

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

EFEITO DA INÉRCIA NA MODELAGEM MECÂNICA E NA INVESTIGAÇÃO
NUMÉRICA EM ESCOAMENTOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS

por

Giovanni Minervino Furtado

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia Mecânica

Porto Alegre, Dezembro de 2020

EFEITO DA INÉRCIA NA MODELAGEM MECÂNICA E NA INVESTIGAÇÃO
NUMÉRICA EM ESCOAMENTOS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS

por

Giovanni Minervino Furtado
Engenheiro Mecânico

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Aprovada por:

Prof^a. Dr^a. Adriane Prisco Petry - PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo – PPGEQ / UFRGS

Prof. Dr. Giovani Leone Zabot – UFSM / Cachoeira do Sul

Prof. Dr. Cristiano Maidana – UFSM / Cachoeira do Sul

Prof. Dr. Heraldo Mattos - UFF

Suplente: Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Rocha – PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 17, Dezembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores da Escola de Engenharia Mecânica por me darem todo o conhecimento que adquiri ao longo do curso para poder chegar até a conclusão do doutorado; também agradeço a ajuda dos meus colegas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), ao meu professor orientador Dr. Sérgio Frey que sempre me acompanhou até o término deste trabalho. Agradeço, de modo especial, à minha família que sempre me deu total apoio e confiança para seguir a difícil caminhada requerida por este curso e agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por me dar o suporte financeiro para a realização desta tese.

RESUMO

Este trabalho utiliza um modelo proposto [Souza Mendes, et al. 2011] para materiais elasto-viscoplásticos a fim de analisar escoamentos inerciais dentro de uma cavidade dirigida na parte superior. O modelo mecânico empregado é constituído pelas equações de conservação de massa e pelo princípio da quantidade de movimento linear acoplado à equação constitutiva. A equação constitutiva é uma versão modificada do modelo viscoelástico Oldroyd-B em que os termos de viscosidade, tempo de relaxação e de retardação dependem do nível de estrutura do material. A solução é obtida numericamente usando uma aproximação numérica através da formulação três-campos de Galerkin mínimos quadrados, proposta por Behr [et al. 1993], em termos do tensor de tensão extra, do campo pressão e do vetor velocidade. O desempenho da equação constitutiva, os efeitos combinados de inércia, elasticidade e viscoplasticidade são analisados. Os resultados se concentram na determinação das regiões aparentemente escoadas, aparentemente não escoadas e a posição do vórtice para uma grande variedade de número de Reynolds (variação da inércia), dos efeitos elásticos e do efeito da cinemática (U^*), revelando efeitos marcantes desses parâmetros no campo de escoamento e os resultados indicam que o padrão do escoamento é fortemente influenciado por esses parâmetros. Os resultados numéricos evidenciaram uma influência significativa da elasticidade, tensão de escoamento e da inércia no tamanho e na localização das regiões aparentemente não escoadas, sendo que a elasticidade causa assimetria das regiões do escoamento, a tensão de escoamento altera o tamanho dessas regiões e a inércia carrega suas posições.

Palavras-chave: Fluido viscoplástico; Modelo elasto-viscoplástico; Cavidade dirigida; Formulação três-campos de Galerkin mínimos quadrados; Efeitos inerciais.

ABSTRACT

This work uses proposed model [Souza Mendes, et al. 2011] for elasto-viscoplastic materials to analyze inertia flows inside a lid-driven cavity. The mechanical model used is made up of mass and momentum balance equations, coupled with the constitutive equation. The constitutive equation is a modified version of the viscoelastic Oldroyd-B model in which the viscosity, relaxation and retardation times depend on the material structuring level. The solution is obtained numerically using a three-field Galerkin least-squares-like formulation proposed by Behr [et al. 1993], in terms of extra- stress, pressure and velocity. The performance of the constitutive equation and the combined effects of inertia, elasticity and viscoplasticity are analyzed. Results focus on the determination of the yielded and unyielded regions for a wide range Reynolds number, elastics effects and kinematic effect, revealing striking effects of these parameters on the flow field and the results indicate that the flow pattern is strongly influenced by this parameters. The numerical results showed a significant influence of elasticity, yield stress and inertia on the size and location of regions that are apparently not regions, and the elasticity causes asymmetry of the flow regions, the yield stress alters the size of these regions and the inertia load your positions.

Keywords: Viscoplastic fluid; Elasto-viscoplastic model; Lid-driven cavity; Three-field Galerkin least-squares-like formulation; Inertial effects.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3	MODELAGEM MECÂNICA.....	9
3.1	Lei da Conservação de Massa.....	9
3.2	Princípio da quantidade de movimento.....	11
4	CLASSIFICAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE UM FLUIDO.....	14
4.1	Definição de um fluido Newtoniano.....	15
4.2	Fluido Newtoniano Generalizado.....	17
4.3	Comportamento não-Newtoniano.....	18
4.4	Fluidos independentes do tempo.....	19
4.5	Fluidos dependentes do tempo.....	25
4.6	Comportamento Viscoelástico.....	28
5	MODELAGEM DA ELASTO-VISCOPLASTICIDADE.....	30
6	MODELAGEM NUMÉRICA.....	35
6.1	Formulação forte de elementos finitos.....	35
6.2	Formulação fraca de elementos finitos.....	36
6.3	Galerkin mínimos-quadrados.....	37
6.4	Formulação estabilizada a três-campos.....	37
6.5	Programas analisados.....	39
6.6	Geometria e condições de contorno.....	39
6.7	Parâmetros adimensionais.....	40
7	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	44
7.1	Escolha do parâmetro m	44
7.2	Teste de qualidade de malha.....	45
7.3	Validação numérica.....	50
7.4	Análise sensitiva.....	54
7.4.1	Análise das superfícies de escoamento.....	55
7.4.1.1	Influência da tensão de escoamento – sem efeitos inerciais.....	56
7.4.1.2	Influência da tensão de escoamento – com efeitos inerciais.....	59
7.4.1.3	Influência da inércia.....	61
7.4.2	Análise da deformação elástica sobre o escoamento.....	63
7.4.2.1	Influência da tensão de escoamento – sem os efeitos inerciais.....	63
7.4.2.2	Influência da tensão de escoamento – com os efeitos inerciais.....	64
7.4.2.3	Influência da inércia.....	66
7.4.3	Influência da inércia na viscosidade.....	69
7.5	Análise da posição do vórtice principal.....	70
7.5.1	Influência da tensão de escoamento – sem os efeitos inerciais.....	70
7.5.2	Influência da tensão de escoamento – com os efeitos inerciais.....	72
7.5.3	Influência dos efeitos inerciais.....	73

8	CONCLUSÕES.....	75
9	PERSPECTIVAS FUTURAS.....	79
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	82
	APÊNDICE A.....	84
	ANEXO I Teorema da Divergência.....	85
	ANEXO II Teorema da Localização.....	85
	ANEXO III Teorema de Green.....	85
	ANEXO IV Hipótese de Cauchy.....	85
	ANEXO V Teorema de Stokes.....	86

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1	Diferença no comportamento de um sólido.....	14
Figura 4.2	Representação esquemática do fluxo de cisalhamento unidirecional.	15
Figura 4.3	Tensão de cisalhamento versus taxa de	16
	deformação.....	
Figura 4.4	Curva de escoamento de diversos materiais.....	19
Figura 4.5	Curva de escoamento SMD.....	23
Figura 4.6	Curvas de escoamento de materiais reais.....	24
Figura 4.7	Curva de escoamento viscoplástica.....	25
Figura 4.8	Dados representativos mostrando a tixotropia da lama vermelha.....	27
Figura 4.9	Comportamento esquemático da tensão de cisalhamento.....	27
Figura 4.10	Representação esquemática do modelo UCM.....	28
Figura 4.11	Representação esquemática do modelo Oldroyd-B.....	29
Figura 6.1	Geometria e condições de contorno.....	40
Figura 7.1	Escolha do parâmetro m	44
Figura 7.2	Teste de qualidade de malha.....	46
Figura 7.3	Perfil transversal para o módulo da tensão.....	47
Figura 7.4	Malha escolhida para a simulação.....	48
Figura 7.5	Superfícies de escoamento para as diferentes malhas.....	49
Figura 7.6	Superfícies de escoamento segundo o artigo Mitsoulis et al., 2001..	51
Figura 7.7	Superfícies de escoamento para a validação numérica.....	52
Figura 7.8	Superfícies de escoamento para U^* sem efeitos inerciais.....	55
Figura 7.9	Perfis da tensão extra com U^* variando sem efeitos inerciais.....	58
Figura 7.10	Superfícies de escoamento para U^* com efeitos inerciais.....	59
Figura 7.11	Superfícies de escoamento para a influência da inércia.....	60
Figura 7.12	Deformação elástica para a variação de U^* sem efeitos inerciais...	62
Figura 7.13	Deformação elástica para a variação de U^* com efeitos inerciais...	63
Figura 7.14	Deformação elástica para a variação dos efeitos inerciais.....	65
Figura 7.15	Influência da inércia na deformação elástica.....	67
Figura 7.16	Influência da inércia na viscosidade.....	68
Figura 7.17	Posição do vórtice principal do escoamento sem efeitos inerciais.....	70

Figura 7.18	Posição do vórtice principal do escoamento com $\rho^* = 500$	71
Figura 7.19	Influência da inércia na posição do vórtice principal.....	72

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSM-CS	Universidade Federal de Santa Maria - Campus Cachoeira do Sul
PPGEQ	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química
UFF	Universidade Federal Fluminense

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Tempo	[-]
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação	[s ⁻¹]
$\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$	Derivada convectada superior do tensor taxa de deformação	[s ⁻²]
G	Módulo de cisalhamento da microestrutura do material	[Pa]
G_0	Módulo de cisalhamento de um material completamente estruturado	[Pa]
\mathbf{g}	Vetor aceleração	[m/s ²]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω	[-]
$H^1_0(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam sobre o contorno Γ_g	[-]
HB	Número de Herschel-Bulkley	[-]
K	Elemento Finito	[-]
K	Índice de consistência	[Pa.s ⁿ]
$L^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω	[-]
$L^2_0(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula no domínio Ω	[-]
L_c	Comprimento característico	[m]
m	Grau de interpolação de elementos finitos	[-]
m_p	Parâmetro regularizador de Papanastasiou	[s]
m_k	Parâmetro do grau de interpolação utilizado	[-]
n	Índice de <i>power-law</i>	[-]
p	Pressão	[Pa]
P	Espaço funcional do campo pressão	[-]
P^h	Sub-espço de elementos finitos para o campo pressão	[-]
q^h	Função peso do campo de pressão	[-]
\mathfrak{R}	Espaço dos números reais	[-]
\mathbf{R}	Vetor do resíduo	[-]
R_k	Espaço polinomial de ordem k	[-]
R_l	Espaço polinomial de ordem l	[-]
R_m	Espaço polinomial de ordem m	[-]
Re	Número de Reynolds	[-]
Re_k	Número de Reynolds de malha	[-]
S	Superfície de uma região arbitrária no espaço	[m ²]
S^h	Função peso do campo tensão	[-]
\mathbf{T}	Tensor de tensão total	[Pa]
\mathbf{t}_h	Vetor de força de superfície	[Pa]
t_{eq}	Tempo característico de mudança da microestrutura do material	[s]
\mathbf{U}	Vetor de graus de liberdade	[-]
U^*	Tensão de escoamento	[-]
U	Variável genérica	[-]
U^h	Aproximação de elementos finitos de uma variável genérica U	[-]
\mathbf{u}	Vetor velocidade	[m/s]
\mathbf{u}^h	Aproximação de elementos finitos para o campo de velocidade	[m/s]
u_c	Velocidade característica	[m/s]
u_i	Componente da velocidade na direção i	[m/s]

V	Espaço funcional do campo velocidade	[-]
V^h	Sub-espaço de elementos finitos para o campo velocidade	[-]
V	Volume de uma região arbitrária do espaço	[m ³]
v^h	Função peso do campo velocidade	[-]
W_i	Número de Weissenberg	[-]
X	Posição de um ponto qualquer no espaço	[m]
x_i	Direção i do espaço	[m]

LETRAS GREGAS

α	Parâmetro de estabilização da equação de movimento	[-]
β	Parâmetro de estabilização da equação material	[-]
δ	Parâmetro de estabilização da equação da continuidade	[-]
δ_a	Medida relativa de assimetria	[%]
Σ	Espaço funcional do campo de tensão extra polimérica	[-]
Σ^h	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de tensão extra polimérica	[-]
λ	Parâmetro de estruturação da microestrutura do material	[-]
$\dot{\gamma}$	Magnitude do tensor taxa de deformação – taxa de cisalhamento	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de deformação máxima para a qual a estrutura do fluido está inalterada	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de deformação onde o fluido escoava como um fluido <i>power-law</i>	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_2$	Taxa de deformação onde o fluido escoava com uma viscosidade η_∞	[s ⁻¹]
$\dot{\gamma}_{0d}$	Taxa de deformação que marca a transição da tensão τ_0 para τ_{0d}	[s ⁻¹]
γ	Deformação total	[-]
γ_e	Deformação elástica	[-]
γ_v	Deformação viscosa	[-]
η	Viscosidade não-newtoniana	[Pa.s]
η_0	Viscosidade newtoniana para baixas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
η_∞	Viscosidade newtoniana para altas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
η_v	Viscosidade estrutural	[Pa.s]
μ	Viscosidade newtoniana	[Pa.s]
μ_p	Viscosidade do polímero elástico	[Pa.s]
μ_b	Viscosidade plástica de Bingham	[Pa.s]
μ_s	Viscosidade do solvente newtoniano	[Pa.s]
μ_t	Viscosidade total	[Pa.s]
ρ	Massa específica do fluido	[kg/m ³]
ρ^*	Massa específica adimensional	[-]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensão extra total	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_p$	Tensor de tensão extra polimérico	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_s$	Tensor de tensão extra do solvente	[Pa]
τ	Tensão de cisalhamento	[Pa]
τ_0	Tensão limite de escoamento	[Pa]
τ_{0d}	Tensão limite de escoamento dinâmica	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_p^h$	Aproximação de elementos finitos para o campo de tensão	[Pa]
$\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$	Derivada convectada superior do tensor extra de tensão	[Pa/s]
θ	Tempo de relaxação variável – função de $\dot{\gamma}$	[s]
θ_1	Tempo de relaxação	[s]
θ_2	Tempo de retardação	[s]
θ_{01}	Tempo de relaxação abaixo do limite de escoamento	[s]
θ_{02}	Tempo de retardação abaixo do limite de escoamento	[s]
$\theta_{\infty 1}$	Tempo de relaxação acima do limite de escoamento	[s]
$\theta_{\infty 2}$	Tempo de retardação acima do limite de escoamento	[s]
θ_0^*	Tempo de relaxação adimensional	[-]
Ω	Domínio do problema	[-]
Ω^h	Partição do domínio Ω em elementos finitos	[-]

$d\Gamma$	Elemento infinitesimal de superfície	$[m^2]$
Γ	Fronteira do domínio Ω	$[-]$
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de Dirichlet	$[-]$
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de Neumann	$[-]$

SUBSCRITOS

α	Número do ponto nodal local
g	Condição de contorno de Dirichlet
h	Condição de contorno de Neuman

SOBRESCRITOS

*	Denota variáveis adimensionais
h	Denota aproximação de elementos finitos
T	Transposta de uma matriz

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇	Operador gradiente espacial
$\ \cdot \ $	Norma das funções L^2

1 INTRODUÇÃO

Podemos classificar os fluidos em duas formas diferentes: ou de acordo com a sua resposta à pressão aplicada exteriormente ou de acordo com os efeitos produzidos sob a ação de uma tensão de cisalhamento. Nesse trabalho, o enfoque será sobre a resposta a uma tensão de cisalhamento.

Os fluidos elasto-viscoplásticos são materiais estruturados que exibem um comportamento complexo não-Newtoniano que está relacionado ao seu estado de estrutura, o que, por sua vez, depende do nível de tensão aplicado a ele. Abaixo de um certo limite de tensão, chamado de tensão de escoamento, o material é altamente estruturado, com altos níveis de elasticidade e viscosidade. Esta região pode ser chamada de região aparentemente não escoada. Quando submetido a níveis de tensão acima do valor de escoamento, o material sofre uma ruptura que a leva a um comportamento semelhante ao fluido onde a viscosidade decai em ordem de magnitude e a sua elasticidade tende a desaparecer e essas regiões são chamadas de regiões aparentemente escoadas. Experimentos recentes apresentam alguns dados que mostram alguns efeitos elásticos em escoamentos de líquidos viscoplásticos [de Souza Mendes, et al. 2007, Sikorski, et al. 2009]. Esta classe de material está presente em vários setores industriais importantes, como petróleo, produtos alimentícios e cosméticos. Portanto, a modelagem do seu complexo comportamento mecânico não linear é de extrema relevância industrial para a previsão e compreensão dos diferentes processos a que estão sujeitos.

Neste trabalho são obtidos os resultados numéricos de escoamentos inerciais de fluidos elasto-viscoplásticos dentro de uma cavidade dirigida na sua parte superior e é apresentada uma discussão sobre a inércia, as contribuições elásticas e viscosas para o padrão do escoamento. Em um trabalho anterior, Martins e Furtado G.M, et al. 2013 analisaram o desempenho de um fluido elasto-viscoplástico no problema da cavidade dirigida na sua parte superior.

A equação constitutiva utilizada neste trabalho é uma modificação da equação Oldroyd-B, em que considera a elasticidade abaixo da tensão de escoamento e um comportamento pseudoplástico acima da tensão de escoamento. Esta equação foi usada anteriormente em Nassar, et al. 2011 para analisar os escoamentos axissimétricos de uma expansão-contração abrupta de fluidos elasto-viscoplásticos, com bons resultados qualitativos.

No entanto, o modelo empregado não considera a estrutura do fluido e não foi testado em escoamentos simples. Mais recentemente, uma nova e mais confiável equação constitutiva do tipo Oldroyd-B foi proposta [de Souza Mendes, et al. 2011]. Uma característica importante desta equação é que também é capaz de prever o comportamento tixotrópico dos fluidos, uma característica que pode estar presente em muitos materiais viscoplásticos. Este modelo é mais representativo que o usado em Martins e Furtado G.M, et al. 2013 e Nassar, et al. 2011, uma vez que envolve a determinação de um parâmetro de estrutura para descrever a microestrutura do fluido. Este parâmetro é avaliado com o auxílio de uma equação adicional (hiperbólica) que deve ser resolvida juntamente com as equações de conservação e com a equação constitutiva.

Estudos de escoamentos com fluido viscoplástico foram realizados na literatura usando três abordagens diferentes dependendo do comportamento mecânico do fluido, isto é, se a elasticidade e a tixotropia desempenham um papel ou não. O mais simples é quando nem a elasticidade e nem a tixotropia estão presentes. Neste caso, o fluido é modelado como puramente viscoso, usando a equação constitutiva do Fluido Newtoniano Generalizado. A função viscosidade é dada por equações específicas como as de Bingham ou Herschel-Bulkley, ou suas versões regularizadas (por exemplo, [Papanastasiou, et al. 1987], [Bercovier e Engelman, et al. 1980] ou [de Souza Mendes e Dutra, et al. 2004]). Esses modelos foram utilizados para analisar escoamentos sem inércia em diferentes geometrias, com foco no comportamento do padrão resultante do escoamento, o coeficiente de arrasto em sólidos ou a queda de pressão através de canais (por exemplo, [Alexandrou, et al. 2001], [Alexandrou, et al e Duc, et al. 2001], [Besses, et al. 2003], [Burgos e Alexandrou, et al. 1999], [Burgos, et al. 1999], [Mitsoulis, et al. 2006], [Naccache e Barbosa, et al. 2007], [Mitsoulis, et al. 1993], [Hammad, et al. 2001], [Liu, et al. 2002], [Zisis e Mitsoulis, et al. 2002] e [Roquet e Saramito, et al. 2003]).

A segunda abordagem leva em consideração a tixotropia. Os fluidos tixotrópicos podem ser definidos como os que apresentam “diminuição contínua da viscosidade com o tempo quando o escoamento é aplicado a uma amostra que foi colocada previamente em repouso e a sua subsequente recuperação da viscosidade no momento em que o escoamento é interrompido” [Mewis e Wagner, et al. 2009].

Esse comportamento pode ser entendido com base em uma microestrutura que depende do histórico de cisalhamento no escoamento que pode ser quebrado quando submetido a certa quantidade de tensão – o que significa que um fluido tixotrópico tem sempre um comportamento viscoplástico. Na literatura existem diferentes tipos de modelos para descrever esse comportamento complexo, mas não há muitos dados e validação disponíveis. Comentários de tixotropia foram realizados por Barnes, et al. 1997, Mewis, et al., 1979, Mewis e Wagner, et al., 2009, e mais tarde por de Souza Mendes e Thompson, et al. 2012. Independentemente de toda a teoria e discussão, todos os autores concordam que a caracterização e modelagem de fluidos tixotrópicos em escoamentos complexos ainda é um desafio.

A terceira abordagem leva em consideração o fato de que os fluidos viscoelásticos apresentam elasticidades nas regiões aparentemente não escoadas. O comportamento elástico dos fluidos viscoplásticos nessas regiões é observado experimentalmente em vários trabalhos. A elasticidade em soluções de Carbopol é observada nos experimentos realizados por Sikorski, et al., 2009 para analisar o aumento de bolhas de ar através do fluido. Esse comportamento também é observado [de Souza Mendes, et al., 2007] no escoamento através de expansão axissimétrica seguida por contração. Um padrão de escoamento não simétrico foi observado na cavidade, provavelmente devido à elasticidade. Poucos trabalhos estão disponíveis na literatura que tratam a modelagem do comportamento do fluido elasto-viscoplástico. Saramito, et al., 2007 apresentou um novo modelo tridimensional para a elasto-viscoplasticidade com base nos modelos de fluidos de Bingham e Oldroyd-B, obtendo resultados relevantes no estudo de escoamentos simples. Sofou, et al., 2008 obteve experimentalmente a reologia da massa de pão e empregaram duas equações para modelar o fluido: a equação viscoelástica de Herschel-Bunkley, a tensão de cisalhamento e o comportamento pseudoplástico da massa da farinha e o modelo K-BKZ com tensão de cisalhamento para representar a relaxação da tensão e a natureza viscoelástica do material. Nassar, et al., 2011 empregou modelos elasto-viscoplásticos para simular um escoamento axissimétrico de uma expansão-contração, comparando os resultados com os dados experimentais da literatura. As regiões aparentemente escoadas são simétricas para o caso puramente viscoso. No entanto, quando a elasticidade é incorporada, as regiões aparentemente escoadas tornam-se não simétricas – uma tendência que tem concordância qualitativa com os

resultados encontrados na literatura. Martins R. R. e Furtado G. M., et al., 2013 usaram a mesma equação no problema da cavidade dirigida na parte superior, com bons resultados qualitativos, pois se aproximaram dos encontrados por Nassar, et al., 2011.

Neste trabalho, obteve-se soluções numéricas das equações de conservação e governamental usando uma formulação de três campos de Galerkin mínimos quadrados (GLS) [Behr, et al., 1993], que leva em consideração os campos de velocidade, pressão e tensão-extra como variáveis primais. Esta formulação pode ser vista como uma extensão – para o caso elasto-viscoplástico sujeito a *shear-thinning* dos tempos de relaxação e retardamento, e da função viscoplástica SMD [Souza Mendes, et al., 2007] – da formulação proposta em [Behr, et al., 1993], para fluidos de viscosidade constante. Com a adição de termos malha-dependentes as equações governantes, essa formulação consegue capturar os efeitos elásticos e viscosos presentes no modelo.

O objetivo geral do trabalho é investigar os resultados numéricos de escoamentos de fluidos elasto-viscoplásticos com o acréscimo do efeito inercial na equação do princípio da quantidade de movimento, a fim de analisar os efeitos desse acréscimo na topologia do padrão do escoamento, juntamente com a sua elasticidade (prevendo elasticidade nas regiões aparentemente não escoadas) e viscosidade em uma cavidade dirigida na parte superior.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O fluido não-Newtoniano se caracteriza principalmente por a tensão não ser proporcional à taxa de deformação, isto é, a sua viscosidade não é constante; este conceito é básico, porém o escoamento de fluidos não-Newtonianos é um assunto muito abrangente e ainda está sendo discutido na literatura.

Bercorvier et al., 1980, propuseram uma equação regularizada para o modelo de Bingham, para contornar o problema da modelagem numérica da viscosidade infinita para taxas de deformação nulas, no qual eles mostraram que as regiões escoadas aumentam à medida que o parâmetro de regularização cresce. Então, a localização das superfícies de escoamento é uma função do valor escolhido para o parâmetro de regularização.

Papanastasiou et al., 1987, contribuíram para o chamado modelo regularizado de viscoplasticidade, propondo uma função analítica e contínua para a tensão cisalhante em termos da taxa de deformação, a qual é válida para todo o domínio do fluido.

Barnes et al., 1999, realizaram uma revisão sobre materiais com tensão de escoamento, na qual afirmam que a propriedade tensão de escoamento não existe. Os autores apresentaram curvas de materiais viscoplásticos, mostrando a existência de escoamento abaixo da tensão de escoamento, o que contradiz a definição do termo. Portanto, considera-se que a tensão de escoamento é o nível de tensão para o qual ocorre mudança severa na microestrutura do material e, conseqüentemente, mudança na sua viscosidade.

De Souza Mendes et al., 2004, propôs uma nova função viscosidade para alta pseudoplasticidade, que é uma função contínua e apresenta um platô de viscosidade para baixas taxas de cisalhamento, seguida por queda acentuada da viscosidade em um valor limite de cisalhamento (tensão de escoamento), e uma região *power-law* posterior. Esta equação foi ajustada de acordo com os dados de uma solução aquosa de Carbopol em duas concentrações diferentes, um fluido de perfuração, uma emulsão de água/óleo, uma maionese comercial e uma formulação de revestimento de papel.

