

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Previsão da Inflação através de Wavelets e Redes Neurais

por

Cristina Zaniol

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen
Orientador

Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes
Coorientador

Porto Alegre, janeiro de 2021.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Zaniol, Cristina

Previsão da Inflação através de Wavelets e Redes Neurais /
Cristina Zaniol.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2021.

159 p.: il.

Tese (Doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Apli-
cada, Porto Alegre, 2021.

Orientador: Claeyssen, Júlio César Ruiz ; Coorientador: Mo-
raes, Jean Carlo Pech de

Tese: Matemática Aplicada,
Transformada Wavelet, Redes Neurais, Inflação

Previsão da Inflação através de Wavelets e Redes Neurais

por

Cristina Zaniol

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeyssen

Coorientador: Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Zingano
PPGMap-UFRS

Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto
FCE-UFRGS

Prof. Dr. Adriano de Cesaro
IMEF-FURG

Tese defendida e aprovada em
janeiro de 2021.

Prof. Dr. Esequia Sauter
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família. Em especial, ao suporte e a compreensão dos meus pais, Alice e Omar, em toda a minha jornada acadêmica.

Aos meus colegas de pós-graduação e ao PPGMap, obrigada pela convivência. Deixo um agradecimento a Rhuany, pela prontidão e presteza sempre que precisei.

Aos meus colegas do IFSul, em especial à Michele e à Ana Paula, que aguentaram todas as minhas lamentações sobre as dificuldades de terminar de escrever a tese em plena pandemia.

Ao meu orientador, Julio, e coorientador, Jean, por topar me acompanhar nesse desafio.

Finalmente, um agradecimento ao meu companheiro de vida, Cássio, que mesmo nos momentos mais sombrios, nunca deixou que eu perdesse a confiança em mim mesma. Sem a tua insistência, não sei se teria chegado até aqui.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que fizeram parte dessa etapa decisiva em minha vida.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS	viii
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 INFLAÇÃO E O SEU NÚCLEO	8
2.1 Índices de Inflação	10
2.1.1 O Surgimento dos Índices de Inflação	13
2.1.2 Índice de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA	14
2.2 Núcleos de Inflação	19
2.2.1 Núcleos por Exclusão	23
2.2.2 Núcleos por Médias Aparadas	26
2.2.3 Núcleo por Dupla Ponderação	28
3 WAVELETS EM SÉRIES TEMPORAIS	30
3.1 Origens e Motivações da Análise Wavelet	31
3.2 A Transformada Wavelet	33
3.2.1 Propriedades Matemáticas das Wavelet	33
3.2.2 Transformada Wavelet Contínua	35
3.2.3 Transformada Wavelet Discreta	37
3.2.4 Análise Multirresolução	39
3.2.5 Determinação de Coeficientes e Algoritmo Pirâmide	42

3.2.6	Famílias das <i>wavelets</i>	45
3.2.7	Reconstrução de um sinal suavizado: um exemplo	46
4	REDES NEURAIS	50
4.1	O Neurônio e a Função de Ativação	51
4.2	Arquitetura e Topologia da Rede Neural	57
4.3	Algoritmo de Aprendizado	62
4.4	Intervalos de Confiança	66
5	CONSTRUÇÃO DE NÚCLEOS DE INFLAÇÃO	73
5.1	Construção dos Núcleos de Inflação Baseados em Wavelets	74
5.2	Comparação entre Núcleos de Inflação Oficiais e Núcleos de Inflação Baseados em Wavelets	78
5.2.1	Comportamento dos Núcleos de Inflação	79
5.2.2	Estacionariedade	81
5.2.3	Ausência de Viés	84
5.2.4	Ajustamento	88
5.3	Considerações Finais sobre a Comparação entre Núcleos de Inflação	92
6	PREVISÃO DA INFLAÇÃO	94
6.1	Definição da Arquitetura e da Topologia de Rede Neural	94
6.2	Os Dados e sua Organização	97
6.3	Previsão com Núcleos de Inflação Oficiais	100
6.3.1	Erro Quadrático Médio da Previsão com Núcleos de Inflação Oficiais	100
6.3.2	Intervalos de Confiança das Previsões com Núcleos de Inflação Oficiais	107
6.3.3	Considerações sobre a Previsão com Núcleos de Inflação Oficiais	113
6.4	Previsão com Núcleos de Inflação Baseados em <i>Wavelets</i>	115

6.4.1	Núcleos de Inflação: Daubechies	115
6.4.1.1	Erro Quadrático Médio da Previsão com Núcleos de Inflação Daubechies	115
6.4.1.2	Intervalos de Confiança das Previsões com Núcleos de Inflação Daubechies	121
6.4.1.3	Considerações sobre a Previsão com Núcleos de Inflação Daubechies	126
6.4.2	Núcleos de Inflação: Symlets	126
6.4.2.1	Erro Quadrático Médio da Previsão com Núcleos de Inflação Symlets	127
6.4.2.2	Intervalo de Confiança da Previsão com Núcleos de Inflação Symlets	132
6.4.2.3	Considerações sobre a Previsão com Núcleos de Inflação Symlets . .	137
6.5	Considerações Finais sobre a Previsão do IPCA	137
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	140
	Referências Bibliográficas	143

LISTA DE FIGURAS

2.1	Pesos dos grupos que compõe o IPCA.	16
2.2	IPCA e núcleos de inflação por exclusão.	26
2.3	IPCA e núcleos de inflação por médias aparadas.	27
2.4	IPCA e núcleo de inflação por dupla ponderação.	29
3.1	Formato de onda das <i>wavelets</i>	35
3.2	Coefficientes de uma decomposição <i>wavelet</i> em diversas escalas.	43
3.3	Wavelets da família Daubechies	45
3.4	Wavelets da família Symlet	46
3.5	Decomposição de um sinal em 5 escalas.	48
3.6	Sinal original $f(t)$ e sua reconstrução $\tilde{f}_0(t)$	49
4.1	Ilustração do neurônio.	52
4.2	Modelo matemático de um neurônio k	55
4.3	Função de ativação do tipo: (a) limiar, (b) afim por partes e (c) sigmóides.	56
4.4	Rede neural com uma camada oculta.	58
4.5	Rede neural recorrente com uma camada oculta.	59
5.1	Decomposição do IPCA em 5 escalas utilizando o algoritmo pirâmide. 74	
5.2	Núcleos de inflação: (a) oficiais do Banco Central do Brasil, (b) baseado em <i>wavelets</i> daubechies e (c) symlets.	77
6.1	Topologia da rede neural com uma camada oculta.	95
6.2	Topologia da rede neural recorrente com uma camada oculta.	96
6.3	Comparação entre número de neurônios das redes neurais geradas com núcleos de inflação oficiais.	102
6.4	EQM para a previsões de um mês com núcleos de inflação oficiais.	103
6.5	EQM para a previsões de três meses com núcleos de inflação oficiais.	104

6.6	EQM para a previsões de seis meses com núcleos de inflação oficiais.	104
6.7	EQM para a previsões de nove meses com núcleos de inflação oficiais.	105
6.8	EQM para a previsões de doze meses com núcleos de inflação oficiais.	106
6.9	Intervalos de confiança para previsões de três meses com núcleos de inflação oficiais.	108
6.10	Intervalos de confiança para previsões de seis meses com núcleos de inflação oficiais.	110
6.11	Intervalos de confiança para previsões de nove meses com núcleos de inflação oficiais.	112
6.12	Intervalos de confiança para previsões de doze meses com núcleos de inflação oficiais.	114
6.13	Comparação entre neurônios com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> daubechies.	117
6.14	EQM para a previsões de um mês com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> daubechies.	118
6.15	EQM para a previsões de três meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> daubechies.	118
6.16	EQM para a previsões de seis meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> daubechies.	119
6.17	EQM para a previsões de nove meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> daubechies.	120
6.18	EQM para a previsões de 12 meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> daubechies.	120
6.19	Intervalos de confiança para previsões de três meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> daubechies.	122
6.20	Intervalos de confiança para previsões de seis meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> daubechies.	123
6.21	Intervalos de confiança para previsões de nove meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> daubechies.	124

6.22	Intervalos de confiança para previsões de doze meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> daubechies.	125
6.23	Comparação entre neurônios com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> symlet.	128
6.24	EQM para a previsões de um mês com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> symlet.	129
6.25	EQM para a previsões de três meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> symlet.	130
6.26	EQM para a previsões de seis meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> symlet.	130
6.27	EQM para a previsões de nove meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> symlet.	131
6.28	EQM para a previsões de doze meses com núcleo de inflação baseado em <i>wavelets</i> symlet.	131
6.29	Intervalos de confiança para previsões de três meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> symlet.	133
6.30	Intervalos de confiança para previsões de seis meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> symlet.	134
6.31	Intervalos de confiança para previsões de nove meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> symlet.	135
6.32	Intervalos de confiança para previsões de doze meses com núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> symlet.	136

LISTA DE TABELAS

2.1	Ponderação regional do IPCA.	18
2.2	Núcleos de inflação no mundo.	20
5.1	IPCA e núcleos de inflação: média, mínimo, máximo e desvio padrão.	79
5.2	Testes da raiz unitária: teste aumentado de Dickey-Fuller (ADF) e teste de Phillips-Perron (PP).	83
5.3	Testes para ausência de viés dos núcleos de inflação.	86
5.4	Coefficientes de ajustamento dos núcleos de inflação.	89
6.1	EQM médio da previsão utilizando núcleos de inflação oficiais.	100
6.2	EQM médio da previsão utilizando núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> daubechies.	116
6.3	EQM médio da previsão utilizando núcleos de inflação baseados em <i>wavelets</i> symlet.	127

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

Lista de Siglas

<i>ADF</i>	Teste Aumentado de Dickey-Fuller
<i>CMN</i>	Conselho Monetário Nacional
<i>Copom</i>	Comitê de Políticas Monetárias
<i>FGV</i>	Fundação Getúlio Vargas
<i>IGP – M</i>	Índice Geral de Preços ao Mercado
<i>IPCA</i>	Índice de Preços ao Consumidor Amplo
<i>IPCA – DP</i>	Núcleo de Inflação de Dupla Ponderação
<i>IPCA – EX</i>	Núcleo de Inflação por Exclusão
<i>IPCA – MS</i>	Núcleo de Inflação por Médias Aparadas com Suavização
<i>IPCA – MA</i>	Núcleo de Inflação por Médias Aparadas
<i>INPC</i>	Índice Nacional de Preços ao Consumidor
<i>PEPS</i>	Pesquisa de Especificação de Produtos e Serviços
<i>PIB</i>	Produto Interno Bruto
<i>POF</i>	Pesquisa de Orçamentos Familiares
<i>PP</i>	Teste de Phillips-Peron
<i>Selic</i>	Sistema Especial de Liquidação e Custódia

Lista de Símbolos

π_t	inflação
π_t^*	núcleo de inflação
$\psi(t)$	Função <i>wavelet</i>
C_ψ	Constante de admissibilidade
$T_{m,n}$	Coefficientes de detalhes
$\phi(t)$	Função escala
$S_{m,n}$	Coefficientes de aproximação
$f_m(t)$	Aproximação na escala m
$d_m(t)$	Detalhe na escala m
V_m	Subespaço de aproximação na escala m
W_m	Subespaço de detalhes na escala m
φ	Função de ativação

RESUMO

A inflação é caracterizada pelo aumento dos preços contínuo e generalizado em uma economia. Pequenas taxas de inflação são naturais e associadas com o crescimento saudável de uma economia; entretanto, a incerteza relacionada com a volatilidade e com a previsibilidade da inflação traz dificuldades na manutenção do poder de compra e, em nível macroeconômico, no delineamento de políticas monetárias. Para descrever o comportamento persistente da inflação, vários bancos centrais utilizam os Núcleos de Inflação, cujo objetivo é decompor a inflação em componentes persistentes e transitórios a fim de observar a sua tendência. Neste trabalho, propõe-se núcleos de inflação baseados em *wavelets*, utilizando as famílias Daubechies e Symlets, os quais permitem a exclusão de componentes transitórios sem serem necessárias hipóteses adicionais. Para construção desses núcleos, foi utilizado o Índice de Preços ao Consumidor Amplo(IPCA), no período entre julho de 2006 a dezembro de 2019. Uma série de testes são aplicados aos núcleos propostos com a finalidade de comparar estes com os atualmente adotados pelo Banco Central do Brasil. Ainda, com objetivo de prever o comportamento futuro da inflação brasileira, adotam-se técnicas de inteligência artificial, como as redes neurais. Ressalta-se que o uso das redes neurais possibilita lidar com problemas altamente complexos, os quais nem sempre podem ser descritos por modelos analíticos. Delimitam-se, ainda, as estimativas prováveis das previsões futuras através de intervalos de confiança. Dentre as principais conclusões do trabalho, salienta-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* possuem menores erros de previsão para horizontes mais breves, até seis meses. Além disso, verifica-se que a previsão gerada pelos núcleos de inflação são suavizações da inflação, permitindo identificar apenas a tendência da inflação para um horizonte de até doze meses.

ABSTRACT

Inflation is the continuous and generalized increase in prices in an economy. Small inflation rate is natural and associated with a healthy growth of an economy, however, uncertainties related to inflation volatility and predictability bring issues to maintain purchasing power and, at the macroeconomic level, in monetary policy design. To describe inflation persistent behavior, several central banks use core inflation to decompose inflation in persistent and transient components and observe its tendency. In this work, we proposed wavelet core inflation using Daubechies and Symlet families, which allow transient component exclusion without the need of additional hypothesis. For these cores, we use the Índice de Preços ao Consumidor Amplo(IPCA), between july 2006 and dezembro 2019. Numerous tests were applied to the proposed core inflation in order to compare these with those currently used by the Central Bank of Brazil. Moreover, in order to forecast the future behavior of Brazilian inflation, we use artificial intelligence techniques, such as neural networks. We point out that neural networks make it possible to deal with highly complex problems, which cannot always be described by analytical models. Additionally, we use confidence intervals to delimit inflation forecast probable estimates. Among the main conclusions, we emphasize that wavelet inflation core had fewer errors for shorter time horizons, up to six months. In addition, inflation forecast generated smoothed signals, allowing to identify only the trend of inflation of up to twelve months.

1 INTRODUÇÃO

A inflação é um aumento dos preços contínuo e generalizado em uma economia, acompanhado da perda do poder de compra. Por isso, e não à toa, que a inflação chama tanta atenção e de forma tão negativa: em contextos inflacionários há uma redistribuição de riquezas que reforça desigualdades, expondo as deficiências de funcionamento de uma economia [113].

Quando há um aumento global dos preços, isto é, quando há inflação generalizada, torna-se difícil identificar quais componentes sofrem acréscimos de preço decorrentes de aumentos na demanda e quais componentes estão sendo afetados pela indexação informal gerada pela expectativa do contínuo aumento de preços – fenômeno conhecido como retroalimentação da inflação [72, 86, 130]. Em consequência, há uma incapacidade de reconhecer o valor dos recursos (produtos e serviços disponíveis no mercado) e das oportunidades em uma dinâmica econômica contaminada por movimentos inflacionários persistentes. Desta forma, quando as tendências de preços são difíceis de serem interpretadas, recursos podem ser desperdiçados em atividades que parecem lucrativas em detrimento de oportunidades reais [48].

Pequenas taxas de inflação são naturais e associadas com o crescimento saudável da economia, permitindo a flexibilidade na alocação dos recursos em prol do aumento da eficiência [113]. Por exemplo, quando um mercado funciona de forma adequada, o aumento de demanda auxilia no direcionamento dos recursos produtivos àqueles produtos ou serviços de maior procura, fazendo com que os preços inicialmente mais altos pela elevada demanda se equilibrem através da maior oferta; essa oferta, por sua vez, tende a reestruturar a produção de forma a disponibilizar uma maior quantidade com um menor custo. Nesse caso, ainda que haja um aumento de preço, esse será em um patamar menor que o observado inicialmente, incorporando

apenas o custo de implementação das mudanças da matriz produtiva e as respectivas inovações tecnológicas [153, 158].

Demanda e oferta estão em constante mudança, e por isso é natural uma variação no nível de preços e, em consequência, a existência de inflação. Quando há um aumento na oferta ou uma diminuição na demanda, os salários reais de alguns grupos de trabalhadores podem cair abaixo do equilíbrio¹ e, como não é possível cortes nos salários nominais, a única maneira de reduzir os salários reais seria através da inflação; assim, se não houvesse inflação, os salários reais ficariam acima do nível de equilíbrio, resultando em maior desemprego [113]. Desta forma, a inflação não pode ser considerada a raiz do problema econômico, mas sim os efeitos decorrentes da falta de controle desta, os quais geram desequilíbrios, principalmente em períodos de excessiva volatilidade e que culminam na falta de capacidade de predição dos preços.

Até a década de 60, devido às recentes crises inflacionárias, acreditava-se que a impressão de papel moeda era a principal causa da inflação. Apenas na década de 90 que surgiram os primeiros estudos sobre tipos de inflação, reforçando a natureza mais complexa da perda do poder de compra em uma economia. Tais estudos foram capazes de identificar alguns tipos de inflação, entre elas a inflação administrada, a corretiva e a inercial: a primeira é decorrente de políticas de preços, principalmente, mas não exclusivamente, aplicadas pelo governo; a segunda refere-se a tentativa de recuperação do valor perdido com a inflação através da correção automática de preços dos produtos e dos serviços; e, por fim, a inercial diz respeito ao repasse da inflação para preços, salários e juros de forma a defender a renda, gerando uma expectativa de aumentos de preços [131]. Do estudo da inflação inercial, o comportamento e as expectativas dos agentes econômicos passaram a ser considerados como fator na previsão dos índices de inflação, ressaltando-se que, por ser

¹O equilíbrio representa a interseção da oferta e da demanda. No caso do trabalho, o equilíbrio é o ponto em que a quantidade de trabalho oferecida é igual à quantidade de trabalho demandada.

qualitativo, é de difícil mensuração. Ainda assim, esse entendimento contribui para a compreensão dos mecanismos da inflação e, ainda, podem ser incorporado nas técnicas de delineamento das políticas monetárias.

Ao longo de várias décadas foram traçadas estratégias para combater a inflação, mas a incompreensão da dinâmica inflacionária no contexto brasileiro levou as autoridades monetárias a não alcançarem a tão almejada estabilidade de preços. Na década de 60 deu-se a organização do sistema financeiro, surgindo com este o conceito da correção monetária; este instrumento de indexação de preços, de serviços e de contratos é apontado como origem da estagflação, na década de 70 até meados dos anos 80, em que o baixo crescimento econômico foi acompanhado de altas taxas de inflação [12, 127]. Desde então, com objetivo de estabilização e contenção de fortes tendências de hiperinflação, o Brasil teve ao menos seis planos econômicos que tentavam conter a inflação, entre eles: Plano Cruzado (1986) e Plano Cruzado II (1986), Plano Bresser (1987), Plano Verão (1989), Plano Collor (1990) e Plano Collor II (1991) [12, 127]. Finalmente, com o Plano Real (1994), houve estabilização da economia e controle inflacionário.

O percurso de desenvolvimento da economia brasileira até alcançar tendências hiperinflacionárias, e por fim a implementação de políticas que a contiveram, traz importantes contribuições para o entendimento do papel da inflação no contexto econômico atual. Com a adoção do Regime de Metas para Inflação, em julho de 1999, que tem o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) como referência, houve novos avanços nas políticas de estabilização de preços [6, 12, 39, 115]. No sistema de metas, o compromisso com a estabilidade de preços é o principal objetivo da política monetária, em que são estabelecidas metas de médio prazo para a inflação [6]. O principal mecanismo para atingir as metas de inflação no Brasil é a taxa de juros, em que o Banco Central usualmente intervém com a elevação da taxa

Selic² quando há um aumento do nível de preços acima do esperado; tal medida incentiva a redução de gastos, o que reduz a velocidade do crescimento dos preços.

Enquanto o Conselho Monetário Nacional (CMN) estabelece as metas de inflação, o Comitê de Políticas Monetárias (Copom) do Banco Central do Brasil utiliza as taxas de juros de curto prazo para atingir essa meta proposta [6]. O sistema é composto pelo centro da meta e um intervalo de tolerância que está situado entre 2 e 2,5 pontos percentuais para cima ou para baixo e, quando não for possível o alcance da meta, é necessário uma carta de conteúdo público com medidas propostas para recuperação da meta e o tempo para estas surtirem efeito.

A adoção do IPCA como meta de inflação gera algumas discussões, uma vez que o índice é afetado por choques econômicos não duradouros. Para tentar entender a tendência da inflação, o Banco Central tem, adicionalmente ao IPCA, acompanhado algumas medidas de núcleos de inflação, sendo o primeiro núcleo de inflação publicado em 2000 pelo próprio Banco Central.

Os núcleos de inflação são formas de calcular a inflação excluindo aumentos provocados por fatores temporários ou casuais, o que, em outras palavras, traduz a possibilidade de identificar os componentes persistentes da inflação [39]. Assim, defende-se que se utilizados os núcleos de inflação, seria possível o delineamento de uma política monetária menos rígida e menos suscetível à choques externos. Alguns critérios são importantes para o delineamento e aceitação dos núcleos de inflação, como a manutenção de registros confiáveis, a credibilidade e a reprodutibilidade deles [114, 140, 164].

Essencialmente, os núcleos de inflação podem ser divididos em dois: aqueles que excluem determinados itens e outros que utilizam ferramentas estatísticas e matemáticas [8, 108, 164]. No primeiro, exclui-se normalmente itens como alimen-

²A taxa Selic tem sua denominação da abreviação de Sistema Especial de Liquidação e Custódia, sendo conhecida como taxa básica de juros do Brasil. Essa taxa baliza taxas de juros cobradas por instituições financeiras, sendo também a taxa de juros dos títulos públicos do Tesouro Nacional.

tos e energia, tidos como de grande volatilidade; por sua vez, com o uso de ferramentas estatísticas, são estabelecidos critérios que definem quais componentes ou itens de maior volatilidade para a posterior exclusão, podendo apresentar variações na exclusão de itens para diferentes períodos de tempo. Apesar da facilidade de cálculo, essas medidas apresentam entre as suas principais críticas a perda de informações relevantes sobre a dinâmica de preços na economia [8, 45, 66].

Neste contexto, a teoria das *wavelets* permite a construção de medidas de núcleos de inflação que evitam a simples exclusão de determinados componentes, não sendo necessárias suposições adicionais em relação à tendência ou a ruídos inerentes [62, 65]. Ressalta-se que, ainda que haja diversas técnicas de construção de núcleos de inflação, optou-se pelas *wavelets* devido aos indícios de melhor desempenho em relação à análise de tendência em contextos inflacionários quando em comparação com outros núcleos de inflação normalmente adotados pelos bancos centrais [46, 65, 66, 108].

A transformada *wavelet* é uma ferramenta matemática que decompõe sinais no tempo e na frequência, possibilitando o tratamento de séries temporais com tendências, periodicidades e singularidades. Da análise multirresolução, resulta, ainda, a decomposição de um sinal em diversas escalas de frequência, o que traz flexibilidade à análise de séries temporais. No contexto de inflação, já foram conduzidos estudos utilizando *wavelets*: na África do Sul [66], na China [102], no México [166], no Egito [28], nos Estados Unidos [65], na Nova Zelândia [22], no Peru [108], na Turquia [5], na Zona do Euro [121, 143] e também no Brasil [62].

Outro problema de origem mais prática é a dificuldade da implementação de políticas anti-inflacionárias, que está centrado na capacidade de gerar previsões da inflação futura. Como as transformadas *wavelets* não mostraram uma boa capacidade preditiva para a inflação [22], há a necessidade da utilização de outras ferramentas para este fim. As redes neurais representam um avanço em relação às técnicas utilizadas para a modelagem e previsão de séries temporais, permitindo li-

dar com problemas altamente complexos, os quais nem sempre podem ser descritos por modelos analíticos [7, 53, 84].

As redes neurais podem ser vistas como algoritmos com habilidade de aprendizagem, inspiradas no funcionamento do cérebro que, com a ajuda de neurônios, processam informações com o objetivo de generalizar padrões que podem ser utilizados na classificação e na predição. Destaca-se que as redes neurais estão presentes em uma série de aplicações na literatura, desde o diagnóstico médico até mesmo na automação de veículos [25, 53, 125, 157]. No estudo de séries temporais, as redes neurais têm trazido contribuições para o estudo do fluxo em reservatórios e rios [124, 165], da radiação solar [29], da proliferação de mosquitos [109], da taxa de câmbio [75, 104], do preço de commodities (como o petróleo [1, 41, 106]) e também da precificação de ações [10, 118, 132].

Ressalta-se o caráter inovativo do presente trabalho: há poucos estudos sobre a previsão da inflação com a utilização de redes neurais; adicionalmente, ainda que o uso de *wavelets* para o cálculo do núcleo de inflação tenha sido implementada, a utilização conjunta de *wavelets* e redes neurais para a predição da inflação também é escassa na literatura, tendo sido utilizada recentemente para a previsão do IPCA no contexto brasileiro [168, 169]. A incorporação de intervalos de confiança na previsão da inflação ainda propicia uma avaliação da confiabilidade das previsões futuras geradas a partir da modelagem proposta.

O objetivo deste trabalho, portanto, é construir bons núcleos de inflação baseados em *wavelets* que possibilitem a previsão da inflação em diversos horizontes de tempo. Para isto, decidiu-se adotar uma abordagem de núcleo de inflação, apresentada no **Capítulo 2**, em que a medida é construída com base na teoria das *wavelets*, discutida no **Capítulo 3**. No **Capítulo 4** são apresentadas as redes neurais, utilizadas na construção das previsões de inflação. No **Capítulo 5** são apresentadas algumas análises comparativas entre os núcleos de inflação oficiais, calculados pelo Banco Central do Brasil, e os núcleos de inflação baseados em *wave-*

lets. No **Capítulo 6** são apresentadas as previsões para inflação geradas a partir dos diversos núcleos de inflação. Com a utilização de intervalos de confiança foi possível avaliar a confiabilidade da previsão da inflação, permitindo também visualizar que o resultado produzido aproxima-se mais da tendência que do próprio IPCA. Por fim, são apresentadas algumas discussões adicionais e as conclusões no **Capítulo 7**.

2 INFLAÇÃO E O SEU NÚCLEO

A definição do que configura inflação e quais os seus impactos é objeto de estudo há décadas e, conforme as economias tornam-se mais complexas, são incorporados novos elementos ao conceito. Hazlitt [86], jornalista e economista americano, apresentou um histórico da definição de inflação, a qual, em sua primeira conceituação, dada no *American College Dictionary*, envolve apenas a desvalorização da moeda através da impressão de mais dinheiro; a segunda definição, por sua vez, acrescenta um aumento de preços decorrente da expansão da quantidade do dinheiro e do crédito. Percebe-se, portanto, que conforme são conhecidos mais mecanismos que influenciam a inflação, mais elementos são incorporados ao conceito, como por exemplo a qualidade da unidade monetária, as expectativas dos agentes econômicos e a velocidade de circulação do dinheiro; mais recentemente, foram incorporadas a influência do câmbio na dinâmica inflacionária [58, 115, 147], assim como a capacidade instalada da indústria [147] e o preço de *commodities* [58, 115], entre outros elementos.

Questionamentos sobre a natureza, o papel dos agentes econômicos e as implicações na economia e na sociedade foram temas de diversas discussões na tentativa de entendimento dos mecanismos da inflação. Essas questões tornaram-se ainda mais relevantes diante dos eventos hiperinflacionários¹, como, por exemplo, no Brasil, em que a maior inflação acumulada ocorreu no ano de 1993 e atingiu 2708% [13]; entre os casos mais recentes, citam-se o Zimbábue e a Venezuela. O controle inflacionário, dessa forma, ganhou importância nos estudos econômicos, principalmente a partir da década de 60, com eventos relacionados a hiperinflação e a estagflação² que assolaram, em especial, a América Latina.

¹A hiperinflação é caracterizada por taxas de inflação superior a 50% ao mês.

²Estagflação é quando há um índice de inflação alto combinado com crescimento econômico baixo.

Muitas estratégias foram delineadas para o combate da inflação, incluindo o *congelamento* de preços e de salários e até mesmo soluções que buscavam o aumento da produção [6, 78, 86]. Entretanto, tais soluções mostraram-se ineficientes inúmeras vezes, divergindo a atenção da real causa da inflação e, inclusive, agravando o problema do descontrole de preços em alguns casos [86]. Houve, portanto, a necessidade de uma quebra no paradigma sobre o tratamento das causas do descontrole da inflação³, fazendo com que as usuais políticas monetárias fossem substituídas por outras. Para tentar obter eficácia no controle da inflação seria necessário entender o porquê do comportamento persistente de altas de preços do mercado, e não as variações temporárias do índice de inflação. Nesse contexto é que surge o conceito de núcleo de inflação.

O núcleo de inflação é uma ferramenta que possibilita o acompanhamento das variações dos preços desconsiderando movimentos transitórios e ruídos de curto prazo. A estratégia é dividir o sinal em dois componentes: um de longo prazo, que representa a tendência da inflação; e outro, de curto prazo, decorrente de choques inflacionários transitórios, como sazonalidades, quebras de safra, entre outros. Uma das vantagens dessa abordagem é a possibilidade de adotar políticas monetárias menos rígidas, uma vez que são concentrados esforços na contenção da inflação ao observar apenas a sua tendência; a desvantagem decorre, principalmente, da dificuldade de separar esses dois componentes de forma a obter um núcleo de inflação ideal.

No início da década de 90, países como o Canadá, o México e a Tailândia adotaram núcleos de inflação, juntamente com metas de inflação [110, 148, 159]. No Brasil, a adesão ao regime de metas de inflação ocorreu no ano de 1999, sendo essa meta baseada no IPCA. Além disso, alguns núcleos de inflação são utilizados como auxiliares no processo de análise da evolução da inflação pelo Banco Central, entre

³Acreditava-se, inicialmente, que a inflação ocorria apenas em situações de aumento de demanda.

eles os núcleos por exclusão, os por médias aparadas e os por dupla ponderação⁴ [148]. Além de mostrar a evolução do componente persistente da inflação, o estudo dos núcleos de inflação contribui para a construção de previsões futuras do índice de inflação. A importância de boas previsões de inflação dá-se pelo seu uso no delineamento de políticas monetárias, principalmente naquelas utilizadas para o controle inflacionário [131].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a Seção 2.1 é apresentado um breve histórico da origem dos estudos sobre inflação; e na Seção 2.2 são desenvolvidos os pilares teóricos para a construção de núcleos de inflação, assim como são apresentados os núcleos adotados pelo Banco Central do Brasil.

2.1 Índices de Inflação

O uso de índices é hoje uma prática aceita e tida como parte essencial da economia moderna, traduzindo diversos aspectos que compõe a dinâmica do mercado. Os índices descrevem vários aspectos de uma economia como, por exemplo, o nível de confiança na indústria e o nível de atividade industrial que podem influenciar os investimentos, assim como a evolução do Produto Interno Bruto (PIB). A expectativa do consumidor e as taxas de desemprego impactam diretamente na dinâmica econômica, assim como a taxa de câmbio e a variação de preços, fazendo com que haja uma propensão maior ou menor em consumir.

Quando índices são utilizados para refletir a inflação, é possível observar a manutenção (ou não) do poder de compra. De forma mais abrangente, esses índices podem servir de ferramenta para proporcionar um mecanismo para o delineamento de políticas de justiça social com objetivo de tentar garantir o poder de compra do dinheiro ao longo do tempo [126]. No Brasil, destaca-se um exemplo de

⁴Os núcleos de inflação oficiais, calculados pelo Banco Central, serão apresentados na Seção 2.2.

manutenção do poder de compra que é o de aumentos anuais do salário mínimo que são influenciado pela variação do Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) [32]. Desta forma, a política monetária não deve ser subutilizada apenas para o controle inflacionário, mas pode ser ferramenta de manutenção do valor de contratos e de salários, além de estimular a produção e a geração de emprego em uma economia.

Segundo O'Neill *et al.* [126], a inflação é um dos mais importantes indicadores do estado de uma economia; os autores defendem que uma taxa anual de inflação de 2% seria um sinal de uma economia saudável, enquanto taxas maiores representariam riscos ao bom funcionamento da economia. Um argumento frequentemente utilizado e que suporta a ideia da existência da inflação em economias saudáveis é que esta proporciona flexibilidade na alocação dos recursos produtivos, uma vez que tanto a matéria-prima, quanto a mão de obra, serão direcionados aos setores mais atrativos [113, 126].

As causas da inflação são diversas, normalmente sintetizadas nas seguintes: demanda, custos, inercial e estrutural [12, 86, 130, 131]. A inflação de demanda é aquela derivada da procura por produtos ou serviços que, caso seja maior que a quantidade disponível no mercado, resulta em um aumento nos preços. Por sua vez, a inflação de custos refere-se ao aumento dos custos de produção, que podem envolver a matéria-prima, a mão de obra, os tributos, a energia e até mesmo o custo do dinheiro, expresso através de taxas de juros; tais custos produzem efeito na quantidade ofertada de bens. A inflação estrutural é aquela gerada das ineficiências do mercado, em que há uma rigidez na estrutura de oferta e de demanda. Em mercados bem organizados, estas três causas da inflação não impactam no longo prazo, uma vez que podem ser corrigidas, inclusive, através de importações, não apenas de produtos, mas também de mão de obra [131]. Falta, ainda, falar da inflação inercial.

A partir da metade da década de 80, em virtude do descontrole inflacionário no Brasil, são desenvolvidos estudos que teorizam que a inflação naquele momento não era gerada pelos clássicos mecanismos de oferta e de demanda,

uma vez que não responderam aos mecanismos ortodoxos de controle inflacionário [130, 131]. A inflação inercial, nesse contexto, pode ser descrita como uma inflação “psicológica”, uma vez que o que gera os aumentos de preço são as expectativas de aumento futuros de preços, isto é, a perspectiva de aumento de preços acaba por gerar aumento de salários, aluguéis, contratos e, conseqüentemente, aumento de preços de produtos e de serviços. Percebe-se, então, um fator da manutenção da inflação até então não considerado: as expectativas.

Tendo um entendimento maior sobre a inflação, um passo natural para o controle inflacionário é a adoção de metas de inflação e, para tanto, uma das dificuldades é a determinação de como os índices de inflação evoluirão ao longo de um determinado período de tempo. Os primeiros movimentos nesse sentido foram observados a partir da década de 90, com a implantação de metas de inflação em diversos países como instrumento de busca de estabilidade de preços, visando proporcionar, ainda, maior transparência e credibilidade na condução da política monetária [39]. No Brasil, o referido sistema foi adotado em julho de 1999, baseado no sistema britânico, através do Decreto 3.088/99, em que o Banco Central ficou responsável pelo cumprimento das metas [6, 39, 115]. O IPCA, então, foi adotado como referência para o regime de metas de inflação. É importante ressaltar que as autoridades monetárias brasileiras não seguiram outros países na adoção de núcleos de inflação para a determinação de metas de inflação, o que traria a possibilidade de reduzir ou até mesmo excluir aumentos provocados por fatores sazonais ou temporários no delineamento de políticas monetárias.

Nesta seção serão discutidos alguns aspectos iniciais e históricos dos índices de inflação. O final da seção apresenta, em mais detalhes, o IPCA, dada a sua importância em relação ao delineamento das metas de inflação.

2.1.1 O Surgimento dos Índices de Inflação

Os índices de inflação são calculados com base na dinâmicas de variação de preços em uma gama de produtos que caracteriza o consumo de determinado grupo de indivíduos. A primeira cesta de produtos⁵ é atribuída a Bishop Fleetwood por volta de 1700 [126], com apenas quatro produtos (milho, carne, bebidas e roupas). A cesta de produtos de Fleetwood tinha por objetivo mostrar a perda do valor das bolsas de estudo na Universidade de Oxford. Apenas em 1738 que outros itens ganharam evidência na diferença do poder de compra ao longo do tempo na composição da cesta de produtos, como o caso do preço dos serviços⁶, através da razão dos preços médios [126]

$$I_D = \frac{\sum_i p_{t_2,i}}{\sum_i p_{t_1,i}}, \quad (2.1)$$

onde $p_{t_j,i}$ é o preço do produto i no tempo j . Quando $I_D = 1$, percebe-se que há a manutenção do poder de compra dos indivíduos quando considerada uma determinada cesta de produtos; se $0 < I_D < 1$, então há uma redução dos preços em relação ao período anterior, isto é, deflação, e se $I_D > 1$, um aumento de preços em geral, isto é, inflação. Entretanto, até então, os produtos possuíam a mesma participação no índice de inflação, ainda que seu consumo pelos indivíduos seguissem outra ponderação.

Em 1823, a ideia de inserir pesos no cálculo de índice de preços foi proposta por Joseph Lowe [126]. Na visão dele, alguns produtos deveriam ser contados múltiplas vezes em razão de sua importância e de seu consumo nos diversos domicílios, apresentando a seguinte ponderação

$$P_{lowe}^{0,t} = \frac{\sum_i p_{ti} q_{bi}}{\sum_i p_{0i} q_{bi}}. \quad (2.2)$$

⁵Uma cesta de produtos, ou de consumo, é um conjunto de produtos e de serviços representativos dentre todos aqueles disponíveis aos público.

⁶A cesta de produtos era composta por carnes (bode, frango, coelho e pombo), feno e o valor do dia de trabalho de homens e de mulheres.

Na ponderação acima, b representa um período de tempo que pode, inclusive, ser diferente para dois produtos da cesta; q , por sua vez, é o peso do produto i no período b , e que retrata a quantidade dos produtos normalmente consumidos segundo um padrão pré-estabelecido. Considera-se, ainda, “0” como o período base para o cálculo. É importante ressaltar uma primeira tentativa de agrupamento de produtos de consumo: produtos do solo (trigo, cevada, aveia e carnes), manufaturados (roupas lã, algodão, linho, seda, couro e ferramentas), artigos estrangeiros (açúcar, chá e outros) e artigos de menor importância [126]. Juntamente com a divisão por agrupamentos de produtos, era necessário uma média de preços e a quantidade consumida para o cálculo do índice de preços.

Por fim, com Etienne Laspeyeres, em 1864, surge o cálculo da cesta de produtos através da fórmula [126]

$$P_{Laspeyeres}^{0,t} = \frac{\sum_i p_{ti}q_{0i}}{\sum_i p_{0i}q_{0i}}, \quad (2.3)$$

um caso especial da fórmula de Lowe, Equação (2.2), em que as quantidades consumidas são determinadas no período base, isto é, no período “0”. Nesta fórmula, o índice de preços mede apenas a variação do preço do produto “i” em dois momentos diferentes, o inicial (“0”) e o atual (“t”) [97]. Este método de cálculo da variação do índice de preços é, atualmente, adotada em vários países, inclusive pelo Brasil, cujos pesos são calculados a partir da Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF).

2.1.2 Índice de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA

Uma série de índices de preços podem ser utilizados para acompanhar a inflação no Brasil. Dentre eles, destacam-se: o IPCA e o INPC, calculados pelo IBGE, e o IGP-M (Índice Geral de Preços ao Mercado), calculado pela FGV. O INPC é utilizado no cálculo de reajuste do salário mínimo, enquanto o IGP-M foi concebido para balizar a correção de contratos de aluguéis e algumas tarifas como a da energia elétrica. O IPCA, por sua vez, é o mais relevante dos índices de

inflação empregados no Brasil, pois além de ser utilizado como referência no sistema de metas da inflação, também é utilizado como indexador de títulos públicos [17]. Desta forma, o IPCA não apenas mostra a evolução do poder de compra ao longo do tempo, como também indexa parte da dívida pública. Para o acompanhamento da evolução da inflação, há uma série núcleos de inflação derivados do IPCA, os quais serão discutido na Seção 2.2.

O IPCA é calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) desde 1979 de forma a descrever a variação de preços para 90% das famílias na área urbana. A população-objetivo na construção deste índice, até o mês de dezembro de 2019, são famílias com rendimentos de 1 a 40 salários mínimos residentes nas regiões metropolitanas de Aracaju, Belém, Belo Horizonte, Brasília, Campo Grande, Curitiba, Fortaleza, Goiânia, Porto Alegre, Recife, Rio Branco, Rio de Janeiro, Salvador, São Luís, São Paulo e Vitória [33, 97]. Assim, o IPCA apresenta informações regionais que são, posteriormente, agrupadas para a construção do índice nacional.

