energia um princípio físico necessário na escolha da solução real desse problema.

---

<sup>1</sup> Esta hipótese supõe um deslizamento do fluido nos contornos.

### 3.2. Equações de Saint Vénant em forma divergente

A propriedade  $f$ , fluxo  $G(f)$  e termo independente  $\underline{B}$  do sistema apresentado no item anterior, para as leis de conservação da massa e quantidade de movimento linear do escoamento num canal com as hipóteses acima relacionadas, são:

$$f = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad G(f) = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + gI_1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} q_l \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{bmatrix} \dots\dots(3.4)$$

na qual  $A$  é a área molhada de uma seção transversal ao escoamento e representa a intensidade da propriedade massa;  $Q$  é a vazão volumétrica e expressa, por sua vez, a intensidade da propriedade quantidade de movimento linear,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $S_0$  é a declividade do fundo do canal,  $S_f$  é a declividade da linha de energia,  $q_l$  é a vazão que entra lateralmente ao canal principal e  $I_1$  e  $I_2$  são termos de pressão hidrostática;  $I_1$  é a pressão do fluido na seção transversal ao escoamento e  $I_2$  a pressão por efeitos da contração-expansão da seção transversal ao longo do eixo  $x$ .

$I_1$  define-se como:

$$I_1 = \int_0^h (h - \eta) b(x, \eta) d\eta \dots\dots\dots(3.5)$$

na qual  $h$  é o tirante hidráulico e  $b(x, \eta)$  a largura do canal.

O termo  $I_2$  é calculado pela seguinte expressão,

$$I_2 = \int_0^h (h - \eta) \left[ \frac{\partial b(x, \eta)}{\partial x} \right]_{h=h_0} d\eta \dots\dots\dots(3.6)$$

na qual a derivada é considerada para um valor constante do tirante hidráulico ( $h=h_0$ ).

O termo  $S_f$  devido ao atrito nos contornos é aproximado pela equação de Manning:

$$S_f = \frac{Q|Q|}{K^2} \dots\dots\dots(3.7)$$

com

$$K = \frac{A R^{2/3}}{n^2} \dots \dots \dots (3.8)$$

expressando assim Sf em função das variáveis dependentes A(x, t) e Q(x, t), fechando o problema de duas equações e duas incógnitas.

O sistema (3.2) com f, G(f) e B definidos na equação (3.4) representa as equações de Saint Vénant na forma divergente, conservação da massa e quantidade de movimento linear. As características principais deste sistema são deduzidas da matriz de coeficientes A do sistema quase-linear equivalente, equação (3.3):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial f}{\partial x} = \underline{B} \dots \dots \dots (3.9)$$

sendo A obtida da equação (3.4) por derivação,

$$\underline{A} = \frac{\partial G(f)}{\partial f} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ g \frac{\partial I_1}{\partial A} - \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2\frac{Q}{A} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3.10)$$

Os autovalores desta matriz fornecem a informação necessária para caracterizar o sistema (3.2) com (3.4). Assim, o polinômio característico da matriz A é (Jeffrey, 1976),

$$| \underline{A} - \lambda \underline{I} | = 0 \dots \dots \dots (3.11)$$

na qual a variável λ representa os autovalores e I a matriz identidade. Resolvendo para A segundo (3.10), os autovalores λ<sup>(1,2)</sup> são,

$$\lambda^{(1,2)} = \frac{Q}{A} \pm \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \dots \dots \dots (3.12)$$

correspondendo o sinal positivo com o índice 1, e o negativo com 2.

Para um canal retangular as forças de pressão hidrostáticas I1 são,

$$I_1 = \frac{bh^2}{2} = \frac{A^2}{2b} \quad \text{e} \quad \frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{A}{b}$$

e os autovalores ficam,

$$\lambda^{(1,2)} = u \pm \sqrt{g h} \dots\dots\dots(3.13)$$

com os índices iguais ao caso anterior. O termo  $b$  representa a largura do canal,  $h$  o tirante hidráulico e  $u$  a velocidade média na seção transversal.

É possível deduzir o significado físico destes autovalores formulando um sistema com o diferencial total das propriedades  $f$  sobre curvas  $C(x(s), t(s))$  no domínio da solução e, o sistema de equações (3.9). O diferencial total é,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{df}{ds} \dots\dots\dots(3.14)$$

empregando o parâmetro  $s$  igual ao tempo  $t$  resulta,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{df}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.15)$$

sendo o sistema

$$\begin{pmatrix} \underline{I} & \frac{dx}{dt} \underline{I} \\ \underline{I} & \underline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dt} \\ \underline{B} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.16)$$

impondo a condição das curvas  $C(x(t), t)$  sendo aquelas sobre as quais propagam-se as descontinuidades dos termos  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial t}$  através do domínio da solução, devendo ser cumprida a seguinte condição:

$$\det \begin{vmatrix} \underline{I} & \frac{dx}{dt} \underline{I} \\ \underline{I} & \underline{A} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(3.17)$$

igual a

$$\left| \underline{A} - \frac{dx}{dt} \underline{I} \right| = 0 \dots\dots\dots(3.18)$$

Comparando (3.18) com (3.11) tem-se que,

$$\lambda^{(i)} = \left( \frac{dx}{dt} \right)^{(i)} = \frac{dx^{(1,2)}}{dt} = \lambda^{(1,2)} = \frac{Q}{A} \pm \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \dots\dots\dots(3.19)$$



Portanto, os autovalores representam as velocidades com as quais a informação desloca-se através do domínio da solução. Os percursos da informação com essas velocidades, no plano  $x-t$ , são as curvas  $C(x(t), t)$  as quais denominam-se trajetórias características  $C^+$  e  $C^-$ , para denominar a positiva e a negativa, correspondendo-se com os sinais + e - na equação (3.19). Estas trajetórias ficam definidas pelas direções características ou vetores tangentes em cada ponto do plano  $x-t$ ,

$$v^{(1)} = \left[ 1, \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \dots \dots \dots (3.20-a)$$

$$v^{(2)} = \left[ 1, \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \dots \dots \dots (3.20-b)$$

Em resumo, tendo-se calculado para o sistema (3.9), ou equivalente, os autovalores, trajetórias e direções características, é possível definir o mesmo como estritamente hiperbólico por serem seus autovalores reais e diferentes, e quase-linear pelo fato dos autovalores serem por sua vez função da solução em cada ponto do plano  $x-t$ .

### 3.3. Equações de Saint Vénant na forma característica

O sistema de equações apresentado no item anterior expressa a variação das variáveis dependentes  $A(x, t)$  e  $Q(x, t)$  segundo as direções de um par de eixos ortogonais  $x-t$ . Tomando as direções características como novos eixos é possível trocar os mesmos e escrever um sistema de equações diferenciais equivalente, denominado formas diferenciais características das equações de Saint Vénant. Assim as formas características expressam as variações das variáveis dependentes  $A(x, t)$  e  $Q(x, t)$  ao longo das duas trajetórias características  $C^+$  e  $C^-$  para o sistema hiperbólico como definido no item anterior. Na transformação utilizam-se os autovetores à esquerda  $t^{(i)}$  da matriz  $\underline{A}$ , calculados como

$$t^{(i)} \underline{A} = \lambda^{(i)} t^{(i)} \dots \dots \dots (3.21)$$

para cada autovalor  $\lambda^{(1,2)}$  como definido na equação (3.12), sendo,

$$t^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \\ -1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.22-a)$$

$$t^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \\ -1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.22-b)$$

Pré-multiplicando o sistema (3.9) pelos autovetores  $t^{(1,2)}$ , expressões (3.22-a,b), resulta o seguinte sistema de equações escalares

$$t^{(i)} \frac{\partial f}{\partial t} + t^{(i)} \underline{A} \frac{\partial f}{\partial x} = t^{(i)} \underline{B} \dots \dots \dots (3.23)$$

Empregando a relação (3.21) em (3.23) resulta,

$$t^{(i)} \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda^{(i)} t^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x} = t^{(i)} \underline{B} \dots \dots \dots (3.23)$$

ou na forma extensa,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}}, -1 \right] \begin{bmatrix} A_t \\ Q_t \end{bmatrix} + \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}}, -1 \right] \begin{bmatrix} A_x \\ Q_x \end{bmatrix} = \\ & = \left[ \frac{Q}{A} \pm \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}}, -1 \right] \left[ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \right] \dots \dots \dots (3.25) \end{aligned}$$

Assim, para cada autovalor  $\lambda^{(1,2)}$  tem-se uma equação característica. Reorganizando-se ficará

$$\left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \frac{dA}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] q_1 - gA \left[ S_0 - S_f \right] - gI_2 \dots (3.26-a)$$

$$\left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \frac{dA}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] q_1 - gA \left[ S_0 - S_f \right] - gI_2 \dots (3.26-b)$$

podendo-se expressar também como,

$$t_1^{(i)} \frac{dA}{dt} + t_2^{(i)} \frac{dQ}{dt} = t_1^{(i)} b_1 + t_2^{(i)} b_2 \dots \dots \dots (3.27)$$

logo,

$$\begin{bmatrix} \ell_1^{(i)} & \ell_2^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dA}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1^{(i)} & \ell_2^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.28)$$

resultando,

$$\ell^{(i)} \frac{df}{dt} = \ell^{(i)} B \dots\dots\dots(3.29)$$

Qualquer uma das equações (3.26) a (3.29) expressa a variação de  $f$  ao longo da trajetória característica  $C^+$  ou  $C^-$ , dependendo de que o autovalor seja  $\lambda^{(1)}$  ou  $\lambda^{(2)}$ ; sendo  $t$  o parâmetro destas curvas.

Outra forma de expressar as equações diferenciais na forma característica é em função dos invariantes de Riemann. Os mesmos são valores constantes ao longo das trajetórias características. Esta troca de variáveis transforma o problema de equações em diferenças parciais num de diferenciais totais ou ordinárias.

Por simplicidade considera-se um canal de seção retangular uniforme, sem entrada lateral, largura unitária, sem declividade nem atrito. Neste caso as expressões (3.26) ficam,

$$\begin{bmatrix} u - \sqrt{g h} \end{bmatrix} \frac{dh}{dt} - \frac{d(uh)}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.30-a)$$

$$\begin{bmatrix} u + \sqrt{g h} \end{bmatrix} \frac{dh}{dt} - \frac{d(uh)}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.30-b)$$

ou também como,

$$c^- \frac{dh}{dt} - \frac{d(uh)}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.31-a)$$

$$c^+ \frac{dh}{dt} - \frac{d(uh)}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.31-b)$$

nas quais  $c^-$  e  $c^{+2}$  são as celeridades das discontinuidades infinitesimais ou

---

<sup>2</sup> Das expressões (3.31-a,b) é possível observar a equivalência das formas diferenciais características com a relação através de uma descontinuidade, expressão (3.43-a). Nas expressões (3.31-a,b) as derivadas são contínuas

características no plano  $x-t$ .

Dividindo (3.30-a,b) pelo tirante hidráulico,  $h$ , e reorganizando o termo da esquerda fica,

$$\frac{d}{dt} \left[ u + 2\sqrt{gh} \right] = 0 \dots\dots\dots(3.32-a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ u - 2\sqrt{gh} \right] = 0 \dots\dots\dots(3.32-b)$$

Considerando

$$r(x, t) = \left[ u + 2\sqrt{gh} \right] \dots\dots\dots(3.33-a)$$

$$s(x, t) = \left[ u - 2\sqrt{gh} \right] \dots\dots\dots(3.33-b)$$

resulta

$$\frac{dr}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.34-a)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \dots\dots\dots(3.34-b)$$

ou

$$\text{grad } r \cdot \nu^{(1)} = 0 \dots\dots\dots(3.35-a)$$

$$\text{grad } s \cdot \nu^{(2)} = 0 \dots\dots\dots(3.35-b)$$

por ser as trajetórias características descontinuidades infinitesimais nas variáveis dependentes  $h(x,t)$ ,  $u(x,t)$  ( Abbott, 1979) sendo que isto não ocorre na expressão (3.43-a) por ser um "shock" uma descontinuidade maior das variáveis de fluxo. Assim, por ser (3.31a) uma expressão que se cumpre ao longo de  $C^+$ , também expressa a relação das variáveis dos dois lados de uma pequena descontinuidade com a celeridade  $w = u - \sqrt{gh}$  que corresponde a  $C^-$ . Porém as formas diferenciais características das equações podem ser interpretadas como sendo relações através de descontinuidades infinitesimais.

As expressões (3.35) indicam que o gradiente dos invariantes de Riemann é ortogonal às direções características. Utilizando (3.20) em (3.35), as derivadas direcionais resultam,

$$\text{grad } r \cdot r^{(1)} = \frac{\partial r}{\partial t} + \lambda^{(1)} \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (3.36-a)$$

$$\text{grad } s \cdot r^{(2)} = \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda^{(2)} \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (3.36-b)$$

Nestas equações,  $t$  representa o parâmetro das curvas  $C(x(t), t)$  ou trajetórias características no plano  $x-t$ , sendo  $r(x, t)$ ,  $s(x, t)$  os invariantes de Riemann para as equações de Saint Vénant; com  $r(x, t)$  variando ao longo de  $C^+$  e  $s(x, t)$  ao longo de  $C^-$ . Assim, as equações (3.34, 35, 36) expressam fisicamente variações das quantidades expressas por (3.33) ao longo das trajetórias características. Nos casos com declividade e atrito no canal,  $r(x, t)$  e  $s(x, t)$  são denominados quase-invariantes e as expressões resultam,

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \lambda^{(1)} \frac{\partial r}{\partial x} = g \left[ S_0 - S_f \right] \dots \dots \dots (3.37-a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \lambda^{(2)} \frac{\partial s}{\partial x} = g \left[ S_0 - S_f \right] \dots \dots \dots (3.37-b)$$

As equações (3.37) são as formas características mais gerais das equações de Saint Vénant em função dos invariantes de Riemann.

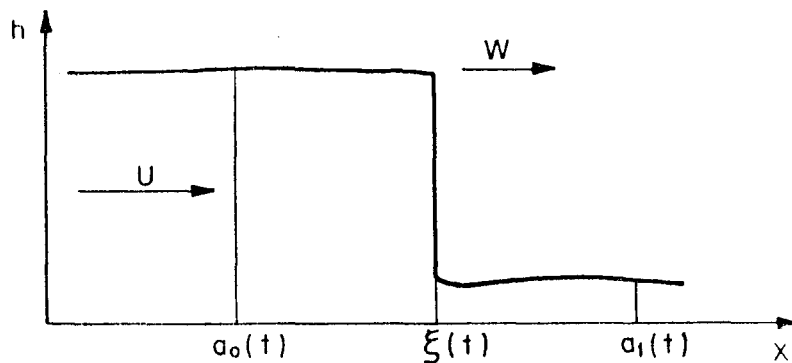
### 3.4. Relações através de descontinuidades

O fluxo não-permanente gradualmente variado em canais contendo, ondas longas de pequena amplitude, é bem representado pelas equações de Saint Vénant. Dentro do intervalo de interesse da hidráulica, este é o tipo de escoamento mais comum. Quando existem variações bruscas na descarga de água num canal formam-se zonas de escoamento com gradientes significativos ou fluxo rapidamente variado. Neste escoamento as simplificações que levam às equações diferenciais de Saint Vénant são violadas e é necessário mudar a descrição do fenômeno físico. Essas zonas são consideradas descontinuidades dentro de um fluxo gradualmente variado, sendo que nelas existem perdas de energia, por turbulência no meio fluido, da mesma ordem de grandeza das perdas

por atrito nos contornos físicos do canal.

Assim, através das descontinuidades, são formuladas as leis de conservação da massa e quantidade de movimento linear. A equação da energia converte-se numa inequação, por existir uma transformação de energia mecânica a outras formas de energia não avaliadas pelas equações da hidráulica. Estas três expressões são utilizadas para resolver um problema de escoamento com descontinuidades na hidráulica.

Considerando um trecho de canal no qual existe uma descontinuidade entre os pontos  $x=a_0(t)$  e  $x=a_1(t)$ , na posição  $\xi(t)$  ( *fig. 3.1* ), são apresentadas essas três relações segundo Stoker (1957), para as equações de Saint Vénant



*fig.3.1. Descontinuidade num segmento de canal*

na forma divergente, incluindo os termos de declividade, atrito e de contração-expansão da seção transversal do canal. Os pontos  $x=a_0(t)$  e  $x=a_1(t)$  são considerados contidos em planos verticais, os quais tem como característica conter as mesmas partículas de fluido ao longo do tempo.

Com o fim de aplicar a lei de conservação (3.1) no canal da *fig 3.1*, considera-se o sistema formado pelos planos verticais que passam por  $x=a_0(t)$  e  $x=a_1(t)$ , as paredes laterais do canal, a superfície livre e o fundo do mesmo. Sendo que, a área  $A$  da seção transversal é a intensidade da propriedade massa e a vazão  $Q$  a intensidade da propriedade quantidade de movimento linear, a conservação da massa e da quantidade de movimento linear neste sistema são:

$$\frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} A dx = \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} q dx \dots \dots \dots (3.35-a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} Q \, dx + g \left[ I_{11} - I_{10} \right] = \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \left[ gA \left[ S_0 - S_f \right] + gI_2 \right] dx \dots \dots \dots (3.35-b)$$

Na primeira lei (3.35-a) não existe fluxo da propriedade massa através da superfície do volume de controle e o termo da direita representa uma fonte. Na segunda expressão o fluxo da quantidade de movimento linear é a diferença  $g(I_{11} - I_{10})$ , sendo  $I_1$  calculada segundo a expressão (3.5). Neste caso os termos da direita são a soma das forças exteriores, com  $I_2$  calculado segundo a expressão (3.6).

Considerando o volume de controle dividido em duas partes pelo plano vertical  $\xi(t)$  que contém a descontinuidade, as integrais são separadas em duas. Uma desde  $a_0(t)$  até o ponto limite à esquerda da descontinuidade  $\xi^-(t)$  e outra desde o ponto limite à direita da descontinuidade  $\xi^+(t)$  até  $a_1(t)$ . Aplicando este critério para uma forma geral da lei de conservação, equivalente às expressões (3.35-a,b), em função da propriedade  $f$  e do fluxo  $G(f)$ , resulta na seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{\xi^-(t)} f \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} f \, dx + \int_{a_0(t)}^{\xi^-(t)} G(f) \cdot n \, ds + \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} G(f) \cdot n \, ds = \\ \int_{a_0(t)}^{\xi^-(t)} \underline{B} \, dx + \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} \underline{B} \, dx \dots \dots \dots (3.36) \end{aligned}$$

Levando a derivação dentro da integral em (3.36) fica,

$$\begin{aligned} \int_{a_0(t)}^{\xi^-(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dx + \frac{d\xi^-(t)}{dt} f^- - \frac{da_0(t)}{dt} f_0 + \\ \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dx + \frac{da_1(t)}{dt} f_1 - \frac{d\xi^+(t)}{dt} f^- + \int_{a_0(t)}^{\xi^-(t)} G(f) \cdot n \, ds + \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} G(f) \cdot n \, ds = \\ \int_{a_0(t)}^{\xi^-(t)} \underline{B} \, dx + \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} \underline{B} \, dx \dots \dots \dots (3.37) \end{aligned}$$

Assim as expressões (3.37) para a lei de conservação da massa e quantidade de movimento são,

$$\int_{a_0(t)}^{x(t)} \frac{dA}{dt} dx + \frac{dx(t)}{dt} A^- - \frac{da_0(t)}{dt} A_0 + \int_{x^+(t)}^{a_1(t)} \frac{dA}{dt} dx + \frac{da_1(t)}{dt} A_1 -$$

$$- \frac{dx^+(t)}{dt} A^- = \int_{a_0(t)}^{\xi(t)} q_1 dx + \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} q_1 dx \dots \dots \dots (3.38-a)$$

$$\int_{a_0(t)}^{\xi(t)} \frac{dQ}{dt} dx + \frac{d\xi(t)}{dt} Q^- - \frac{da_0(t)}{dt} Q_0 + \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} \frac{dQ}{dt} dx + \frac{da_1(t)}{dt} Q_1 -$$

$$\frac{d\xi^+(t)}{dt} Q^- + g [I_{10} - I_{11}] = \int_{a_0(t)}^{\xi(t)} \left[ gA [S_0 - S_f] + g I_2 \right] dx +$$

$$+ \int_{\xi^+(t)}^{a_1(t)} \left[ gA [S_0 - S_f] + g I_2 \right] dx \dots \dots \dots (3.38-b)$$

Considerando que  $\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{d\xi^+(t)}{dt} = W$ , a qual é a celeridade da descontinuidade,

e  $\frac{da_0(t)}{dt} = \frac{Q_0}{A_0} = u_0$ ,  $\frac{da_1(t)}{dt} = \frac{Q_1}{A_1} = u_1$ , e tomando o limite para  $a_0(t) \Rightarrow a_1(t)$ ,

$$\lim_{a_0(t) \Rightarrow a_1(t)} \frac{df}{dt} \dots \dots \dots (3.39)$$

tornam-se nulas as integrais e  $f^- = f_0$ ,  $f^+ = f_1$ . Assim as expressões (3.38-a,b) ficam,

$$W A_0 - \frac{Q_0}{A_0} A_0 + \frac{Q_1}{A_1} A_1 - W A_1 = 0 \dots \dots \dots (3.40-a)$$

$$W Q_0 - \frac{Q_0}{A} Q_0 + \frac{Q_1}{A} Q_1 - W Q_1 + g [I_{10} - I_{11}] = 0 \dots \dots \dots (3.40-b)$$

Reorganizando resulta



$$W \left[ A_0 - A_1 \right] = \left[ Q_0 - Q_1 \right] \dots \dots \dots (3.41-b)$$

$$W \left[ Q_0 - Q_1 \right] = \left[ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \right]_0 - \left[ \frac{Q^2}{A} + g I_1 \right]_1 \dots \dots \dots (3.41-b)$$

as quais são as relações através de descontinuidades na hidráulica equivalentes as de Rankine-Hugoniot em dinâmica de gases. Considerando agora as mesmas relações para um canal de seção transversal retangular uniforme e largura unitária, com  $f$  e  $G(f)$  definidas como

$$f = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}, \text{ e } G(f) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.42)$$

têm-se as expressões,

$$W ( h_0 - h_1 ) = ( uh )_0 - ( uh )_1 \dots \dots \dots (3.43-a)$$

$$W [ (uh)_0 - (uh)_1 ] = (u^2h)_0 + (g \frac{h^2}{2})_0 - (u^2h)_1 - (g \frac{h^2}{2})_1 \dots \dots (3.43-b)$$

que, na forma resumida (3.41) e (3.43), são escritas como

$$W \left[ f \right]_1^0 = \left[ G(f) \right]_1^0 \dots \dots \dots (3.44)$$

na qual  $f$  e  $G(f)$  são definidas por (3.4) e (3.42) respectivamente e os índices 0 e 1 identificam as variáveis nos dois lados da descontinuidade. Observa-se que, dada a hipótese da descontinuidade estar contida num plano vertical, os termos de atrito, declividade, etc. não têm efeitos na conservação da massa e quantidade de movimento linear, através de uma descontinuidade.

A expressão (3.44) expressa que, duas soluções genuínas  $A_0, Q_0$  e  $A_1, Q_1$ , de um e de outro lado de uma singularidade, tomadas conjuntamente, são uma solução generalizada se as mesmas cumprem as relações através de descontinuidades, (Lax, 1954).

Uma segunda questão numa descontinuidade é o fato de existir mais de um par de soluções genuínas que cumprem com (3.44), conformando todas elas soluções generalizadas, mas, sendo só uma delas solução real. Com o objetivo de

escolher a solução generalizada com significado físico é empregada a lei de conservação da energia mecânica. Esta quando usada através de uma descontinuidade é uma inequação que expressa que através de uma singularidade sempre existe uma diminuição desta energia. Em outras palavras; uma partícula que atravesse uma descontinuidade terá sempre diminuída sua energia mecânica.

Na dedução da expressão de conservação da energia mecânica para uma descontinuidade emprega-se a lei de conservação (3.1), sendo que a energia mecânica  $e$  -definida no ANEXO C- das partículas de água de uma seção transversal é a intensidade da propriedade energia mecânica,

$$e = \left[ \frac{Q^2}{2A} + gI_1 \right]; \quad E = \int_{V(t)} e \, dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{Q^2}{2A} + gI_1 \right] \, dV \dots\dots\dots(3.45)$$

a lei de conservação (3.1) com esta propriedade para o sistema segundo o definido no item anterior, *fig. 3.1*, resulta

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \left[ \frac{Q^2}{2A} + gI_1 \right] \, dx = gI_1 \frac{Q_0}{0A_0} - g I_1 \frac{Q_1}{1A_1} + \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \left[ gQ \left[ S_0 - S_f \right] + g \frac{Q}{A} I_2 \right] \, dx \dots\dots\dots(3.46)$$

Seguindo igual procedimento ao realizado no item anterior do passo ao limite de  $a_0(t) \Rightarrow a_1(t)$  resulta

$$\frac{dE}{dt} = W \left[ \left[ \frac{Q^2}{2A} + gI_1 \right]_0 - \left[ \frac{Q^2}{2A} + gI_1 \right]_1 \right] - \left[ \frac{Q}{A} \left[ \frac{Q^2}{2A} + 2gI_1 \right] \right]_0 - \left[ \frac{Q}{A} \left[ \frac{Q^2}{2A} + 2gI_1 \right] \right]_1 = 0 \dots\dots\dots(3.47)$$

a qual é diferente de zero para qualquer situação que não seja fluxo contínuo.

Uma expressão equivalente a (3.47) para uma canal retangular de largura unitária é a seguinte (Stoker, 1957):

$$\frac{dE}{dt} = g (u_0 - W) h_0 \frac{(h_0 - h_1)^3}{4h_0 h_1} = g (u_1 - W) h_1 \frac{(h_0 - h_1)^3}{4h_0 h_1} \dots\dots\dots(3.48)$$

na qual  $u$  é a velocidade média na seção transversal e  $h$  é o tirante hidráulico.

Sendo que através de um "shock" existe uma diminuição de energia mecânica, esta expressão deverá ser menor que zero numa descontinuidade. Portanto a condição a ser satisfeita é

$$\frac{dE}{dt} < 0 ; g (u_0 - W) h_0 \frac{(h_0 - h_1)^3}{4h_0 h_1} = g (u_1 - W) h_1 \frac{(h_0 - h_1)^3}{4h_0 h_1} < 0 \dots\dots(3.49)$$

através de uma descontinuidade.

#### 4. ONDAS ABRUPTAS

##### 4.1. Principais características das ondas abruptas

Neste item consideram-se as equações de Saint Vénant escritas na forma diferencial mais geral para um canal de seção transversal retangular e uniforme sem entrada lateral e de largura unitária,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(4.1-a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(gh)}{\partial x} = g ( S_0 - S_f ) \dots\dots\dots(4.1-b)$$

Estas expressões na forma características são:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial(u+2c)}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial(u+2c)}{\partial x} = g ( S_0 - S_f ) \dots\dots\dots(4.2-a)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial(u-2c)}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial(u-2c)}{\partial x} = g ( S_0 - S_f ) \dots\dots\dots(4.2-b)$$

onde  $u$  é a velocidade média numa seção transversal,  $c$  a celeridade de pequenas perturbações em relação às partículas do fluido,  $h$  o tirante hidráulico,  $g$  a aceleração de gravidade;  $S_0$  a declividade do fundo do canal,  $S_f$  a declividade da linha de energia;  $x$  a coordenada espacial e  $t$  a coordenada temporal.

As ondas abruptas são o resultado das variações bruscas da vazão. Quando num contorno de um canal são produzidas mudanças significativas na vazão, originam-se ondas em direção oposta. Segundo essa mudança seja um aumento ou diminuição de vazão, desenvolver-se-ão ondas com frentes abruptas ou ondas que se dissipam ao longo do mesmo. Essas ondas são classificadas como positivas ou negativas em função de suas características. São positivas quando um ponto fixo no fluido experimenta, com o tempo, um aumento do tirante hidráulico. No caso de diminuição do tirante hidráulico são ditas negativas. A classificação anterior é equivalente às ondas de compressão e rarefação em dinâmica de gases, que se diferenciam por existir um aumento ou diminuição da pressão, respectivamente, num ponto fixo do fluido.

Numa onda positiva num canal verifica-se, (Terzidis e Strelkoff, 1970):

$$(u - W) \frac{dh}{dx} > 0 \dots\dots\dots(4.3)$$

onde  $W$  é a celeridade da onda,  $u$  é a velocidade média na seção transversal,  $h$  é o tirante hidráulico e  $x$  é a coordenada espacial.

As ondas positivas são caracterizadas pelo fato do campo de trajetórias características ser convergente. Este fenômeno é um efeito da não linearidade do fluxo, podendo-se originar descontinuidades nas funções como área, vazão, velocidade, etc. Quando isto ocorre, as mesmas ocupam uma zona estreita podendo ser considerada uma linha no plano  $x-t$ .

As ondas negativas apresentam um campo de trajetórias características divergentes tendendo a serem cada vez mais suaves as variações das funções de fluxo nela produzidas. Nestas não existe descontinuidades das funções de fluxo, só existe um ponto de descontinuidade na declividade da linha da água.