De Souza Mendes et al., 2007, propôs uma alternativa para a escolha das grandezas características para ser empregada na adimensionalização das equações governantes nos problemas de escoamento de fluidos não-Newtonianos. O procedimento usual de adimensionalização gera os conhecidos grupos adimensionais, tais como, número de Reynolds, número de Deborah ou Weissenberg, número de Carreau, número de Bingham e o

número de capilaridade. Os grupos que apresentam propriedades reológicas adimensionais envolvem quantidades de escoamento, como a velocidade característica e a taxa de deformação. Nesse procedimento alternativo, os grupos reológicos adimensionais resultantes são propriedades reológicas sem dimensão e, assim, permanecem fixos para um determinado material que se escoar. Além disso, observou-se que cada conjunto de valores dessas propriedades reológicas adimensionais define uma classe de materiais reologicamente equivalentes. O procedimento de adimensionalização proposto é fisicamente mais sólido e torna mais simples tanto na aplicação dos resultados adimensionais como as situações de engenharia e as comparações entre resultados numéricos e experimentais em investigação científica. Os experimentos de visualização foram feitos com soluções aquosas de Carbopol em diferentes concentrações e a observação das zonas aparentemente não escoadas e escoantes foi realizada para diferentes combinações dos parâmetros governantes.

De Souza Mendes et al., 2009, propuseram um modelo viscoelástico de Maxwell, no qual é constituído de duas equações diferenciais, uma para a tensão e outra para o parâmetro de estrutura do material.

Nassar et al., 2011, propuseram uma equação constitutiva para o modelo elasto-viscoplástico com base no modelo Oldroyd-B com o objetivo de substituir o valor da viscosidade, do tempo de relaxação e retardação para expressões que são funções da taxa de deformação. Como resultado, analisaram as superfícies de escoamento em uma expansão-contracção.

De Souza Mendes et al., 2011, apresentaram algumas modificações com relação ao trabalho de 2009, como o surgimento de um tempo de retardo na equação da tensão, dando origem a uma equação diferencial, em particular, sendo o modelo Oldroyd-B modificado, em que os tempos de retardo e de relaxação, bem como a viscosidade viscoplástica são modificadas de modo a acompanhar a dependência das mudanças da microestrutura do material.

De Souza Mendes e Thompson. R.L, 2012, revisaram a modelagem tixotrópica, com ênfase particular em modelos onde a tensão de escoamento do material possui elasticidade. Avaliaram as vantagens e desvantagens algébrica em comparação com as equações diferenciais de tensão. O fenômeno tixotrópico é descrito como um sistema dinâmico, cujo local de equilíbrio é a curva de escoamento, onde enfatizaram a importância do uso dessa curva como entrada do modelo. Diferentes formas para a equação de evolução para o

parâmetro de estrutura foram analisadas, com o cuidado de garantir uma descrição verdadeira do fenômeno tixotrópico.

Dos Santos et al., 2013, analisaram um escoamento incompressível elasto-viscoplástico em uma expansão-contração planar. A deformação elástica é máxima ao longo das superfícies escoadas. Já o efeito da viscoplasticidade foi analisado alterando a velocidade adimensional de entrada, U^* ; com velocidades de entrada muito baixas, as regiões aparentemente não escoadas tomam a maior parte do domínio. Entretanto, com o aumento da velocidade, essas regiões reduzem de tamanho, como esperado. O efeito da inércia foi examinado alterando a massa específica adimensional, ρ^* , no qual mostrou-se que a inércia não altera significativamente o tamanho das regiões aparentemente não escoadas, mas desloca a posição das superfícies escoadas da cavidade no sentido oposto ao deslocamento causado pela deformação elástica.

Hermany L e Dos Santos et al., 2013, analisaram o efeito da inércia no escoamento de fluido viscoplástico através de uma expansão seguida de uma contração. A topologia das superfícies de escoamento é fortemente afetada pela intensidade do escoamento e pela inércia e a simetria é perdida para altos valores de inércia.

Martins R.R, Furtado G.M e Dos Santos et, al., 2013, analisaram um escoamento elasto-viscoplástico incompressível em uma cavidade cuja velocidade é dirigida na tampa. Utilizaram o modelo do Nassar et al., 2011 com o objetivo de analisar os efeitos elásticos e viscosos na topologia das regiões escoadas. Para isso, utilizaram o método de elementos finitos com a aproximação de Glaerkin Mínimos Quadrados (GLS). Os resultados mostraram que as superfícies escoadas são fortemente influenciadas pela interação entre os efeitos elásticos e viscosos de acordo com a visualização experimental do escoamento elasto-viscoplástico.

Furtado G.M e Frey S., 2019, analisaram os efeitos elásticos e viscosos em uma cavidade com um escoamento elasto-viscoplástico tixotrópico sem a presença dos efeitos inerciais e obtiveram bons resultados quando comparados com a literatura, pois observou-se que tanto os efeitos elásticos quanto os viscosos são altamente influenciados pelo aumento da intensidade do escoamento (variação da velocidade), visto que mais regiões dentro da geometria vão passar do valor limite da tensão de cisalhamento para se deformar porque quanto maior a velocidade, maior o valor da tensão de cisalhamento.

De acordo com o trabalho publicado por Martins R.R, Furtado G.M e Dos Santos et, al., 2013, as equações do tempo de relaxação e de retardo do material, que foram proposta por Nassar et al., 2011, não são fisicamente reais, pois elas foram um ajuste de curvas para dosar a elasticidade nas zonas aparentemente não escoadas. Por outro lado, nesta tese, tanto a equação do tempo de relaxação e do retardo do material são expressamente funções da reologia do material, logo elas são fisicamente reais.

3 MODELAGEM MECÂNICA

Para o estudo completo de qualquer comportamento material é necessária a solução das equações que representam as leis físicas, pois qualquer escoamento tem que satisfazer essas leis.

O modelo mecânico para o modelo em análise é constituído pela lei da conservação de massa, pelo princípio da quantidade de movimento juntamente com a equação constitutiva de fluidos elasto-viscoplástico tixotrópico proposta recentemente [de Souza Mendes, et al. 2011].

Neste trabalho, foram empregadas as tradicionais equações da conservação de massa e o princípio da quantidade de movimento, onde as grandezas e operadores diferenciais destas equações são descritos espacialmente, ou seja, são funções que, para um dado instante de tempo, ocupam a posição espacial de uma partícula fluida ao longo de sua trajetória. Por simplicidade e clareza, entretanto sem perda de generalidade, esta descrição é omitida ao longo deste Capítulo.

3.1 Conservação de Massa

Este princípio postula que “a vazão mássica líquida que entra em um volume fluido é igual a taxa de variação com o tempo da massa no seu interior”. Assim, este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

Para chegarmos, a partir da Equação.(3.1), na forma Euleriana da Equação da Continuidade é necessário estar de posse do Teorema do Transporte de Reynolds e do Teorema da Divergência. Logo, temos que o Teorema de Reynolds afirma que: *Seja ϕ um campo espacial suficientemente regular e assumindo que ϕ seja a valor escalar ou vetorial. Então, para um dado volume $\Omega = \Omega(t)$ e em um dado instante de tempo t , tem-se:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{em } \Omega \quad (3.2)$$

Para provarmos o Teorema do Transporte de Reynolds, consideramos seu domínio de referência, Ω_r , o qual é independente do tempo ($\Omega(0) \equiv \Omega_r$), pois desta forma podemos aplicar operações de diferenciação e integração. Desta forma, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(x, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi(x, t) \mathbf{u}(x, t) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.3)$$

A prova se dá para ϕ escalar e é estendida para ϕ vetorial,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_r} \phi \det \mathbf{F} d\Omega_r = \int_{\Omega_r} \frac{d}{dt} (\phi \det \mathbf{F}) d\Omega_r = \int_{\Omega_r} [\dot{\phi} \det \mathbf{F} + \phi \overline{\det \mathbf{F}}] d\Omega_r \quad (3.4)$$

mas, como $\overline{\det \mathbf{F}} = \text{tr} \nabla \mathbf{u} \cdot \det \mathbf{F}$, assim:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega_r} [\dot{\phi} \det \mathbf{F} + \phi \text{tr} \nabla \mathbf{u} \det \mathbf{F}] d\Omega_r \quad (3.5)$$

Agora, colocando $\det \mathbf{F}$ em evidência e sabendo que $\text{tr} \nabla \mathbf{u} = \text{div} \mathbf{u}$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} [\dot{\phi} + \phi \text{div} \mathbf{u}] \det \mathbf{F} d\Omega_r = \int_{\Omega} [\dot{\phi} + \phi \text{div} \mathbf{u}] d\Omega \quad (3.6)$$

Para a forma vetorial assumimos na Equação 3.6 a identidade, [maiores detalhes em Girtin, 1981]:

$$\dot{\phi} + \phi \text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\phi \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

Desta forma substituindo a (Equação 3.7) na (Equação 3.6) e aplicando o teorema de Stokes Equação A10.11, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(x, t) d\Omega &= \int_{\Omega} [\dot{\phi} + \phi \text{div} \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\bar{\phi} \mathbf{v}) d\Omega \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(x, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\phi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fazendo $\phi = \rho$ na Equação 3.3 e o Teorema da Divergência (Anexo), [Truesdell e Toupin, 1960; Billington e Tate, 1981],

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) = \int_{\Omega} (\dot{\rho}(x, t) + \rho(x, t) \text{div} \mathbf{u}(x, t)) d\Omega \quad (3.9)$$

Como ϕ é uma propriedade do fluido que estabelece o balanço de massa em todos os pontos do material contínuo, temos que o Teorema da Localização (Anexo) aplicado à Equação 3.9 fornece,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \quad (3.10)$$

onde, o primeiro termo desta equação descreve a taxa de aumento de massa por unidade de volume e o segundo termo descreve a taxa líquida de adição de massa por unidade de volume por convecção.

O vetor $\rho \mathbf{u}$ é o fluxo de massa e a sua divergência tem um significado simples: é a taxa líquida de efluxo de massa por unidade de volume.

Uma forma muito importante da equação da continuidade Equação 3.10) é quando a densidade for constante, ou seja, para fluidos incompressíveis e quando o escoamento for permanente a Equação 3.10 torna-se:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.11)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor velocidade e esta equação representa a conservação de massa.

3.2 Princípio da Quantidade de Movimento

Este princípio nos diz que, *a taxa líquida de quantidade de movimento que atravessa o sistema mais a soma das forças de corpo agindo no sistema mais a soma das forças de superfícies é igual a taxa de aumento da quantidade de movimento no sistema*, ou seja, a taxa de variação da quantidade de movimento em um volume de fluido V é igual a força total nele aplicada. Assim, este princípio pode ser expresso matematicamente fazendo $\phi = \rho \mathbf{u}$ no transporte de Reynolds (Equação 3.3) e como $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega$ é a massa vezes a aceleração, o balanço de momentum vai ser igual a esse termo igualado com o somatório de forças agindo no sistema, a qual poder ser expressa pela tensão multiplicada pela normal, $\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma$ e aplicando o teorema de Green (Anexo), teorema da divergência

(Anexo), hipótese de Cauchy (Anexo) e aplicando para um fluido incompressível e o escoamento em regime permanente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \frac{d\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde ρ é a massa específica, Γ representa a superfície do volume Ω , \mathbf{F} representa o campo de forças totais externas e mútuas e $\mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$ representa o tensor de Cauchy, o qual afirma que: *Seja $(t(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$ um sistema de forças de um corpo em movimento. Então, a condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ - chamado tensor de Cauchy, tal que:*

I – para todo vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$;

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \tag{3.13}$$

II – o tensor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ é simétrico; $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$,

o tensor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ satisfaz a Equação 3.13, a qual é conhecida como a primeira lei de Cauchy ou equação de movimento linear. Para obtenção da primeira Lei de Cauchy, foram aplicados o Teorema da Localização (Anexo) para um fluido incompressível na equação 3.12.

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{3.14}$$

em que esta equação descreve o movimento dos fluidos, bem como o movimento de qualquer meio contínuo. Escrevendo a Equação 3.14 de uma maneira mais comum,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (3.15)$$

Esta equação constitui a forma *Euleriana* da equação da quantidade de movimento, onde o lado esquerdo dessa equação representa as forças de inércia por unidade de volume agindo sobre o fluido, já o lado direito representa as forças de contato e de corpo por unidade de volume agindo sobre o fluido. Por outro lado, utilizando a forma *Euleriana* e a substituindo na equação do movimento, obtemos a forma *Lagrangeana* da equação da conservação da quantidade de movimento, dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g} \quad (3.16)$$

O tensor \mathbf{T} é o tensor tensão, onde estão armazenadas todas as tensões de superfície por porção infinitesimal do fluido. Assumindo-se fluidos incompressíveis, o tensor \mathbf{T} é definido como:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.17)$$

onde p é o campo de pressão, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor extra de tensão. Sendo assim, substituindo-se essa definição na equação da quantidade de movimento, a Equação 3.17 apresenta a seguinte forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \text{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \quad (3.18)$$

ou, uma melhor representação dessa equação,

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \text{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \quad (3.19)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, \mathbf{u} é o vetor velocidade e \mathbf{g} é o vetor da força gravitacional. Nessa equação, o termo da esquerda representa o fenômeno da advecção, por causa da aceleração da partícula, isto é, é o termo das forças de inércia; por outro lado, os termos a direita representam as forças de corpo e de contato agindo na partícula.

4. CLASSIFICAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE UM FLUIDO

Primeiramente, sobre a definição de um fluido. Fluidos tendem a escoar quando interagirmos com eles. Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importa quão pequena ela seja. Os fluidos compreendem as fases líquida e gasosa das formas físicas nas quais a matéria existe. A distinção entre um fluido e um sólido é: um sólido deforma-se quando uma tensão de cisalhamento lhe é aplicada, porém sua deformação não aumenta continuamente com o tempo; um fluido é uma substância incapaz de suportar tensão de cisalhamento quando em repouso e a sua deformação aumenta com o tempo, como mostrado na Figura 4.1(b).

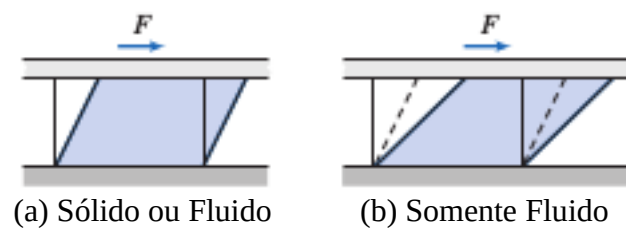


Figura 4.1 – Diferença no comportamento de um sólido e um fluido devido à uma força de cisalhamento [Fox and McDonald's e P. J. Pritchard, 8º edição, et al., 2010].

Para sabermos as características mecânicas do comportamento de um dado material, precisamos estudar as chamadas equações constitutivas, pois os parâmetros dessas equações dependem diretamente do material analisado. As equações constitutivas são descritas pela variação do tensor tensão. Logo cada material terá o seu comportamento caracterizado diretamente pela equação do tensor tensão.

A partir de diversas observações feitas por reologistas, notou-se que a lei da viscosidade de Newton não descrevia com exatidão escoamentos de vários fluidos. Com isso, introduziu-se uma alteração nesta lei de Newton permitindo que a viscosidade variasse com a taxa de deformação, surgindo assim a ideia de fluido Newtoniano generalizado.

4.1 Definição de um Fluido Newtoniano

Considere uma camada fina de um fluido entre dois planos paralelos a uma distância “ dy ”, como mostrado na Figura 4.1. Agora, considerando estado estacionário, o fluido é

submetido a um cisalhamento pela aplicação de uma força F como mostrado, isto será equilibrado por uma força de atrito interna igual e oposta ao fluido.

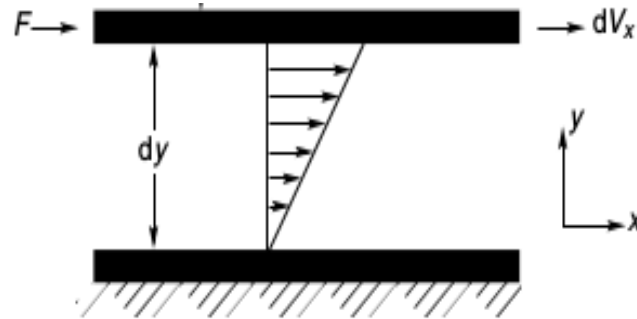


Figura 4.2 – Representação esquemática do fluxo de cisalhamento unidirecional [R.P. Chhabra e J. F. Richardson, et al., 1999].

Para um fluido Newtoniano incompressível em escoamento laminar, a tensão de cisalhamento resultante é igual ao produto da taxa de deformação pela viscosidade do fluido. Neste caso simples, a taxa de deformação pode ser expressa pelo gradiente de velocidade na direção perpendicular à da força de cisalhamento, isto é,

$$\frac{F}{A} = \tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \dot{\gamma}_{xy} \quad (4.1)$$

Considerando o equilíbrio de uma camada de fluido, pode-se ver facilmente em qualquer plano de cisalhamento que existem duas tensões de cisalhamento iguais e opostas – uma positiva no fluido em movimento lento e outra negativa na camada fluida em movimento mais acelerado. Pode-se ver também a situação de um ponto de vista diferente como: para um fluido incompressível de densidade ρ , a Equação 4.1 pode ser escrita como:

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dy} (\rho u) \quad (4.2)$$

A quantidade ρu é o momento na direção x por unidade de volume do fluido.

A constante de proporcionalidade, μ (ou a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação) que é chamada de viscosidade Newtoniana é, por definição, independente da taxa de deformação ($\dot{\gamma}_{xy}$) ou tensão de cisalhamento (τ_{xy}) e depende apenas do seu material e da sua temperatura e pressão. O gráfico da tensão de cisalhamento versus a taxa de deformação para um fluido Newtoniano, a chamada “curva de escoamento” ou “reograma” é portanto, uma linha reta com inclinação, μ , passando através da origem; a simples constante, μ , portanto caracteriza completamente o escoamento de um fluido Newtoniano a uma dada temperatura e pressão. Gases, líquidos orgânicos simples, soluções de sais inorgânicos de baixo peso molecular, metais fundidos e sais são todos fluidos Newtonianos. A Figura 4.3 mostra o comportamento de um fluido Newtoniano de um óleo de cozinha e um xarope de milho.

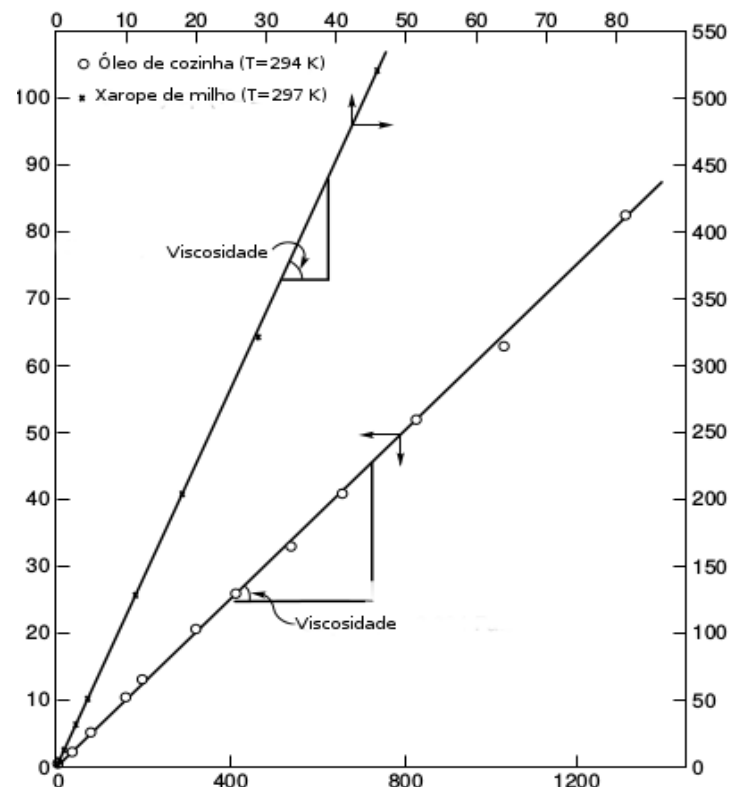


Figura 4.3 – Tensão de cisalhamento versus taxa de deformação [R.P. Chhabra e J. F. Richardson, et al., 1999].

A definição completa de um fluido Newtoniano é que ele não apenas possui viscosidade constante, mas também satisfaz a seguinte condição, $\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$, ou simplesmente satisfaz as equações completas de Navier-Stokes.

4.2 Fluido Newtoniano Generalizado

A modificação proposta da lei de Newton substitui a viscosidade constante por uma viscosidade que varia de acordo com o gradiente de velocidades, ou seja, para a tensão cisalhante temos a seguinte expressão:

$$\tau_{12} = \eta \frac{du_1}{dx_2} \quad (4.3)$$

onde η é função do gradiente de velocidade $\frac{du_1}{dx_2}$.

Sendo assim, para qualquer campo de velocidade, tem-se o modelo do Fluido Newtoniano Generalizado,

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ é o tensor taxa de deformação, dado por:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (4.5)$$

A viscosidade aparente η é uma grandeza escalar e depende do tensor taxa de deformação.

4.3 Comportamento não-Newtoniano

Um fluido não-Newtoniano é aquele cuja curva de escoamento (tensão de cisalhamento versus taxa de deformação) é não linear ou não passa através da origem, ou seja, onde a viscosidade aparente, a tensão de cisalhamento dividida pela taxa de deformação, não é constante a uma dada temperatura e pressão, mas depende das condições do escoamento, tais como, da geometria do escoamento, da taxa de deformação, etc. Às vezes, dependem até mesmo da história da cinemática do elemento de fluido em consideração. Tais materiais podem ser convenientemente agrupados em três classes gerais:

(1) fluidos cuja a taxa de cisalhamento em qualquer ponto é determinada apenas com o valor da tensão de cisalhamento naquele ponto, naquele instante; esses fluidos são conhecidos como “independente do tempo”, “puramente viscoso”, “inelástico” ou “fluidos newtonianos generalizados”;

(2) fluidos mais complexos para os quais a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação dependem, além do que foi dito em (1) da duração do cisalhamento e da sua história cinemática; esses fluidos são chamados de “fluidos dependentes do tempo”;

(3) substâncias exibindo características de fluidos ideais e de sólidos elásticos e mostrando recuperação elástica parcial após a deformação, essa categoria de fluidos são conhecidas como “fluidos viscoelásticos”.

Contudo, é conveniente definir uma viscosidade para estes materiais, como sendo a razão entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, que pode ser uma função da taxa de deformação e/ou do tempo.

O fluido não-Newtoniano tem a característica de não possuir a viscosidade constante, ou seja, a tensão cisalhante não é proporcional à taxa de deformação, como segue:

$$\tau_{12} = \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{du_1}{dx_2} \right) \quad (4.6)$$

onde a viscosidade aparente η é uma função da taxa de deformação $\dot{\gamma} = \frac{du}{dx}$.

A curva tensão x taxa de deformação pode ter vários formatos, na qual irão caracterizar o comportamento do material, como visto na figura a seguir:

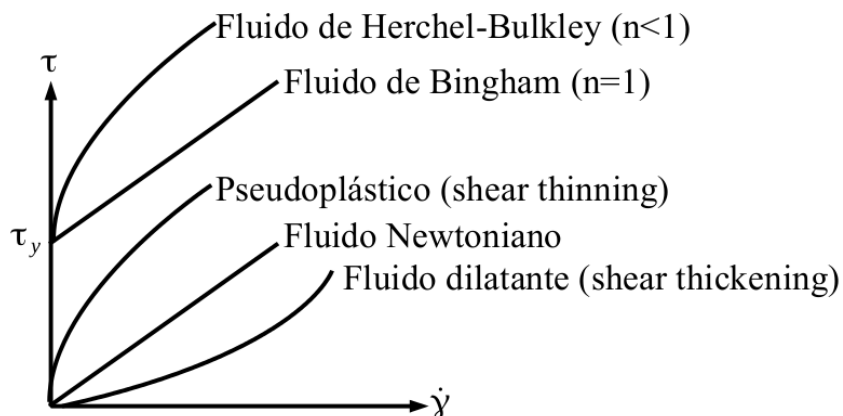


Figura 4.4 – Curva de escoamento de diversos materiais

Com base nesse gráfico, podemos ver que no fluido Newtoniano, a viscosidade é constante e a tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação, logo o que diferencia o Newtoniano do dilatante e do pseudoplástico é o valor do índice de *power-law*, n .

4.4 Fluidos Independentes do Tempo – Fluidos Simples

Em cisalhamento simples, o comportamento do escoamento desta classe de materiais pode ser descrito por uma relação constitutiva da forma,

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (4.7)$$

Esta equação implica que o valor da taxa de deformação ($\dot{\gamma}$) em qualquer ponto dentro do cisalhamento do fluido é determinado apenas pelo valor atual da tensão de cisalhamento naquele ponto.

4.4.1 Modelo Power-law

O modelo *power-law* é o mais comum dentre o fluido Newtoniano Generalizado, onde a sua equação é:

$$\tau = m(\dot{\gamma})^n \quad (4.8)$$

onde m é o índice de consistência e n é o índice de *power-law*, nos quais são obtidos empiricamente. Quando $n=1$ e $m=\mu$, este modelo se reduz ao modelo Newtoniano para um fluido incompressível. Por outro lado, quando $n<1$ o fluido é dito pseudoplástico ou também é chamado de *shear-thinning* e se $n>1$ o fluido é dito dilatante ou também é chamado de *shear-thickening*.

O modelo *power-law* possui algumas limitações: para valores baixos de $\dot{\gamma}$, $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, a microestrutura do fluido é preservada e a viscosidade $\eta \rightarrow \infty$ e para altos valores de $\dot{\gamma}$, $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, a viscosidade $\eta \rightarrow 0$. E já no dilatante a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação.

4.4.2 Comportamento Viscoplastico

O que caracteriza este comportamento é que o nível de tensão do material necessita exceder um limite de escoamento (*yield-stress* = τ_y) para que haja deformação. Por outro lado, o material se deformará elasticamente, como um corpo rígido, quando a tensão aplicada for inferior a τ_y , o que implica que a curva de escoamento nunca passará pela origem.

Fisicamente, o comportamento viscoplastico pode ser explicado da seguinte maneira: inicialmente o material em repouso é composto por uma microestrutura tridimensional suficientemente rígida de modo a registar à tensão inferiores a τ_y . Para níveis de tensão superiores a τ_y , a sua microestrutura começa a se colapsar e o material acaba escoando como um fluido puramente viscoso.