Inicialmente, para compor o IPCA, são coletados preços mensalmente nas regiões metropolitanas elencadas. Esses preços servem, então, para a comparação da média dos preços de dois meses consecutivos, de onde é obtida a variação relativa das médias que é agregada através de uma média geométrica. Desse procedimento resultam 377 subitens, onde o subitem é o primeiro nível de agregação para o cálculo do IPCA [33, 100, 115]. É importante notar que nem todos os produtos que compõem as categorias do subitem são iguais para as diversas regiões metropolitanas, uma vez que para determinar o conjunto de produtos é considerada a representatividade da totalidade dos produtos consumidos pela população, tendo em conta inclusive a faixa de renda; ainda, a definição da cesta acompanha a dinâmica do mercado e é obtida a partir da Pesquisa de Especificação de Produtos e Serviços (PEPS) [97, 99].

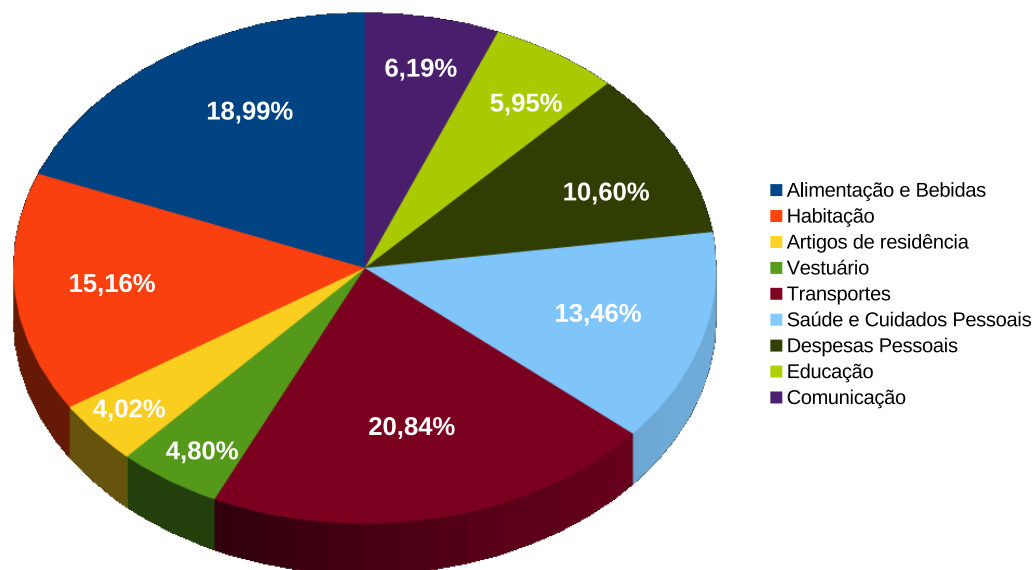


Figura 2.1: Pesos dos grupos que compõe o IPCA divulgada em dezembro de 2019.
Elaborado pela autora.

A partir dos subitens, é aplicada a fórmula de Laspeyres, Equação (2.3), obtendo os demais níveis de agregação: item, subgrupo e grupo. A explicação desses níveis de agregação é realizada através do seguinte exemplo: “laranja lima” é um subitem do item “frutas” e que compõe o subgrupo “alimentação no domicílio” juntamente com outros itens; quando reunidos “alimentação no domicílio” com “alimentação fora do domicílio”, obtém-se o grupo “alimentação e bebidas” [97, 98]. Assim, a agregação é realizada para os diversos subitens analisados na POF, em que o nível mais desagregado em que há um peso explícito da pesquisa é o subitem.

O grupo é o nível mais elevado de agregação e é constituído de nove categorias: alimentação e bebidas, habitação, artigos de residência, vestuário, transporte, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, educação e comunicação [100, 115]. Essa divisão em grupos e a ponderação no cálculo final do IPCA divulgada em dezembro de 2019 pode ser visualizado na Figura 2.1.

A ponderação da cesta de produtos é dada pela POF, conforme mostrada na Figura 2.1, em que os grupos de maior representatividade são, em ordem decrescente, transportes (20,84%), alimentação e bebidas (18,99%), habitação (15,16%), saúde e cuidados pessoais (13,46%) e despesas pessoais (10,60%). Essa ponderação tem por propósito demonstrar os hábitos de consumo de uma amostra representativa dos domicílios pesquisados para determinar a composição dos produtos dentro de uma determinada cesta. O objetivo é construir um índice que permita uma aproximação do Índice do Custo de Vida, definido como uma relação das despesas mínimas necessárias (em bens e serviços de consumo familiar) que permitam ao consumidor atingir um grau de satisfação sob determinada restrição orçamentária. Em outras palavras, o Índice de Custo de Vida visa medir o total dessas despesas que se referem à cesta mais barata dentre aquelas que refletem um mesmo padrão de vida [98].

Para obtenção do IPCA nacional, o índice regional é agrupado por média aritmética ponderada. Os pesos regionais, apresentados na Tabela 2.1, são calculados proporcionalmente à população da região.

A Tabela 2.1 mostra o peso de cada uma das regiões para o cálculo do IPCA divulgado em dezembro de 2019 e implementação a partir de janeiro de 2020. Um dos fatores relacionados à caracterização da população é a estimativa do rendimento monetário mensal familiar, que explica o porquê de regiões metropolitanas como a de São Paulo possuírem um peso tão grande na composição do índice nacional. A partir da tabela acima, ainda, é possível visualizar que as regiões metropolitanas que apresentam maior peso na composição do IPCA são, além de São Paulo, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, Porto Alegre, Curitiba e Salvador; as demais regiões metropolitanas não possuem peso superior a 5% individualmente.

Há ainda outra classificação dos subítemos do IPCA por tipo e por nível de agregação. Por tipo, destacam-se os preços livres e os administrados, em que o primeiro é determinado pela oferta e pela demanda, e o outro, determinado por

Tabela 2.1: Ponderação regional do IPCA divulgada em dezembro de 2019.

Município ou Região Metropolitana	Pesos Regionais (%)
Brasil	100,00
Aracaju	1,02
Belém	3,91
Belo Horizonte	9,74
Brasília	4,09
Campo Grande	1,58
Curitiba	8,05
Fortaleza	3,22
Goiânia	4,16
Porto Alegre	8,59
Recife	3,93
Rio Branco	0,51
Rio de Janeiro	9,41
Salvador	5,99
São Luís	1,62
São Paulo	32,32
Vitória	1,86

Fonte: IBGE [100].

contratos ou monitorados pelas diversas esferas governamentais [39]. Por agregação, citam-se os comercializáveis, não comercializáveis e monitorados [115, 147]. Os monitorados, assim como na classificação por tipo, fornecem a variação dos preços de produtos e de serviços que dependem de tarifas públicas e de outros preços que sofrem interferência direta governamental; os comercializáveis são aqueles que possuem variação decorrente do mercado externo devido importações ou exportações; e os não comercializáveis, aqueles que são produzidos no país e voltados para o mercado interno. Tal classificação tem sua importância para determinar, por exemplo, o impacto da taxa de câmbio na variação do IPCA.

Por fim, a escolha do IPCA como índice para o monitoramento do Sistema de Metas de Inflação do Brasil deve-se à tríade *credibilidade, reputação e transparência* [39]. Ressalta-se que havia a crença de que a adoção de um núcleo de inflação poderia trazer dificuldades no entendimento do cálculo e da definição das metas de inflação. Entretanto, os núcleos de inflação tendem a proporcionar uma série de benefícios na análise da dinâmica inflacionária e, por isso, serão discutidos

na próxima seção a definição e alguns núcleos de inflação atualmente utilizados no Brasil.

2.2 Núcleos de Inflação

Os índices de preço ao consumidor são medidas convencionais para mensurar a dinâmica inflacionária de uma economia, incorporando fatores como sazonalidade, choques temporários de oferta, fatores climáticos, taxas indiretas, ajustes assíncronos de preços ou até mesmo influências decorrentes da expectativa do mercado [19, 22, 46, 54, 140]. Esses fatores também são conhecidos como idiosincrasias do mercado, uma vez que estes fazem parte do comportamento natural do mercado e frequentemente não produzem efeitos duradouros nos índices de preço. Assim, os índices de preços, tal qual o IPCA, são chamados de índices cheios por incorporar todas essas particularidades, independente de serem persistentes ou não.

A grande dificuldade em visualizar a tendência e, também, realizar previsões da inflação se dá pelo excesso de ruídos nos índices de preço, uma vez que essas perturbações afetam o preço de produtos e de serviços de forma e recorrência desconhecida, mas são revertidas rapidamente sem a necessidade de políticas monetárias. Então, desponta a necessidade de entender o comportamento persistente da inflação, sendo necessária para isso a exclusão da parte não persistente ou transitente do índice, de forma obter como resultado apenas um núcleo mais informativo.

Para sanar esta dificuldade, surge a figura do *núcleo de inflação*, por vezes também denominado de inflação subjacente, cujo objetivo é capturar a tendência da inflação ao longo do tempo, verificando a persistência do aumento de preços.

Os primeiros bancos centrais a adotar núcleos de inflação foram o da Nova Zelândia, o do Canadá, o da Suécia, o da Finlândia, o do Reino Unido e o da Austrália [39, 69, 140]. Outros exemplos de países que utilizam núcleos de inflação

Tabela 2.2: Núcleos de inflação no mundo.

País	Medida de Inflação
Africa do Sul	IPC menos juros de hipoteca
Austrália	IPC menos juros de hipoteca, preços administrados pelo governo e preço de energia
Bélgica	IPC menos batatas, frutas e vegetais
Chile	O Banco Central monitora núcleos de inflação que exclui vegetais, frutas e combustíveis
Colômbia	IPC menos alimentos
Coréia	IPC menos produtos agrícolas (exceto cereais) e produtos a base de petróleo
França	IPC menos preço de energia, alimentos e preços regulados
Filipinas	O Banco Central monitora quatro núcleos de inflação
Finlândia	IPC menos custos de moradia, taxas indiretas e subsídios governamentais
Japão	IPC menos alimentos frescos
Nova Zelândia	IPC menos preços de <i>commodities</i> , preços controlados pelo governo, custo de crédito e de juros
Portugal	Média aparada em 10% do IPC
Tailândia	IPC menos alimentos crus e preço de energia

Notas: IPC: Índice de Preços ao Consumidor.
Baseado em Figueiredo [69] e da Silva Filho *et al.* [55].

podem ser observados na Tabela 2.2. Dentre os núcleos de inflação mais utilizados estão aqueles por exclusão, descritos na Subseção 2.2.1.

Da Tabela 2.2, com exceção das Filipinas e de Portugal, percebe-se que os países elencados utilizam núcleos de inflação que recorrem a exclusão de algum item que compõe o índice de preços ao consumidor. Os itens normalmente excluídos são alimentos, principalmente os *in natura*, energia e combustíveis, além de taxas de juros e preços controlados pelo governo.

Um primeiro conceito de núcleo de inflação foi utilizado por Robert J. Gordon, em 1975, através da agregação de preços e exclusão de alimentos e de energia. Posteriormente, a primeira definição formal de núcleo de inflação foi dada por Otto Eckstein (1981) em seu livro *Core Inflation*, definindo-o como uma tendência dos custos dos fatores produtivos que se originam nas expectativas de longo prazo, nos contratos e no sistema de taxas [8, 140, 155]. Por sua vez, Bryan e Cecchetti [34] afirmaram que um núcleo de inflação contém um componente de longo prazo, ou persistente, e utilizaram esta ideia numa tentativa de desenvolver um modelo que possibilitasse descrever o comportamento dos preços e do dinheiro em uma economia. Já Quah e Vahey [133] adicionaram ao equacionamento da sua proposta de núcleo de inflação o valor dos contratos financeiros e de salários, uma vez que acreditava-se que o fator de reajuste nestes está galgado nas expectativas

dos agentes perante a inflação futura. Na mesma linha de raciocínio, Roger [140] concebeu dois conceitos de núcleo de inflação: o primeiro envolve a persistência dos componentes da inflação e, o segundo, a presença de um componente generalizado da inflação – ambos associados com expectativas e pressões de demanda.

Como é possível perceber, a persistência do aumento de preços é utilizado como fator que compõe esses movimentos da inflação e é característica recorrente do conceito de núcleo de inflação, estando presente em diversos outros estudos [8, 22, 51, 54]. Apesar de não haver uma definição única, um núcleo da inflação é visto tanto como uma tendência, quanto como um bom indicador da inflação futura, e são descritos através de duas componentes: uma persistente e outra transitória [22, 46, 140, 149]. Matematicamente, a inflação pode ser decomposta como

$$\pi_t = \pi_t^* + \epsilon_t, \quad (2.4)$$

onde π_t é o índice de inflação e π_t^* , o núcleo de inflação, ϵ_t é a volatilidade presente no índice cheio, isto é, a transitoriedade do índice de inflação. Assim, é possível obter o núcleo de inflação pela subtração do índice de inflação π_t e a sua parte transiente, ϵ_t . É importante ressaltar que, por definição, assume-se que ϵ_t tem média zero e variância limitada; caso a média seja diferente de zero, ϵ_t estaria incorporando parte dos componentes persistentes da inflação e o núcleo de inflação geraria uma falsa tendência da inflação persistente [114, 149]. O problema do cálculo do núcleo de inflação, sendo assim, está justamente em como separar o componente permanente do transitório.

Segregar componentes permanentes e transitórios de índices de inflação tem sido desafiador e, até o momento, não há consenso na literatura sobre o que constitui um núcleo de inflação ideal. Normalmente são utilizados um conjunto de critérios para avaliá-los: redução de volatilidade do núcleo de inflação frente ao índice de inflação e capacidade preditiva da inflação [20, 22, 114]. Outros critérios que podem ser utilizados na avaliação de núcleos de inflação são a robusteza e a

ausência de viés⁷, retratado por

$$E(\pi_t^*) = E(\pi_t), \quad (2.5)$$

onde $E(\cdot)$ é a esperança e demonstra a tendência do núcleo de inflação, no longo prazo, deve ser a mesma do índice de inflação. Ressalta-se outros critérios importantes, como a manutenção de registros confiáveis ao longo do tempo, o fácil entendimento pelo público em geral – o que influencia também na credibilidade e na reprodução dos índices; não menos importante, e idealmente, o núcleo de inflação deveria ser construído com base em alguma teoria monetária [114, 140, 164]. Percebe-se que muitos desses critérios são vagos e carecem de maior detalhamento. Assim, a inexistência de um conjunto de critérios bem definidos ou de um conjunto de métricas para avaliação dos núcleos de inflação é acrescida nessa série de dificuldades na formulação, na análise e na comparação de núcleos de inflação [50].

Alguns tipos de núcleo de inflação são mais comumente utilizados: os que excluem determinados tipos de itens segundo a volatilidade e os que utilizam ferramentas estatísticas e matemáticas [8, 54, 108, 164]. Por ser mais fácil de calcular, núcleos por exclusão tendem a ser vistos com maior credibilidade e transparência; exemplos de países que utilizam tais núcleos são a Nova Zelândia e os Estados Unidos, assim como o Brasil [16, 39, 69]. Na categoria que utiliza ferramentas estatísticas e matemáticas, é realizado o cálculo da volatilidade dos itens que compõem o índice de preços e, ao invés de simplesmente excluir determinados componentes, é feita uma reponderação dos itens que apresentam maior volatilidade para que tenham uma influência menor na composição do núcleo de inflação [21]. Esse tipo de núcleo de inflação por reponderação é considerado mais apropriado por alguns autores em comparação com os núcleos por exclusão devido a possibilidade de considerar a influência, por exemplo, de alimentos e energia, além de possibilitar a mudança de

⁷A robustez e a ausência de viés referem-se à capacidade de detectar tendências ou mudanças de comportamento de forma a capturar o real comportamento da inflação pelo núcleo de inflação utilizado.

composição do núcleo de inflação ao longo do tempo [65, 164]. Vale a pena destacar que, em geral, esses núcleos convencionais não apresentam bom desempenho em alguns requisitos para que sejam considerados um bom núcleo de inflação, não atendendo critérios como a ausência de viés, a dinâmica de ajustamento e a capacidade de previsão da inflação no longo prazo [54].

Com a implantação do regime de metas para inflação em 1999 no Brasil, o Banco Central passou a calcular alguns núcleos baseados no IPCA, entre eles os núcleos de exclusão (IPCA-EX), o de médias aparadas, com (IPCA-MS) ou sem suavização (IPCA-MA), e o de dupla ponderação (IPCA-DP); estes foram concebidos para serem ferramentas a mais no suporte das decisões da política monetária [55]. Essas medidas de núcleo de inflação são divulgadas periodicamente nos documentos oficiais do Copom; entretanto, ainda que sejam considerados nos estudos sobre a evolução da inflação, é o IPCA que é utilizado como índice oficial para a meta de inflação. Carrara e Correa [39] afirmam que se um núcleo de inflação fosse empregado no Brasil como parâmetro para a definição das metas de inflação, a política monetária seria menos suscetível a choques externos e, ao mesmo tempo, não precisaria ser tão rígida. Dessa forma, a busca por outros núcleos de inflação que possam agregar mais informação e, ao mesmo tempo, reduzir a volatilidade tem propulsionado novos estudos nesta área.

A seguir serão apresentados os núcleos de inflação calculados pelo Banco Central, assim como uma breve discussão sobre as respectivas metodologias de cálculo. Estes núcleos serão utilizados mais adiante na comparação com os propostos neste trabalho.

2.2.1 Núcleos por Exclusão

Os núcleos por exclusão são os mais utilizado pelos bancos centrais, visto que são de fácil construção pelas entidades oficiais e de fácil entendimento por

grande parte do público, o que garante a reprodutibilidade e a confiabilidade. Tais tipos de núcleos de inflação originaram-se na década de 70 com o objetivo de criar medidas menos voláteis, excluindo itens com preços tidos como mais instáveis, como os grupos de alimentos e de energia [54, 55, 69, 144]. A ideia em que se baseia a escolha de exclusão é que alguns itens são constantemente suscetíveis à choques temporários, como variações climáticas ou até mesmo intempéries, fazendo com que o índice de inflação incorpore elementos transitórios que não representam a situação econômica.

O primeiro núcleo por exclusão adotado no Brasil foi o IPCA-EX0, em março de 2001, sendo descontinuado em dezembro de 2009 [55] e excluía os preços da alimentação no domicílio e os preços administrados. O núcleo de exclusão IPCA-EX1, por sua vez, adotado em 2009, considerava aspectos econômicos e estatísticos para definir os itens a serem excluídos – excluía os itens de maior volatilidade ao longo da amostra analisada, isto é, calculava a variância dos itens que compunham o índice de preços no período de janeiro de 1995 a julho de 2007 para a decisão de quais itens a seriam descartados [20, 55]. Dessa forma, o IPCA-EX1 excluía 12 itens: dez do grupo de Alimentação no Domicílio e dois de preços administrados. Note que, enquanto o IPCA-EX0 excluía cerca de 46% do IPCA, o IPCA-EX1 em média 15% [16, 149]. Por fim, o IPCA-EX2 excluía os mesmos produtos do IPCA-EX1, exceto para o item “fumo” que era substituído por “combustível doméstico” [55]. A partir de 2006, houve uma atualização na metodologia de cálculo e na denominação dos índices.

No Brasil são calculados, atualmente, quatro tipos de núcleos de exclusão, mostrados na Figura 2.2, para o período de julho de 2006 a dezembro de 2019. Primeiramente, houve uma atualização nos nomes dos núcleos de inflação por exclusão, onde o antigo IPCA-EX1 passou a ser denominado IPCA-EX0, e o IPCA-EX2 passou a ser o IPCA-EX1. Em junho de 2018, o Banco Central propôs dois novos núcleos: o IPCA-EX2 e o IPCA-EX3 [20, 139]. Os dois novos núcleos propos-

tos expandem o conceito de núcleo de inflação para incluir na análise serviços e bens industriais, possibilitando acompanhar itens que são mais sensíveis ao aquecimento da economia [21].

Os itens excluídos no IPCA-EX2 e no IPCA-EX3 são classificados em três categorias: bens industriais, serviços e alimentos. Dentre os bens industriais, foi decidido pela exclusão do etanol, do cigarro, de automóveis novos e usados, e de eletrônicos; estas exclusões visam reduzir a volatilidade, no caso do etanol, devido à influência da oferta de insumos e de combustíveis substitutos e, nos demais, relativo às questões tributárias – por exemplo, o cigarro tem 80% do preço final composto por impostos [20]. Em relação à categoria serviços, quatro grupos de preços podem dificultar a identificação da tendência inflacionária, representando 36,4% da inflação de serviços do IPCA: turismo (influenciados, principalmente, pelos eventos esportivos que ocorreram no Brasil nos últimos anos), serviços domésticos, cursos e comunicação [18]. Por fim, em relação à alimentação no domicílio, foram mantidos apenas os itens menos voláteis: panificados, bebidas e infusões, carnes e peixes industrializados e enlatados e conservas – em suma, exclui os produtos *in natura* [18, 139].

Para o cálculo do IPCA-EX2, são excluídas as três categorias explicitadas acima – abrangendo 57,6% dos preços livres e 42,9% do IPCA; já o IPCA-EX3 mantém os alimentos no domicílio, abrangendo 51,3% dos preços livres e 38,2% do IPCA [20]. Percebe-se que não há grande diferença entre estes índices, uma vez que os alimentos no domicílio não apresentam grande diferença na ponderação.

A Figura 2.2 apresenta o IPCA frente aos núcleos de inflação por exclusão no período de julho de 2006 a dezembro de 2019. Percebe-se que o IPCA-EX0 e o IPCA-EX1 são núcleos que apresentam valores superiores ao observado pelo IPCA, como em fevereiro de 2011; por sua vez, o comportamento do IPCA-EX2 e IPCA-EX3 são mais suavizados em relação ao IPCA, ainda que apresentem valores que distam do IPCA, como em abril de 2008.

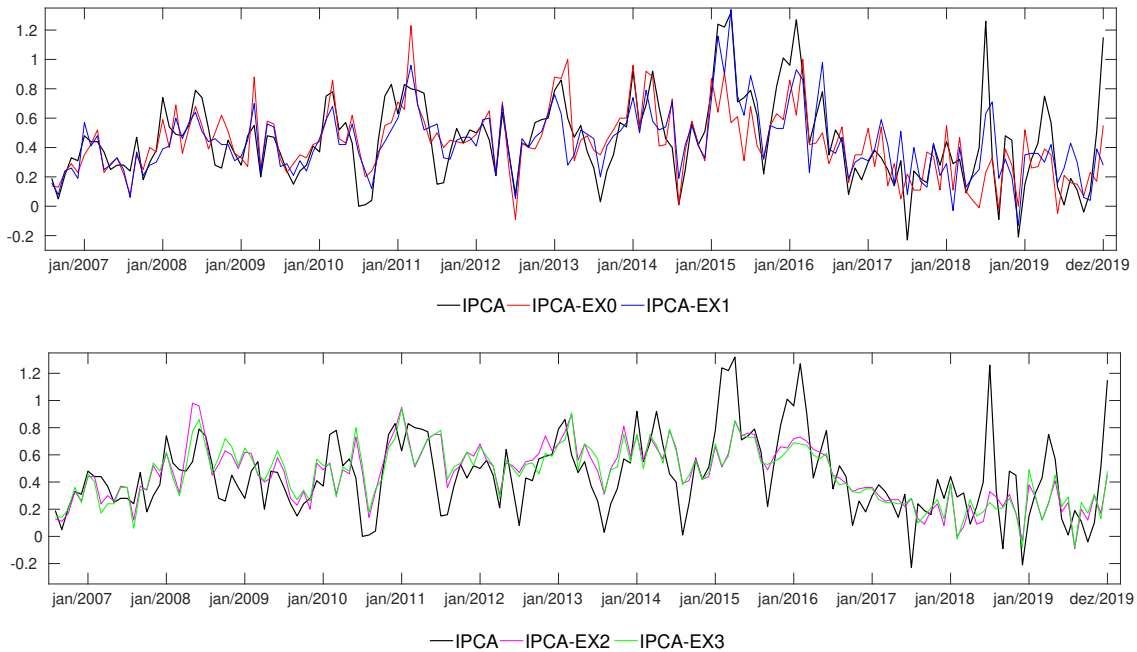


Figura 2.2: IPCA e núcleos de inflação por exclusão.

Ressalta-se, conforme já explicitado anteriormente, que estes tipos de núcleos de inflação são alvo de críticas em virtude da perda de informações decorrente da exclusão de itens que podem conter informações relevantes sobre a dinâmica dos preços em uma economia.

2.2.2 Núcleos por Médias Aparadas

O núcleo por médias aparadas, assim como os núcleos de exclusão, excluem itens que compõem o IPCA. A diferença principal é que a exclusão é baseada nas variações que estejam em um dos dois extremos da distribuição da variação de preços, supondo que essa variação se comporta conforme uma distribuição normal [21]. Os núcleos por médias aparadas, portanto, removem do índice de inflação todas as grandes variações de preço a cada mês, limitando a influência de itens àqueles mais próximos da média da variação de preços. Em particular, esta medida exclui as maiores e as menores variações de preço em relação à média mensal [21, 34, 65].

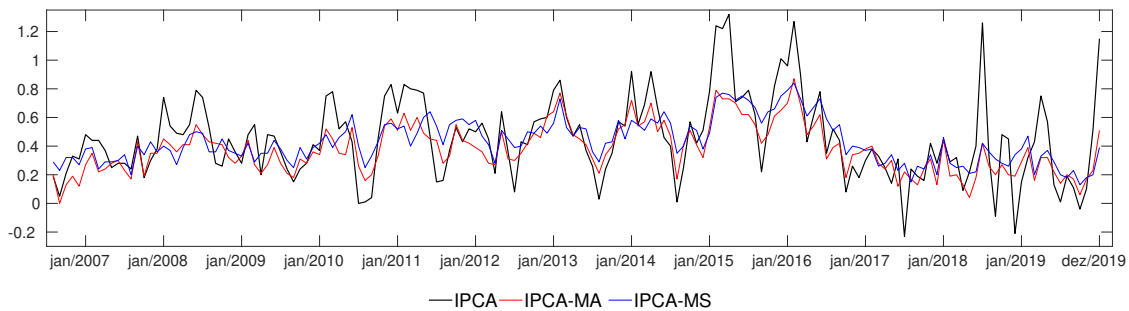


Figura 2.3: IPCA e núcleos de inflação por médias aparadas.

A ideia por trás dos núcleos por médias aparadas é que o comportamento da dinâmica de preços pode ser aproximado por um histograma que descreve, em termos estatísticos, uma distribuição normal. Desta forma, seria possível estimar mais precisamente as mudanças de preço através da manutenção de produtos e de serviços cujas variações de preço estejam mais próximas da média, isto é, aqueles produtos e serviços que possuem mudanças de preço mais persistentes, uma vez que o preço dos produtos tende ser revisto de forma gradual pelos agentes econômicos [45].

No Brasil, a primeira medida de núcleo por médias aparadas a aparecer nos Relatórios de Inflação do Banco Central, em setembro de 2000, foi o núcleo por médias aparadas – IPCA-MS. Hoje, o Banco Central calcula dois índices baseados na metodologia de médias aparadas: com – IPCA-MS – ou sem suavização – IPCA-MA. Este último começou a ser calculado a partir de janeiro de 2001; a Figura 2.3 apresenta a evolução do IPCA-MA de julho de 2006 a dezembro de 2019.

O método utilizado pelo Banco Central consiste em eliminar a cada mês 20% da variação de preços dos itens do IPCA de ambas as caudas, permanecendo apenas os valores mais próximos à média [14, 21, 55, 69]. Os 60% restantes são utilizados para o cálculo, tanto do IPCA-MS e do IPCA-MA. A diferença entre os dois núcleos de inflação dá-se pela suavização: itens que sofrem reajustes infrequentes, e por isso maiores, são suavizados no IPCA-MS de forma a ter o reajuste dividido nos doze meses subsequentes.

Não ter de escolher quais preços devem ou não ser incorporados ao núcleo é uma vantagem do método, baseando-se unicamente em uma análise estatística para a escolha de preços. Entretanto, como alguns preços que compõe o índice possuem grandes variações poucas vezes ao ano, esta metodologia faz com que estes preços sejam sistematicamente excluídos do cálculo do núcleo de inflação; conseqüentemente, há uma subestimação da inflação [65, 69].

2.2.3 Núcleo por Dupla Ponderação

Os núcleos por dupla ponderação, assim como os núcleos por médias aparadas, são baseados na volatilidade; contudo, efetuam um novo cálculo de pesos para verificar a importância de cada item dentro do núcleo de inflação. Normalmente, os produtos e serviços mais voláteis são penalizados e recebem um peso menor comparado ao peso da cesta original, e os com menor volatilidade acabam se tornando mais relevantes, recebendo um peso maior que o original [21, 55].

No caso do IPCA-DP, os pesos originais são reponderados conforme o grau de volatilidade relativa (em relação à volatilidade do IPCA). Para construir este núcleo de inflação, calcula-se o desvio padrão relativo de cada um dos itens do IPCA usando uma janela móvel de $j = 48$ meses [15],

$$\sigma_{i,t} = \frac{1}{j-1} \sqrt{\sum_{k=1}^j (\pi_{i,t-k}^{rel} - \bar{\pi}_{i,t-k}^{rel})^2}, \quad (2.6)$$

onde

$$\pi_{i,t-k}^{rel} = \pi_{i,t-k} - \pi_{t-k} \quad (2.7)$$

e

$$\bar{\pi}_{i,t-k}^{rel} = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \pi_{i,t-k}^{rel}, \quad (2.8)$$

com $\pi_{i,t}$ e π_t representando a variação do item i e o índice de preço cheio no mês t . Os novos pesos $\tilde{w}_{i,t}$ são, então, calculados a partir dos antigos $w_{i,t}$ da Figura 2.1,

$$\tilde{w}_{i,t} = \frac{1/\sigma_{i,t}}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_{i,t}} w_{i,t}, \quad (2.9)$$

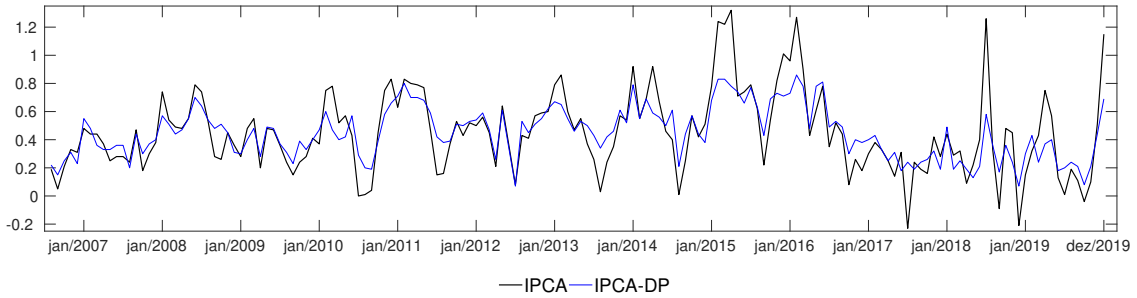


Figura 2.4: IPCA e núcleo de inflação por dupla ponderação.

resultando no IPCA-DP,

$$\pi_t^{DP} = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_{i,t} \pi_{i,t}. \quad (2.10)$$

Desta forma, como pode ser visto, não há exclusão de itens, apenas alteração do peso de cada um dos itens que compõem este núcleo de inflação.

Na Figura 2.4 é possível visualizar o IPCA-DP em comparação com o IPCA, no período entre julho de 2006 a dezembro de 2019. Mesmo sendo um índice que se mostra mais fiel à inflação, essa trajetória mais similar a do IPCA conduz à conclusão que não há acréscimo de informação sobre a dinâmica de preços [21, 65]. De fato, o comportamento do IPCA-DP não mostra uma tendência para o IPCA através de algum tipo de suavização, tendendo a não reduzir significativamente a volatilidade do índice.

No Capítulo 5 serão apresentados análises adicionais sobre os núcleos de inflação oficiais calculados pelo Banco Central, comparando-os com os núcleos de inflação baseados em *wavelets* propostos neste trabalho. Para a construção desses últimos núcleos, no próximo capítulo, apresenta-se a teoria de *wavelets*.

3 WAVELETS EM SÉRIES TEMPORAIS

É muito difícil conceber o mundo moderno sem o processamento de sinais, presente desde o ato rotineiro de ouvir músicas até mesmo no funcionamento de satélites [120, 151]. As técnicas de processamento e de análise de sinais formam um arcabouço que permite, por exemplo, auxiliar na redução de ruídos, na compactação de dados ou até mesmo na análise de características que permitam a classificação ou a previsão de eventos futuros. Assim, o principal objetivo quando sinais são objetos de estudo é transformá-los em dados analisáveis que possam ser manipulados, gravados ou transmitidos de forma mais conveniente [162].

No contexto da análise de sinais, existem muitas ferramentas na literatura, entre elas a análise de Fourier e as *wavelets*. As *wavelets*, em muitos aspectos, são uma síntese de velhas ideias com resultados matemáticos elegantes e algoritmos computacionais eficientes [47, 129]. Suas aplicações estendem-se em vários campos do saber, desde aplicações médicas, na engenharia e até mesmo em diversas áreas de estudo na economia [3, 9, 138, 150]. Em séries temporais, em especial no estudo de fenômenos econômicos, destaca-se a redução de ruídos representados por componentes de frequência alta com objetivo de obter a tendência do sinal [22, 49, 108].

Neste trabalho, devido a natureza das séries temporais analisadas, utiliza-se a transformada *wavelet* discreta. Para dados econômicos, a transformada *wavelet* discreta traz a possibilidade de converter uma série temporal em um conjunto de coeficientes localizado no tempo e na frequência [49, 112]. Essa flexibilidade no tratamento das séries temporais permite que sejam construídas aproximações (ou reconstruções) do sinal original mantendo apenas os componentes ou as características que auxiliam na modelagem do problema. No contexto de núcleos de inflação, o uso das *wavelets* permite a reconstrução do IPCA de forma a manter os componentes que caracterizam a tendência da inflação, evitando ao mesmo tempo a simples ex-

clusão de certos grupos de produtos. Ressalta-se que para a construção de núcleos de inflação baseados em *wavelets*, não há a necessidade de realizar suposições adicionais em relação à tendência ou aos ruídos inerentes [65].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a origem e a motivação da análise *wavelet* (Seção 3.1), a transformada *wavelet* (Seção 3.2) e, em especial, a análise multirresolução (Subseção 3.2.4). Ainda, apresenta-se o algoritmo para a construção dos núcleos de inflação, estes últimos utilizados posteriormente para a previsão da inflação futura.

3.1 Origens e Motivações da Análise Wavelet

Uma das técnicas de análise de sinais mais utilizadas na literatura foi introduzida por Jean Baptist Joseph Fourier, em 1807, denominada em sua homenagem como Análise de Fourier ou Transformada de Fourier. A ideia é decompor um sinal em uma combinação linear de funções base de forma a transformar um sinal definido no domínio do tempo em um no domínio da frequência, possibilitando a análise de espectros de frequência ao longo de um intervalo de tempo.

A transformada de Fourier consegue representar adequadamente as frequências de um sinal $f(t)$ desde que este seja composto pelos mesmos componentes de frequência ao longo do tempo. Quando há variações abruptas no sinal, como picos ou descontinuidades, a tendência é que a transformada de Fourier espalhe esses componentes de frequência por todo o sinal [4, 11, 44]. Assim, quando é usada a transformada de Fourier, não é possível localizar as descontinuidades do sinal; esta limitação seria superada caso fosse possível oferecer, além da localização na frequência, a localização no tempo.

Uma tentativa para inserir a localização no tempo na transformada de Fourier foi desenvolvida por Denis Gabor, em 1946, que introduziu a ideia de

transformada de Fourier de curto prazo (do inglês, *Short-Time Fourier Transform* ou STFT). A ideia se baseia em uma estrutura de segmentação do sinal através de janelas de tamanho constante que se deslocam, fato que torna possível a localização temporal. Uma das vantagens é que, para pequenas janelas de tempo, assume-se que os sinais não estacionários são aproximadamente estacionários¹ [4, 76]. O problema desta abordagem é determinar adequadamente o tamanho da janela, uma vez que nem todos os fenômenos têm a mesma duração ao longo de um sinal; além disso, ao determinar um tamanho de janela inadequado, o gasto computacional pode ser demasiadamente grande [40, 103].

As *wavelets* foram utilizadas durante o Século XX com outras denominações e com pouca formalização. Alfred Haar, em 1909, construiu o prelúdio da teoria de *wavelets*, sendo a *wavelet* nomeada em sua homenagem o exemplo mais simples [47, 123, 134]. Apenas na década de 80, com Grossmann e Morlet [81], houve um passo na direção ao desenvolvimento de uma teoria que supriria as limitações da transformada de Fourier: as *wavelets*. A ideia principal das *wavelets* está situada na mudança do tamanho das janelas de tempo para as diversas componentes de frequência de um determinado sinal [160]. Um fato interessante sobre a teoria das *wavelets* é a sua denominação que decorre do formato das funções que compõem sua base, caracterizadas por “pequenas ondas” que crescem e decrescem em um intervalo limitado [44, 129].

Influenciados pelo trabalho de Grossmann e Morlet [81], outros pesquisadores investiram no desenvolvimento da teoria das transformadas *wavelets*, dos quais Stephane Mallat se destaca pela construção da *análise multirresolução*; tais resultados possibilitaram, ainda, a criação de outras famílias de *wavelets*, como as daubechies, symlets, coiflets, entre outras [36, 57, 77, 112]. Portanto, da análise mul-

¹Sinais estacionários apresentam os mesmos componentes de frequência durante a sua duração, isto é, são periódicos. Por sua vez, os não estacionários não apresentam os mesmos componentes de frequência, podendo apresentar componentes transientes (decorrentes de um único evento) ou contínuos (sinais aleatórios que não seguem uma distribuição determinada) [119, 146].

tirresolução, foi possível a construção de uma teoria geral de *wavelets* independente das funções *wavelets*, ampliando a gama de aplicações [57, 60].

3.2 A Transformada Wavelet

A transformada *wavelet* contínua é definida em $L^2(\mathbb{R})$, o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis, enquanto a transformada *wavelet* discreta é definida em $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, o espaço de funções definidas de $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ em \mathbb{C} [160]. Enquanto a primeira trata de sinais contínuos, a segunda lida com séries definidas essencialmente em conjuntos discretos [129]. Ainda que muitos sinais possam ser tratados com uma abordagem contínua, normalmente dá-se preferência pelas discretas em virtude da existência de algoritmos mais eficientes para o tratamento de dados discretos, como o algoritmo pirâmide [3, 112].

3.2.1 Propriedades Matemáticas das Wavelet

A transformada *wavelet* é um método de análise de sinais em que um sinal original é convertido em outro suavizado, sem, entretanto, perder informações relevantes a este [3, 162]. Para essa transformada, é necessário antes definir uma função *wavelet* $\psi(t)$ que, como o nome sugere, é uma função com formato de “onda” com certas propriedades. A construção matemática pode ser consultada em obras seminais como a de Mallat [112] e a de Daubechies *et al.* [57].

A ideia é escrever um sinal $f(t)$ como uma combinação linear de funções *wavelets*. Assim, chama-se de função *wavelet* a função que satisfaz [3, 40, 129]

1. É quadrado integrável ou, de forma equivalente, tem energia finita:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty, \quad (3.1)$$

onde E é a energia da função $\psi(t)$, representada pela integral da magnitude ao quadrado.

2. Se $\widehat{\psi}(\omega)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$, então a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (3.2)$$

A equação acima é conhecida como condição de admissibilidade e C_ψ , por sua vez, é chamada de constante de admissibilidade. Essa condição implica que as *wavelets* $\psi(t)$ não possuem componente de frequência nula, isto é, $\widehat{\psi}(0) = 0$, que é equivalente a dizer que as *wavelets* $\psi(t)$ tem média zero.