Quando uma onda positiva evolui no tempo formando uma descontinuidade, a mesma manifesta-se como uma grande perturbação. A ocorrência desta depende de determinados fatores relativos ao escoamento e às características físicas do canal. Entretanto que, as trajetórias características indicam, no plano  $x-t$ , o deslocamento de pequenas perturbações ou descontinuidades infinitesimais que viajam a montante e jusante num fluxo subcrítico e somente a jusante num fluxo supercrítico; as grandes perturbações ou frentes abruptas deslocam-se a montante ou jusante em qualquer tipo de regime de escoamento. Por outro lado, o tipo de fluxo que estas originam violam as hipóteses simplificativas do escoamento que levam às equações de Saint Vénant.

As descontinuidades tem uma celeridade ( $W$ ) menor à celeridade de pequenas perturbações ( $\frac{dx}{dt}$ ) atrás da mesma e maior à celeridade das pequenas perturbações na frente dela (Stoker, 1957). Como frente do "shock" define-se o lado pelo qual o fluxo atravessa o mesmo num sistema de coordenadas no qual  $W=0$ . Do anterior, deduz-se que numa frente abrupta interceptam-se trajetórias características. O fato de ser o campo das  $C^+$  ou das  $C^-$  depende do sentido de deslocamento da mesma para jusante ou para montante. Quando o deslocamento é para jusante nela interceptam-se as  $C^+$ . Caso contrário, interceptam-se as  $C^-$ . Isto é possível de ser expresso matematicamente empregando a equação da celeridade da descontinuidade em função da velocidade das partículas do fluido e dos tirantes hidráulicos a um e outro lado do "shock", como surge de isolar  $W$  das expressões (3.43-a,b) em função dos níveis

a ambos lados e a velocidade num deles.

$$W = u_f \pm \sqrt{g \frac{h_a}{h_f} \frac{h_a + h_f}{2}} \dots\dots\dots(4.5-a)$$

$$W = u_a \pm \sqrt{g \frac{h_f}{h_a} \frac{h_a + h_f}{2}} \dots\dots\dots(4.5-b)$$

O sub-índice *f* indica o lado da frente da descontinuidade e o *a*, o lado atrás da mesma.

Considera-se primeiro o caso de descontinuidade deslocando-se para jusante (fig. 4.1-(a)) no caso extremo de ser  $u_f = 0$ . Utilizando a expressão (3.48) da energia, substituindo *W* de (4.5-a) resulta:

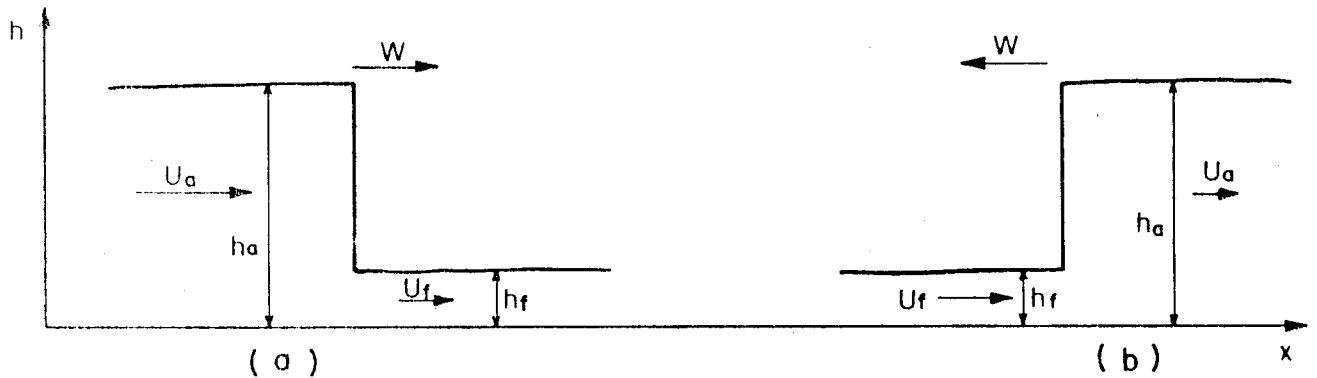


fig. 4.1 (a) Descontinuidade deslocando-se para jusante, (b) descontinuidade deslocando-se para montante.

$$g \left[ \mp \sqrt{g \frac{h_0}{h_1} \frac{h_0 + h_1}{2}} \right] h_1 \frac{(h_0 - h_1)^3}{4h_0 h_1} < 0 \dots\dots\dots(4.6)$$

O sub-índice 0, que indica montante, corresponde-se com *a* e *h* com *f*; portanto é  $h_0 > h_1$ ; sendo que em todos os casos presentes na natureza  $h_a > h_f$ .

Portanto, para que seja verificada a perda de energia através da descontinuidade deve ser satisfeita a expressão (4.6). Isto exige que seja escolhido o sinal negativo nessa expressão, que corresponde ao positivo nas expressões (4.5-a,b), resultando:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_f^+ = u_f + \sqrt{gh_f} < u_f + \sqrt{g \frac{h_a}{h_f} \frac{h_a + h_f}{2}} \dots\dots\dots(4.7-a)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_a^+ = u_a + \sqrt{gh_a} > u_a + \sqrt{g \frac{h_f}{h_a} \frac{h_a + h_f}{2}} \dots\dots\dots(4.7-b)$$

Isto por ser  $h_a > h_f$ , portanto:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_a^+ > W > \left(\frac{dx}{dt}\right)_f^+ \dots\dots\dots(4.7-c)$$

Assim, para a descontinuidade deslocando-se para jusante, as velocidades das pequenas e grandes perturbações cumprem com a relação (4.7).

Para uma onda positiva deslocando-se para montante, *fig. 4.1-(b)*, da mesma forma que no caso anterior, pode-se verificar que para a variação da energia ser negativa para  $W < 0$ , os sinais dos radicandos em (4.5-a,b) devem ser negativos. Assim resulta:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_f^- = u_f - \sqrt{gh_f} < u_f - \sqrt{g \frac{h_a}{h_f} \frac{h_a + h_f}{2}} \dots\dots\dots(4.8-a)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_a^- = u_a - \sqrt{gh_a} > u_a - \sqrt{g \frac{h_f}{h_a} \frac{h_a + h_f}{2}} \dots\dots\dots(4.8-b)$$

Também por ser  $h_a > h_f$ , fica:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_f^- > W > \left(\frac{dx}{dt}\right)_a^- \dots\dots\dots(4.8-c)$$

Por outra parte, aquele campo de características que não se interceptam numa descontinuidade, tem suas trajetórias interrompidas pela mesma. Pode-se interpretar que essas trajetórias são "refratadas" na descontinuidade, significando uma rápida variação em sua declividade ou velocidade de propagação para as pequenas perturbações.

#### 4.1.1. Campo de trajetórias características das ondas positivas e negativas

O campo de trajetórias características das ondas positivas e negativas pode-se analisar estudando a variação da declividade das linhas características no sentido do eixo  $x$  e no sentido das direções características. A primeira variação de declividade, em relação aos eixos  $x-t$ , serve para analisar se o campo é convergente ou divergente. Com esse fim empregam-se as equações (4.1-a,b) sem os termo da direita, para um canal sem declividade nem atrito.

As celeridades de pequenas perturbações no plano  $x-t$ , para este sistema segundo a expressão (3.13) são:  $(\frac{dx}{dt})^{\pm} = (u \pm c)$ .

A variação com relação ao eixo  $x$  dessas declividades, para um tempo fixo qualquer, caracteriza o campo de trajetórias dos tipos de onda, por ser convergente para as ondas positivas e divergente para as ondas negativas. Assim tem-se:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_x = (u \pm c)_x = \frac{d(u \pm c)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots(4.9)$$

Pelo fato de ter-se duas direções características, analisa-se o campo de uma ou outra segundo o sentido de deslocamento da onda. Isto pelo já comentado no item anterior em relação a qual das características,  $C^+$  ou  $C^-$ , são as que se interceptam numa descontinuidade. O campo de trajetórias características de interesse é o correspondente às  $C^+$  quando a mesma desloca-se para jusante por serem elas as que transportam a informação, e  $C^-$  quando a onda desloca-se para montante pela mesma razão. O anterior é válido no tempo anterior a uma descontinuidade se desenvolver no caso das ondas positivas. Nas *fig. 4.2-(a), (b), (c) e (d)*, são apresentadas os quatro casos possíveis de deslocamento de ondas positivas ou negativas num canal.

A variação da declividade de uma linha característica em seu percurso é obtido considerando a variação de  $(u \pm c)$  nas direções características. Assim para as  $C^+$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d(u+c)}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial c}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + c\frac{\partial h}{\partial x} \right] \dots\dots\dots(4.10) \end{aligned}$$



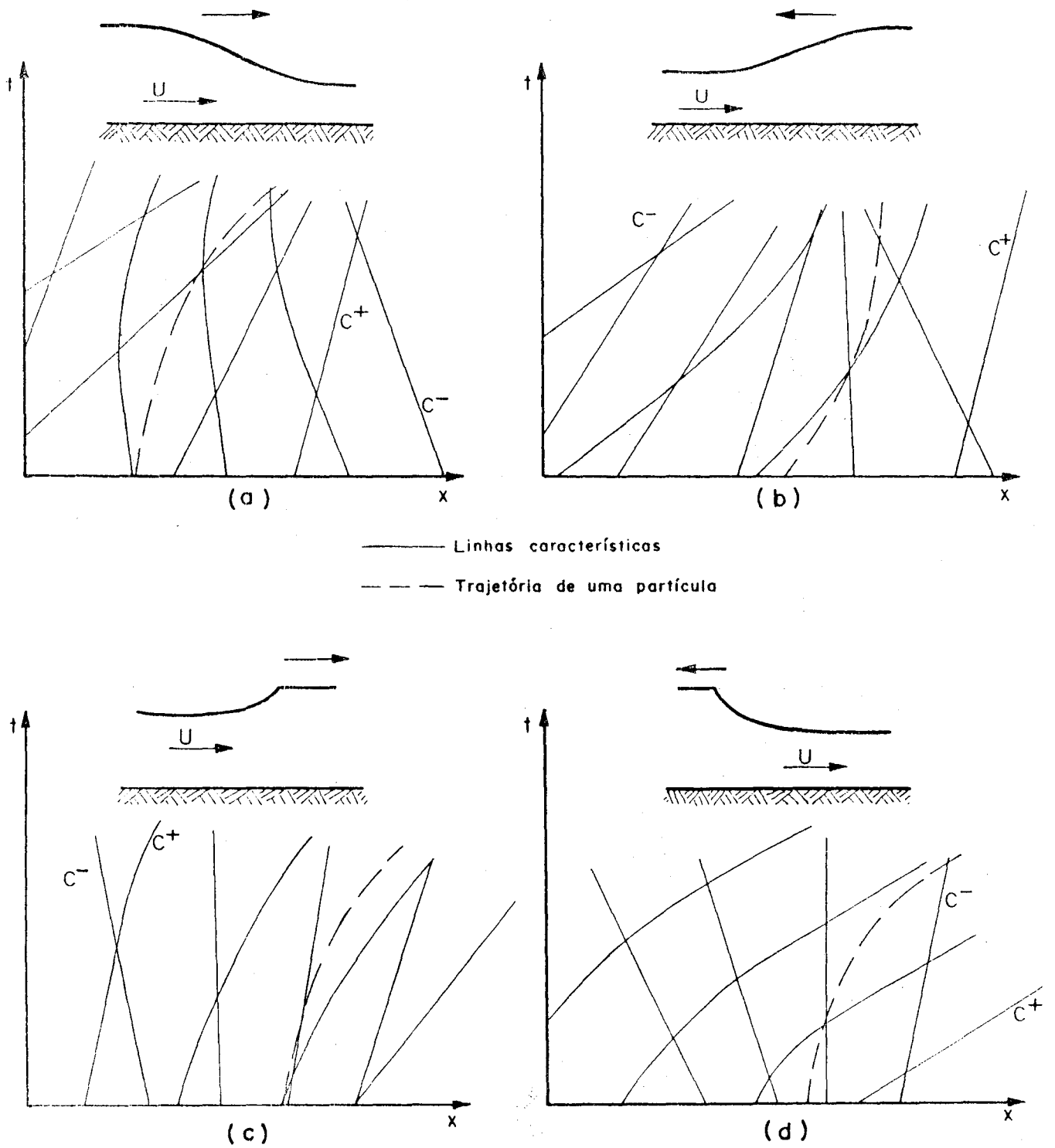


fig. 4.2-(a) Onda positiva deslocando-se para jusante,  
 (b) para montante, (c) onda negativa deslocando-se para jusante e  
 (d) para montante.

Substituindo  $\frac{\partial h}{\partial t}$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$  de (4.1-a) e (4.1-b) e reorganizando-se resulta,

$$\frac{d(u+c)}{dt} = \frac{g}{2} \left[ \frac{c}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right] \dots\dots\dots(4.11)$$

Para as  $C^-$  a mesma expressão fica:

$$\frac{d(u-c)}{dt} = - \frac{g}{2} \left[ \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + \frac{dh}{dx} \right] \dots\dots\dots(4.12)$$

As expressões (4.9), (4.11) e (4.12) são usadas para estudar a configuração do campo de trajetórias características dos quatro casos de ondas apresentados na *fig. 4.2*.

*caso 1:* onda positiva deslocando-se para jusante, *fig. 4.2-(a)*. Da expressão 4.9 analisa-se o campo das  $C^+$ . Neste caso  $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ , porém  $(u+c)_x < 0$ . Isto significa que a declividade das  $C^+$  aumenta na direção do semi-eixo positivo  $x$ , definindo o campo de trajetórias características como convergente, fato que caracteriza uma onda positiva. Da equação (4.12), para as  $C^-$ , tem-se que  $\frac{d(u-c)}{dt} > 0$ , significando que a declividade das  $C^-$  diminui com o tempo, representando linhas côncavas.

*caso 2:* onda positiva deslocando-se para montante, *fig. 4.2-(b)*. Na equação (4.5) analisam-se as  $C^-$ . Assim,  $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$ , porém  $(u-c)_x < 0$ . Isto mostra que a declividade das  $C^-$  aumenta com o aumento de  $x$ , definindo o campo das  $C^-$  como convergente. Observa-se que no caso de uma onda positiva as trajetórias características que se interceptam no "shock", uma vez este desenvolvido, serão as  $C^+$  ou as  $C^-$  dependendo do sentido de seu deslocamento. Da equação (4.11) tem-se  $\frac{d(u+c)}{dt} < 0$ , expressando um aumento da declividade, para qualquer  $C^+$ , com o aumento do tempo, sendo também linhas côncavas.

*caso 3:* onda negativa deslocando-se para montante, *fig. 4.2-(c)*. Da expressão (4.9) tem-se que para as  $C^-$ , sendo  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ , resulta  $(u-c)_x > 0$ , o que indica que a declividade das  $C^-$  aumenta no sentido positivo das  $x$ , sendo portanto divergente o campo de trajetórias características. Da equação (4.11) tem-se  $\frac{d(u+c)}{dt} > 0$ , sendo que diminui com o tempo a declividade de qualquer uma das  $C^+$ , sendo porém linhas convexas.

*caso 4*: onda negativa deslocando-se para jusante, *fig. 4.2-(d)*. Analisa-se as  $C^+$  na expressão (4.9). Assim,  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$ , tem-se  $(u + c)_x > 0$  sendo divergente o campo de trajetórias características  $C^+$  neste caso. Porém nos *casos 3 e 4* o campo de trajetórias características é divergente. De (4.12) tem-se que  $\frac{d(u-c)}{dt} < 0$ , indicando que a declividade das  $C^+$  aumenta com o tempo ao longo de si mesma. O campo das  $C^+$  é convexo.

Nos *casos 1 e 2* o campo de características é convergente, caracterizando uma onda positiva. Nos *casos 3 e 4* ocorre o contrário, indicando que uma onda negativa dissipa-se quando o tempo evolui.

#### 4.1.2. Evolução das ondas positivas e negativas

A solução de um problema de fluxo com equações não-homogêneas quase-lineares hiperbólicas pode desenvolver descontinuidades na solução, (Luskin, 1981 e Jeffrey, 1963). No entanto, num sistema quase-linear hiperbólico homogêneo sempre desenvolvem-se descontinuidades (Lax, 1973 e Richtmeyer, 1978). Essa evolução da solução é possível de se analisar utilizando  $(\frac{\partial r}{\partial x})$  ou  $(\frac{\partial s}{\partial x})$ , sendo  $r(x, t)$  e  $s(x, t)$  os invariantes de Riemann, expressões (3.33). Com alguma variante utilizam-se idéias propostas por Courant e Friedrichs (1948) e Jeffrey (1967) para analisar intuitivamente o que poderia acontecer com as ondas à medida que evolui o tempo.

A variação do invariante de Riemann  $r(x, t)$  na direção da trajetória característica  $C^+$ , equação (4.2-a), é:

$$\frac{dr(x, t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(u+2c) + (u+c) \frac{\partial}{\partial x}(u+2c) = g (S_0 - S_f) \dots \dots \dots (4.13)$$

e a celeridade da linha característica correspondente  $C^+$ :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 = u + \sqrt{gh} = (u + c) \dots \dots \dots (4.14)$$

Para um problema no qual, como condição inicial é tida uma onda deslocando-se no eixo  $x$  para  $t=0$ , formula-se a integral do invariante de Riemann  $r(x, t)$  ao longo de  $C^+$  num pequeno intervalo de tempo, para logo

expressar  $\frac{\partial r}{\partial x}$  como uma função do tempo e das variações da velocidades e níveis da onda com relação a  $x$ , para  $t=0$ .

As condições iniciais são:  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $h(x, 0) = h_0(x)$ . Por ser este um problema não-linear, o campo de trajetórias características é função da solução e esta, por sua vez, depende do anterior, o que faria necessário um processo iterativo na integração das funções anteriores. Portanto, os termos da direita das expressões (4.13) e (4.14) consideram-se constantes no intervalo de integração. Assim, linearizando e integrando as expressões (4.13) e (4.14) no intervalo  $0-t$ , tem-se:

$$\int_0^t d[r(x, t)] = \int_0^t g[S_0 - S_f] d\tau \dots \dots \dots (4.15)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (u_0 + c_0) d\tau \dots \dots \dots (4.16)$$

que resulta em:

$$(u + 2c) = (u_0 + 2c_0) + S_0 t - S_f t \dots \dots \dots (4.17)$$

$$x = x_0 + (u_0 + c_0) t \dots \dots \dots (4.18)$$

As variáveis com sub-índices  $0$  são funções do tipo  $f(x, 0)$ .

A variação de  $r(x, t)$  com relação a  $x$  é obtida por:

$$r(x, t)_x = (u + 2c)_x = \frac{\partial(u+2c)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} \dots \dots \dots (4.19)$$

Substituindo as funções (4.17) e (4.18) na equação (4.19) resulta:

$$r(x, t)_x = \frac{(u_0 + 2c_0)_{x_0}}{1 + (u_0 + c_0)_{x_0} t} - \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} 2t}{1 + (u_0 + c_0)_{x_0} t} - \frac{\frac{\partial S}{\partial x_0} f_0 t}{1 + (u_0 + c_0)_{x_0} t} \dots \dots \dots (4.20)$$

De (4.2-a) observa-se que naqueles casos nos quais  $r(x, t)_x$  torna-se

incontornável, a solução do problema torna-se descontínua. Empregando a expressão (4.9) para conhecer o sinal de  $(u_0 + c_0)_x$ , de (4.20) deduzem-se para quais das condições iniciais, onda positiva ou onda negativa, isso ocorre.

A seguir analisam-se as evoluções das ondas produzidas na ruptura instantânea de uma barragem, onda positiva deslocando-se para jusante e onda negativa deslocando-se para montante. Considera-se  $S_0$  constante ao longo do eixo  $x$  na equação (4.20) e seção do canal constante.

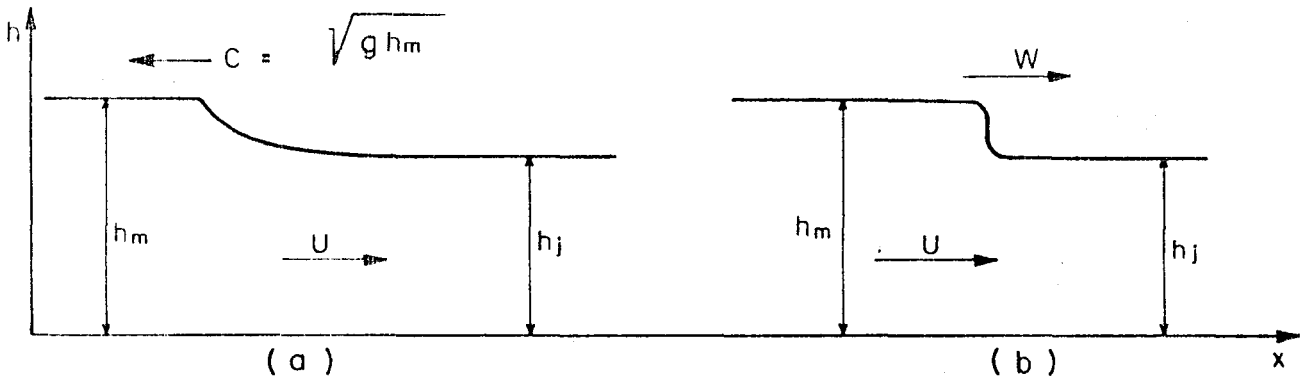


fig. 4.3 (a) Onda positiva deslocando-se para jusante e (b) onda negativa deslocando-se para montante

*caso 1:* onda positiva deslocando-se para jusante como condição inicial no canal, *fig. 4.3(a)*. Neste caso tem-se  $\frac{\partial u}{\partial x_0} < 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x_0} < 0$  e pela expressão (4.9)  $(u_0 + 2c_0)_{x_0} < 0$  e  $\frac{\partial S}{\partial x_0} f_0 < 0$ . Porém quando

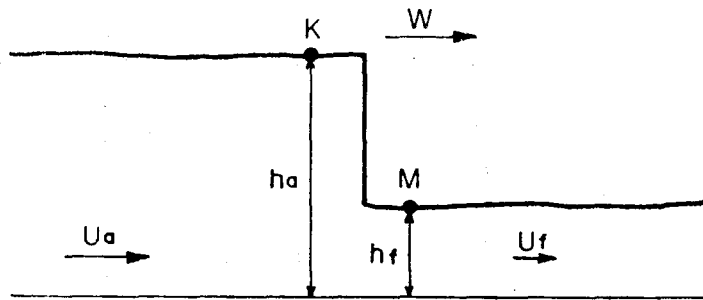
$$| (u_0 + 2c_0)_{x_0} | > | \frac{\partial S}{\partial x_0} f_0 | \dots \dots \dots (4.21)$$

seria de esperar que uma descontinuidade aconteça na solução. Observa-se que os efeitos do atrito nos contornos rígidos do canal são dissipativos, tendo porém efeitos contrapostos à não-linearidade do fluxo, que tem tendência a tornar mais abrupta a onda (Gunaratnam e Perkins, 1970). Quando (4.21) é satisfeita, então de (4.20) tem-se que nos primeiros instantes  $(u + 2c)_x < 0$ , e pela expressão (4.9)  $(u_0 + c_0) < 0$ , resultando que a tendência com o tempo é que  $(u + 2c)_x \Rightarrow -\infty$ , prevendo-se que uma descontinuidade poderia acontecer na solução.

caso 2: Onda negativa deslocando-se a montante, *fig. 4.3-(b)*, como condição inicial. Tem-se  $\frac{\partial u}{\partial x_0} > 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x_0} < 0$  e por expressão (4.9),  $(u_0 + 2c_0)_{x_0} > 0$  e  $(u_0 + c_0)_{x_0} > 0$  e  $\frac{\partial Sf}{\partial x_0} > 0$ . Porém a tendência é que o denominador aumente com o tempo, significando que  $(u + 2c)_x \rightarrow 0$ , prevendo-se que a onda com o tempo se dissipe, já que a variação com relação a  $x$  de  $r(x, t)$  tende a anular-se.

#### 4.2. Solução de problemas de fluxo com descontinuidades

Após desenvolvida uma descontinuidade na região de definição da solução de um problema será necessário o emprego das equações diferenciais e as relações através de descontinuidades para solucionar o mesmo. Neste item escolheu-se como exemplo uma descontinuidade na qual se origina uma mudança do regime de fluxo conjuntamente com a descontinuidade, por ser este o problema para o qual foi empregado um método de tipo "shock fitting" na parte correspondente à solução numérica.



*fig. 4.4 Descontinuidade deslocando-se para jusante*

Considera-se uma onda abrupta com regime supercrítico deslocando-se num fluido em repouso num canal sem declividade nem atrito, *fig. 4.4*. As funções área e vazão têm um ponto de descontinuidade, mantendo-se constante nas restantes partes do fluxo. Neste problema existe conservação da quantidade de movimento linear sendo, porém, possível de se resolver de forma algébrica. A *fig. 4.5* mostra o campo de características para o mesmo. Têm-se dois campos de linhas características,  $C^+$  e  $C^-$ , as quais são  $(\frac{dx}{dt})_{1,2} > 0$  na zona de

fluxo supercrítico e  $(\frac{dx}{dt})_1 > 0$ ,  $(\frac{dx}{dt})_2 < 0$  na zona de fluxo subcrítico.

Numa descontinuidade interceptam-se as características  $C^+$  ou  $C^-$  segundo esta se movimentam para jusante ou para montante, respectivamente. As trajetórias características que não se interceptam na descontinuidade são côncavas ou têm nela uma mudança brusca de suas declividades.

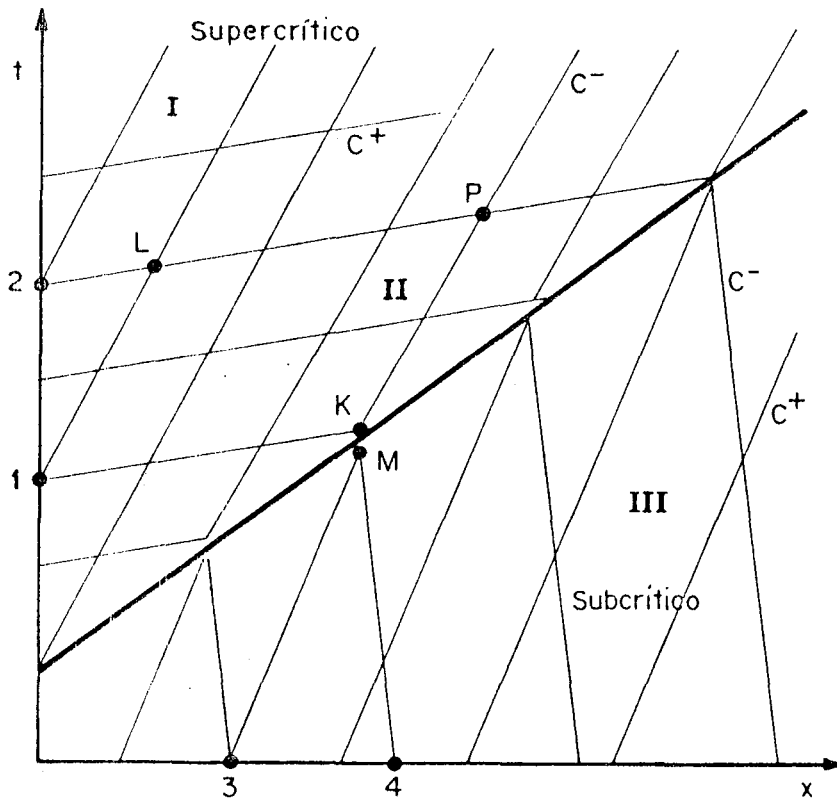


fig. 4.5 Campo de trajetórias características para uma frente abrupta movimentando-se para jusante

Aquelas linhas características que se interceptam na descontinuidade têm sua origem num contorno, no entanto, o segundo campo terá linhas características que surgem na descontinuidades sendo, porém, necessário dar uma condição de contorno nela. Essa condição será a informação levada de um para o outro lado da descontinuidade através das relações de Rankine-Hugoniot, expressões (3.41) ou (3.43). Da mesma forma que o caso geral, tem-se uma condição de contorno para cada característica que ingressa na região de definição da solução no plano  $x-t$ . As setas na fig. 4.6 indicam o sentido no qual é levada a informação através de uma descontinuidade.