Um material com curva de escoamento linear, Figura 4.4, é chamado de fluido de *Bingham* e tem viscosidade constante. Por sua vez, um material que apresente uma curva de escoamento não-linear, Figura 4.4, é denominado fluido de *Herschel-Bulkley*.

4.4.2.1 Fluido de Bingham

É dito um modelo de dois parâmetros, visto que depende de τ_y e μ . A equação da sua tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = \tau_y + \mu \dot{\gamma} \quad \text{se} \quad \tau \geq \tau_y \quad (4.9)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se} \quad \tau < 0 \quad (4.10)$$

onde μ é a viscosidade viscoplastica e τ_y é a tensão limite do material.

4.4.2.2 Fluido de Herschel-Bulkley

É dito um modelo a três parâmetros, visto que depende de τ_y , K e n . A equação da sua tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = \tau_y + K \dot{\gamma}^n \quad \text{se} \quad \tau \geq \tau_y \quad (4.11)$$

$$\dot{\gamma}=0 \quad \text{se} \quad \tau < 0 \quad (4.12)$$

onde K é o índice de consistência.

Porém, o modelo *Herschel-Bulkley* é um modelo clássico de viscoplasticidade, visto assumir a existência de um nível de tensão τ_y a partir do qual o material passa abruptamente de movimento de corpo rígido, $\dot{\gamma}=0$, para escoamento de fluido *power-law*.

4.4.3 Regularização de Papanastasiou

Os modelos clássicos de viscoplasticidade cedem vez aos chamados modelos regularizados de viscoplasticidade, com a importante contribuição de [Bercovier, 1982] e [Papanastasiou, 1987]. O primeiro dá origem ao chamado modelo da bi-viscosidade e o segundo dá origem a uma função analítica e contínua para a tensão de cisalhamento em termos da taxa de deformação, a qual é válida para todo o domínio do fluido. Apesar de o modelo da bi-viscosidade apresentar resultados muito bons no ajuste de dados experimentais, ele carrega a inconveniência da determinação das superfícies de escoamento (*yield surfaces*). Entretanto, Papanastasiou propôs uma regularização de grande simplicidade computacional para a determinação dessas superfícies, para isso Papanastasiou propôs uma modificação da Equação 4.8, introduzindo um parâmetro regularizador m , que controla o crescimento exponencial da tensão quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, seguindo a equação,

$$\tau = \tau_y [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] + K \dot{\gamma}^n \quad (4.13)$$

onde o parâmetro m tem dimensão de tempo. Como dito anteriormente, este modelo regularizado é de simples implementação, porém este modelo não terá bons resultados onde

$\tau = \tau_y$, ou seja, o modelo não consegue visualizar superfícies de escoamento bem definidas, pois há escoamento nas regiões aparentemente não escoadas. Partindo da Equação 4.13, pode-se obter uma equação para a viscosidade regularizada:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (4.14)$$

Outra observação para este modelo, é que apresentará um comportamento inadequado quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, pois devido à regularização o modelo de Papanastasiou tenderá ao modelo *power-law*, sendo assim terá os mesmos problemas das assíntotas, isto é, quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$ e quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$.

4.4.4 Modelo Viscoplastico SMD

Devido às dificuldades encontradas nos modelos clássicos de viscoplasticidade citados acima, [Souza Mendes e Dutra E.S.S 2004] propuseram através de observações experimentais, uma nova função finita de viscosidade. Esta nova função tem como vantagem o fato de ser contínua, assim como a sua derivada. Possui comportamento qualitativamente igual às demais funções viscosidade viscoplasticas, ou seja, apresenta um platô de viscosidade alta nas regiões de baixas taxas de cisalhamento, em seguida apresenta queda abrupta da viscosidade em valores da tensão cisalhante próximos da tensão limite de escoamento ($\tau = \tau_y$) e logo após, para altas taxas de cisalhamento, prescreve uma região *power-law*. A forma SMD para a tensão cisalhante é dada por:

$$\tau = [1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_y)] (\tau_y + K \dot{\gamma}^n) \quad (4.15)$$

onde η_0 é a viscosidade para baixas taxas de cisalhamento. A representação gráfica desta função, está representada na Figura 4.5,

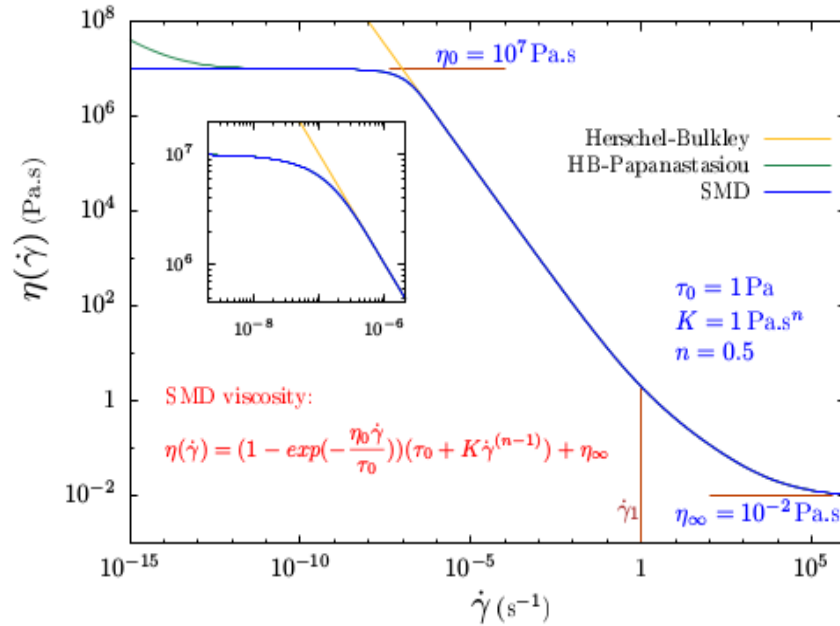


Figura 4.5 – Curva de escoamento SMD

A viscosidade η_0 é a razão entre a tensão e a taxa de cisalhamento na região onde esta tensão seja menor que τ_y , para assegurar que a taxa de cisalhamento esteja dentro da região de platô delimitada pela taxa de cisalhamento limite de escoamento $\dot{\gamma}_0$. O índice n é a inclinação da reta na região *power-law* no gráfico $\log \tau \times \log \dot{\gamma}$.

A taxa de cisalhamento limite de escoamento é definida como:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_y}{\eta_0} \quad (4.16)$$

e a taxa de cisalhamento no início da região *power-law* é dada por:

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_y}{K}\right)^{1/n} \quad (4.17)$$

A Figura 4.6 mostra algumas curvas de escoamento de materiais viscoplásticos reais descritos pelo modelo SMD – observa-se o mesmo comportamento qualitativo para todos os casos.

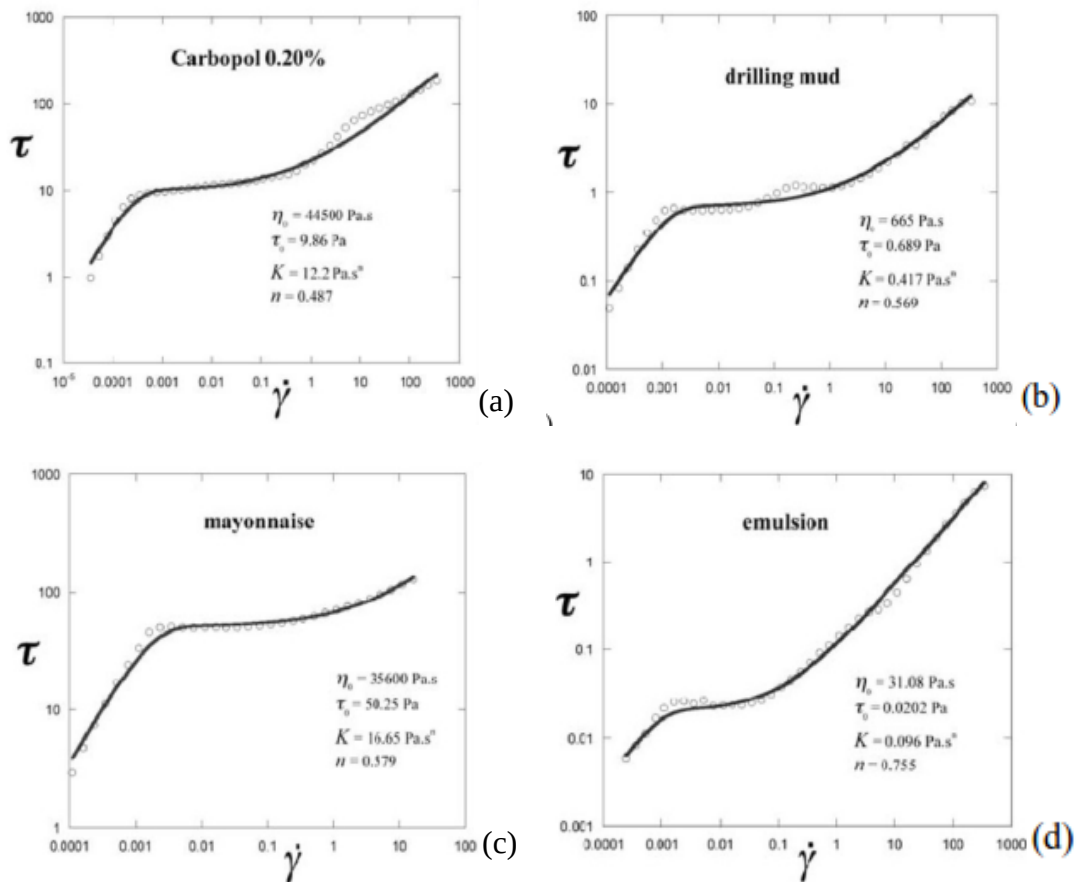


Figura 4.6 – Curvas de escoamento de materiais reais: (a) solução de água e Carbopol a 0.20%; (b) lama de perfuração; (c) maionese comercial; (d) emulsão de água e óleo. [de Souza Mendes, 2004].

[Souza Mendes et al., 2007] introduziram uma propriedade reológica adimensional baseada na observação do comportamento da função viscosidade SMD, no qual é o número de salto (J). Esse número fornece uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento que ocorre quando $\tau = \tau_y$, definido por:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_y^{(n-1)/n}}{K^{1/n}} - 1 = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}_1}{\tau_y} - 1 \quad (4.18)$$

Para $n=1$, o parâmetro J torna-se independente de τ_y , assim este parâmetro se reduz a $J = \frac{\eta_0}{K} - 1$.

4.4.5 Tensão de escoamento - “yield stress”

É um conceito muito importante dentro dos fluidos não-Newtonianos e ainda causa alguma confusão sobre o seu conceito.

É visualmente impossível estabelecer se o material viscoplástico tem ou não um limite de escoamento. Entretanto, no ponto de vista reométrico, este conceito ainda vale, visto que materiais viscoplásticos se aproximam do chamado comportamento viscoplástico clássico. Ainda reometricamente, o que aconteceu foi o avanço tecnológico dos reômetros, os quais passaram a ser capazes de captar escoamento a baixíssimas taxas de deformação.

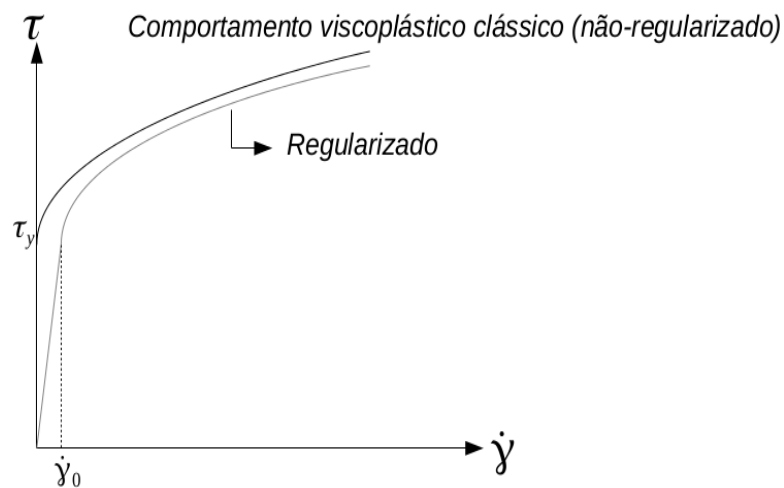


Figura 4.7 – Curva de escoamento viscoplástica

4.5 Fluidos Dependentes do Tempo

O comportamento do escoamento de muitos materiais industrialmente importantes não pode ser descrito por uma simples equação reológica como a Equação 4.6. Na prática, viscosidades aparentes podem depender não apenas da taxa de cisalhamento, mas também do tempo durante o qual o fluido foi submetido a cisalhamento. Por exemplo, materiais como óleos, resíduos da indústria de alumínio, bentonita (argila) e certos gêneros alimentícios são cortados a uma taxa constante seguindo um longo período de repouso, suas viscosidades aparentes gradualmente diminuem à medida que a estrutura “interna” do material é progressivamente quebrada. À medida que o número de “ligações” estruturais capazes de serem quebradas diminui, a taxa de variação da viscosidade aparente com o tempo cai

progressivamente para zero. Por outro lado, como a estrutura de quebra, a taxa na qual as ligações podem reformular aumenta, de modo que, eventualmente, um estado de equilíbrio dinâmico é alcançado quando as taxas de acumulação e de desmembramento são equilibradas.

4.4.1 *Tixotropia*

Diz-se que um material exhibe tixotropia se, quando é cisalhado a uma taxa constante, sua viscosidade aparente (ou correspondente à tensão de cisalhamento) diminui com o tempo, como pode ser visto na Figura 4.8 para lama vermelha [Nguyen e Uhlherr et al., 1983]. Se a curva do escoamento for medida em um único experimento no qual a taxa de deformação é aumentada constantemente a uma taxa constante de zero a algum valor máximo e então diminuída na mesma taxa até zero novamente, um laço de histerese mostrada na Figura 4.9 é obtido; a altura, a forma e a área fechada do ciclo do laço de histerese dependem da duração do cisalhamento, da taxa de aumento/diminuição da taxa de deformação e do história da cinemática da amostra. Nenhum laço de histerese é observado para fluidos independentes do tempo, isto é, a área fechada do laço é igual a zero.

O termo “falso corpo” foi introduzido para descrever o comportamento tixotrópico de materiais tixotrópicos. Embora a tixotropia esteja associada ao acúmulo de estrutura em repouso e colapso da estrutura sob cisalhamento, os materiais viscoplásticos não perdem completamente suas propriedades semelhantes a sólidos e ainda podem exibir tensão de escoamento, embora isso seja geralmente menor que o valor original da amostra virgem que é recuperada (se houver) somente após um longo período de recuperação.

4.4.2 *Fluidos Reopéticos*

Já este tipo de fluido apresenta um comportamento inverso ao dos tixotrópicos. Desta forma, a viscosidade destes fluidos aumenta com o tempo de aplicação da tensão, retornando à viscosidade inicial quando esta força cessa. Exemplo: argila bentonita.

A reopexia é o fenômeno do aumento da viscosidade aparente com o tempo de cisalhamento, à uma taxa de cisalhamento constante.

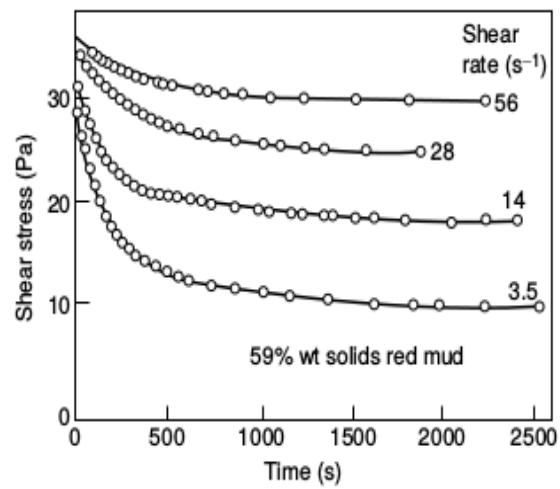


Figura 4.8 – Dados representativos mostrando a tixotropia da lama vermelha [R.P. Chhabra e J. F. Richardson, et al., 1999].

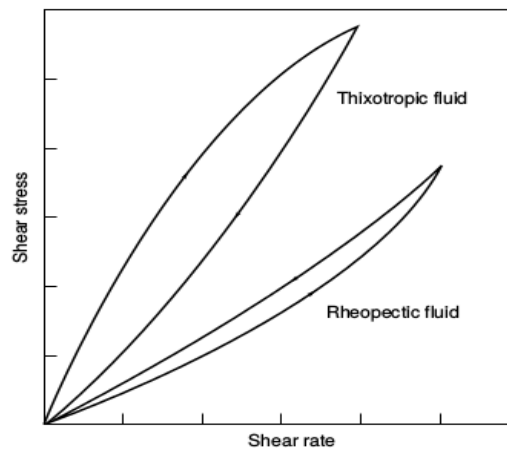


Figura 4.9 – Comportamento esquemático da tensão de cisalhamento pela taxa de deformação para o comportamento do fluido dependente de tempo [R.P. Chhabra e J. F. Richardson, et al., 1999].

4.6 Comportamento Viscoelástico – Fluidos Complexos

Para expressar esse comportamento, vamos introduzir dois modelos, o modelo de Maxwell Convectado Superior (UCM) e o modelo Oldroyd-B. O modelo UCM é o modelo mais simples para modelar o comportamento viscoelástico, visto que ele apresenta facilidade na implementação de algoritmos numéricos. A sua equação é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (4.19)$$

onde θ_1 é o tempo de relaxação do fluido e o seu modelo é descrito como uma mola em série com um amortecedor, como mostra a Figura 4.10 abaixo,

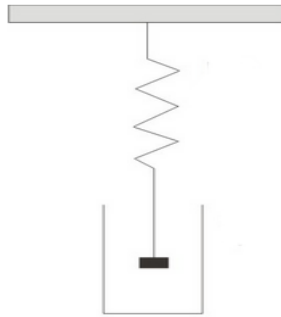


Figura 4.10 – Representação esquemática do modelo UCM

A derivada $\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$ é expressa por:

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (4.20)$$

O modelo UCM combinado em paralelo com o modelo Newtoniano, resulta no chamando modelo *Oldroyd-B*, na qual a sua equação constitutiva é expressa por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta (\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2 \overset{\vee}{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (4.21)$$

onde θ_2 é o tempo de retardo do fluido, no qual é maior ou igual a zero e menor que o tempo de relaxação e a derivada convectada superior do tensor taxa de deformação $\overset{\vee}{\mathbf{D}}$, é

dada por:

$$\overset{\vee}{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (4.22)$$

e o seu modelo é descrito como um amortecedor em paralelo com uma mola e um amortecedor em série, como mostra a Figura 4.11 abaixo,

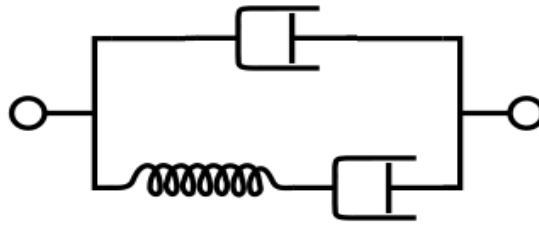


Figura 4.11 – Representação esquemática do modelo Oldroyd-B

A viscosidade η é a soma da viscosidade do solvente Newtoniano η_s com a viscosidade do polímero elástico η_e , logo:

$$\eta = \eta_s + \eta_e \quad (4.23)$$

E os tempos de relaxação e retardação são, respectivamente dados por:

$$\theta_1 = \frac{\eta_e}{G} \quad e \quad \theta_2 = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_e} \theta_1 \quad (4.24)$$

O tensor extra $\boldsymbol{\tau}$ é expresso pela soma da contribuição Newtoniana, $\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}(\mathbf{u})$ com a parcela viscoelástica $\boldsymbol{\tau}_e$, ou seja, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_e$, sendo $\boldsymbol{\tau}_e$ satisfazendo a Equação 4.19.

5. MODELAGEM DA ELASTO-VISCOPLASTICIDADE

Para modelar o comportamento elasto-viscoplástico do material, o tensor extra de tensão é descrito por uma equação do tipo Oldroyd que leva em conta não só a elasticidade, mas também a viscoplasticidade e a tixotropia. A equação constitutiva do modelo adotado nesse trabalho foi proposta por [Souza Mendes, 2011], que segue a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1(\dot{\gamma})^{\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}} = 2 \eta(\dot{\gamma})(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2(\dot{\gamma})^{\overset{\vee}{\mathbf{D}}}(\mathbf{u})) \quad (5.1)$$

onde $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \operatorname{tr}[(\mathbf{D}(\mathbf{u}))^2]}$ é a magnitude do tensor taxa de deformação, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação e $\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$ e $\overset{\vee}{\mathbf{D}}$ representam as derivadas convectadas superior, respectivamente dadas por:

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (5.2)$$

$$\overset{\vee}{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (5.3)$$

A equação diferencial para o tensor de tensão extra (Equação 5.1), segue o padrão viscoelástico do modelo Oldroyd-B, exceto pelo fato de que a viscosidade estrutural, η , o tempo de relaxação e de retardação θ_1 e θ_2 , respectivamente, dependem da estrutura. A evolução do parâmetro de estrutura, λ , é regida por uma equação cinética com a derivada do tempo material dada por

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left[(1 - \lambda) - (1 - \lambda_{eq}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right) \right] \quad (5.4)$$

onde o desequilíbrio entre o termo de construção, $\frac{1}{t_{eq}}(1 - \lambda)$, e o de quebra,

$$\frac{1}{t_{eq}}(1 - \lambda_{eq}) \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right) \right],$$

determina se o material será submetido a um processo de envelhecimento ou rejuvenescimento. O parâmetro t_{eq} é o tempo de equilíbrio, e fornece o tempo que a estrutura do material leva para retornar a sua estrutura de configuração. λ_{eq} é o

valor do estado estacionário do parâmetro de estrutura em um determinado nível de tensão. Como discutido na literatura [A. Mujumdar, A. N. Beris, A. B. Metzner, et al. 2002] este tipo de modelo pode ser classificado como fenomenológico, uma vez que o parâmetro de estrutura não é uma quantidade diretamente mensurável. O parâmetro de estrutura λ pretende representar o espectro entre um estado totalmente estruturado, alcançado quando o material é exposto a uma condição de tensão livre por um longo tempo, e um estado mínimo estruturado, alcançado quando um nível de tensão suficientemente alto é imposto ao material por um longo tempo. Neste contexto, o parâmetro de estrutura de equilíbrio é determinado por uma função do nível de tensão atual.

De acordo com os argumentos gerais delineados em [de Souza Mendes, et al. 2009 e 2012], a viscosidade e a dependência da estrutura do módulo de cisalhamento são as mesmas que adotadas em [dos Santos, et al. 2014]:

$$\eta(\lambda) = \eta_0^\lambda \eta_\infty^{1-\lambda} \quad (5.5)$$

e

$$G(\lambda) = G_0 e^{m\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)} \quad (5.6)$$

respectivamente. Nas equações acima, η_0 e η_∞ são as viscosidades estruturais nos estados máximos e mínimos, respectivamente, G_0 é o módulo de elasticidade (ou cisalhamento) quando o material está totalmente estruturado e o escalar m controla a sensibilidade do módulo de elasticidade nas mudanças do nível de estruturação, $\partial_\lambda G(\lambda)$.

A viscosidade de equilíbrio adotada descreve os fluidos nas regiões aparentemente escoadas [de Souza Mendes, et al. 2004], e é caracterizada por uma alta viscosidade finito no limite onde $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. E é dada por,

$$\eta_{eq}(\dot{\gamma}) = \left[1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_y}\right) \right] \left\{ \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right\} + \eta_\infty \quad (5.7)$$

onde τ_y é a tensão de escoamento aparente, K é o índice consistência e n é o índice de *power-law*. Esta função viscosidade é caracterizada por quatro regiões distintas que

correspondem aos diferentes estágios que o material experimenta quando ele evolui de um estado mais estruturado para um menos estruturado. A primeira região, $\dot{\gamma} \in [0, \dot{\gamma}_0]$, é a alta viscosidade (η_0) região do platô; a próxima região, $\dot{\gamma} \in [\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1]$, é caracterizada por um grande colapso da microestrutura quando a tensão de escoamento é alcançada; a terceira região, $\dot{\gamma} \in [\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2]$, corresponde para um comportamento *power-law*; e a última região, $\dot{\gamma} \in [\dot{\gamma}_2, \infty]$, é o patamar da baixa viscosidade (η_∞), ver figura abaixo.

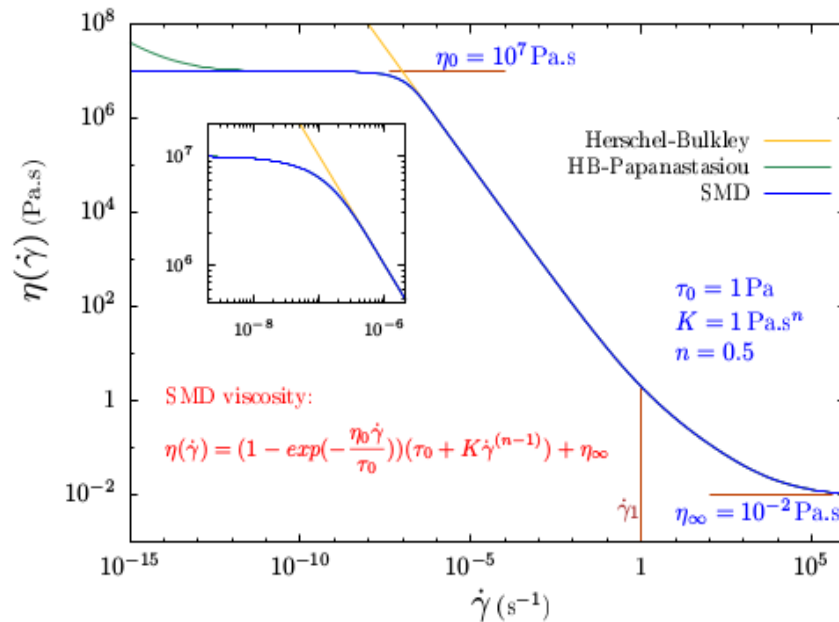


Figura 5.1 – Curva do modelo SMD

As taxas de deformação características delimitadoras são dadas por:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_y}{\eta_0}, \quad \dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_y}{K} \right)^{1/n}, \quad \dot{\gamma}_2 = \left(\frac{\eta_\infty}{K} \right)^{1/n-1} \quad (5.8)$$

Neste ponto, vale a pena mencionar que o modelo geral apresentado acima para os materiais elasto-viscoplásticos tixotrópicos tende suavemente ao caso analisado no presente trabalho onde os efeitos tixotrópicos são insignificantes, quando $t_{eq} \rightarrow 0$. Este caso limitante, analisado [dos Santos, et al. 2014], corresponde a uma resposta instantânea da microestrutura ao nível de tensão imposta e, portanto, a estrutura do material está sempre em equilíbrio. Uma vez que a curva do escoamento pode ser vista como o lugar de equilíbrio do sistema tixotrópico dinâmico, ver [de Souza Mendes, et al. 2012], a viscosidade é sempre determinada

pela dependência do estado de tensão estacionário na taxa de deformação, dada pela curva de escoamento. Consequentemente, o parâmetro de estrutura correspondente pela função inversa da Equação 5.5 e substituída na Equação 5.6 para encontrar o módulo de elasticidade a esse nível de estrutura. Alternativamente, pode-se ligar à função inversa, $\lambda(\eta)$, na Equação 5.6 e achar G como uma função da viscosidade, isto é, sem computar λ . Devido a esta correspondência um-para-um, pode-se ver que o estado da estrutura do material também poderia ser dado pelo seu nível de viscosidade.