A condição de admissibilidade, Equação (3.2), traz consequências importantes para a análise de sinais, entre elas a da existência da transformada inversa *wavelet*. Em outras palavras, quando a condição de admissibilidade é satisfeita, é possível reconstruir um sinal sem que haja perda de informações [3, 40, 136].

É importante destacar, ainda, que as *wavelets* tem por característica o rápido decaimento para zero, o que garante sua forma assemelhada a uma pequena onda. De fato, para as funções *wavelets*, a propriedade 1 pode ser escrita como [129]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^2 dt = 1, \quad (3.3)$$

por meio de uma normalização. Se a Equação (3.3) é satisfeita, então, para qualquer ϵ , $0 < \epsilon < 1$, existe um intervalo $[-T, T]$ em que

$$\int_{-T}^T \psi^2(t) dt < 1 - \epsilon. \quad (3.4)$$

Quando ϵ tende a zero, o valor da integral de $\psi(\cdot)$ fora do intervalo $[-T, T]$ também tende a zero. Para garantir o formato de onda, considera-se ainda que a integral de $\psi(t)$ é zero, isto é, [129]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (3.5)$$

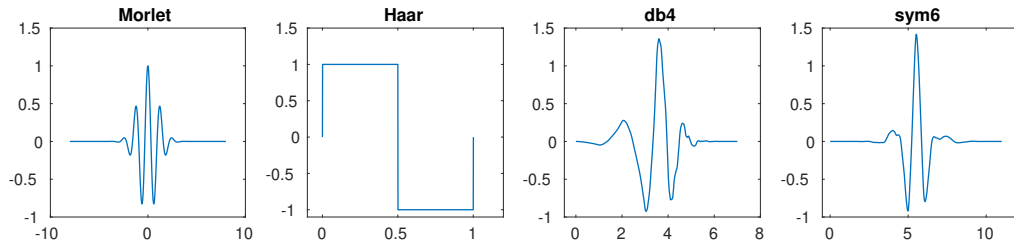


Figura 3.1: Formato de onda das *wavelets*.

ou, em outras palavras, a média da *wavelet* $\psi(t)$ é nula. Enquanto a Equação (3.1) afirma que $\psi(t)$ possui valores que diferem do zero, a Equação (3.5) afirma que um valor diferente de zero deve ser compensado por algum outro diferente de zero e de sinal oposto [129]. Este fato pode ser observado na Figura 3.1.

Na Figura 3.1 são apresentados alguns exemplos de *wavelets*, entre estas, da esquerda para a direita, a Morlet, a Haar, a db4 e a sym6. Assim como ilustrado na figura acima, e também pelas Equações (3.3) e (3.5), pode ser averiguado que $\psi(t)$ assemelha-se a uma pequena onda ou uma *wavelet* [129]. Para poder decompor o sinal, necessita-se de uma base, a qual será discutida a seguir; tal base é obtida através de translações e dilatações da função *wavelet* $\psi(t)$.

3.2.2 Transformada Wavelet Contínua

Uma das características que desperta o interesse pelas *wavelets* é a grande flexibilidade de representar um dado sinal, decorrente essencialmente de duas transformações: dilatação e translação. Dada uma função *wavelet* $\psi(t)$, denominada *wavelet* mãe, é possível construir bases *wavelets* a partir da composição de $\psi(t)$ com a transformação $(t - a)/b$, isto é, $\psi((t - b)/a)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Assim, a transformada *wavelet* relaciona sinais no espaço do tempo t em um sinal no espaço da escala (a) e da translação (b), onde o parâmetro de escala, a , é responsável por comprimir ou estender a função *wavelet*, isto é, a dilatação da função; e b , por sua

vez, representa o parâmetro de localização ou de translação ao longo do eixo do tempo [3, 40].

A transformada contínua *wavelet* de um sinal contínuo $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ em relação a uma função *wavelet* $\psi(t)$ é definida pela transformada integral [3, 35]

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)dt, \quad (3.6)$$

com $\psi_{a,b}(t)$ representando a função *wavelet* normalizada, isto é,

$$\psi_{a,b}(t) = w(a)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (3.7)$$

onde $w(a)$ é uma função peso. Normalmente $w(a)$ assume $1/\sqrt{|a|}$ como valor por razões de conservação de energia (preserva a norma $L_2(\mathbb{R})$) ou $w(a) = 1/a$ quando for mais apropriado para o modelo [3, 128, 136].

Para uma série de aplicações, é importante que essa transformada possua uma inversa, principalmente quando deseja-se reconstruir o sinal dando ênfase à alguma característica ou até mesmo para obter uma versão suavizada deste sinal. Desta forma, a reconstrução do sinal $f(t)$ se dá a partir da inversa da transformada *wavelet* contínua $T(a,b)$ que é definida por [3]

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T(a,b)\psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, \quad (3.8)$$

onde C_ψ é o coeficiente de admissibilidade definido na Equação (3.2).

A transformada *wavelet* contínua, embora importante para o desenvolvimento desta área de estudos, tem limitações que incluem a natureza discreta dos sinais normalmente coletados. Além disso, vantagens computacionais advêm do uso da forma discreta da transformada *wavelet* e sua inversa. Desta forma, se faz necessária uma abordagem discreta, conforme apresentado na próxima subseção.

3.2.3 Transformada Wavelet Discreta

A transformada *wavelet* discreta foi formulada na década de 80 por Daubechies [57], Mallat [112] e outros, ampliando as aplicações de *wavelets* para diversas áreas, sendo de grande valia no estudo das séries temporais. Assim como na transformada *wavelet* contínua, escreve-se a função *wavelet* mãe, $\psi(t)$, por meio da composição $(t - b)/a$ para obter $\psi_{a,b}(t)$, sendo necessária a discretização de a e b da Equação (3.7).

Uma forma natural de discretizar a Equação (3.7) é atribuindo valores discretos para a e b . Define-se, então, $a = a_0^m$, $m \in \mathbb{Z}$ com $a_0 \neq 1$, e $b = nb_0a_0^m$, com $n \in \mathbb{Z}$, em que a_0 é uma dilatação específica e fixada nas condições já explicitadas e b_0 , um parâmetro de localização. Ressalta-se, ainda, que m e n são parâmetros de controle que estabelecem o tamanho da translação, $\Delta b = b_0a_0^m$, e é diretamente proporcional à escala da *wavelet*, a_0^m . Desta discretização, resulta a *wavelet* discreta [3, 40, 128]

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{a_0^{m/2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0), \quad (3.9)$$

onde m e n referem-se à dilatação e à translação do sinal na decomposição, respectivamente. Note que, a partir desta equação, é adotado $w(a) = 1/\sqrt{a}$. Uma escolha frequentemente utilizada para os parâmetros discretos a_0 e b_0 , da Equação (3.9), são 2 e 1, respectivamente. Tal discretização em potências de dois, para a dilatação (2^{-m}) e para translação ($n2^m$), é conhecida como *diádica*, sendo atualmente a discretização mais simples e eficiente para grande parte dos problemas discretos [3, 40, 60, 112].

A partir da discretização $(a_0, b_0) = (2, 1)$, a Equação (3.9) pode ser reescrita como

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{2^{m/2}} \psi(2^{-m}t - n). \quad (3.10)$$

Assim, usando a Equação (3.10), a transformada *wavelet* discreta pode ser escrita como

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{m,n}(t)dt. \quad (3.11)$$

Os valores $T_{m,n}$ são, no caso discreto, denominados *coeficientes da wavelet* ou *coeficientes de detalhes* [3, 101, 129]. Utilizando as bases *wavelets* da Equação (3.10), é possível reconstruir o sinal original em termos dos coeficientes de detalhes, $T_{m,n}$. A partir da transformada *wavelet* discreta inversa, obtém-se

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n}\psi_{m,n}(t). \quad (3.12)$$

Geralmente, a função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser completamente determinada pelos coeficientes de detalhe se as *wavelets* $\psi_{m,n}(t)$ formam uma base para o $L^2(\mathbb{R})$ [60]. De fato, verifica-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t)\psi_{m',n'}(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{se } m = m' \text{ e } n = n', \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.13)$$

permitindo que o sinal $f(t)$ seja reconstruído a partir de $\psi_{m,n}(t)$ [3, 60]. Esta propriedade garante uma fácil implementação e maior eficiência computacional.

Associadas às *wavelets* diádicas $\psi_{m,n}(t)$, existem as funções escalas $\phi(t)$ e suas respectivas equações de dilatação $\phi_{m,n}(t)$ [3],

$$\phi_{m,n}(t) = \frac{1}{2^{m/2}}\phi(2^{-m}t - n). \quad (3.14)$$

A função escala $\phi(t)$ é associada com a suavidade do sinal e tem uma forma similar à função *wavelet*, da Equação (3.10) $\psi_{m,n}(t)$, apresentando como propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,0}(t)dt = 1, \quad (3.15)$$

onde $\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$. Ainda, $\phi(t)$ é chamada de *wavelet* pai, em analogia à denominação *wavelet* mãe que $\psi(t)$ recebe. Assim como da construção dos coeficientes de detalhe, na Equação (3.11), constrói-se os *coeficientes de aproximação* dados por

$$S_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{m,n}(t)dt. \quad (3.16)$$

Note que, das Equações (3.14)–(3.16), os coeficientes de aproximação são médias ponderadas de um sinal contínuo fatorado por $2^{m/2}$ [3].

Para representar o sinal $f(t)$, então, é utilizado uma combinação de expansões em série de ambos os coeficientes de aproximação e de detalhe,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m_0,n} \phi_{m_0,n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (3.17)$$

em uma escala m_0 arbitrária. Tendo esta noção de como é realizada a decomposição do sinal através da transformada *wavelet* discreta e, também, a reconstrução a partir da respectiva inversa, pode-se finalmente falar sobre análise multirresolução.

3.2.4 Análise Multirresolução

A ideia que norteia a análise multirresolução é dividir um sinal em intervalos de frequências; por vezes, esses intervalos são denominados de bandas de frequência [40]. Um sinal é composto por esses diferentes componentes de frequências, sendo possível obter aproximações mais ou menos ajustadas ao sinal original: quanto mais componentes são incorporadas à aproximação, melhor é a resolução. Assim, a resolução de um sinal pode ser considerada de maneira qualitativa ao relacionar às frequências contidas em um sinal e podendo inserir mais ou menos detalhes em uma reconstrução $f(t)$ como a da Equação (3.17).

A análise multirresolução, então, permite que um sinal seja expresso através de diversas resoluções, comumente denominadas de *escalas*, que contém diferentes intervalos de frequência. A característica de *microscópio matemático*, atribuída a análise *wavelet*, vem da possibilidade de visualizar isoladamente as escalas do sinal, permitindo que sejam analisadas características quando da decomposição [57, 123]. Ressalta-se que a decomposição em múltiplas escalas traz como alternativa a reconstrução do sinal com um número menor de escalas, onde esse novo sinal tem alguns intervalos de maior frequência desconsiderados; normalmente,

a frequência alta está ligada aos ruídos ou aos componentes transientes presentes em sinais.

Matematicamente, a ideia da transformada *wavelet* discreta é decompor um espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ em dois subespaços, o espaço das aproximações \mathcal{V} e dos detalhes \mathcal{W} [60, 101, 129, 160]. A Definição 3.1 apresenta as propriedades desses subespaços no contexto da análise multirresolução.

Definição 3.1. *Uma análise multirresolução é uma sequência de subespaços fechados $V_m, m \in \mathbb{Z}$, de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. $\forall m \in \mathbb{Z}, V_{m+1} \subset V_m$;
2. $\phi(t) \in V_m \Leftrightarrow \phi(2t) \in V_{m+1}$;
3. $\phi(t) \in V_m \Leftrightarrow \phi(t + 2^m k) \in V_m, \forall k \in \mathbb{Z}$;
4. $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_m = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$;
5. $\lim_{m \rightarrow -\infty} V_m = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, onde $\overline{\cdot}$ é o fecho de $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$.

Debnath e Shah [60] afirmam que a importância da análise multirresolução está na construção de bases ortonormais em $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Sejam V_m e seu complemento ortogonal² W_m , em V_{m-1} , subespaços de aproximação e de detalhes na escala m , respectivamente. Então, é possível escrever [59, 101, 129, 160]

$$\begin{aligned}
 \ell^2(\mathbb{Z}_N) &= V_1 \oplus W_1, \\
 V_1 &= V_2 \oplus W_2, \\
 &\vdots \\
 V_{m_0-1} &= V_{m_0} \oplus W_{m_0},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

²Dado um subespaço S de um espaço de Hilbert \mathcal{H} , define-se o complemento ortogonal de S como $S^\perp = \{x \in \mathcal{H} : (x, y) = 0, \forall y \in S\}$, onde (\cdot, \cdot) é o produto interno de \mathcal{H} [60].

ou, de forma mais compacta,

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = V_{m_0} \oplus W_{m_0} \oplus W_{m_0-1} \oplus \cdots \oplus W_m \oplus \cdots \oplus W_1, \quad (3.19)$$

com $0 \leq m \leq m_0$. Note que os subespaços V_m e W_m , para todo m , possuem a mesma dimensão, isto é, $N/2^m$, onde N é a dimensão de V_0 [160]. Assim, para determinada escala m_0 , tem-se da Equação (3.18),

$$f_{m_0-1}(t) = f_{m_0}(t) + d_{m_0}(t) \quad (3.20)$$

onde $f_{m_0-1}(t)$ e f_{m_0} são aproximações da função $f(t)$ nas escalas $m_0 - 1$ e m_0 , respectivamente; d_{m_0} é a aproximação na escala m_0 [3, 60, 101, 129]. Para escrever $f(t)$ como na Equação (3.19), define-se o detalhe do sinal para uma escala m arbitrária como

$$d_m(t) = \sum_{n=0}^{N/2^m} T_{m,n} \psi_{m,n}(t), \quad (3.21)$$

e, então, reescreve-se a Equação (3.17) como

$$f(t) = f_{m_0}(t) + \sum_{m=0}^{m_0} d_m(t). \quad (3.22)$$

Um último aspecto a pontuar na Definição 3.1 refere-se a translação de $\phi(t)$. Enquanto a função escala $\phi(t) \in V_m$ muda de subespaço conforme são adicionados ($\phi(t/2) \in V_{m-1}$) ou reduzidos detalhes ($\phi(2t) \in V_{m+1}$), como na Equação 3.20, esta é invariante no tempo, isto é, $\phi(t + 2^m k) \in V_m, \forall k \in \mathbb{Z}$ [47, 101]. Estas propriedades estão relacionadas à auto-similaridade dos subespaços V_m , em que um sinal é aproximadamente ou exatamente semelhante a uma parte de si mesmo.

A ideia da análise multirresolução permite, portanto, a representação de um sinal $f(t)$ como somas sucessivas de detalhes $d_m(t), 0 < m < m_0$, a uma determinada aproximação $f_{m_0}(t)$. É essa construção que fornece os elementos para a estruturação do algoritmo pirâmide ou *algorithme à trous*, que será apresentado na próxima subseção [57, 90].

3.2.5 Determinação de Coeficientes e Algoritmo Pirâmide

Uma das consequências da análise multirresolução é a possibilidade de escrever a função *wavelet* $\psi(t)$ através da função escala $\phi(t)$. Como as *wavelets* estão no espaço W_m , com $W_m \subset V_{m-1}$, é possível escrever a equação *wavelet* $\psi(t)$ como uma soma ponderada de equações escala $\phi(t)$ transladadas [3, 40, 101]. Em geral, a relação entre as funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ e suas manipulações de translação e de escala podem ser escritas da seguinte forma [57, 91]

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \phi(2t - k), \quad (3.23)$$

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \phi(2t - k), \quad (3.24)$$

onde os coeficientes h_k e g_k são determinados pelas propriedades gerais das funções escala e *wavelet*, com M referindo-se ao tamanho da *wavelet*. Ressalta-se a relação entre os coeficientes g_k e h_k [91]:

$$g_k = (-1)^k h_{2M-k-1}, \quad (3.25)$$

com $0 \leq k \leq 2M - 1$.

Da definição de $\phi_{m,n}(t)$, na Equação (3.14), e da Equação (3.24) é possível relacionar uma escala $m + 1$ com m , de forma a obter [3]

$$\phi_{m+1,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \phi_{m,2n+k}(t), \quad (3.26)$$

que mostra a composição de uma função escala $\phi(t)$ em uma escala arbitrária $m + 1$ como uma combinação linear de funções escalas da próxima escala menor, m , para qualquer $0 \leq m \leq m_0$. De maneira similar, tem-se que a função *wavelet* [3]

$$\psi_{m+1,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \phi_{m,2n+k}(t). \quad (3.27)$$

Assim, a partir das Equações (3.26) e (3.27), é possível reescrever os coeficientes de aproximação da Equação (3.16) em uma escala $m + 1$ a partir da

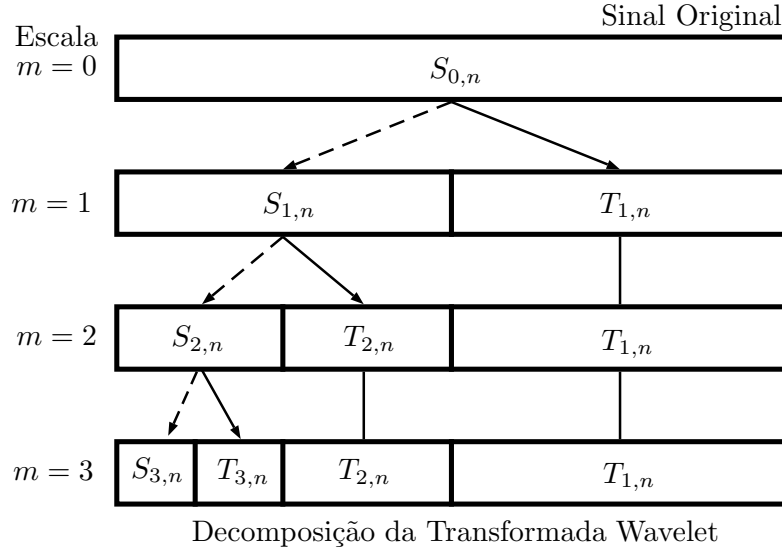


Figura 3.2: Coeficientes de uma decomposição *wavelet* em diversas escalas. Baseado em [3].

escala m , como [3]

$$S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_{k-2n} S_{m,k}, \quad (3.28)$$

e os coeficientes de aproximação,

$$T_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_{k-2n} S_{m,k}. \quad (3.29)$$

Ao aplicar sucessivas vezes a decomposição descrita pelas Equações (3.28) e (3.29), é possível gerar os coeficientes de aproximação e de detalhe para todas as escalas maiores que um m qualquer [3]. A Figura 3.2 apresenta, esquematicamente, a decomposição de um sinal $f(t)$ através das Equações (3.28) e (3.29).

A Figura 3.2 apresenta, na escala $m = 0$, o sinal original $f(t)$, também denotado por $S_{0,n}$, onde $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, com N representando o número total de observações do sinal original. Quando o sinal é decomposto na escala $m = 1$, como na Equação (3.20), os coeficientes de aproximação $S_{1,n}$ e os de detalhes $T_{1,n}$ apresentam metade do tamanho original, ilustrado através do tamanho das barras horizontais. Conforme realiza-se a decomposição nas escalas seguintes, percebe-se

que $S_{m,n}$ é utilizado para gerar os coeficientes de aproximação $S_{m+1,n}$ e os coeficientes de detalhe $T_{m+1,n}$; ainda, $T_{m,n}$ não sofre mais operações do algoritmo. Quando finalizada a decomposição em um número m_0 de escalas, o resultado é um vetor da forma $W^{(m_0)} = (S_{m_0}, T_{m_0}, T_{m_0-1}, \dots, T_2, T_1)$ com $1 \leq m_0 \leq M - 1$, onde $M = \lfloor \log_2 N \rfloor$ é a maior escala onde apenas um coeficiente é calculado e $\lfloor \cdot \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual ao valor analisado.

Para a reconstrução de um sinal $f(t)$, é possível estimar $S_{m,n}$ a partir de $S_{m+1,n}$ e $T_{m+1,n}$. Da Equação (3.20), é possível escrever a aproximação de um sinal em sua forma discreta, onde

$$f_m(t) = \sum_n S_{m+1,n} \phi_{m+1,n}(t) + \sum_n T_{m+1,n} \psi_{m+1,n}(t). \quad (3.30)$$

Da Equação (3.22), onde $f(t) = f_{m_0} + \sum_{m=1}^M d_m(t)$, a reconstrução de $f(t)$ em sua forma discreta é dada por

$$f_0(t) = f_M(t) + \sum_{m=1}^M d_m(t) \quad (3.31)$$

onde a aproximação na escala M é

$$f_M(t) = S_{M,n} \phi_{M,n}(t). \quad (3.32)$$

Como os coeficientes de aproximação são simplesmente uma média ponderada do sinal, uma componente $S_{M,n}$ está relacionada com a média do sinal através da relação $\overline{S_{0,n}} = S_{M,n} / \sqrt{2^M}$, onde $\overline{S_{0,n}}$ indica a média da sequência $S_{0,n}$ [3]. Ao adicionar todas as componentes de detalhes das escalas $0 < m < M$, obtém-se uma aproximação do sinal original na escala 0. No caso da reconstrução de um sinal suavizado em relação a $f_0(t)$, exclui-se os detalhes com maiores intervalos de frequência.

Para a exemplificação da reconstrução de sinais suavizados, na Subseção 3.2.7, são apresentadas as famílias de *wavelets* utilizadas neste trabalho na próxima subseção.

3.2.6 Famílias das *wavelets*

A decisão sobre qual família de *wavelet* a ser utilizada depende da natureza do sinal e de quais características devem ser enfatizadas, além, é claro, da habilidade de aproximar eficientemente a série temporal desejada [3, 112, 123]. Assim, não há uma *wavelet* que seja ideal para todos sinais a serem representados, sendo a sua aplicabilidade e capacidade de explicação do problema objeto de pesquisa. Segundo Mallat [112], a construção de diversas famílias de *wavelets* permitiu a criação de dicionários de bases ortogonais com um tamanho mínimo que permite a representação de sinais com poucos coeficientes.

As daubechies são uma família de *wavelets* ortogonais e de suporte compacto³ desenvolvidas por Ingrid Daubechies [57]. Essas não possuem forma explícita, isto é, são definidas recursivamente, com exceção da Haar (*db1*) [3, 103, 134]. Note que *db* representa a família daubechies; já o numeral que o acompanha representa o número de coeficientes não nulos: por exemplo, no caso *db2*, sabe-se que há quatro coeficientes não nulos responsáveis pela representação do sinal. Neste trabalho adotaremos a notação dbN_k , em que $2 \cdot N_k$ é o número de coeficientes da *wavelet*; na Figura 3.3 podem ser visualizadas as *wavelets* da família daubechies.

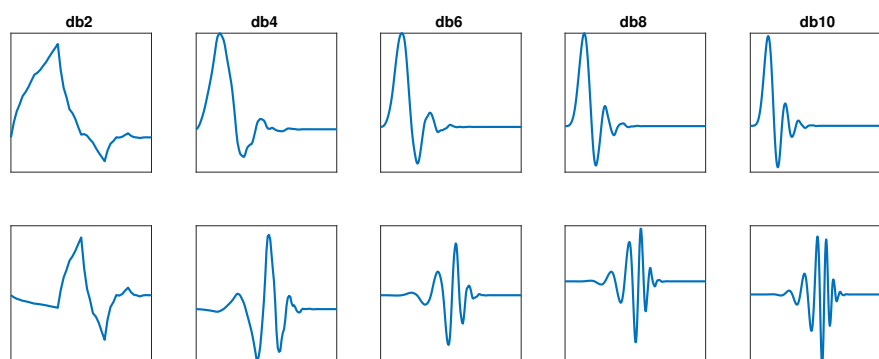


Figura 3.3: Wavelets da família Daubechies: na primeira linha, função escala $\phi(t)$ e, na segunda, função *wavelet* $\psi(t)$ para *db2*, *db4*, *db6*, *db8* e *db10*.

³Suporte compacto, no caso discreto, indica um número finito N_k de coeficientes de escala [3].

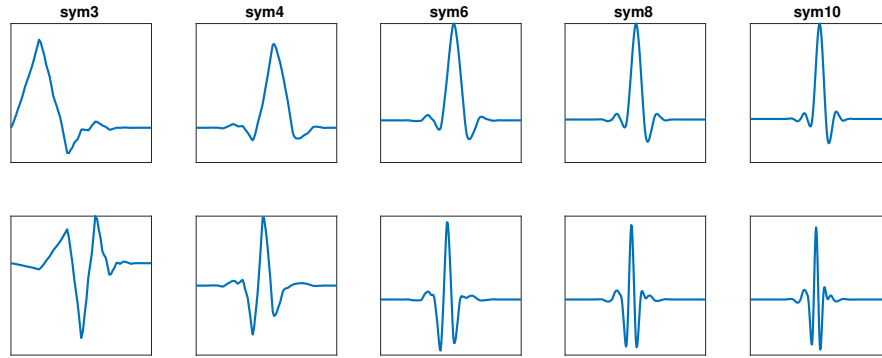


Figura 3.4: Wavelets da família Symlet: na primeira linha, função escala $\phi(t)$ e, na segunda, função wavelet $\psi(t)$ para as wavelets *sym3*, *sym4*, *sym6*, *sym8* e *sym10*.

Uma das desvantagens da wavelet daubechies é sua assimetria, que pode produzir artefatos ou simplesmente não representar o formato do sinal, conhecidos também como distorção de fase [77, 80]. Com objetivo de redução da assimetria, Daubechies *et al.* [57] propõem as *symlets* como modificação da sua *wavelet* original [3, 57]. As wavelets da família symlet também são ortogonais e, adicionalmente, são quase simétricas; as symlets utilizadas neste trabalho podem ser visualizadas na Figura 3.4.

3.2.7 Reconstrução de um sinal suavizado: um exemplo

O procedimento do algoritmo pirâmide prevê o cálculo de uma escala arbitrária m_0 a partir de escalas de maior resolução, isto é, $m_0 + 1$, como ilustrado na Figura 3.2. A determinação dos coeficientes de aproximação, $S_{m_0, n}$, e de detalhes, $T_{m_0, n}$, dá-se pelo produto de $D \cdot f(t)$, onde $f(t)$ é o sinal e D é a matriz dos coeficientes de ordem $N \times N$, com N representando a dimensão do sinal original. A matriz D , por sua vez, é composta por $N/2$ blocos retangulares D' com dimensão $2 \times 2 \cdot N_k$,

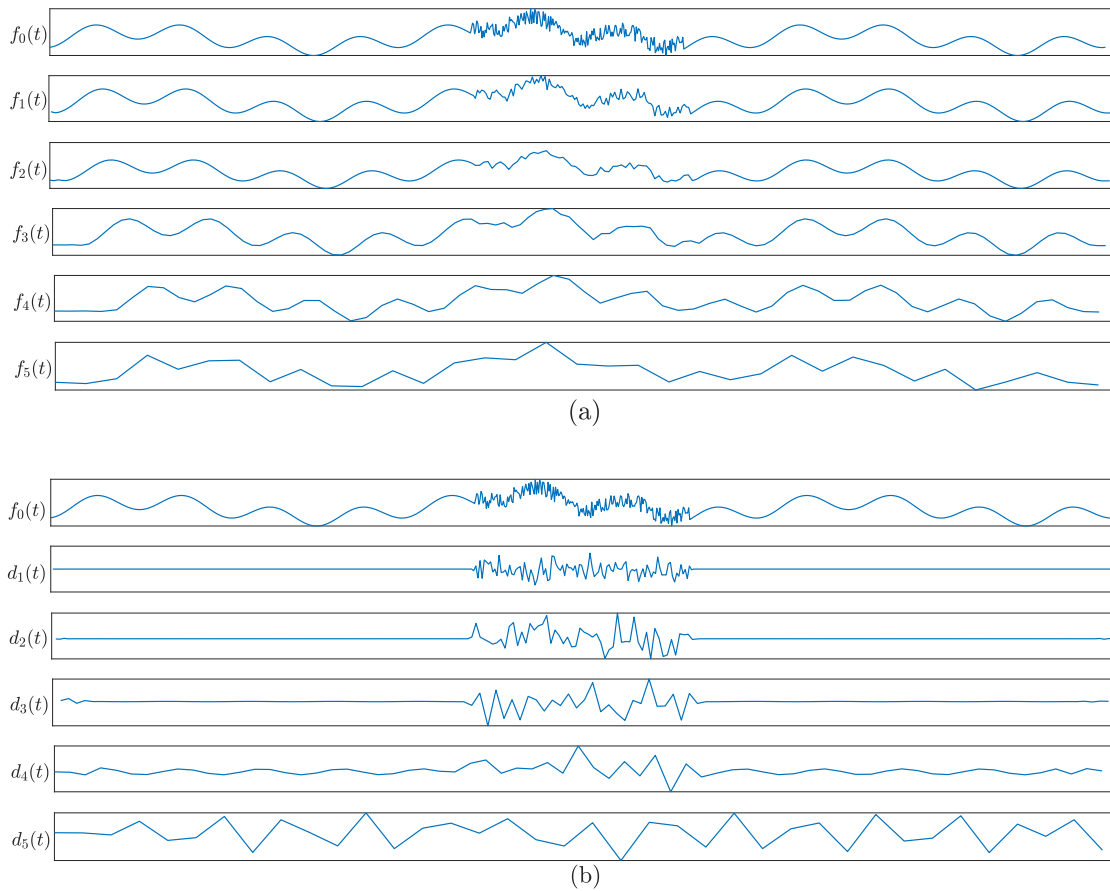


Figura 3.5: Decomposição de um sinal: (a) aproximação e (b) detalhes do sinal original, da escala $m = 0$, em 5 escalas.

($f_1(t)$), $m = 2$ ($f_2(t)$), $m = 3$ ($f_3(t)$), $m = 4$ ($f_4(t)$) e $m = 5$ ($f_5(t)$); ressalta-se que a cada escala, a resolução do sinal é $1/2$ da resolução do sinal anterior, onde $f_5(t)$ possui $1/2^5$ da resolução de $f_0(t)$. Na Figura 3.5(b) são mostrados os detalhes do sinal, em que $d_1(t)$ apresenta os componentes de maior frequência do sinal $f_0(t)$, de forma que $f_0(t) = f_1(t) + d_1(t)$; da mesma forma, $d_2(t)$ são as componentes de maior frequência de $f_1(t)$ e $f_1(t) = f_2(t) + d_2(t)$; e assim sucessivamente. Note que, das sucessivas decomposições, obtém-se a seguinte decomposição do sinal original $f_0(t)$ na escala $m = 5$

$$f_0(t) = f_5(t) + d_1(t) + d_2(t) + d_3(t) + d_4(t) + d_5(t), \quad (3.37)$$

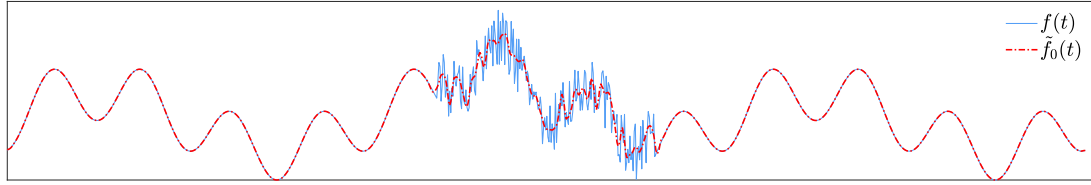


Figura 3.6: Sinal original $f(t)$ e sua reconstrução $\tilde{f}_0(t)$.

ou, similarmente, a aproximação na escala $m = 5$ pode ser expressa por

$$f_5(t) = f_0(t) - d_1(t) - d_2(t) - d_3(t) - d_4(t) - d_5(t). \quad (3.38)$$

Usualmente, para a reconstrução do sinal $f_0(t)$ com um nível reduzido de ruídos, isto é, para a reconstrução suavizada do sinal, exclui-se os detalhes de maior frequência. Para a reconstrução de $f_0(t)$ com apenas três níveis de detalhes, $\tilde{f}_0(t)$, faz-se

$$\tilde{f}_0(t) = f_5(t) + d_3(t) + d_4(t) + d_5(t), \quad (3.39)$$

sendo excluídos os detalhes $d_1(t)$ e $d_2(t)$. A Figura 3.6 apresenta o sinal original $f(t)$ e a reconstrução suavizada $\tilde{f}_0(t)$. À exceção do trecho mais ruidoso de $f(t)$, destaca-se que $\tilde{f}_0(t)$ representa $f(t)$ de forma acurada, isto é, sem erros. No trecho com mais ruídos, $\tilde{f}_0(t)$ apresenta-se como uma tendência do comportamento do sinal, excluindo ruídos que dificultariam evidenciar o sinal médio.

No Capítulo 5 são apresentados, tanto o método de construção dos núcleos de inflação utilizando *wavelets*, como análises estatísticas e comparativas em relação ao núcleos de inflação oficiais do Capítulo 2. A utilização para a construção de previsões e seus respectivos intervalos de confiança com o uso de redes neurais, Capítulo 4, são apresentados no Capítulo 6.

4 REDES NEURAIS

O cérebro humano é uma estrutura altamente poderosa e complexa, responsável pelas emoções, pensamentos, percepção e cognição, além de outras tantas funções que processam uma grande quantidade de informações. Não estranhamente que o funcionamento do cérebro foi um importante ponto de partida para a construção das *redes neurais*. O cérebro biológico pode ser caracterizado por uma estrutura em rede, onde há uma série de neurônios interligados que possuem habilidade de ajustar pulsos elétricos que atravessam estas conexões, as chamadas *sinapses* [7, 31, 84]. Tais estruturas permitem o processamento de informações de forma a transformar simples entradas de dados em conhecimento ou até mesmo em um modelo que possibilite a interpretação, a previsão e a resposta quando da existência de um estímulo exterior.

As redes neurais artificiais diferem do modelo biológico, uma vez que não é conhecido o funcionamento deste em sua completude. Ainda assim, o modelo artificial e o biológico resguardam similaridades, entre elas a computação paralela e distribuída, além de redundâncias e modularizações das conexões. Essas similaridades garantem a reprodução com fidelidade de várias funções encontradas nos seres humanos, como a capacidade de tentar determinar os tipos de relações entre os dados de entrada e os dados de saída. Desta forma, as redes neurais conseguem lidar com problemas altamente complexos, os quais nem sempre podem ser descritos por modelos analíticos [7, 53, 84].

Ainda que a capacidade computacional tenha aumentado nas últimas décadas, não é possível comparar com a capacidade de processamento do cérebro humano; para realizar o processamento de informações no âmbito do aprendizado de máquina, é necessário realizar uma série de simplificações para lidar com a complexidade da maioria dos problemas a serem modelados. Essas simplificações envolvem, normalmente, decompor o problema em um número relativamente simples de tarefas,

ou extrair informações a partir de um determinado número de parâmetros [84, 85]. Com a simplificação do problema em um número de variáveis computacionalmente processáveis, a rede neural consegue transformar informações em conhecimento e, assim, permite a interpretação, a previsão e a resposta apropriada à um conjunto de informações.

Várias aplicações das redes neurais têm sido desenvolvidas, desde o diagnóstico médico até mesmo na automação de veículos [25, 53, 125, 157]. Vale ressaltar que, no âmbito do estudo de séries temporais, as redes neurais representam um avanço em relação às técnicas utilizadas para a modelagem e previsão, tais como o fluxo de águas em reservatórios e rios [124, 165], a radiação solar [29], o manejo de doenças com o estudo da proliferação de mosquitos [109], o preço de commodities (como o petróleo [1, 41, 106]) e também a precificação de ações [10, 118, 132].

A aplicação de *wavelets* aliadas às redes neurais é um campo latente para a previsão de séries temporais, principalmente em aplicações na área econômica. Em especial, no contexto deste trabalho, ainda que haja estudos que utilizem *wavelets* para o cálculo do núcleo de inflação, a utilização conjunta de *wavelets* e redes neurais não é comum na literatura [168, 169].

Nas próximas seções são apresentadas a estrutura e a topologia das redes neurais, além do método de amostragem por *bootstrap*. Este último será importante, também, para a construção do intervalo de confiança das previsões geradas pelas redes neurais.

4.1 O Neurônio e a Função de Ativação

A capacidade do cérebro humano de adaptar-se e moldar-se às informações exteriores trazem inspiração e contribuem para a construção das redes neurais artificiais [31, 84]. Desde seus primórdios, datada da publicação do artigo

de McCulloch e Pitts [116] em 1943, vários avanços na teoria das redes neurais foram alcançados. Entretanto, é na estrutura individual dos nós, na topologia das conexões e no comportamento conjunto que residem a eficiência deste modelo, no qual pode-se ver a importância dos neurônios, que, neste contexto, são elementos fundamentais para o processamento das informações e, conseqüentemente, no aprendizado de máquina.

Os neurônios são divididos em três partes principais com funções específicas e, ao mesmo tempo, complementares: o corpo da célula, os dendritos e o axônio [31, 84, 85]. A ilustração de um neurônio pode ser vista na Figura 4.1. Os dendritos têm por função receber as informações através de impulsos nervosos que advêm de outros neurônios, conduzindo esses impulsos até o corpo celular. Por sua vez, no corpo celular a informação é processada e novos impulsos são gerados, sendo transmitidos a outros neurônios através do axônio.

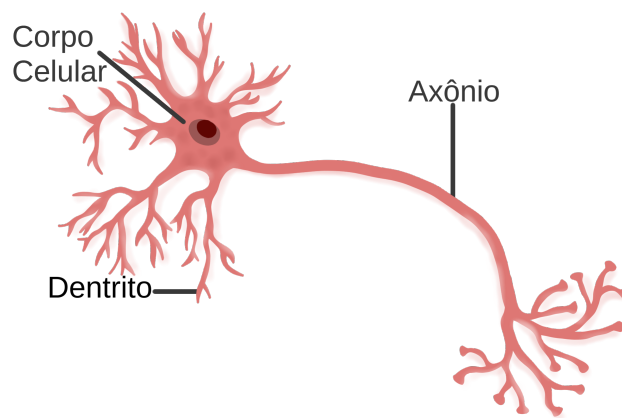


Figura 4.1: Ilustração do neurônio.
Baseado em [85].

Os neurônios se comunicam por impulsos nervosos, que nada mais são que sinais elétricos. O ponto de contato entre a terminação do axônio de um neurônio e o dendrito de outro é chamado de conexão sináptica, que funcionam similarmente a válvulas e são capazes de controlar a transmissão dos impulsos nervosos [31, 85].

Desta forma, o neurônio consegue determinar qual impulso deve ou não ser transmitido.

O processo de transmissão dos estímulos acontece da seguinte forma: cada neurônio recebe uma infinidade de estímulos que, quando agrupados, podem exceder limiares de excitação do neurônio e liberar substâncias que se propagam através das conexões sinápticas aos demais neurônios, excitando-os; do contrário, quando não atinge o limiar de excitação, não há propagação do sinal elétrico e diz-se que há um efeito inibitório [31, 82, 84]. Uma propriedade desta dinâmica é a neuroplasticidade, que é a capacidade do sistema nervoso se adaptar ao nível estrutural e funcional a partir de novas experiências do ambiente [85]. Todos esses processos acontecem de forma simultânea, demandando grande quantidade de energia e de capacidade de processamento.

O modelo proposto por McCulloch e Pitts [116] nada mais é que uma simplificação do que era sabido a respeito do neurônio biológico. Neste modelo há n entradas x_1, x_2, \dots, x_n e apenas uma saída y e, para emular as sinapses, as entradas são ponderadas pelos pesos w_1, w_2, \dots, w_n , cujos valores podem ser positivos ou negativos [31, 116]. Para que haja a ativação, é necessário que a soma ponderada seja maior que determinado limiar, isto é,

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i \geq \theta, \quad (4.1)$$

com n o número de entradas, w_i o peso associado à entrada x_i e θ o limiar do neurônio: caso a soma seja maior ou igual que o limiar θ , y assume o valor 1 e, caso contrário, assume o valor zero. As limitações deste modelo referem-se, principalmente, à capacidade de representar apenas funções lineares [31, 79, 82]. A necessidade da adaptação dos pesos, não presentes no modelo de McCulloch e Pitts [116], em particular a partir dos estímulos gerados a partir dos dados de entrada, foi importante no desenvolvimento das redes neurais e será desenvolvido a seguir.