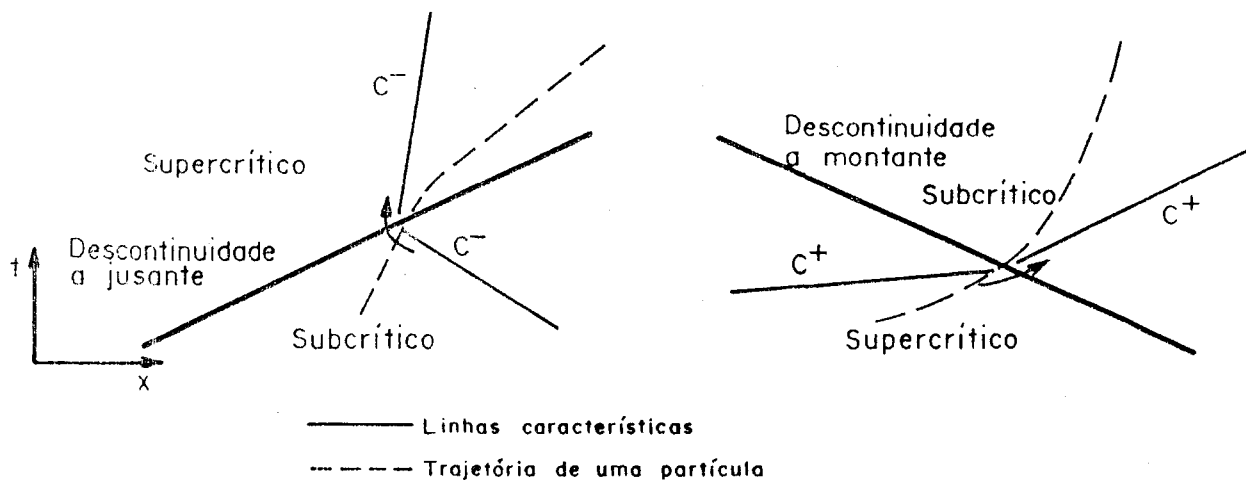


fig. 4.6 Sentido no qual a informação é transportada através de uma descontinuidade

Portanto, baseado no campo de trajetórias características, é possível separar em três zonas o plano  $x-t$ , segundo a forma de se achar a solução: zonas I, II e III, fig. 4.5. Nas zonas I e III a solução é calculada a partir de informações nos contornos do plano  $x-t$ . Para o ponto genérico L da zona I, para um canal sem declividade nem atrito, das equações (4.2-a,b) tem-se:

$$u_L - 2c_L = u_1 - 2c_1 \dots \dots \dots (4.22)$$

$$u_L + 2c_L = u_2 + 2c_2 \dots \dots \dots (4.23)$$

nas quais  $u_1, u_2, c_1$  e  $c_2$  são conhecidos. Sendo duas as características que ingressam no domínio da solução, são duas as condições dadas em  $(x=0, t)$ . Para um ponto genérico M da zona III tem-se:

$$u_M + 2c_M = u_3 + 2c_3 \dots \dots \dots (4.24)$$

$$u_M - 2c_M = u_4 - 2c_4 \dots \dots \dots (4.25)$$



e outra vez  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são conhecidos.

A zona II, ao contrário das outras duas zonas, é solucionada com a informação de um contorno fixo mais a informação através da descontinuidade ou contorno móvel. Para calcular a solução num ponto  $P$  da zona II, previamente é necessário conhecer a solução na vizinhança da descontinuidade a montante, no ponto  $K$ . Neste caso, têm-se como incógnitas  $u_K$ ,  $c_K$  e  $W$ . As equações são (3.43-a), (3.43-b) e (4.2-a) para a característica  $C^+$  que passa pelos pontos  $I$  e  $K$ . Porém a solução nele não só depende das condições de montante, mas também de jusante, que é o lado contrário da descontinuidade, isto por ser  $W > u-c$  para essa zona, neste caso.

Assim, eliminando  $W$  de (3.43-a) e (3.43-b) fica o seguinte sistema de equações:

$$u_K + 2c_K = u_1 + 2c_1 \dots \dots \dots (4.26)$$

$$\left[ (uh)_a - (uh)_f \right]^2 = \left[ (u^2h)_a + \left(\frac{h^2g}{2}\right)_f - (u^2h)_a - \left(\frac{h^2g}{2}\right)_f \right] (h_a - h_f) \dots \dots \dots (4.27)$$

Sendo que  $c_K = \sqrt{gh_K}$ , neste caso existem duas incógnitas  $c_K$ ,  $u_K$  e duas equações, uma das quais é não-linear. Isto significa que existe mais de uma solução e será, porém, necessária uma outra condição para determinar qual delas é a real. Esta condição é a equação da energia perdida na descontinuidade, expressão (3.49),

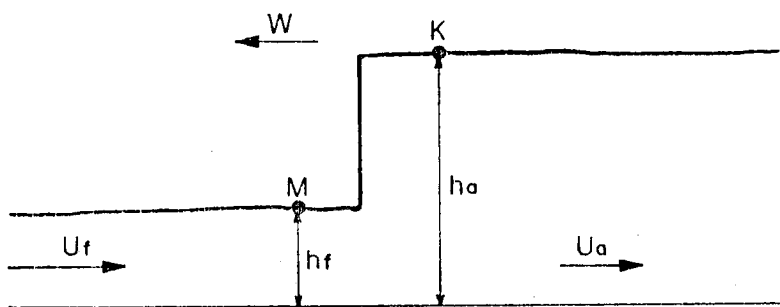


fig. 4.7 Descontinuidade deslocando-se para montante

$$\frac{dE}{dt} = g \left[ u_K - w \right] h_K \frac{(h_K - h_M)^3}{4h_K h_M} = g \left[ u_M - w \right] h_M \frac{(h_K - h_M)^3}{4h_K h_M} < 0 \dots \dots \dots (4.28)$$

Portanto será escolhida como a solução real, aquela para a qual a variação da energia seja negativa.

Logo, para conhecer a solução em qualquer ponto no interior da zona II, o procedimento é o mesmo ao empregado para as zonas I e III por ser já conhecida a solução no contorno da descontinuidade, no ponto K.

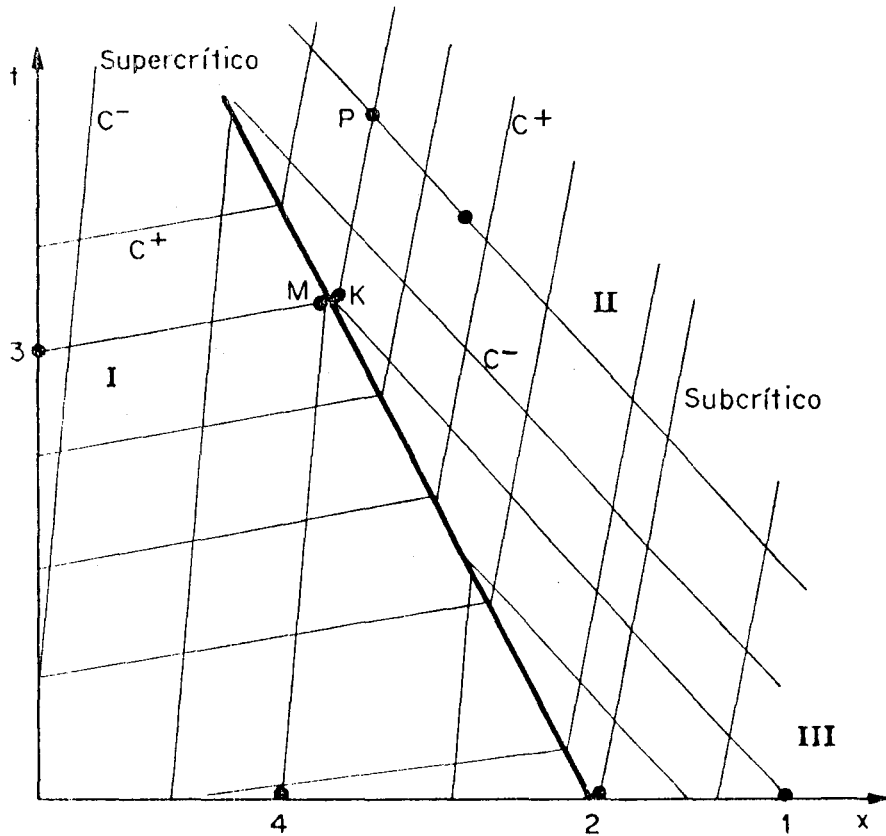


fig. 4.8 Campo de trajetórias características para uma frente abrupta movimentando-se para montante

No caso da descontinuidade deslocar-se para montante, como no caso anterior com fluxo supercrítico a montante e subcrítico a jusante, como é apresentado nas fig. 4.7 e 4.8, cumpre-se o comentado anteriormente. Neste caso a configuração do campo de trajetórias características resulta igual ao caso anterior, com a diferença que neste último caso a zona influenciada pela

descontinuidade, *zona II*, tem fluxo subcrítico. Nas *zonas I* e *III* a solução é achada com base nas condições de contorno ou condições iniciais. Na região da *zona II* a solução é achada com base nas direções características negativas da zona subcrítica e as relações através das descontinuidades, sendo que a montante da descontinuidade a solução é conhecida. Neste caso, as trajetórias características que ingressam na *zona II* são as  $C^+$ . Assim, para calcular a solução no ponto *K* das *fig. 4.7* e *4.8* são empregadas as equações (3.43-a) e (3.43-b) mais a equação (4.2-b) para a trajetória característica  $C^-$  que passa pelos os pontos *I* e *K*, sendo que a solução é conhecida no ponto *M*. Também neste caso tem-se mais de uma solução e, portanto, é necessário a condição (3.47) ou (3.49) para definir qual é a solução real.

#### 4.3. Problema de ruptura total e instantânea de barragem

Este é um dos problemas clássicos mais estudados de ondas abruptas. O problema de ruptura total e instantâneo de barragem refere-se à solução do fluxo ocasionado pelo desaparecimento súbito de uma barreira que separa dois estados iniciais, diferentes num canal sem declividade nem atrito, *fig. 4.9(a), (b)*. A formulação do mesmo, segundo as equações de Saint Vénant, tem solução analítica. Estas equações não mostram exatamente o que ocorre na realidade, já que nos primeiros instantes o fluxo apresenta características muito complexas mas, fornecem muita informação necessária na prática.

Este problema teórico de ruptura total e instantânea de barragem, ou problema de Riemann, apresenta as características mais importantes do escoamento deste fenômeno. O deslocamento de uma onda negativa para montante no reservatório e uma onda positiva para jusante no vale de inundação. Esta última pode, ou não, produzir mudança no regime de fluxo de subcrítico para supercrítico dependendo da relação<sup>1</sup> dos níveis nos dois lados da barreira, no estado inicial.

A *fig. 4.9-(b)* apresenta o campo de trajetórias características. Este permite definir uma *zona 1* de fluxo não perturbado no reservatório a montante

---

<sup>1</sup> Sendo  $h_0$  o nível inicial a jusante da barreira e  $h_1$  a montante da mesma, quando  $h_0/h_1 < 0.133$  existirá mudança de regime de fluxo.

da onda negativa, uma *zona 0* de fluxo não perturbado a jusante da onda positiva, que se desloca para jusante. A onda positiva define uma *zona 2*, a montante da frente abrupta, com velocidade e níveis constantes. Um e outro destes estados estão relacionados pelas equações (3.43-a,b). A *zona 1* e 2 estão unidas pela *zona 3* que corresponde à onda negativa que se desloca no reservatório.

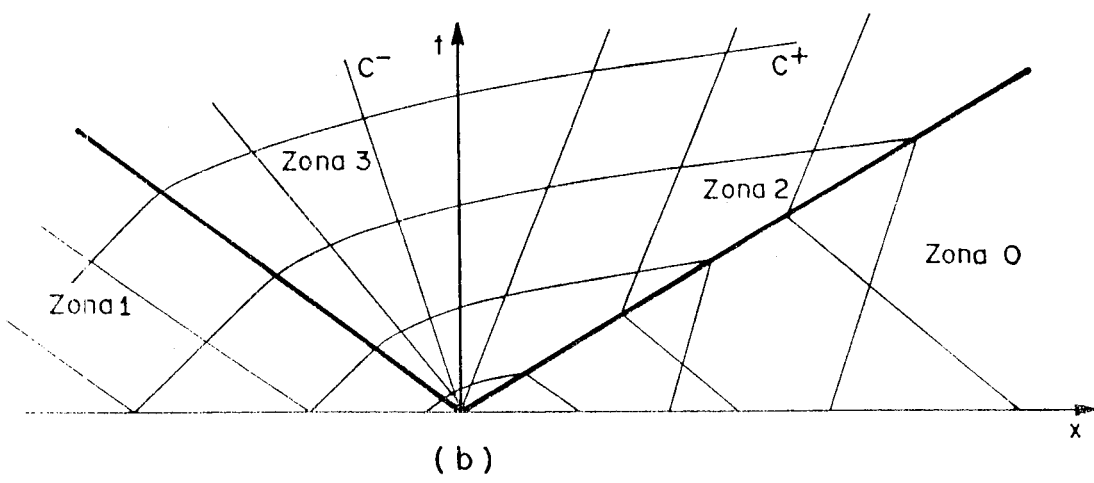
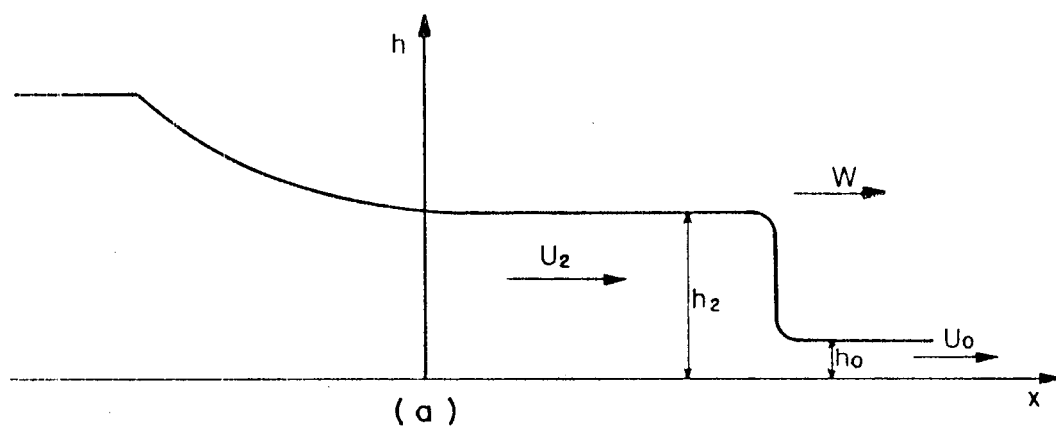


fig 4.9 (a) Esquema teórico do problema de ruptura total e instantânea para um tempo determinado, (b) campo de trajetórias características

Em cada zona de fluxo a solução analítica é achada de forma diferente. As zonas 1 e 0 têm soluções conhecidas por serem ambas condições iniciais. Na zona 2 a solução é calculada usando as relações através de descontinuidades (3.43-a,b) e empregando uma trajetória característica  $C^+$  da zona 1, similar ao comentado no item 4.2. Na zona 3 a solução é calculada com base do estado na zona 1 com as equações da onda centrada ou onda negativa.

A forma de expor a solução corresponde a Stoker (1957), a qual é uma apresentação analítica conveniente que emprega funções possíveis de se graficar, oferecendo a solução gráfica de um problema de forma rápida. As relações através das descontinuidades (3.43-a) e (3.43-b), em função da celeridade de pequenas perturbações, são:

$$W ( c_0^2 - c_2^2 ) = u_0 c_0^2 - u_2 c_2^2 \dots\dots\dots(4.29-a)$$

$$W ( u_0 c_0^2 - u_2 c_2^2 ) = u_0^2 c_0^2 + \frac{c_0}{2} u_2^2 c_2^2 - \frac{c^4}{2} \dots\dots\dots(4.29-b)$$

Para o caso de  $u_0=0$ , eliminando  $c_2$  de (4.29-a) e (4.29-b) e reorganizando-se, resulta a expressão:

$$\left[ \frac{W}{c_0} \right]^3 - \left[ \frac{W}{c_0} \right]^2 \left[ \frac{u_2}{c_0} \right] - \left[ \frac{W}{c_0} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{u_2}{c_0} \right] - \left[ \frac{u_2}{c_0} \right] \left[ \frac{W}{c_0} \right]^2 + \left[ \frac{u_2}{c_0} \right]^2 \left[ \frac{W}{c_0} \right] = 0 \dots\dots\dots(4.30)$$

Considerando  $\left( \frac{W}{c_0} \right)$  como variável independente nesta função, tem-se:

$$\frac{u_2}{c_0} = \frac{W}{c_0} - \frac{c_0}{4W} \left[ 1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{W}{c} \right)^2} \right] \dots\dots\dots(4.31)$$

De outro lado, eliminando  $u_2$  de (4.29-a) e (4.29-b) é obtida:

$$\frac{c_2}{c_0} = \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \left( \frac{W}{c} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \dots\dots\dots(4.32)$$

Além do mais, uma das trajetórias características  $C^+$  na zona 3 parte da zona 1 com solução conhecida,  $u_1=0, h_1$ . Porém, a invariante de Riemann para

a mesma é:

$$2 c_1 = u_3 + 2 c_3 \dots \dots \dots (4.33)$$

sendo que  $u_3$  e  $c_3$  são velocidade e celeridade de pequenas perturbações na zona 3. As trajetórias características  $C^-$  desta zona tem velocidade:

$$\frac{dx}{dt} = u_3 - c_3 \dots \dots \dots (4.34)$$

De (4.33) e (4.34) tem-se a solução para a zona 3, sendo:

$$h_3(x, t) = \frac{1}{9g} \left[ 2 c_1 - \frac{x}{t} \right]^2, \quad \text{para } t > 0 \dots \dots \dots (4.35)$$

$$c_3(x, t) = \frac{1}{3} \left[ 2 c_1 - \frac{x}{t} \right], \quad \text{para } t > 0 \dots \dots \dots (4.36)$$

$$h_3(x, t) = \frac{2}{3} \left[ c_1 + \frac{x}{t} \right], \quad \text{para } t > 0 \dots \dots \dots (4.37)$$

Quando a zona 3 inclui o eixo  $t$ ,  $h_3(0, t)$ ,  $c_3(0, t)$ ,  $u_3(0, t)$  são constantes e independentes do tempo, sendo:

$$c_3(0, t) = \frac{1}{3} 2 c_1 = u_3(0, t) \dots \dots \dots (4.38)$$

que é a condição de fluxo crítico para o ponto original da barreira.

De outro lado as  $C^+$ , *fig. 4.9-(b)*, ligam a zona 1 com a zona 2 tendo-se portanto, que:

$$2 c_1 = u_3 + 2 c_3 = u_2 + 2 c_2 \dots \dots \dots (4.39)$$

que é igual a,

$$2 \frac{c_1}{c_0} = \frac{u_2}{c_0} + 2 \frac{c_2}{c_0} = 2 \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \dots \dots \dots (4.41)$$

As funções (4.31), (4.32) e (4.40) são graficadas, *fig. 4.10*, permitindo

resolver o problema na forma gráfica. Para uma condição inicial  $\frac{h_1}{\bar{h}_0} \geq 1$ , determina-se graficamente ou analiticamente  $W/c_0$ , da mesma forma  $c_2/c_0$  e  $u_2/c_0$ .

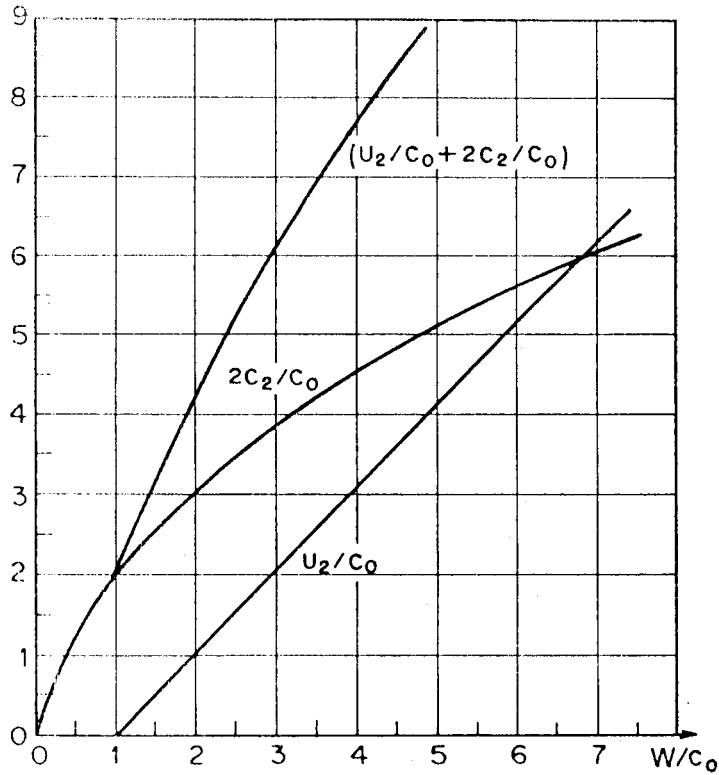


fig. 4.10 Solução gráfica para o problema de ruptura total e instantânea de barragem num canal sem declividade nem atrito (Stoker, 1957).

## 5. MODELO NUMÉRICO

### 5.1.1. Forma discreta do sistema de equações divergentes de Saint Vénant

As equações de Saint Vénant empregadas na resolução numérica é o sistema em forma divergente, equações (3.2) com (3.4). O método numérico de resolução é o esquema numérico implícito de quatro pontos Preissmann. A forma generalizada desse esquema, apresentada por Lyn-Goodwin (1987), é a seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \left\{ \phi \left[ f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n \right] + (1-\phi) \left[ f_i^{n+1} - f_i^n \right] \right\} \frac{1}{\Delta t} \dots \dots \dots (5.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \left\{ \theta \left[ f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n \right] + (1-\theta) \left[ f_{i+1}^n - f_{i+1}^{n+1} \right] \right\} \frac{1}{\Delta x} \dots \dots \dots (5.2)$$

$$f \cong \theta \left[ \phi f_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) f_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi f_{i+1}^n + (1-\phi) f_i^n \right] \dots \dots \dots (5.3)$$

nas quais  $\theta$  representa o coeficiente de peso no tempo,  $\phi$  o coeficiente de peso no espaço,  $\Delta x$  o incremento de comprimento,  $\Delta t$  o incremento de tempo (*fig. 5.1*) e  $f$  é uma função de fluxo qualquer. Aplicando (5.1), (5.2) e (5.3) a (3.2) com (3.4) ficam as seguintes formas discretas das equações de Saint Vénant, usadas na resolução numérica:

$$F_1(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) = 0 \dots \dots \dots (5.4-a)$$

$$F_2(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) = 0 \dots \dots \dots (5.4-b)$$

No Anexo-A1 são apresentadas as equações (5.4-a,b), por extenso.

### 5.1.2. Forma discreta do sistema de equações características de Saint Vénant

As formas diferenciais características das equações de Saint Vénant, expressões (3.25), para cada direção característica na forma extensa são:

$$\left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] A_t + \left[ \left( \frac{Q}{A} \right)^2 - \left[ g \frac{\partial I_1}{\partial A} \right] \right] A_x - Q_t - \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] Q_x -$$



$$-\left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(5.5-a)$$

$$\left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] A_t + \left[ \left[ \frac{Q}{A} \right]^2 - \left[ g \frac{\partial I_1}{\partial A} \right] \right] A_x - Q_t - \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] Q_x -$$

$$-\left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(5.5-b)$$

nas quais  $A_x$ ,  $A_t$ ,  $Q_x$  e  $Q_t$  representam as variações da área  $A$  e vazão  $Q$  em relação aos eixos coordenados ortogonais  $x-t$ .

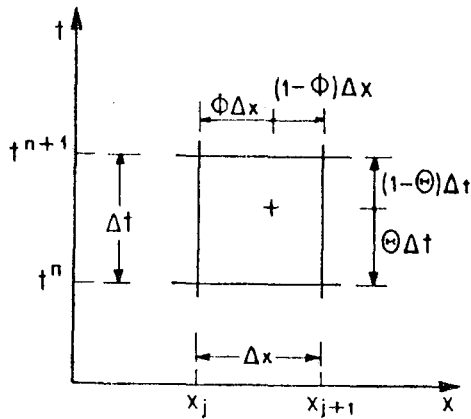


fig. 5.1. Critério de discretização do esquema generalizado de Preissmann.

Considerando as seguintes funções, para maior simplicidade:

$$G_1 = \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right], \quad G_2 = \left[ \left[ \frac{Q}{A} \right]^2 - \left[ g \frac{\partial I_1}{\partial A} \right] \right], \quad G_3 = \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \dots\dots(5.6)$$

Substituindo (5.6) em (5.5-a,b), resulta:

$$G_1 A_t + G_2 A_x - Q_t - G_3 Q_x - G_3 q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(5.7-a)$$

$$G_3 A_t + G_2 A_x - Q_t - G_1 Q_x - G_3 q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(5.7-b)$$

As expressões (5.7-a,b) são discretizadas segundo o esquema de Preissmann, expressões (5.1) e (5.2) para as derivadas  $A_x$ ,  $A_t$ ,  $Q_x$ ,  $Q_t$  e expressão (5.3) para as funções  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , etc., resultando:

$$F_1(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) = 0 \dots \dots \dots (5.8-a)$$

$$F_2(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) = 0 \dots \dots \dots (5.8-b)$$

que são as formas discretas das equações diferenciais características de Saint Vénant e, são incluídas no ANEXO-A2 por extenso.

Estas expressões são empregadas atrás de uma descontinuidade de forma totalmente implícita, como é comentado no item 5.3.

É conhecido o fato das equações diferenciais características expressarem as derivadas das variáveis,  $A$  e  $Q$  neste caso, na direção das direções características. Mas, dado que a malha de diferenças finitas está referenciada aos eixos  $x-t$  observa-se a conveniência da discretização com relação a esses eixos.

### 5.2. Resolução do sistema de equações discretizadas

Na resolução das expressões (5.4) para achar as incógnitas  $A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}$ , emprega-se o método de Newton. É comentado, de forma geral, a resolução com uma ou mais de uma iteração e a resolução de fluxo subcrítico e supercrítico; por serem todas elas opções de cálculo usadas na resolução numérica dos testes apresentados no item 6.

Expandindo por Taylor até os termos de primeira ordem as  $F_i$  das expressões (5.4) tem-se:

$$F_{1,2}^{n+1} = F_{1,2}^n + \Delta F_{1,2} \dots \dots \dots (5.9)$$

sendo  $\Delta F_{1,2}$  igual a  $dF_{1,2}$ . Assim resulta o seguinte sistema para cada sub-trecho de canal:

$$F_1^{n+1} = F_1^n + dF_1 = 0 \dots \dots \dots (5.10-a)$$

$$F_2^{n+1} = F_2^n + dF_2 = 0 \dots \dots \dots (5.10-b)$$

que na forma extensa são:

$$F_1^{n+1} = F_1^n + \frac{\partial F_1^n}{\partial A_{i+1}} dA_{i+1} + \frac{\partial F_1^n}{\partial Q_{i+1}} dQ_{i+1} + \frac{\partial F_1^n}{\partial A_i} dA_i + \frac{\partial F_1^n}{\partial Q_i} dQ_i = 0 \dots \dots \dots (5.11-a)$$

$$F_2^{n+1} = F_2^n + \frac{\partial F_2^n}{\partial A_{i+1}} dA_{i+1} + \frac{\partial F_2^n}{\partial Q_{i+1}} dQ_{i+1} + \frac{\partial F_2^n}{\partial A_i} dA_i + \frac{\partial F_2^n}{\partial Q_i} dQ_i = 0 \dots \dots \dots (5.11-b)$$

Considerando as derivadas parciais e funções em (5.11) segundo:

$$a_i = \frac{\partial F_1}{\partial A_{i+1}}; \quad b_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_{i+1}}; \quad c_i = \frac{\partial F_1}{\partial A_i}; \quad d_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}; \quad e_i = -F_1^n \dots (5.12-a)$$

$$a_j = \frac{\partial F_2}{\partial A_{i+1}}; \quad b_j = \frac{\partial F_2}{\partial Q_{i+1}}; \quad c_j = \frac{\partial F_2}{\partial A_i}; \quad d_j = \frac{\partial F_2}{\partial Q_i}; \quad e_j = -F_2^n \dots (5.12-b)$$

sendo que  $dA_i = \Delta A_i$ ,  $dQ_i = \Delta Q_i$ ,  $dA_{i+1} = \Delta A_{i+1}$ ,  $dQ_{i+1} = \Delta Q_{i+1}$ , o sistema (5.11) resulta:

$$c_i \Delta A_i + d_i \Delta Q_i + a_i \Delta A_{i+1} + b_i \Delta Q_{i+1} = e_i \dots \dots \dots (5.13-a)$$

$$c_j \Delta A_i + d_j \Delta Q_i + a_j \Delta A_{i+1} + b_j \Delta Q_{i+1} = e_j \dots \dots \dots (5.13-b)$$

As expressões (5.12) são apresentadas de forma completa no Anexo-A1. No ANEXO-B é apresentada uma demonstração sobre a equivalência de Preissmann<sup>1</sup> linear com uma iteração do método de Newton, para uma função simples.

Na simulação de escoamento num trecho de rio ou canal ficam duas expressões para cada sub-trecho, mais duas expressões do seguinte tipo como condições de contorno,

$$F_{k1}^{n+1} = F_{K1}^n + \Delta F_{K1} = F_{k1}^n + \frac{\partial F_{k1}^n}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial F_{k1}^n}{\partial Q_1} dQ_1 = 0 \dots \dots \dots (5.14-a)$$

---

<sup>1</sup> De (5.12) e (5.13) é possível observar a equivalência de uma iteração do método de resolução de Newton com a forma proposta na literatura (Liggett e Cunge, 1975) para calcular a solução do sistema formado por (5.4) para o caso linear, geralmente denominado método de Preissmann linear.

$$F_{k2}^{n+1} = F_{k2}^n + \Delta F_{k2} = F_{k2}^n + \frac{\partial F_{k2}^n}{\partial A_2} \Delta A_2 + \frac{\partial F_{k2}^n}{\partial Q_2} \Delta Q_2 = 0 \dots \dots \dots (5.14-b)$$

Empregando igual notação das expressões acima, resulta:

$$ck_1 \Delta A_1 + dk_1 \Delta Q_1 = ek_1 \dots \dots \dots (5.15-a)$$

$$ck_2 \Delta A_2 + dk_2 \Delta Q_2 = ek_2 \dots \dots \dots (5.15-b)$$

Para regime subcrítico, a expressão (5.15-a) corresponde ao limite de montante e (5.15-b) ao limite de jusante. Portanto, tem-se um sistema de  $NL+2$  equações lineares a ser resolvido, onde  $NL$  é o número de sub-trechos do canal, como é expressado em (5.16).

$$\begin{bmatrix} ck_1 & dk_1 & & & & \\ \dots & \dots & & & & \\ & & c_i & d_i & a_i & b_i \\ & & c_j & d_j & a_j & b_j \\ \dots & & & & & \\ & & & & ck_2 & dk_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ek_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ ek_2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5.16)$$

No sistema (5.16), 1 e 2 referem-se às seções de montante e jusante do trecho de translado. As equações são lineares devido aos coeficientes serem avaliados no tempo ou na iteração anterior.