O tempo de relaxação e de retardo usados na equação constitutiva do material(5.1), são definidos respectivamente:

$$\theta_1 = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_{eq}}\right) \frac{\eta_{eq}}{G_{eq}} \quad (5.9)$$

$$\theta_2 = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_{eq}}\right) \frac{\eta_\infty}{G_{eq}} \quad (5.10)$$

onde, G_{eq} é o módulo de elasticidade em equilíbrio e segue a mesma relação da Equação 5.6,

$$G_{eq}(\lambda_{eq}) = G_0 e^{m\left(\frac{1}{\lambda_{eq}} - 1\right)} \quad (5.11)$$

Esta função é utilizada para prever o comportamento elástico de fluidos viscoplásticos somente em regiões onde o nível de tensão é inferior à tensão de escoamento.

Como, η_∞ corresponde a região de baixa viscosidade o tempo de retardação é praticamente nulo e o tempo de relaxação se reduz a:

$$\theta_{eq} = \frac{\eta_{eq}}{G_{eq}} \quad (5.12)$$

E a relação entre o parâmetro de estrutura em equilíbrio e a viscosidade em equilíbrio é dada por,

$$\lambda_{eq}(\dot{\gamma}) = \frac{\ln \eta_{eq}(\dot{\gamma}) - \ln \eta_\infty}{\ln \eta_0 - \ln \eta_\infty} \quad (5.13)$$

A dependência das funções do material no nível de estrutura torna possível a este modelo prever uma ampla gama de respostas mecânicas, desde a puramente elástica a puramente viscosa, passando por uma resposta viscoelástica sólida e respostas viscoelástica líquida, como mostrado em [de Souza Mendes, et al. 2011], e profundamente discutido em [R. L. Thompson, et al. 2015].

6. MODELAGEM NUMÉRICA

Muitos dos problemas encontrados na engenharia não são lineares e necessitam de métodos numéricos para obtenção de solução. Uma forma de aproximação numérica é o método de elementos finitos. Os princípios básicos do método de elementos finitos para a solução de problemas de valor de contorno são o estabelecimento de uma formulação variacional do problema investigado e a solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções de interpolação de elementos finitos [Reddy e Gartling, 1994].

O método de elementos finitos consiste em uma aproximação numérica de equações diferenciais, baseado no conceito de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de aproximação selecionadas ao longo de todo o domínio do problema [ver, por exemplo, Reddy e Gartling, 1994].

A solução numérica do problema diferencial elasto-viscoplástico definido pelas Equações 5.1 e 5.13 obtida foi através da metodologia de elementos finitos, a qual aproxima numericamente a formulação variacional das equações governantes por combinações de graus de liberdade incógnitos e funções de base de suporte compacto definidas ao longo de todo o domínio do problema computacional Ω . A aproximação do método de elementos finitos usada foi a aproximação por Galerkin Mínimos Quadrados (GLS), em termos do tensor extra de tensão, do vetor velocidade e do campo de pressão. Esta formulação pode ser vista como uma extensão da introduzida em [Behr et al., 1993], para fluidos de viscosidade constante. O método GLS foi originalmente proposto em [Hughes et al., 1986] para o problema misto de Stokes e depois estendido, em [Franca et al., 1992], para as equações de Navier-Stokes incompressíveis – tem sido já empregado para aproximar diversos problemas de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. O método é capaz de produzir soluções estáveis para escoamentos advectivos e elasto-dominantes, usando interpolações Lagrangeanas de igual-ordem para aproximar tanto as funções solução, como as funções teste do problema estudado.

6.1 Formulação Forte de Elementos Finitos

A formulação forte do problema é obtida da particularização das equações da conservação de massa (Equação 3.11) e da quantidade de movimento (Equação 3.19) para um fluido Newtoniano generalizado escoando em regime laminar e permanente, juntamente com uma equação constitutiva para $\boldsymbol{\tau}$ (Equação 5.1). Assim, pode-se construir o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} + \theta_1(\dot{\gamma}) \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} &= 2 \eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2(\dot{\gamma}) \overset{\vee}{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 (-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde θ e a função viscosidade η dependem da taxa de cisalhamento do material, ρ representa a massa específica do fluido, \mathbf{u} é o vetor velocidade, p é a pressão, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, \mathbf{g} representa a aceleração da gravidade que atua no sistema \mathbf{u}_g é a condição de contorno de Dirichlet, \mathbf{I} é tensor identidade e \mathbf{t}_h é a condição de contorno de Neumann.

6.2 Formulação Fraca de Elementos Finitos (Variacional)

Para definir a forma fraca, ou variacional, é preciso primeiro caracterizar dois conjuntos de funções. A primeira é definida como soluções candidatas ou tentativa. Essas possíveis soluções precisam satisfazer as condições de contorno e estar dentro dos espaços de funções apropriado. Sobre os espaços de funções, $L_2(\Omega)$ define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre Ω , $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω [Rektorys, 1975].

O segundo conjunto de funções é chamado de funções peso ou variacionais. Esse conjunto de funções é muito semelhante as funções tentativas exceto porque requerem ser zero sobre o contorno, ou seja, estar nos seguintes espaços: $L_2^0(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de

funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g [Rektorys, 1975]. O próximo passo será de integrar a formulação forte ao modo que ocorra uma diminuição no grau da derivada, sendo preciso algumas manipulações nas equações. Após, é feito um produto interno das equações e suas respectivas funções pesos, tornando-a, assim uma equação variacional.

6.3 Galerkin Mínimos Quadrados

A formulação de Galerkin clássica apresenta oscilações nos campos de pressão e de velocidade, quando os gradientes são elevados, tornando-se instável. Para a estabilidade dos sub-espacos de velocidade e pressão adota-se a estratégia de mínimos quadrados na formulação clássica de Galerkin, mais conhecida como *Galerkin Least-Square* (GLS). Assim, este método mantém a estrutura da formulação de Galerkin e adiciona termos que garantem a estabilidade. Para maior detalhes ver, [Zinani, F. et. al., 2006].

6.4 Formulação estabilizada a três-campos

A formulação GLS utilizada baseia-se nos sub-espacos de elementos finitos usuais para problemas de escoamentos,

$$\begin{aligned}
 \sum_{ij}^h \{S_{ij}^h \in C^0(\Omega) \cap L_2, \forall i, j | S_{ij}^h|_K \in P_k(K), \forall K \in \Omega^h\} \\
 P^h = \{q^h \in C^0(\Omega) \cap L_2^0 | q^h|_K \in P_m(K), \forall K \in \Omega^h\} \\
 V_{ig}^h = \{v_{ig}^h \in H^1(\Omega), \forall i | v_{ig}^h|_K \in P_n(K), \forall K \in \Omega^h\} \\
 V_i^h = \{v_i^h \in V_i^h = 0, \forall i | v_i^h|_K \in P_n(K), \forall K \in \Omega^h\}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

com C^0 denotando para o espaco das funções contínuas, L_2 o espaco (de Hilbert) de funções de quadrado-integrável e H^1 o espaco (de Sobolev) de funções de derivada primeira integráveis, como segue:

$$\begin{aligned}
L_2(\Omega) &= \{q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\} \\
L_2^0(\Omega) &= \{q \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \\
H^1(\Omega) &= \{v_i \in L_2(\Omega), \forall \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \forall i, j\} \\
H_0^1(\Omega) &= \{v_i \in H^1(\Omega), \forall i \mid v_i = 0, \forall i \text{ em } \Gamma_g\}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

A partir das definições da Equação 6.2, podemos escrever uma formulação estabilizada três-campos, como segue:

Dado $g_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$, $u_{i_g} : \Gamma_g^{u_i} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\tau_{ij_g} : \Gamma_g^{\tau_{ij}} \rightarrow \mathfrak{R}$, $t_i : \Gamma_h^{t_i} \rightarrow \mathfrak{R}$, encontrar a tripla $(\tau_{ij}^h, p^h, u_i^h) \in \Sigma_{ij}^h \times P^h \times V_{i_g}^h$ de tal modo que:

$$B(\tau_{ij}^h, p^h, u_i^h, S_{ij}^h, q^h, v_i^h) = F(S_{ij}^h, q^h, v_i^h), \forall (S_{ij}^h, q^h, v_i^h) \in \Sigma_{ij}^h P^h \times V_i^h \tag{6.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
B(\tau_{ij}^h, p^h, u_i^h, S_{ij}^h, q^h, v_i^h) &= \int_{\Omega} \check{\tau}_{ij}^h S_{ij}^h d\Omega + \int_{\Omega} \theta(\lambda) \tau_{ij}^h S_{ij}^h d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta(\lambda) D_{ij}(u^h) S_{ij}^h d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \rho u_k^h \partial_{x_k} v_i^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h \partial_{x_k} v_k^h d\Omega + \int_{\Omega} \check{\tau}_{ij}^h D_{ij}^h(v^h) d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta_{\infty} D_{ij}(u^h) S_{ij}^h d\Omega + \int_{\Omega} \partial_{x_k} u_k^h q^h d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \partial_{x_{\alpha}} u_{\alpha}^h \delta(\text{Re}_K) \partial_{x_{\beta}} v_{\beta}^h d\Omega + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} (\rho u_k^h \partial_{x_k} u_i^h + \partial_{x_i} p^h - \partial_{x_k} \tau_{ik} - 2\eta_{\infty} \partial_{x_k} D_{ik}(u^h)) \cdot \\
&\cdot \alpha(\text{Re}_K) (\rho u_k^h \partial_{x_k} v_i^h + \partial_{x_i} q^h - \partial_{x_k} S_{ik}^h - 2\eta_{\infty} \partial_{x_k} D_{ik}(v^h)) d\Omega + \int_{\Omega} (\tau_{ij}^h + \theta(\lambda) \check{\tau}_{ij} - 2\eta_S(\lambda) D_{ij}(u^h)) \cdot \\
&\cdot \beta(W_{i_k}) (S_{ij}^h + \theta(\lambda) \check{S}_{ij}^h - 2\eta_S(\lambda) D_{ij}(v^h)) d\Omega
\end{aligned} \tag{6.5}$$

e

$$\begin{aligned}
F(\phi^h, S_{ij}^h, q^h, v_i^h) &= \int_{\Omega} \rho g_i v_i^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} t_i v_i^h d\Gamma + \\
&+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \rho g_i (\alpha(\text{Re}_K) (\rho u_k^h \partial_{x_k} v_i^h + \partial_{x_i} q^h - \partial_{x_j} S_{ij}^h - 2\eta_S(\lambda) D_{ij}(v^h))) d\Omega
\end{aligned} \tag{6.6}$$

com os parâmetros de estabilidade das equações da continuidade e de movimento definidos como em [Behr et al., 1993] e o parâmetro de estabilidade da equação viscoelástica,

$$\delta(\text{Re}_K) = \phi | \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) |_p h_k \xi(\text{Re}) \tag{6.7}$$

$$\alpha(\text{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}^h(\mathbf{x})|_p} \xi(\text{Re}) \quad (6.8)$$

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K & , 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1 & , \text{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k \rho |\mathbf{u}^h(\mathbf{x})|_p h_K}{4 \eta(\dot{\gamma})} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N u^h(\mathbf{x})_{i,p} \right)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, \dots, N} u^h(\mathbf{x})_{i,p} & , p = \infty \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\beta(W_{i_k}) = \begin{cases} \max\left(1, \frac{\theta(\lambda) \mathbf{u}^h(\mathbf{x}^h)_{i,p}}{W_{i_k}}\right) & , W_{i_k} h_K \leq 1 \\ \max\left(1, \frac{1}{2W_{i_k}}\right) & , W_{i_k} h_K > 1 \end{cases} \quad (6.12)$$

$$W_{i_k} = \theta(\dot{\gamma}) \frac{\mathbf{u}^h(\mathbf{x})_p}{h_K} \quad (6.13)$$

$$m_k = \min(1/3, 2C_k) \quad (6.14)$$

$$C_k \sum_{K \in \Omega^h} h_K^2 \int_{\Omega} \partial_{x_k} \tau_{ij}^h \partial_{x_i} \tau_{il}^h d\Omega_K \leq \int_{\Omega_k} \tau_{ij}^h \tau_{ij}^h d\Omega_K \quad (6.15)$$

a constante φ denota um número positivo arbitrário e C^h é a constante de estimativa inversa de elementos finitos.

6.5 Programas Analisados

Para o pré-condicionamento de elementos finitos foi utilizado o programa GID, para a solução numérica da formulação GLS definida pelas Equações 6.1 e 6.15 foi utilizado o código NNFEM em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) da UFRGS e para o pós-processamento gráfico foi usado o programa *Gmsh*; tanto o GID quanto o *Gmsh* são softwares livres.

6.6 Geometria e condições de contorno

A geometria considerada está ilustrada na Figura 6.1. Ela consiste de uma cavidade unitária de comprimento L , com a parede superior deslocando-se com velocidade constante

$(u_1=u_c; u_2=0)$ e suas demais paredes e os dois pontos de singularidade nas duas quinas superiores da cavidade sujeitas a condições de não-deslizamento e impermeabilidade $(u_1=u_2=0)$. Todos resultados foram obtidos utilizando interpolações bi-linear Lagrangeanas (Q1) para todas as variáveis primais.

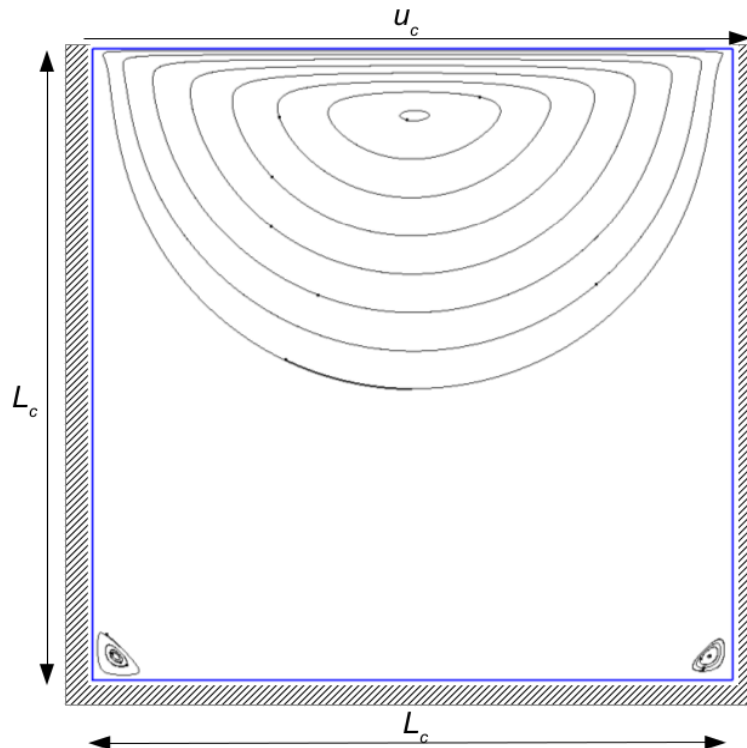


Figura 6.1 – Geometria e condições de contorno

Nesta figura, podemos ver três regiões de recirculação, uma região central associada ao escoamento principal e duas regiões secundárias nas quinas inferiores da cavidade. Estas regiões são causadas pelo efeito da velocidade na tampa da cavidade e sempre estarão presentes nessa geometria sob as condições de contorno abordadas acima.

6.7 Parâmetros adimensionais

A adimensionalização das equações governantes do escoamento é a apresentada em [Souza Mendes et al. 2007], e tem como característica principal a utilização de grandezas reológicas do material na adimensionalização das variáveis cinemáticas, dinâmicas e reológicas do problema. Para tal são introduzidas as seguintes quantidades adimensionais:

$$\mathbf{x}_i^* = \frac{x_i}{L} ; \mathbf{u}^* = \frac{u_i}{\dot{\gamma}_1 L} ; \dot{\boldsymbol{\gamma}}^* = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\dot{\gamma}_1} ; p^* = \frac{p}{\tau_y} ; \tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{\tau_y} ; \eta_{eq}^* = \frac{\eta_{eq} \dot{\gamma}_1}{\tau_y} \quad (6.16)$$

Conservação de massa: $\text{div } \mathbf{u} = 0$ e como $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 L$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* L$ - Equação 6.16 - logo:

$$\frac{\dot{\gamma}_1 L}{L} \text{div}^* \mathbf{u}^* = 0 \rightarrow \text{div}^* \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{e em notação indicial:}$$

$$\partial_{x_i^*} u_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega^* \quad (6.17)$$

Princípio da quantidade de movimento: pela equação de movimento:

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \text{div } \boldsymbol{\tau} + 2 \eta_{\infty} \text{div}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \quad \text{e como } \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 L, \mathbf{x} = \mathbf{x}^* L, p = p^* \tau_y \quad \text{- Equação}$$

$$7.1 \quad \text{e } \eta_{\infty} = \frac{\eta_{\infty}^* \tau_y}{\dot{\gamma}_1}, \text{ logo:}$$

$$\mathbf{0} = \frac{-\tau_y}{L} \nabla^* p^* + \frac{\tau_y}{L} \text{div}^* \boldsymbol{\tau}^* + 2 \frac{\tau_y}{L} \eta_{\infty}^* \text{div}^*(\mathbf{u}^*) + \rho \mathbf{g}^* \rightarrow \mathbf{0} = -\nabla^* p^* + \text{div}^* \boldsymbol{\tau}^* + 2 \eta_{\infty}^* \text{div}^*(\mathbf{u}^*) + \mathbf{g}^*$$

e em notação indicial:

$$\rho^* u_k^* \partial_{x_k^*} u_i^* = -\partial_{x_i^*} p^* + \partial_{x_j^*} \tau_{ij}^* + 2 \eta_{\infty}^* \partial_{x_j^*} D(u^*)_{ij} + g_i^* \quad \text{em } \Omega^* \quad (6.18)$$

Equação constitutiva: para o modelo adotado, $\boldsymbol{\tau} + \theta_1(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - 2 \eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \theta_2(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ e

como $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 L$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* L$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^* \tau_y$ - Equação 7.1 - e $\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \frac{\eta^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \tau_y}{\dot{\gamma}_1}$, logo:

$$\boldsymbol{\tau}^* \tau_y + \theta_1^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \frac{\dot{\gamma}_1 L \tau_y}{L} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* - 2 \left(\frac{\tau_y \dot{\gamma}_1 L}{\dot{\gamma}_1 L} \right) 2 \eta^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \theta_2^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \overset{\nabla}{\mathbf{D}}^*(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\tau}^* + \theta_1^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* = 2 \eta^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \theta_2^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \overset{\nabla}{\mathbf{D}}^*(\mathbf{u}^*)$$

e em notação indicial:

$$\tau_{ij}^* + \theta_1^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^*) \overset{\nabla}{\tau}_{ij}^* = 2 \eta_{eq}^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^*) D^*(u^*)_{ij} \theta_2^*(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^*) \overset{\nabla}{D}^*(u^*)_{ij} \quad \text{em } \Omega^* \quad (6.19)$$

onde o tensor taxa de deformação adimensional é dado por:

$$D^*(u^*)_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_{x_j^*} u_i^* + \partial_{x_i^*} u_j^*) \quad (6.20)$$

e a derivada convectada superior adimensional do tensor extra é expressa por:

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij}^* \equiv u_k^* \partial_{x_k^*} \tau_{ij}^* - \tau_{ik}^* \partial_{x_j^*} u_k^* - \partial_{x_i^*} u_k^* \tau_{kj}^* \quad (6.21)$$

e a viscosidade viscoplástica adimensional e o tempo de relaxação adimensional são, respectivamente,

$$\eta_{eq}^*(\dot{\gamma}^*) = [1 - \exp(-\eta_0^* \dot{\gamma}^*)] \left(\frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*(n-1)} \right) + \eta_\infty^* \quad (6.22)$$

$$\theta^*(\dot{\gamma}^*) = \dot{\gamma}_1 \theta \quad (6.23)$$

A partir da adimensionalização do problema são identificados os seguintes parâmetros governantes do escoamento:

$$\eta_0^* \equiv \frac{\eta_0}{\tau_y / \dot{\gamma}_1} ; \quad \eta_\infty^* \equiv \frac{\eta_\infty}{\tau_y / \dot{\gamma}_1} ; \quad U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 L} ; \quad g_i^* \equiv \frac{\rho L}{\tau_y} g_i ; \quad \rho^* = \frac{\rho}{\tau_y / (\dot{\gamma}_1 L)^2} \quad (6.24)$$

Observa-se que ρ^* tem a forma de um número de Reynolds reológico, $Re_r = \frac{\rho(\dot{\gamma}_1 L)^2}{\tau_y}$, exceto que a velocidade característica é $\dot{\gamma}_1 L$, na qual envolve propriedades reológicas e apenas um parâmetro geométrico. Logo, ρ^* neste trabalho, como $\tau_y = \dot{\gamma}_1 = L = 1$, desempenha o mesmo papel da densidade de massa no problema dimensional correspondente. Como o número de Reynolds é definido por forças de inércia sobre forças viscosas, a variação dos efeitos inerciais, para efeitos reológicos, é dada pela variação de ρ^* .

Para quantificar os efeitos elásticos no escoamento estudado é empregado o tempo de relaxação adimensional (Equação 6.25 supondo o material completamente estruturado

($\lambda=1$) , ou seja, levando o limite $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ na Equação 6.23 e pela definição da Equação 5.12:

$$\theta_0^* = \theta^*(\dot{\gamma}^* \rightarrow 0) = \frac{\eta_0}{G_0} \dot{\gamma}_1 \quad (6.25)$$

Na obtenção dos resultados foram fixados os seguintes parâmetros adimensionais: $\tau_y^* = \tau_{y_d}^* = 1$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $\eta_0^* = 10^3$, e $m=20$ para melhor visualização e convergência mais rápida.

A intensidade de escoamento ou número de tensão de escoamento, U^* , é derivada da condição de contorno imposta na parede superior (tampa) da cavidade. Um fato importante é que este parâmetro adimensional é inversamente proporcional ao número de *Herschel-Bulkley* – uma medida adimensional clássica da tensão de escoamento em viscoplasticidade.

$$HB = \frac{\tau_y}{K \dot{\gamma}^n} = \frac{\tau_y}{K \left(\frac{u_c}{L} \right)^n} \quad (6.26)$$

substituindo u_c/L por $\dot{\gamma}_1^* U^*$ na Equação 6.26 e considerando $\dot{\gamma}_1 = (\tau_y/K)^{1/n}$,

$$HB = \frac{\tau_y}{K (\dot{\gamma}_1 U^*)^n} = \frac{1}{U^{*n}} \rightarrow U^* = HB^{-1/n} \quad (6.27)$$

Conseqüentemente, combina a cinemática do escoamento com a reologia do material.

Fazendo essa mesma análise, o número de inércia (reológico) está relacionado ao número de Reynolds *power-law* clássico da seguinte forma,

$$\rho^* \equiv \frac{\rho}{K \dot{\gamma}^{n-2} L^{-2}} = \frac{\rho U L}{K U^{n-1} / U^{*n-1} L^{n-1}} = \text{Re}_{pl} HB^{\frac{2-n}{n}} \quad (6.28)$$

A partir destas definições, as equações que regem o problema adquirem a seguinte forma adimensional:

$$\begin{aligned}
 \partial_{x_i^*} u_i^* &= 0 && \text{em } \Omega^* \\
 \rho^* u_k^* \partial_{x_k^*} u_i^* &= -\partial_{x_i^*} p^* + \partial_{x_j^*} \tau_{ij}^* + 2\eta_\infty^* \partial_{x_j^*} D(u)_{ij}^* + g_i^* && \text{em } \Omega^* \\
 \tau_{ij}^* + \theta^*(\dot{\gamma}^*) \tau_{ij}^* &= 2\eta_{eq}(\dot{\gamma}^*) D(u)_{ij}^* \theta_2^*(\dot{\gamma}^*) D^*(u^*) && \text{em } \Omega^*
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

7. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste Capítulo são apresentadas e discutidas aproximações GLS (Equações 6.1 e 6.15) de de escoamentos de materiais elasto-viscoplásticos Eqs.(5.1)–(5.13)) no interior de uma cavidade forçada.

Os resultados objetivam estudar o efeito da inércia no padrão de escoamento de materiais viscoplásticos sujeitos à elasticidade, através da determinação da morfologia e posição de suas regiões aparentemente não escoadas, as deformações elásticas no seu interior e a posição do olho do vórtice do escoamento principal; sendo que a avaliação dos efeitos causados pela inércia é devido ao termo advectivo da equação da quantidade de movimento. Todos os resultados foram obtidos supondo que o escoamento fosse permanente e negligenciando o comportamento tixotrópico do material – ou seja, quando sua microestrutura muda instantaneamente quando há alteração do nível de tensão no qual o material é submetido, $t_{eq}^* \approx 0$.