Um neurônio, assim, é uma unidade de processamento de informação com três elementos básicos: um conjunto de sinapses, um acumulador e uma função de ativação [85]. Enquanto o conjunto de sinapses é caracterizado pelos pesos que ponderam as entradas da rede neural, o acumulador reúne todas essas entradas ponderadas para que, por fim, a função de ativação limite essa saída de forma a enquadrar dentro de um intervalo finito. Assim, o neurônio pode ser matematicamente representado por [85]

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj}x_j, \quad (4.2)$$

onde w_{kj} é o peso sináptico utilizado pelo neurônio k para uma entrada x_j . A importância de cada um dos dados pode ser observada através do peso w_{kj} , que variam em determinado intervalo que pode assumir, inclusive, valores negativos. Os dados x_j ponderados procedem ao somador, que nada mais é que a ponderação das entradas pelos pesos sinápticos para, por fim, passar pela função de ativação.

A escolha da função de ativação é um passo importante na construção da rede neural, uma vez que influencia na sua capacidade de aprendizagem. Ainda, dependendo do problema a ser modelado e do resultado desejado, diferentes funções de ativação podem ser utilizadas – inclusive, como será discutido adiante, mais de uma função de ativação poderá ser utilizada nas diferentes camadas da rede neural.

Quanto ao resultado produzido pelas funções de ativação, exemplificase que ao utilizar uma função de ativação linear, a rede neural aprende apenas comportamentos lineares; funções de ativação polinomiais, por sua vez, tendem a fazer com que a rede neural aprenda comportamentos polinomiais [63, 122]. Por outro lado, as funções de ativação não-polinomiais são responsáveis por apresentar velocidades de aprendizado melhores quando comparadas com as citadas anteriormente, além de taxas de sucesso do aprendizado maiores [85]. Uma outra vantagem das funções de ativação não polinomiais advém de serem consideradas aproximadores universais, isto é, existe uma aproximação eficiente gerada pela rede neural [23, 52, 122, 145]. Antes de falar do teorema da aproximação universal, que demons-

tra que as funções não polinomiais são aproximadores universais, é necessário definir a função de ativação.

Uma função de ativação φ , também denominada função de transferência, é o resultado da transformação de uma combinação linear de entradas, x_j , e dos respectivos pesos, w_{kj} , com um erro ou viés de classificação, b_k , fornecendo a saída [79, 85, 105]

$$y_k = \varphi(v_k), \quad (4.3)$$

onde, utilizando u_k da Equação (4.2), tem-se a soma ponderada das entradas com um erro b_k ,

$$v_k = u_k + b_k. \quad (4.4)$$

A esquematização das entradas x_j e da saída y_k do neurônio k pode ser visualizada na Figura 4.2. Nela, é possível identificar alguns elementos, como um conjunto de sinapses ou conexões j que ligam as entradas x_j aos pesos correspondente, w_{kj} ; o somador (Σ) aglutina o resultado da ponderação das entradas x_j com o respectivo peso w_{kj} ; e a função de ativação, φ , que é responsável pela propagação ou não da informação recebida. Na abordagem mais moderna, o viés b_k é descrito como uma entrada caracterizada por um vetor unitário que permite aumentar os graus de liberdade, permitindo que haja uma melhor adaptação às informações fornecidas [27, 85].

As funções de ativação podem ser de três tipos básicos: função limiar, função afim por partes e funções sigmoide [31, 61, 63, 85, 142]. A Figura 4.3 apresenta estes três tipos de função, em que a função limiar, ou Heaviside, na Figura 4.3(a), é a função que tem como resposta o valor zero ou 1 da primeira rede neural proposta por McCulloch e Pitts [116]. A função afim por partes, na Figura 4.3(b), combina a função limiar com uma função afim, cujo principal uso é para tarefas simples ou, até mesmo, para as camadas de saídas. Por fim, as funções sigmoides, na Figura 4.3(c), com um formato de “S”, tem como principal vantagem não ser linear, contribuindo para a inserção deste aspecto à saída da rede neural [63, 84, 122].

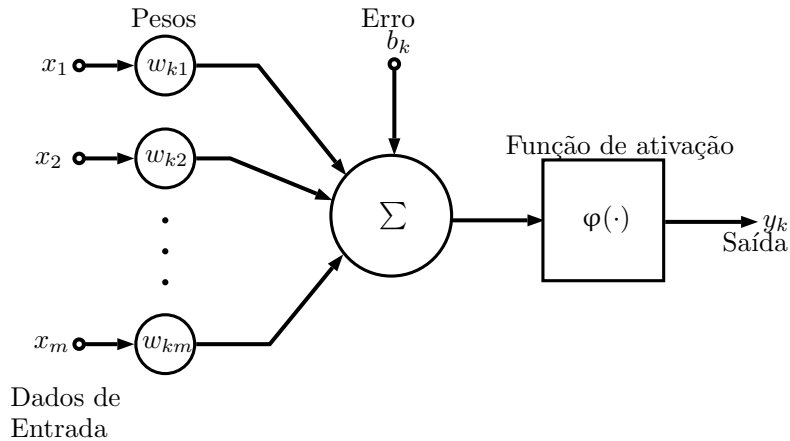


Figura 4.2: Modelo matemático de um neurônio k .
Baseado em [85].

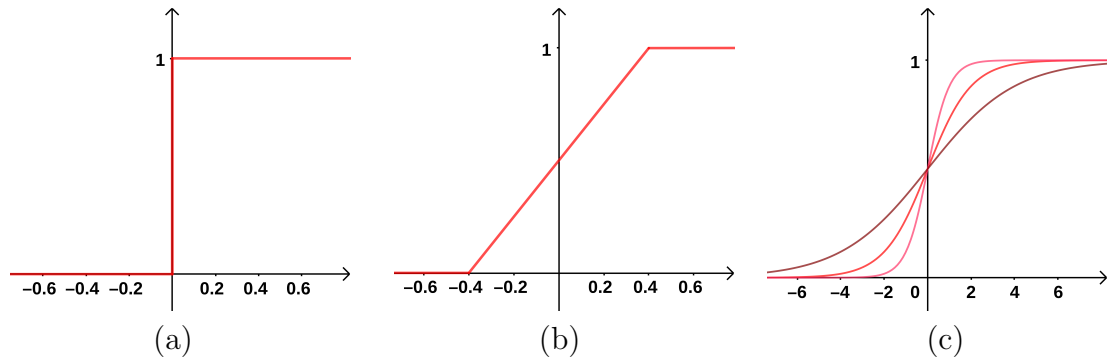


Figura 4.3: Função de ativação do tipo: (a) limiar, (b) afim por partes e (c) sigmóides.

Outros tipos de função de ativação podem ser propostas, mas é importante notar que uma função de ativação diferenciável produz uma aproximação igualmente diferenciável; ainda mais, o erro da função de ativação também é diferenciável, condição para o algoritmo de aprendizagem descrito na Seção 4.3 [85, 142]. De fato, uma função de ativação que seja não linear e diferenciável permite, do primeiro, que haja um aprendizado de comportamentos não lineares presentes nos dados, enquanto que, do segundo, é possível a retropropagação dos erros para otimizar os pesos da rede neural quando da aplicação do algoritmo de aprendizado [85]. A retropropagação dos erros faz parte do algoritmo conhecido como *backpropagation* que será apresentado mais adiante.

Destaca-se, entre as sigmóides, a função logística e a função tangente hiperbólica. A primeira, descrita por

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda v}}, \quad (4.5)$$

onde λ é um fator de declividade. Note que a função logística assume apenas valores no intervalo $[0,1]$. Já a função tangente hiperbólica assume valores positivos e negativos, onde $\varphi \in [-1,1]$, em que

$$\varphi(v_k) = \tanh(v). \quad (4.6)$$

Apresentadas as funções de ativação φ , é importante ressaltar que as redes neurais são capazes de aproximar funções $f(t)$, as quais representam as saídas desejadas da rede neural. Essa capacidade de aproximar funções $f(t)$ será tratada na próxima seção, assim como a arquitetura e topologia das redes neurais.

4.2 Arquitetura e Topologia da Rede Neural

Normalmente, devido a quantidade de dados de entrada, um único neurônio pode não ser suficiente para construir um modelo adequado para previsão [61, 70]. O mais usual é escolher, empiricamente¹, um número de neurônios que operam interconectados e em paralelo nas camadas que compõe a rede neural, que pode ser tanto nas camadas ocultas (ou intermediárias), quanto na camada de saída. Ressalta-se que, ao mencionar arquitetura, refere-se à disposição dos neurônios e das camadas, e ao falar em topologia, remete-se às diferentes composições que envolvem a quantidade de neurônios em uma ou outra camada da rede neural.

Três tipos de arquiteturas de redes neurais podem ser elencadas com respeito à organização das camadas: redes neurais com camada única, com múltiplas

¹Apesar de existir métodos para determinar o número ideal de neurônios em uma rede neural, não há consenso se estes são apropriados [53, 79]. O mais comum na construção de redes neurais é verificar, para um determinado intervalo de neurônios, qual apresenta melhores resultados segundo a métrica escolhida.

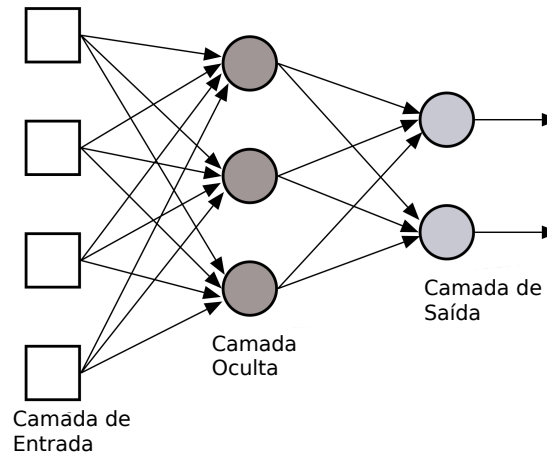


Figura 4.4: Rede neural com uma camada oculta.
Baseado em [85].

camadas e recorrentes [61, 85]. No primeiro caso, com uma camada única, a rede neural é composta apenas pela camada de entrada e pela camada de saída. Este é o caso mais simples, sendo capaz de tratar apenas de problemas linearmente separáveis, isto é, aqueles de baixa dimensionalidade [31]. Já nas redes neurais com múltiplas camadas, adiciona-se uma ou múltiplas camadas ocultas, como pode ser visto na Figura 4.4. A decisão da quantidade de camadas ocultas depende do problema a ser modelado; ainda assim, grande parte dos problemas podem ser aproximados com uma única camada oculta [85, 87].

Na Figura 4.4 tem-se a representação de uma rede neural com múltiplas camadas: 4 entradas, 3 neurônios na camada oculta e 2 neurônios na camada de saída. Neste caso, cada um dos dados de entrada x_j é conectado com todos os neurônios da camada oculta da rede neural, caracterizando uma rede totalmente conectada – cada um dos nós de uma camada da rede está conectado a todos os nós da camada adjacente seguinte; caso alguma ligação estivesse faltando, seria uma rede parcialmente conectada.

Redes neurais recorrentes, conforme ilustrado na Figura 4.5, se distinguem das demais por ter um laço de retroalimentação, isto é, a saída de algum

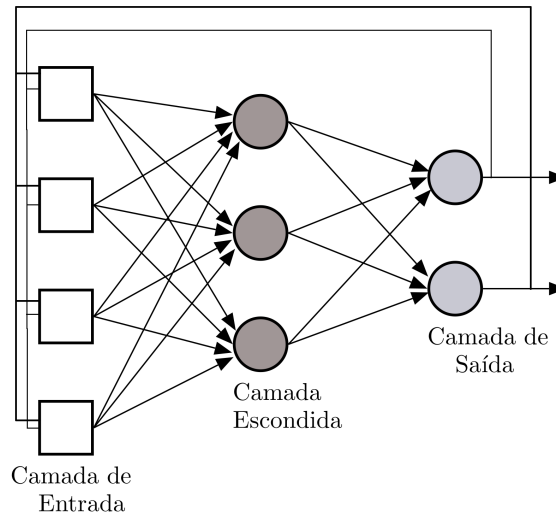


Figura 4.5: Rede neural recorrente com uma camada oculta.
Baseado em [85].

neurônio da i -ésima camada da rede é usada como entrada em alguma das camadas antecedentes. Quando há ciclos que realimentam a rede neural, considera-se não apenas a forma em que cada um dos nós estão ligados, sendo necessário também considerar a componente temporal: por exemplo, se a entrada é uma informação no tempo t , a saída que será produzida envolverá o passo $t + 1$ [79, 142]. A principal vantagem é a capacidade de memória das redes neurais recorrentes, uma vez que permite processar sequências de informações [142]. Desta forma, esta arquitetura é amplamente utilizada no processamento de dados sequenciais, incluindo assim séries temporais.

Independente da arquitetura escolhida, o desafio principal é o de obter resultados acurados² a partir de dados de entrada desconhecidos para a rede neural – esta habilidade é denominada *generalização* [79, 85]. A generalização é afetada por alguns fatores, dentre eles: os próprios dados de entrada, principalmente em relação ao tamanho da amostra utilizada e à capacidade de identificar as características que

²Uma das medidas de performance de uma rede neural é a acurácia, que pode ser determinada tanto pela proporção de saídas geradas com o valor considerado correto ou pela taxa de erros [79].

afetam o comportamento da saída; a arquitetura e a topologia da rede neural, que são fundamentais para os algoritmos de treinamento; e, ainda, a complexidade do problema a ser resolvido, uma vez que pode se tornar impraticável, ou até mesmo impossível, processar todas as informações que tem algum tipo de influência sobre o problema. Dada a natureza das redes neurais, muito do processamento dos dados não é visualizado, uma vez que a generalização ocorre principalmente nas camadas ocultas.

As camadas ocultas têm a função de transformar os dados de entrada em algo que a camada de saída possa utilizar para, por exemplo, gerar uma previsão; a denominação *oculta*, portanto, é normalmente adotada em virtude dos resultados obtidos nas camadas intermediárias não serem vistos como uma saída da rede neural. Desta forma, as camadas ocultas são responsáveis pelas transformações não lineares e, por conseguinte, determinação das complexidades inerentes dos dados de entrada [53]. Por sua vez, a camada de saída utiliza o resultado da camadas ocultas para gerar um conhecimento na forma predefinida, podendo este ser um resultado de classificação ou até mesmo um determinado intervalo numérico.

Até agora, foram apresentadas arquiteturas e, indiretamente, a topologia que caracteriza uma determinada rede neural; entretanto, não há garantias da rede neural ser capaz de aproximar determinada função (ou sinal). O teorema a seguir, então, discorre sobre a capacidade de aproximar uma função utilizando redes neurais.

Teorema 4.1 (Teorema da Aproximação Universal³). *Suponha φ uma função contínua, não constante, limitada e monótona crescente em $I_{m_0} = [0,1]^{m_0}$. Então, dada qualquer função f contínua em I_{m_0} e $\epsilon > 0$, existe um inteiro m_1 e conjuntos de constantes reais α_i , b_i e $w_{i,j}$, onde $i = 1, \dots, m_1$ e $j = 1, \dots, m_0$, tais que a função*

³A prova do teorema pode ser vista em [52].

definida por

$$F(x_1, \dots, x_{m_0}) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \varphi \left(\sum_{j=1}^{m_0} w_{ij} x_j + b_i \right) \quad (4.7)$$

é uma aproximação da função f ; isto é,

$$|F(x_1, \dots, x_{m_0}) - f(x_1, \dots, x_{m_0})| < \epsilon \quad (4.8)$$

para todo x_1, \dots, x_{m_0} .

O teorema acima mostra uma rede neural com m_0 entradas, representadas por x_1, \dots, x_{m_0} , e uma única camada oculta com m_1 neurônios; além disso, os pesos sinápticos desta camada oculta são dados por $w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im_0}$. A saída da rede neural é dada pela combinação linear do resultado obtido na camada oculta, imposta pela função φ , e os pesos sinápticos da camada de saída, α_i . Além de ser um teorema que garante a existência de uma aproximação gerada por uma rede neural, é possível obter outras conclusões como a de ser suficiente uma única camada oculta para construir uma aproximação a partir de um conjunto de entradas x_1, \dots, x_{m_0} para a saída desejada $f(x_1, \dots, x_{m_0})$. Ainda assim, nada é afirmado sobre o tempo de aprendizagem⁴, eficiência ou capacidade de generalização da rede neural. Note, ainda, que o teorema da aproximação universal pode ser visto como uma extensão natural do teorema de aproximação de Weierstrass, em que afirma que qualquer função contínua sobre um intervalo fechado no eixo real pode ser aproximada naquele intervalo como uma série de polinômios absolutamente e uniformemente convergente [85].

O teorema da aproximação universal é muito importante do ponto de vista teórico por fornecer as ferramentas matemáticas para garantir a existência de aproximações. Na prática, por causa da complexidade dos dados e da interação entre os neurônios, é preciso considerar alguns fatores, entre eles a quantidade de

⁴O tempo de aprendizagem, no contexto de redes neurais, refere-se ao tempo de convergência das aproximações da função desejada.

treinamento para que não ocorra o *overtraining*⁵. Desta forma, posterior a escolha da rede neural, é necessário determinar qual a quantidade de treinamento para que esta consiga construir uma aproximação adequada do sinal e, conseqüentemente, uma boa generalização.

4.3 Algoritmo de Aprendizado

A etapa de aprendizado consiste em um processo iterativo no qual há a extração de informações relevantes dos dados de entrada para realizar o ajuste de parâmetros e dos pesos sinápticos da rede neural [31, 42]. Existem diversos métodos para o treinamento das redes, podendo ser agrupados em dois tipos: aprendizado supervisionado e não supervisionado [31, 85]. O aprendizado supervisionado é o mais comum, uma vez que dados de entrada e a saída esperada são conhecidos, sendo tarefa da rede neural encontrar a ligação entre estes dois dados. Já na aprendizagem não supervisionada, apenas os dados de entrada estão disponíveis; a partir de regularidades estatísticas são criados grupos ou classes automaticamente, sendo fundamental a existência de redundância de dados para que haja a classificação.

Em relação aos algoritmos de aprendizagem propriamente ditos, quatro tipos pode ser elencados: aprendizagem por correção do erro, aprendizagem hebbiana, aprendizagem de Boltzmann e aprendizagem competitiva [31, 84]. A primeira, por correção do erro, é utilizada em treinamentos supervisionados em que são realizados ajustes nos pesos sinápticos a partir da análise da diferença entre o valor da saída e o valor esperado. A aprendizagem hebbiana, por sua vez, postulada por Hebb, realiza um treinamento local, ajustando o peso das conexões baseadas nas atividades dos neurônios. O aprendizado de Boltzmann baseia-se em um método de aprendizagem estocástico derivado da mecânica estatística em que os neurônios

⁵ *Overtraining* ocorre quando a rede neural memoriza os dados de treinamento, inclusive peculiaridades que podem representar ruídos do sinal [85]. A conseqüência, normalmente, é a redução da capacidade de generalização.

são estocásticos e podem estar em dois estados (ligado ou desligado), sendo responsáveis pela interação com o ambiente e explicação de restrições; esta regra é utilizada normalmente para aprendizagem não supervisionada. Por fim, na aprendizagem competitiva, os neurônios são forçados a competir entre si e ativa-se apenas um com maior similaridade com os dados de entrada, tendo os neurônios próximos os pesos ajustados.

Por sua vez, o algoritmo mais conhecido é o *backpropagation* (por vezes chamado de algoritmo de retropropagação), baseado no algoritmo de aprendizagem supervisionado por correção do erro. O treinamento a partir deste algoritmo ocorre em duas fases: uma *forward*, que é utilizada para definir a saída relacionada a uma determinada entrada, e uma *backward*, que utiliza a saída desejada e a saída obtida pela rede neural para atualizar os pesos [31, 63, 85, 142]. Na primeira fase há o cálculo da função custo, em que determina-se a soma dos erros quadrados de cada um dos dados de entrada [85],

$$e_k^{(n)} = \left[y_k^{(n)} - \hat{y}_k^{(n)} \right]^2 \quad (4.9)$$

onde $e_k^{(n)}$ é o erro na saída referente ao neurônio k gerado a partir da entrada $\mathbf{x}^{(n)} = (x_1, \dots, x_m)$, que é o conjunto de entradas x_j , $1 \leq j \leq m$, no tempo n . Ainda, $y_k^{(n)}$ é a resposta desejada e $\hat{y}_k^{(n)}$ é a saída gerada pela rede neural. Ressalta-se, ainda, que $\mathbf{x}^{(n)}$ é o conjuntos de dados utilizado para obtenção dos parâmetros da rede neural, cuja inicialização é dada a partir de valores aleatórios. Subsequentemente, se N é o tamanho do conjunto de treinamento, tem-se o erro quadrático médio [85]

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_k^{(n)}, \quad (4.10)$$

representando a função custo, que é uma medida de desempenho do aprendizado da rede neural. O objetivo do processo de aprendizagem é, então, minimizar o erro quadrático médio. O processo dá-se pela atualização dos pesos sinápticos até percorrer completamente o conjunto de treinamento; a apresentação completa dos dados de treinamento é denominado *época*. Assim, os pesos são alterados com base

em uma estimativa que minimizaria o erro quadrático médio da Equação (4.10). Da soma ponderada de todas as entradas sinápticas no passo de tempo n , advindo da Equação (4.4), obtém-se [85]

$$v_k^{(n)} = \sum_{j=0}^m w_{kj}^{(n)} x_j^{(n)} \quad (4.11)$$

com m o número total de entradas aplicadas ao neurônio k , $x_j^{(n)}$ as entradas intermediárias fornecidas pela camada que antecede a atual, e $w_{k0}^{(n)}$ o peso sináptico do viés b_k . Portanto, a saída do neurônio k no tempo n , $\hat{y}_k^{(n)}$, é dada por [85]

$$\hat{y}_k^{(n)} = \Phi_k(v_k(n)). \quad (4.12)$$

Minimizar a Equação (4.10) é semelhante a minimizar a energia média do erro quadrático, uma vez que pequenas mudanças nos pesos $w_{kj}^{(n)}$ influenciam no erro médio quadrático [2, 38, 42, 85]. A energia média do erro quadrático é dada por [85]

$$E^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k \in C} e_k^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k \in C} [y_k^{(n)} - \hat{y}_k^{(n)}]^2, \quad (4.13)$$

onde o conjunto C inclui todos os neurônios da camada de saída da rede neural. A soma da energia média do erro quadrático, então, é

$$E = \sum_{n=1}^N E^{(n)}, \quad (4.14)$$

onde E pode ser vista como uma função que depende de $w_{kj}^{(n)}$, uma vez que as entradas e saídas são conhecidas. Desta forma, minimizar E , na Equação (4.14), é buscar os coeficientes que estão na direção oposta do gradiente.

Assim, para atualizar os pesos $w_{kj}^{(n)}$, utiliza-se o *método dos gradientes*. O algoritmo de *backpropagation* aplica uma correção $\Delta w_{kj}^{(n)}$ ao peso $w_{kj}^{(n)}$, que é proporcional à derivada parcial $\frac{\partial E}{\partial w_{kj}^{(n)}}$. Assim, pela regra da cadeia [85],

$$\frac{\partial E^{(n)}}{\partial w_{kj}^{(n)}} = \frac{\partial E^{(n)}}{\partial \hat{y}_k^{(n)}} \frac{\partial \hat{y}_k^{(n)}}{\partial v_k^{(n)}} \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial w_{kj}^{(n)}}. \quad (4.15)$$

O primeiro fator é obtido da diferenciação da Equação (4.13) em relação a $\hat{y}_k^{(n)}$,

$$\frac{\partial E^{(n)}}{\partial \hat{y}_k^{(n)}} = - \left[y_k^{(n)} - \hat{y}_k^{(n)} \right] \quad (4.16)$$

e o segundo fator, da Equação (4.12) em relação à $v_k^{(n)}$,

$$\frac{\partial \hat{y}_k^{(n)}}{\partial v_k^{(n)}} = \varphi'(v_k^{(n)}). \quad (4.17)$$

Finalmente, a partir da diferenciação da Equação (4.11) em relação a $w_{kj}^{(n)}$, é obtida o terceiro fator

$$\frac{\partial \hat{v}_k^{(n)}}{\partial w_{kj}^{(n)}} = x_j^{(n)}. \quad (4.18)$$

Das Equações (4.16)–(4.18), obtém-se [85]

$$\frac{\partial E^{(n)}}{\partial w_{kj}^{(n)}} = - \left[y_k^{(n)} - \hat{y}_k^{(n)} \right] \varphi'(v_k^{(n)}) x_j^{(n)}. \quad (4.19)$$

A atualização dos pesos $w_{kj}^{(n)}$ é, então, dada por [85]

$$w_{kj}^{(n)} = w_{kj}^{(n)} + \Delta w_{kj}, \quad (4.20)$$

onde

$$\Delta w_{kj} = -\mu \frac{\partial E^{(n)}}{\partial w_{kj}^{(n)}}, \quad (4.21)$$

com μ sendo denominada de taxa de aprendizagem. Ressalta-se, ainda, que o sinal negativo da Equação (4.21) indica a busca por uma direção para a mudança do peso $w_{kj}^{(n)}$ de forma a reduzir o valor de $E^{(n)}$. O processo de atualização de pesos repete-se até obter o mínimo da função erro da Equação (4.10), convergindo quando o critério de parada é satisfeito [42, 85]. Note que se μ for muito pequeno, a convergência será lenta; e se μ for muito grande, o algoritmo pode não encontrar um mínimo para a função erro [2, 42]. Obter uma taxa de aprendizagem variável, μ_t , proporcional à norma de $\frac{\partial E}{\partial w_{kj}^{(n)}}$, é uma opção para dar mais flexibilidade ao método dos gradientes, com [2]

$$\mu_t = \mu \left\| \frac{\partial E}{\partial w_{kj}^{(n)}} \right\|. \quad (4.22)$$

Ressalta-se que o valor de μ_t é maior quando está longe do erro mínimo, da Equação(4.10), e menor, caso contrário [2].

Tratado o algoritmo de aprendizagem, resta ainda a análise de níveis de confiança dos resultados gerados a partir das redes neurais. Este assunto será tratado na próxima seção.

4.4 Intervalos de Confiança

O intervalo de confiança é um intervalo estimado de um parâmetro, permitindo medi-lo por um intervalo de estimativas prováveis. Assim, um intervalo de confiança é determinado por limites inferior L e superior U , tal que $L \leq U$, que são funções obtidas a partir de uma amostra em relação a um parâmetro θ em que $P[L \leq \theta \leq U] = 1 - 2\alpha$, $\alpha \in (0; 0,5)$ [37, 141]. Em outras palavras, a probabilidade do parâmetro θ estar entre L e U é $1 - 2\alpha$, onde $1 - 2\alpha$ é o nível de confiança. Um bom intervalo de confiança contém a estimativa e é estreito, uma vez que quando se obtém um intervalo de confiança muito grande, não é possível determinar informações precisas sobre o parâmetro a ser analisado.

No caso da previsão de séries temporais, deseja-se encontrar um intervalo no qual a probabilidade da previsão seja pelo menos $1 - 2\alpha$; ainda, idealmente, espera-se que o valor a ser observado naquele horizonte de tempo esteja dentro do intervalo de confiança. Assim, parte-se de um conjunto de observações (\mathbf{x}_k, y_k) , $1 \leq k \leq n$, que satisfaz um modelo

$$y_k = f(\mathbf{x}_k, \omega_0) + \varepsilon_k, \quad (4.23)$$

onde f representa a aproximação gerada pela rede neural que associa entradas \mathbf{x}_k e um conjunto de pesos ω_0 ideais. Ainda, ε_k é um erro identicamente distribuído de média 0, com variância σ_ε^2 e $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$, ou simplesmente $\varepsilon_k \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$,

adicionado a $f(\mathbf{x}_k, \omega_0)$. O valor y_k , assim como determinado acima, representa uma previsão da série temporal a qual se deseja estimar obtido a partir de f e ε .

No contexto deste trabalho, o objetivo da aproximação gerada por uma rede neural é estimar uma observação futura y_k através de uma função de ativação, $y_k \approx \varphi(v_k)$ (Equação (4.3)). Para tanto, é necessário um vetor de pesos $\hat{\omega}_n$ que estima ω_0 , determinado pela minimização do Erro Quadrático Médio (Equação (4.10)) ao aproximar o modelo ao valor observado da série temporal. Por esta construção, a aproximação de y_k , denotada por \hat{y}_k , pode ser escrita em função de f como

$$\hat{y}_k = f(\mathbf{x}_k, \hat{\omega}_\eta), \quad (4.24)$$

e, para uma série temporal grande o suficiente⁶, \hat{y}_k tende ao valor observado y_k .

Admitindo-se a hipótese anterior, de que a aproximação \hat{y}_k tende a observação y_k , é esperado que $\hat{\omega}_\eta$ estime de forma acurada os pesos ω_0 .⁷ Desta forma, é possível utilizar a Série de Taylor de primeira ordem⁸ para obter uma aproximação linear de $f(\mathbf{x}_k, \hat{\omega}_\eta)$ em termos de $f(\mathbf{x}_k, \omega_0)$ [43, 170]

$$f(\mathbf{x}_k, \hat{\omega}_\eta) \approx f(\mathbf{x}_k, \omega_0) + \mathbf{f}_0^T (\hat{\omega}_\eta - \omega_0), \quad (4.25)$$

onde

$$\mathbf{f}_0^T = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_k, \omega_0)}{\partial \omega_{0,1}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_k, \omega_0)}{\partial \omega_{0,2}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_k, \omega_0)}{\partial \omega_{0,m}} \right), \quad (4.26)$$

com m representando o número elementos do vetor de pesos ω_0 da rede neural. A diferença entre a observação y_k e a previsão \hat{y}_k é dada pela diferença das Equações (4.23) e (4.24) [43],

$$y_k - \hat{y}_k = f(\mathbf{x}_k, \omega_0) + \varepsilon_k - f(\mathbf{x}_k, \hat{\omega}_\eta) \approx \varepsilon_k - \mathbf{f}_0^T (\hat{\omega}_\eta - \omega_0), \quad (4.27)$$

⁶Se uma amostra possui um número de variáveis grande o suficiente, esta amostra satisfaz a Lei dos Grandes Números, garantindo que haja convergência da média. A Lei dos Grandes Números é enunciado da seguinte forma: sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias com esperanças finitas e $S_n = X_1 + X_2 + \dots$, então a sequência $\{X_n : n \geq 1\}$ satisfaz a Lei dos Grandes Números se $\frac{S_n}{n} - E\left[\frac{S_n}{n}\right] \rightarrow 0$ [111].

⁷Se $\hat{y}_k \rightarrow y_k$, assume-se que os parâmetros obtidos pela aproximação tendem aos ideais, isto é, $\hat{\omega}_\eta \rightarrow \omega_0$.

⁸Para modelos não lineares, modelos locais produzem resultados similares aos produzidos através de Série de Taylor [89].

sendo possível obter o valor esperado da Equação (4.27),

$$E[y_k - \hat{y}_k] \approx E[\varepsilon_k] - \mathbf{f}_0^T E[\hat{\omega}_\eta - \omega_0] \approx 0, \quad (4.28)$$

uma vez que, por hipótese, $\varepsilon_k \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ e $\hat{\omega}_\eta$ estima adequadamente ω_0 . Com isto, analiticamente, para uma série temporal grande o suficiente, mostra-se que $\hat{y}_k \rightarrow y_k$.

Um outro aspecto a analisar é a variância, uma vez que um bom modelo preditivo é aquele com capacidade explanatória e que, ao mesmo tempo, minimiza a variância. Assim, a variância da diferença entre a observação y_k e a previsão \hat{y}_k , na Equação (4.27), é expressa por [43, 67, 89]

$$\text{var}[y_k - \hat{y}_k] \approx \text{var}[\varepsilon_k] - \text{var}[\mathbf{f}_0^T (\hat{\omega}_\eta - \omega_0)]. \quad (4.29)$$

Neste ponto, é necessário determinar o melhor estimador para $\hat{\omega}_\eta - \omega_0$ e isto é feito a partir do Teorema de Gauss-Markov.

Teorema 4.2 (Teorema de Gauss-Markov). *Seja $\hat{\beta}$ um estimador pelo método de mínimos quadrados do parâmetro β . Suponha \mathbf{Y} tenha um vetor de médias μ e matriz de variâncias $\sigma^2 \mathbf{I}$, e suponha que $\mu = \mathbf{F}\beta$, onde \mathbf{F} é uma matriz de posto completo. Então, pelo método de mínimos quadrados,*

$$\hat{\beta} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Y} \quad (4.30)$$

é o melhor estimador não viesado de β , onde melhor diz respeito à

$$\text{var}(a^T \hat{\beta}) \leq \text{var}(a^T \tilde{\beta}), \quad \forall a \in \mathbb{R}^p, \quad (4.31)$$

onde $\tilde{\beta}$ é qualquer outro estimador não viesado e a^t são constantes conhecidas.

Dem.: 1. *A condição para que $\tilde{\beta}$ seja linear e não viesado é que $\tilde{\beta} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ para alguma matriz que satisfaça*

$$E(\tilde{\beta}) = \mathbf{A}\mu = \mathbf{A}\mathbf{F}\beta = \beta \quad (4.32)$$

para todo β . Então, se $\mathbf{A}\mathbf{F}$ é uma matriz de posto completo, $\mathbf{A}\mathbf{F} = \mathbf{I}$. Definindo

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T, \quad (4.33)$$

então é possível escrever

$$\tilde{\beta} = \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{Y} + (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Y} \quad (4.34)$$

fazendo $\hat{\beta} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Y}$, tem-se

$$\tilde{\beta} = \mathbf{B}\mathbf{Y} + \hat{\beta} \quad (4.35)$$

e $\mathbf{B}\mathbf{F} = 0$. Para um vetor qualquer a , da definição da variância, obtém-se

$$\text{var}(a^T \tilde{\beta}) = \text{var}(a^T \hat{\beta}) + \text{var}(a^T \mathbf{B}\mathbf{Y}) + 2\text{cov}(a^T \hat{\beta}, a^T \mathbf{B}\mathbf{Y}). \quad (4.36)$$

Para provar o teorema basta mostrar que a covariância é zero. Calculando a covariância

$$\begin{aligned} \text{cov}(a^T \hat{\beta}, a^T \mathbf{B}\mathbf{Y}) &= a^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \text{var}(\mathbf{Y} \mathbf{B}^T a) \\ &= \sigma^2 a^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Y} \mathbf{B}^T a \end{aligned} \quad (4.37)$$

percebe-se que esta assume o valor zero, uma vez que $\mathbf{B}\mathbf{F} = 0$ e, por conseguinte, $\mathbf{F}^T \mathbf{B}^T = 0$.

A conclusão do teorema mostra que, a partir do método de mínimos quadrados, é possível encontrar o melhor estimador não viesado dentre os estimadores lineares não viesados. Ainda assim, pelo Teorema de Gauss-Markov, com $\hat{\beta} = \hat{\omega}_\eta - \omega_0$, o melhor estimador de $\hat{\omega}_\eta - \omega_0$ é representado por

$$\hat{\omega}_\eta - \omega_0 = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Y}, \quad (4.38)$$

onde $\mathbf{Y} = (y_1 - \hat{y}_1, y_2 - \hat{y}_2, \dots, y_n - \hat{y}_n)^T$ é o vetor das diferenças entre o valor observado y_k e a aproximação \hat{y}_k e \mathbf{F} é uma matriz Jacobiana com dimensões $n \times m$,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,1}} & \frac{\partial f_1(x_1, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,2}} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_1, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,m}} \\ \frac{\partial f_2(x_2, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,1}} & \frac{\partial f_2(x_2, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,2}} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_2, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_n, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,1}} & \frac{\partial f_n(x_n, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,2}} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_n, \hat{\omega}_\eta)}{\partial \hat{\omega}_{\eta,m}} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

com n representando o número de valores observados e m , o número de pesos da rede neural. A variância da diferença dos pesos, desta forma, é dada por [43, 68, 83, 89, 135]

$$\text{var}[\hat{\omega}_\eta - \omega_0] = \sigma_\varepsilon^2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}. \quad (4.40)$$

Usando o fato de que $\text{var}(\mathbf{f}_0^T (\hat{\omega}_\eta - \omega_0)) = \mathbf{f}_0^T \text{var}(\hat{\omega}_\eta - \omega_0) \mathbf{f}_0$, a variância da melhor aproximação gerada pela rede neural é dada por

$$\text{var}[y_k - \hat{y}_k] \approx \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{f}_0^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{f}_0. \quad (4.41)$$

Então, da definição do intervalo de confiança, tem-se que, para um valor de previsão \hat{y}_k ,

$$\hat{y}_k - z_\alpha \text{var}[y_k - \hat{y}_k] \leq y_k \leq \hat{y}_k + z_\alpha \text{var}[y_k - \hat{y}_k] \quad (4.42)$$

seriam os limites do valor y_k observável, onde z_α é o coeficiente padronizado ou *z-score* do intervalo com nível de confiança de $(1 - 2\alpha)$. Note que z_α indica a divisão do resultado das previsões em 100 percentis, adotando a distribuição normal padrão, $N(0, 1)$, cujos resultados considerados no intervalo de confiança de $(1 - 2\alpha)$ são determinados a partir dos valores da tabela normal padrão de z_α e de $z_{(1-\alpha)}$, com $z_\alpha = z_{(1-\alpha)}$. Substituindo $\text{var}[y_k - \hat{y}_k]$ da Equação (4.41) na Equação (4.42), obtém-se, por fim, o intervalo de confiança

$$\hat{y}_k - z_\alpha \sigma_\varepsilon \left(1 + \mathbf{f}_0^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{f}_0\right)^{\frac{1}{2}} \leq y_k \leq \hat{y}_k + z_\alpha \sigma_\varepsilon \left(1 + \mathbf{f}_0^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{f}_0\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.43)$$

É preciso destacar que a dificuldade inerente à construção do intervalo de confiança analiticamente reside, principalmente, na função f ser desconhecida. Desta forma, torna-se fundamental a adoção de outros métodos, entre estes computacionais, como o de *bootstrap*. A ideia por trás da teoria do *bootstrap* é gerar várias amostras para construir inferências de uma forma menos complexa [67].

Dado um conjunto de dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, uma amostra obtida por *bootstrap* é definida como uma permutação de \mathbf{x} tal que $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, com x_i^* representando a permutação de elementos de \mathbf{x} [67, 79]. Em outras palavras, \mathbf{x}^* é uma reorganização dos dados de \mathbf{x} . Quando uma amostra \mathbf{x}^* é utilizada

para treinar uma rede neural, o algoritmo de aprendizagem é aplicado nas diversas configurações dos dados, de forma a gerar diversas saídas. Se o objetivo for estimar um parâmetro $\hat{\theta}$, é possível determinar a média e o desvio padrão de $\hat{\theta}$ a partir dos vários $\hat{\theta}^*$ gerados pela rede neural para os diversos \mathbf{x}^* .

Uma possibilidade do *bootstrap* é a de agrupar os dados em blocos de tamanho fixo, o que traz vantagens quando considera-se dados dispostos em séries temporais. Este tipo de amostragem dos dados pretende reter a correlação presente em observações com espaçamento menor que o tamanho do bloco [67]. Assim, no *bootstrap* por blocos é possível escolher o comprimento de blocos que serão utilizados para gerar a nova amostra \mathbf{x}^* , cuja permutação deixa de ser por elementos e passa a ser por bloco.