Para regime supercrítico resolve-se um sistema de quatro equações para cada sub-trecho, começando no limite de montante. Neste caso as expressões (5.15-a,b) são duas condições de contorno dadas no extremo de montante de cada sub-trecho.

Quando é feita mais de uma iteração, para regime subcrítico ou supercrítico -denominada resolução iterada ou não-linear- as variáveis  $A_i^{n+1}$ ,  $Q_i^{n+1}$ ,  $A_{i+1}^{n+1}$ ,  $Q_{i+1}^{n+1}$  atualizam-se em cada iteração ( $k$ ) do seguinte modo:

$$\left[ f^{n+1} \right]^k = \left[ f^{n+1} \right]^{k-1} + \Delta f \dots \dots \dots (5.17)$$

Na primeira iteração ( $k=1$ ) as incógnitas  $A_{i+1}^{n+1}$ ,  $Q_{i+1}^{n+1}$ ,  $A_i^{n+1}$ ,  $Q_i^{n+1}$  consideram-se iguais a  $A_{i+1}^n$ ,  $Q_{i+1}^n$ ,  $A_i^n$ ,  $Q_i^n$ , respectivamente.

O processo iterativo repete-se até satisfazer uma condição de convergência

do seguinte tipo:

$$| \Delta A | \leq | \varepsilon A_{min} | \dots\dots\dots(5.18)$$

$$| \Delta Q | \leq | \varepsilon Q_{min} | \dots\dots\dots(5.19)$$

$$| F_{1,2} | \leq \zeta \dots\dots\dots(5.20)$$

sendo  $A_{min}$  e  $Q_{min}$  a mínima área e a mínima vazão no canal no tempo  $(n)\Delta t$  e,  $\varepsilon$  e  $\zeta$  são tomados próximos a 0.01.

### 5.3.Solução numérica de descontinuidades

Na solução numérica de uma descontinuidade na qual ocorre mudança de regime, localiza-se a mesma solucionando-se o fluxo em ambos lados, para logo unir estes com as relações através das descontinuidades mais a equação de uma característica no sub-trecho atrás da descontinuidade, como foi comentado no capítulo 4. A equação empregada é a  $C^+$  quando a descontinuidade movimenta-se para jusante e a  $C^-$  quando a mesma movimenta-se para montante, denominado como método de tipo "shock fitting". Nos casos de simulação de descontinuidade sem mudança de regime, a solução é calculada diretamente sem localizar a mesma, fazendo uso do caráter dissipativo do esquema numérico de Preissmann, o que é denominado "through methods".

O método de tipo "shock fitting" consiste numa separação "aproximada" do trecho de translado num sub-trecho com fluxo subcrítico e outro com regime supercrítico. Logo é realizado o cálculo em ambos sub-trechos em forma separada e unidos com o cálculo na descontinuidade. Por último, essa separação "aproximada" é verificada e o cálculo é refeito, se necessário.

Com este fim, antes de realizar o cálculo no tempo  $(n+1)\Delta t$ , calcula-se a posição aproximada da descontinuidade para esse tempo em função da posição e velocidade da mesma em  $(n)\Delta t$ . Com esse objetivo identifica-se o sub-trecho  $\Delta x$  no qual ocorre a mudança de regime em  $(n)\Delta t$  com base no número de Froude. A nova posição é calculada com a velocidade da frente no tempo  $(n)\Delta t$ , equação (3.41-a):

$$W^R = \frac{Q_0 - Q_1}{A_0 - A_1} \dots \dots \dots (5.21)$$

na qual 0 e 1 indicam valores a montante e jusante da descontinuidade, respectivamente. Logo a distância percorrida pelo "shock" no  $\Delta t$  é:

$$\Delta X = W^R \Delta t \dots \dots \dots (5.22)$$

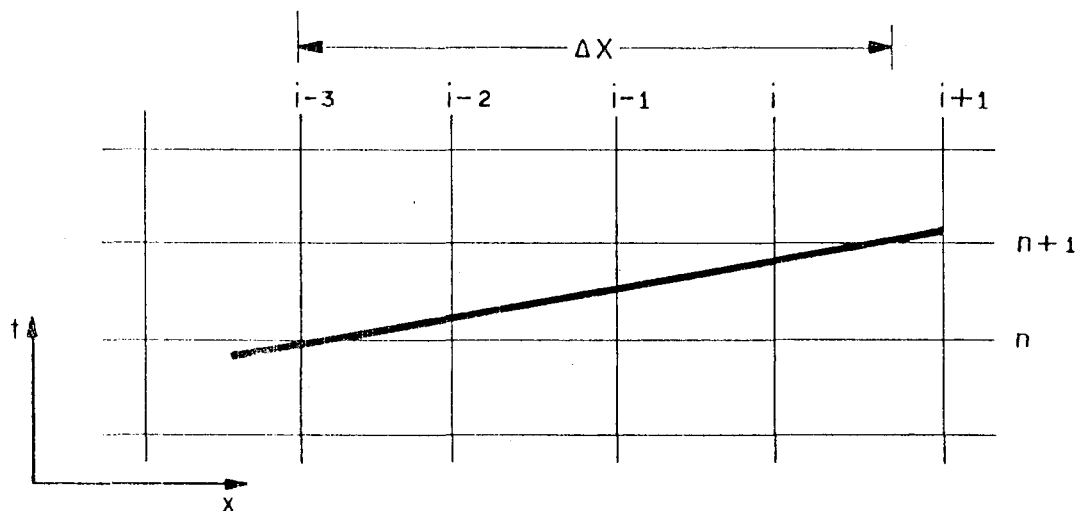


fig.5.2 Resolução de uma descontinuidade com mudança de regime subcrítico para supercrítico na malha de diferenças finitas

Num canal com atrito, caso mais geral, o "shock" terá tendência a se dissipar, tendo sua velocidade um decaimento. Apesar disso, na subdivisão considera-se, como mostra a *fig.5.1*, a distância  $\Delta X$  desde o extremo a jusante do trecho  $\Delta x$ . O sub-trecho com fluxo subcrítico é aquele a partir da seção  $(i+1)\Delta x$  a jusante e o supercrítico o correspondente a montante da seção  $(i-1)\Delta x$ , incluindo a mesma.

O sub-trecho supercrítico é resolvido com duas condições de contorno a montante. Naqueles sub-trechos  $\Delta x$  entre seções  $(i-3)\Delta x$  e  $(i-1)\Delta x$  (*fig.5.1*) o cálculo é realizado em forma totalmente implícita.

O sub-trecho subcrítico resolve-se calculando previamente na seção  $(i+1)\Delta x$  a área ou a vazão, usando o esquema explícito difusivo. Este cálculo baseia-se no fato, já visto no capítulo 4, da solução na frente de um "shock" no tempo  $(n+1)\Delta t$  só depender da solução no tempo  $(n)\Delta t$  na frente da mesma. Isto exige que seja verificada a condição de Courant nesse extremo. Esta

condição não é muito restritiva, dado que o fluxo subcrítico é lento em comparação ao sub-trecho supercrítico.

A descontinuidade é solucionada, variáveis  $A$  e  $Q$  na seção  $(i)\Delta x$ , com o sistema formado por (5.8-a) e as relações de Rankine-Hugoniot (equações (3.41)), todas elas em forma totalmente implícita, como é comentado a seguir. Substituindo (3.41-a) em (3.41-b) para eliminar  $W$ , fica o seguinte sistema de equações para as duas incógnitas  $A$  e  $Q$  na seção  $(i)\Delta x$  no tempo  $(n+1)\Delta t$ :

$$F_1(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}) = 0 \dots\dots\dots(5.23-a)$$

$$F_2(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}) = 0 \dots\dots\dots(5.23-b)$$

sendo (5.23-a) a equação característica  $C^+$ , no sub-trecho  $\Delta x$  atrás da descontinuidade. A mesma é discretizada pelo esquema de Preissmann, segundo comentado no item 5.1.2. A expressão (5.23-b) é a relação através de uma descontinuidade, que resulta de eliminar  $W$  das expressões (3.41), aplicada entre as seções  $(i)\Delta x$  e  $(i+1)\Delta x$ . A mesma é apresentada por extenso no ANEXO-A3. O mesmo é um sistema não-linear, o qual é resolvido pelo método de Newton. Embora, na maioria dos casos, a solução converge à solução real, é empregada a expressão da energia perdida através de uma descontinuidade, inequação (3.47), para verificar a convergência. Caso isso não ocorra, são mudados os valores iniciais para  $A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}$  no método de Newton até achar a solução apropriada.

Completado o cálculo no tempo  $(n+1)\Delta t$  para todo o trecho, é verificado se a seção atrás da descontinuidade tem fluxo supercrítico. Caso isso não se verifique, a posição de descontinuidade é transladada para montante um  $\Delta x$  e o cálculo é refeito.

Na realização da separação dos sub-trechos com diferentes tipos de regime de fluxo, empregando o número de Froude, e devido a problemas de oscilações atrás de uma descontinuidade, como ocorre em alguns casos, considera-se o critério que os números de Froude, nos sub-trechos subcríticos, cumpram a seguinte condição:

$$F_i^n < 1 + \varepsilon \dots\dots\dots(5.24)$$

e os correspondentes ao sub-trecho supercrítico a seguinte:

$$F_i^n > 1 - \varepsilon \dots\dots\dots(5.25)$$

nas quais usam-se valores de  $\varepsilon$  no intervalo,  $0.01 < \varepsilon < 0.10$ , dependendo do caso.

Também, no cálculo da velocidade da frente abrupta, expressão (5.21) e, com o objetivo de salvar os possíveis erros por oscilações e pelo fato da descontinuidade abranger mais de um sub-trecho  $\Delta x$ , as vazões  $Q_{0,1}$  e áreas  $A_{0,1}$  são calculadas como valores médios em duas ou mais seções, a montante e jusante da mesma, respectivamente, quando necessário.

Quando um sub-trecho de fluxo supercrítico tem um sub-trecho subcrítico a jusante e outro a montante, existem duas mudanças de regime, ocorrendo uma delas numa onda negativa. Neste último caso não existe descontinuidade como no caso de uma frente abrupta e, a mudança de regime é gradual. A solução de trechos de fluxo com este tipo de mudança é feita dividindo o trecho nos sub-trechos subcríticos e supercríticos, com base nos números de Froude, no tempo  $(n)\Delta t$ , fazendo o cálculo em ambos sub-trechos sem iterar, caso a mudança no tempo  $(n+1)\Delta t$  seja diferente à calculada.

A solução no sub-trecho subcrítico realiza-se com a condição de fluxo crítico na seção no extremo de jusante. É conhecido o fato da necessidade de ingressar informação nos dois contornos, a montante e jusante, na solução de fluxo subcrítico. Existem duas situações: fluxo uniforme e fluxo crítico no extremo a jusante, nesse regime de fluxo, nas quais a solução é calculada só em função da informação que ingressa de montante. No primeiro caso, porque existe ausência de informação deslocando-se para montante e, no segundo, porque existe impossibilidade que essa informação se desloque para montante. Portanto, ao resolver o sistema de equações, é necessário substituir essa falta de informação por uma equação válida na última seção a montante que, para o caso de fluxo crítico, é:

$$F_k = 1 - \frac{Q_B^2}{g A^3} = 0 \dots\dots\dots(5.26)$$

**Expandindo-se em série de Taylor  $F_k$  resulta:**

$$F_k^{n+1} = F_k^n + \Delta F_k = F_k^n + \frac{\partial F_k}{\partial A} dA + \frac{\partial F_k}{\partial Q} dQ =$$



$$=-e_{k2} + c_{k2} \Delta A + d_{k2} \Delta Q = 0 \dots\dots\dots(5.27))$$

sendo:

$$c_{k2} = \frac{\partial F}{\partial A} = \frac{Q^2}{gA^3} \left( \frac{3b}{A} - \frac{\partial b}{\partial A} \right), \quad d_{k2} = \frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{2Qb}{gA^3}, \quad e_{k2} = F_k^n = \left( \frac{Q^2 b}{gA^3} - 1 \right) \dots\dots\dots(5.28)$$

que será a equação usada no extremo a jusante do sub-trecho subcrítico.

Logo o sub-trecho supercrítico a jusante deste é resolvido com as duas condições de contorno a montante a partir da última seção do sub-trecho subcrítico.

#### 5.4. Estabilidade, consistência e convergência do esquema de Preissmann

Um método numérico necessita respeitar as propriedades de consistência, estabilidade e convergência. Verifica-se a propriedade de consistência de uma equação em diferenças com a equação diferencial que aproxima quando a equação de diferenças tende à equação diferencial no limite de  $\Delta x \Rightarrow 0$ ,  $\Delta t \Rightarrow 0$ .

A estabilidade local de uma equação em diferenças é satisfeita quando o coeficiente de amplificação dos erros numéricos de uma camada de tempo para outro é sempre menor que 1.0 (Leendertse, 1967). Logo, deve verificar-se se essa propriedade é satisfeita em todo o domínio da solução, para que a mesma seja estável. Por último, se verifica a convergência da solução de uma equação em forma discreta à solução da equação em forma contínua, quando a primeira aproxima a segunda.

As propriedades do esquema de Preissmann são amplamente apresentadas na literatura em Fread (1975), Evans (1978), Ponce-Simons (1977), Ponce-Indlekofer-Simons (1978 e 1979), Lyn-Goodwin (1987) e Samuels-Skeels (1990). Na *fig. 5.3* são apresentados os resultados do trabalho de Lyn e Goodwin.

A maior parte destes trabalhos estão limitados ao caso de fluxo subcrítico; só no estudo realizado por Evans são apresentados gráficos de erros numéricos em função de números de Froude maior que 1.0 - caso de fluxo supercrítico. Os problemas envolvidos na solução numérica com Preissmann de fluxo supercrítico,

como são os de fluxo super-rápido, fluxo rápido, fluxo calmo e aparição de ondas rodantes, são menos estudados, pelas razões óbvias, que os mesmos são casos pouco frequentes na natureza.

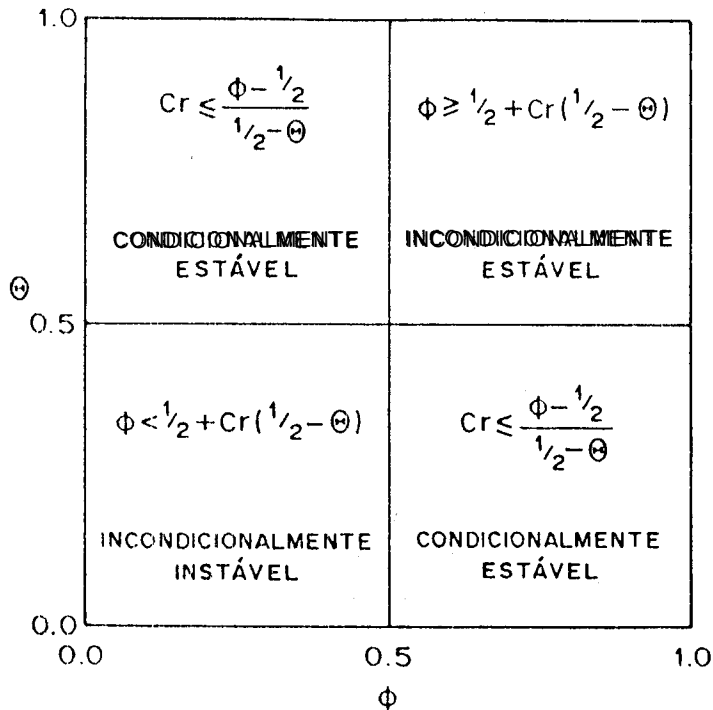


fig. 5.3 Região de estabilidade para o esquema de Preissmann no plano  $\theta$ - $\phi$  (Lyn-Goodwin, 1987)

A resolução de fluxo supercrítico com esquemas implícitos, caso o esquema de Preissmann para  $\theta > 0.5$ , é pouco frequente na literatura. Samuels e Skeels, em seu trabalho, expressam, sem dar justificativa disso, que o método de Preissmann não é possível de ser usado em fluxo supercrítico. Neste estudo foi empregado o método de Preissmann para fluxo subcrítico e supercrítico com números de Froude  $\leq 1.5$  e critério de Vedernikov  $\leq 1.0$  (Ghambarian, 1965) para satisfazer a condição imposta, a mais, na análise de Samuels e Skeels. No entanto, em relação a esta última condição do critério de Vedernikov, Ghambarian encontrou experimentalmente que, além das características do fluxo, importam as características físicas como o comprimento do canal, entre outras, para que se originem instabilidades físicas, como é o caso das ondas rodantes.

## 6. RESULTADOS

### 6.1. Objetivos e limitações dos testes numéricos

Uma certa variedade de casos de ondas abruptas foram simulados com o objetivo de observar o grau de aplicabilidade para simular casos reais, precisão e robustez da metodologia usada neste estudo para solucionar descontinuidades. Por metodologia, refere-se às particularidades no uso do método tipo "shock fitting", com o esquema numérico de Preissmann no cálculo de escoamento de ondas abruptas com e sem mudança no regime de fluxo, e não aos métodos em si que são de conhecida eficácia, difusão e uso na hidráulica computacional.

Os testes numéricos feitos são de dois tipos: problemas de ondas abruptas num canal largo de seção transversal retangular sem declividade nem atrito -os quais têm solução algébrica- e testes experimentais de laboratório -pertencentes à Waterways Experiment Stations do Corps of Engineers dos EUA. Os casos de mudança de regime de fluxo são exemplos simples, nos quais a mesma ocorre em forma clara, abrangendo uns poucos  $\Delta x$  da malha de diferenças finitas, com números de Froude que variam de 0.20 a 1.40.

Além dos dois tipos de testes comentados foram solucionados exemplos de ondas senoidais num canal largo para observar os efeitos da solução linear e não-linear<sup>1</sup> sobre diferentes discretizações espaciais.

### 6.2. Onda senoidal num canal com atrito e declividade

O teste tem por objetivo comparar os tipos de erros produzidos pela maior ou menor discretização espacial frente aos correspondentes à solução iterada e não-iterada. Não são comparados os valores absolutos de tais erros, por serem os mesmos função do comprimento da onda; e sim o tipo de deformação que

---

<sup>1</sup> Nos comentários dos resultados denomina-se solução linear aquela calculada com uma iteração do método de Newton e solução iterada, comumente denominada solução "não-linear", aquela calculada com as iterações necessárias para satisfazer uma condição de convergência determinada.

uma onda senoidal sofre no deslocamento, num canal, ao variar a discretização espacial ou o número de iterações da solução numérica.

O canal considerado tem seção retangular, largura de 200 metros, declividade de 0.001 m/m e coeficiente de rugosidade de Manning igual a 0.030, correspondendo fluxo subcrítico em regime uniforme. Foram empregados valores constantes para os coeficientes de peso,  $\theta = 0.55$  e  $\phi = 0.50$ , do esquema numérico de Preissmann.

A condição de contorno a montante é uma onda senoidal de período 6182 segundos, altura de 2 metros e semi-comprimento de 23400. metros.

Com o propósito de verificar a validade das equações de Saint Vénant para esse comprimento e tirante de onda, e assim garantir a boa representação, por parte do modelo, do que ocorre fisicamente, foram escolhidos os mesmos para um número de Ursell suficientemente maior que 1.0 (Bosco, 1989 e Ursell, 1953).

No teste empregaram-se três discretizações diferentes de  $(\Delta x, \Delta t) = (250, 75)$ ,  $(500, 150)$  e  $(1000, 300)$  em metros e segundos, respectivamente. Foi conservado o número de Courant constante, aproximadamente igual a 2.3, para os seguintes valores de discretização da onda  $L/\Delta x \cong 90, 50, 30$ .

Na *fig. 6.1* é apresentada a onda no extremo a montante e a solução numérica em duas seções a jusante a 5 e 10 km, para os casos de solução iterada e linear. No deslocamento ao longo do canal a onda sofre uma atenuação, devida a efeitos dissipativos do atrito. A solução linear apresenta um maior erro de atenuação que a solução iterada e um maior erro por dispersão, produzindo um adiantamento da mesma. Assim, a solução linear torna a onda mais abrupta, dissipando sua amplitude. Os efeitos não lineares preponderantes, neste caso, tem tendência a dissipar a onda por causa do atrito nas paredes. Dado que a solução linear elimina esses efeitos da não linearidade, a onda resultante da solução linear é mais abrupta. Uma situação oposta ocorre quando os efeitos não lineares preponderantes tem a tendência a empontar a onda, como é o caso da não linearidade do termo convectivo.

Nas *figuras 6.2 e 6.3* são apresentadas as soluções numéricas em duas seções a 5 e 10 km respectivamente, para as três discretizações  $L/\Delta x \cong 90, 50, 30$ . Neste caso, a menor discretização provoca um erro na amplitude da onda, originando uma amplificação. Comparando qualitativamente os erros provocados pela solução linear *fig. 6.1*, dos ocasionados pela menor discretização espacial ou maiores valores de  $\Delta x$ , *fig. 6.2 e 6.3*, observa-se a diferença do

caráter de ambos pela desigual deformação da solução numérica da onda.

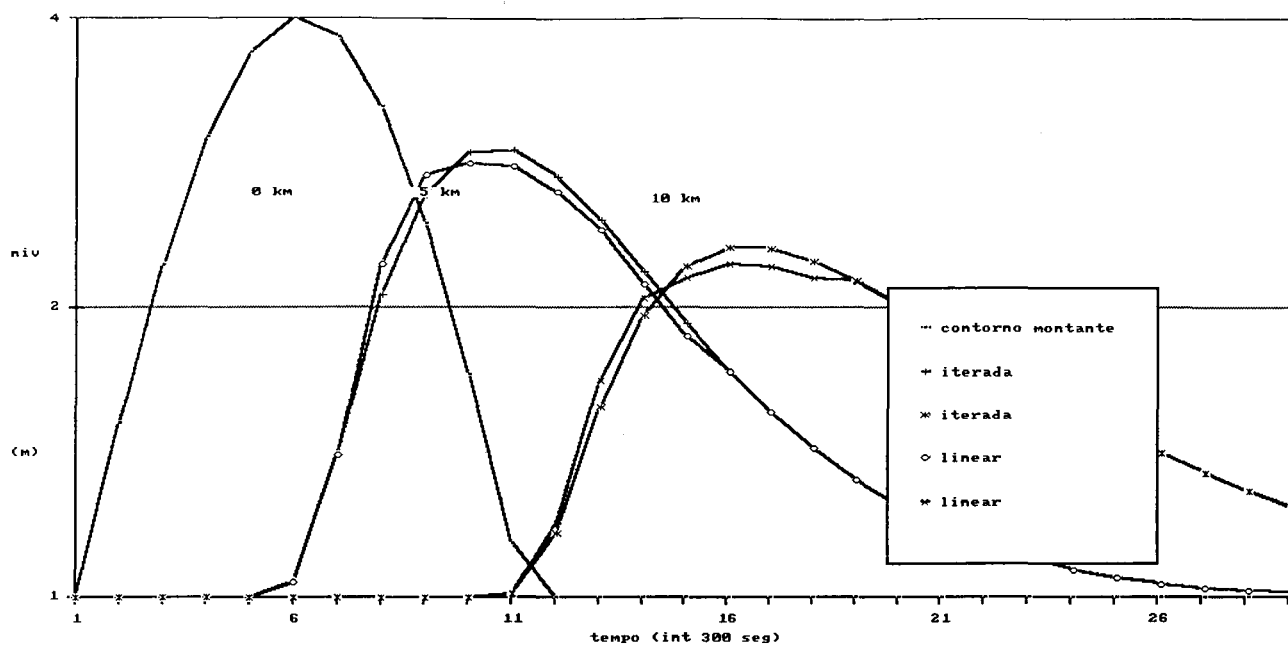


fig 6.1. Solução numérica de uma onda senoidal num canal com declividade e atrito para três seções; a 0, 5 e 10 km a jusante.

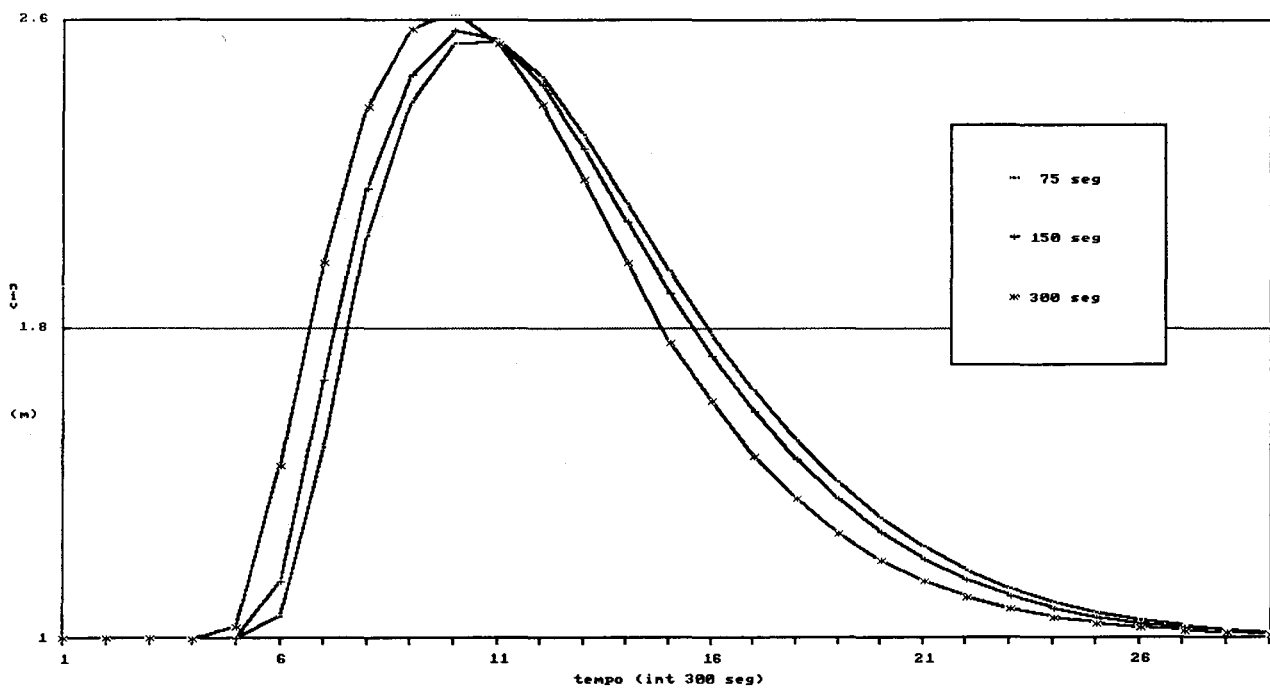


fig.6.2. Solução numérica de uma onda senoidal num canal, com declividade e atrito, para três diferentes discretizações  $\Delta t=75, 150$  e  $300$  segundos.

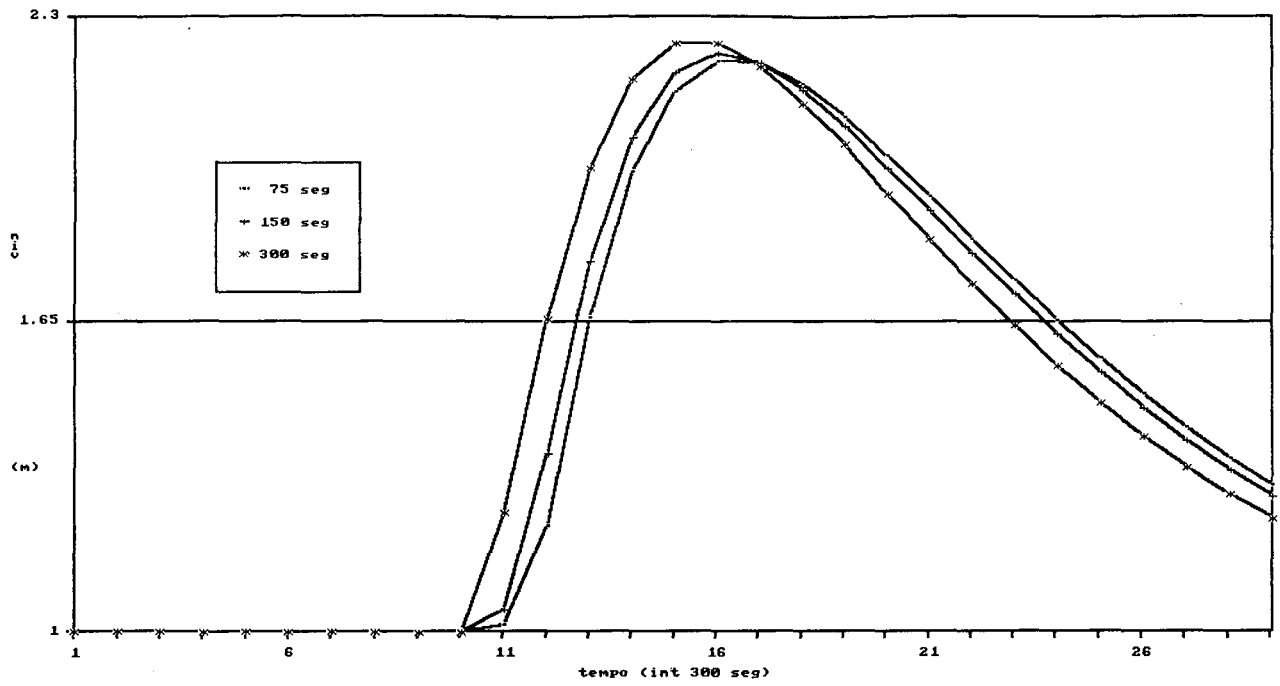


Figura 6.3. Solução numérica de uma onda senoidal num canal com declividade e atrito para três diferentes discretizações,  $L/\Delta x = 90, 50$  e  $30$  e, para uma seção 10 km a jusante.