7.1 Escolha do parâmetro m

A Figura 7.1 mostra o comportamento da deformação elástica de acordo com o parâmetro m .

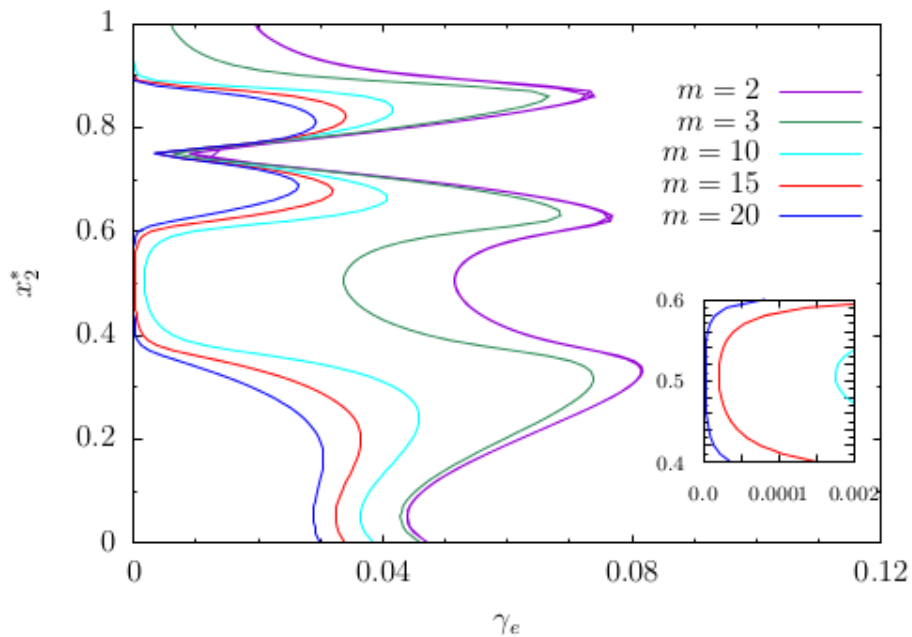


Figura 7.1 – Escolha do parâmetro m : perfil transversal de γ_e : para,(a) $m=2$, (b) $m=3$, (c) $m=10$, (d) $m=15$, (e) $m=20$.

Na Figura 7.1, observa-se o perfil transversal da deformação elástica para alguns valores do parâmetro m que controla a sensibilidade do módulo de elasticidade no nível de estruturação. Primeiro, nota-se que apenas o valor mais alto de m atende aos requisitos exigidos pelo escoamento, ou seja, para ter um comportamento elástico dentro das regiões aparentemente não escoadas e um comportamento viscoso *power-law* quando a tensão de escoamento é atingida. Por esse motivo foi escolhido o valor de $m=20$ para as simulações nessa tese.

7.2 Teste de qualidade de malha

Para assegurar que a aproximação numérica é independente da malha utilizada, a avaliou-se o perfil transversal – em $x_1^*=0,5$ – da deformação elástica para 4 malhas de elementos bilineares: a malha M1 com 900 elementos Q1 (cor roxa), a malha M2 com 2.500 elementos Q1 (cor verde), a malha M3 com 4900 elementos Q1 (cor azul) e a malha M4 com 10.000 elementos Q1 (cor amarelo), como ilustrado na Figura 7.2.

Segundo o teste realizado, no qual foram empregados os parâmetros governantes $U^*=0,1$, $\theta_0^*=100$, $n=0,5$, $m=20$, $\rho^*=500$ como caso base, foi selecionada a malha M4 (ilustrada na Figura 7.4), pois apresenta um erro menor por ser a malha mais refinada, cujo valor do erro é menor do que 2%, o que significa que os resultados são mais precisos nos pontos dos elementos dessa respectiva malha. O valor adimensional do tamanho mínimo do elemento é $h_{K_{min}}^* = h_K/L = 1.41 \times 10^{-2}$.

Mesh size	$\dot{\gamma}_e$	Deviation (%)
30 × 30	2.86×10^{-2}	3.1469
50 × 50	2.95×10^{-2}	1.0169
70 × 70	2.98×10^{-2}	0,3356
100 × 100	2.99×10^{-2}	— — —

Figura 7.2 – Desvio da deformação elástica por duas malhas consecutivas

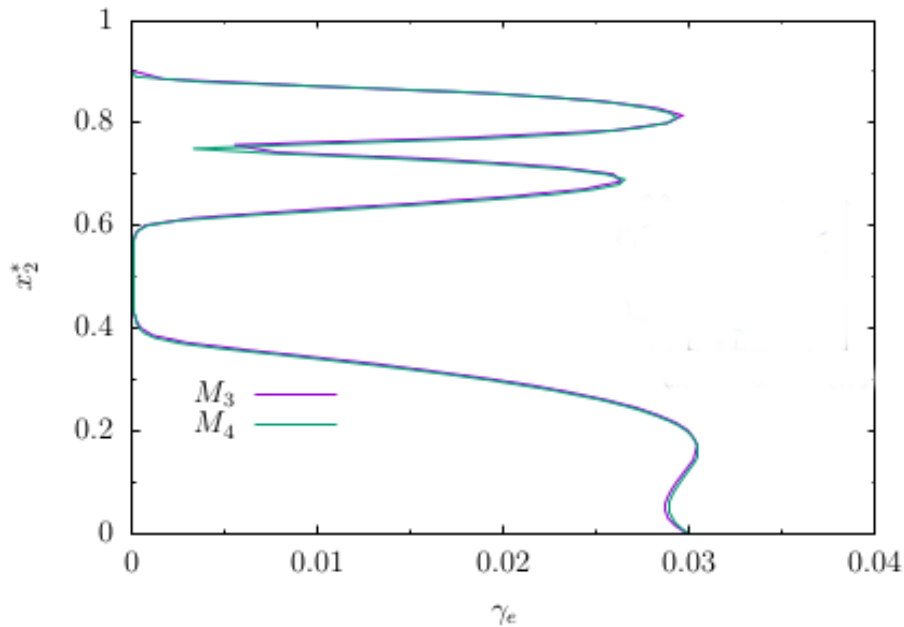


Figura 7.3 – Teste de qualidade de malha

Na Figura 7.2, percebe-se que a deformação elástica γ_e aumenta de acordo com o aumento do número de elementos da malha. Nota-se também que o desvio diminui com o aumento da malha, ou seja, quando refinamos cada vez mais a malha, os valores da deformação ficam mais próximos, portanto o erro diminui de acordo com o refinamento da malha. A Figura 7.3 mostra as malhas M3 e M4 com base na deformação elástica no eixo central da cavidade. O resultado delas em relação a elasticidade nas regiões aparentemente não escoadas são muito semelhantes, sendo assim, com base no desvio mostrado na Figura 7.2 e de um maior refinamento, a malha M4 foi escolhida (100x100 elementos).

Para o teste de qualidade de malha foi escolhido o valor $\rho^* = 500$, pois a partir desse valor os efeitos inerciais começam a ser vistos com maior visibilidade (através da análise de sensibilidade).

Outra maneira, mais simples, de calcular o erro é através do módulo de tensão. A Figura 7.4 mostra os perfis do módulo da tensão no eixo central da cavidade para cada malha (M1, M2, M3 e M4), onde o menor erro encontrado foi na malha M4, cujo valor se aproximou de 2%.

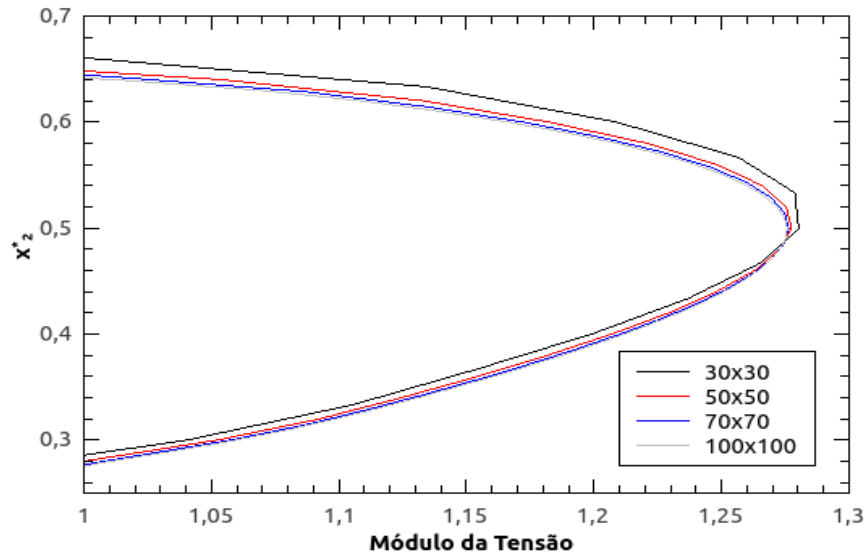


Figura 7.4 – Perfil transversal para o módulo da tensão

O erro foi calculado por:

$$erro = \frac{\tau_a^* - \tau_b^*}{\tau_a^*} \quad (7.1)$$

sendo, τ_a^* o maior valor do módulo da tensão e τ_b^* o menor valor do módulo da tensão, mostrada na Figura 7.4, (para a mesma malha em análise).

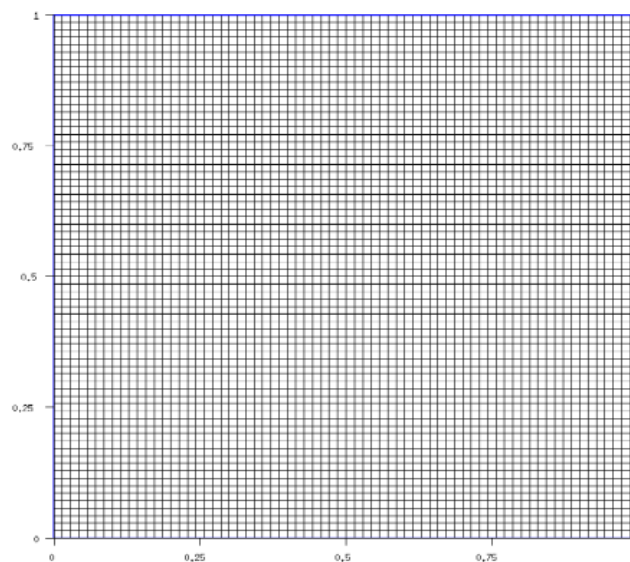


Figura 7.5 – Malha M4 (10.000 elementos)

E também, a malha M4 foi a escolhida, porque como percebe-se através da Figura 7.6 a melhor visualização do efeito da inércia sobre a topologia do escoamento está presente na malha mais refinada, pois nas malhas menos refinadas o efeito da inércia nas superfícies de escoamento não é totalmente captado, porém já na M4 é totalmente visível esse efeito sobre as superfícies de escoamento. A malha M4 é capaz de capturar superfícies de escoamento lisas e a assimetria característica das regiões aparentemente não escoadas associadas ao olho principal do vórtice (parte central da cavidade) dos escoamentos de fluidos elasto-viscoplásticos.

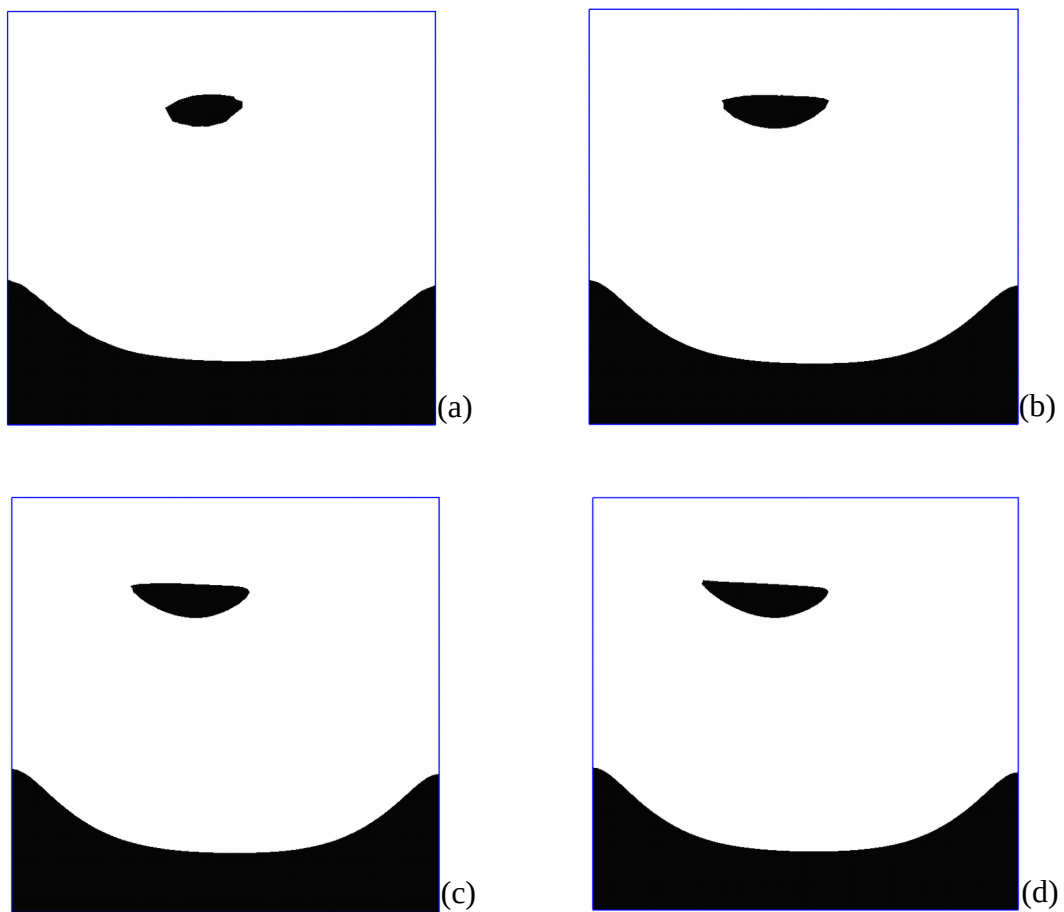


Figura 7.6 – Superfícies de escoamento: (a) M1, (b) M2, (c) M3, (d) M4

7.3 Validação numérica

Para a comparação do código numérico usado nessa tese o artigo do [Mitsoulis and Zisis et al., 2001] serviu como base para a comparação. Esse artigo trata da simulação numérica de um escoamento de Bingham (viscoplástico) em uma cavidade quadrada com velocidade dirigida na tampa (mesma geometria e condição de contorno usada nessa tese), mas a viscoplasticidade é prevista pelo método de Bingham regularizado via Papanastasiou (de acordo com a Equação 6.27, a intensidade do escoamento é proporcional ao recíproco do número de Bingham, $Bn = U^{*^{-1}}$). Para isso, os autores desse trabalho fizeram o seguinte: a equação constitutiva de Bingham foi modificada conforme Papanastasiou,

$$\tau = \tau_y [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] + \mu\dot{\gamma} \quad \text{e} \quad \eta = \mu + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(m\dot{\gamma})] \quad (\text{Equações 4.13 e 4.14})$$

– modelo regularizado de Papanastasiou com $n=1$; nas simulações, o número de Bingham adimensional Bn , foi definido como,

$$Bn = \frac{\tau_y L}{\mu U} \quad (7.2)$$

onde L é o comprimento característico da cavidade e U é a velocidade característica na tampa da cavidade. O m foi sempre fixo nas simulações com o valor de $m=1000$ e $U=1$.

Os valores do número de Bingham simulados foram: $Bn=2, 5, 20, 50$ e 200 para uma malha de 1600 elementos.

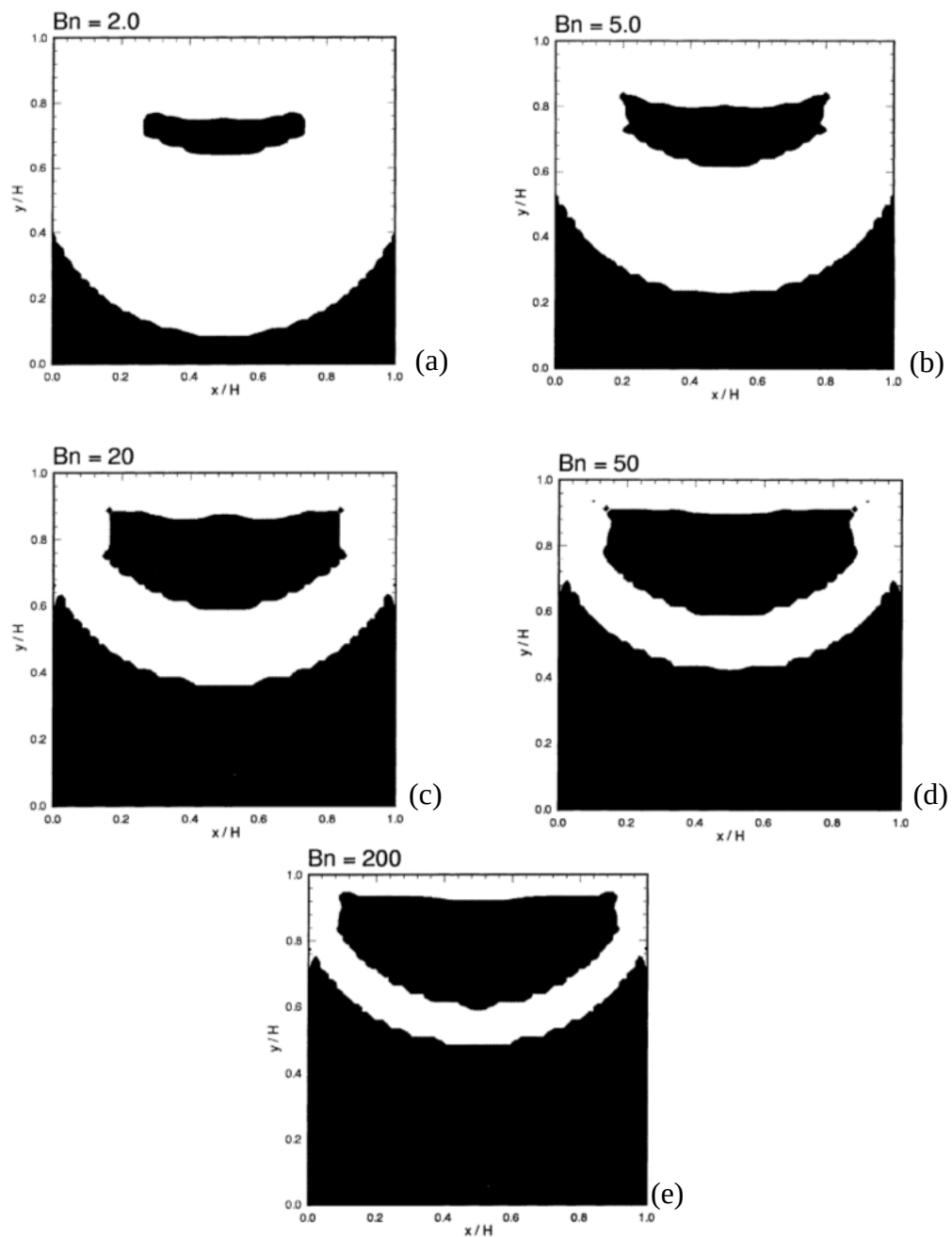


Figura 7.6 - Superfícies de escoamento: (a) $Bn=2$, (b) $Bn=5$, (c) $Bn=20$, (d) $Bn=50$, (e) $Bn=200$, conforme [Mitsoulis et al., 2001]

Devido à utilização da modificação de Papanastasiou na equação constitutiva de Bingham, o escoamento é puramente viscoso. À medida que o número de Bn aumenta a região aparentemente não escoada também aumenta e ocupa mais espaços na cavidade, mas sempre teremos uma pequena região de escoamento perto da tampa da cavidade.

Sendo assim, em comparação com o código numérico usado nessa tese foi feito o seguinte procedimento:

- o índice de consistência (K): $\mu \rightarrow K$, $K=1$ fixo,

$$m = \frac{\eta_0}{\tau_y} \quad (7.3)$$

- $n=1$ e $m=1000$, sempre fixo,

- $G_0=10^6$, sempre fixo – muito elevado para praticamente anular a elasticidade, θ_0^* praticamente nulo – escoamento viscoplástico (puramente viscoso).

Logo, de acordo com a Equação 7.2 e Equação 7.3,

- $Bn=2$: $\tau_y=2$ e $\eta_0=2000$,
- $Bn=5$: $\tau_y=5$ e $\eta_0=5000$,
- $Bn=20$: $\tau_y=20$ e $\eta_0=20000$,
- $Bn=50$: $\tau_y=50$ e $\eta_0=50000$,
- $Bn=200$: $\tau_y=200$ e $\eta_0=200000$.

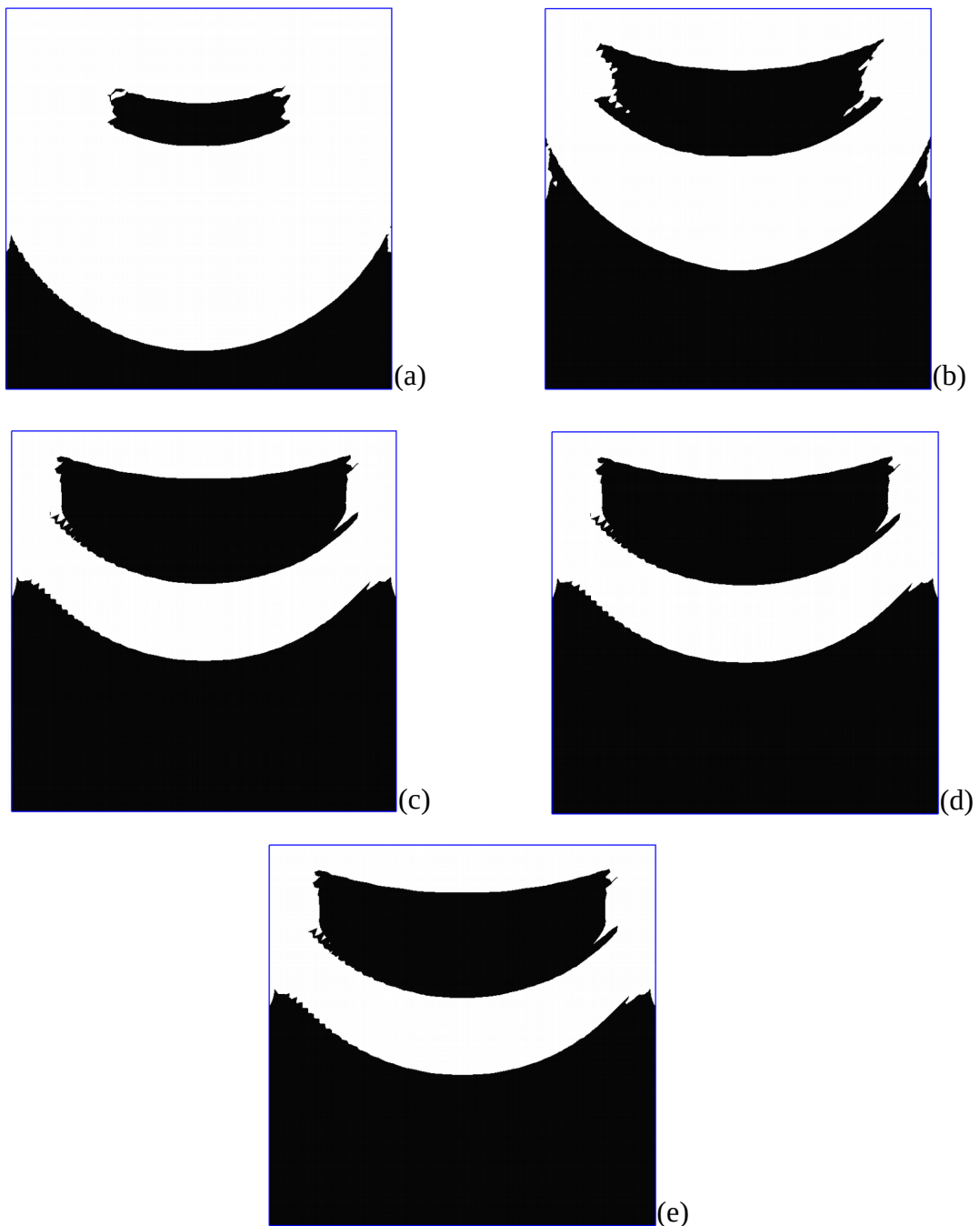


Figura 7.7 – Superfícies de escoamento: (a) $Bn=2$, (b) $Bn=5$, (c) $Bn=20$, (d) $Bn=50$,
(e) $Bn=200$

Em comparação com a Figura 7.6, nota-se na Figura 7.7 mostra o mesmo comportamento, ou seja, que com o aumento de Bn a região aparentemente não escoada também aumenta e vai ocupando mais espaços na cavidade. Tem-se uma região de escoamento perto da tampa da cavidade que vai diminuindo com o aumento de Bn . Em relação a Figura 7.7 percebe-se uma leve diferença entre a Figuras 7.7(c)-(e), pois, a região aparentemente não escoada aumenta

muito pouco na parte inferior da cavidade e se mantém a mesma na parte superior, porém o caso que mais se assemelha entre essas duas figuras é com o $Bn=50$, Figura 7.6(d) e Figura 7.7(d). Uma diferença considerável nesses resultados, é que a Figura 7.7 foi gerada com uma malha de 4900 elementos, ou seja, 3300 elementos de diferença sobre a Figura 7.6, por isso tem-se menos assimetria na Figura 7.7.