O método de *bootstrap* tem, entre as vantagens, a tendência de gerar melhores resultados em relação a outros métodos por incorporar a variabilidade da inicialização aleatória⁹ [88]. Assim, a partir do *bootstrap*, cria-se um conjunto Ψ de B de previsões

$$\Psi = \{f(\mathbf{x}^*, \hat{\omega}_i)\}_{i=1}^B. \quad (4.44)$$

Em outras palavras, os dados de entrada \mathbf{x} são aleatoriamente reamostrados em B novas amostras e, por conseguinte, utilizados para treinar B redes neurais. Neste contexto, o parâmetro que deseja-se estimar é a média das previsões,

$$f_{\text{médio}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B f(\mathbf{x}^*, \hat{\omega}_i), \quad (4.45)$$

onde, pelo Teorema Central do Limite¹⁰, garante-se que a distribuição da média da previsão \hat{y} seja uma distribuição normal e, portanto, simétrica em torno da média

⁹A inicialização aleatória diz respeito ao vetor inicial atribuído, por exemplo, aos pesos w_{ki} de cada um dos neurônios da rede neural. Do contrário, todos os pesos da rede neural teriam os mesmos valores, tornando a tarefa do aprendizado mais difícil ou até mesmo impossível; este procedimento, ainda, permite que haja independência na determinação dos pesos.

¹⁰O Teorema Central do Limite estabelece que a distribuição amostral da média de um processo aleatório tende a ter uma distribuição normal. Mais informações podem ser obtidas em Magalhães [111].

estimada. O intervalo de confiança da previsão da rede neural é, então, uma quantificação do quanto $f_{\text{médio}}(\mathbf{x})$ estima $f(x_k, \omega_0)$, isto é, a distribuição $P(f(x_k, \omega_0) | f_{\text{médio}}(\mathbf{x}))$ é a distribuição de $f(x_k, \omega_0)$ e é centrada em $f_{\text{médio}}(\mathbf{x})$ [88].

Por sua vez, a variância de um conjunto de previsões $f(\mathbf{x}, \hat{\omega}_i)$ é dada por

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B \left(f(\mathbf{x}, \hat{\omega}_i) - f_{\text{médio}}(\mathbf{x}) \right)^2, \quad (4.46)$$

que nada mais é que a variância amostral das previsões geradas pelas redes neurais. Ressalta-se que o cálculo da variância amostral justifica-se pelo gasto computacional, uma vez que o cálculo de todas as $f(\mathbf{x}^*, \hat{\omega}_i)$ acaba se tornando impraticável. Assumindo que a média da previsão gerada pelas redes neurais é uma aproximação do valor real, tem-se que o intervalo de confiança, então, pode ser descrito por

$$f_{\text{médio}}(\mathbf{x}) - z_\alpha \hat{\sigma}_m(\mathbf{x}) \leq f(x_k, \omega_0) \leq f_{\text{médio}}(\mathbf{x}) + z_\alpha \hat{\sigma}_m(\mathbf{x}), \quad (4.47)$$

onde $(1 - 2\alpha)$ é o nível de confiança desejado.

É importante ressaltar que, embora possa ser estabelecido um intervalo de confiança para a previsão obtida através das redes neurais, não há garantia sobre a inclusão do valor observado neste intervalo de confiança. Assim, a única afirmação possível que decorre do intervalo de confiança é onde a previsão estará situada com determinado nível de confiança. Ainda assim, tal estimativa é relevante para determinar a eficácia da previsão em relação ao valor observado, principalmente quanto a necessidade de melhora do modelo e inclusão de novos parâmetros à rede neural.

Uma vez tendo estabelecidas as principais ferramentas para o tratamento das séries temporais, no próximo capítulo são apresentadas análises comparativas dos núcleos de inflação oficiais e dos baseados em *wavelets*. No capítulo seguinte, Capítulo 6, são apresentados as previsões e os respectivos intervalos de confiança para os diversos núcleos de inflação.

5 CONSTRUÇÃO DE NÚCLEOS DE INFLAÇÃO

O estudo e a elaboração de núcleos de inflação, por si só, são objetos de estudo para a determinação do comportamento persistente da inflação e, por conseguinte, das dinâmicas do mercado. No Capítulo 2 foram apresentados o contexto de surgimento dos núcleos de inflação, assim como os núcleos de inflação utilizados pelo Banco Central do Brasil, e no Capítulo 3, a construção teórica que possibilita a estruturação de núcleos baseados em *wavelets*.

Os dados utilizados na presente análise são referentes ao período de julho de 2006 a dezembro de 2019. Este período foi escolhido devido a disponibilidade dos núcleos de inflação oficiais por exclusão, que sofreram mudanças de metodologia de cálculo, conforme apresentado na Subseção 2.2.1; adicionalmente, a limitação dos dados até dezembro de 2019 é realizada em virtude da pandemia da Covid-19, que acaba por causar efeitos na economia ainda não estudados e em curso. Para a análise da inflação no ano de 2020, e enquanto durar a pandemia, acredita-se que seja necessária a incorporação de dados adicionais que extrapolam os presentes no IPCA; esta, inclusive, figura entre as proposta de continuidade deste trabalho. Todas as séries temporais utilizadas neste trabalho foram obtidas no Sistema Gerenciador de Séries Temporais do Banco Central [13].

Este capítulo está dividido em três seções: a primeira trata da construção dos núcleos de inflação e a segunda traz uma comparação destes com os núcleos oficiais; a terceira seção, por sua vez, apresenta as considerações finais sobre a comparação entre os núcleos de inflação. Alguns aspectos que são analisados para realizar o comparativo são a estacionariedade, a ausência de viés e o ajustamento, conforme apresentado na Seção 5.2.

5.1 Construção dos Núcleos de Inflação Baseados em Wavelets

O primeiro passo para a construção de um núcleo de inflação a partir das *wavelets* é determinar quantas decomposições serão realizadas no índice de inflação e, para reduzir os ruídos de curto prazo, quantos detalhes serão incorporados à esta aproximação. O processo utilizado neste trabalho envolve a decomposição da série temporal em 5 escalas, com reconstrução utilizando apenas 3 níveis de detalhes, baseado em Denardin *et al.* [62]. Destaca-se que outras configurações foram testadas, sendo esta a que apresentou melhores resultados de previsão, conforme serão apresentados no Capítulo 6.

A Figura 5.1 ilustra a decomposição do sinal $f(t)$ nas 5 escalas, conforme descrito na Equação (3.22), em que o IPCA é reescrito como a soma de uma aproximação f_m e seus detalhes d_m , com $1 \leq m \leq 5$.

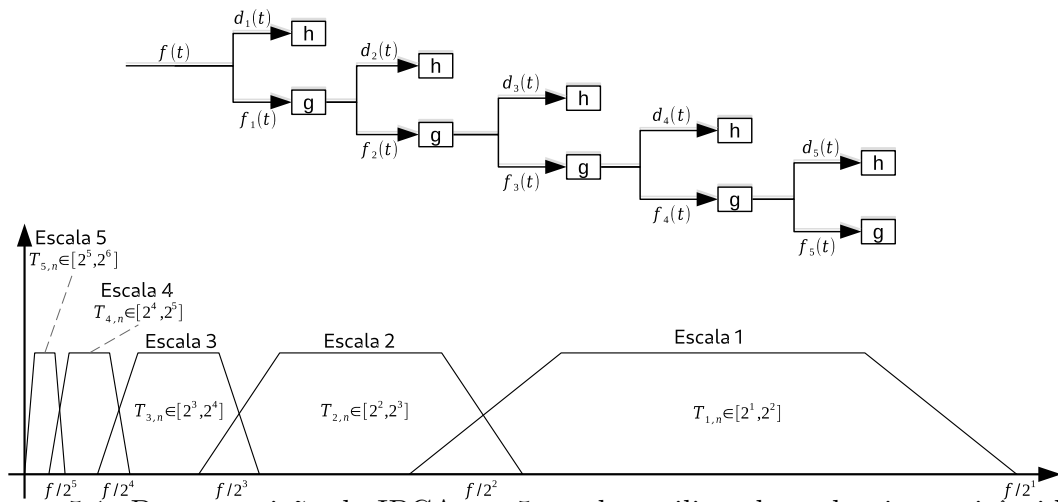


Figura 5.1: Decomposição do IPCA em 5 escalas utilizando o algoritmo pirâmide. Baseado em [112].

Na Figura 5.1 tem-se a decomposição em 5 escalas utilizando o algoritmo pirâmide descrito na Subseção 3.2.5, em que $f(t) = f_5(t) + \sum_{m=1}^5 d_m$. Destaca-se que no processo de decomposição do sinal $f(t)$, na primeira escala, os coeficientes

$T_{1,n}$ evidenciam a periodicidade dos detalhes do sinal no intervalo $[2^1; 2^2]$; na segunda escala, $[2^2; 2^3]$ e assim sucessivamente, até a escala 5, com $T_{5,n} \in [2^5; 2^6]$. A escolha pela manutenção de apenas três níveis de detalhes justifica-se no processo acima descrito da decomposição, uma vez que permite a concentração da análise em frequências referentes ao período até 16 meses; ademais, esta construção possibilita a obtenção de uma nova série temporal com um nível reduzido de ruídos em comparação com o sinal original.

Na construção dos núcleos de inflação baseados em *wavelets*, emprega-se frequentemente as família das daubechies e das symlets, devido as propriedades que essas *wavelets* apresentam: ortogonais e de suporte compacto. Ainda, vários estudos vêm mostrando que as *wavelets* são capazes de representar a inflação como descrita na Equação (2.4) [46, 62, 65]. Nestes, o núcleo de inflação π_t^* é caracterizado pelos componentes de mais baixa frequência e ϵ_t , pelos componentes de mais alta frequência que compõem o índice de inflação. Objetiva-se com esta construção reduzir a volatilidade da série temporal através da eliminação dos ruídos contidos nos componentes transitórias do sinal. A Figura 5.2 apresenta uma comparação do IPCA com (a) os núcleos de inflação oficiais, (b) os núcleos de inflação baseados na *wavelets* daubechies e (c) symlets.

Na Figura 5.2(b)-(c) é possível observar que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* possuem um comportamento mais suavizado quando comparados aos núcleos de inflação oficiais. Por este motivo, a tendência da inflação é melhor retratada pelos núcleos de inflação baseados em *wavelets*, uma vez que geram um menor número de artefatos na representação da tendência da inflação, indicados pelas setas na Figura 5.2(a), onde são exibidos os núcleos de inflação oficiais. Neste contexto, é denominado artefato uma entrada ou uma sequência de entradas do núcleo de inflação cujas representações não caracterizam adequadamente o movimento de tendência da inflação, isto é, são entradas em que há supervalorização ou subvalorização do índice de inflação.

É importante ressaltar que muitos artefatos têm origem nas mudanças abruptas no comportamento do IPCA que derivam de distúrbios da economia, não apenas a brasileira, como a mundial. Alguns exemplos que ilustram tais eventos são a crise de 2008 gerada pela disseminação de crédito indiscriminado, principalmente nos EUA, e a crise no setor elétrico brasileiro em 2014. Os artefatos indicados na Figura 5.2(a)-(c) representam eventos:

- em março de 2008, houve uma pressão inflacionária devido o aumento de preços de alimentos, principalmente do trigo, além do aumento de tarifas de energia [92]. Neste, o IPCA-EX2 e o IPCA-EX3 superam o IPCA;
- em janeiro de 2009, o IPCA acumulado supera o dos anos anteriores. Como esses núcleos excluem alimentos, pesam em seu cálculo o aumento dos preços dos transportes e despesas pessoais [93, 94]. Figuram como fatores de pressão inflacionária o cenário de recessão, a alta do dólar no Brasil, alta do preço do petróleo e falência de várias instituições financeiras no mundo [71];
- em janeiro de 2011, novamente o IPCA-EX0 e o IPCA-EX1 superam o IPCA. Mais uma vez, o impacto de transportes pode ser observada, assim como o de outras despesas como habitação [95];
- em junho de 2013, houveram uma série de manifestações devido o aumento de tarifas no transporte em várias cidades brasileiras [74]. O preço dos alimentos, entre eles o do tomate, causou impactos na inflação em 2013 até maio; percebe-se que a exclusão de alimentos resulta uma superestimação do IPCA pelos núcleos por exclusão, uma vez que estes apresentaram desaceleração nos preços a partir de junho [96, 156];

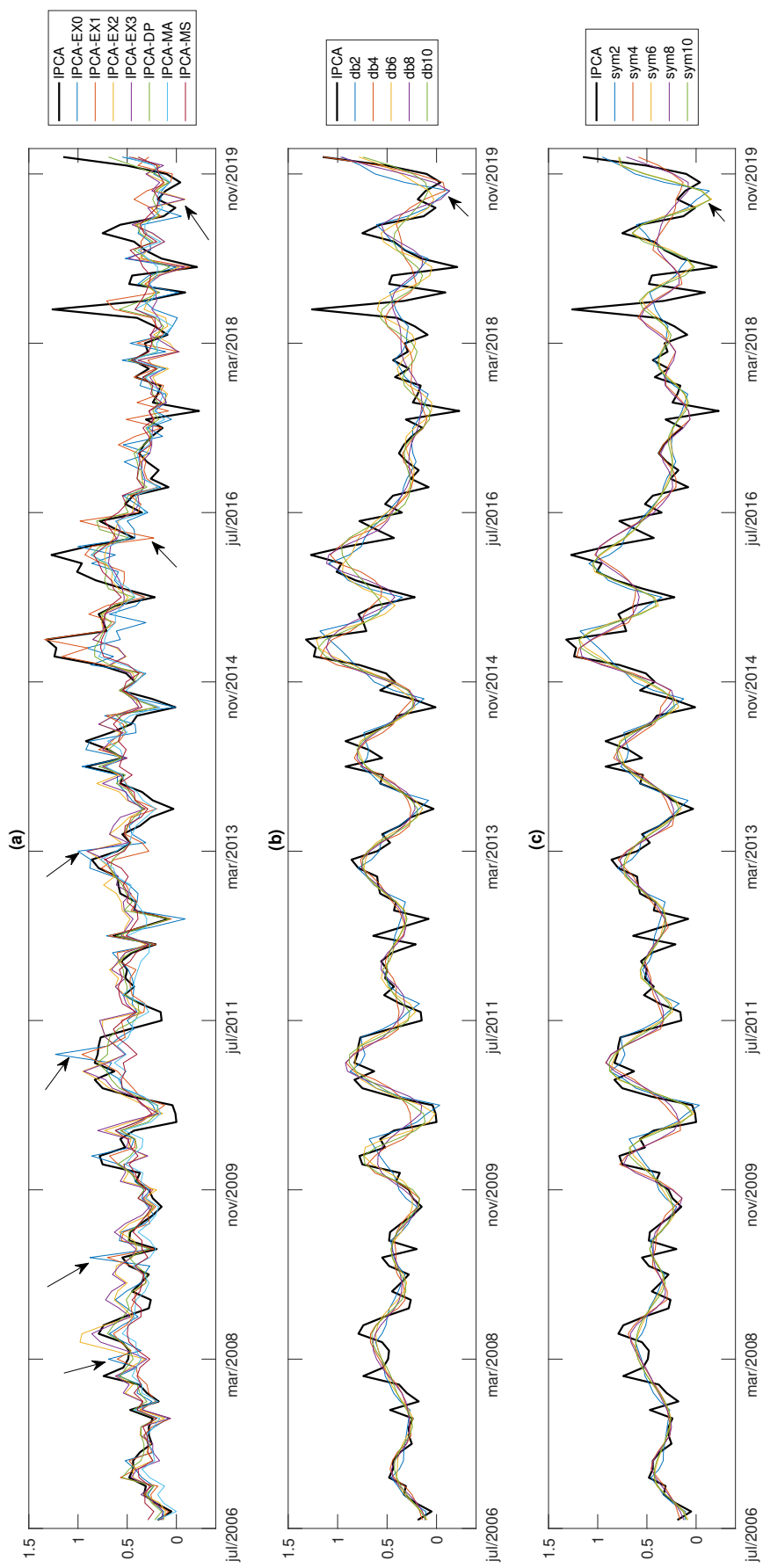


Figura 5.2: Núcleos de inflação: (a) oficiais do Banco Central do Brasil [13], (b) baseado em *wavelets* da família daubechies e (c) *symlets*.

- em agosto de 2019, o IPCA-EX1 apresenta um valor superior ao observado, enquanto que o IPCA-EX2 e o IPCA-EX3 não acompanham a tendência. Este último comportamento pode ser observado nos núcleos baseados em *wavelets*, uma vez que há um crescimento abrupto em dezembro de 2019.

Ainda que o número de artefatos produzido seja menor, ou o grau de suavização dos núcleos de inflação baseados em *wavelets* seja maior que o dos oficiais, mais resultados são necessários para poder realizar afirmações que permitam determinar quais características dos núcleos de inflação trazem benefícios para a análise da evolução dos preços na economia. Tais análises comparativas são apresentadas na próxima seção.

5.2 Comparação entre Núcleos de Inflação Oficiais e Núcleos de Inflação Baseados em Wavelets

Para determinar a qualidade dos núcleos de inflação, é necessário a realização de alguns testes. Um dos primeiros aspectos fundamentais é que as medidas para os núcleos de inflação apresentem uma média semelhante a original, entretanto com uma volatilidade menor [65, 155]. Outro aspecto é a estacionariedade, que versa sobre a presença de componentes não determinísticos no sinal, e a ausência de viés, que trata do comportamento do núcleo de inflação ao longo do tempo. Por fim, o grau de ajustamento expressa a dinâmica entre os núcleos de inflação e o IPCA, possibilitando a verificação do comportamento do IPCA em relação à tendência identificada pelos núcleos de inflação.

5.2.1 Comportamento dos Núcleos de Inflação

Como já mencionado, uma das grandes dificuldades no estudo da evolução dos preços em um determinado mercado é a de identificar a tendência da inflação. Esta dificuldade, normalmente, é derivada do excesso de ruídos presentes em índices de inflação, como o IPCA. Então, faz-se imperativo o entendimento do comportamento persistente da inflação, uma vez que os núcleos de inflação trazem vantagens em relação aos índices de inflação tradicionais. Dentre estas vantagens está a redução da volatilidade.

Nesta primeira análise, os núcleos de inflação devem ser capazes, primeiramente, de reproduzir a tendência da inflação. Essa manutenção das características do índice de preços é traduzida através da média do núcleo de inflação, que deve ser semelhante à do IPCA; a redução da volatilidade, por sua vez, pode ser visualizada através do conjunto de métricas descritas pelo mínimo, máximo e desvio padrão, tanto do IPCA, quanto dos núcleos de inflação. Na Tabela 5.1 são apresentadas métricas para a avaliação do comportamento dos núcleos de inflação, calculados a partir de toda extensão da série temporal utilizada.

Tabela 5.1: IPCA e núcleos de inflação: média, mínimo, máximo e desvio padrão.

	Média	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão
IPCA	0,44951	-0,23000	1,3200	0,28659
IPCA-EX0	0,42543	-0,09000	1,2300	0,23169
IPCA-EX1	0,43321	-0,13000	1,3400	0,22323
IPCA-EX2	0,45920	-0,09000	0,9800	0,21609
IPCA-EX3	0,45549	-0,08000	0,9400	0,20652
IPCA-DP	0,44759	0,07000	0,8600	0,18207
IPCA-MA	0,37790	0,00000	0,8700	0,16959
IPCA-MS	0,42988	0,13000	0,8400	0,15236
db2	0,45306	-0,13435	1,1792	0,23386
db4	0,44991	-0,08733	1,1722	0,23307
db6	0,44951	0,01519	1,2138	0,23812
db8	0,44985	-0,13024	1,1137	0,23727
db10	0,44828	0,06546	1,1992	0,23155
sym2	0,45306	-0,13435	1,1792	0,23386
sym4	0,44767	0,06115	1,2124	0,22491
sym6	0,45043	-0,15783	1,1896	0,24180
sym8	0,44816	0,06311	1,1788	0,22882
sym10	0,45052	-0,14289	1,1895	0,24359

Em relação à média, o núcleo de inflação que apresenta a média mais próxima a do IPCA é o baseado na db6, seguido pela db8 e db4. Os núcleos de inflação baseados em *wavelets* que tiveram médias mais díspares foram a db2 e a sym2. Quando trata-se dos núcleos de inflação oficiais, é possível perceber uma diferença maior em relação à média do IPCA que a dos baseados em *wavelets*, sendo do IPCA-MA e do IPCA-EX0 as médias que distam mais a do IPCA. Neste quesito, os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, com exceção da db2 e sym2, apresentaram-se mais próximos da média do IPCA quando comparados com os núcleos oficiais.

Em relação ao mínimo, nenhum dos núcleos de inflação ficou aquém ao valor mínimo do IPCA; já em relação ao máximo, o IPCA-EX1 apresenta valor superior ao máximo do IPCA. Estar situado dentro da faixa delimitada pelo mínimo e máximo do IPCA proporciona elementos para inferência de que o núcleo de inflação não produz artefatos; ademais, é um primeiro indicativo de redução de volatilidade em relação ao índice original.

Por fim, para análise de volatilidade, será utilizado o desvio padrão. Núcleos de inflação devem, idealmente, apresentar um desvio padrão menor que o do IPCA, uma vez que objetiva-se uma redução de volatilidade para a observação do componente persistente da inflação. Na Tabela 5.1 pode ser observado, para todos os núcleos de inflação, que os desvios padrões foram menores que do IPCA. Os menores valores para o desvio padrão entre os núcleos de inflação são observados para os núcleos de inflação oficiais, em especial o IPCA-MS, o IPCA-MA e o IPCA-DP. Os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, para o período analisado, apresentam a menor diferença, em especial o sym10, o sym6 e o db6. Neste critério, os núcleos de inflação oficiais apresentaram um resultado melhor que os baseados em *wavelets*.

Quando analisados conjuntamente os quesitos de tendência e de volatilidade, dentre os núcleos de inflação oficiais, o IPCA-DP apresenta o melhor desempenho, seguido pelo IPCA-EX3 e pelo IPCA-EX2; para os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, ressalta-se três casos que possuem comportamento semelhante

nestes quesitos: o sym8, o sym4 e o db10. Nota-se que o desvio padrão encontrado com núcleos de inflação gerados a partir de *wavelets* poderiam ser decrescidos com a redução de detalhes; entretanto, tal estratégia não é interessante, uma vez que seriam desconsiderados dados que representam um horizonte de tempo entre 8 e 16 meses presentes no nível de detalhe 3, restando apenas a análise de tempo até 8 meses ou menos, conforme Figura 5.1.

5.2.2 Estacionariedade

O segundo teste versa sobre a estacionariedade de uma série temporal. De forma geral, uma série temporal estacionária é caracterizada por oscilações aleatórias em torno de uma média constante, com uma variância igualmente constante [46, 114, 119]. Este aspecto é importante para o núcleo de inflação, pois, caso a série temporal seja estacionária, há a possibilidade de inferência quanto ao resultado de choques econômicos, principalmente quando trata-se dos efeitos transitórios ou dos permanentes [62]. Ressalta-se que a estacionariedade de uma série temporal é significativa, também, para o processo de previsão da inflação, uma vez que é possível determinar os comportamentos determinísticos desta.

Objetivando testar a estacionariedade das medidas de núcleo de inflação, aplica-se testes da raiz unitária. Mais especificamente, são utilizados dois testes: o teste Aumentado de Dickey-Fuller (ADF) e o teste de Phillips-Peron (PP) [64, 119]. A explicação da estacionariedade reside no fato do polinômio autorregressivo possuir uma raiz sobre o círculo unitário, o que possibilita a conclusão de que a série temporal é não estacionária e, portanto, pode conter, ao mesmo tempo, processos randômicos (ou pseudo-randômicos) e processos determinísticos intermitentes [3, 119, 155]. Desta forma, se a série temporal é não estacionária, diz-se que o processo de previsão carrega componentes que não podem ser previstos devido às características não determinísticas do sinal.

Para o teste ADF, uma série temporal y_t pode ser estimada por uma polinômio autorregressivo de ordem 1, caracterizada por

$$y_t = \mu + \delta t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

com $t = 2, 3, \dots, n$ e n o tamanho da série temporal y_t ; μ , δ e γ são coeficientes da autorregressão e $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ é um ruído, independente e identicamente distribuído [64, 152]. São testadas duas hipóteses: a hipótese nula, em que $\gamma = 0$ e $\delta = 0$, afirma que o sinal é não estacionário, enquanto que, para o sinal ser estacionário, deve-se ter $\gamma < 0$ e $\delta \neq 0$; esta condição é verificada através do teste de hipótese pelo teste t de Student.

O teste PP é um teste estatístico não paramétrico com regressão igualmente definida pela Equação (5.1). A diferença em relação ao ADF é a suposição de que o parâmetro ε_t não é, necessariamente, independente e identicamente distribuído. Esta é uma suposição importante de ser testada, uma vez que sabe-se que há, sim, alguma correlação entre os diversos horizontes de tempo quando trata-se de índices econômicos, em especial a inflação.

Os testes foram realizados utilizando o modelo *autoregressive model with drift* (ARD)¹, uma vez que o IPCA e os núcleos de inflação apresentados neste trabalho não possuem média zero e, ainda, não há como inferir sobre o comportamento da tendência ao longo do tempo; considerou-se, ainda, defasagens de 1, 3, 6, 9 e 12 meses. Os resultados são apresentados abaixo, na Tabela 5.2, em que foram utilizados níveis de confiança de 1%, 5% e 10%.

Quando considerado uma defasagem de 1 mês, percebe-se que os testes ADF e PP garantem que não há raiz unitária com nível de significância de 1% para a maioria dos núcleos de inflação, com exceção do db4 que rejeita a hipótese de existência de raiz unitária com significância de 5%. Desta forma, é possível

¹Mais informações em Fuller *et al.* [73].

Tabela 5.2: Testes da raiz unitária: teste aumentado de Dickey-Fuller (ADF) e teste de Phillips-Perron (PP).

	1 mês		3 meses		6 meses		9 meses		12 meses	
	ADF	PP	ADF	PP	ADF	PP	ADF	PP	ADF	PP
IPCA	-5.9254*	-6.1006*	-5.1851*	-6.0273*	-4.4355*	-5.8903*	-2.4799	-5.5880*	-2.3575	-5.7365*
IPCA-EX0	-5.0594*	-8.0569*	-4.0444*	-8.4641*	-3.7791*	-8.8696*	-1.4409	-9.0429*	-1.4141	-9.4798*
IPCA-EX1	-5.5621*	-7.2445*	-4.1016*	-7.4152*	-3.2972**	-7.7008*	-1.9728	-7.8894*	-1.5737	-8.2270*
IPCA-EX2	-4.0694*	-4.8329*	-2.7761***	-4.7256*	-1.9760	-4.9516*	-1.9591	-5.2537*	-1.8526	-5.4990*
IPCA-EX3	-4.1151*	-5.3394*	-2.5671	-5.3092*	-1.7730	-5.7297*	-1.9340	-6.1447*	-1.7328	-6.4998*
IPCA-DP	-4.5150*	-5.3310*	-3.5700*	-5.3402*	-2.9931**	-5.5713*	-2.0564	-5.6868*	-2.0617	-5.9403*
IPCA-MA	-4.3376*	-4.8310*	-3.6576*	-4.8174*	-2.9445**	-4.9552*	-1.9897	-4.9779*	-1.9156	-5.1667*
IPCA-MS	-3.5455*	-4.1208*	-2.2251	-3.9144*	-1.9585	-4.1540*	-1.9730	-4.3720*	-1.8723	-4.5471*
db2	-5.7976*	-3.9707*	-5.2612*	-4.3587*	-3.6934*	-3.6545*	-2.4973	-3.0603**	-1.9258	-2.9141**
db4	-7.9332*	-3.4070**	-3.9408*	-4.0239*	-2.5447	-3.4508**	-3.9108	-2.5005	-2.1975	-2.2063
db6	-10.5407*	-3.8217*	-3.6111*	-4.3937*	-1.8892	-3.6738*	-3.4333**	-2.8176***	-3.2633	-2.7017***
db8	-11.6430*	-3.5525*	-3.6323*	-4.2286*	-1.7362	-3.5784*	-2.5881***	-2.5934***	-3.4736	-2.3990
db10	-11.7532*	-3.5930*	-4.1210*	-4.2463*	-1.6073	-3.7018*	-2.3232	-2.7148***	-2.5495	-2.5585
sym2	-5.7976*	-3.9707*	-5.2612*	-4.3587*	-3.6934*	-3.6545*	-2.4973	-3.0603**	-1.9258	-2.9141**
sym4	-8.1046*	-3.6624*	-4.1255*	-4.1600*	-2.6236***	-3.6258*	-3.4999*	-2.8267***	-2.2873	-2.6243***
sym6	-10.8065*	-3.8999*	-3.2942**	-4.4393*	-1.9201	-3.6702*	-3.2105**	-2.8765***	-3.2277**	-2.7349***
sym8	-11.1528*	-3.5686*	-3.7245*	-4.1954*	-1.5777	-3.6754*	-2.7599***	-2.7198***	-3.1478**	-2.5290
sym10	-12.1998*	-3.8712*	-4.2242*	-4.4588*	-1.5320	-3.6706*	-2.2501	-2.8175***	-2.6419	-2.7052***

Nota: *, ** e *** indicam, respectivamente, rejeição da hipótese de raiz unitária com nível de significância de 1%, 5% e 10%.

afirmar que, para uma defasagem de 1 mês, os núcleos de inflação apresentam um comportamento estacionário.

A estacionariedade é observada na defasagem de três meses com o teste ADF para a maioria dos núcleos de inflação, exceto IPCA-EX3 e IPCA-MS, que não foram capazes de rejeitar a hipótese de raiz unitária, não sendo possível afirmar que são séries temporais estacionárias; adicionalmente, o nível de significância aumenta para IPCA-EX2 (10%) e sym6 (5%). Com respeito ao teste PP, assim como para a defasagem de 1 mês, é possível atestar a estacionariedade das séries temporais dos núcleos de inflação com significância de 1%.

Para uma defasagem de 6 meses, o teste PP continua rejeitando a hipótese de raiz unitária com nível de significância de 1%, exceto para o núcleo baseado na db4, em que o nível de significância da rejeição é de 5%. Com o teste ADF, apenas os seguintes núcleos de inflação oficiais não possuem raiz unitária: IPCA-EX0, IPCA-EX1, IPCA-DP e IPCA-MA; dos baseados em *wavelets* que não possuem raiz unitária, tem-se db2, sym2 e sym4. Percebe-se que, para o teste ADF, a maior parte dos núcleos de inflação apresenta comportamento não-estacionário.

Para uma defasagem de 9 meses, apenas alguns núcleos de inflação baseados em *wavelets* rejeitam a hipótese de raiz unitária pelo teste ADF, entre eles db6, db8, sym4, sym6 e sym8. Pelo teste PP, apenas o núcleo de inflação db4 não rejeita a hipótese da raiz unitária. Por fim, para defasagem de 12 meses, com o teste ADF, é possível inferir que núcleos de inflação baseados em sym6 e sym8 são estacionários, enquanto que, com o teste PP, afirma-se que db4, db8, db10 e sym8 são não-estacionários.

Nota-se que, com defasagens menores, os testes ADF e PP concordam em relação à inexistência da raiz unitária e, em consequência, com o comportamento não estacionários dos núcleos de inflação. Este resultado vem, principalmente, da característica não paramétrica do teste PP, que necessita que os resíduos da série temporal sejam estacionários para afirmar sobre a estacionariedade do sinal [73]. Por outro lado, o teste ADF tem por hipótese de que ε_t é independente e identicamente distribuído, não performando adequadamente quando há correlação nos núcleos de inflação.

Destes testes, conclui-se que os núcleos de inflação são estacionários com algum nível de significância para defasagem de até 9 meses, exceto a db4 que apresenta características estacionárias com defasagens de até 6 meses. Adicionalmente, os resultados dos testes da raiz unitária indicam que há correlação entre os dados dependendo da distância temporal. Para testes com defasagem superior a 9 meses, os núcleos de inflação que possuem comportamento não estacionários são: db4, db8, db10 e sym8. Por fim, espera-se que esses componentes não estacionários influenciem nas previsões da inflação para horizontes de tempo maiores que 9 meses.

5.2.3 Ausência de Viés

Um dos critérios para avaliação dos núcleos de inflação é dado na Equação (2.5), com $E(\pi_t^*) = E(\pi_t)$, que mostra que no longo prazo a média, tanto

de núcleo de inflação, quanto do índice de inflação, devem ser iguais. Da Tabela 5.2, tem-se que todos os núcleos de inflação são estacionários para defasagem até 6 meses pelo teste PP, então é possível verificar se as séries são não viesadas através da regressão

$$\pi_t = \alpha + \beta\pi_t^* + \epsilon_t, \quad (5.2)$$

onde α e β são parâmetros para intercepto e inclinação da regressão, e ϵ_t é um ruído de média zero e variância constante. É importante ressaltar que, neste teste, são utilizados o IPCA e o núcleo de inflação para um mesmo instante t , sendo considerados estacionários nesse contexto.

No resultado obtido a partir da análise da ausência de viés, busca-se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ [22, 46, 62, 65, 114, 161]. Note que, quando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, obtém-se a própria definição de núcleo de inflação expressa na Equação (2.4), isto é, $\pi_t = \pi_t^* + \epsilon_t$.

O teste da ausência de viés, ao fornecer a definição de núcleo de inflação, provê condições para a obtenção de um núcleo de inflação, isto é, que separa os componentes persistentes e transitórios. Desta forma, é possível inferir que estes núcleos de inflação que satisfazem a condição de ausência de viés possuem a teórica capacidade preditiva da definição, que é acompanhada da obtenção da tendência do índice de inflação [45].

Na Tabela 5.3 são apresentados o intercepto α e a inclinação β para a regressão da Equação (5.2), assim como o coeficiente de determinação (R^2).

Tabela 5.3: Testes para ausência de viés dos núcleos de inflação.

	Intercepto α	Inclinação β	R^2
IPCA-EX0	0,091546 (0,034700) (0,0091583)	0,8414 (0,071682) (2,406e-23)	0,46269
IPCA-EX1	0,012877 (0,030619) (0,674650)	1,0079 (0,06287) (4,1776e-35)	0,61631
IPCA-EX2	0,079982 (0,042275) (0,060306)	0,80472 (0,083348) (1,153e-17)	0,36813
IPCA-EX3	0,09117 (0,045177) (0,045254)	0,7867 (0,090379) (3,7259e-15)	0,32136
IPCA-DP	-0,15343 (0,031094) (2,0009e-06)	1,3471 (0,064378) (1,1737e-47)	0,73236
IPCA-MA	-0,07169 (0,031964) (0,026282)	1,3792 (0,07721) (6,0656e-40)	0,66603
IPCA-MS	-0,10654 (0,049223) (0,031912)	1,2935 (0,10796) (5,1359e-24)	0,4729
db2	0,0061056 (0,02971) (0,83744)	0,97867 (0,058309) (4,1072e-37)	0,63778
db4	0,0026862 (0,029026) (0,92638)	0,99314 (0,057324) (1,5401e-38)	0,65229
db6	-0,0073233 (0,025914) (0,77784)	1,0163 (0,050977) (3,1957e-45)	0,71298
db8	0,00074241 (0,027365) (0,97839)	0,99758 (0,053842) (1,1625e-41)	0,68209
db10	-0,0098567 (0,027672) (0,72216)	1,0247 (0,054881) (4,978e-42)	0,68543
sym2	0,0061056 (0,02971) (0,83744)	0,97867 (0,058309) (4,1072e-37)	0,63778
sym4	-0,0077857 (0,030152) (0,79657)	1,0215 (0,060222) (1,3918e-37)	0,64263
sym6	0,0073307 (0,026824) (0,78498)	0,98167 (0,052506) (4,3078e-42)	0,6860
sym8	-0,0089254 (0,028735) (0,7565)	1,0229 (0,057141) (4,8152e-40)	0,66699
sym10	0,0073952 (0,026261) (0,77861)	0,98134 (0,051311) (3,4873e-43)	0,69569

Nota: Os valores entre parênteses representam, respectivamente, o desvio padrão e o p-valor para um nível de significância de 5% dos parâmetros α e β .

Da análise da Tabela 5.3, primeiramente, verifica-se os coeficientes da regressão, expresso na Equação (5.2). Para os núcleos de inflação oficiais, α varia de $-0,1534$ a $0,0915$, com desvio padrão mediano de $0,0347$, enquanto que para os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, de $-0,0099$ a $0,0074$, com desvio padrão mediano $0,0282$. Percebe-se que, para α , os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentam medidas mais próximas à zero, assim como um desvio padrão menor que os núcleos de inflação oficiais. Pela análise dos p-valores² do intercepto α , é possível afirmar que os únicos núcleos de inflação oficiais que tem $\alpha = 0$ são o IPCA-EX1 e IPCA-EX2; em relação aos núcleos de inflação baseados em *wavelets*, todos são estatisticamente nulos.

Quanto ao coeficiente β , os valores observados para os núcleos de inflação oficiais são mais díspares daquele esperado, $\beta = 1$, sendo observados o menor valor, $0,7867$ (IPCA-EX3), e o maior valor, $1,3792$ (IPCA-MA) entre estes núcleos de inflação; adicionalmente, a mediana dos β é $1,0075$ e desvio padrão mediano de $0,0772$. Para os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, o menor valor observado é $0,9787$ (db2 e sym2), enquanto o maior, $1,0247$ (db10); a mediana do coeficiente β é $0,9954$ com desvio padrão mediano $0,0560$. Assim, quando β é analisado, pode-se afirmar que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentam um comportamento menos variável em torno do valor desejado.

Quanto aos parâmetros α e β , percebe-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentam um comportamento mais próximo do desejado, isto é, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Em relação aos núcleos de inflação oficiais, apenas o IPCA-EX1 apresenta os valores de α e de β que indicam a ausência de viés.

O coeficiente de determinação, R^2 , é uma medida de ajuste que expressa a quantidade da variância do sinal que é explicada pela regressão. Para os núcleos de

²O p-valor, também denominado nível descritivo do teste, é o nível de significância ao qual aceita-se ou rejeita-se a hipótese nula. A hipótese nula é rejeitada quando o p-valor é menor que o nível de significância.

inflação oficiais, os valores variam de 0,32136 (IPCA-EX3) a 0,73236 (IPCA-DP), com mediana de 0,4729; os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, de 0,63778 (db2 e sym2) a 0,71298 (db6), com mediana de 0,6745. Percebe-se que a quantidade do sinal explicada pelos núcleos de inflação baseados em *wavelets* é maior que os núcleos de inflação oficiais.

Dos testes de ausência de viés, conclui-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentam melhores resultados que a maioria dos núcleos de inflação oficiais. Sendo assim, os núcleos de inflação baseados em *wavelets* tendem a representar melhor a tendência do IPCA.

5.2.4 Ajustamento

No contexto da evolução da inflação, é interessante identificar a dinâmica entre os núcleos de inflação e o próprio índice de inflação no longo prazo. Essa dinâmica traz contribuições à análise individual e comparativa dos núcleos de inflação, uma vez que se o ajuste ocorre por movimentos da inflação em direção ao núcleo, então há razões para inferir que a inflação diminuirá quando estiver acima do núcleo de inflação [144]. Conjuntamente, é possível observar o que ocorre com os núcleos de inflação quando estes têm um valor superior ou inferior ao índice de inflação em determinado horizonte de tempo. Ressalta-se que o comportamento esperado é de retorno à tendência quando a inflação estiver acima do valor do núcleo de inflação.