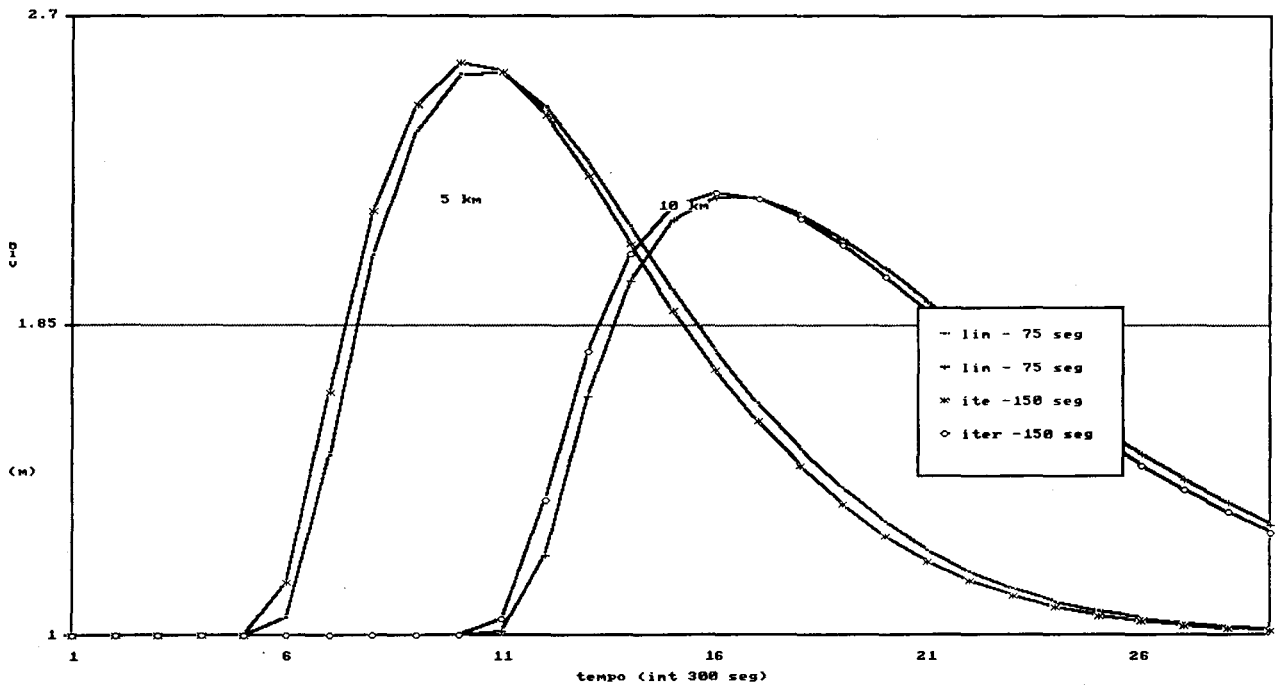
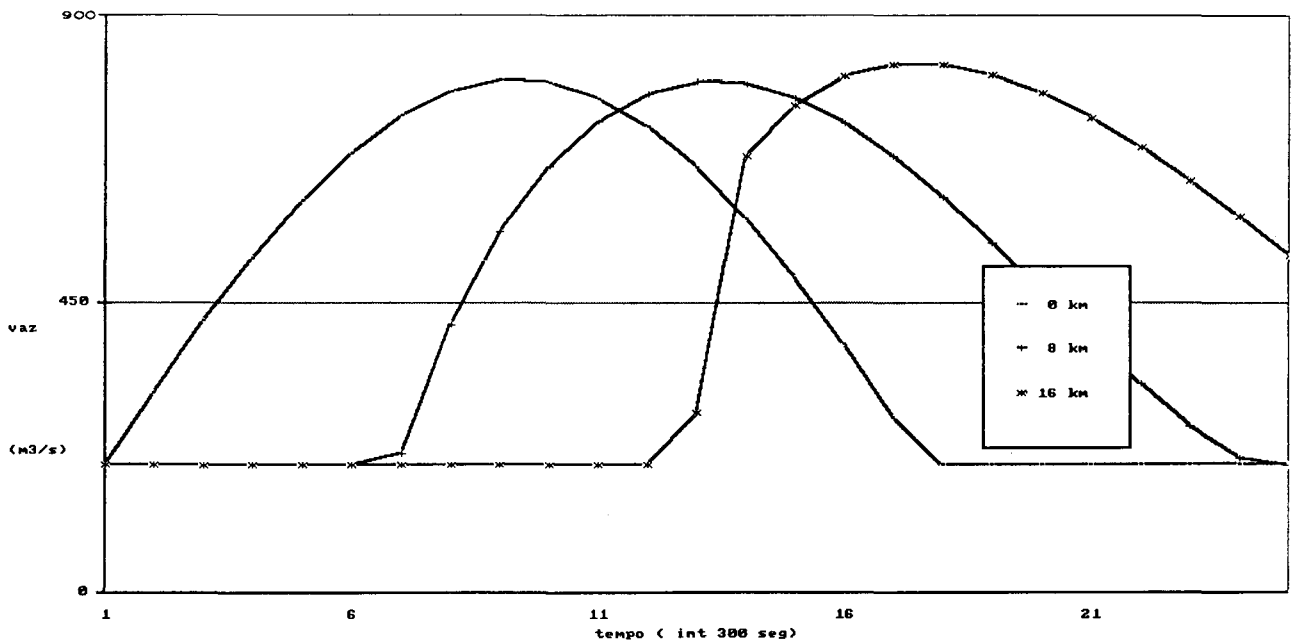


Figura 6.4 Comparação da solução numérica de uma onda senoidal para uma menor discretização em forma iterada com uma maior discretização em forma linear.

A *figura 6.4* apresenta a comparação das soluções numéricas iteradas, com discretização  $\Delta x=500$  m e  $\Delta t=150$  seg, com a solução linear com discretização  $\Delta x=250$  m e  $\Delta t=75$  seg.

Dos resultados destes teste para a solução numérica de uma onda senoidal é possível concluir que, os erros numéricos originados numa solução linear não são qualitativamente equivalentes aos provocados numa menor discretização. As deformações da solução numérica da onda senoidal são diferentes.

Na *fig 6.5* apresenta-se a solução numérica de uma onda senoidal em três seções de um canal sem rugosidade nem atrito; é possível observar que, devido à não existência de termos dissipativos causados pelo atrito nos contornos, os termos não-lineares do modelo originam um perfil com maior declividade na frente da onda. Igualmente, que para o caso da onda anterior, verificou-se que o número de Ursell seja suficientemente maior a 1.0, verificando-se assim, a validade das equações de Saint Vénant. Porém, na escala dessas equações, a solução mostra como fisicamente é gerada uma descontinuidade numa onda positiva, fato conhecido devido a efeitos não-lineares do termo convectivo das forças de inércia.

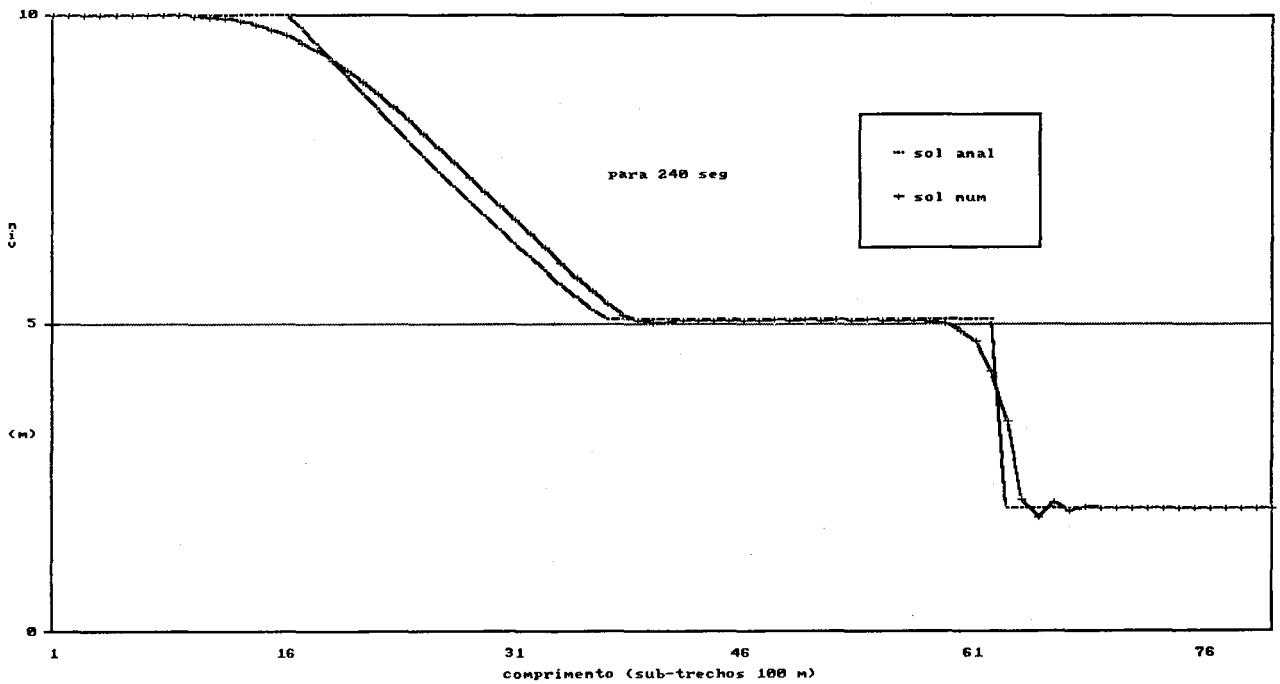


*fig 6.5. Solução numérica numa onda senoidal num canal sem declividade nem atrito, para três seções a 0, 8 e 16 km a jusante.*

### 6.3. Problema de ruptura total e instantânea de barragem

O presente teste tem por objetivo apresentar as características da solução numérica e analítica do problema de ruptura total e instantânea de uma barragem. Na *fig. 6.6* é apresentado o perfil de níveis para o tempo de 240 segundos, num canal de 200 metros de largura e com discretização de  $\Delta x=100$  metros e  $\Delta t=6$  segundos. Isto para as condições iniciais de  $h_0=2$  metros e  $h_1=10$  metros, a um e outro lado da barreira em  $t=0$ , respectivamente. A *fig. 6.7* mostra as vazões ao longo do canal para este exemplo.

Na *fig. 6.6* resultam claras as diferentes zonas de fluxo não perturbado na frente da onda positiva e atrás da onda negativa, o estado constante a montante da descontinuidade e a onda negativa deslocando-se para montante atrás deste último.



*fig. 6.6. Níveis ao longo do canal para o problema de ruptura total e instantânea de barragem*

A solução numérica com o esquema de Preissmann para valores  $h_0/h_1 > 0.133$  não apresenta problemas. Para valores de  $h_0/h_1 \leq 0.133$ , caso para o qual surge um trecho com regime supercrítico na onda positiva, manifestaram-se



instabilidades na solução. Para este caso tentou-se, sem êxito, (a) o método de tipo "shock fitting" comentado no capítulo 6 e (b) e considerando um trecho único, especificando condições de contorno nos dois extremos com valores constantes de níveis e vazões nulas.

Foi testado, também, para o problema de ruptura total de barragem, a simulação com um tirante mínimo de água como estado inicial na frente da represa. Com este propósito foi aplicada a fórmula de Chezy para representar o atrito nas paredes do canal com o fim de eliminar as oscilações numéricas quando o tirante de água tende a zero (Vilas, 1985). Mas, sem êxito, igualmente ao caso anterior.

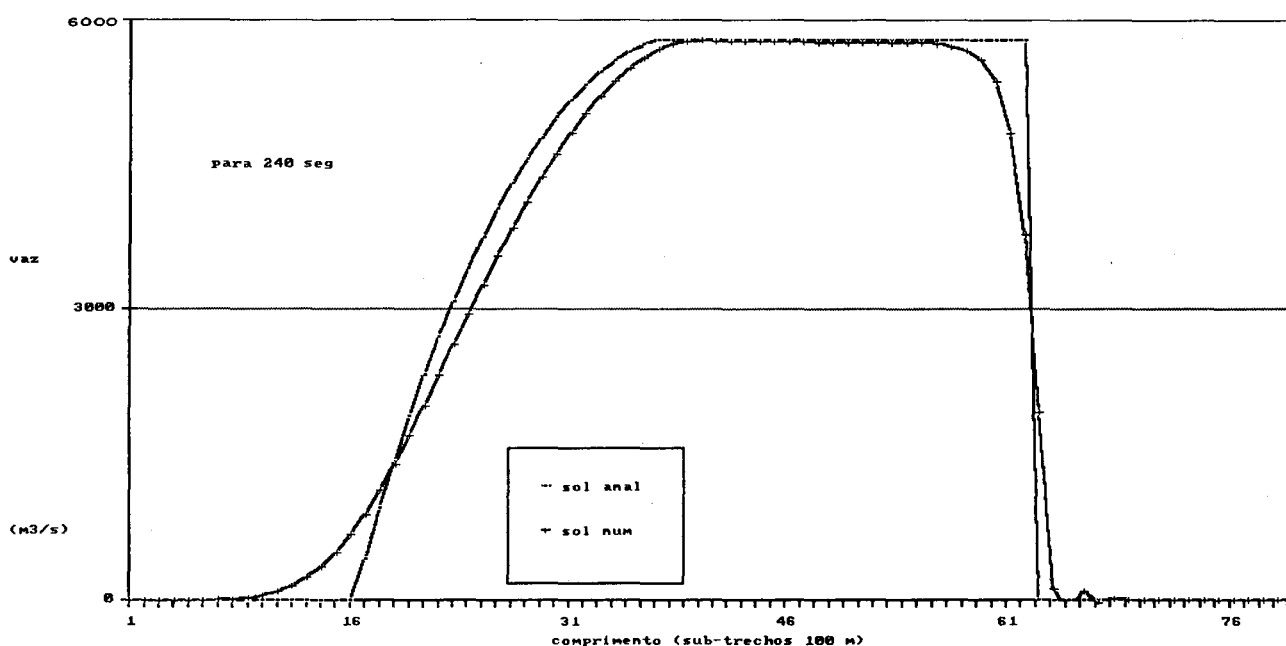


fig.6.7. Vazões ao longo do canal para o problema de ruptura total e instantânea de barragem

Estes dois problemas consideram-se questões abertas e necessárias de mais estudo para sua solução, especialmente o segundo caso, de simulação num canal sem água com diferenças finitas. Na literatura, como já foi comentado no capítulo 2, existem publicações com soluções para este problema. O primeiro com o esquema numérico explícito de Mc.Cormack (Bellos e Sakkas, 1987) e o segundo usando o esquema implícito de Preissmann (Fennema e Chaudhry, 1983). Mas, neste último trabalho, os autores não dão detalhes do cálculo.

#### 6.4. Ondas de frente abrupta com solução algébrica

Nestes testes são apresentados resultados de simulação de frentes abruptas, com e sem mudança de regime de fluxo, deslocando-se num canal, sem declividade nem atrito, de 200 metros de largura.

As figuras 6.8-10 apresentam vazões ao longo do canal para dois tempos diferentes de 100 e 200 segundos, para uma onda abrupta em regime subcrítico, com coeficientes de  $\theta = 0.66$  e  $\phi = 0.50^2$  e número de Courant aproximadamente igual a 2. Na fig. 6.8 apresenta-se a simulação com discretização  $\Delta x=30$  metros e  $\Delta t=5$  segundos. A fig 6.9 corresponde a  $\Delta x=60$  metros e  $\Delta t=10$  segundos e a fig. 6.10 para  $\Delta x=120$  metros e  $\Delta t=20$  segundos. As perdas de massa nestas simulações estiveram abaixo de 1 %. No exemplo apresentado na fig. 6.8 a perda de massa foi de 0.44 % e no correspondente à fig. 6.10, a maior, de 0.77 %.

A solução iterada e a não-iterada ou linear para estes testes não apresentaram diferenças significativas de precisão. Verificou-se, entretanto, que a solução iterada é mais estável, possibilitando obter uma solução com valores de  $\theta$  mais próximos a 0.50. Com relação à discretização espacial, a mesma dependerá do grau de precisão desejado. Dado que neste caso não é feita uma localização da descontinuidade, a mesma abrange uma certa quantidade fixa de  $\Delta x$ .

Na fig. 6.11 é apresentado o mesmo exemplo com discretização  $\Delta x=60$  metros e  $\Delta t=10$  segundos, para  $\theta=0.75$  e  $\phi=0.50$ . A solução é mais suave, dissipando mais a descontinuidade que no caso anterior. Portanto, maiores valores de  $\theta$  produzem um maior amortecimento das ondas curtas atrás da descontinuidade, suavizando mais a solução e espalhando o "shock". Porém, a escolha dos coeficientes de peso do esquema e a discretização definem a precisão.

---

2 O parâmetro de peso  $\phi$  do esquema de Preissmann citado nos testes tem sempre o valor 0.50, que corresponde à forma mais comum do esquema. Mas, o fato de especificar seu valor deve-se que esse é o valor escolhido como mais apropriado e não o valor "default". Nesse sentido, foram realizados exemplos testando diferentes valores para o coeficiente  $\phi$ , maiores e menores do que 0.50, principalmente em fluxo supercrítico, sem ter sido encontrada uma justificativa forte para a escolha de um valor diferente de 0.50.

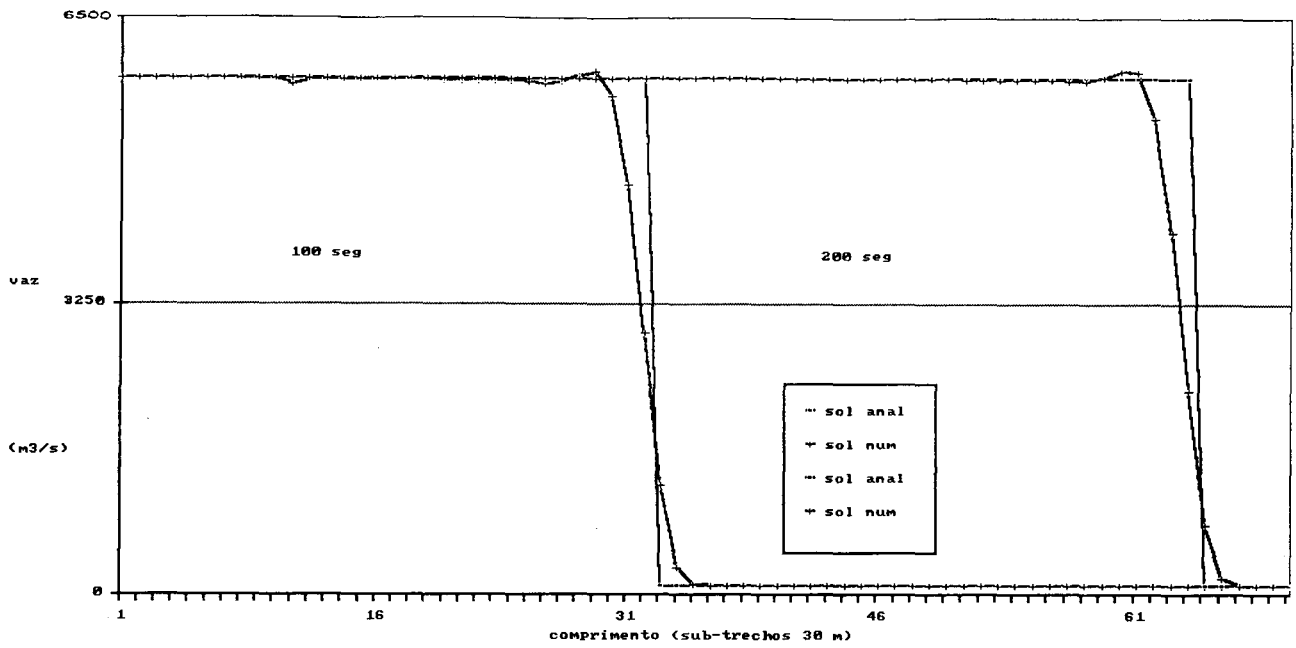


fig. 6.8. Frente abrupta subcrítica num canal sem atrito nem declividade para  $\theta=0.66$ ,  $\Delta x=30$  metros e  $\Delta t=5$  segundos.

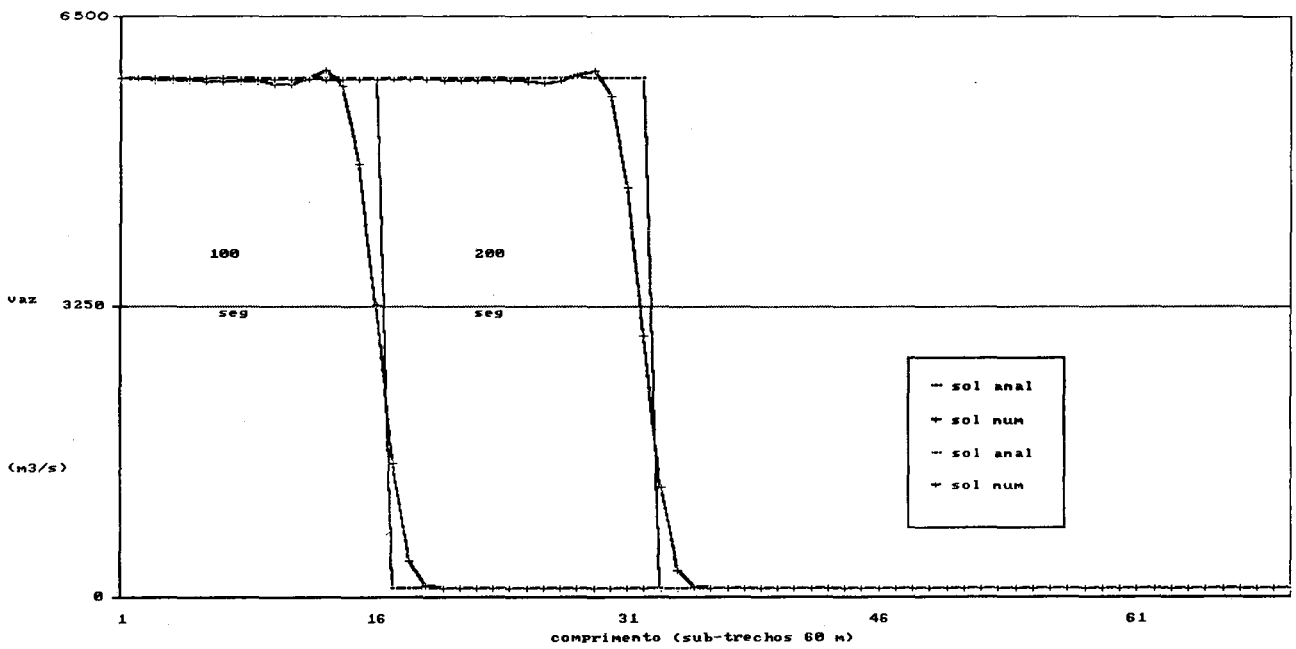


fig. 6.9. Frente abrupta subcrítica num canal sem atrito nem declividade, para  $\theta=0.66$ ,  $\Delta x=60$  metros e  $\Delta t=10$  segundos.

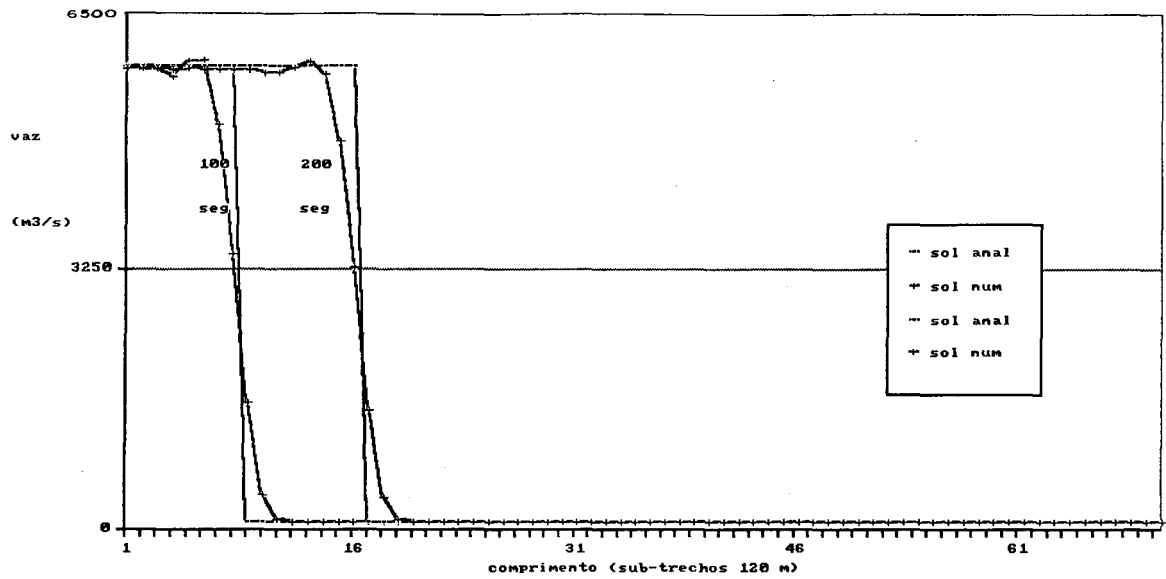


fig. 6.10. Frente abrupta subcrítica num canal sem atrito nem declividade, para  $\theta=0.66$ ,  $\Delta x=120$  metros e  $\Delta t=20$  segundos.