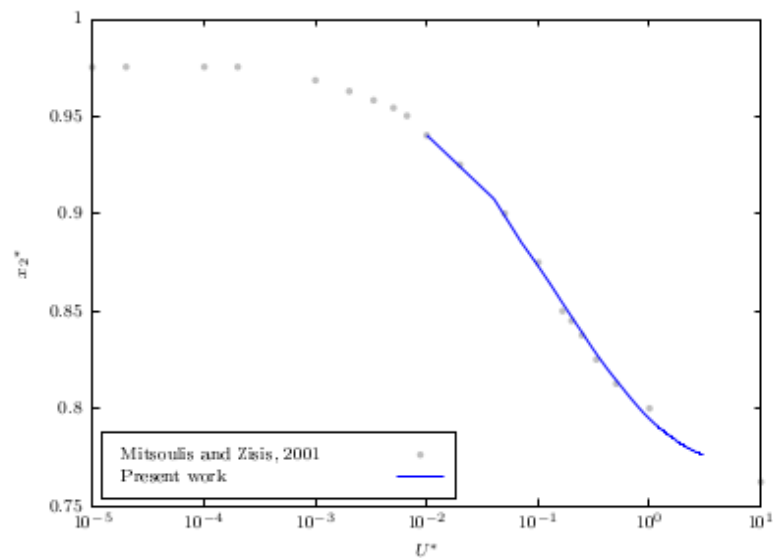


Figura 7.8 – Perfil transversal da intensidade de escoamento, para $\rho^*=0$, $n=1$,
 $\theta_0^*=10^5$, $\eta_0^*=10^6$, $\eta_\infty^*=10^{-2}$ e $m=20$.

A comparação dos resultados está de acordo, pois através da Figura 7.8, a intensidade de escoamento aumenta nas regiões aparentemente escoadas. No entanto, é preciso fazer alguns apontamentos. A viscosidade SMD (Equação 5.27) não é reduzida ao modelo HB-P (*Herschel-Bunkley-Papanastasiou*) fazendo $n=1$. O critério de corte para calcular a tensão de escoamento é diferente, isto é, nessa tese o critério é $\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0$, enquanto que Mitsoulis and Zisis et al., 2001 usaram $\tau=\tau_0$. A menor malha utilizada nessa tese foi mais que o dobro da empregada no artigo do Mitsoulis and Zisis et al., 2001. E diferentemente da equação constitutiva usada pelos autores, essa tese usa um modelo que adiciona elasticidade nas regiões aparentemente não escoadas. (Isso pode ser feito adotando um valor muito baixo para θ_0^*).

7.4 Análise sensitiva

Os resultados apresentados nesta seção pretendem avaliar a influência da inércia, dos efeitos elásticos e viscosos na topologia das superfícies de escoamento – nomeadamente, as superfícies entre as regiões aparentemente não escoadas (em preto) e as regiões escoadas (em branco). Ao contrário da definição visual [ver Zisis e Mitsoulis, et al. 2002] essas superfícies são aqui definidas o ponto local onde a taxa de deformação é igual à $\dot{\gamma}_0$ - ver dos Santos et al. 2011 para mais detalhes.

A primeira observação se concentra na geometria. O problema da cavidade é talvez um dos referenciais mais utilizados na mecânica dos fluidos computacional, já que a sua configuração simples (geometria e condições de contorno) é capaz de gerar um padrão de escoamento curvilíneo que apresenta os principais vórtices e a recirculação do escoamento secundário. No entanto, quando um material complexo é considerado, essa geometria produz escoamentos de alta complexidade. Considere, por exemplo, o escoamento de materiais complexos através de canais retos ou canais sujeitos a mudanças bruscas de diâmetro. Em ambas as situações, é possível identificar claramente as regiões nas quais o escoamento é simples ou complexo. Em suas regiões de entrada e saída, o material escoar de maneira complexa, pois o seu equilíbrio dinâmico é perturbado por uma mudança de tensão. No entanto, uma vez cessada a mudança de tensão, o material tende a restaurar o seu equilíbrio dinâmico, realizando escoamentos simples nas regiões aparentemente escoadas e nas não escoadas. Contudo, em escoamentos de materiais complexos dentro de cavidades, tal situação nunca ocorre. A natureza do escoamento é curvilínea e excêntrica devido à assimetria das condições de contorno impostas no topo e no fundo da cavidade. Além disso, o escoamento está sujeito a mudanças repentinas na trajetória próxima aos cantos da cavidade. Portanto, é impossível determinar quantitativamente as regiões na qual o material escoar em um regime simples ou complexo. Só é possível identificar as regiões dominantes simples ou complexas do escoamento.

No caso particular de materiais elasto-viscoplásticos estruturados, o padrão de escoamento curvilíneo associado às condições de contorno cinemáticas assimétricas impostas na tampa e no fundo da cavidade, faz com que seja difícil estabelecer regiões em que a estrutura do material se encontra em equilíbrio – regiões nas quais a taxa de construção é

igual a taxa de quebra/colapso, ou seja igual a 1, isto é, material não estruturado, regiões com $\lambda=0$ e material completamente estruturado, regiões com $\lambda=1$.

No que diz respeito à elasticidade, que deve ser adicionada apenas nas regiões aparentemente não escoadas, os escoamentos em cavidades de materiais elasto-viscoplásticos estruturados exigem muito do módulo de elasticidade, Equação 5.6. Para soltar o termo elástico da equação viscoelástica, uma vez atravessada a superfície de escoamento, o módulo de elasticidade estrutural deve tender ao infinito ($G(\lambda) \rightarrow \infty$) e conseqüentemente $\theta \rightarrow 0$ - uma vez que, nas regiões aparentemente escoadas, o material deve escoar como um fluido *power-law*.

A inércia, assim como a elasticidade, quebra a simetria do padrão de escoamento, com isso, as regiões aparentemente não escoadas sofrem um forte descolamento dentro da cavidade, o que será mostrado e discutido nos próximo sub-capítulos.

7.4.1 Análise das superfícies de escoamento

Ao contrário da definição clássica de superfícies de escoamento [ver por exemplo, Mitsoulis et al., 2002], neste trabalho estas superfícies são definidas como o lugar geométrico dos pontos no qual a taxa de deformação é igual a $\dot{\gamma}_0$ - para mais detalhes ver [Souza Mendes et al., 2007]. Como estas superfícies delimitam as regiões aparentemente escoadas e aparentemente não escoadas do material, para $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$ este escoar linearmente sujeito a elevados valores de viscosidade; já para $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$, o material escoar como um fluido puramente viscoso não linear.

Os resultados ora apresentados visam avaliar a influência dos efeitos elásticos e viscosos na topologia destas superfícies. As zonas pretas visualizadas nas figuras representam as regiões aparentemente não escoadas ($\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$), enquanto que as zonas brancas representam as regiões escoadas ($\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$) .

7.4.1.1 Influência da tensão de escoamento – sem efeitos inerciais

A Figura 7.9 mostra a influência da cinemática, ou também chamada de tensão de escoamento sobre as superfícies de escoamento dentro da cavidade. Os parâmetros fixos do material utilizado foram; $\theta_0^* = 100$, $n = 0,5$.

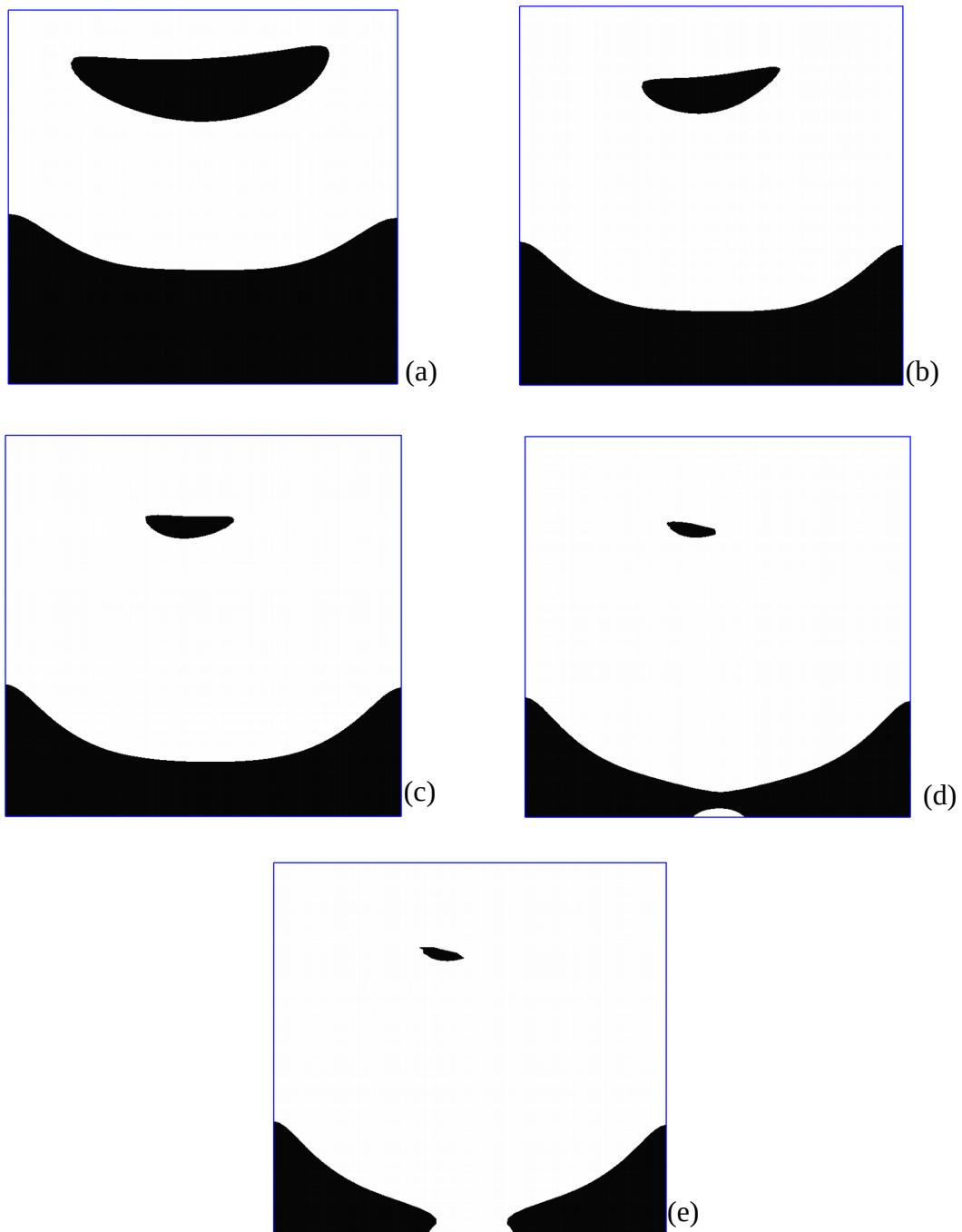


Figura 7.9 – Superfícies de escoamento: (a) $U^* = 0,01$, (b) $U^* = 0,05$, (c) $U^* = 0,1$, (d) $U^* = 0,2$, (e) $U^* = 0,25$

Como se observa, duas regiões aparentemente não escoadas surgem na cavidade, uma ligada ao fundo da cavidade e a outra associada à recirculação do vórtice principal. Como esperado, com o aumento da intensidade do escoamento, ambas regiões aparentemente não escoadas diminuem em toda a cavidade, uma vez que U^* é a relação entre a tensão *power-law* e o limite de escoamento do material. Em relação a sua parcela superior, observa-se que a região aparentemente não escoada, localizada junto ao vórtice do escoamento, sofre uma forte redução com o aumento de U^* . Isto se deve a esta região estar localizada muito próxima da parede superior da cavidade. Portanto, com o aumento da cinemática nesta parede superior, são ali gerados crescentes níveis de tensão, os quais possibilitam que mais regiões excedam o limite de escoamento. Este efeito também é observado na parcela inferior da cavidade.

Mesmo menos sensível ao aumento da cinemática no topo da cavidade, as regiões aparentemente não escoadas ali localizadas também são reduzidas com o crescimento de U^* , porém com intensidade menor. Observa-se, inclusive, para os valores mais elevados de U^* , que estas regiões passam a ser disjuntas, isto é, a recirculação do escoamento está atingindo o fundo da cavidade e forçando o material a ceder/escoar. Finalmente, no que tange à assimetria de ambas as regiões aparentemente não escoadas, deve-se ao fato destes escoamentos apresentarem um considerável nível de elasticidade.

Na Figura 7.10 são apresentados perfis verticais da magnitude da tensão extra ao longo do eixo central da cavidade ($x_1^*=0,5$), para diferentes valores de U^* – a saber, $U^*=10^{-2}-0,25$. Uma primeira observação concerne à geometria analisada. Apesar do problema da cavidade – seja ela forçada ou vazante – ser talvez o mais usual *benchmark* usado nas simulações numéricas da Mecânica dos Fluidos puramente viscosos – lineares ou não lineares – quando se trata de um material complexo escoando em seu interior, esta geometria gera, ao meu ver, um escoamento de alta complexidade. Considere, por exemplo, o escoamento de fluidos complexos através de dutos retos ou sujeitos a alterações (abruptas ou não) de bitola. Nestes escoamentos, também largamente empregados na literatura Newtoniana e não-Newtoniana, é possível identificar claramente as regiões nas quais o escoamento é simples ou complexo. Sabemos que, tanto nos *entry flows* como nos *exit flows* desses problemas, o material escoar de maneira complexa visto ser necessário restabelecer seu equilíbrio dinâmico – salvo, naturalmente, quando as condições de entrada e/ou saída assim não o façam necessário. Entretanto, após alcançado seu equilíbrio, as partículas do material escoam de maneira dita “simples” – ou estacionária, do ponto de vista Lagrangeano – tanto

nas regiões que excederam o limite de escoamento do material – as regiões escoadas – como nas regiões nas quais este limite não foi ultrapassado – as regiões aparentemente não escoadas. Pois bem, no caso analisado de escoamentos de materiais complexos no interior de cavidades, esta dualidade nunca vem ocorrer explicitamente. A natureza do escoamento é curvilínea e excêntrica – excentricidade esta devido à assimetria das condições de contorno impostas nas paredes superior e inferior da cavidade -- além de ser sujeita à mudanças bruscas de trajetória, provocadas pelas quinas inferiores e superiores da cavidade. Ao meu modo de ver, fica impossível determinar quantitativamente as regiões nas quais o fluido escoar de maneira simples ou complexa. Cabe, apenas, localizarmos regiões nas quais o fluido escoar com dominância simples ou complexa.

É com base nas reflexões acima introduzidas que os perfis transversais de tensão extra devem ser analisados. Na figura que segue, observamos, talvez como sua mais marcante característica, que a região escoada junto ao topo da cavidade é predominantemente cisalhante, com os perfis de τ^* bem ajustados por uma regressão linear. Podemos destacar também que, na parte inferior, a cavidade tende a experimentar um comportamento predominantemente elástico, com as curvas da magnitude da tensão extra bem ajustadas por funções não lineares. Finalmente, são ainda visíveis as regiões nas quais o material excede seu limite de escoamento $\tau^* > \tau_y^* = 1$, uma região localizada na parcela intermediária da cavidade e outra na região compreendida entre o vórtice do escoamento e a parede superior da cavidade. Cabe ainda observar os limites de ambas as regiões dependerem da tensão de escoamento U^* , conforme discutido quando apresentadas as isobandas de τ^* .

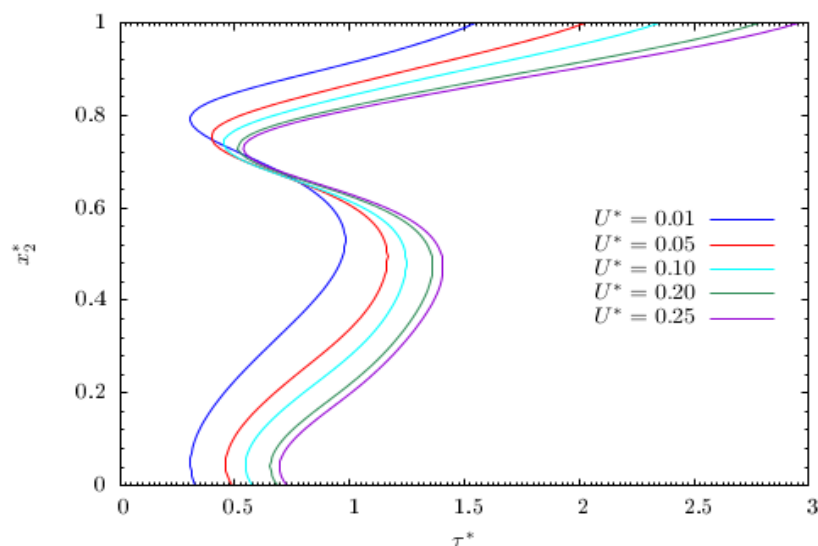


Figura 7.10 – Perfis da magnitude da tensão extra com U^* variando

7.4.1.2 Influência da tensão de escoamento – com efeitos inerciais

A Figura 7.11 também mostra a influência da tensão de escoamento sobre as superfícies de escoamento, mas agora com os efeitos inerciais presentes. Os parâmetros utilizados do material foram; $\theta_0^* = 100$, $n = 0,5$, $\rho^* = 500$.

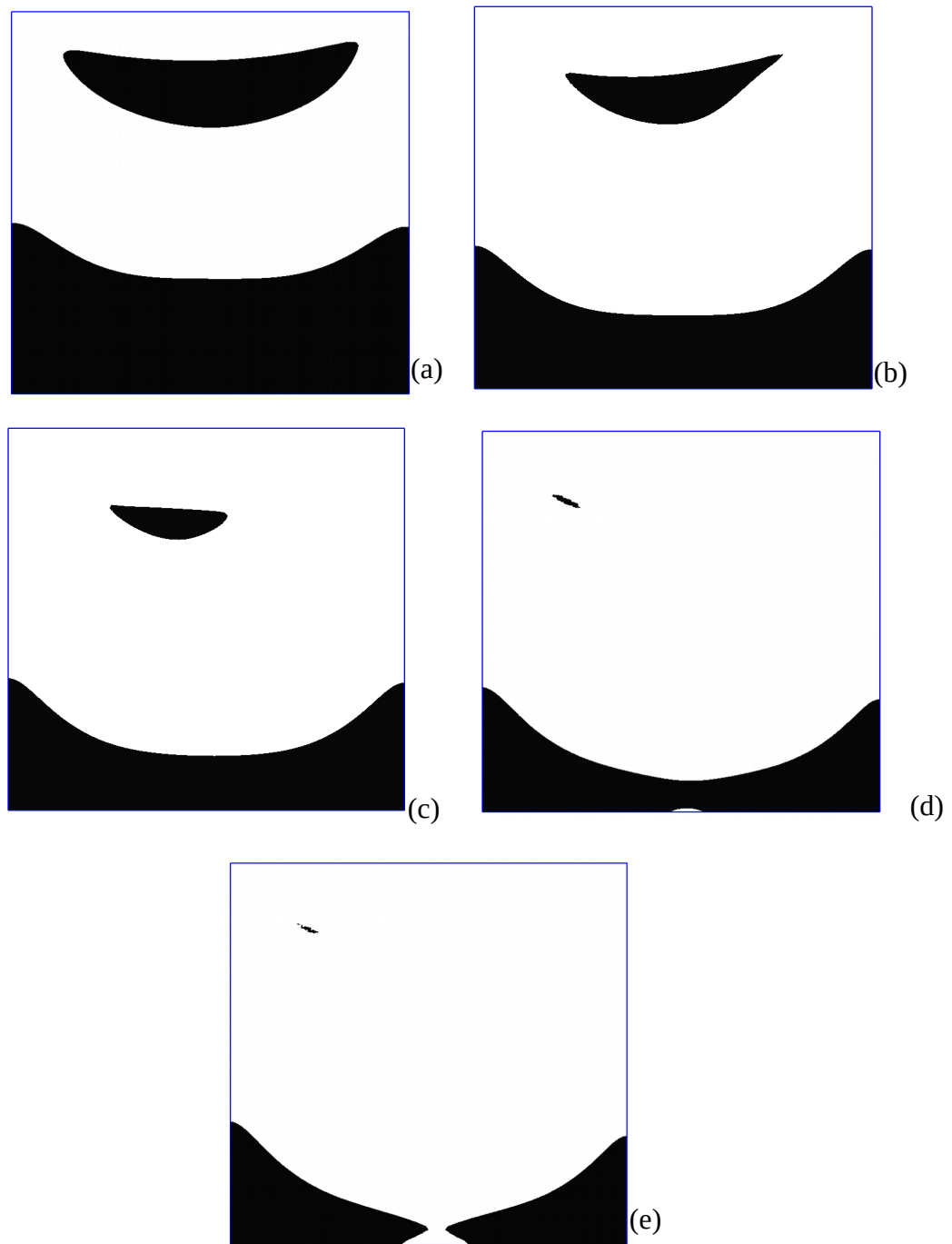


Figura 7.11 – Superfícies de escoamento: (a) $U^* = 0,01$, (b) $U^* = 0,05$, (c) $U^* = 0,1$, (d) $U^* = 0,2$, (e) $U^* = 0,25$

Nesta figura, também, como esperado, percebe-se que com o aumento da tensão de escoamento, as regiões aparentemente não escoadas diminuem em toda a cavidade. Tanto na parte superior quanto na parte inferior da cavidade, nota-se os mesmos efeitos dos resultados observados sem a presença dos efeitos inerciais. Entretanto, quando a intensidade do escoamento alcança um valor elevado (velocidade elevada), ocorre um forte deslocamento das regiões aparentemente não escoadas na parte superior da cavidade, isto devido pelo deslocamento do vórtice central, também chamado de vórtice principal do escoamento, pois com uma velocidade alta, os efeitos inerciais ficam mais evidentes e também, com uma velocidade alta e efeitos inerciais altos, teremos um aumento da advecção no escoamento. E o parâmetro $\rho^* = 500$ foi escolhido, pois os efeitos inerciais começam a ficar mais evidentes no escoamento.

Comparando-se as Figuras 7.9 e 7.11, observa-se claramente que os efeitos inerciais modificam o padrão do escoamento dentro da cavidade. Visto que, com o aumento da advecção no escoamento o número de Reynolds aumenta (proporcional ao aumento do ρ^*) e por conseguinte, os efeitos inerciais ficam mais evidentes do que os viscosos, tornando o escoamento mais fino diminuindo as zonas aparentemente não escoadas da cavidade e perdendo a sua simetria.

7.4.1.3 Influência da inércia

Por outro lado, a Figura 7.12 mostra as superfícies de escoamento sob a variação dos efeitos inerciais, utilizando os seguintes parâmetros: $\theta_0^* = 100$, $n = 0,5$, $U^* = 0,15$. O parâmetro $U^* = 0,15$ foi escolhido, pois os efeitos inerciais ficam mais evidentes com uma maior advecção no escoamento.

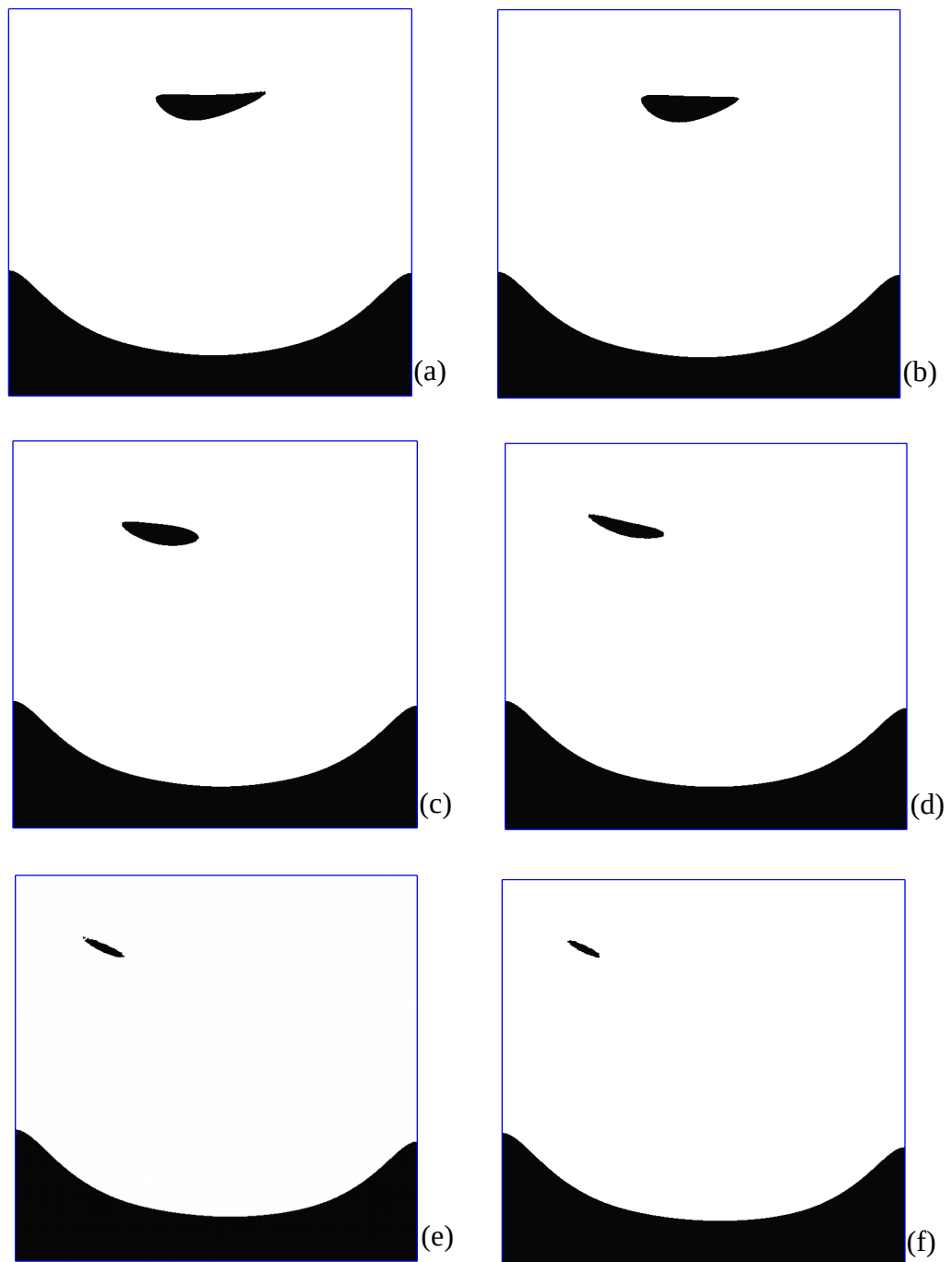


Figura 7.12 – Superfícies de escoamento: (a) $\rho^*=1$, (b) $\rho^*=50$, (c) $\rho^*=300$,
 (d) $\rho^*=500$, (e) $\rho^*=800$, (f) $\rho^*=1000$

Percebe-se pela análise da Figura 7.12 que as regiões aparentemente não escoadas diminuem em toda cavidade com o aumento do efeito inercial. Na parte inferior da cavidade, o efeito inercial tem pouca influência no padrão do escoamento, por outro lado, na parte

superior, o padrão do escoamento é bastante influenciado pelo efeito inercial, visto que o vórtice principal do escoamento sofre um grande deslocamento para a direita da cavidade de acordo com o aumento do ρ^* , pois nessa parte mais regiões excederam o limite da tensão de escoamento, logo o efeito da advecção tem uma forte influência na parte superior da geometria. Como a elasticidade, a inércia quebra a simetria do padrão de escoamento e com o aumento dos efeitos inerciais, há uma maior perda da simetria do escoamento (maior deslocamento para a direita). Essa perda de simetria acontece pelo fato crescente do termo da aceleração advectiva na equação de movimento. Em relação aos tamanhos dessas regiões, elas permanecem quase inalteradas até um escoamento inercial moderado. Essa tendência muda para escoamentos com efeitos inerciais mais elevados.