A formalização da ideia do grau de ajustamento é dada pelo modelo [117]

$$\pi_{t+h} - \pi_t = a_0 + \lambda_h(\pi_t - \pi_t^*) + \sum_{j=1}^k a_j \pi_{t-j} + \epsilon_{1,t+h} \quad (5.3)$$

$$\pi_{t+h}^* - \pi_t^* = b_0 + \lambda_h^*(\pi_t - \pi_t^*) + \sum_{j=1}^k n_j \pi_{t-j}^* + \epsilon_{2,t+h}, \quad (5.4)$$

onde π_{t+h} e π_{t+h}^* são, respectivamente, a inflação e o núcleo de inflação no horizonte de h meses; a_j e b_j são parâmetros do modelo; k é o número de defasagens; e $\epsilon_{1,t+h}$ e $\epsilon_{2,t+h}$ são ruídos aleatórios de média zero. Os coeficientes λ_h e λ_h^* estabelecem a dinâmica de ajuste entre inflação e núcleo de inflação. Se, por exemplo, $\lambda_h < 0$ e $\lambda_h^* = 0$, pode-se observar a inflação se deslocando em direção ao núcleo de inflação, e, em um caso diferente, se $\lambda_h = 0$ e $\lambda_h^* > 0$, há um movimento do núcleo de inflação em direção à inflação [62, 117]. O primeiro caso exemplificado, $\lambda_h < 0$ e $\lambda_h^* = 0$, é aquele que possui um comportamento que permite o núcleo de inflação ser utilizado como medida de tendência e, por isso, é o resultado desejado da análise de ajustamento.

A Tabela 5.4 apresenta os resultados do teste de grau de ajustamento dos núcleos de inflação em relação ao IPCA. Para tanto, foram utilizados previsões de $h = 3, 6, 9$ e 12 meses e no máximo $k = 6$ defasagens. Essas defasagens são escolhidas com base no critério de informação de Akaike (AIC), em que estima a quantidade de informação perdida por determinado modelo [30].

Tabela 5.4: Coeficientes de ajustamento dos núcleos de inflação.

		$h = 3$		$h = 6$		$h = 9$		$h = 12$	
		λ_h	λ_h^*	λ_h	λ_h^*	λ_h	λ_h^*	λ_h	λ_h^*
IPCA-EX0	Coefficiente	-0,6722	0,2902	-0,5561	0,2387	-0,5649	0,3128	-0,7633	0,0324
	Erro Padrão	(0,1136)	(0,0905)	(0,1373)	(0,1069)	(0,1339)	(0,1077)	(0,1209)	(0,0880)
	p-valor	(0,0000)	(0,0017)	(0,0001)	(0,0271)	(0,0000)	(0,0043)	(0,0000)	(0,7133)
	R^2	0,3812	0,2949	0,3628	0,3097	0,2166	0,2066	0,3434	0,1262
IPCA-EX1	Coefficiente	-0,8320	0,3290	-0,9037	0,0687	-0,9328	-0,0371	-0,8605	0,1049
	Erro Padrão	(0,1495)	(0,1148)	(0,1742)	(0,1463)	(0,1708)	(0,1443)	(0,1648)	(0,1328)
	p-valor	(0,0000)	(0,0048)	(0,0000)	(0,6393)	(0,0000)	(0,7975)	(0,0000)	(0,4310)
	R^2	0,3669	0,2209	0,4030	0,1871	0,2732	0,0727	0,2922	0,1218
IPCA-EX2	Coefficiente	-0,7212	0,1766	-0,8937	-0,1465	-0,6640	-0,0104	-0,7631	-0,0506
	Erro Padrão	(0,1057)	(0,0737)	(0,1189)	(0,0770)	(0,1273)	(0,0869)	(0,1173)	(0,0826)
	p-valor	(0,0000)	(0,0179)	(0,0000)	(0,0593)	(0,0000)	(0,9053)	(0,0000)	(0,5409)
	R^2	0,4189	0,1604	0,4929	0,1103	0,2616	0,1744	0,3527	0,1682
IPCA-EX3	Coefficiente	-0,6964	0,2157	-0,8968	-0,0861	-0,7113	-0,0279	-0,7802	-0,0801
	Erro Padrão	(0,1035)	(0,0684)	(0,1148)	(0,0695)	(0,1218)	(0,0790)	(0,1127)	(0,0723)
	p-valor	(0,0000)	(0,0020)	(0,0000)	(0,2177)	(0,0000)	(0,7250)	(0,0000)	(0,2699)
	R^2	0,4151	0,1694	0,5044	0,0781	0,2914	0,1885	0,3726	0,1715
IPCA-DP	Coefficiente	-1,2227	-0,1273	-1,3739	-0,3523	-1,1771	-0,2611	-1,1958	-0,2430
	Erro Padrão	(0,1529)	(0,0889)	(0,1758)	(0,1108)	(0,1837)	(0,1182)	(0,1742)	(0,1083)
	p-valor	(0,0000)	(0,1546)	(0,0000)	(0,0018)	(0,0000)	(0,0289)	(0,0000)	(0,0265)
	R^2	0,4678	0,1947	0,5044	0,2423	0,3190	0,1163	0,3699	0,2325
IPCA-MA	Coefficiente	-1,1071	-0,1443	-1,3362	-0,2669	-1,1098	-0,2086	-1,2158	-0,2098
	Erro Padrão	(0,1383)	(0,0751)	(0,1536)	(0,0903)	(0,1644)	(0,0977)	(0,1518)	(0,0899)
	p-valor	(0,0000)	(0,0565)	(0,0000)	(0,0037)	(0,0000)	(0,0345)	(0,0000)	(0,0210)
	R^2	0,4680	0,1870	0,5380	0,2758	0,3358	0,1371	0,4240	0,1867

Continuação da Tabela 5.4

		$h = 3$		$h = 6$		$h = 9$		$h = 12$	
		λ_h	λ_h^*	λ_h	λ_h^*	λ_h	λ_h^*	λ_h	λ_h^*
IPCA-MS	Coefficiente	-0,9366	0,0082	-1,2177	-0,0961	-1,0063	-0,0784	-1,0281	-0,1260
	Erro Padrão	(0,1210)	(0,0542)	(0,1294)	(0,0599)	(0,1404)	(0,0647)	(0,1329)	(0,0617)
	p-valor	(0,0000)	(0,8802)	(0,0000)	(0,1109)	(0,0000)	(0,2281)	(0,0000)	(0,0433)
	R^2	0,4571	0,0530	0,5639	0,1361	0,3562	0,1837	0,4111	0,2524
db2	Coefficiente	-1,1563	0,1356	-1,2699	-0,2992	-0,8584	0,0867	-1,0933	-0,0524
	Erro Padrão	(0,1302)	(0,0947)	(0,1526)	(0,1187)	(0,1678)	(0,1169)	(0,1490)	(0,1113)
	p-valor	(0,0000)	(0,1543)	(0,0000)	(0,0128)	(0,0000)	(0,4597)	(0,0000)	(0,6388)
	R^2	0,5037	0,5311	0,5237	0,4777	0,2569	0,4089	0,3923	0,3176
db4	Coefficiente	-1,2797	0,1194	-0,8968	-0,0643	-0,7738	-0,0079	-1,0912	-0,0677
	Erro Padrão	(0,1118)	(0,0834)	(0,1614)	(0,1081)	(0,1642)	(0,1069)	(0,1426)	(0,1044)
	p-valor	(0,0000)	(0,1547)	(0,0000)	(0,5530)	(0,0000)	(0,9415)	(0,0000)	(0,5182)
	R^2	0,5982	0,5391	0,4168	0,5979	0,2383	0,5139	0,4074	0,3143
db6	Coefficiente	-1,2667	0,0342	-1,0529	-0,0136	-0,9892	-0,0189	-1,1233	-0,0217
	Erro Padrão	(0,1434)	(0,0946)	(0,1836)	(0,1278)	(0,1821)	(0,1288)	(0,1684)	(0,1225)
	p-valor	(0,0000)	(0,7179)	(0,0000)	(0,9153)	(0,0000)	(0,8835)	(0,0000)	(0,8595)
	R^2	0,5017	0,6264	0,4236	0,6064	0,2717	0,4117	0,3605	0,3870
db8	Coefficiente	-1,3826	0,0437	-1,2205	-0,2052	-0,8505	0,0940	-1,2163	-0,0573
	Erro Padrão	(0,1230)	(0,0780)	(0,1655)	(0,1121)	(0,1772)	(0,1114)	(0,1507)	(0,1093)
	p-valor	(0,0000)	(0,5758)	(0,0000)	(0,0694)	(0,0000)	(0,4002)	(0,0000)	(0,6009)
	R^2	0,5910	0,6683	0,4874	0,6261	0,2423	0,4919	0,4267	0,3414
db10	Coefficiente	-1,3211	0,1160	-0,8278	0,0981	-0,8808	-0,0689	-1,1542	-0,0052
	Erro Padrão	(0,1238)	(0,0684)	(0,1769)	(0,1134)	(0,1735)	(0,1138)	(0,1531)	(0,1113)
	p-valor	(0,0000)	(0,0920)	(0,0000)	(0,3886)	(0,0000)	(0,5460)	(0,0000)	(0,9627)
	R^2	0,5713	0,7480	0,3845	0,6567	0,2551	0,4983	0,4020	0,3578
sym2	Coefficiente	-1,1563	0,1356	-1,2699	-0,2992	-0,8584	0,0867	-1,0933	-0,0524
	Erro Padrão	(0,1302)	(0,0947)	(0,1526)	(0,1187)	(0,1678)	(0,1169)	(0,1490)	(0,1113)
	p-valor	(0,0000)	(0,1543)	(0,0000)	(0,0128)	(0,0000)	(0,4597)	(0,0000)	(0,6388)
	R^2	0,5037	0,5311	0,5237	0,4777	0,2569	0,4089	0,3923	0,3176
sym4	Coefficiente	-1,2531	0,0750	-0,8190	0,0115	-0,8326	-0,0350	-1,0603	-0,0313
	Erro Padrão	(0,1179)	(0,0877)	(0,1670)	(0,1151)	(0,1660)	(0,1132)	(0,1491)	(0,1096)
	p-valor	(0,0000)	(0,3935)	(0,0000)	(0,9208)	(0,0000)	(0,7577)	(0,0000)	(0,7756)
	R^2	0,5698	0,5454	0,3925	0,5869	0,2522	0,4865	0,3816	0,3389
sym6	Coefficiente	-1,3230	0,0532	-1,3253	-0,1714	-0,9266	0,0536	-1,2021	-0,0509
	Erro Padrão	(0,1394)	(0,0950)	(0,1728)	(0,1265)	(0,1845)	(0,1249)	(0,1625)	(0,1206)
	p-valor	(0,0000)	(0,5763)	(0,0000)	(0,1775)	(0,0000)	(0,6687)	(0,0000)	(0,6737)
	R^2	0,5274	0,6225	0,4988	0,5914	0,2526	0,4248	0,3952	0,3659
sym8	Coefficiente	-1,3191	0,0651	-0,8344	0,0581	-0,8526	-0,0220	-1,1370	-0,0059
	Erro Padrão	(0,1180)	(0,0747)	(0,1714)	(0,1117)	(0,1699)	(0,1117)	(0,1492)	(0,1092)
	p-valor	(0,0000)	(0,3849)	(0,0000)	(0,6038)	(0,0000)	(0,8444)	(0,0000)	(0,9570)
	R^2	0,5889	0,6814	0,3913	0,6460	0,2524	0,5132	0,4058	0,3517
sym10	Coefficiente	-1,3471	-0,0039	-1,2959	-0,0780	-0,9835	0,0239	-1,2171	-0,0215
	Erro Padrão	(0,1430)	(0,0782)	(0,1796)	(0,1264)	(0,1869)	(0,1236)	(0,1671)	(0,1217)
	p-valor	(0,0000)	(0,9602)	(0,0000)	(0,5379)	(0,0000)	(0,8468)	(0,0000)	(0,8602)
	R^2	0,5248	0,7601	0,4812	0,6286	0,2637	0,4494	0,3897	0,4002

Notas: Baseado em Denardin *et al.* [62].

A primeira observação sobre os dados contidos na Tabela 5.4 é que o coeficiente de ajustamento da inflação, λ_h , é negativo e estatisticamente significativo para cada um dos núcleos de inflação apresentados. Este fato sinaliza que o IPCA tende a se deslocar em direção do núcleo de inflação, isto é, os núcleos de inflação expressam a tendência da inflação para todos os horizontes de tempo.

Alguns núcleos de inflação, em determinado horizonte de tempo, apresentam λ_h e λ_h^* negativos simultaneamente. Quando esta configuração é observada, há uma tendência de movimento simultâneo em uma mesma direção do núcleo e do índice de inflação, indicando que o núcleo de inflação não é uma boa medida de tendência. Para os núcleos de inflação oficiais, tanto o IPCA-DP, quanto o IPCA-MA apresentam esse comportamento para os horizontes h considerados, indicando que não possuem boa capacidade preditiva no longo prazo. Quando os núcleos de inflação baseados em *wavelets* são observados, apenas db2 e sym2 apresentam este comportamento para $h = 6$; nos demais casos em que é observado λ_h e λ_h^* negativos, λ_h^* não possui relevância estatística para o modelo segundo a análise do p-valor.

Quanto aos erros do modelo autorregressivo para o cálculo do grau de ajustamento, não foi observado diferença significativa entre núcleos de inflação oficiais e baseados em *wavelets*. Desta forma, é possível inferir que a confiabilidade do modelo é similar para os diversos núcleos de inflação. Quando analisado conjuntamente com o coeficiente de determinação (R^2), é necessário analisar os diversos horizontes de tempo. A maior diferença no coeficiente de determinação é visualizado em $h = 3$, onde os núcleos de inflação baseados em *wavelets* são capazes de expressar a variabilidade do modelo mais adequadamente que os núcleos de inflação oficiais, uma vez que o maior R^2 dentre os núcleos de inflação oficiais é o IPCA-MA (0,4680) e o menor dentre os baseados em *wavelets* é o db6 (0,5017); para os demais horizontes, não há diferença significativa entre os núcleos de inflação.

Por fim, ressalta-se que para os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, o coeficiente λ_h^* não possui significância estatística, indicando que o comportamento do núcleo consegue identificar a tendência do índice de inflação. Desse fato, decorre que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentam uma vantagem em relação aos núcleos de inflação oficiais.

5.3 Considerações Finais sobre a Comparação entre Núcleos de Inflação

Neste capítulo foi apresentada a construção dos núcleos de inflação baseados em *wavelets* da família das daubechies e das symlets. Esses núcleos de inflação, assim como os oficiais, podem ser visualizados na Figura 5.2, onde é possível ver que núcleos de inflação oficiais possuem um número maior de artefatos quando comparados com os núcleos de inflação baseados em *wavelets*.

Para realizar a comparação entre núcleos de inflação oficiais e baseados em *wavelets*, uma série de análises foram aplicadas, entre elas: análise descritiva, estacionariedade, ausência de viés e ajustamento. A análise descritiva visa observar o comportamento dos núcleos de inflação através das médias, dos mínimos, dos máximos e dos desvios padrões. Desta primeira análise, observou-se que as médias dos núcleos de inflação baseados em *wavelets* foram mais próximas à média do IPCA; em contrapartida, há redução maior da volatilidade com núcleos de inflação oficiais, em especial o IPCA-MS, o IPCA-MA e o IPCA-DP.

O estudo da estacionariedade visa determinar a existência de processos randômicos não determinísticos nos núcleos de inflação. Tal estudo é importante para entender o comportamento da inflação e de seus núcleos, e, com isso, delinear um modelo mais adequado para a predição. Foram aplicados os testes Aumentado de Dickey-Fuller e de Phillips-Peron, cujos resultados expressam a estacionariedade de todos os núcleos de inflação para defasagens de até 9 meses através do teste de Phillips-Peron com significância de até 10%.

Quanto ao objetivo do teste de ausência de viés, busca-se os núcleos de inflação mais adequados à definição de núcleo de inflação da Equação (2.5). Em geral, os núcleos de inflação baseados em *wavelets* tem um coeficiente de determinação maior que os núcleos de inflação oficiais e, ainda, para a regressão da Equação (5.2),

os primeiros obtêm valores mais próximos de $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, com desvio padrão menor para estes coeficientes. Este último resultado demonstra que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* se aproximam mais da definição teórica de núcleo de inflação quando comparados com os núcleos de inflação oficiais.

Por fim, o grau de ajustamento procura mostrar qual a dinâmica entre o IPCA e seus núcleos de inflação. Primeiramente, observa-se um comportamento do IPCA em direção aos núcleos de inflação em todos os horizontes de tempo. Para alguns núcleos de inflação, observa-se que há um movimento em uma mesma direção do núcleo e do índice de inflação, como o IPCA-DP e o IPCA-MS, indicando que não são boas medidas de tendência.

Em resumo, os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentaram resultados mais interessantes que os núcleos de inflação oficiais para os testes descritos. Inclusive, é possível afirmar que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* são medidas robustas quanto a ausência de viés e apresentam um comportamento desejado para o ajustamento em relação ao IPCA.

No próximo capítulo são realizadas previsões de inflação utilizando os núcleos de inflação. Tal qual no presente capítulo, serão comparados os resultados dos núcleos de inflação oficiais e dos baseados em *wavelets*.

6 PREVISÃO DA INFLAÇÃO

Da construção e da análise comparativa dos núcleos de inflação, apresentadas no capítulo anterior, passa-se à construção das previsões do IPCA propriamente dito. Nesse capítulo são apresentados os resultados de performance das redes neurais com a utilização dos diversos núcleos de inflação, assim como uma análise da confiabilidade das previsões através dos intervalos de confiança.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 6.1 é definida a arquitetura e a topologia utilizada para a construção das previsões, na Seção 6.2 são apresentados os dados utilizados e sua organização, e nas Seções 6.3 e 6.4 os resultados das previsões para os núcleos de inflação oficiais e baseados em *wavelets*, respectivamente. Ainda, as Seções 6.3 e 6.4 são divididas duas subseções: a primeira apresenta a análise do EQM das previsões de diversas amostras, sendo este a medida de eficiência para a classificação das redes neurais, e, na segunda, a previsão e o intervalo de confiança para o ano de 2019. Destaca-se, ainda, que a Seção 6.4 é subdividida nos resultados para os núcleos de inflação baseados nas *wavelets* da família daubechies (Subseção 6.4.1) e da família symlet (Subseção 6.4.2).

6.1 Definição da Arquitetura e da Topologia de Rede Neural

A definição da arquitetura e da topologia da rede neural é um dos primeiros passos para a tentativa de construção de previsões da inflação condizentes com o valor real da inflação. São utilizados dois tipos de redes neurais: uma *feedforward*, Figura 6.1, com uma camada oculta e outra recorrente, Figura 6.2. No primeiro caso, cada neurônio de uma das camadas está conectado em uma única direção com todos os neurônios da próxima camada, isto é, a ligação entre os neurônios pode ser

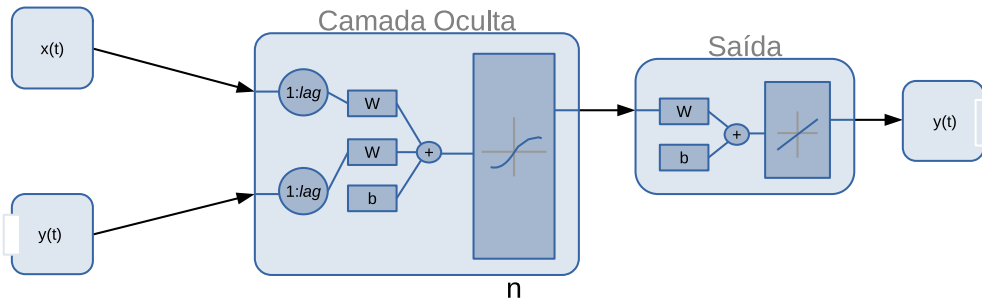


Figura 6.1: Topologia da rede neural com uma camada oculta.

definida por um fluxo direcionado e acíclico [70]. Já as redes neurais recorrentes se distinguem por ter pelo menos um laço de realimentação, que permite a inclusão de mudanças que ocorrem ao longo do tempo, isto é, analisam o contexto do sinal [85].

A Figura 6.1 mostra a primeira configuração utilizada para o treinamento, a validação e o teste. Essa rede neural possui uma única camada oculta, com defasagem (*lag*) de 12 meses, tanto para o núcleo de inflação, $x(t)$, quanto para o IPCA, $y(t)$, isto é, são utilizados os dados dos 12 meses anteriores para calcular a previsão dos próximos 12 meses. Na camada oculta, ainda, é utilizada uma função de ativação sigmoide, mais especificamente a função tangente hiperbólica, dada por

$$\varphi(v_k) = \tanh(v) = \frac{2}{1 + e^{-2v}} - 1. \quad (6.1)$$

Ressalta-se que outras funções de ativação foram implementadas, mas os resultados apresentados neste trabalho referem-se função tangente hiperbólica que mostrou melhores resultados em comparação com as demais.

As redes neurais e as respectivas simulações foram construídas no MATLAB R2018a¹. Para cada configuração de dados, são testados de $n = 1$ a 100 neurônios na camada oculta, com um número mínimo de épocas de 100. Uma

¹Para a construção e análise dos dados gerados pelas redes neurais, o computador utilizado é equipado com um processador Intel Core i5-4670, com frequência 3,40 GHz, 16 GiB de RAM e com distribuição Linux Manjaro 20.2.

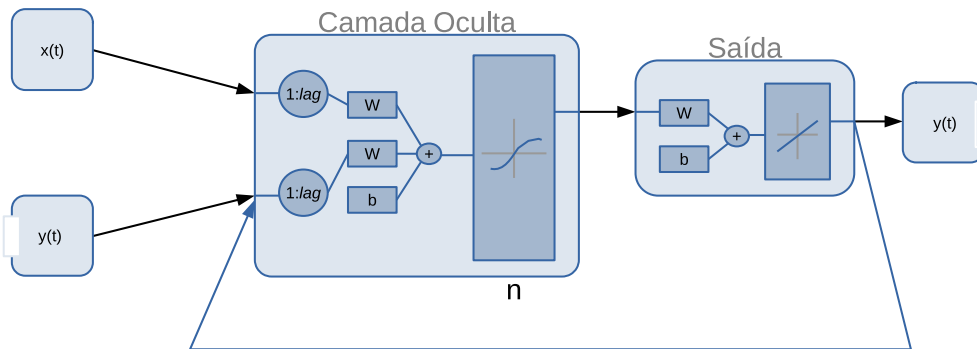


Figura 6.2: Topologia da rede neural recorrente com uma camada oculta.

época é caracterizada por um ciclo através da amostra fornecida para treinamento, validação e teste, sendo repetidas até alcançar critérios de parada do algoritmo: número máximo de épocas, valor do EQM inferior a certa tolerância ou ainda um número de falhas para encontrar o mínimo da função. O critério de um número mínimo de épocas possibilita uma redução no tempo computacional e, ainda, um treinamento com maior qualidade; o máximo garante que o algoritmo pare caso não haja convergência. Para garantir o controle da reprodutibilidade, é utilizada a mesma semente para geração dos números pseudo-aleatórios.

Os dados são divididos na seguinte proporção: 80% são utilizados para o treinamento, 10% para validação e 10% para testes; tal organização foi escolhida dentre outras por apresentar melhores resultados na previsão. A organização dos dados será apresentada na próxima seção. Para a determinação das redes neurais de melhor performance, é analisado o EQM, conforme descrito na Seção 4.3.

Depois de escolhida a rede neural de melhor performance pelo critério do EQM, com um determinado número n de neurônios, utiliza-se esse número de neurônios na rede neural recorrente para construir as previsões do IPCA. A configuração desta rede neural é apresentada na Figura 6.2.

Note que a rede neural da Figura 6.2 tem a mesma configuração da rede neural da Figura 6.1, exceto pelo laço de recorrência adicional. Previsões para um,

três, seis, nove e doze meses são geradas para a análise. É importante pontuar que, para gerar a previsão de doze meses, são utilizados os doze meses anteriores; para nove meses, são utilizados os nove meses anteriores; para seis meses, os seis meses anteriores; e assim por diante.

A rede neural fornece, então, basicamente duas saídas: uma aproximação \hat{y}_k para y_k , e uma previsão \hat{y}_{k+p} para y_{k+p} . A média dos EQMs das redes neurais de melhor performance para previsão de um, três, seis, nove e doze meses serão apresentados nas Seções 6.3 e 6.4, onde são analisados, respectivamente, as previsões geradas a partir dos núcleos de inflação oficiais e dos baseados em *wavelets*.

6.2 Os Dados e sua Organização

Uma das limitações da análise do IPCA é a escassez de dados. Embora o IPCA tenha valores disponíveis desde 1979, fatores políticos e econômicos aparecem como restrição na análise de sua evolução. Por exemplo, o Plano Real (1994) gerou uma grande mudança de paradigma, principalmente com o controle da inflação. Adicionalmente, a criação de núcleos de inflação oficiais e a impossibilidade do cálculo destes devido a falta das observações que os compõe implicam, também, em uma limitação nos dados.

Os métodos de perturbação são uma das formas de acréscimo na quantidade de dados, permitindo, assim, que aumente a capacidade de generalização das redes neurais. Esses métodos permitem, então, a criação e a incorporação de novos conjuntos de treinamento, mantendo a independência desses dados [107, 137, 163, 167]. É importante notar que uma das limitações deste método é a mudança de características originais do conjunto de dados em alguns casos.

Para a obtenção de novas séries temporais, utiliza-se o método de *bootstrap*. Devido as características dos sinais e da previsão, os dados são divididos em

blocos de 24 dados contíguos e reorganizados a partir das permutações disponíveis. O tamanho do bloco diz respeito à quantidade de dados necessários para gerar a previsão no horizonte de doze meses, que necessita dos doze meses anteriores para o cálculo; além disso, com este tamanho de blocos, garante-se que os dados sejam independentes ou possuam uma correlação fraca. Nesta replicação é utilizado um ruído de distribuição normal que é adicionado ao IPCA e aos núcleos de inflação, com perturbação de 5%.

Os dados são divididos em três conjuntos: treinamento, validação e teste; dados de entrada; e previsão. O primeiro grupo é utilizado na construção de redes neurais, divididos conforme descrito na Seção 6.1. Já o segundo grupo é composto pelas observações que alimentam rede neural que apresenta melhor performance e gera o terceiro grupo, a previsão. Do conjunto total de dados, 162 observações, apenas 138 observações são reservadas para o treinamento, validação e teste para construção da rede neural. O método de perturbação com *bootstrap* é aplicado nas 138 observações, que são agrupados aos dados sem perturbação e por fim utilizadas para construir a rede neural.

A análise dos dados é realizada pelo método *Leave One Out Cross Validation* [24, 26]. Nesse método, os dados são sucessivamente divididos em n blocos e separados em duas partes mutuamente exclusivas: uma parte, $n - 2$ blocos, é utilizada no treinamento, validação e teste, enquanto a outra parte, os 2 blocos restantes e contíguos, é utilizada como dados de entrada e de previsão. Esse é um método que busca uma maior estabilidade para os erros, uma vez que a análise da previsão de um ou outro conjunto de informação pode gerar um viés que indica um erro maior que o real [24, 26].

Para o método *Leave One Out Cross Validation*, considere as observações $o_1, o_2, o_3, \dots, o_{162}$. A permutação dos dados é realizada da seguinte forma: $P_1 : o_{162}, o_1, \dots, o_{161}$, $P_2 : o_{161}, o_{162}, \dots, o_{160}$, e assim por diante, até obter $P_{139} : o_2, o_3, \dots, o_1$. As primeiras 138 observações formam o primeiro conjunto de trei-

namento, validação e teste; os 12 seguintes, os dados de entrada e, os 12 últimos, o conjunto de previsão. Desta forma, resulta-se em 139 séries temporais distintas; a análise de cada uma dessas séries temporais continua a ser realizada por blocos. É importante ressaltar que o método de perturbação com *bootstrap* é aplicado apenas no conjunto de dados que compõem os dados de treinamento, validação e teste, não interferindo nos dados de entrada, muito menos nas observações a serem previstas. São obtidas para cada um dos núcleos de inflação, portanto, 139 redes neurais de melhor performance e 139 previsões; o tempo de processamento para a construção da rede neural e da geração das previsões é de aproximadamente seis horas para cada um dos núcleos de inflação.

Para a análise dos resultados, é analisada a dispersão através de diagramas de caixa (ou *boxplot*). A dispersão do EQM, assim como o número de neurônios, são apresentados desta forma. Cada uma das 139 séries temporais é representado por um ponto vazado; as caixas delimitam a parte central dos resultados obtidos, do segundo ao terceiro quartil, concentrando 50% da distribuição; a linha vermelha representa a mediana, que divide os resultados na metade. Ainda, as barras em preto delimitam os limites inferior e superior, delimitando o primeiro e o quarto quartil; eventuais pontos que estejam fora do intervalo são chamados de *outliers*, que nada mais são que resultados que se diferenciam drasticamente de todos os demais.

Para o cálculo do intervalo de confiança são utilizadas séries temporais geradas pelo método de perturbação com *bootstrap*, diferenciando-se das amostras anteriores por tratar apenas da previsão dos meses de janeiro a dezembro de 2019. Outra diferença é a utilização de permutações diversas para a construção das novas séries temporais, uma vez que não é utilizada uma mesma semente para a permutação dos blocos de dados; a rede neural, da mesma forma, possui semente definida aleatoriamente. O intervalo de confiança, então, é o agrupamento dos resultados obtidos de 500 previsões geradas por permutação de blocos de dados e de redes neurais diversas, definidas conforme a topologia e arquitetura descritas na Seção 6.1.

6.3 Previsão com Núcleos de Inflação Oficiais

A previsão da inflação com os núcleos de inflação oficiais utilizando redes neurais se apresentam como uma possibilidade de aproveitar os índices disponibilizados para gerar informações novas que, inclusive, podem auxiliar no delineamento de políticas monetárias. Nesta seção são apresentados os resultados para previsões utilizando núcleos de inflação oficiais para a organização das séries temporais descritas na Seção 6.2. Adicionalmente, a fim de determinar um intervalo provável onde pode ser encontrada a previsão, são apresentados os intervalos de confiança, conforme descritos na Seção 4.4, resultantes do cálculo da previsão da inflação nos diversos horizontes do ano de 2019.

6.3.1 Erro Quadrático Médio da Previsão com Núcleos de Inflação Oficiais

A Tabela 6.1 apresenta o EQM médio para a previsão para um, três, seis, nove e doze meses das 139 séries temporais, descritas na Seção 6.2, utilizando núcleos de inflação oficiais. Além disso, é apresentado o EQM médio de treinamento, validação e teste da rede neural. Além desses resultados, o número médio de neurônios, as épocas médias e o R^2 médio aparecem na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: EQM médio da previsão utilizando núcleos de inflação oficiais.

Núcleo de inflação	Neurônios	Épocas	EQM da Rede Neural			EQM da Previsão					R^2
			Treino	Validação	Teste	k+1	k+3	k+6	k+9	k+12	
IPCA-EX0	67,1942	166,4604	0,0337	0,0334	0,0344	0,1359	0,1304	0,1681	0,1628	0,1346	0,5654
IPCA-EX1	66,0647	157,0288	0,0343	0,0349	0,0353	0,1078	0,1236	0,1426	0,1483	0,1278	0,5560
IPCA-EX2	66,8058	148,8777	0,0350	0,0354	0,0349	0,1141	0,1182	0,1414	0,1477	0,1289	0,5489
IPCA-EX3	72,0647	149,3453	0,0349	0,0348	0,0344	0,1221	0,1294	0,1525	0,1507	0,1313	0,5512
IPCA-DP	67,0576	154,1367	0,0346	0,0341	0,0343	0,1108	0,1103	0,1364	0,1402	0,1153	0,5552
IPCA-MA	68,1727	151,7698	0,0347	0,0343	0,0356	0,1099	0,1133	0,1307	0,1289	0,1127	0,5518
IPCA-MS	68,8058	151,6978	0,0350	0,0344	0,0350	0,1030	0,1109	0,1328	0,1342	0,1081	0,5486

Uma primeira análise trata do número médio de neurônios e do número médio de épocas. Para gerar a rede neural com melhor performance utilizando o critério do EQM, o número médio de neurônios utilizados nas 139 amostras varia entre 66,0648 (IPCA-EX1) e 72,0647 (IPCA-EX3). Da mesma forma, o número

médio de épocas concentra-se em torno de 151,7698, variando entre 148,8777 (IPCA-EX2) e 166,4604 (IPCA-EX0). Nota-se que, tanto o número médio de neurônios, quanto o número médio de épocas, não apresentam grande variação, não gerando evidências suficientes para inferir com qual núcleo de inflação há um menor gasto computacional.

A segunda análise versa sobre a construção da rede neural, isto é, o EQM médio do treino, da validação e do teste. Assim como na análise do número médio de neurônios e do número médio de épocas, o EQM médio da construção da rede neural apresenta pouca variação, não ultrapassando 0,0400. Pontua-se, ainda, que os menores EQMs médios são observados para o núcleo de inflação IPCA-EX0 para treino e validação, e o IPCA-DP para o teste; as maiores médias para treino, validação e teste são encontradas, respectivamente, para as previsões geradas pelos núcleos de inflação IPCA-MS, IPCA-EX2 e IPCA-MA.

A próxima análise aborda o EQM da previsão para os diversos horizontes. Para a previsão no horizonte de um mês, o EQM médio varia entre 0,1030 (IPCA-MS) e 0,1359 (IPCA-EX0), enquanto que a previsão no horizonte de três meses varia entre 0,1109 (IPCA-MS) e 0,1304 (IPCA-EX0). Quando trata-se de horizontes maiores, o IPCA-EX0 continua a apresentar o pior resultado em relação ao EQM médio, enquanto os melhores resultados se dividem entre o IPCA-MA e o IPCA-MS. Assim, para um horizonte de previsão de seis meses, os EQMs médios possuem um valor maior que para os horizontes anteriores, variando entre 0,1307 (IPCA-MA) e 0,1681 (IPCA-EX0); para nove meses, varia entre 0,1289 (IPCA-MA) e 0,1628 (IPCA-EX0); e para doze meses, 0,1081 (IPCA-MS) e 0,1346 (IPCA-EX0). Dessa forma, é possível afirmar que o pior resultado é o do IPCA-EX0 quando analisado o EQM médio nos diversos horizontes, ao mesmo tempo que IPCA-MS e IPCA-MA apresentam os melhores resultados.

Por fim, quanto a análise do coeficiente de determinação, R^2 , o melhor resultado médio para a capacidade de representar a variabilidade dos dados é en-

contrado para o núcleo de inflação IPCA-EX0 (0,5654) e o pior, IPCA-MS (0,5486). Mais uma vez, ressalta-se que o resultado médio não apresenta grande diferença entre os núcleos de inflação oficiais, não podendo ser determinado qual deste consegue aproximar melhor o IPCA.

Ainda que a análise da média dos EQMs forneça informação sobre o comportamento médio do erro, é importante a visualização da dispersão do EQM para cada uma das amostras. A seguir são apresentadas uma série de análises comparativas dos EQMs obtidos na previsão utilizando núcleos de inflação oficiais.

A Figura 6.3 mostra a comparação entre o número de neurônios para as redes neurais geradas a partir das 139 amostras de dados, onde cada uma dos pontos indica a quantidade de neurônios da rede neural com melhor performance.

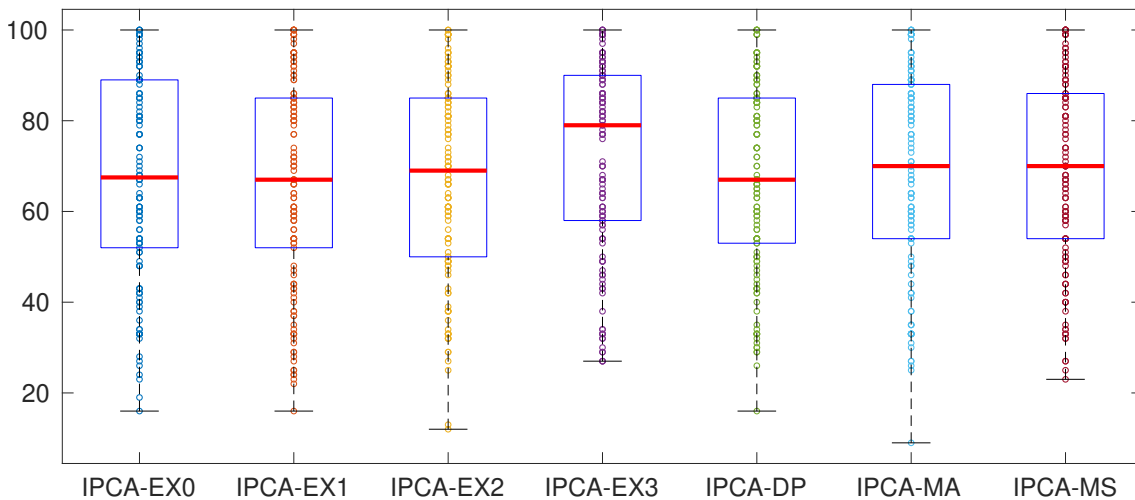


Figura 6.3: Comparação entre número de neurônios das redes neurais geradas com núcleos de inflação oficiais.

O menor número de neurônios para a construção das redes neurais de melhor performance foi 9 (IPCA-MA) e todos os núcleos de inflação analisados necessitaram o máximo, 100 neurônios; em relação à mediana, se concentraram entre 67 e 70 neurônios, exceto o IPCA-EX3 que apresentou mediana de 79 neurônios. Observa-se, ainda, que a variabilidade do número de neurônios é menor para os núcleos IPCA-DP, IPCA-EX2 e IPCA-EX3, nesta ordem. Corroborando a análise

da Tabela 6.1, o núcleo de inflação que utiliza um maior número de neurônios é o IPCA-EX3, indicando que esse núcleo tende a necessitar de maiores recursos computacionais.

Os próximos gráficos apresentam o EQM das previsões para os diversos horizontes de tempo. O primeiro deles, a Figura 6.4, apresenta o EQM da previsão para o horizonte de um mês.

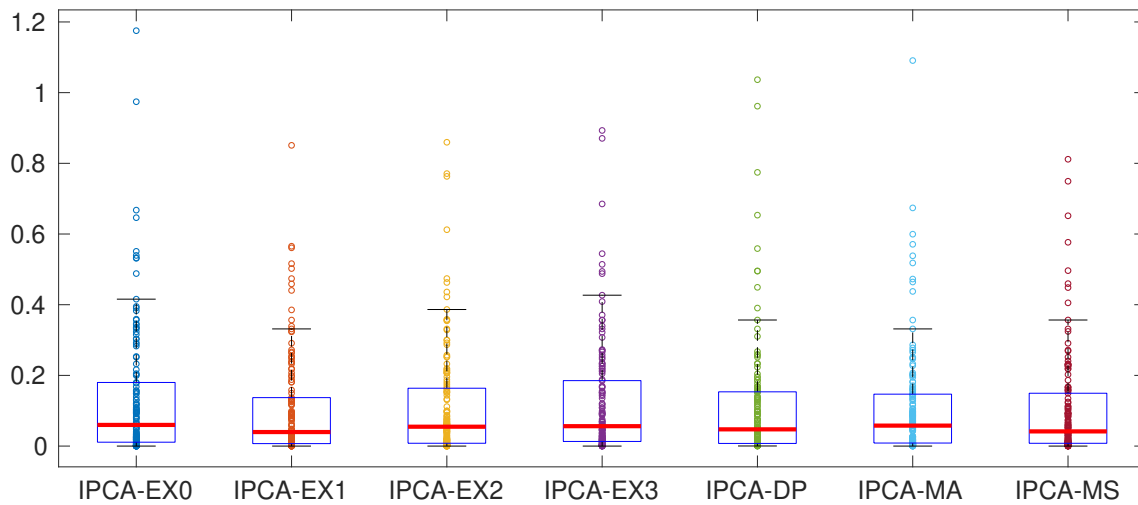


Figura 6.4: EQM para a previsões de um mês com núcleos de inflação oficiais.

Para a previsão no horizonte de um mês das 139 séries temporais, o IPCA-MA é o núcleo de inflação que possui um menor número de *outliers* (11) e o maior é o do IPCA-EX1 (26). As medianas dos erros de todas as simulações estão situadas entre 0,0397 (IPCA-EX1) e 0,0599 (IPCA-EX0), com valores máximos (excluindo *outliers*) inferiores a 0,3154 (IPCA-EX1). Além disso, percebe-se que a variabilidade da previsão para um mês é menor para o núcleo de inflação IPCA-EX1.