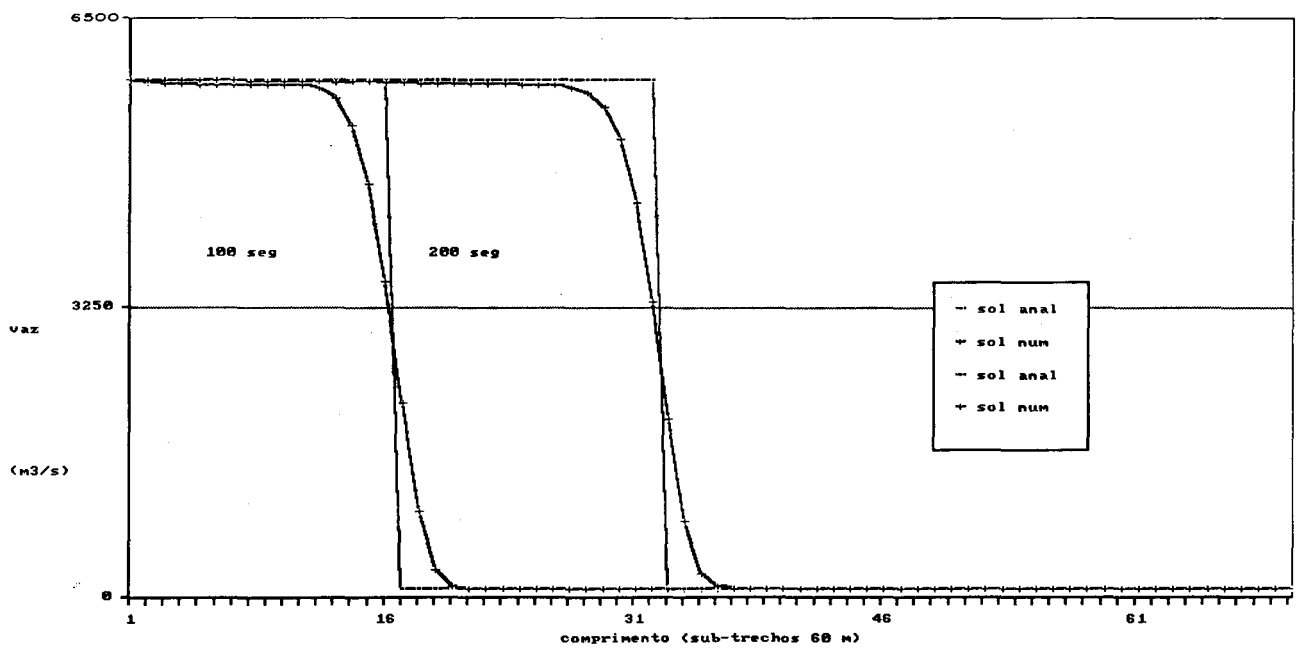
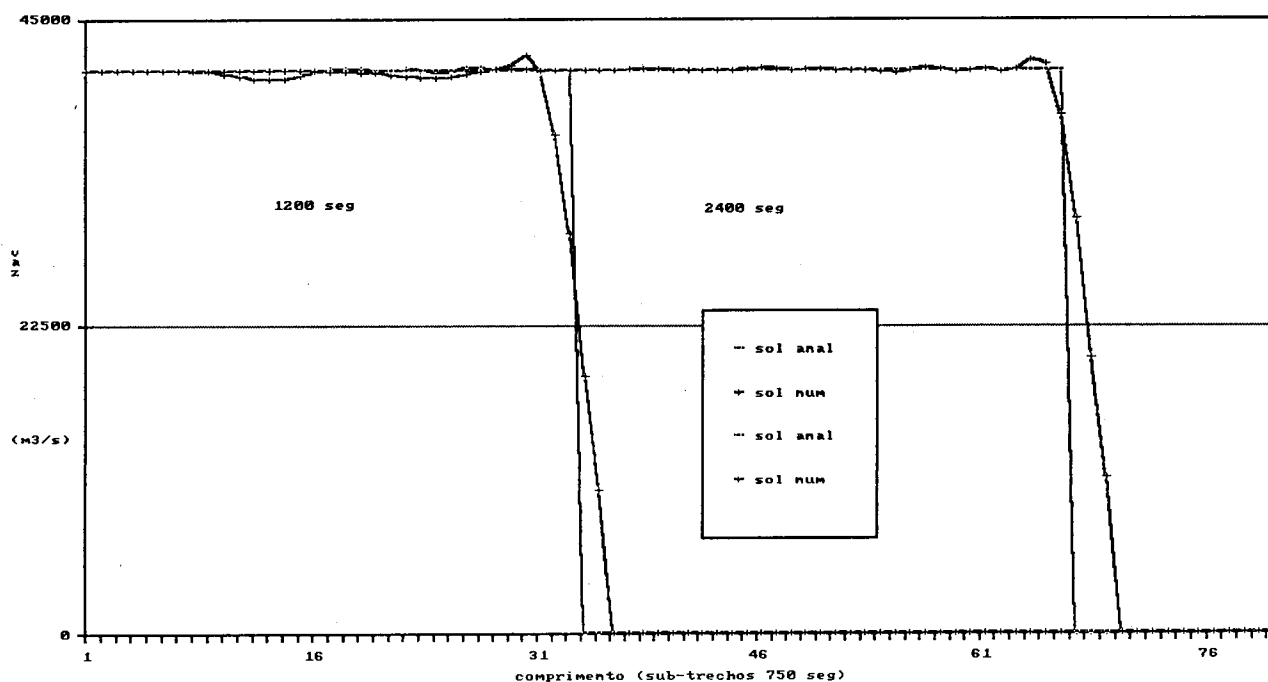


fig. 6.11. Frente abrupta subcrítica num canal, sem atrito nem declividade, para  $\theta=0.75$ ,  $\Delta x=60$  metros e  $\Delta t=10$  segundos.

Nas *fig. 6.12-14* são apresentados os resultados para uma frente abrupta supercrítica avançando num regime subcrítico. Os números de Froude são de aproximadamente 1.6 e 0.1, a montante e jusante da descontinuidade, respectivamente. Neste caso o método empregado consistiu em localizar a descontinuidade. Foram usadas três discretizações diferentes:  $(\Delta x, \Delta t)=(750, 60)$ ,  $(1500, 120)$  e  $(3000, 240)$ , metros e segundos, respectivamente. Os coeficientes de peso de Preissmann usados foram  $\theta=0.66$  e  $\phi=0.50$  para um número de Courant de 2.3. As perdas de massa na simulação estiveram na ordem de 1.5 %. Nestes testes, embora a frente abrupta seja de maior tamanho, a solução numérica abrange um comprimento menor que no caso de ondas subcríticas, menor número de  $\Delta x$ , dado o método de tipo "shock fitting" usado na solução.



*fig.6.12* Onda abrupta supercrítica num canal sem atrito nem declividade, para  $Cr \approx 2$ ,  $\theta=0.66$ ,  $\phi=0.50$ ,  $\Delta x=750$  m,  $\Delta t=60$  seg.

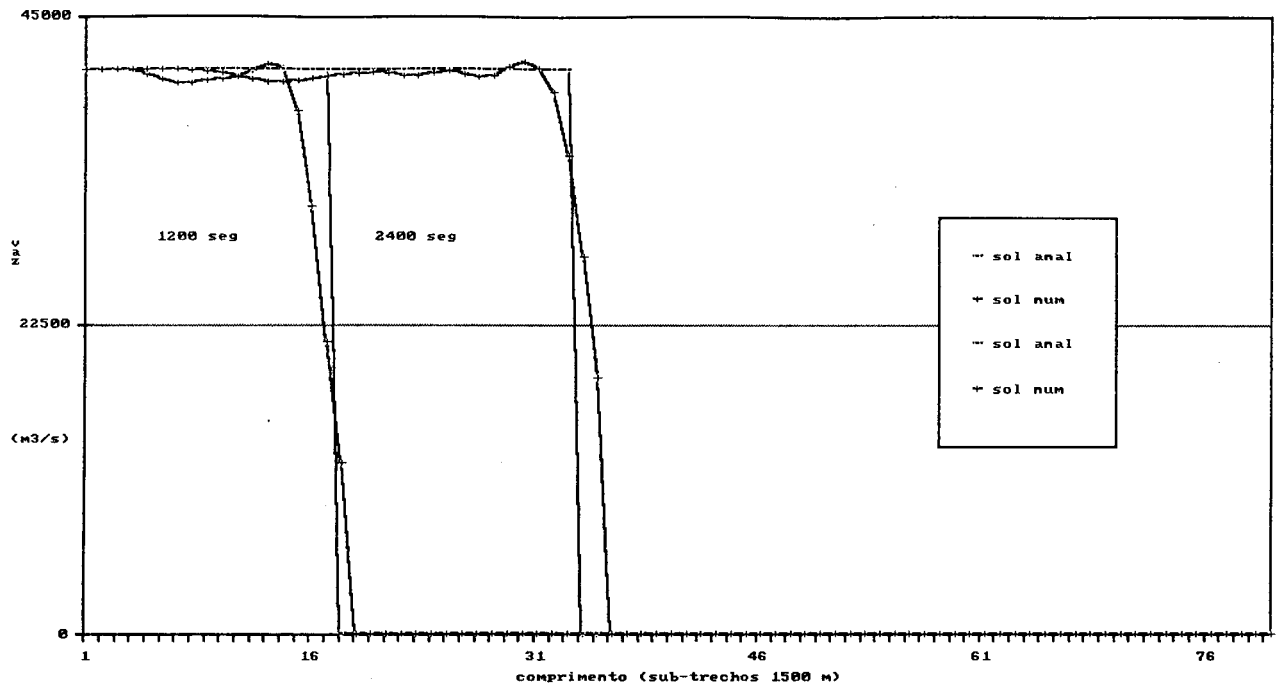


fig.6.13. Onda abrupta supercrítica num canal sem atrito nem declividade, para  $Cr \approx 2$ ,  $\theta = 0.66$ ,  $\phi = 0.50$ ,  $\Delta x = 1500$  m,  $\Delta t = 120$  seg.

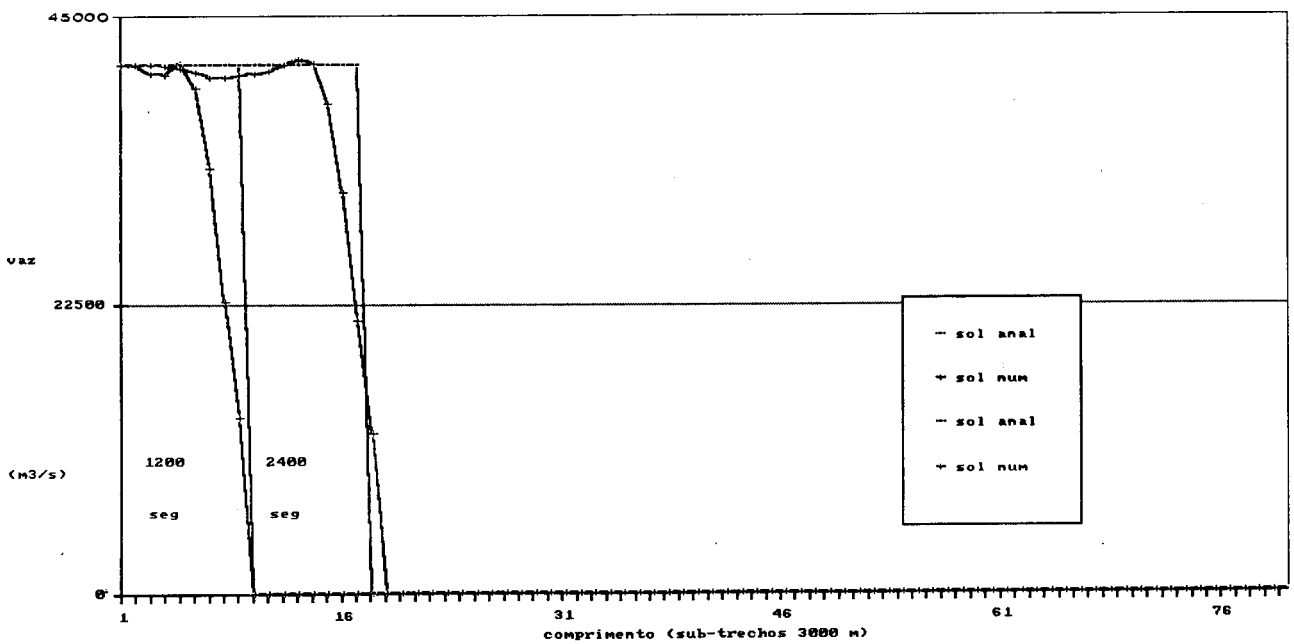


fig.6.14 Onda abrupta supercrítica num canal, sem atrito nem declividade, para  $Cr \approx 2$ ,  $\theta = 0.66$ ,  $\phi = 0.50$ ,  $\Delta x = 3000$  m,  $\Delta t = 240$  seg.

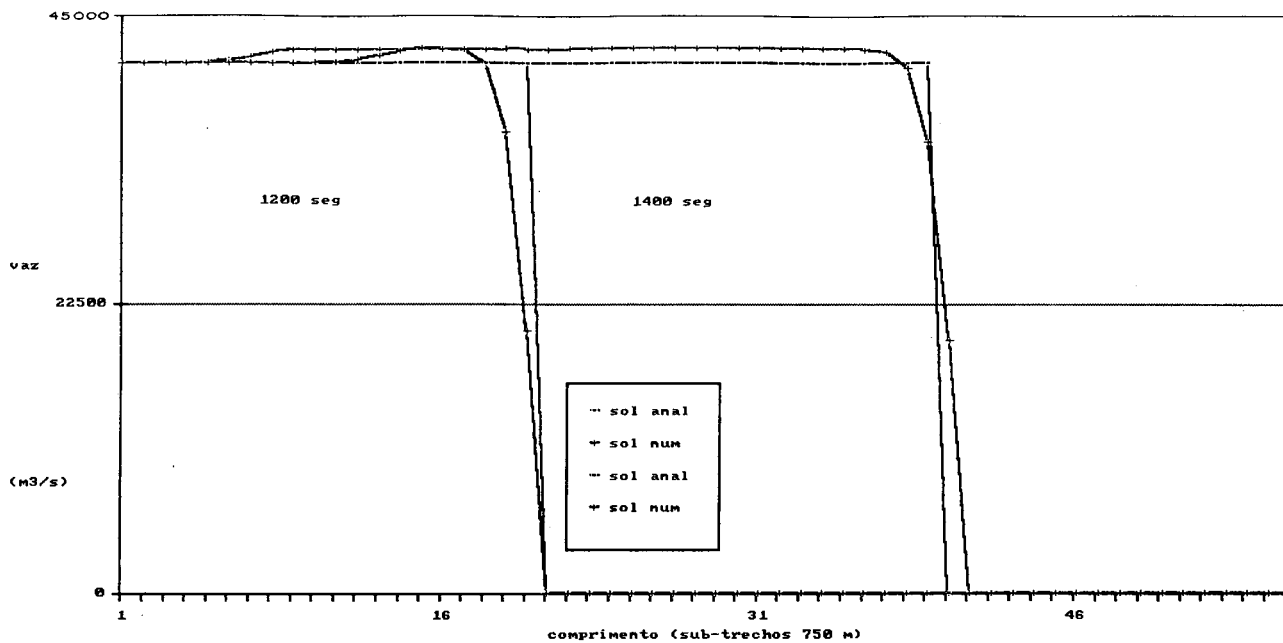


fig.6.15 Onda abrupta supercrítica num canal, sem atrito  
 nem declividade, para  $Cr \approx 1.3$ ,  $\theta = 0.66$ ,  $\phi = 0.50$ ,  
 $\Delta x = 750$  m,  $\Delta t = 60$  seg.

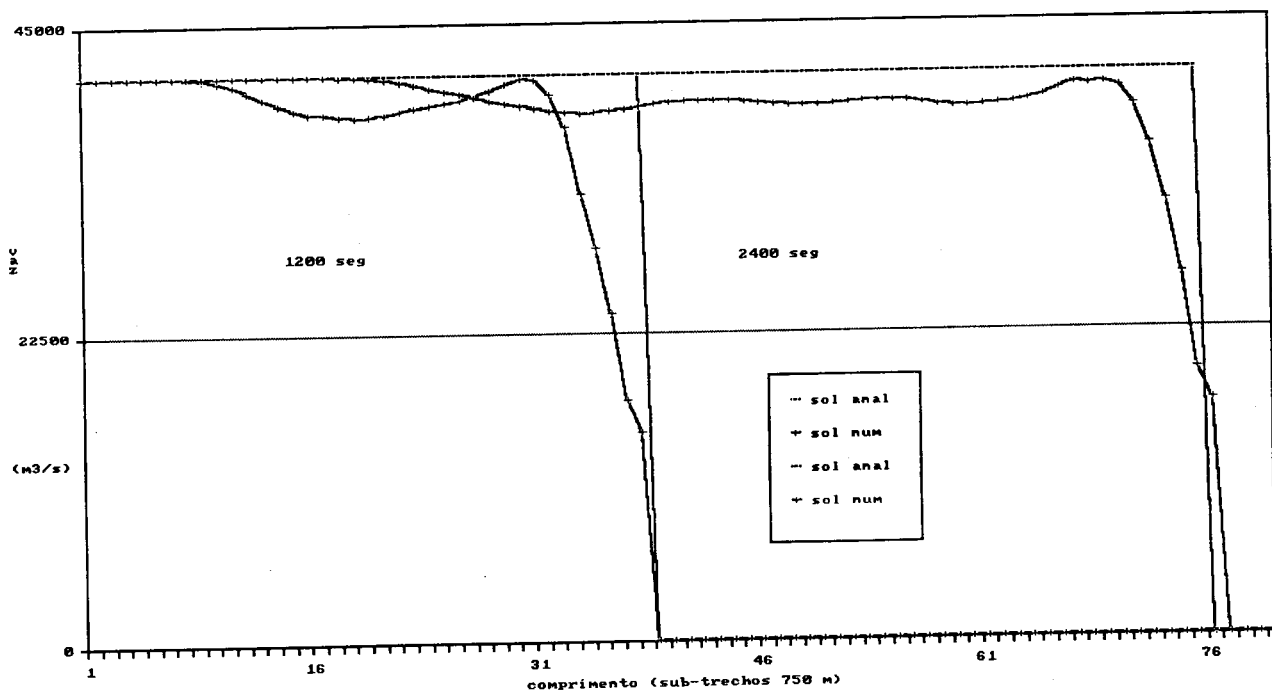


fig.6.16 Onda abrupta supercrítica num canal, sem atrito  
 nem declividade, para  $Cr \approx 5$ ,  $\theta = 0.66$ ,  
 $\phi = 0.50$ ,  $\Delta x = 500$  m,  $\Delta t = 75$  seg.

A *fig. 6.15* apresenta os resultados para a mesma frente, simulada com um número de Courant de 1.3, sendo este o menor possível na simulação desse teste com os coeficientes de peso  $\theta=0.66$  e  $\phi=0.50$ . Nesse sentido, em todos os casos de ondas abruptas simulados com o esquema de Preissmann, observou-se que os mesmos apresentam instabilidades nas seções contíguas aos contornos para valores do número de Courant próximos a 1.0, não sendo possível o cálculo com números de Courant menores a 1.0.

Na *fig 6.16* apresentam-se os resultados para igual frente abrupta e para um número de Courant igual a 5.0, para  $\theta=0.66$  e  $\phi=0.50$ . A perda de massa na simulação foi elevada neste caso, na ordem de 7 %. Para números de Courant maiores do que 5.0 a qualidade da simulação não foi boa.

#### 6.5. Ondas abruptas de laboratório

Os dois testes experimentais utilizados: 1.2(32) (USAE 1961B) e 1.2(56) (USAE 1961B), correspondem a um trabalho realizado na Waterway Experiment Station do Corps of Engineers. O trabalho consta de duas séries de experimentos num canal, o primeiro com condição de mínima rugosidade (WEE-Corps of Engineers, 1960) e o segundo com condição de máxima rugosidade (WEE-Corps of Engineers, 1961). Nos experimentos empregaram um canal retangular de 1.22 metros de largura e 122 metros de comprimento. A comporta -sendo usados diferentes tamanhos- foi localizada no meio do canal e removida sempre de forma instantânea. Foram observados níveis a jusante e a montante da mesma.

A informação usada neste estudo corresponde a níveis na seção da comporta, *St200* que corresponde à metade do canal de 122 metros -ou 400 pés- e nas três seções *St225*, *St280* e *St350*; a 7.625, 24.40 e 45.75 metros a jusante da comporta, respectivamente. O regime de escoamento dos testes simulados é subcrítico.

Dado que o coeficiente de rugosidade de Manning varia com o tirante hidráulico (Bosco, 1989), para o caso da condição de máxima rugosidade e para fluxo uniforme, considerou-se a mesma variável com o nível na simulação.

O número de Courant nestes testes foi aproximadamente igual a 2.0 para uma discretização de  $\Delta x=2$  metros, a exceção daqueles sub-trechos a montante e jusante de seção com dados observados, e para um  $\Delta t=4$  segundos.



As figuras 6.17-20 correspondem à condição de contorno de montante em *St200* para o teste 1.2(32) (USAE 1961B) e níveis observados e simulados na seções *St225*, *St280* e *St350*. Os resultados mostraram-se satisfatórios quanto ao tempo da frente, conservação de massa e erros relativos entre valores observados e calculados. O maior erro ocorreu na primeira seção a jusante, *St225*, e aos 24 segundos de simulação, sendo o erro relativo máximo, nesse ponto, de 6 %. Nas outras seções e outras ordenadas de tempo, o erro relativo manteve-se na ordem do 1.0 %. A conservação de massa teve uma variação de -0.03 %.

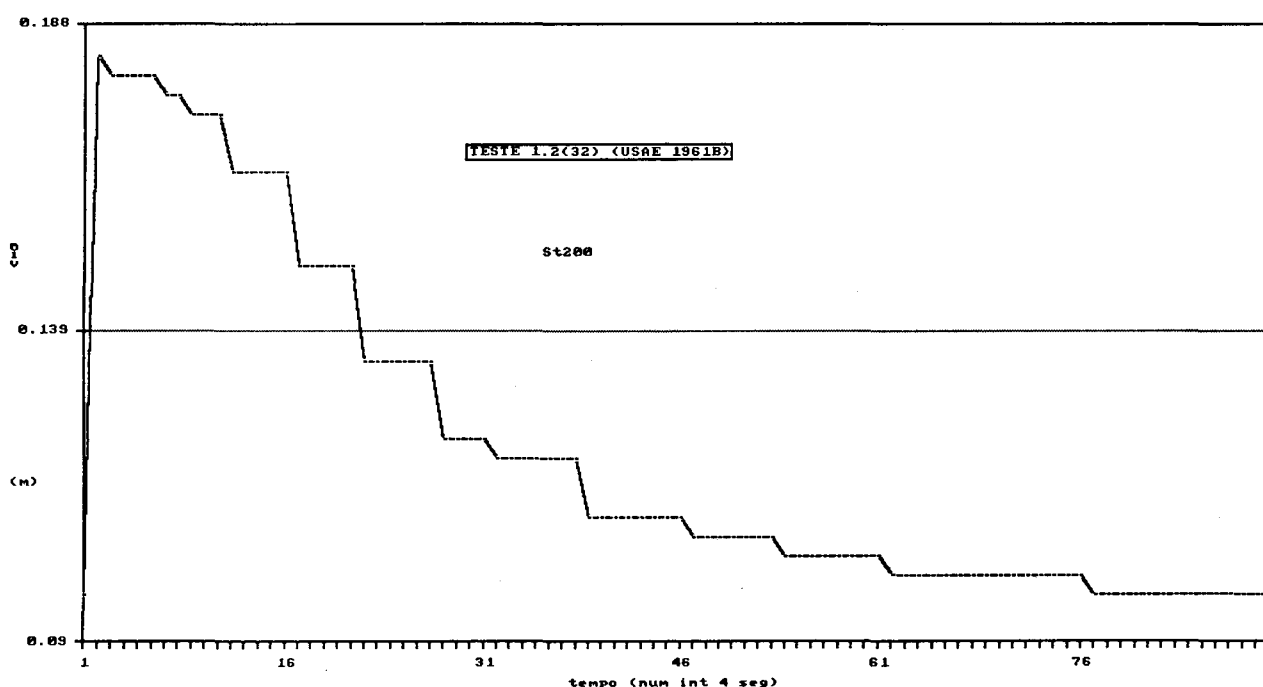


fig 6.17 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção *St200* para o teste 1.2(32) (USAE 1961B)

Os erros na ordem de 6 % na primeira seção a jusante de comporta são atribuídos a pequenas oscilações devido a efeitos fortemente não-lineares nessa zona e que o modelo não simula adequadamente. Estes erros poderiam ter maior importância num protótipo de características físicas mais complexas e para um evento com maiores gradientes de fluxo.

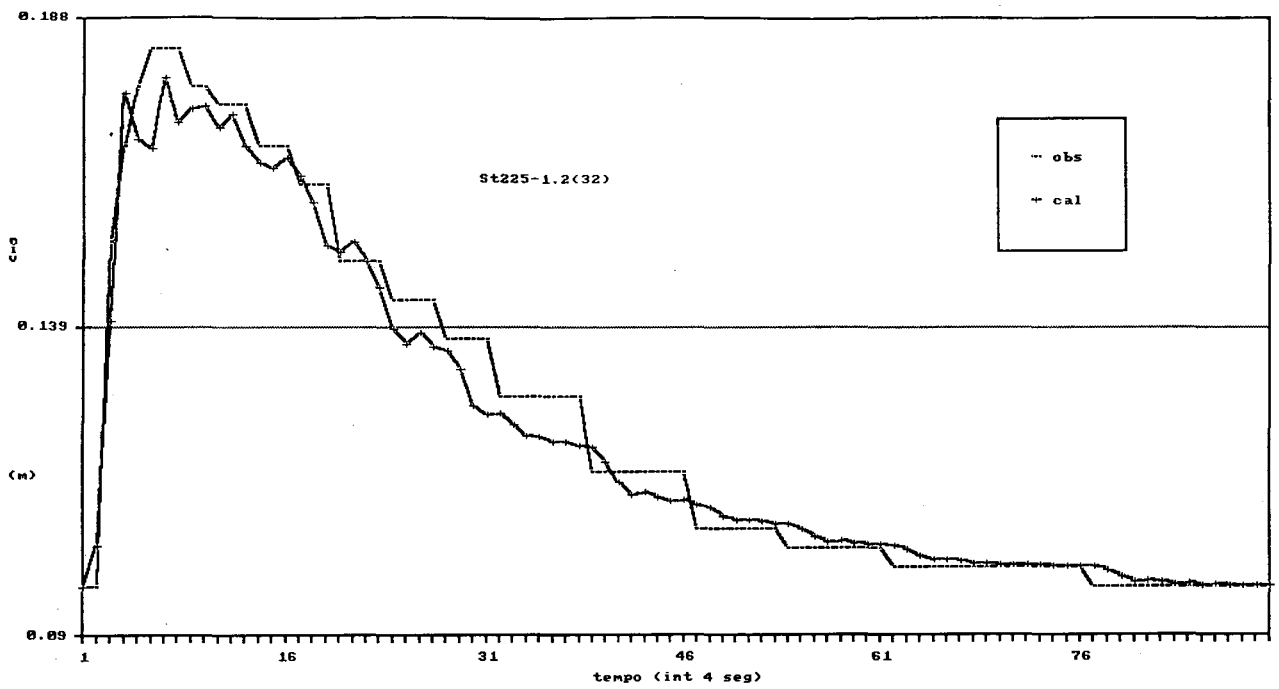


fig 6.18 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St225 para o teste 1.2(32) (USAE 1961B)

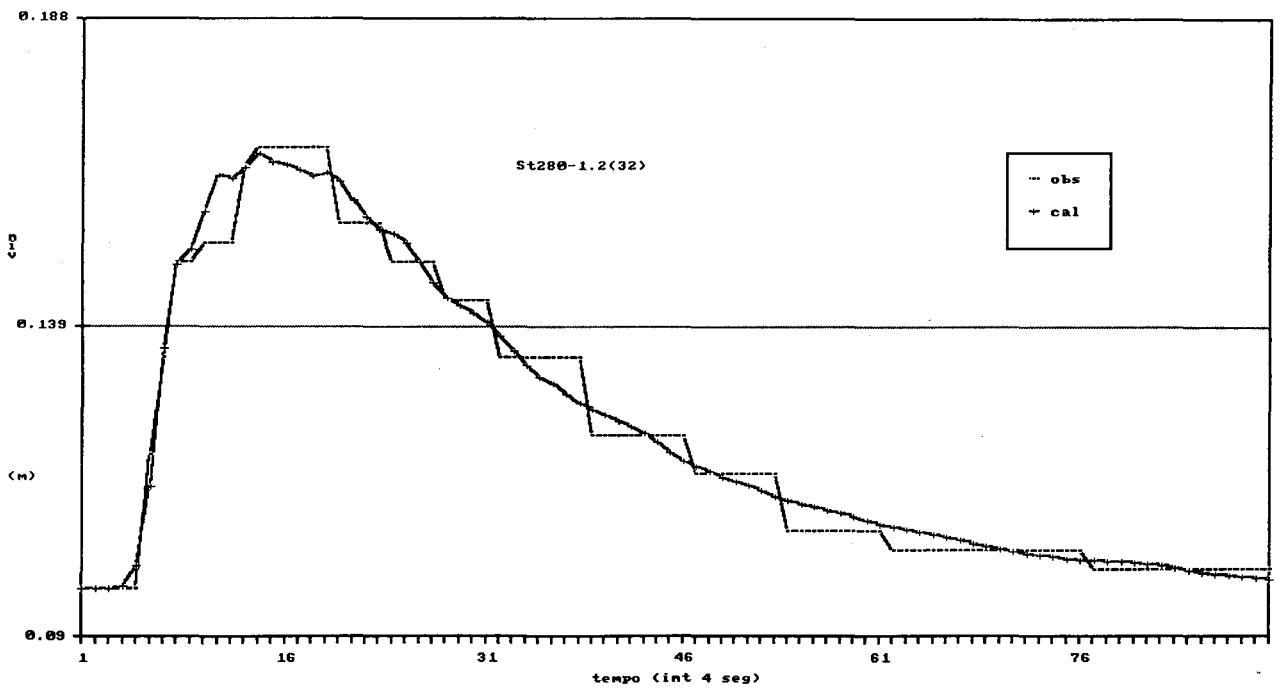


fig 6.19 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St280 para o teste 1.2(32) (USAE 1961B)

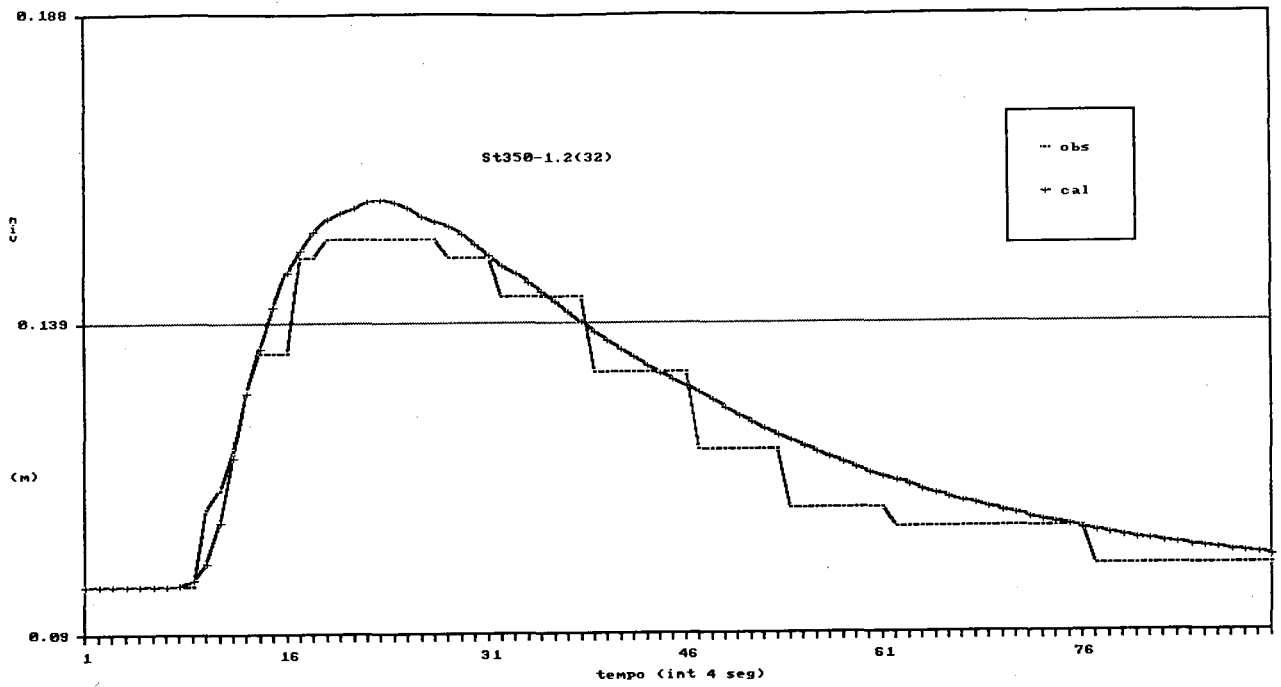


fig 6.20 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St350 para o teste 1.2(32) (USAE 1961B)