7.4.2 Análise da deformação elástica sobre o escoamento

O pós-processamento de interesse também é o cálculo da parte elástica da deformação total sofrida pelo material. Conforme predito pelo modelo elasto-viscoplástico empregado nesta Tese (Equações 5.1 e 5.13), a deformação elástica assume relevância essencial, uma vez que materiais viscoplásticos reais apenas apresentam elasticidade dentro das regiões aparentemente não escoadas; afora elas – quando a tensão de escoamento é excedida - esses materiais escoam como um fluido puramente viscoso, fluido *power-law* – linearmente ou não dependendo da intensidade da taxa de deformação. A distribuição da magnitude da deformação elástica no interior das regiões aparentemente não escoadas é dada pela razão entre a magnitude do tensor de tensão extra τ e o módulo de elasticidade ao cisalhamento G ,

$$\gamma_e = \frac{\tau}{G} = \frac{(2 \tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}}{G(\lambda_{eq})} \quad (7.4)$$

7.4.2.1 Influência da tensão de escoamento – sem os efeitos inerciais

A Figura 7.13 mostra a influência da tensão de escoamento sobre a deformação elástica ao longo da cavidade no escoamento. Os parâmetros fixos do material utilizado foram; $\theta_0^* = 100$, $n = 0,5$.

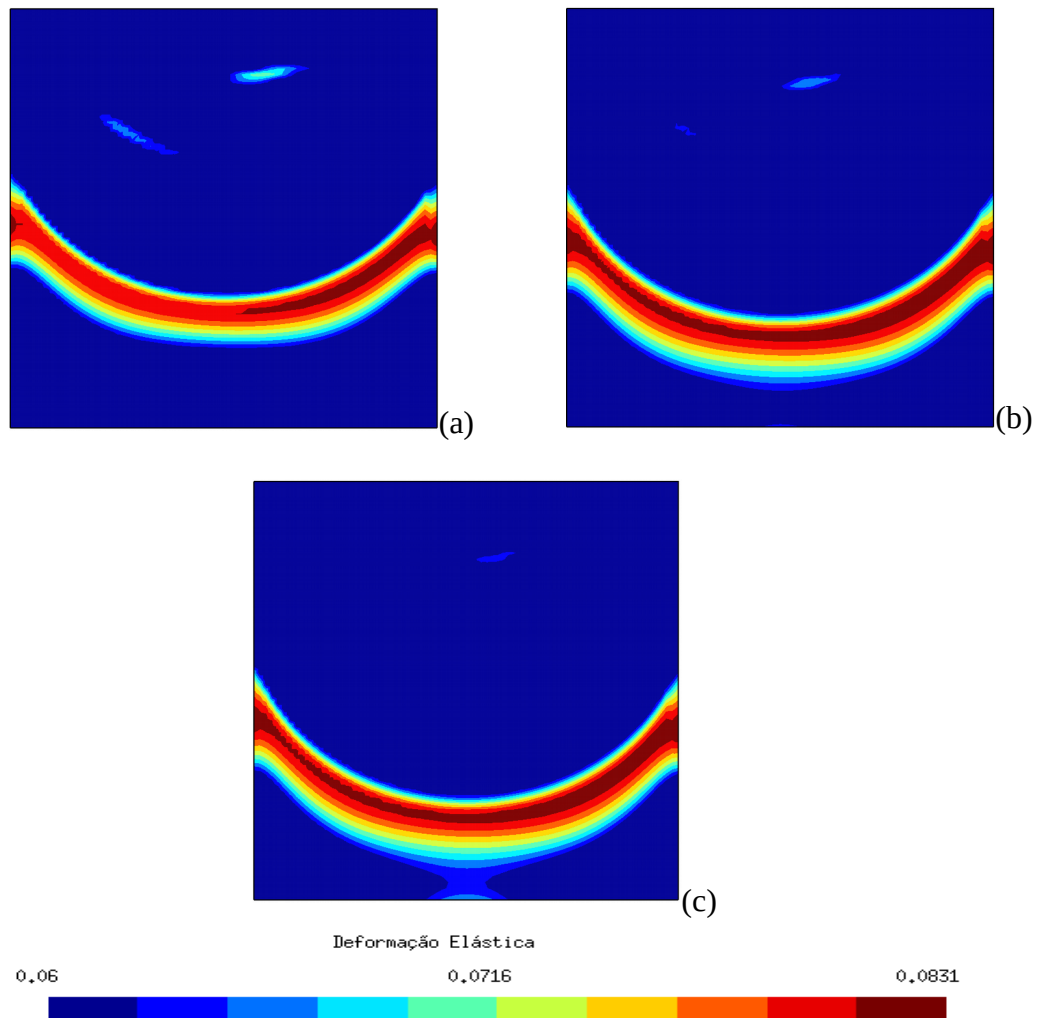


Figura 7.13 – Deformação elástica: (a) $U^*=0,1$, (b) $U^*=0,15$, (c) $U^*=0,25$

De sua definição dada pela Equação 7.4, sabemos que a deformação elástica cresce monotonamente até atingir seu valor máximo nas superfícies de escoamento, nas quais a tensão extra é igual a tensão de escoamento do material e as superfícies de escoamento possuem maior elasticidade, portanto vão possuir uma menor deformação elástica. Esta tendência é claramente observada na Figura 7.13, principalmente nas regiões aparentemente não escoadas no fundo da cavidade. Também, podem ser observadas nesta figura a diminuição da deformação elástica na região aparentemente não escoada no vórtice principal (região central) do escoamento – o que vem ao encontro da diminuição da morfologia das regiões aparentemente não escoadas no vórtice principal do escoamento, com o aumento de U^* .

7.4.2.2 Influência da tensão de escoamento – com os efeitos inerciais

A Figura 7.14 evidencia a influência da tensão de escoamento com efeitos inerciais presentes sobre a deformação elástica ao longo da cavidade no escoamento. Os parâmetros fixos do material utilizado foram; $\theta_0^* = 100$, $n = 0,5$, $\rho^* = 500$.

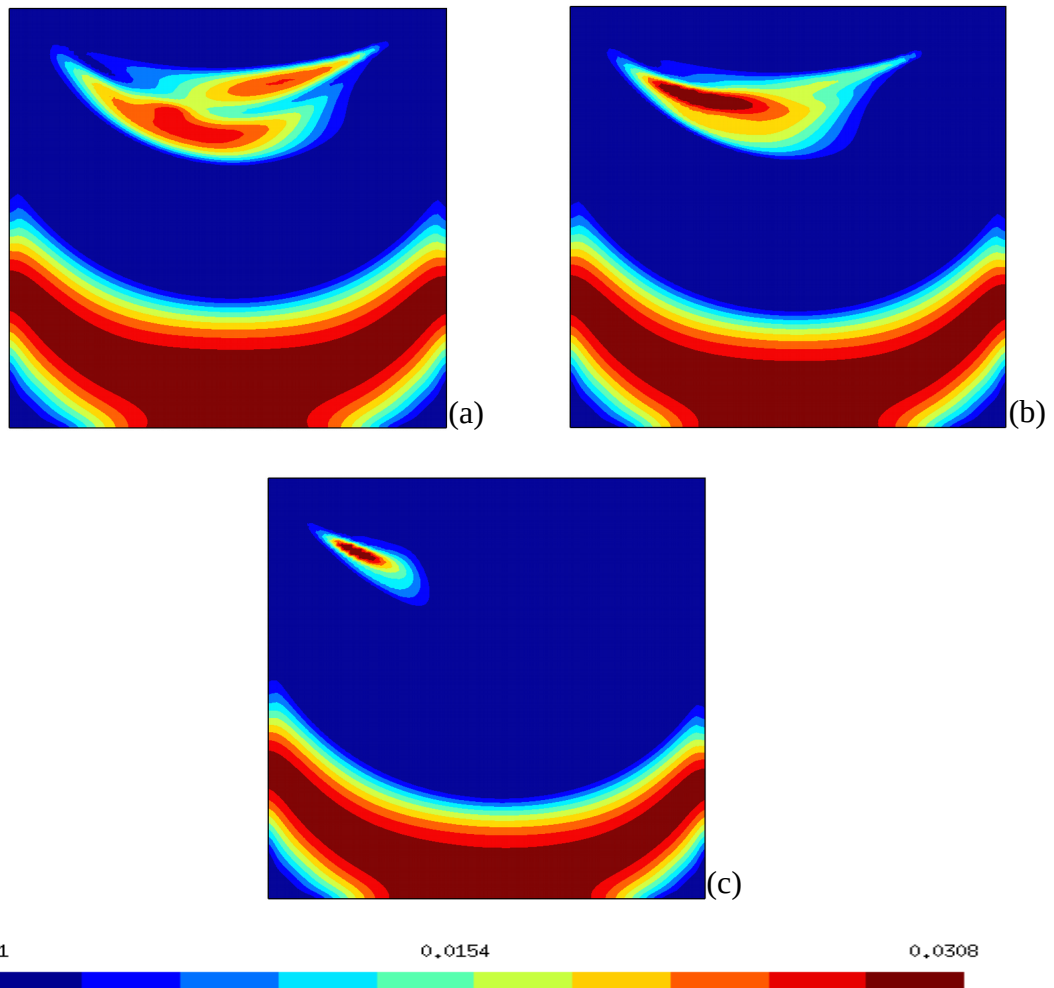


Figura 7.14 – Deformação elástica: (a) $U^* = 0,1$, (b) $U^* = 0,15$, (c) $U^* = 0,25$

As tendências verificadas anteriormente são confirmadas, ou seja, a tensão de escoamento altera a sua forma e a inércia torna suas superfícies de escoamento assimétricas. A novidade é que essas figuras 7.13 e 7.14 introduzem é atestar a pertinência da previsão do material e da modelagem numérica. Nota-se pela Figura 7.14 que aumentando a advecção no escoamento, a deformação elástica sofre uma redução em toda a cavidade, pois mais regiões atingiram a tensão limite de escoamento. Também percebe-se que nas regiões aparentemente

não escoadas a deformação elástica é maior, pois nessas regiões também teremos elasticidade (de magnitude menor se comparada com a viscosidade) – esse é um dos objetivos do modelo, encontrar elasticidade nas regiões aparentemente não escoadas – já nas quinas da geometria a deformação elástica é quase nula, pois ali se encontra a maior elasticidade (região de baixa velocidade, falta uma força considerável para atingir o limite de escoamento) e a deformação elástica vai diminuindo na passagem das regiões aparentemente não escoadas para as regiões aparentemente escoadas. No vórtice principal do escoamento a deformação elástica volta a aumentar, pois também há elasticidade naquela parte da cavidade – em magnitude menor se comparadas com as das quinas da geometria – logo, na parte superior da cavidade a deformação elástica é maior no vórtice principal e se desloca para a direita de acordo com o aumento do termo advectivo e também vai diminuindo ao passar para as regiões aparentemente escoadas.

7.4.2.3 *Influência da inércia*

A Figura 7.15 evidencia a influência dos efeitos inerciais sobre a deformação elástica ao longo da cavidade no escoamento. Os parâmetros fixos do material utilizado foram; $\theta_0^* = 100$, $n = 0,5$, $U^* = 0,15$.

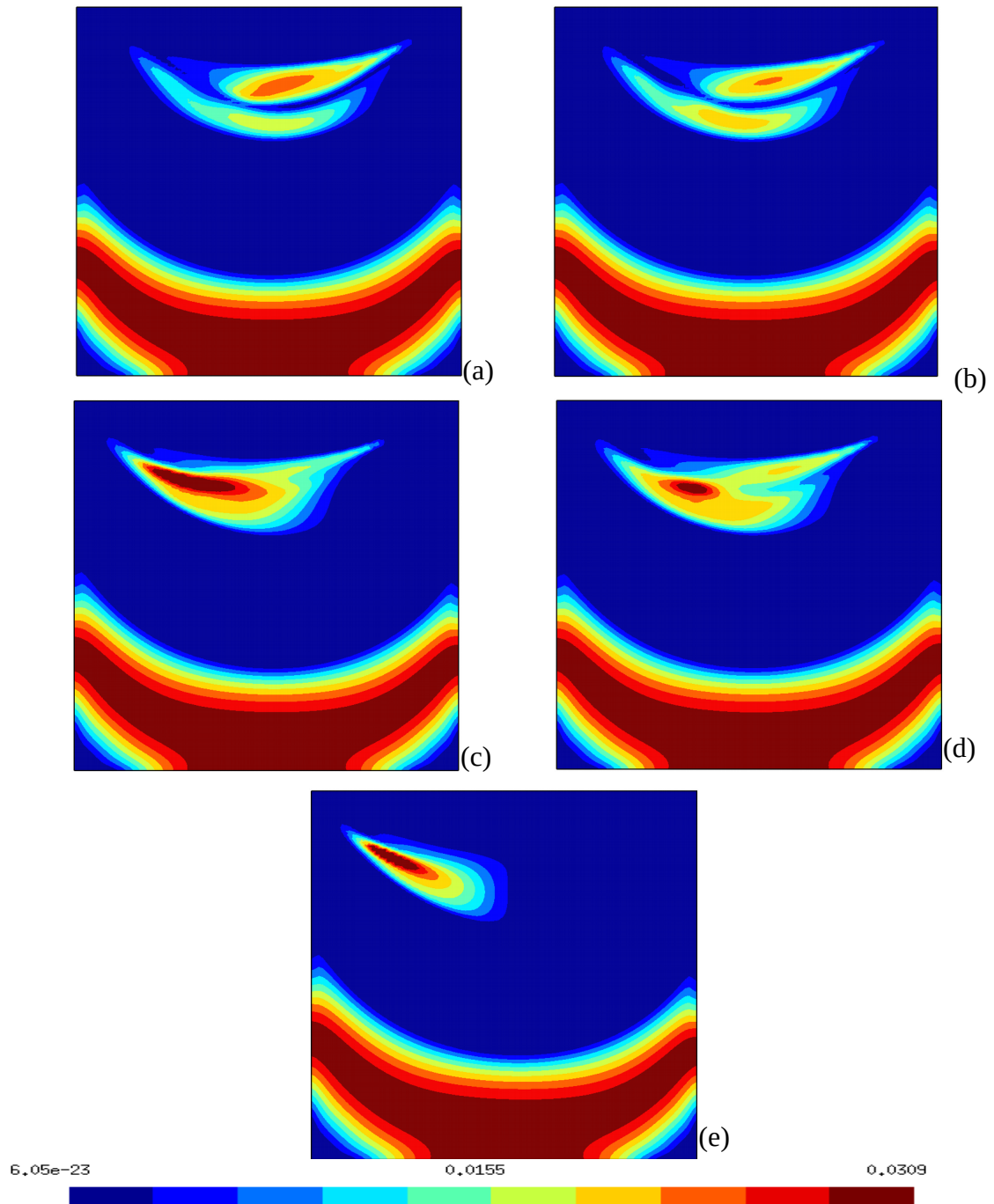


Figura 7.15 – Deformação elástica: (a) $\rho^* = 1$, (b) $\rho^* = 100$, (c) $\rho^* = 300$,
 (d) $\rho^* = 500$, (e) $\rho^* = 1000$

Percebe-se pela Figura 7.15 que a variação da inércia tem pouca influência sobre a deformação elástica na parte inferior da cavidade, porém nessa parte se encontram os maiores valores da deformação elástica (com exceção das quinas) e também no vórtice principal do escoamento há valores elevados para a deformação elástica. Variando a inércia com o ρ^*

mantendo U^* constante, tem assim a vantagem de se desacoplar as mudanças no campo de escoamento devido a inércia a partir das mudanças impostas na alteração da tensão de escoamento. Logo, podemos comparar a Figura 7.15 com a Figura 7.14, pois apresenta o mesmo efeito. Aumentando-se a advecção (aumento dos efeitos inerciais) do escoamento a deformação elástica sofre forte variação (na parte superior da geometria), visto que com o número de Reynolds mais alto, mais regiões na parte superior vão ter elevados valores para a deformação elástica e também esse valor se desloca para a direita da cavidade, juntamente com o olho do vórtice nesta região.

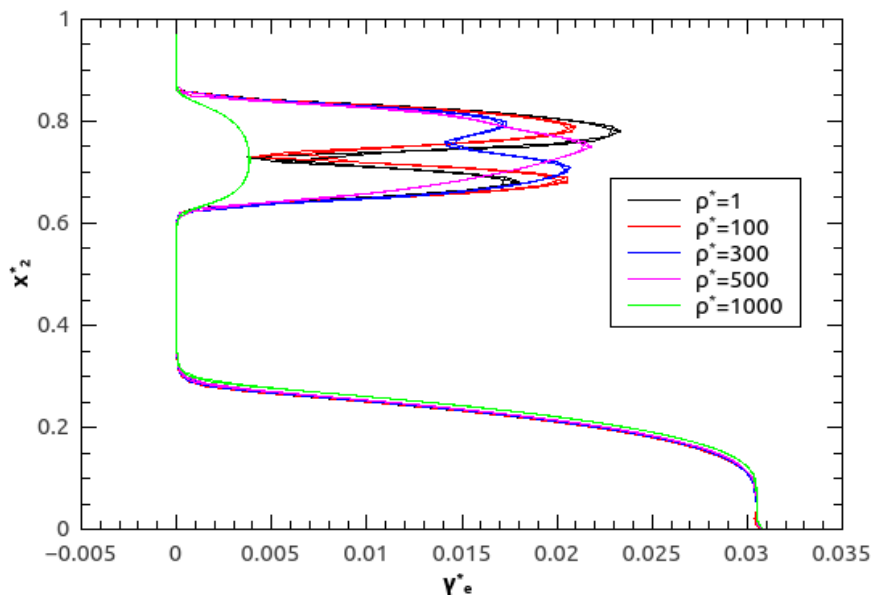


Figura 7.16 – Influência da inércia na deformação elástica

Para uma melhor análise da influência da inércia na deformação elástica, observa-se pela Figura 7.16 que a parte inferior da cavidade possui os maiores valores da deformação elástica, pois nessa parte terá mais regiões aparentemente não escoadas e, conseqüentemente, essa parte da cavidade possui elasticidade (em escala menor se comparada com a viscosidade) e esses valores praticamente não se alteram – até com $\rho^* = 1000$ – com o aumento da inércia no escoamento. Por outro lado, na parte superior da cavidade, mais precisamente na região do vórtice principal do escoamento ($x_2^* = 0,6 - 0,9$), a deformação elástica sofre uma forte variação, pois nessa região teremos uma diminuição da região aparentemente não escoada com o aumento da advecção, portanto a elasticidade varia nessa região de acordo com a variação da inércia (ver Figura 7.15). Com uma inércia muito alta, $\rho^* = 1000$, a

deformação elástica diminui bastante na parte superior da geometria, pois com essa inércia o escoamento, conforme a Figura 7.12, terá muito mais regiões aparentemente escoadas predominando na cavidade, sendo assim, como visto anteriormente, a deformação elástica sofre uma forte redução com o aumento da advecção. Lembrando que as zonas aparentemente não escoadas também possuem elasticidade, além de viscosidade (como visto anteriormente), nesse local a deformação elástica possui os maiores valores e as zonas aparentemente escoadas possuem os menores valores para a deformação elástica.

7.4.3 Influência da inércia na viscosidade

A Figura 7.17 evidencia a influência dos efeitos inerciais sobre a viscosidade ao longo do eixo central da cavidade ($x_1^*=0,5$) no escoamento. Os parâmetros fixos do material utilizado foram; $\theta_0^*=100$, $n=0,5$, $U^*=0,15$.

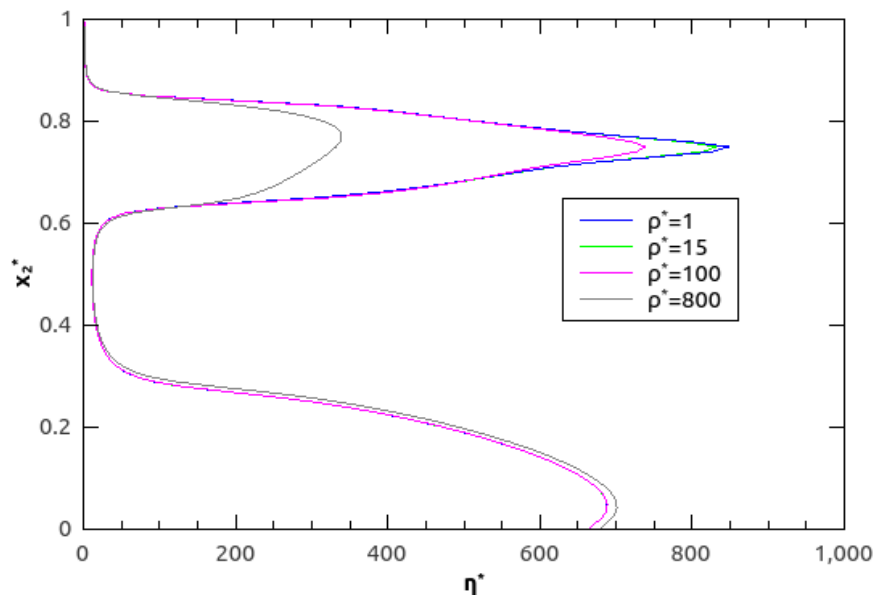


Figura 7.17 – Influência da inércia na viscosidade

Nos escoamentos de materiais elasto-viscoplásticos de acordo com o modelo proposto, as regiões aparentemente não escoadas possuem maior viscosidade, ou seja, nessas regiões o escoamento é mais viscoso. Pela análise da Figura 7.17 nota-se este comportamento, pois na cavidade as regiões aparentemente não escoadas se encontram na parte superior e inferior da mesma, porém aumentando a inércia teremos mais advecção no escoamento, sendo assim, ocorrerá uma diminuição das regiões aparentemente não escoadas na parte superior da

cavidade (aumento da tensão limite de escoamento), conforme Figura 7.12, e assim a viscosidade diminui nessa parte da geometria, por outro lado, na parte inferior as regiões aparentemente não escoadas não sofrem grandes alterações e por conseguinte, os valores da viscosidade se mantêm nessa parte. E também pela Figura 7.17, percebe-se que nas regiões aparentemente escoadas se encontram os menores valores para a viscosidade, pois nessas regiões o fluido se deforma e por consequência, acontece o escoamento.

7.5 Análise da posição do vórtice principal

A vorticidade é um conceito matemático usualmente utilizado na dinâmica dos fluidos para caracterizar os vórtices de um escoamento. Ela pode ser interpretada como a quantidade de circulação ou rotação de um fluido, por unidade de área, de uma dada posição no escoamento. Matematicamente, a vorticidade é definida como um campo vetorial dado pelo rotacional do campo de velocidade, $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{V}$.

A análise do padrão do escoamento dentro da cavidade identificou três regiões de recirculação, a saber, uma região de recirculação localizada na parte superior da cavidade e duas regiões de menor vorticidade localizadas em suas quinas inferiores. A primeira região de recirculação é provocada pela condição de contorno imposta na parede superior da cavidade, condição esta, que impõe ao escoamento, no interior da cavidade, uma recirculação no sentido horário – doravante designada de vórtice principal do escoamento ou olho do vórtice que representa a parte central do vórtice principal. Já as recirculações ditas secundárias nas quinas inferiores da cavidade, são provocadas pelo descolamento do fluido nestas regiões, ou seja, o escoamento principal, ao chegar próximo ao fundo da cavidade, perde quantidade de movimento e mostra-se incapaz de permanecer aderido às paredes laterais nestas regiões.

7.5.1 Influência da tensão de escoamento – sem os efeitos inerciais

Na Figura 7.18 (posição geométrica) são descritas as influências da tensão de escoamento, U^* , sobre a localização do olho do vórtice do escoamento principal. Podemos observar na Figura 7.18, que o olho do vórtice desloca-se ligeiramente para baixo (cerca de 6% do comprimento L da cavidade) ao longo do eixo central da cavidade ($x_1^* = 0,5$), com o crescimento de U^* . Numa primeira abordagem poderíamos ser levados a explicar que este

deslocamento seja devido unicamente ao aumento da cinemática na parede superior da cavidade. Lembrando que U^* é definido como $U^* = \frac{U_c}{\dot{\gamma}_1 L}$, esta intensidade também pode

ser expressa como uma função explícita da tensão limite de escoamento, $U^* = \frac{U_c k^{1/n}}{\tau_y^{1/n} L}$. Ou

seja, a quantidade U^* acopla os efeitos cinemáticos e viscoso da tensão de escoamento – para uma dada geometria e coeficiente *power-law*. Sobre este novo ponto de vista introduzido pela adimensionalização empregada, a Figura 7.18 indica que escoamentos mais viscosos apresentam a formação de seus vórtices mais próximo do topo da cavidade e, contrariamente, escoamentos menos viscosos tem suas recirculações mais distantes da parede superior da cavidade. Este comportamento observado vai ao encontro da dinâmica dos fluidos viscosos, isto é, os escoamentos mais dissipativos impedem que a quantidade de movimento imposta no topo da cavidade alcance suas regiões inferiores.