A Figura 6.5 apresenta a comparação entre as previsões para um horizonte de três meses utilizando os núcleos de inflação oficiais. Uma primeira observação em relação à previsão para três meses é que essa apresenta *outliers* em menor quantidade que a previsão para 1 mês, entre 6 (IPCA-EX2) e 13 (IPCA-MS) *outliers*. Ainda, as medianas parecem consistentes, ficando em torno de 0,0700

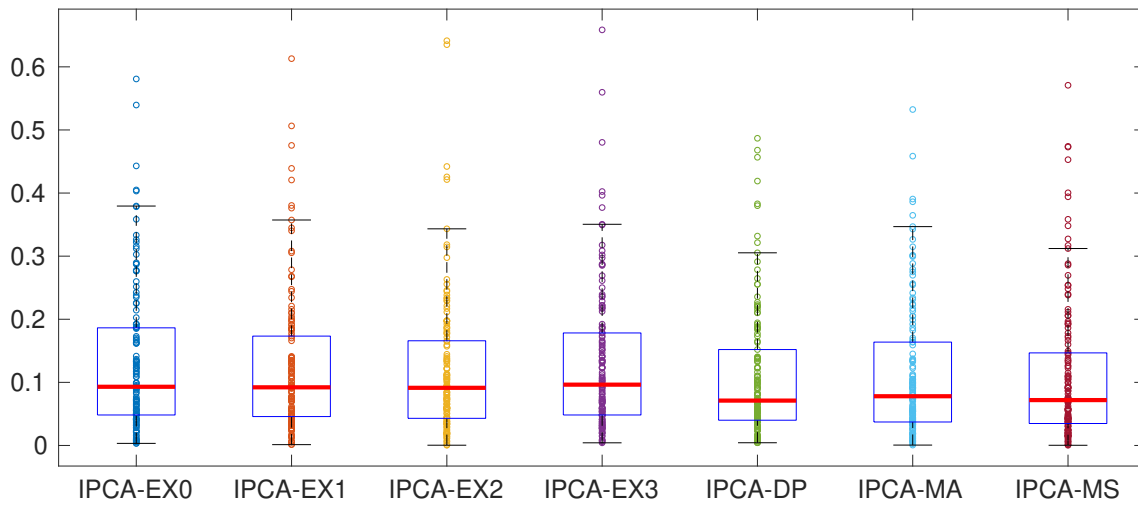


Figura 6.5: EQM para a previsões de três meses com núcleos de inflação oficiais.

para os núcleos IPCA-DP, IPCA-MA e IPCA-MS, e 0,0900 para os demais núcleos por exclusão. Os valores máximos dos erros, desconsiderados *outliers*, estão entre 0,2555 e 0,3505. Ainda, a variabilidade dos erros é menor para os núcleos IPCA-DP e IPCA-MS. Assim como na Tabela 6.1, os núcleos de inflação por exclusão possuem EQM maior na previsão de três meses que os demais núcleos de inflação oficiais.

A Figura 6.6 apresenta a comparação entre EQM para a previsão no horizonte de seis meses utilizando as redes neurais de melhor desempenho.

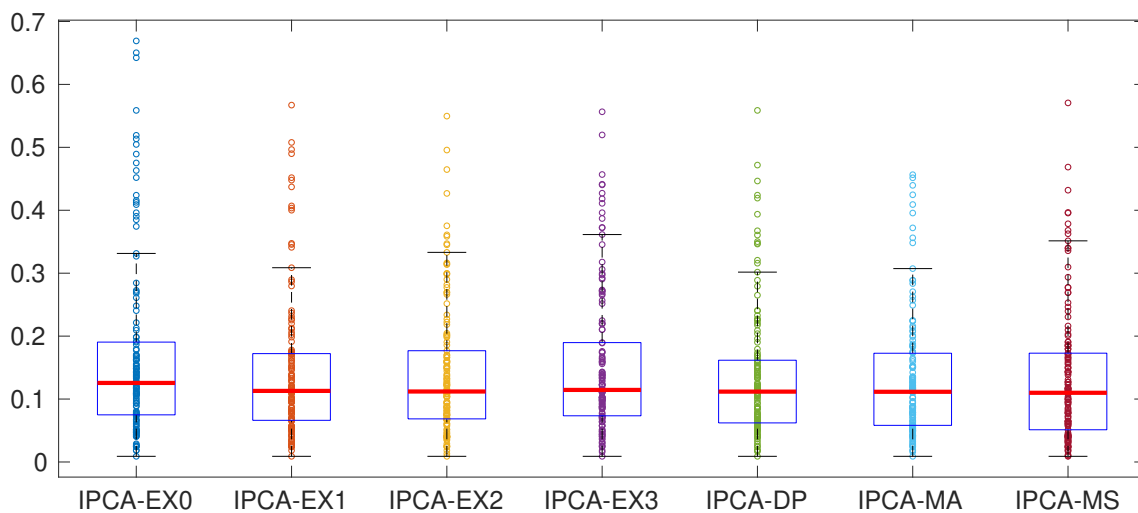


Figura 6.6: EQM para a previsões de seis meses com núcleos de inflação oficiais.

Para a previsão de seis meses, observa-se a presença de *outliers*, com mínimo para o IPCA-MS (5 *outliers*) e máximo para o IPCA-EX0 (19 *outliers*). Desconsiderando os *outliers*, o EQM máximo varia entre 0,3163 (IPCA-EX2) a 0,3785 (IPCA-EX3). Ainda, analisando a dispersão dos erros, no sentido da disposição dos resultados dos dois quartis centrais, observa-se que todos os resultados apresentaram distribuições semelhantes.

Como pode ser constatado na figura acima, conforme aumenta o horizonte de tempo de previsão, desconsiderando *outliers*, os erros tendem a crescer: o erro mediano está em torno de 0,1100. Adicionalmente, percebe-se que os *outliers* possuem um impacto significativo da média do EQM, uma vez que este varia entre 0,1307 (IPCA-MA) e 0,1681 (IPCA-EX0).

A análise seguinte trata do EQM para previsões no horizonte de nove meses utilizando núcleos de inflação oficiais, apresentados na Figura 6.7.

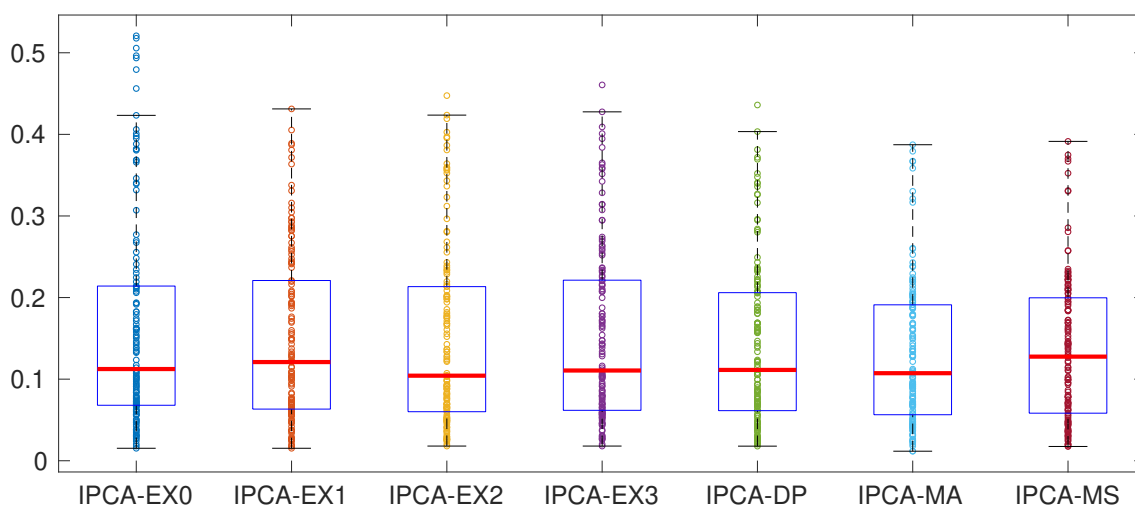


Figura 6.7: EQM para a previsões de nove meses com núcleos de inflação oficiais.

Na primeira análise, é possível verificar um pequeno número de *outliers* em comparação com as previsões anteriores, com exceção do IPCA-EX0 que apresentou 15 *outliers*. Desconsiderando estes *outliers*, os erros máximos para previsão no horizonte de nove meses situam-se entre 0,3651 (IPCA-MA) e 0,4053 (IPCA-EX1).

Os valores medianos continuam próximos aos erros apresentados pela previsão de 6 meses, em torno de 0,1100.

Por fim, a Figura 6.8 apresenta os erros para a previsão no horizonte de doze meses utilizando núcleos de inflação oficiais.

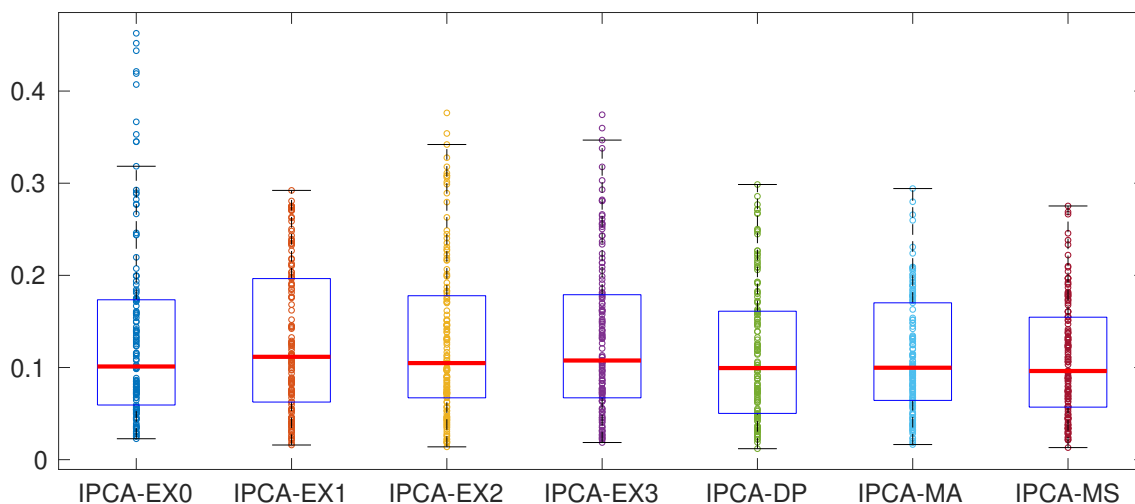


Figura 6.8: EQM para a previsões de doze meses com núcleos de inflação oficiais.

Assim como para a previsão no horizonte de nove meses, observa-se poucos *outliers*, à exceção do IPCA-EX0 (10 *outliers*). O EQM máximo, desconsiderando *outliers*, não ultrapassou 0,3468 (IPCA-EX3). A mediana para previsão de doze meses situa-se em torno de 0,1000, onde o núcleo de inflação IPCA-MS possui a menor influência dos *outliers*. Ademais, ressalta-se que o IPCA-MA e o IPCA-MS apresentam a maior concentração dos dados em torno da mediana, isto é, menor dispersão.

Da análise do EQM, é importante destacar que os maiores erros estão situados nas previsões com os núcleos de inflação por exclusão. Salienta-se que os núcleos de inflação IPCA-DP, IPCA-MA e IPCA-MS, no teste de ausência de viés, já apresentaram melhores resultados em relação aos núcleos de inflação por exclusão; além disso, os núcleos de inflação que utilizam ferramentas estatísticas e matemáticas para a construção tendem a ter uma média mais próxima da média

do IPCA, justificando os melhores resultados da previsão. Decorre, então, que a simples exclusão de grupos do IPCA fornece previsões de inflação com maiores erros e com maior dispersão, justificando a utilização dos demais núcleos de inflação.

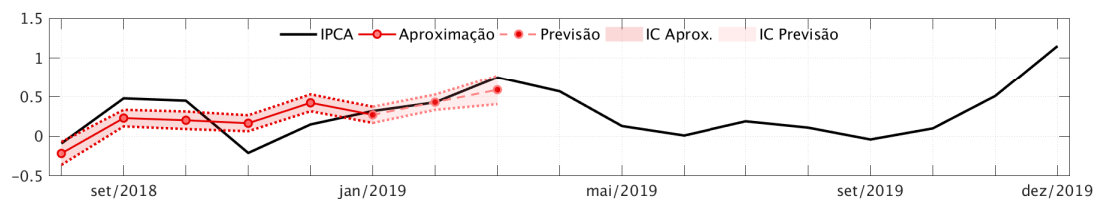
Para complementar a análise da previsão a partir de núcleos de inflação oficiais, constrói-se intervalos de confiança, apresentados na próxima subseção.

6.3.2 Intervalos de Confiança das Previsões com Núcleos de Inflação Oficiais

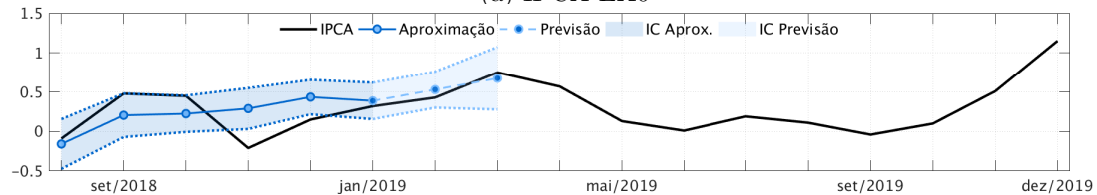
Uma vez que redes neurais dependem da arquitetura e da topologia escolhidas, além de outros parâmetros como a semente e a organização dos dados, é interessante gerar uma série de previsões alterando esses dois últimos parâmetros a fim de verificar o intervalo mais provável em que a previsão estará contida. Da Seção 4.4, com a utilização do *bootstrap*, é possível obter o intervalo de confiança que fornece uma previsão média e seus intervalos superior e inferior para diversos horizontes de tempo.

Para os gráficos de intervalos de confiança, a linha sólida em preto caracteriza o IPCA entre os meses de agosto de 2018 a dezembro de 2019; a linha contínua e mais escura, dos meses de agosto e dezembro de 2018, representa a aproximação da série temporal nesse período; e, com a linha pontilhada, a média das previsões. Ainda, a região sombreada representa o intervalo de confiança para a aproximação (mais escuro) e para a previsão (mais claro), ambas delimitadas por linhas pontilhadas.

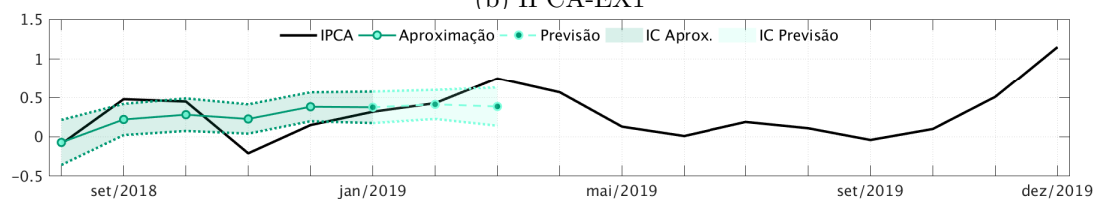
A primeira análise discorre sobre o intervalo de confiança para a previsão no horizonte de três meses, apresentada na Figura 6.9. Destaca-se que, tanto a previsão, quanto os intervalos de confiança, são gerados a partir de 500 simulações com neurônios variando entre 1 e 100, que resultam em 500 previsões obtidas pelas redes neurais de melhor performance em relação ao EQM.



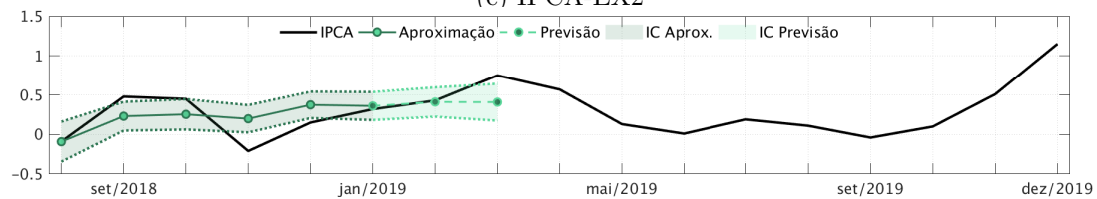
(a) IPCA-EX0



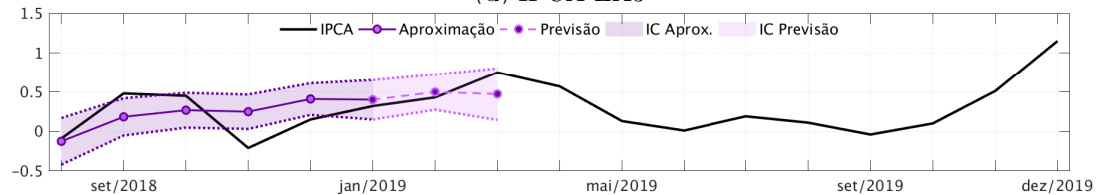
(b) IPCA-EX1



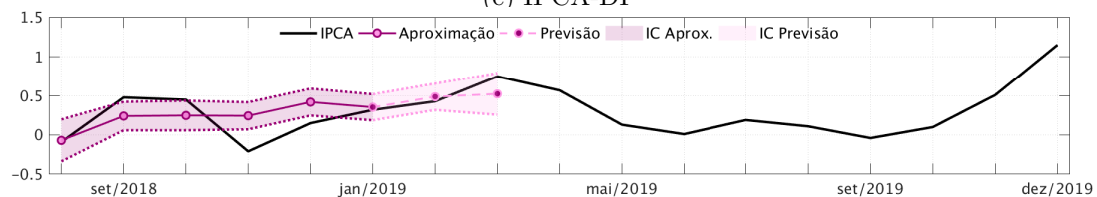
(c) IPCA-EX2



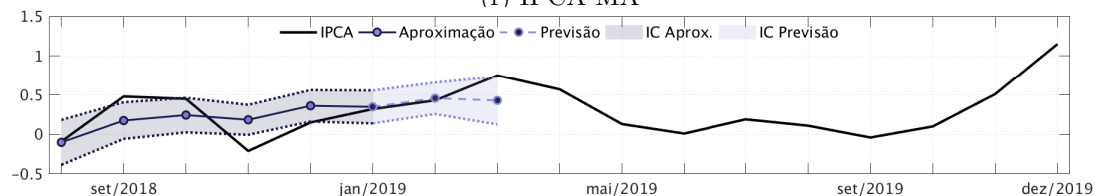
(d) IPCA-EX3



(e) IPCA-DP



(f) IPCA-MA



(g) IPCA-MS

Figura 6.9: Intervalos de confiança para previsões de três meses com núcleos de inflação oficiais.

A primeira observação trata da aproximação para os meses de agosto a dezembro de 2018, em que pode se perceber que o intervalo de confiança, em geral, não consegue representar o IPCA; outrossim, a aproximação representa a tendência do IPCA, mantendo-se próximo da média da série temporal nesse intervalo. Observa-se, também, que alguns intervalos de confiança são estreitos, por exemplo, o do IPCA-EX0 (Figura 6.9a), outros largos, como o IPCA-EX1 (Figura 6.9b) e IPCA-DP (Figura 6.9e), indicando, respectivamente, uma menor e uma maior variância nas previsões.

Quando analisadas as previsões para o horizonte de três meses, grande parte dos núcleos de inflação incorporaram o IPCA no intervalo de confiança da previsão, com exceção do IPCA-EX2 (Figura 6.9c), do IPCA-EX3 (Figura 6.9d) e do IPCA-MS (Figura 6.9g) no mês de março de 2019. Para este teste, destaca-se a previsão do IPCA-EX1 (Figura 6.9b) e do IPCA-EX0 (Figura 6.9a), que preveem a tendência de crescimento observada até o mês de março de 2019; as demais previsões apresentam uma limitação no mês de março, em que é observada uma previsão de quase estabilidade do IPCA em relação ao valor observado para fevereiro de 2019.

A Figura 6.10 apresenta a aproximação para os meses de agosto a dezembro de 2019 e a previsão para janeiro a junho de 2019, assim como os respectivos intervalos de confiança.

Da análise dos meses de agosto a dezembro de 2018, percebe-se que as redes neurais conseguiram aproximar mais adequadamente que aquelas utilizadas para previsão de três meses. Assim como no teste anterior, o IPCA-EX0 (Figura 6.10a) apresenta um intervalo de confiança mais estreito. Os demais intervalos de confiança gerados pelos núcleos de inflação oficiais também apresentam um intervalo de confiança mais estreito quando comparados com a aproximação e a previsão no horizonte de três meses, indicando uma variância menor na previsão de seis meses.

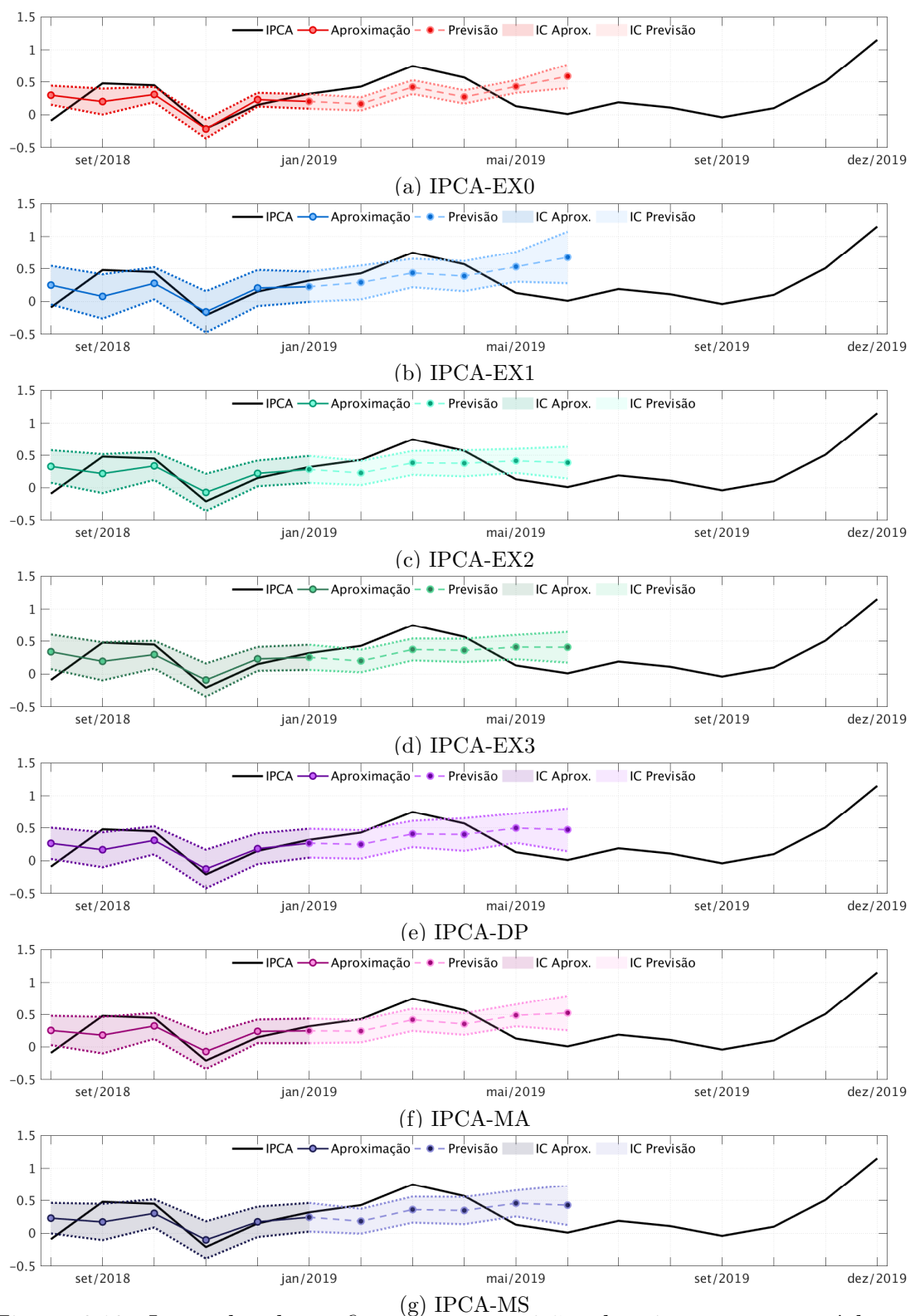


Figura 6.10: Intervalos de confiança para previsões de seis meses com núcleos de inflação oficiais.

Quanto à previsão de seis meses, observa-se que os meses de março, maio e junho de 2019 não foram englobados por nenhum intervalo de confiança. Ainda, enquanto maio e junho apresentam uma tendência de queda, a previsão indica crescimento com o IPCA-EX0 (Figura 6.10a) e IPCA-EX1 (Figura 6.10b), e quase estabilidade para os demais. É importante destacar que, embora o intervalo de confiança não represente adequadamente o IPCA, a previsão descreve a tendência do IPCA.

A Figura 6.11 apresenta a aproximação para os meses de agosto a dezembro de 2018 e a previsão do IPCA para o horizonte de nove meses, de janeiro a setembro de 2019.

Quanto à aproximação da rede neural, observa-se que esta é quase estável e com valores superiores a média do IPCA no intervalo; em especial, no caso da aproximação gerada a partir do IPCA-EX0 (Figura 6.11a), observa-se que o intervalo de confiança engloba apenas o mês de setembro de 2018. O decréscimo do IPCA no mês de novembro de 2018 apresentou aproximações com estabilidade ou leve acréscimo, com exceção da aproximação gerada pelo IPCA-EX0 (Figura 6.11a) que apresentou um decréscimo no referido mês.

Quando trata-se da previsão no horizonte de nove meses, percebe-se que nenhuma das previsões geradas a partir dos núcleos de inflação oficiais conseguiu ter a mesma tendência crescente e posterior decrescente observadas no período de fevereiro a abril de 2019. É interessante observar que todas as previsões geradas com os núcleos de inflação oficiais indicam uma tendência de crescimento para o mês de setembro de 2019, ainda que tenha sido observada momentaneamente um decréscimo no IPCA. Ainda, o intervalo de confiança da previsão gerada pelo IPCA-EX0 (Figura 6.11a) foi o menor, mais uma vez.

Por fim, na Figura 6.12 são mostradas aproximações e previsões da inflação para o ano de 2019. Na aproximação, verifica-se que esta engloba a média

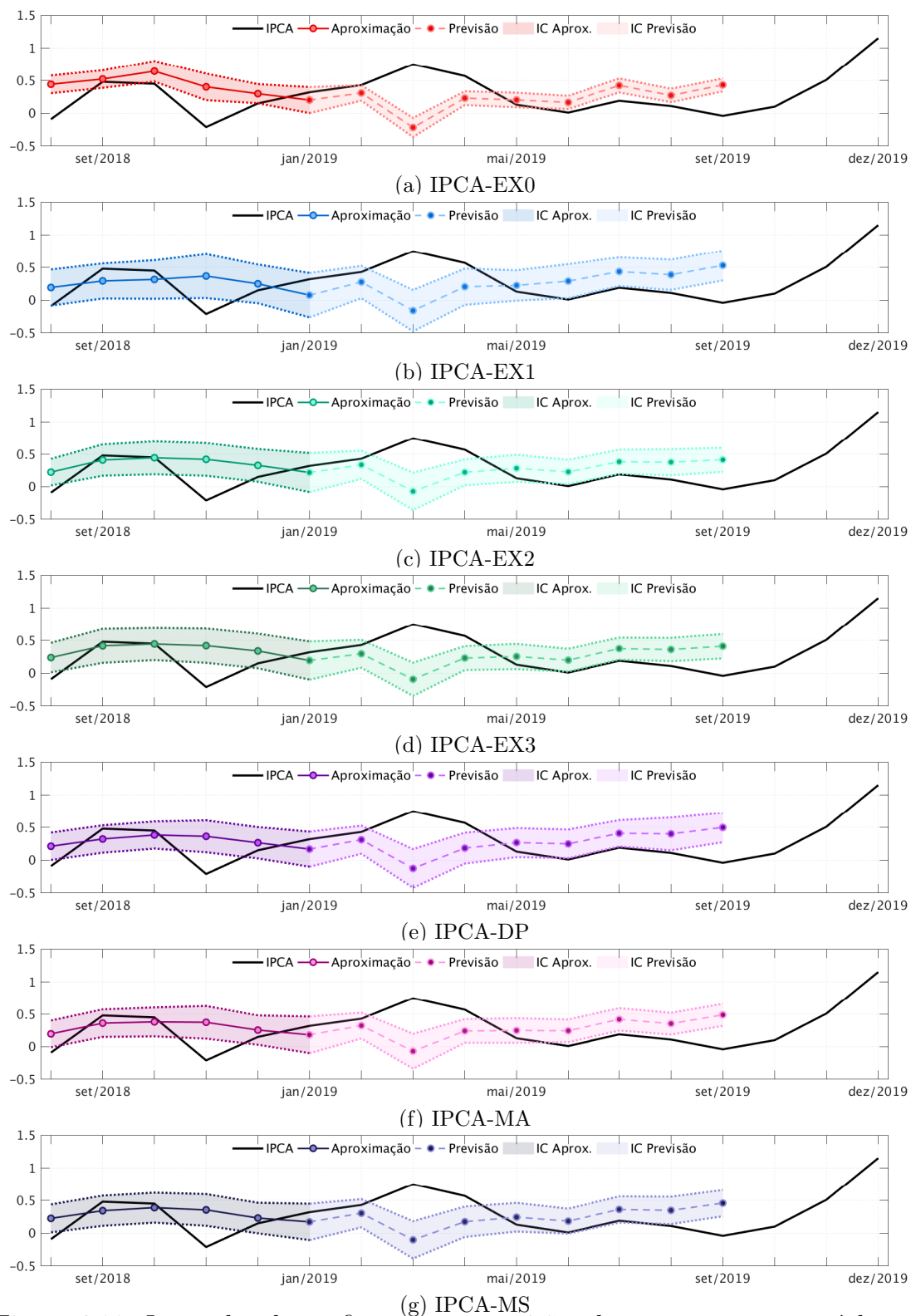


Figura 6.11: Intervalos de confiança para previsões de nove meses com núcleos de inflação oficiais.

dos meses de agosto a dezembro de 2018, tal qual as previsões para três e nove meses. Já para a previsão, observa-se que os intervalos de confiança gerados a partir dos núcleos de inflação oficiais conseguem representar o comportamento médio do sinal, sem, entretanto, conseguirem retratar a tendência de do período de fevereiro a março de 2019. Para o mês de dezembro de 2019, ainda que não consiga representar o crescimento acentuado do IPCA, os núcleos de inflação conseguem identificar uma tendência de crescimento. Adicionalmente, destaca-se que o menor intervalo de confiança é o construído a partir das aproximações e previsões do IPCA-EX0 (Figura 6.12a).

6.3.3 Considerações sobre a Previsão com Núcleos de Inflação Oficiais

Na análise do EQM, os núcleos de inflação oficiais por exclusão apresentaram resultados aquém em relação aos demais núcleos oficiais. Entretanto, quando é realizada a análise para a previsão no ano de 2019, percebe-se que as diferenças principais estão no tamanho do intervalo de confiança. Como os intervalos de confiança, em geral, para os núcleos de inflação baseados em alguma técnica matemática ou estatística são maiores, esses conseguem englobar o IPCA, porém permitem uma quantidade maior de incerteza na previsão do índice.

Salienta-se que, dentre os núcleos de inflação oficiais por exclusão, o IPCA-EX0 se destaca por apresentar o intervalo de confiança mais estreito; dentre os demais núcleos de inflação, não há diferença significativa entre as previsões para 2019.

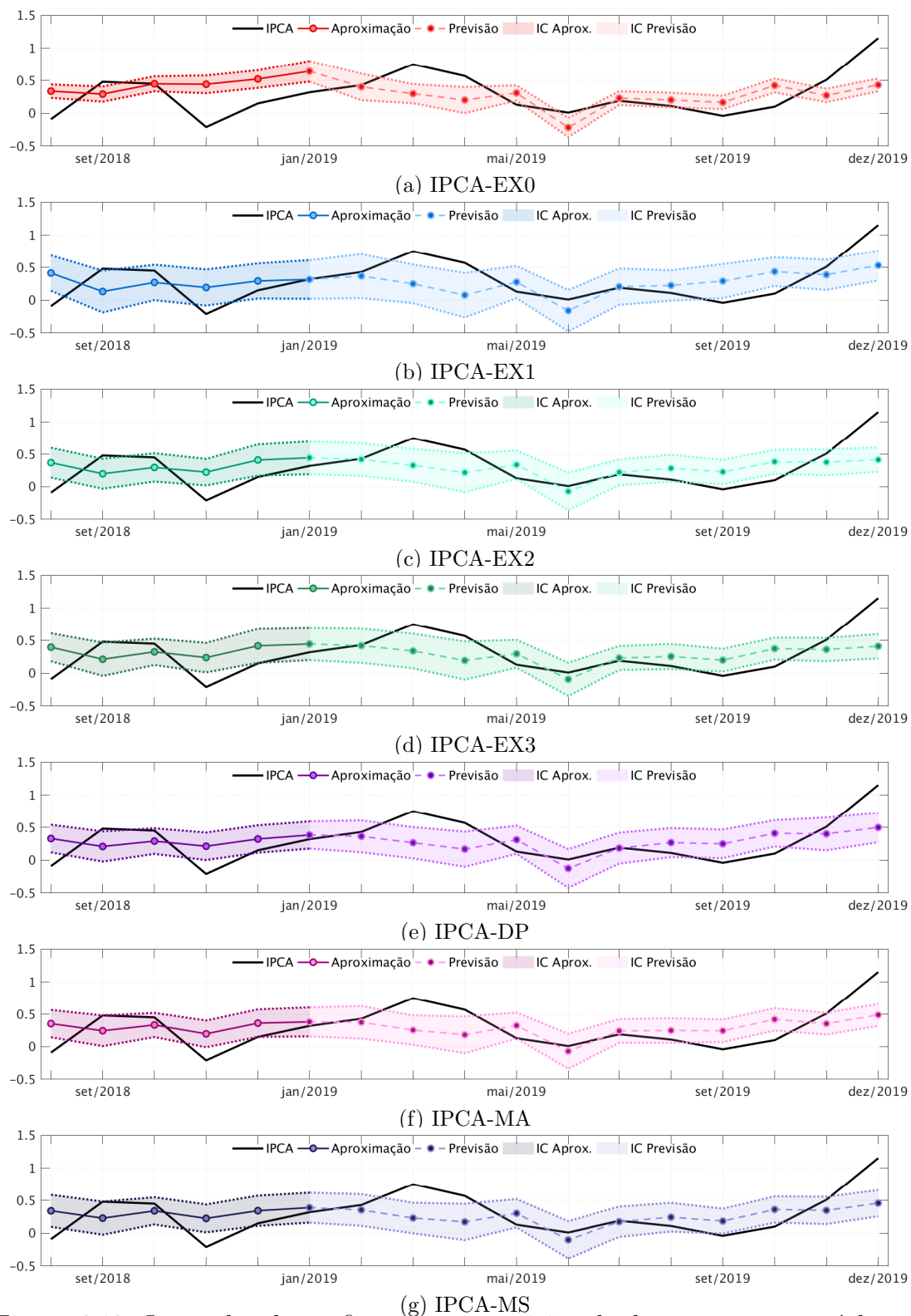


Figura 6.12: Intervalos de confiança para previsões de doze meses com núcleos de inflação oficiais.

6.4 Previsão com Núcleos de Inflação Baseados em *Wavelets*

A busca por núcleos de inflação que consigam excluir componentes com maior variabilidade sem, entretanto, desconsiderar informações relevantes para entender o comportamento da inflação faz com que a transformada *wavelet* seja de grande valia. Esta seção está organizada da seguinte forma: primeiro, são apresentados os núcleos de inflação baseados nas *wavelets* da família daubechies, com a respectiva análise do EQM e do intervalo de confiança e, depois, núcleos de inflação baseados nas *wavelets* da família symlet, apresentando, também, a análise do EQM e do intervalo de confiança.

6.4.1 Núcleos de Inflação: Daubechies

Nesta subseção serão apresentados os resultados para a previsão do IPCA a partir de núcleos de inflação baseados em *wavelets* da família daubechies. A primeira análise trata do EQM das simulações de 139 séries temporais obtidas a partir da reorganização do IPCA e, a segunda, do intervalo de confiança gerado da previsão em diversos horizontes de tempo.

6.4.1.1 Erro Quadrático Médio da Previsão com Núcleos de Inflação Daubechies

A Tabela 6.2 apresenta o resultado médio do EQM obtido a partir de núcleos de inflação baseados em *wavelets* da família daubechies (Seção 3.2.6). É apresentado o EQM para a previsão no horizonte de um, três, seis, nove e doze meses das 139 séries temporais, conforme descrito na Seção 6.2. Além disso, são apresentados o número de neurônios e as épocas, além do R^2 .

As primeiras análises serão relacionadas ao R^2 , ao número de neurônios e de épocas, estes últimos relacionados com a rede neural de melhor performance.

Tabela 6.2: EQM médio da previsão utilizando núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies.

Núcleo de inflação	Neurônios	Épocas	EQM da Rede Neural			EQM da Previsão					R^2
			Treino	Validação	Teste	k+1	k+3	k+6	k+9	k+12	
db2	70,3453	159,1511	0,0364	0,0373	0,0368	0,1122	0,1098	0,1553	0,1548	0,1179	0,5293
db4	70,3453	159,1511	0,0364	0,0373	0,0368	0,1122	0,1098	0,1553	0,1548	0,1179	0,5293
db6	69,4317	168,6978	0,0346	0,0368	0,0351	0,1092	0,1089	0,1533	0,1496	0,1165	0,5509
db8	69,5612	165,5180	0,0351	0,0365	0,0346	0,1165	0,1247	0,1608	0,1533	0,1212	0,5470
db10	68,9065	161,5108	0,0353	0,0350	0,0348	0,1219	0,1124	0,1599	0,1512	0,1202	0,5470

Na Tabela 6.2, a partir do R^2 , observa-se que os núcleos de inflação utilizados neste modelo conseguem aproximar mais de 50% do IPCA. Em relação a essas redes neurais de melhor performance, percebe-se que, em média, é necessário pelo menos 68 neurônios e entre 148 e 167 épocas.

Na análise do EQM médio para treinamento, teste e validação, não foram observados valores maiores que 0,0400. Quanto à previsão, no horizonte de um mês, o EQM varia entre 0,1092 (db6) a 0,1219 (db10); no horizonte de três meses variam entre 0,1089 (db6) a 0,1247 (db8); para seis meses, os núcleos db2, db4 e db6 tiveram o menor EQM, 0,1553 e o maior EQM é o db8 (0,1608); para nove meses, o EQM médio varia entre 0,1496 (db6) e 0,1548 (db2 e db4); por fim, a previsão para doze meses, tem EQM médio entre 0,1165 (db6) e 0,1212 (db8). Nota-se, a partir do exposto, que o núcleo de inflação baseado na db6 apresentou os menores EQMs para todos os horizontes de tempo.

A seguir é realizada a análise de dispersão para os resultados das redes neurais com melhor performance, comparando o número de neurônios e EQM entre os núcleos de inflação baseados nas *wavelets* da família das daubechies. Cada um dos resultados é representado por um ponto, com 50% situados na caixa; a linha vermelha dentro da caixa indica a mediana dos resultados; e os *outliers* são os pontos que estão além dos limites das barras horizontais, que, por sua vez, representam o limite do primeiro e quarto quartis, conforme descrito na Seção 6.2.