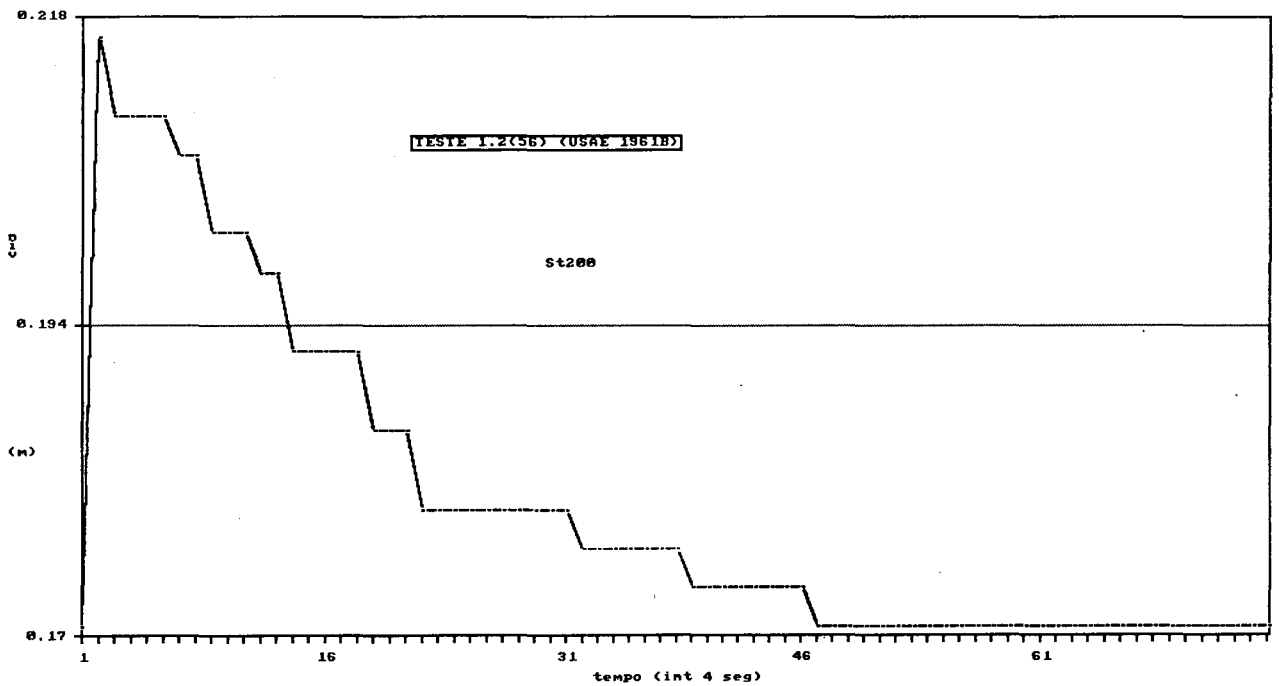
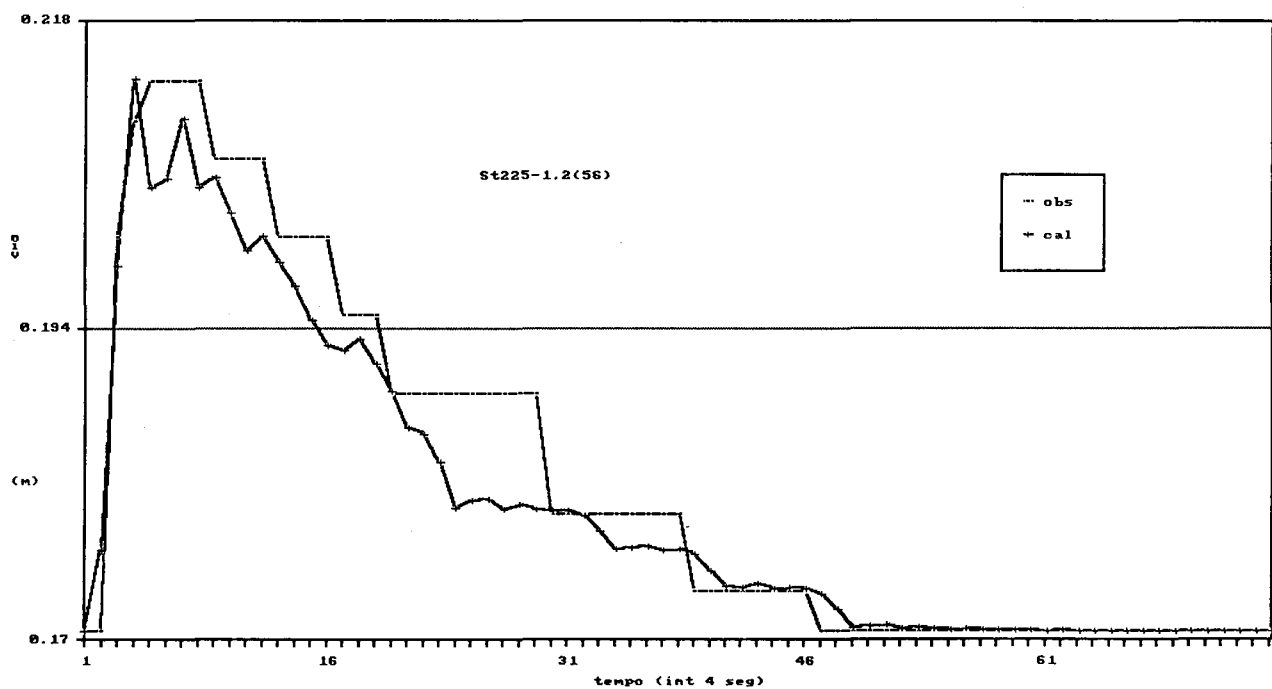


fig 6.21 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St200 para o teste 1.2(56) (USAE 1961B)

Nas *figuras 6.21-22* apresentam-se os resultados da simulação para o segundo teste 1.2(56) (USAE 1961B) de onda abrupta de laboratório. Os resultados obtidos para este caso são similares ao caso anterior, inclusive na localização e valor do maior erro relativo, não apresentando-se dificuldades na resolução.



*fig 6.22* Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St225 para o teste 1.2(56) (USAE 1961B)

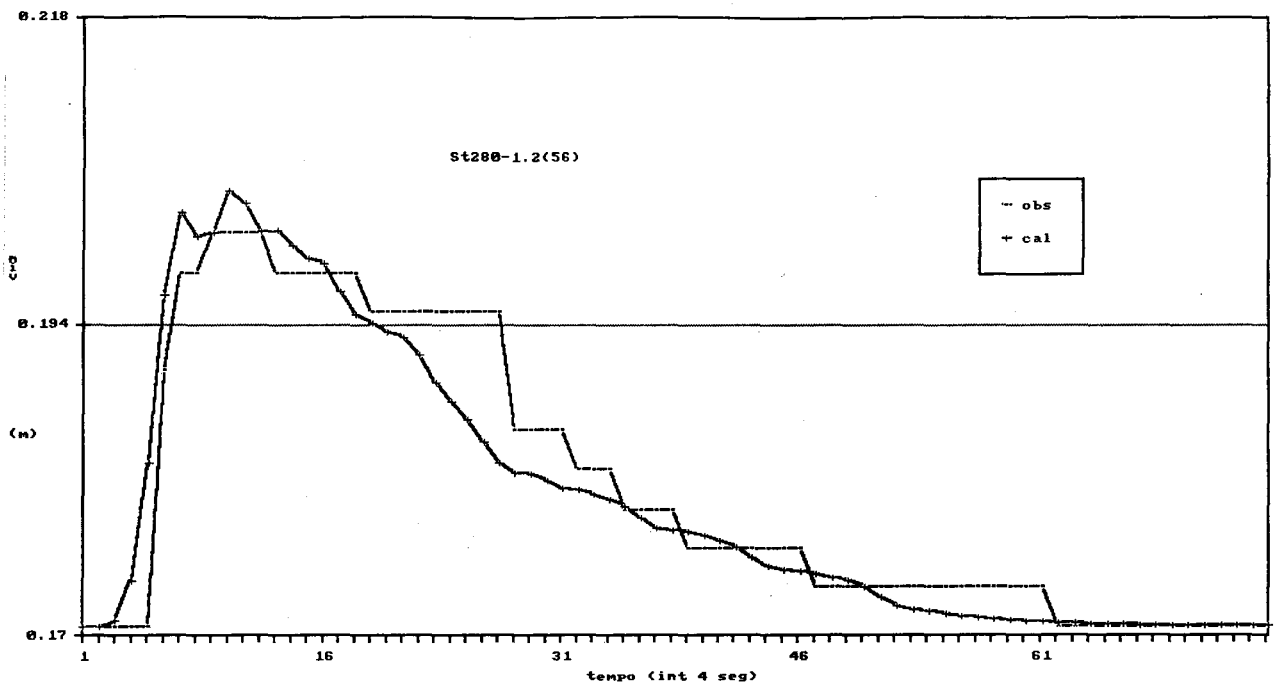


fig 6.23 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St280 para o teste 1.2(56) (USAE 1961B)

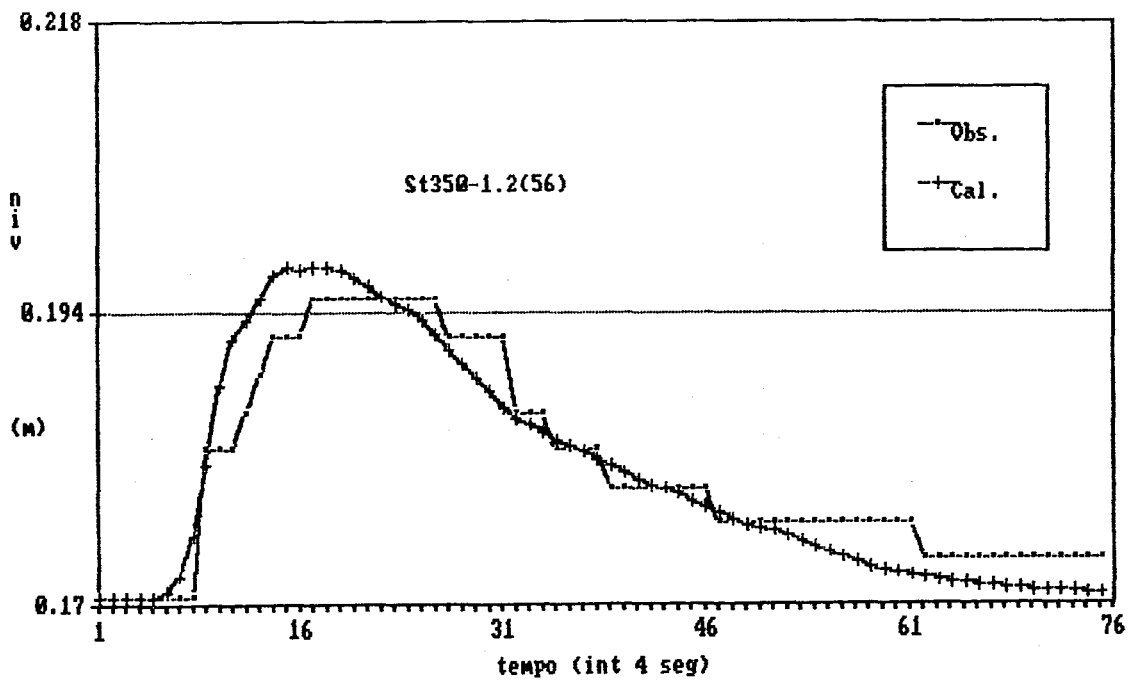


fig 6.24 Onda abrupta observada em laboratório. Níveis na seção St350 para o teste 1.2(56) (USAE 1961B)

## 7. CONCLUSÕES

O escoamento em rios e canais, com presença de ondas de frentes abruptas, tem merecido bastante estudo, dadas suas propriedades particulares. Este tema apresenta interesse devido ao aspecto prático, em engenharia, como no caso do fluxo ocasionado pela ruptura de uma barragem, e teórico por manifestar-se nele o caráter não-linear do escoamento.

Neste estudo analisaram-se as características gerais do fenômeno e desenvolveu-se um programa computacional, com as equações completas de Saint Vénant e o esquema numérico de Preissmann, para resolver diferentes exemplos em forma numérica com e sem mudança de regime de fluxo, tendo-se chegado às seguintes conclusões:

As equações de Saint Vénant na forma divergente ou conservativa com o método de Preissmann resolvem satisfatoriamente, sem necessidade de localizar a descontinuidade, o caso de ondas de frente abruptas em regime subcrítico, sendo a precisão, função da discretização  $\Delta x$  e  $\Delta t$ .

Nos casos das ondas abruptas que produzem uma mudança do regime de fluxo foi necessário localizar a descontinuidade, a fim de separar a solução do trecho de canal com fluxo supercrítico do correspondente com regime subcrítico, e logo unir ambos com as relações através das descontinuidades. Os sub-trechos com fluxo subcrítico e supercrítico foram resolvidos com o esquema de Preissmann. Embora na literatura existam comentários sobre a impossibilidade de usar o método de Preissmann para resolver fluxo supercrítico (Samuels e Skeels, 1990), neste estudo resolveram-se problemas com números de Froude menores a 1.6 e com número de Vedernikof menores a 1.0.

Em relação à solução iterativa comparada à não-iterativa, observou-se que a realização de iterações justifica-se pela maior estabilidade na resolução, devido ao cálculo mais exato, além da maior precisão nas zonas com altos gradientes de fluxo. É apropriado assinalar, neste ponto, que no cálculo no computador foram usadas variáveis com dupla precisão. A fim ilustrativo comenta-se que foi observada uma diferença de 70 % no número de iterações necessárias na convergência, com simples e dupla precisão.

Não foi possível a simulação com números de Courant  $\leq 1$  por instabilidades nas seções contíguas aos contornos. O menor número de Courant usado numa simulação de onda de frente abrupta foi de 1.3. Para valores do número de Courant maiores do que 5.0 a precisão não foi boa.

A metodologia empregada para ondas de frentes abruptas com mudança de regime, mediante o uso de um esquema explícito a montante do sub-trecho subcrítico, permite o cálculo de uma frente deslocando-se num fluxo gradualmente variado, como ocorre na ruptura não-instantânea de uma barragem. Nas resoluções de frentes abruptas usando as relações de Rankine-Hugoniot apresentadas na literatura, a solução na frente da descontinuidade no tempo  $(n+1)\Delta t$  é considerada igual à solução no tempo  $(n)\Delta t$ . Isto é válido numa frente avançando num fluido em repouso ou em movimento uniforme mas não para o caso mais geral de um fluxo gradualmente variado.

O uso de equação característica atrás da descontinuidade no método de tipo "shock fitting", na forma como essa equação é usada neste estudo, discretizada segundo o esquema de Preissamnn, permite eliminar oscilações devido às deformações das ondas com comprimento igual a  $2\Delta x$  nessa região. Neste estudo, e com o método implícito, foram feitas tentativas sem êxito de resoluções de exemplos com canal sem água a jusante da represa fazendo algumas simplificações na zona da frente e empregando a equação de Chezy no lugar de Manning para eliminar oscilações com tirantes baixos Vilas (1985). Acredita-se que este assunto é do maior interesse no problema de deslocamento de ondas de frente abrupta e necessita de mais pesquisa (Bellos e Sakkas, 1987).

Por último, o método de tipo "shock fitting", usado no presente estudo, numa resolução com diferenças finitas, demonstrou ser preciso e a sua formulação e implementação não apresentam dificuldades, dada a forma de discretização da equação característica empregada atrás da descontinuidade. Embora acredite-se que os métodos de cálculo direto, sem localização das descontinuidades, sejam os mais apropriados em hidráulica -dada a geral complexidade do sistema físico- neste estudo foi assumido como uma necessidade a utilização daquele método nos casos com mudança de regime de fluxo, a fim de separar o cálculo do trecho subcrítico do trecho supercrítico com um esquema implícito.

## BIBLIOGRAFIA

1. ABBOTT, B.M.-1975-"Weak solutions of the equations of open channel flow", Chap 7, Ed. by Mahmood K. and Yevjevich, Water Resource Pub., Fort Collins, Colorado.
2. ABBOTT, M. B.-1979-"Computational Hydraulics", Pitman Advanced Publishing Program, Boston.
3. ABBOTT, B.M. and IONESCU, F.-1967-"On the Numerical Computation of Nearly Horizontal Flows", J. of Hyd Research, Vol 5, Nro 2, AIHR.
4. ABBOTT, B.M., G. MARSHALL, G.S. RODENHINS-1969-"Amplitude-dissipative and phase-dissipative scheme for hydraulic jump simulations", XIII Congress of AIHR, KYOTO
5. AKANBI A. A. and N. D. KATOPODES-1988-"Model for flood propagation on initially dry land", J. of Hyd. Engi., Vol 114(7).
7. BELLOS, C.V. and SAKKAS, J.G.-1987-"1-D Dam-Break Flood-Wave Propagation on Dry Bed", J. of Hyd. Engrg., ASCE, Vol. 113(12).
8. BOSCO, D.R.-1988-"Limitations of the Saint Venant equations in the dam-break analysis", J. of Hyd. Eng., Vol. 115, No7.
9. BURGERS-1948-"A mathematical model illustrating the theory of turbulence", Adv. in Appl. Mechnics, Ed. by R. v.Mises and T.v.Kármán, Vol.1, pp.171-199.
10. CARRERAS P. y A MENENDEZ-1987-"Un método numérico para simular ondas de inundación con frentes abruptos en escurrimiento con cambio de régimen", Lab. de Hid., INCYTH, Argentina.
11. CHANG, H.T. and E.J. LESLEIGHTER-1982-"Mathematical simulation of the flood wave resulting from a dam-break", III Congress, of the A.P.D. of the AIHR, Bandung, Indonesia.
12. CHEN, C.I. and DRUFFEL, L.A.-1977-"Dam-break flood wave computation by method of characteristicis and linearized implicit schemes", Proceedings of Dam-Break Flood Routing Models Workshop, NTIS PB-275 437, Water Resources Council, Washington, D.C., pp. 312-345.
13. CHEN, C.I.-1980-"Laboratory verification of a dam-break flood model", J. of Hyd. Div., ASCE, 106(4), 535-556.
14. CHEN Y.H.-1973-"Mathematical modeling of water a sediment routing in natural channels", PhD Dissertation, Colorado State University, Fort Collins.
15. CHORIM, A-1975-"Random choice solution of hyperbolic systems", J.of Comp.



- Physics, 22, pp.517-533.
16. COLE, J.D.-1951-"On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics", Quart. Appl. Math. 9, pp. 225-236.
17. COURANT, T. and FRIEDRICHS, K.D.-1948-"Supersonic Flow and Shock Wave", Springer-Verlag.
18. CUNGE, A.-1975-"Rapidly Varying Flow in Power and Piping Channels", Chap. 14, Ed. by Mahmood K. and Yevjevich, Water Resource Pub., Fort Collins, Colorado.
19. CUNGE, J.A., F.M. HOLLY, Jr. and A. VERWEY-1980-"Practical Aspects of Computational River Hydraulic", Pitman Advanced Publishing Program, Boston.
20. DE SAINT VÉNANT, B.-1871-"Theory of unsteady water flow with application to river floods and the propagation of tide in the river channels", Academy of Science (Paris) Comptes Rendus, Vol 73, pp 148-154.
21. DRESSLER, R.F.-1952-"Stability of uniform flow and roll-wave formation", U.S. Natl. Bur Standards Cir 521, p. 237-241
22. DRESSLER, R.F.-1952-"Hydraulic resistance effects upon the dam-break function", Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol 49, N° 3, Research paper 2356.
23. DRESSLER, R.F.-1949-"Mathematical Solutions of the Problems of Roll-Waves in Inclined Open Channels", Comm. on P. and Applied Math, vol 2, nro 2-3.
24. DROLET, J. e GRAY, W.-1988-"On the well posedness of some wave formulations of the shallow water equations", Adv. Water Resources, Vol. 11.
25. EVANS, E.P.-1978-"The behaviour of a mathematical model of open channel flow", DipHE (Delft), MICE.
26. FENNEMA R.J. and CHAUDHRY M.H.-1987-"Simulation of one-dimensional dam-break flows", J. of Hyd. Research, IARH, Vol. 25(1), pp. 41-51.
27. FENNEMA, R.J. and CHAUDRY, M.H.-1986-"Explicit numerical schemes for steady free-surface flows with shocks", Water Resources. Res., 22(13), 1923-1930.
28. FREAD, D.L.-1984-"DAMBRK: The NWS dam-break flood forecasting model", National Weather Service, Of. of Hydrology.
29. FREAD D.L.-1985-Channel routing-Chapter 14, "Hydrological Forecasting", Ed. by Anderson M. G. and T.P. Burt, John Wiley & Sons, New York.
30. GARCIA, R.Y. and KAHAWITA R.-1983-"Numerical solutions of the shallow water equations with a McCormack type finite-difference scheme", 4th. Int. Conf. on Mathem. Model., ETH, Zurich.

31. GARCIA, M.-1984-"Verificación del esquema numérico de McCormack para resolver las ecuaciones de St. Venant", XI Cong. Lat. de Hid., Bs. AS.
32. GARCIA, R. and KAHAWITA, R.A.-1986-"Numerical solution of the ST. Venant equations with the Mac. Cormack finite-difference scheme", Int. J. for Numer. Methods in fluids, 6(4), 259-274.
33. GERMAN P. e R. BADER-1953-"Unicité des écoulements avec chocs dans la mécanique de Burgers", Office Nationale d'Est. et Rech. Aeronautiques, Paris, pp 1-13.
34. GHAMBARIAN, H.H.-1965-"On waves in inclined open channels", Proceedings of XI Congress AIRH, Vol III, Leningrado.
35. GLIMM, J.-1965-"Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations", C. in P. and A.M., Vol XVIII, pp.697-715.
36. GODUNOV, S.K.-1984-"Ecuaciones de la física matemática", MIR, Moscu.
37. GODUNOV S.K.-1959-"Difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of equations in hydrodynamic", Mat. Sbornic, N.S., Vol. 47(89), No.3.
38. GUNARATNAM D. J. and F.E. PERKINS-1970-"Numerical solution of unsteady flows in open channels", Hyd. Lab., Dto. Civil Eng., MIT, U.S.
39. HENDERSON F.M.-1969-"Open channel flow", Mac Millan Series in Civ. Eng. , London.
40. HOLT, M.-1977-"Numerical Methods in Fluid Dynamics", Spring- Verlag, New York, N Y.
41. HOPF E.-1950-"The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ", Comm on P. and Applied Math., 3, 210-230.
42. HOPF E.-1969-"On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order", J. of Math. and Mechanics, Vol. 19, No 6.
43. HOUGHTON D D and KASAHARA-1968-"Nonlinear shalow water fluid flow over an isolated ridge", Com. on P. and App. Mathematics, Vol XXI, 1-23.
44. HUNT B.-1983-"Asymtotic Solution For Dam Break On Sloping Channel", J. of Hyd. Engineering, Vol 109(12), pp.1698-1706.
45. HUNT, B.-1984-"Dam-break solution", J. Hydr. Engrg., ASCE, 110(6), 675-686.
46. HUNT, B.-1984-"Perturbation Solution for Dam-Break Floods", J. of Hydr. Engrg., ASCE, 110(8), 675-686.
47. HUNT, B.-1987-"An inviscid dam-break solution", J. of Hyd. Research,

- Vol 25(3), pp. 313-327.
48. JEFFREY A.-1976-"Quasilinear hyperbolic systems and waves", Pitman, London.
49. JEFFREY A.-1967-"The evolution of discontinuities in solutions of homogeneous nonlinear hyperbolic equations having smooth initial data"-J. f Math. and Mech., Vol 17, Nro. 4.
50. JEFFREY A.-1963-"The development of jump discontinuities in nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables", Arch. Rat. Mech. Anal., 14, pag. 27-37.
51. JIMENEZ, O.F. and CHAUDHRY, H.M.-1988-"Computations of supercritical free-surface flows", J. of Hyd. Engineering, Vol 114(4), pp. 377-395
52. JOLIFFE B.-1987-"Traslating Hydraulic Jumps", XXII Congress IARH and Fourth Int. Conf. on Urban Storm Drainage, Lausanne.
53. KASAHARA, A. and HOUGHTON, D.D.-1969-"Nonlinear mountain flow", Part I, National Center for Atmospheric research, Part 43, pp.103-130.
54. KATOPODES, N.D.-1984a-"A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow", J. Hyd. Engrg., ASCE, 110(4), 450-466.
55. KATOPODES, N.D.-1984b-"Two-dimensional surges and shocks in open channel", J. Hydr. Engrg., ASCE, 110(6), 794-812.
56. KATOPODES, N.D. and WU, C.T.-1986-"Explicit computation of discontinuous channel flow", J. Hydr. Engrg., ASCE, 112(6), 456-475
57. KATOPODES, N.D. and STRELKOFF, T.-1978-"Computing two-dimensional dam-break FLOOD waves", J. Hydr. Div., ASCE, 104(9), 1269-1288
58. KATOPODES, N.D. and STRELKOFF, T.-1979-"Two-dimensional shallow water-wave models", J. of the Engi. Mech. Div., ASCE, Vol 105(2), pp 317-334.
59. KATOPODES, N. D.-1980-"Finite elements models for the open-channel flow near critical conditions", Finite elements in water resources III, S.Y. Wang et. al., eds. Univ. of Miss. Press. University, Mi
60. KATOPODES, N.D. and SCHAMBER, D.R.-1981-"Discussion of "Laboratory verification of a dam-break flood model", C.L. Chen, J. of the Hydraulic Division, ASCE, 107(2).
61. KATOPODES, N.D. and SCHAMBER, D.R.-1983-"Aplicability of dam-break flood wave models", J. Hydr. Engrg., ASCE, 109(5), 702-721.
62. KEEFER, T. N. and SIMONS, R.K.-1977-"Qualitative Comparasion of three dam break routing models", Proceedings of dam-break flood routing model workshop, U.S. Dep. of Com., National Tech. Infor. Ser.(PB-275 437), pp.

292-324.

63. KORDAS, B. and WITKOWSKA, H.H.-1976-"Mathematical model for dam-break wave", Proc. Int. Symp. on Unsteady Flow in Open Channel, Newcastle-upon-Tyne, England, C2.19-C2.28
64. KREISS, H.O.-1964-"On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations", Comm. in Pure and Appl. Math.
65. KRUKOV S.N.-1969-"Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for nonlinear equations of first order", Soviet Math. Dokl. Vol.10, No.4.
66. LAX, P.D.-1954-"Weak Solutions of Non-linear Hyperbolic Equations and Their Numerical Applications", Comm. Pure. Appl., Math.
67. LAX P.-1957-"Hyperbolic systems of conservation laws II", Comm. on P. and A. Mathem., Vol X, pp.537-566.
68. LAX P., and WENDROFF-1960-"Systems of conservation laws", C. on P. and A. Mathem., Vol. XIII, pp. 217-237.
69. LAX P.D.-1973-"Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves", Courant Ins. of Math. Sciences, N.Y. University, Pub. by Siam, Philadelphia, Pennsylvania.
70. LEENDERTSE, J.J.-1967-"Aspects of computational model for long-period water-wave propagations", Rands Memorandum RM-5294, Santa Monica, California.
70. LE ROUX, A.Y.-1977-"A numerical Conception of Entropy for Quasi-Linear Equations", Mathematics of Computation, Vol. 31, Numb. 140, pp. 848-872.
71. LE ROUX, A.Y.-1981-"Numerical stability for some equations of gas dynamics", Laboratoire d'Analyse Numérique, I.N.S.A. 20, avenue des Buttes de Coësmes, France.
72. LIGGETT, J.A. AND CUNGE, J.A-1975-"Numerical Methods of Solutions of the Unsteady Flow Equations", Chap. 4, Ed. by Mahmood k. and Yevjevich, Water Resource Pub., Fort Collins, Colorado.
73. LIU, T.P.-1979-"Quasilinear Hyperbolic Systems", Comm. Math. Phys., 68, pp 141-172.
74. LUSKIN M.-1981-"On the existence of global smooth solutions for a model equation for fluid flow in pipe", J. of Mathematical Analysis and App., 84, 614-630.
75. LUSKIN, M. and B. TEMPLE-1982-"The existence of a global weak solution to the non-linear waterhammer problem", Comm. on P. and Applied Mathematics, Vol. XXXV, 697-735.
76. LYNN D A and GOODWIN-1987-"Stability of general Priessmann scheme", J of

Hyd. Engineering, Vol 113, N1, ASCE.