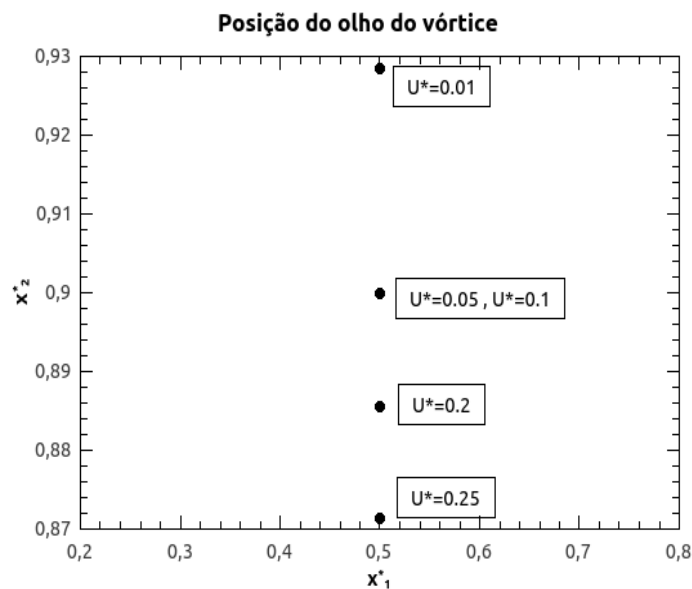


Figura 7.18 – Análise da posição do vórtice principal do escoamento: $U^* = 10^{-2} - 0,25$

Finalizando, para valores crescentes de U^* , o escoamento dissipa cada vez menos a quantidade de movimento imposta pelo deslocamento da tampa. Conseqüentemente, o vórtice principal do escoamento (vórtice central) é transportado para baixo.

Classicamente, o reposicionamento do olho do vórtice é unicamente devido ao componente inercial do modelo mecânico.

7.5.2 Influência da tensão de escoamento – com os efeitos inerciais

A Figura 7.19 analisa o comportamento do vórtice principal da geometria sob a influência da intensidade do escoamento com efeito inercial $\rho^* = 500$.

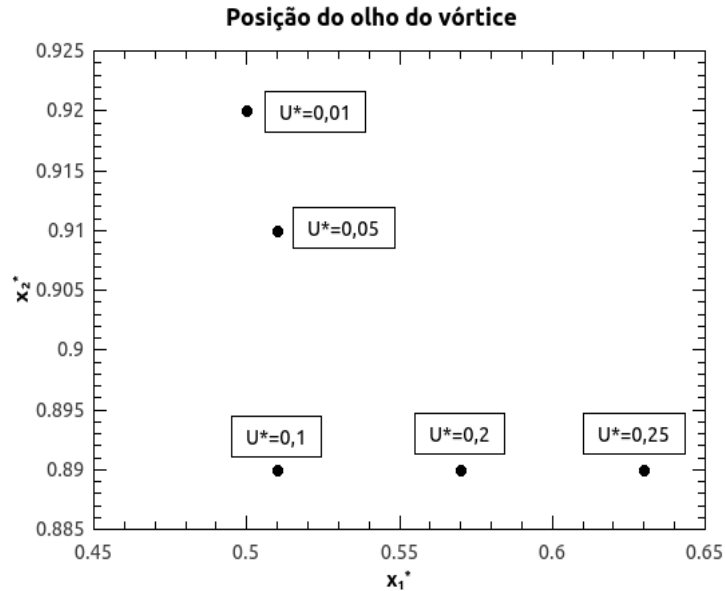


Figura 7.19 – Análise da posição do vórtice principal do escoamento com $\rho^* = 500$

Percebe-se pela análise da Figura 7.19 que o olho do vórtice desloca-se em torno de 3% (desloca muito pouco da parte superior) do comprimento L da cavidade para baixo. E ainda nota-se que, idem à Figura 7.18, escoamento mais viscosos (baixa U^*) apresentam a formação de seus vórtices mais próximo do topo da cavidade e, contrariamente, escoamentos menos viscosos (elevadas U^*) tem suas recirculações mais distantes da parede superior da cavidade. Entretanto, na Figura 7.19 o vórtice principal do escoamento não permanece na parte central da geometria, sofrendo um forte deslocamento (cerca de 25% da parte central) para a direita da cavidade devido ao aumento do termo advectivo no escoamento, pois aumentando a intensidade do escoamento, teremos mais advecção no escoamento.

7.5.3 Influência dos efeitos inerciais

A Figura 7.20 mostra a influência dos efeitos inerciais no vórtice principal do escoamento. Foi utilizado o valor de $U^* = 0,15$, pois a partir desse valor o vórtice começa a sofrer uma forte influência dos efeitos inerciais (conforme Figura 7.19 – deslocamento para a direita).

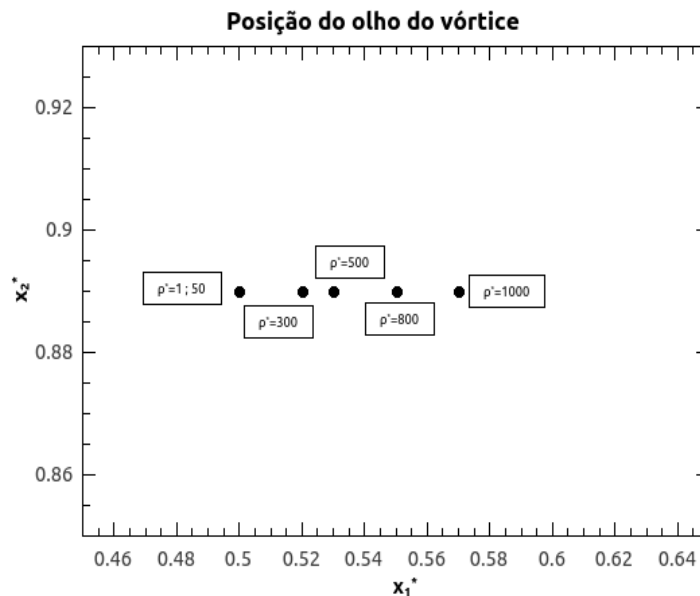


Figura 7.20 – Análise da posição do vórtice principal do escoamento com ρ^* variando

Através da Figura 7.20 observa-se que para baixos valores de inércia ($\rho^* = 1$ a 50), o olho do vórtice não se desvia do eixo central da cavidade ($x_1^* = 0,5$), ou seja, a inércia ainda é superada pelos efeitos da elasticidade e da tensão de escoamento (U^*). Por outro lado, com o aumento dos efeitos inerciais, a inércia supera os efeitos da elasticidade ou da tensão de escoamento, com isso o vórtice principal do escoamento se desloca em uma linha reta na parte superior da cavidade - mesmo efeito encontrado na Figura 7.19 com elevada tensão de escoamento - porém sofre um deslocamento de aproximadamente 15% para a direita da cavidade (em relação a parte central, $x_1^* = 0,5$). Finalmente, para $\rho^* = 1000$, a inércia domina o escoamento, como consequência, o olho do vórtice sofre um forte deslocamento para a direita, fato também observado na Figura 7.12(f). E também pela análise da Figura 7.20 comprova-se que com o crescimento da advecção no escoamento, pelo aumento de (Reynolds também cresce), o olho do vórtice sofre deslocamento para a direita da cavidade, conforme fato presenciado nos resultados anteriores desta tese.

8. CONCLUSÕES

Nesta tese foram realizadas simulações numéricas de escoamentos elasto-viscoplásticos com a introdução dos efeitos inerciais e negligenciando a tixotropia, onde a geometria utilizada foi uma cavidade forçada. A modelagem mecânica foi feita empregando-se a equação da conservação de massa, a equação do princípio da conservação da quantidade de movimento acoplado a uma equação material elasto-viscoplástica proposta em [Souza Mendes et al., 2011]. Segundo esta equação o tensor extra de tensão é descrito por uma equação do tipo Oldroyd-B a qual permite que tanto os tempos de relação e retardo do material, como sua função viscoplástica, sejam sensíveis às mudanças de sua microestrutura. Ou seja, esse tipo de equação permite propriedades reológicas dependentes.

O modelo mecânico foi aproximado por um método de Elementos Finitos, a saber, o método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados, em termos da tensão extra, pressão e velocidade. Esta formulação estabilizada permite não só o emprego de elementos finitos de igual ordem, bem como produz aproximações estáveis em escoamentos fortemente advectivos dominados.

A geometria estudada consiste de uma cavidade bi-unitária na qual sua tampa superior move-se para a direita, induzindo, assim, um escoamento curvilíneo no seu interior. Para tal, foram prescritas as seguintes condições de contorno: na parede superior da cavidade escoamento horizontal com velocidade constante e, nas demais paredes foram imposta as condições de não-deslizamento e impermeabilidade. De modo a determinarmos a melhor discretização deste domínio computacional, foram empregadas diversas malhas de elementos Lagrangeanos bilineares, resultando, segundo o critério de independência de malha adotado, na escolha de uma malha de 10000 elementos Q1.

Através da adimensionalização do modelo mecânico empregado, obtém-se que o escoamento estudado é governado pelos seguintes parâmetros: o índice *power-law*, n controla o grau de *shear-thickening* da viscosidade viscoplástica, o nível de elasticidade das regiões aparentemente não escoadas é dado pelo tempo de relaxação adimensional θ_0^* e a intensidade do escoamento (tensão de escoamento) é controlada pela velocidade adimensional, U^* .

Em seguida à determinação da discretização do domínio computacional e a obtenção dos parâmetros governantes do escoamento, foi realizada uma análise de sensibilidade de

modo a aferir a influência dos efeitos viscosos, elásticos e cinemáticos sobre o padrão do escoamento. As tendências principais desta análise são resumidas nos parágrafos que seguem.

No que tange a influência dos efeitos cinemáticos do escoamento com a reologia do material (U^*), foi observado uma acentuada redução nas regiões aparentemente não escoadas com o crescimento da tensão de escoamento. Isso se deve que o aumento de U^* provoca níveis crescentes de tensão em toda a cavidade, fazendo com que maiores regiões excedam o limite de escoamento do material e comecem a escoar como um fluido *power-law*. Esta fato ocorre tanto com a presença dos efeitos inerciais quanto sem os efeitos inerciais. Pois, pela variação de U^* e fixando $\rho^*=500$, aumentando os efeitos advectivos no escoamento as regiões aparentemente não escoadas sofrem um forte deslocamento para a direita na parte superior da cavidade. Por outro lado, fixando $U^*=0,15$ e variando os efeitos inerciais (variação de ρ^*) o efeito inercial tem pouca influência no padrão do escoamento na parte inferior, entretanto, na parte superior, o padrão do escoamento é bastante influenciado pelo efeito inercial, e com o aumento de ρ^* as regiões aparentemente não escoadas também sofrem um forte deslocamento para a direita da cavidade, logo o efeito da advecção tem uma forte influência na parte superior da geometria. Também observa-se que com o aumento dos efeitos inerciais, há uma perda da simetria do escoamento.

A deformação elástica é fortemente influenciada pela variação da tensão de escoamento. À medida que θ_0^* (elasticidade) diminui (pois tanto nas regiões aparentemente não escoadas quanto nas aparentemente escoadas temos elasticidade), as regiões aparentemente não escoadas estão sujeitas a maiores deformações elásticas – de acordo com as Equações 6.25 e 7.4 - ao passo que as regiões aparentemente escoadas apresentam $\gamma_e=0$. Este comportamento predito pelo modelo está de acordo com as recentes visualizações experimentais de escoamento de materiais viscoplásticos, nos quais os escoamentos apresentam um comportamento puramente viscoso quando a tensão excede o limite de escoamento do material, e o comportamento viscoelástico quando este limite não é alcançado. Outro relevante comentário a cerca de γ_e , é que a deformação elástica atinge seus valores máximos nas superfícies de escoamento, visto ser nelas que ocorrem os maiores níveis de tensão no interior das regiões aparentemente não escoadas. E tanto na presença ou não dos efeitos inerciais, a deformação elástica possui maior valor nessas regiões. Porém, com a variação da inércia os maiores valores da deformação elástica na parte superior da cavidade

tendem a sofrer um forte deslocamento para a direita, tal deslocamento é também observado pelas regiões aparentemente não escoadas nessa parte da geometria. E também com os efeitos inerciais presentes, a deformação elástica diminui de acordo com o aumento do termo advectivo da equação da quantidade de movimento, principalmente na parte superior da cavidade, pois com maior advecção no escoamento as regiões aparentemente não escoadas diminuem nessa parte, logo, mais regiões aparentemente escoadas se encontram na parte superior e conseqüentemente, a deformação elástica diminui, como um todo, na parte superior da cavidade com o aumento da inércia.

A viscosidade sofre bastante influência da inércia, pois aumentando a inércia as regiões aparentemente não escoadas sofrem uma grande diminuição na parte superior da cavidade e por conseqüência, a viscosidade nessa parte da geometria também sofre uma grande diminuição. Lembrando que nos escoamentos de materiais viscoplásticos a viscosidade será maior nas regiões aparentemente não escoadas na geometria.

A posição do olho do vórtice do escoamento sofre grande influência da tensão de escoamento. Com o aumento de U^* , sem os efeitos inerciais, o olho do vórtice desloca-se verticalmente para o fundo da cavidade, seguindo seu eixo central e também a posição do vórtice principal do escoamento sofre uma maior influência com a variação da tensão de escoamento, U^* , com a presença dos efeitos inerciais do que a pela variação dos efeitos inerciais (massa específica adimensional, ρ^*), essa influência em torno de 10% comparando-se a Figura 7.19 com a Figura 7.20. Isto porque, a quantidade de movimento é mais sentida em escoamentos menos viscosos, ou seja, o termo advectivo é mais influenciado pela variação de U^* do que pela variação de ρ^* . Entretanto, o movimento para a direita do vórtice principal do escoamento é visualizado tanto com a variação do ρ^* , quanto com um ρ^* alto com a variação do U^* .

O termo advectivo da equação da quantidade de movimento, Equação 3.19, é o termo que representa as forças de inércias no escoamento, ou seja, quanto maior a inércia no escoamento, maior será a advecção nesse escoamento. O número de Reynolds também é influenciado pela inércia, isto é, maior a inércia (maior ρ^*), maior será o número de Reynolds.

Por fim, os resultados numéricos evidenciaram uma influência significativa da elasticidade, da tensão de escoamento e da inércia no tamanho e na localização das regiões aparentemente não escoadas. Destacando-se que a elasticidade causa assimetria dessas

regiões, a tensão de escoamento altera os seus tamanhos e a inércia carrega suas posições. Salienta-se em face dos resultados obtidos e das observações físicas, que o modelo de viscoelasticidade empregado nesta tese mostrou-se capaz de prever qualitativamente o comportamento de materiais viscoplásticos reais no interior de cavidades forçadas com a presença dos efeitos inerciais. Como o estudo realizado foi numérico, isto também implica nas boas condições de estabilidade e a curacidade do método numérico empregado.

O código numérico usado nas simulações nesta tese, apresentou-se confiável, pois apresentou resultados semelhantes em comparação com a literatura [Hermany L. et al., 2013] e [Dos Santos D.D et al., 2013], pois esses trabalhos apresentaram alguns resultados com a variação do ρ^* em outras geometrias.

9. PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras podemos destacar os seguintes tópicos de pesquisa:

- Acrescentar a equação da energia para analisar a transferência de calor em fluidos não-Newtonianos, afim de observar o comportamento do campo de temperatura no escoamento;
- A incorporação do comportamento tixotrópico para os materiais viscoplásticos, visando considerar a dependência do tempo da influência das alterações da micro estrutura do material;
- Aplicar a técnica de conformação logarítmica de tensão na equação viscoelástica visando alcançar tempos de relaxação adimensional mais elevados e por consequência, conseguindo maiores valores para o número de Deborah;
- Estudar escoamentos tridimensionais de materiais elasto-viscoplásticos, avaliando assim, a influência dos efeitos de extremidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. Baloch, P. Townsend, M. Webster, **On vortex development in viscoelastic expansion and contraction flows.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 65 (1996) 133–149.

A. Matsoukas, E. Mitsoulis, **Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 109 (2003) 231-240.

A. Mujumdar, A.N. Beris, A.B. Metzner, **Transient phenomena in thixotropic systems.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 102 (2002) 157-178.

A.N. Alexandrou, T.M. McGilvrey, G. Burgos, **Steady Herschel-Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 100 (2001) 77–96.

Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. **Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-stress Formulation of Incompressible Flows.** *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 104, p. 31–48.

Beverly, C.R., Tanner, R.I, 1989. **Numerical analysis of extrudate swell in viscoelastic materials with yield stress.** *J. Rheology.* vol. 33/6, p. 989–1009.

Billington, E. W., Tate, A., 1981. **The physics of deformation and flow.** McGraw-Hill Inc, U.S.A.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987. **Dynamics of polymeric liquids.** vol. 1, John Wiley and Sons, U.S.A.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., Entov, V., 1999. **On the determination of yield surfaces in Herschel–Bulkley fluids.** *J. Rheology.* vol. 43/3, p. 463–483.

R.P. Chhabra and J.F. Richardson, 1999. **Non-Newtonian Flow in the Process Industries.** Editora Butterworth Heinemann.

Carreau, P. J., 1968. **Ph.D. Thesis.** University of Wisconsin, Madison.

D. Sikorski, H. Tabuteau, J.R. de Bruyn. **Motion and shape of bubbles rising through a yield-stress fluid.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 159 (2009) 10-16.

E. Mitsoulis, A. Matsoukas. **Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 129 (2005) 182-187.

E. Mitsoulis, R.R. Huilgol. **Entry flows of Bingham plastics in expansions.** *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 122 (2004) 45-54.

E. Mitsoulis, S.S. Abdali, N.C. Markatos. **Flow simulation of Herschel- Bulkley fluids through extrusion dies.** *Can. J. Chem. Eng.* 71 (1993) 147-160.

E. Mitsoulis, Th. Zisis. **Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 101 (2001) 173-180.

Franca, L. P., Frey, S., 1992. **Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 99, p. 209–233.

G.G. Lipscomb, M.M. Denn. **Flow of Bingham fluids in complex geometries.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 14 (1984) 337-346.

Gurtin, M. E., 1981. **An introduction to continuum mechanics.** Academic Press, New York, U.S.A.

H.A. Barnes. **A brief history of the yield stress.** Appl. Rheol. 9 (1999) 262–266.

H.A. Barnes. **The yield stress - a review.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 81 (1999a) 133–178.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balusters, M., 1986. **A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol.59, p. 85–99.

J. Mewis, N.J. Wagner. **Thixotropy,** Adv. Colloid Interface Sci. 147-148 (2009) 214-227.

K. Dullaert, J. Mewis. **A structural kinetics model for thixotropy.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 139 (2006) 21-30.

M. Aboubacar, H. Matallah, M.F. Webster. **Highly elastic solutions for Oldroyd-B and Phan-Thien/Tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 103 (1) (2002) 65–103.

M.A. Alves, P.J. Oliveira, F.T. Pinho. **Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and ptt fluids in planar contractions.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 110 (2003) 45–75.

M.A. Al Khatib, S.D.R. Wilson. **Flow of Bingham fluids in an orthogonal rheometer.** Int. J. Eng. Sci. 63 (2003) 621–632.

M. Bercovier, M. Engelman. **A finite element method for incompressible non-Newtonian flows.** J. Comput. Phys. 36 (1980) 313–326.

M.M. Denn. **Dynamics of complex fluids,** in: M. Adams, R. Mashelkar, J. Pearson, A. Rennie (Eds.). Dynamics of Complex Fluids. Imperial College Press, London, 1998, p. 372-378.

Nassar, B., de Souza Mendes, M.F. Naccache, 2011. **Flow of elasto- viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion–contraction**. J. Non-Newtonian Fluid Mech. vol. 166, p. 386–394.

Papanastasiou, T.C., 1987. **Flows of Materials with Yield**. Journal of Rheology, vol. 31 (5), p. 385-404.

P. Jay, A. Magnin, J.M. Piau. **Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion**. AICHE J. 47 (10) (2001) 2155-2166.

P.R. de Souza Mendes. **Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics**. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 147 (12) (2007) 109-116.

P.R. de Souza Mendes. **Modeling the thixotropic behavior of structured fluids**. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 164 (2009) 66-75.

P.R. de Souza Mendes, E.S.S. Dutra. **Viscosity function for yield-stress liquids**. Appl. Rheology. 14 (6) (2004) 296-302.

P.R. de Souza Mendes, M.F. Naccache, Bruno Nassar. **Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions**. J. Non- Newtonian Fluid Mech. 166 (2011) 386-394.

P.R. de Souza Mendes, Roney L. Thompson., 2012. **A critical overview of elasto-viscoplastic thixotropic modeling**. J. Non- Newtonian Fluid Mech. vol. 187, p. 8-15.

P. Saramito. **A new constitutive equation for elasto-viscoplastic fluid flows**. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 145 (2007) 1-14.

Renato da R. Martins, Giovanni M. Furtado, Daniel D. dos Santos, Sérgio Frey, Mônica F. Nacacche, Paulo R. de Souza Mendes. **Elastic and viscous effects on flow pattern of elasto-viscoplastic fluids in a cavity**. Mechanics Research Communications. 53 (2013) 36-42.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. **The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**. CRC Press Inc., USA.

Reddy, J.N., 2008. **An Introduction to Continuum Mechanics**. Cambridge University Press , USA.

R.E. Carter, R.C. Warren. **Extrusion stresses, die swell, and viscous heating effects in double-based propellants**. J. Rheology. 31 (1987) 151-173.

Santos, Daniel Dall Onder. **Flow of elasto-viscoplastic liquids through a planar expansion–contraction**. Rheol Acta. vol 53, p. 31-41, 2013.

Santos, Daniel Dall Onder; Frey, Sérgio; Naccache, Mônica F., Paulo R. de Souza. **Numerical approximations for flow of Viscoplastic fluids in a lid-driven cavity**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. p. 667-679, 2011.

S.Sofou, E.B. Muliawan, S.G. Hatzikiriakos, E.Mitsoulis. **Rheological characterization and constitutive modeling of bread dough**. Rheology. Acta 47 (2008) 369-381.

Slattery, J. C.,1999. **Advanced transport phenomena**. Cambridge University Press, U.S.A.

T.C. Papanastasiou. **Flows of materials with yield stress**. J. Rheol. 31 (1987) 385-404.

T.N. Phillips, A.J. Williams. **Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through planar and axisymmetric contractions**. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 108 (2002) 25-47.

Zinani, F.; Frey, S.L., 2006. **Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids**. Journal of Fluids Engineering – Transactions of the Asme. Estados Unidos, v. 128, n. 4, p. 856-863.

Zinani, F.S.F. e Frey, S.L., 2008. **Galerkin Least-Squares Multifield Approximations for Flows of Inelastic Non-Newtonian Fluids** . Journal of Fluids Engineering, vol. 130, p. 1-14.

Zinani, F. Silveira, FS e Frey, S.L., 2010. **Stabilized mixed approximations for inertial viscoplastic fluid flows**. Mechanics Research Communications, vol. 37, p. 145-152.

APÊNDICE A – Formulações matemáticas

Tensor gradiente de deformação

Seja \mathbf{F} o tensor gradiente de deformação, temos que, $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ e por consequência, $d\mathbf{x} = \det \mathbf{F} d\mathbf{X}$, onde $\det \mathbf{F}$ é o jacobiano em um instante de tempo t .

Seja ϕ uma função definida no conjunto de todos os tensores inversíveis de \mathbf{A} , tal que: $\phi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$. Usando a propriedade dos Invariantes de um tensor, temos que:

$$\det(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) = -\alpha^3 + I_1(\mathbf{A})\alpha^2 - I_2(\mathbf{A})\alpha + I_3(\mathbf{A}) \quad (\text{A.1})$$

onde, $\alpha = f(\mathbf{A})$ e I_1, I_2, I_3 são os invariantes, na qual os seus valores são $I_1(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A}$, $I_2(\mathbf{A}) = (1/2)[(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2]$, $I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$ e fazendo $\alpha = -1$, temos que, $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 1 + \text{tr} \mathbf{A}$ e logo, se \mathbf{A} é inversível e $\mathbf{U} \in \text{Lin}$ e é arbitrário, então:

$\det(\mathbf{A} + \mathbf{U}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{A})^{-1}$ é linear, pelo fato de a operação do traço ser linear, assim:

$$D\phi(\mathbf{A})\mathbf{U} = \det \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Sendo assim, de acordo com a Equação 11.2 e fazendo $\mathbf{A} = \mathbf{F}$, tem-se:

$\frac{D(\det \mathbf{F})}{Dt} = (\det \mathbf{F}) \text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})$, onde $\dot{\mathbf{F}} = (D/Dt)\mathbf{F}$. Levando em conta que $\text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \text{div} \mathbf{u}$, chegamos a comprovação que:

$$\dot{\det} \mathbf{F} = \det \mathbf{F} \text{div} \mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

ANEXO I – Teorema da divergência

- $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{a}) = \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{a})$, sendo α um escalar e \mathbf{a} um campo vetorial.
- $\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) - \mathbf{T} \nabla \mathbf{u}$, sendo \mathbf{u} um campo vetorial (por exemplo, velocidade e \mathbf{T} um tensor (por exemplo, o tensor de tensões).
- $\int_{\Omega} \nabla \alpha = \int_{\Gamma} \alpha \mathbf{n} d\Gamma$, onde α é um escalar e \mathbf{n} é o vetor normal.
- $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$, onde \mathbf{a} é um campo vetorial e \mathbf{n} é o vetor normal.
- $\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{n} d\Gamma$, onde \mathbf{u} é um campo vetorial e \mathbf{n} é o vetor normal.
- $\int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{S}) \mathbf{n} d\Gamma$, onde \mathbf{T} é um tensor e \mathbf{n} é o vetor normal.
- $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}$, onde \mathbf{v} e \mathbf{w} são vetores.

ANEXO II – Teorema da Localização

Seja ϕ um campo escalar ou vetorial, contínuo e definido em conjunto aberto Ω , se dado $x \in \Omega$ e se por sua vez,

$$\int \phi d\Omega = 0 \text{ , para todo } \Omega \subset \Omega \text{ , então } \phi = 0$$

ANEXO III – Teorema de Green

- $\int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega$, onde \mathbf{T} é um tensor.

ANEXO IV – Hipótese de Cauchy

- $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$

ANEXO V – Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja F um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em uma região aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Nesse caso, tem-se,

$$\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} d\mathbf{S}$$