77. MARTIN S C and J J ZOVNE-1971-"Finite-difference simulation of bore propagation", J. of Hyd. Division, ASCE, Vol 97, No HY7.

78. MARSHALL, G. , MENENDEZ, A.N.-1981-"Numerical tratament of Noncoservation Forms of the Equations of Shalow Water Theory", J. of Computational Physics, Vol.44, N' 1, Nov.

79. MARSHALL, G. e A. MENENDEZ-1986-"El método de Glimm", Rev. int. de metodos numéricos para cal. y d. en ingeniería, Vol.2(3).

80. MENENDEZ A.N.-1975-"Rotura de Presas", Laboratorio de Hidráulica Aplicada, Incyth, Buenos Aires.

81. MENENDEZ A N-1980-"Simulación numérica uni y bidimensional de la onda de ruptura de presas", Laboratorio de Hidráulica Aplicada, Incyth, Buenos Aires.

82. MENENDEZ-1981-"The numerical solutions of the dam failure problem by the random choice method", Advances in Water Resources, Vol. 4, Sept.

83. MENEDEZ A. e R. NORSCINI-1982-"Spectrum of shallow water waves: An analysis", J. of. Hyd. Division, ASCE, Vol. 108, NoHY1.

84. NEUMANN J.v. AND RITCHMYER R.D.-1949-"A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks", J. of Applied Phys., pp 232-237.

85. NOGUEIRA, Q.V.-1984-"A mathematical model of progressive earth dam failure", Tesis doctoral presentada a Colorado State Univ., Fort Collins, USA

86. OLEINIK O.A.-1959-"Construction of a Generalized Solution of the Cauchy Problem for a Quasi-linear Equation of First Order by the Introduction of 'Vanishing Viscosity' ", Amer. Meth. Society Trans., 33, pp.277-284.

87. OLIENIK, O.A.-1963-"Discontinuous solutions of non-linear differential equations", Amer. Math. Society Trans. (2), v.33, pp 285-290.

88. PONCE V.M., R.M. LI e D.B. SIMONS-1977-"Shallow water propagations in open channel flow", J. of Hyd. Div., ASCE, Vol. 103, No.HY12.

89. PONCE M.V., H. INDLEKOFER and D.B. SIMONS-1978-"Convergence of four-point implicit water wave models", J. of Hydraulic Div., Vol. 104, NY7, ASCE.

90. PONCE M.V., H. INDLEKOFER and D.B. SIMONS-1979-"The convergence of implicit bed transient models", J. of Hydraulic Div., Vol. 105, No.HY4, ASCE.

91. PRICE R.K.-1974-"Comparison of four numerical methods for flood routing", J. of Hydraulic Div., Vol. 100, NY7, ASCE.

92. PREISSMANN, A.-1965-"Dificultis encontres dans le calcul des onds de traslations front raide", Procedings 11th. Congress IAHR, Leningrad, paper N' 3.52.

93. PREISSMANN, A., J.A. CUNGE-1961-"Calcul du mascaret sur machine electronique", La Huille Blanche, N'5.
- 94. RAJAR, R.-1978-"Mathematical simulation of dam-break flow", J. Hydr. Div., ASCE, 104(7), 1011-1026.
95. RICHTMYER, R.D.-1960-"Methods for (generally unsteady) flows with shocks: A brief survey", Univ. of Colorado, Boulder, Colorado.
96. RICHTMYER, R.D.-1978-"Principles of Advanced Mathematical Physics", Vol. 1, Chap. 17, Springer-Verlag.
97. RICHTMYER R.D. and K.W. MORTON-1957-"Difference methods for initial-value problems", Intersciences Publishers, New York.
98. RITTER, A.-1892-"The propagation of water wave", Ver. Deutsch Ingenieure Zeitschr., Berlin, Vol. 36, Part 2, No 33, pp947-954.
99. ROACHE, P.-1972-"Computational fluid dynamic", Aer. Res. Dep., Albuquerque, New Mexico, USA.
100. ROACHE P.J.-1972-"On artificial viscosity", J. of comp. Physics 10, 169-184.
- 101. ROUSE, H.-1965-"Critical analysis of open-channel resistance", J. of Hyd. Div, ASCE, vol 91, HY(4), pp.1-25.
102. SAKKAS, J.G. and STRELKOFF, T.-1973-"Dam-break flood in a prismatic dry channel ", J. Hydr. Div., ASCE, 99(12), 2195-2216.
103. SAKKAS, J.G. and STRELKOFF, T.-1976-"Dimensionless solution of dam-break flood wave", J. Hydr. Div. ASCE, 102(2), 171-184.
104. SAKKAS, J.G.-1980-"Dimensionless Graph from ruptured Dams", Research Not. N'8, US. Army Corps of Engineering Center, Davis, Calif.
105. SAMUELS P.G. e C.P. SKEELS-1990-"Stability limits for Preissmann's scheme", J. of Hyd. Eng., Vol. 116, no8.
106. SCHAMBER, D.R. and KATOPODES, N.D.-1984-"One-dimensional models for partially breached dams", J. Hydr. Engrg. ASCE, 110(8), 1086-1102.
107. SCHOKLITSCH, A.-1917-"Wave created by dam breaching", Proceedings of the Royal Academy of Science, Vienna.
108. SILVA R.C.V. E MACARENHAS F.C.B.-1983-"Ondas de cheia provenientes da ruptura de pequena barragem", Sim. Luso-Brasileiro sobre Sim. e Mod. em Hid. e Rec. Hid., Blumeau, Brasil
109. SILVA R.C.V.-1986-"Considerações sobre a modelação de ondas causadas por ruptura de barragem", COPPE/URRJ
110. SMOLLER, J.-1983-"Shock waves and reaction diffusion equations",

- Springer-Verlag, New York.
111. SOBEY R.-1984-"Numerical alternatives in transient stream response", J. of Hydraulic Div., Vol. 110, No6, ASCE.
112. STOKER, J.J.-1953-"On radiation conditions", VI Symposium on App. Math., Amer. Math. Society.
113. STOKER, J.J.-1957-"Water Wave", Interscience, New York.
114. STRELKOFF, T.-1969-"One dimensional equations of open-channel flow", J. of Hyd. Div., ASCE, Vol. 95(3).
115. STRELKOFF, T.-1970-"Numerical solutions of the St. Venant equations", J. of Hyd. Div., ASCE, Vol 96, HY(1)
116. STRELKOFF, T. SCHAMBER, D. and KATOPODES, N.-1977-"Comparative analysis of routing techniques for the floodwave from a ruptured dam", Proc. of Dam-Break Flood Routing Models Workshop, Water Res. Council, NTIS PB-275 437, Washington, D.C., PP 228-291.
117. SU, SHING-TUN-1970-"Geometric and Frictional Effects on Solution Release", J. of Hyd Div, ASCE, vol 96, HY(11), (1-A)
118. TERZIDIS G. and T. STRELKOFF-1970-"Computational of open-channel surges and shocks", J. of Hyd. Div., ASCE, Vol 96, No HY12.
119. TOKATY, G.A.-1971-"History and Philosophy of Fluidmechanics", Printed by W&J mackay & Co Ltd, Chatham, Great Britain.
120. U.S. Army Corp of Engineers, Waterway Experiment Station-1960-"Floods Resulting from Suddenly Breached Dams: Conditions of Minimum Resistance", Miscellaneous Paper N'2-374, Report 1, Vicksbug, Mississippi.
121. U.S. Army Corp of Engineers, Waterway Experiment Station-1961-"Floods Resulting from Suddenly Breached Dams: Conditions of High Resistance", Miscellaneous Paper N'2-374, Report 1, Vicksbug, Mississippi.
122. VASILIEV, O.F., M.T. GLADYCHEV-1965-"Numerical Methods for the Calculations of Shock Wave Propagation in Open Channels", 3.44. XI Congress AIRH, Vol III, Leningrado.
123. VASILIEV et al-1965-"Numerical Methods for the calculation of Shock Wave Propagation in Open Channel", Proceeding of the Internacional Association for Hydraulic Research, Eleventh International Congress, Leningrad, N. 3, pag. 44.
124. VASILIEV, O.F.-1970-"Numerical solution of the nonlinear problems of unsteady flows in open channel", Proc. 2nd Int. Conf. on Numer. Meth. in Fluid Dyn., Berkeley, Calif., pp 410-421.
125. VILAS, J.P.-1986-"Sur la Thorie et L'approximation numrique de problemes

Hyperboliques non Lineaires Applications aux quations de Saint Venant et la Modlisation des avalanches de niege dense", Universit Paris VI, Paris.

126.WEYL, H.-1949-"Shcok wave in arbitrary fluids", Comm. on Pure and Applied Math., Vol 2, pp 103-122.

127.WETMORE J.N. AND D.L.FREAD -1983-"The NWS Simplified dam break flood forecasting model for desk-top and held microcomputers", National Wether Service, Maryland.

128.WEYL, H.-1949-"Shock waves in arbitrary fluids", Comm. on P. and App. Mathematics, June-Sept.

129.WHITHAM, G.B.-1955-"The effects of Hydraulic Resistance in the Dam-Break Problem", Royal Soc. London Proc., V.227, No1170, pp.399-407

130.WURBS, R. A.-1985-"Military hydrology report 9:State-of-the-Art Review and annotated Bibliography of Dam-Breach Flood forecasting", Miscellaneous Paper EL-79-6, U.S. Army Corp of Engineers, Waterways Experiment Station, Feb.

131.WURBS, R.A.-1987-"Dam-brach flood wave models ", J. of Hyd. Eng., Vol 113(1), pag. 29-47.

132.YEVJEVICH,V-1975-"Sudden Water Release", Chap 15, Ed. by Mahmood k. and Yevjevich, Water Resource Pub., Fort Collins, Colorado.

133.ZOVNE, J.J., Martin C.S.-1979-"Simulations of transient supercritical channel flow", J. HYd. Div. ASCE, Vol. 105(7).



ANEXO-A: Forma discreta das equações de Saint Venant

ANEXO-A1: Forma discreta das equações de Saint Venant na forma divergente

conservação da massa:

$$\begin{aligned} & \left[ \phi A_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) A_i^{n+1} - \phi A_{i+1}^n - (1-\phi) A_i^n \right] \Delta x + \\ & \left[ \theta Q_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) Q_{i+1}^n - \theta Q_i^{n+1} - (1-\theta) Q_i^n \right] \Delta t - \\ & \left[ \theta q_l^{n+1} + (1-\theta) q_l^n \right] \Delta x \Delta t = 0 = F_1(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) \dots \dots (A1.1-a) \end{aligned}$$

quantidade de movimento linear:

$$\begin{aligned} & \left[ \phi Q_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) Q_i^{n+1} - \phi Q_{i+1}^n - (1-\phi) Q_i^n \right] \Delta x + \left[ \theta g I_{1i+1}^{n+1} + \right. \\ & \left. + (1-\theta) g I_{1i+1}^n - \theta g I_{1i}^{n+1} - \theta g I_{1i}^{n+1} - (1-\theta) g I_{1i}^n \right] \Delta t - \\ & - \left\{ \theta \left[ \phi g A_{i+1}^{n+1} S_0 + (1-\phi) g A_i^{n+1} S_0 \right] + (1-\theta) \left[ \phi g S_0 A_{i+1}^n + (1-\phi) g S_0 A_i^n \right] \right\} \Delta x \Delta t \\ & + \left\{ \theta \left[ \phi g \frac{A|Q|Q}{K^2} \Big|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) g \frac{A|Q|Q}{K^2} \Big|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi g \frac{A|Q|Q}{K^2} \Big|_{i+1}^n + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-\phi) g \frac{A|Q|Q}{K^2} \Big|_i^n \right] \right\} \Delta x \Delta t - \left\{ \theta \left[ \phi g I_{2i+1}^{n+1} + (1-\phi) g I_{2i}^{n+1} \right] + \right. \\ & \left. + (1-\theta) \left[ \phi g I_{2i+1}^n + (1-\phi) g I_{2i}^n \right] \right\} \Delta x \Delta t = 0 = F_2(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) \dots \dots (A1.1-b) \end{aligned}$$

coeficientes do sistema de resolução pelo método de Newton:

$$a_i = \frac{\partial F_1}{\partial A_{i+1}} = \phi \Delta x, \quad b_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_{i+1}} = \theta \Delta t, \quad c_i = \frac{\partial F_1}{\partial A_i} = (1-\phi) \Delta x, \quad d_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -\theta \Delta t$$

$$-e_i = F_1 = \phi \Delta x A_{i+1}^n + (1-\phi) \Delta x A_i^n + (1-\theta) \Delta t Q_i^n - (1-\theta) \Delta t Q_{i+1}^n -$$

$$- \theta \Delta x \Delta t \theta l^{n+1} - (1-\theta) \Delta x \Delta t \theta l^n$$

$$-\theta \Delta x A_{i+1}^n - (1-\phi) \Delta x A_i^{n+1} - \theta \Delta t Q_{i+1}^{n+1} + \theta \Delta t Q_i^{n+1} \dots \dots \dots (A1.2-a)$$

$$a_j = \frac{\partial F_2}{\partial A_{i+1}} = -\theta \Delta t \frac{Q^2}{A^2} \Big|_{i+1}^{n+1} + \theta \Delta t g \frac{dI_1}{dA} \Big|_{i+1}^{n+1} -$$

$$- g S_o \theta f \Delta t \Delta x - \theta \phi \Delta t \Delta x g \frac{|Q| Q n^2}{K^2} \left[ 1 + \frac{3A}{4R} \frac{\partial R}{\partial A} \right] \Big|_{i+1}^{n+1} - g \theta \phi \Delta t \Delta x \frac{\partial I_2}{\partial A} \Big|_{i+1}^{n+1}$$

$$b_j = \frac{\partial F_2}{\partial Q_{i+1}} = \phi \Delta x + 2\theta \Delta t \frac{Q}{A} \Big|_{i+1}^{n+1} + g \theta f \Delta t \Delta x \frac{A n^2}{K^2} \left[ |Q| + Q d|Q| \right] \Big|_{i+1}^{n+1}$$

$$c_j = \frac{\partial F_2}{\partial A_i} = \theta \Delta t \frac{Q^2}{A^2} \Big|_i^{n+1} - \theta \Delta t g \frac{\partial I_1}{\partial A} \Big|_i^{n+1} - g \theta (1-\phi) S_o \Delta t \Delta x -$$

$$-\theta (1-\phi) \Delta t \Delta x g \frac{Q|Q| n^2}{K^2} \left[ 1 + \frac{3A \partial R}{4R \partial A} \right] \Big|_i^{n+1} - g \theta (1-\phi) \Delta t \Delta x \frac{\partial I_2}{\partial A} \Big|_i^{n+1}$$

$$c_j = \frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = (1-\phi) \Delta x - 2\theta \Delta t \frac{Q}{A} \Big|_i^{n+1} + \theta (1-\phi) \Delta t \Delta x g \frac{A n^2}{K^2} \left[ |Q| + Q d|Q| \right] \Big|_i^{n+1}$$

$$-e_j = F_2 = \phi \Delta x Q_{i+1}^n + (1-\phi) \Delta x Q_i^n - (1-\theta) \Delta t \frac{Q^2}{A} \Big|_{i+1}^n - (1-\theta) \Delta t g I_1 \Big|_{i+1}^n +$$

$$+ (1-\theta) \Delta t \frac{Q^2}{A} \Big|_i^n + (1-\theta) \Delta t g I_1 \Big|_i^n + (1-\theta) \phi \Delta t \Delta x g S_o A_{i+1}^n +$$

$$(1-\theta)(1-\phi) \Delta t \Delta x g S_o A_i^n - (1-\theta) \phi g \frac{AQ|Q| n^2}{2} \Big|_{i+1}^n - (1-\theta)(1-\phi) g \frac{AQ|Q| n^2}{2} \Big|_i^n +$$

$$+ g(1-\theta) \phi \Delta t \Delta x I_2 \Big|_{i+1}^n + (1-\theta)(1-\phi) \Delta t \Delta x g I_2 \Big|_i^n - \phi \Delta x Q_{i+1}^{n+1} -$$

$$- q \Delta t \frac{Q^2}{A} \Big|_{i+1}^{n+1} + \theta \phi \Delta t \Delta x g S_o A_{i+1}^{n+1} - \theta \phi \Delta t \Delta x g \frac{AQ|Q| n^2}{2} \Big|_{i+1}^{n+1} + \theta \phi g \Delta t \Delta x I_2 \Big|_{i+1}^{n+1} -$$

$$- \theta \Delta t g I_1 \Big|_{i+1}^{n+1} - (1-\phi) \Delta x A_i^{n+1} + \theta \Delta t \frac{Q^2}{A} \Big|_i^{n+1} + \theta \Delta t g I_1 \Big|_i^{n+1} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \theta(1-\phi)\Delta t \Delta x g \frac{AQ|Q|n^2}{2} \Big|_i^{n+1} + \theta(1-\phi)\Delta t \Delta x g A_i^{n+1} S_o - \\
 & - \theta(1-\phi)\Delta t \Delta x g I_2^{n+1} \dots\dots\dots(A1.2-b)
 \end{aligned}$$

nas quais  $R$  é o raio hidráulico,  $d|Q|$  é o sinal de  $Q$  e  $K$  define-se como,

$$K = \frac{R^{2/3}}{A} \dots\dots\dots(A1.3)$$

ANEXO-A2: Forma discreta das equações de Saint Vénant na forma característica

As formas diferenciais características das equações de Saint Vénant, expressões (3.25), para cada direção característica, são,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] A_t + \left[ \left( \frac{Q}{A} \right)^2 - \left[ g \frac{\partial I_1}{\partial A} \right] \right] A_x - Q_t - \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] Q_x - \\
 & + \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(A2.1-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] A_t + \left[ \left( \frac{Q}{A} \right)^2 - \left[ g \frac{\partial I_1}{\partial A} \right] \right] A_x - Q_t - \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] Q_x - \\
 & - \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(A2.1-b)
 \end{aligned}$$

nas quais  $A_{xxx} A_t$ ,  $Q_x$  e  $Q_t$  representam as variações da área  $A$  e vazão  $Q$  em relação dos eixos coordenados ortogonais  $x-t$ .

Considerando as seguintes funções para maior simplicidade,

$$G_1 = \left[ \frac{Q}{A} - \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right], \quad G_2 = \left[ \left( \frac{Q}{A} \right)^2 - \left[ g \frac{\partial I_1}{\partial A} \right] \right], \quad G_3 = \left[ \frac{Q}{A} + \sqrt{g \frac{\partial I_1}{\partial A}} \right] \dots\dots(A2.2)$$

substituindo (A2.2) em (A2.1), resulta,

$$G_1 A_t + G_2 A_x - Q_t - G_3 Q_x - G_3 q_l + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 \dots\dots\dots(A2.3-a)$$

$$G_3 A_t + G_2 A_x - Q_t - G_1 Q_x - G_3 q_l + gSoA - gASf + gI2 = 0 \dots \dots \dots (A2.3-b)$$

As expressões (A2.3-a,b) são discretizadas segundo o esquema de Preissmann, expressões (5.1) e (5.2) para as derivadas  $A_x$ ,  $A_t$ ,  $Q_x$ ,  $Q_t$  e expressão (5.3) para as funções  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ; resultando,

$$A_t = \frac{\partial A}{\partial t} \cong A_t = \left\{ \phi \left[ A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n \right] + (1-\phi) \left[ A_i^{n+1} - A_i^n \right] \right\} \frac{1}{\Delta t} \dots \dots (A2.4)$$

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial x} \cong A_x = \left\{ \theta \left[ A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n \right] + (1-\theta) \left[ A_{i+1}^n - A_i^n \right] \right\} \frac{1}{\Delta x} \dots \dots (A2.5)$$

$$Q_t = \frac{\partial Q}{\partial t} \cong Q_t = \left\{ \phi \left[ Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n \right] + (1-\phi) \left[ Q_i^{n+1} - Q_i^n \right] \right\} \frac{1}{\Delta t} \dots \dots (A2.6)$$

$$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \cong Q_x = \left\{ \theta \left[ Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n \right] + (1-\theta) \left[ Q_{i+1}^n - Q_i^n \right] \right\} \frac{1}{\Delta x} \dots \dots (A2.7)$$

$$gSoA \cong gS_o A = \theta \left[ \phi gSoA|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) gSoA|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi gSoA|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) gSoA|_i^n \right] \dots \dots \dots (A2.8)$$

$$gASf \cong gAS_f = \theta \left[ \phi gASf|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) gASf|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi gASf|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) gASf|_i^n \right] \dots \dots \dots (A2.9)$$

$$gI2 \cong gI_2 = \theta \left[ \phi gI2|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) gI2|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi gI2|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) gI2|_i^n \right] \dots \dots \dots (A2.10)$$

$$G_1 \cong G_1 = \theta \left[ \phi G_1|_{n+1}^{n+1} + (1-\phi) G_1|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi G_1|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) G_1|_i^n \right] \dots \dots (A2.11)$$

$$G_2 \cong G_2 = \theta \left[ \phi G_2|_{n+1}^{n+1} + (1-\phi) G_2|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi G_2|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) G_2|_i^n \right] \dots \dots (A2.12)$$

$$G_3 \cong G_3 = \theta \left[ \phi G_3|_{n+1}^{n+1} + (1-\phi) G_3|_i^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[ \phi G_3|_{i+1}^{n+1} + (1-\phi) G_3|_i^n \right] \dots \dots (A2.13)$$

sendo porém a forma diferencial característica discretizada para a direção característica  $C^+$  e  $C^-$  o seguinte par de equações discretas,

$$G_1 A_t + G_2 A_x - Q_t - G_3 Q_x - G_3 q_1 + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 =$$

$$F_1(A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}, A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}) \dots\dots\dots(A2.14-a)$$

$$G_3 A_t + G_2 A_x - Q_t - G_1 Q_x - G_3 q_1 + g S_o A - g A S_f + g I_2 = 0 =$$

$$= F_2(A_{i+1}^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}, A_i^{n+1}, Q_i^{n+1}) \dots\dots\dots(A2.14-b)$$

sendo os coeficientes do sistema de resolução pelo método de Newton,

$$a_i = \frac{\partial F_1}{\partial A_{i+1}}, \quad b_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_{i+1}}, \quad c_i = \frac{\partial F_1}{\partial A_i}, \quad d_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad -e_i = F_1 \dots\dots\dots(A2.15-a)$$

$$a_j = \frac{\partial F_2}{\partial A_{i+1}}, \quad b_j = \frac{\partial F_2}{\partial Q_{i+1}}, \quad c_j = \frac{\partial F_2}{\partial A_i}, \quad d_j = \frac{\partial F_2}{\partial Q_i}, \quad -e_j = F_2 \dots\dots\dots(A2.15-b)$$

a forma extensa de qualquer um desses coeficientes, por exemplo  $b_i$ , calculou-se substituindo as expressões (A2.4-13) em (A2.14-a) e derivando a expressão resultante em relação a  $Q_i^{n+1}$ . O procedimento é similar ao empregado no ANEXO-A1 no cálculo desses coeficientes para as equações de Saint Vénant na forma conservativa.

ANEXO-A3:Relação através de uma descontinuidade

$$F_2 = -2Q_{i+1}Q_i - g(I1A)_{i+1} + Q_i^2 \frac{A_{i+1}}{A_i} + g I1_i A_{i+1} + Q_{i+1}^2 \frac{A_i}{A_{i+1}} +$$

$$+ g I1_{i+1} A_i - g I1_i A_i = 0 \dots\dots\dots(A3.1)$$

a expressão (A3.1) é usada em forma totalmente implícita através de uma descontinuidade..

ANEXO-B: Comentário sobre linearização das equações discretizadas com o esquema de Preissmann

Em relação à linearização do método de Preissmann apresentada na literatura, (Liggett e Cunge, 1975), é apropriado fazer o seguinte comentário. Considerando uma função qualquer do tipo  $F = \left[ \frac{Q^2}{A} \right]^{n+1}$  a ser avaliada no tempo  $(n+1)\Delta t$ , resultante de aplicar o critério de discretização de Preissmann as equações de Saint Vénant, a linearização dessa função, sugere-se que seja feita expandindo em série de Taylor a função  $Q$  e  $A$  do modo,

$$f^{n+1} = f^n + \Delta f \dots\dots\dots(B.1)$$

ficando,

$$\left[ \frac{Q^2}{A} \right]^{n+1} = \frac{(Q^n + \Delta Q)^2}{A^n + \Delta A} = \frac{(Q^{n2} + 2 Q^n \Delta Q + \Delta Q^2) (A^n - \Delta A)}{A^{n2} + A^n \Delta A - \Delta A A^n - \Delta A^2} \dots(B.2)$$

logo são eliminados os termos de segunda ordem, resultando na seguinte expressão,

$$\left[ \frac{Q^2}{A} \right]^{n+1} = \left[ \frac{Q^2}{A} \right]^n + 2 \left[ \frac{Q}{A} \right]^n \Delta Q - \left[ \frac{Q^2}{A^2} \right]^n \Delta A \dots\dots\dots(B.3)$$

nela é possível observar que,

$$F^{n+1} \cong F^n + \Delta F = F^n + \frac{\partial F^n}{\partial A} dA + \frac{\partial F^n}{\partial Q} dQ \dots\dots\dots(B.4)$$

portanto, um procedimento mais simples é diretamente expandir  $F^{n+1}$ , em (B.2), resultando,

$$\left[ \frac{Q^2}{A} \right]^{n+1} = \left[ \frac{Q^2}{A} \right]^n + \frac{\partial}{\partial Q} \left[ \frac{Q^2}{A} \right]^n + \frac{\partial}{\partial A} \left[ \frac{Q^2}{A} \right]^n = \left[ \frac{Q^2}{A} \right]^n + 2 \left[ \frac{Q}{A} \right]^n dQ - \left[ \frac{Q^2}{A^2} \right]^n dA \dots\dots(B.5)$$

na qual  $dQ = \Delta Q$  e  $dA = \Delta A$ . As expressões (B.5) e (B.3) são iguais pelo fato de serem ambas aproximações de primeira ordem, mas, o segundo critério ou

procedimento é mais simples. Mais ainda, quando a função  $F$  trata-se de uma das equações de Saint Vénant discretizadas. Nesse caso, para calcular o coeficiente  $b_i$ , como exemplo, de  $\Delta Q$  do sistema linear (5.13) é necessário fazer  $b_i = \frac{\partial F}{\partial Q}$ ; expressões (5.12). Por outra parte, o termo independente  $e_i$  é igual a  $-F_i$ , sendo que para o caso de realizar só uma iteração, caso linear, as  $f^{n+1} = f^n$ , se simplificam no termo independente  $e_i$ .

Esse fato demonstra que o critério de resolução numérico de Preissmann linear é equivalente a uma iteração do método de Newton de resolução de sistemas de equações não-lineares, (Cunge et al, 1980).

ANEXO-C: Intensidade da propriedade energia mecânica num escoamento unidimensional num canal

Para um escoamento unidimensional a intensidade da propriedade energia mecânica, energia cinética mais energia potencial, é a energia mecânica correspondente às partículas de água de uma seção transversal ao escoamento. Em outras palavras, cada ponto do eixo que indica a direção do escoamento concentra a energia mecânica de todas as partículas de fluido contidas numa seção transversal a essa direção.

A energia mecânica de um ponto material, ou partícula de fluido, é,

$$e_p = \frac{1}{2} m u^2 + m g y \dots\dots\dots(C.1)$$

sendo  $u$  a velocidade do ponto material,  $m = dx dy dz \rho$  a massa do mesmo e  $y$  a posição do ponto em relação ao fundo do canal. Portanto, a energia mecânica de todos os pontos materiais que conformam uma seção transversal é,

$$e = \int_0^h \int_0^b \left[ \rho u dx dy dz + \rho g y dx dy dz \right] \dots\dots\dots(C.2)$$

reordenando,

$$e = (\rho dx) \left[ \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b u^2 dy dz + g \int_0^h \int_0^b y dy dz \right] \dots\dots\dots(C.3)$$

sendo que pela definição de velocidade média,

$$U^2 A = \int_0^h \int_0^b u^2 dy dz \dots\dots\dots(C.4)$$

sendo  $U$  a velocidade média numa seção transversal  $A$ .

Por outro lado, definindo  $y = h - \eta$  fazendo uma troca de variáveis resulta que a segunda integral em (C.3) é,

$$g \int_0^h \int_0^b y dy dz = g \int_0^h \int_0^b (h-\eta) dy dz = g \int_0^h (h-\eta)b dy dz = g I_1 \dots\dots\dots(C.5)$$



isto pela definição de  $I_1$ , expressão (3.5).

Logo resulta,

$$e = (\rho dx) \left[ \frac{1}{2} U^2 A + g I_1 \right] = (\rho dx) \left[ \frac{Q^2}{2A} + g I_1 \right] \dots\dots\dots(C.6)$$

sendo a energia mecânica por unidade de largura e de densidade,

$$e = \left[ \frac{1}{2} U^2 A + g I_1 \right] = \left[ \frac{Q^2}{2A} + g I_1 \right] \dots\dots\dots(C.7)$$

A expressão (C.7) é a intensidade da propriedade energia mecânica num canal unidimensional.