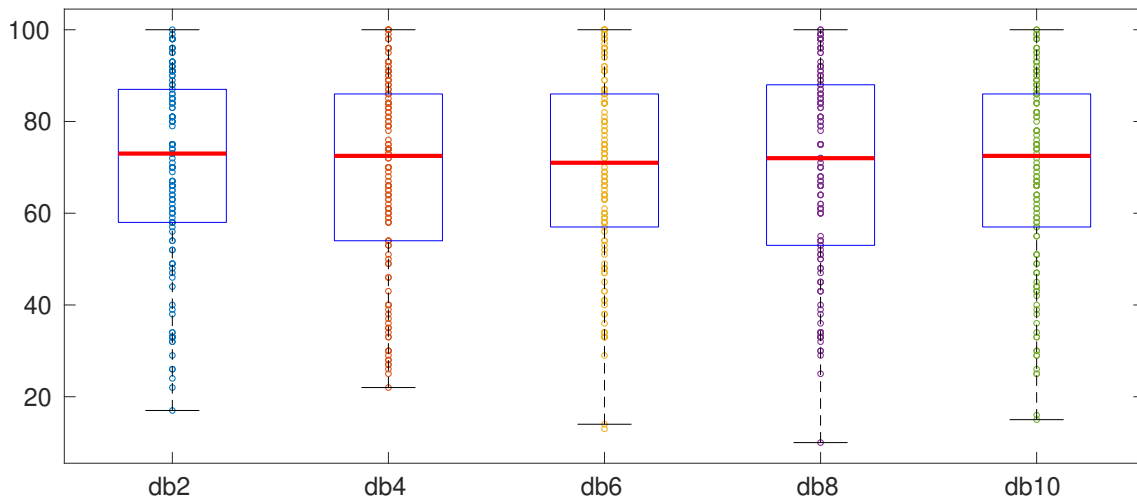


Figura 6.13: Comparação entre neurônios com núcleo de inflação baseado em *wavelets* daubechies.

A Figura 6.13 apresenta a quantidade de neurônios utilizados para obter a rede neural com melhor performance, isto é, menor EQM no treinamento, na validação e no teste.

O número mediano de neurônios, apresentado na Figura 6.13, utilizados na construção das melhores redes neurais está entre 71 (*db6*) e 73 (*db2*), com mínimo de 10 neurônios (*db8*); os núcleos de inflação baseados na *db6* e na *db2* possuem a menor dispersão quando analisados os dados em torno da mediana.

A Figura 6.14 apresenta a comparação dos erros para a previsão no horizonte de um mês. O EQM mediano está entre 0,0398 (*db6*) e 0,0502 (*db10*), com erro máximo em 1,6024 (*db10*). Observa-se, também, a presença de *outliers*, entre 18 (*db10*) e 23 (*db2*); o EQM máximo, quando excluídos *outliers*, fica entre 0,2090 (*db6*) e 0,2497 (*db10*). A menor dispersão é observada no núcleo de inflação baseado na *db4*, juntamente com a segundo menor EQM, tornam este núcleo de inflação a melhor opção dentre os núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies para previsão no horizonte de um mês.

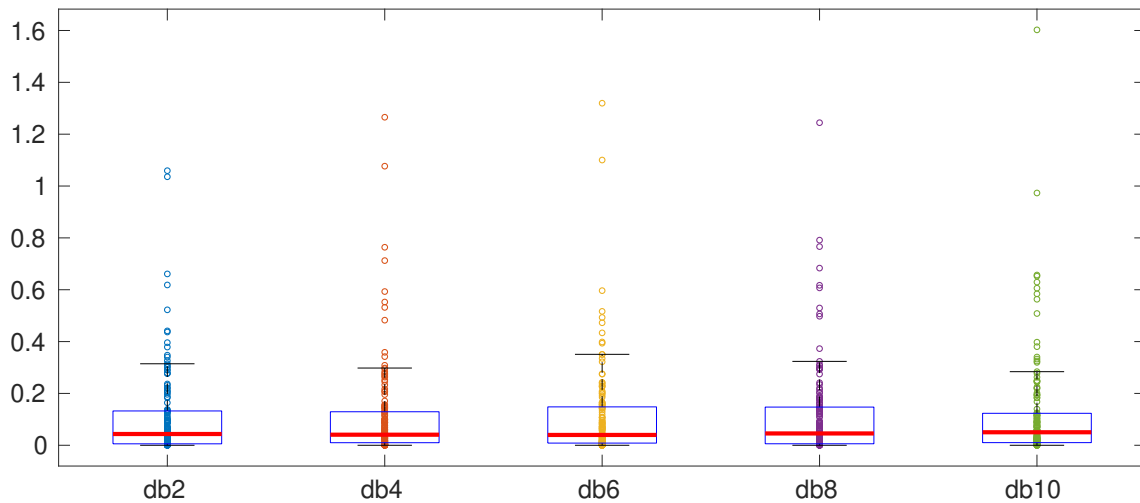


Figura 6.14: EQM para a previsões de um mês com núcleo de inflação baseado em *wavelets* daubechies.

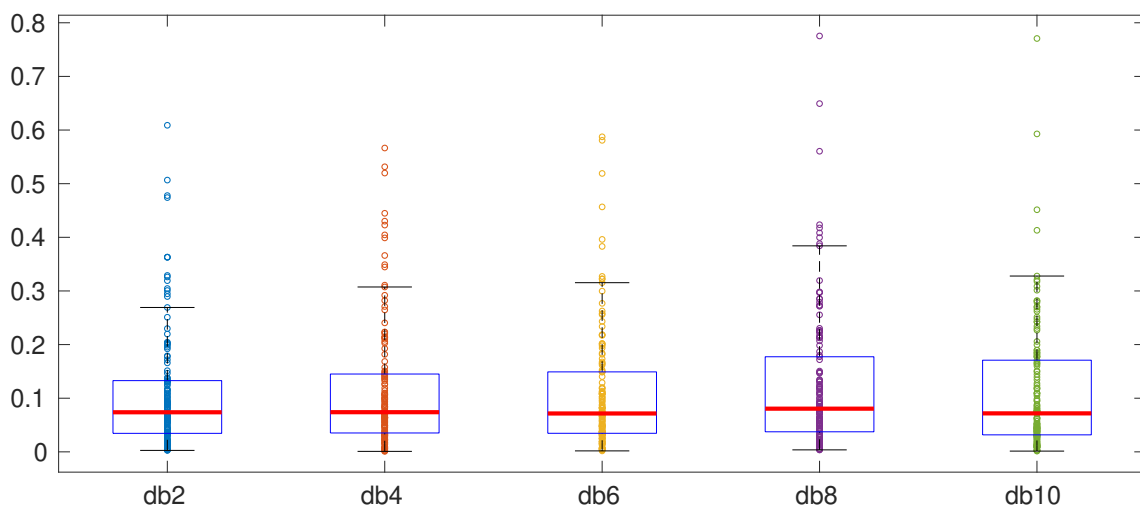


Figura 6.15: EQM para a previsões de três meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* daubechies.

A Figura 6.15 mostra a comparação entre o EQM para a previsão para três meses das 139 amostras utilizando as redes neurais de melhor performance. É possível observar a existência de *outliers*, entre 9 (db10) e 15 (db2). O maior EQM é de 0,7707 (db10) e, quando excluídos os *outliers* obtém-se EQM variando entre 0,2578 (db6) e 0,2947 (db2). O valor mediano, ainda, fica em torno de 0,0700, com o maior valor de 0,0805 (db6).

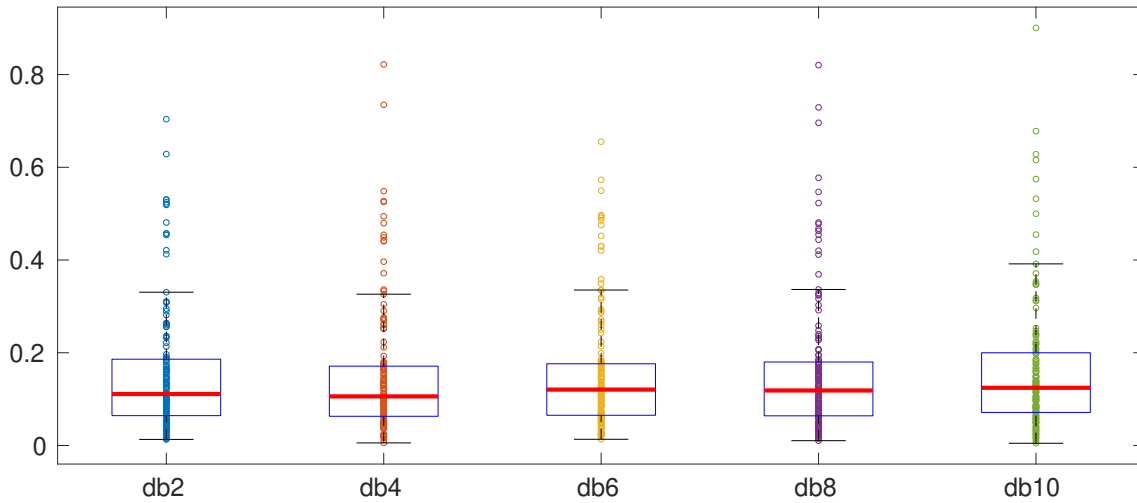


Figura 6.16: EQM para a previsões de seis meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* daubechies.

A previsão para seis meses é apresentada na Figura 6.16, cujo valor mediano do EQM varia entre 0,1059 (db4) e 0,1245 (db10). O número de *outliers* não difere significativamente em relação à previsão de três meses: de 9 (db10) a 14 (db8). O maior EQM é de 0,9007 e, quando excluídos os *outliers*, varia entre 0,3306 (db2) e 0,3917 (db10). Em relação à dispersão, não há uma diferenciação significativa entre esses núcleos de inflação, sendo que o núcleo de inflação baseado na db8 apresenta uma distribuição mais distante da média.

A Figura 6.17 exibe a comparação entre o EQM para as previsões no horizonte de nove meses. A mediana do EQM varia entre 0,1081 (db8) e 0,1371 (db2); o maior EQM é 0,5105 (db4) e, quando excluídos os *outliers*, o maior torna-se 0,4612 (db2). É possível notar um número menor de *outliers* em relação à previsão de seis meses, variando entre 0 (db2) a 10 (db8).

Por fim, a previsão no horizonte de 12 meses é apresentada na Figura 6.18. Observa-se que mediana do EQM, para todos os núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies, está em torno de 0,0900. O maior EQM é 0,4309 (db4) e, quando desconsiderados os *outliers*, 0,3149 (db10).

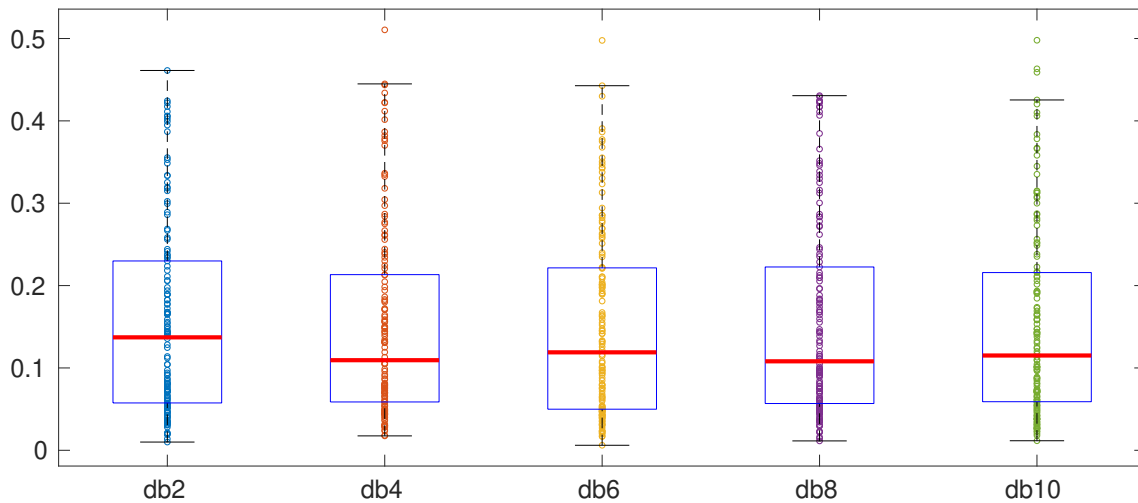


Figura 6.17: EQM para a previsões de nove meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* daubechies.

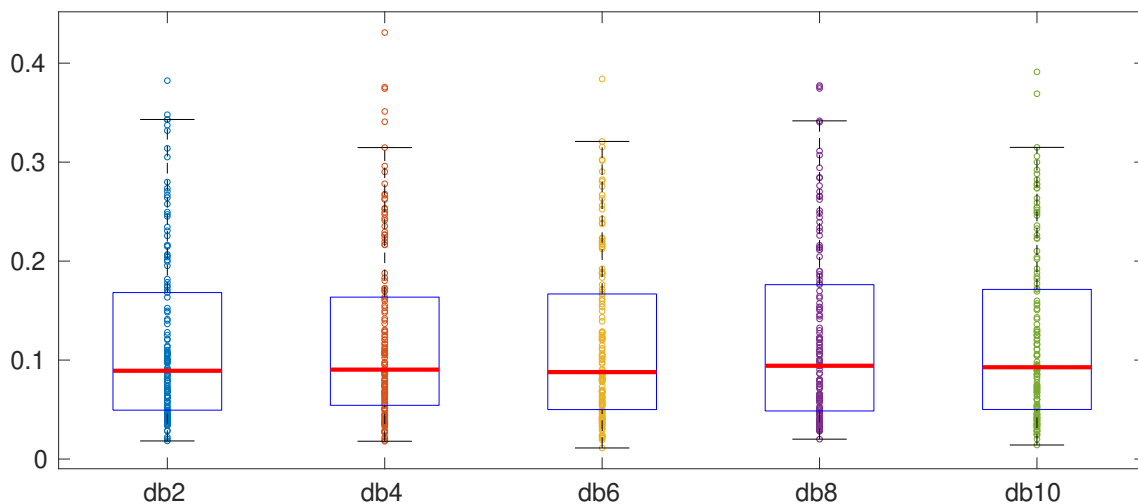


Figura 6.18: EQM para a previsões de 12 meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* daubechies.

Analisando os gráficos com o EQM para os diversos horizontes de previsão, observa-se que, dentre os núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies, os que apresentam um comportamento mais estável são o db2 e o db6. Destaca-se, ainda, a grande variabilidade da previsão gerada a partir do núcleo de inflação db10, uma vez que apresenta o maior erro e uma quantidade considerável de *outliers* em todos os horizontes de previsão.

6.4.1.2 Intervalos de Confiança das Previsões com Núcleos de Inflação Daubechies

Na análise dos intervalos de confiança, utilizou-se o *bootstrap* para gerar séries temporais a partir da reorganização de blocos de 24 observações; além disso, tanto a permutação dos blocos, quanto as redes neurais tiveram inicialização aleatória. Os intervalos de confiança apresentados possuem nível de confiança de 95% e são gerados a partir de 500 simulações.

A Figura 6.19 mostra a previsão da inflação gerada a partir de núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies para o horizonte de três meses. Destaca-se que a linha preta representa o IPCA e, em cores, a média da aproximação (linha sólida) e da previsão (linha pontilhada); ainda, a área sombreada representa o intervalo de confiança.

Primeiramente, percebe-se que a aproximação gerada pela rede neural apresenta a tendência do IPCA nos meses de agosto a dezembro de 2018. Quando a previsão é analisada, pode-se afirmar que os núcleos de inflação conseguem prever adequadamente os meses de janeiro e fevereiro de 2019, com atenção ao núcleo de inflação db2 (Figura 6.19a) que é aquele em que a média mais dista do valor observado do IPCA. Ainda que o mês de março não esteja representado pela média das previsões, sua previsão está contida dentro do intervalo de confiança.

É importante salientar que, com exceção do núcleo de inflação db2 (Figura 6.19a), os núcleos de inflação foram capazes de identificar uma tendência de crescimento em março de 2019. Ainda, observa-se um aumento do intervalo de confiança no mês de março em núcleos de inflação como o db4 (Figura 6.19b) e db8 (Figura 6.19d), indicando uma maior variância nas previsões para o mês.

A Figura 6.20 apresenta a previsão para o horizonte de seis meses, assim como os intervalos de confiança. De agosto a dezembro de 2018, apresenta-se a média

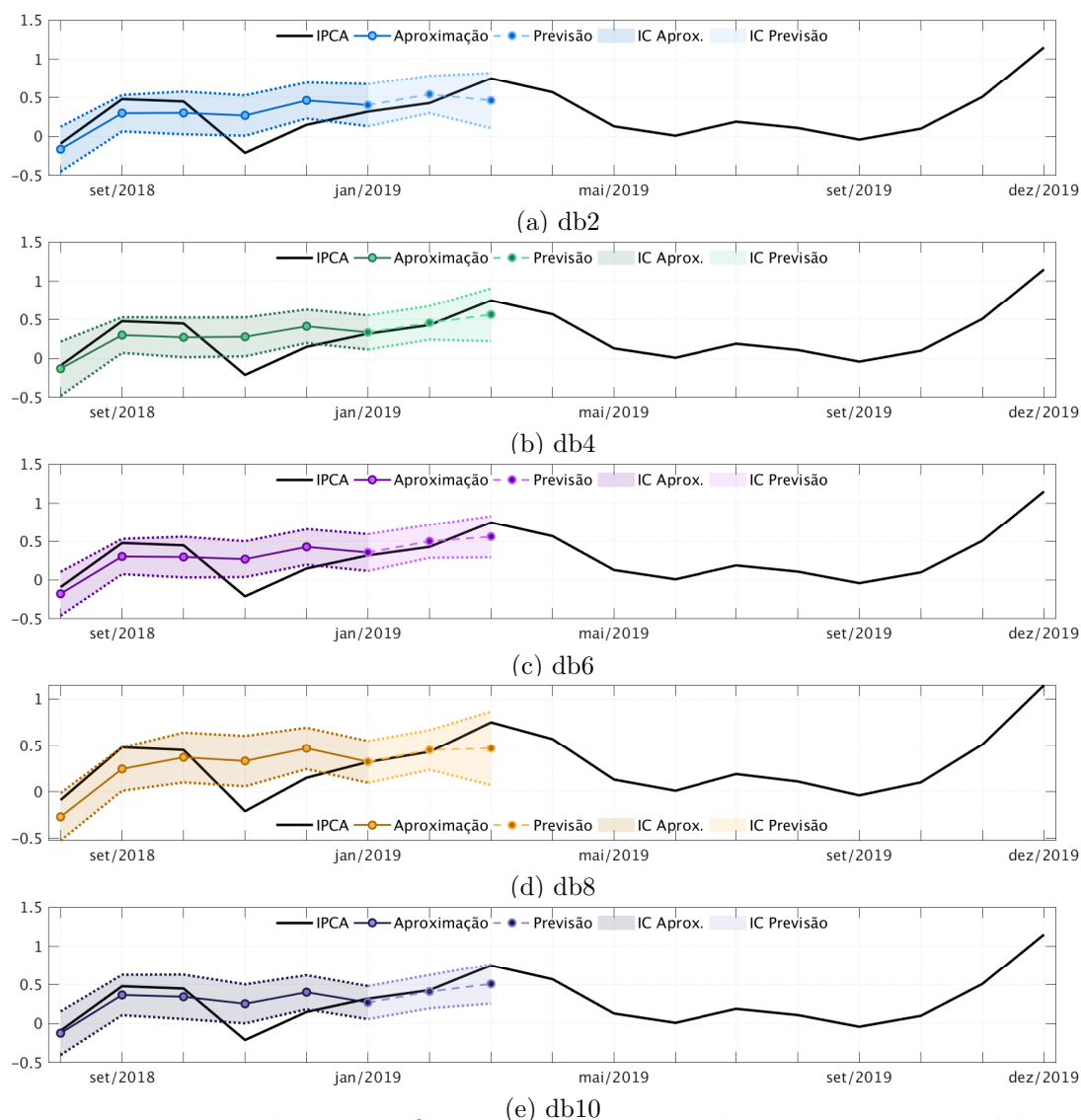


Figura 6.19: Intervalos de confiança para previsões de três meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies.

das aproximações (linha sólida); de janeiro a junho de 2019, a linha pontilhada representa a média das previsões. Os intervalos de confiança são caracterizados pelas áreas sombreadas. O IPCA, enfim, é representado pela linha preta.

Enquanto as aproximações geradas pelas redes neurais conseguem aproximar o sinal de agosto a dezembro de 2018 de forma adequada, as previsões apresentam limitações em representar os meses de março, maio e junho de 2019. Mesmo que março de 2019 não esteja englobado pelo intervalo de confiança, é possível visualizar que a tendência de crescimento e posterior decréscimo, em abril, é iden-

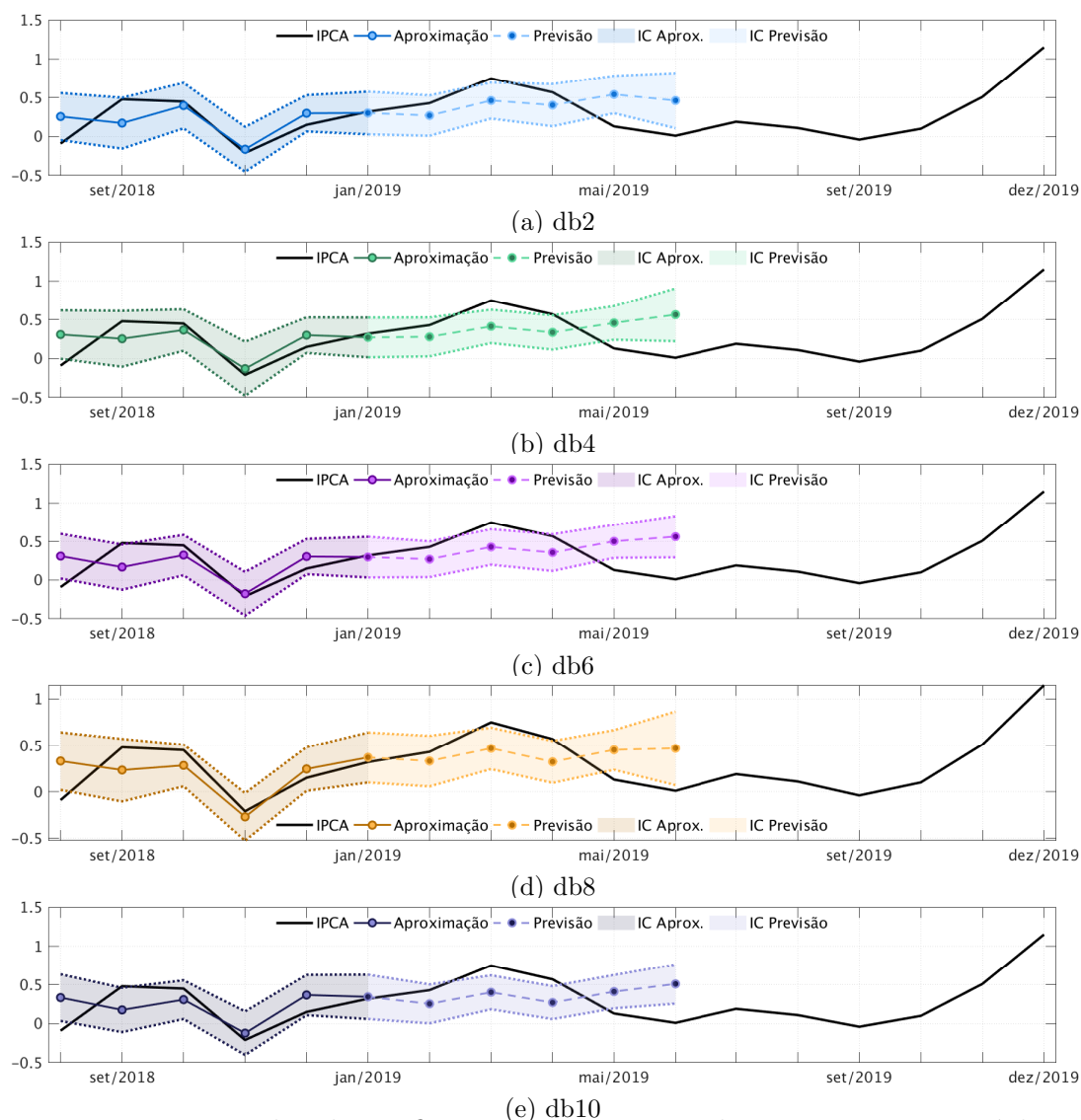


Figura 6.20: Intervalos de confiança para previsões de seis meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies.

tificada pela previsão. Salienta-se que o único núcleo de inflação capaz de indicar o decréscimo do IPCA em junho foi o db2 (Figura 6.20a), sendo deste núcleo de inflação a menor distância em relação ao valor observado do IPCA.

A Figura 6.21 mostra a média da aproximação e da previsão para os meses de janeiro a setembro de 2019. Em preto, tem-se o IPCA; em cores, a linha sólida representa a média das aproximações e, em pontilhado, a média das previsões de 500 simulações. Ainda, delimitado por linhas pontilhadas, com 95% de confiança.

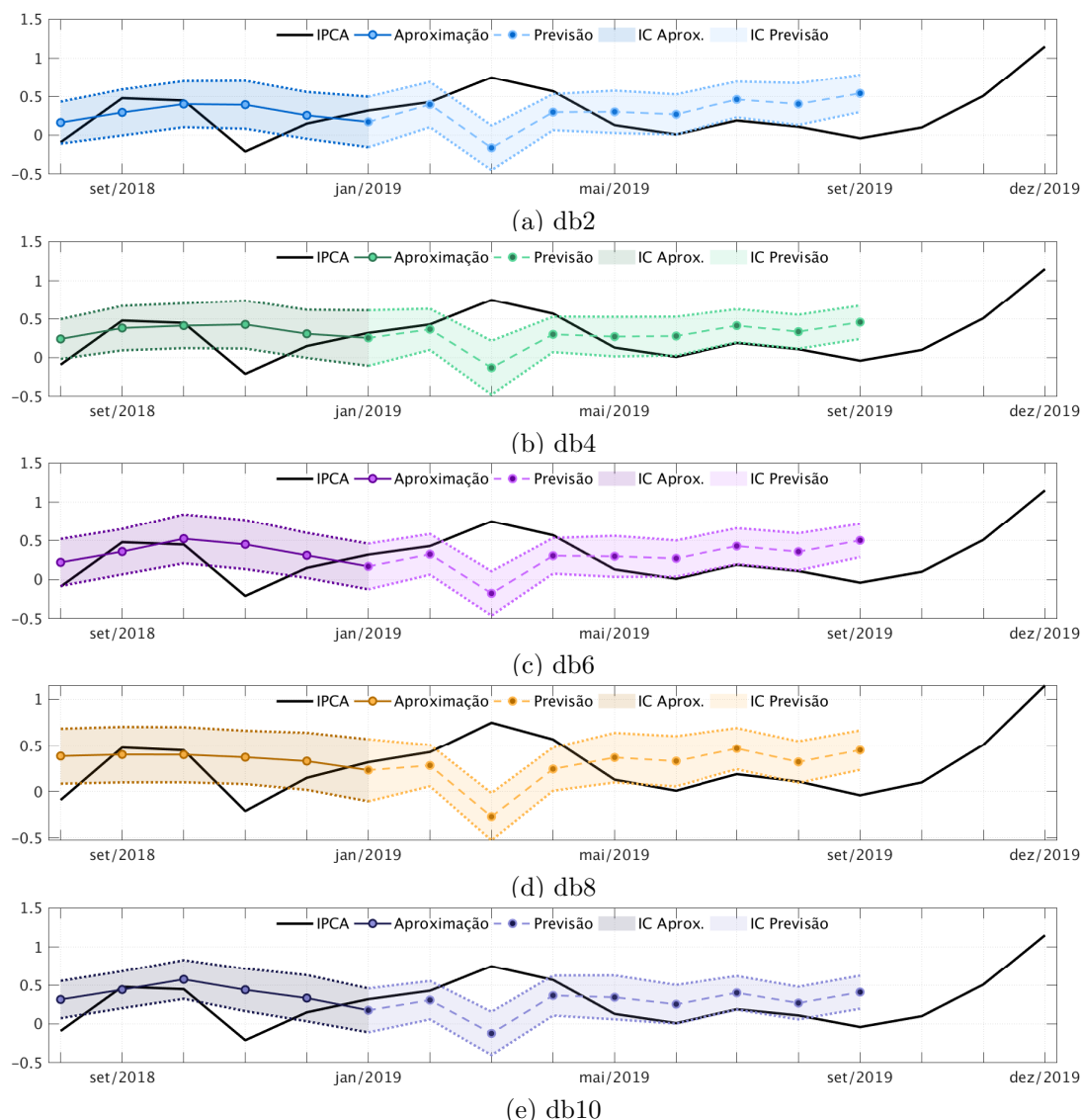


Figura 6.21: Intervalos de confiança para previsões de nove meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies.

Quanto às aproximações, os núcleos de inflação db4 (Figura 6.21b) e db8 (Figura 6.21d) apresentam um comportamento quase constante; as demais aproximações estão próximas à média dos meses de agosto a dezembro de 2018, com exceção da db10, que apresenta uma aproximação superior ao IPCA. Quando observada a previsão, salienta-se que o mês de março de 2019 não possui uma boa aproximação, sendo prevista uma tendência oposta ao que é observado no IPCA; o mesmo é observado em setembro de 2019. Além disso, com exceção dos meses

supracitados, os núcleos de inflação db4 (Figura 6.21b), db6 (Figura 6.21c) e db10 (Figura 6.21e) são capazes de prever o IPCA nos limites dos intervalos de confiança.

Por último, os intervalos de confiança das previsões de doze meses são apresentados na Figura 6.22. O IPCA é representado pela linha preta, enquanto as linhas coloridas representam as aproximações (linha sólida) e as previsões (linha pontilhada): o intervalo de confiança é ilustrado através da região sombreada.

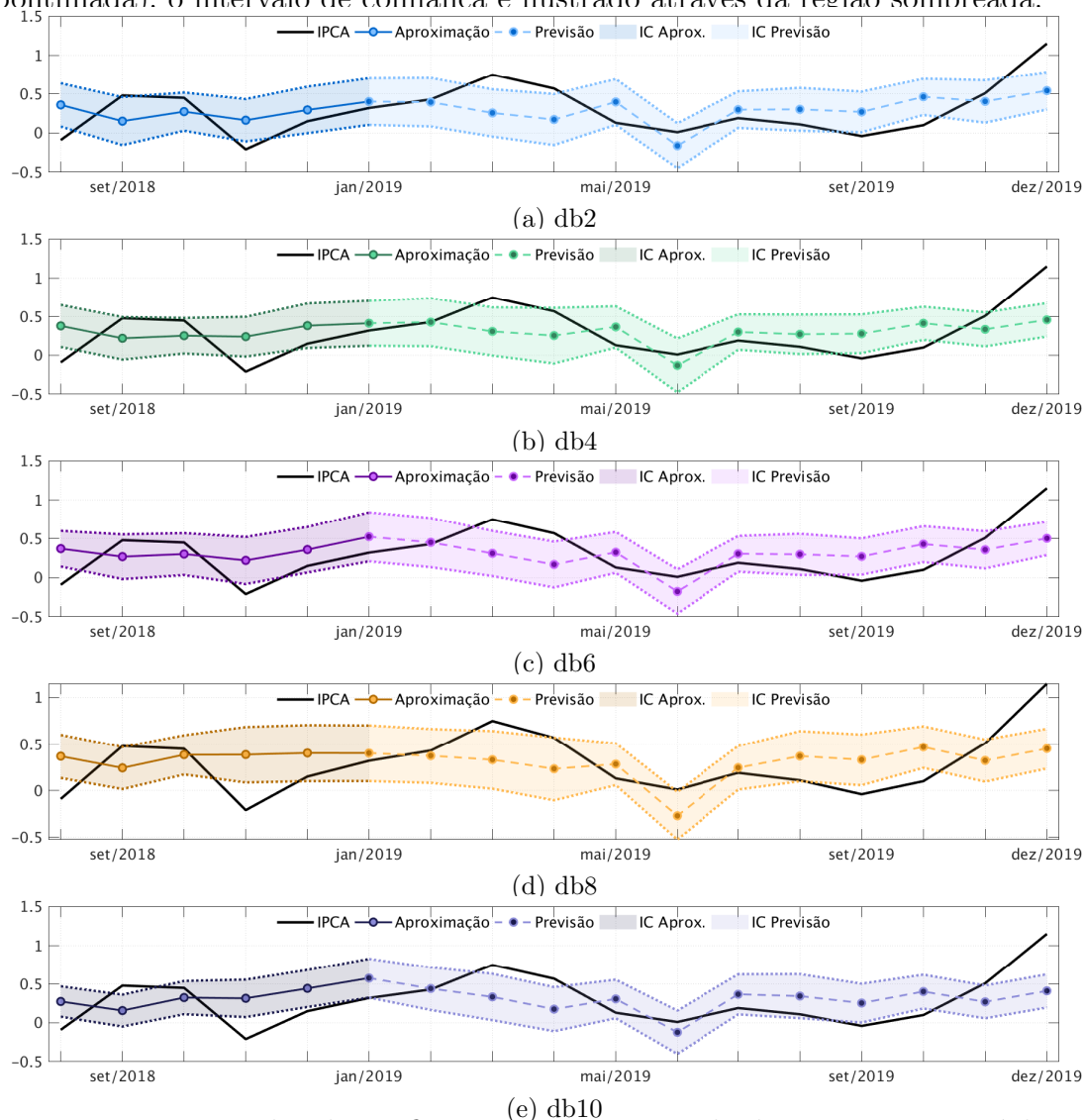


Figura 6.22: Intervalos de confiança para previsões de doze meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* daubechies.

Quanto à aproximação dos meses de agosto a dezembro de 2018, é possível afirmar que os núcleos de inflação tendem a ser uma representação da média

do intervalo. Já para a previsão, observa-se que, novamente, o mês de março não foi adequadamente representado pela previsão, sendo previsto um decréscimo do IPCA, quando na verdade há um crescimento; similarmente, no mês de novembro, prevê-se um decréscimo ao invés do crescimento observado naquele mês. Adicionalmente, a previsão para o mês de dezembro de 2019, ainda que não tenha sua previsão em mesma magnitude que o observado no IPCA, apresenta uma tendência de crescimento em todos os núcleos de inflação.

Quando trata-se do intervalo de confiança da previsão de doze meses, os dois núcleos de inflação que conseguem incorporar o maior número de previsões para os meses de 2019 são o db4 (Figura 6.22b) e o db8 (Figura 6.22d). Nota-se que, embora haja diferença entre o tamanho dos intervalos de confiança gerados a partir dos diversos núcleos de inflação baseados nas *wavelets* daubechies, não há como utilizar essa informação para determinar qual é o núcleo de inflação mais adequado para a previsão do IPCA.

6.4.1.3 Considerações sobre a Previsão com Núcleos de Inflação Daubechies

Da análise do EQM, as previsões geradas pelos núcleos de inflação db6 tiveram menores EQMs em todos os horizontes de análise. Adicionalmente, quando analisado o intervalo de confiança para as previsões no ano de 2019, nota-se que o núcleo de inflação db6 figura entre os melhores resultados para os horizontes de três e nove meses. Por esta razão que esse núcleo de inflação tende a se destacar dos demais.

6.4.2 Núcleos de Inflação: Symlets

Nesta subseção serão apresentados os resultados da previsão do IPCA, assim como os intervalos de confiança, gerados com núcleos de inflação baseados em *wavelets* da família symlet. Primeiro, é apresentado o EQM das simulações de

139 séries temporais obtidas a partir da reorganização da série temporal do IPCA e, depois, so intervalos de confiança gerados das previsões em diversos horizontes de tempo.

6.4.2.1 Erro Quadrático Médio da Previsão com Núcleos de Inflação Symlets

A Tabela 6.3 apresenta os resultados do EQM médio obtido a partir de núcleos de inflação baseados em *wavelets* symlet (Subseção 3.2.6); os resultados foram obtidos a partir da rede neural descrita na Seção 6.1 e dados organizados conforme descrito na Seção 6.2. Na tabela abaixo, são apresentados o EQM médio da construção da rede neural, assim como para previsões nos horizontes de um, três, seis, nove e doze meses. Além dessas informações, são apresentados o número médio de neurônios e de épocas, assim como do R^2 para os núcleos de inflação em questão.

Tabela 6.3: EQM médio da previsão utilizando núcleos de inflação baseados em *wavelets* symlet.

Núcleo de inflação	Neurônios	Épocas	EQM da Rede Neural			EQM da Previsão					R^2
			Treino	Validação	Teste	k+1	k+3	k+6	k+9	k+12	
sym2	70,3453	159,1511	0,0364	0,0373	0,0368	0,1122	0,1098	0,1553	0,1548	0,1179	0,5293
sym4	66,4029	167,5108	0,0357	0,0363	0,0361	0,1233	0,1188	0,1562	0,1540	0,1238	0,5395
sym6	69,4748	164,4676	0,0350	0,0350	0,0340	0,1132	0,1101	0,1525	0,1510	0,1181	0,5496
sym8	68,5827	166,8561	0,0353	0,0352	0,0346	0,1226	0,1173	0,1602	0,1537	0,1213	0,5469
sym10	69,4748	173,4748	0,0341	0,0356	0,0340	0,1207	0,1166	0,1595	0,1542	0,1196	0,5595

Observa-se que o número médio de neurônios é superior à 66,4029 (sym4), alcançando 70,3453 neurônios no núcleo de inflação baseado na sym2; e, quanto às épocas, percebe-se que nos casos apresentados na tabela acima, o valor varia entre 159 e 174 épocas. Quanto ao EQM de treinamento, validação e teste, estes valores ficaram abaixo de 0,0400 em todos os casos apresentados na tabela acima. Ainda, o R^2 médio possui valores entre 0,5293 (sym2) e 0,5595 (sym10).

Quando é analisado o EQM da previsão, para o horizonte de um mês, o resultado médio da previsão varia entre 0,1122 (sym2) e 0,1233 (sym4). Para a previsão no horizonte de três meses, o EQM médio varia entre 0,1098 (sym2) e 0,1188 (sym4); para seis meses, de 0,1525 (sym6) e 0,1602 (sym8); para nove meses,

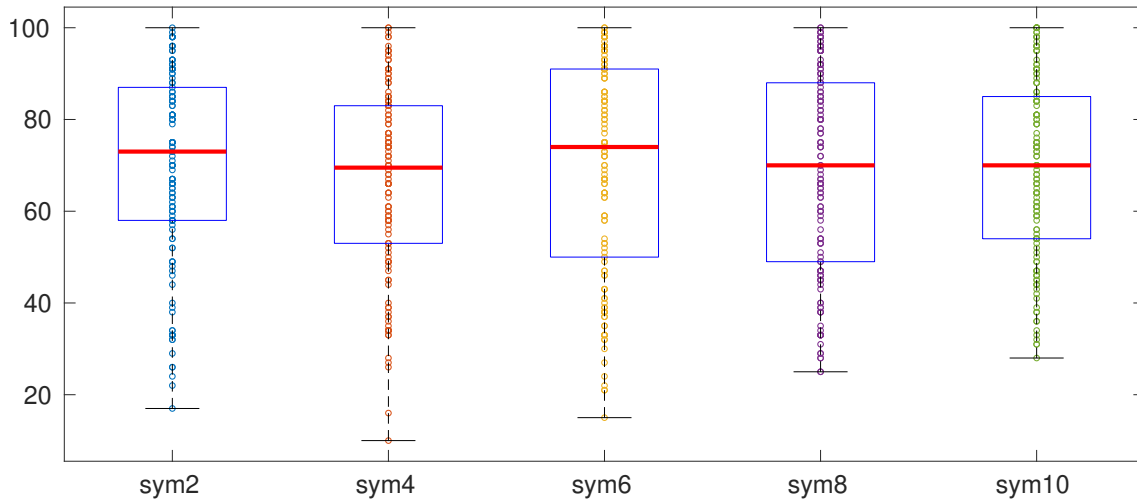


Figura 6.23: Comparação entre neurônios com núcleo de inflação baseado em *wavelets* symlet.

de 0,1510 (sym6) a 0,1548 (sym2); e, por fim, para doze meses, entre 0,1179 (sym2) e 0,1238 (sym4). Observando a variação entre o EQM para a previsão, nota-se que os menores erros são apresentados pelos núcleos de inflação sym2 e sym6 para os diversos horizontes de tempo.

Para corroborar estas observações, uma análise da dispersão do número de neurônios e do EQM nos diversos horizontes de previsão são apresentadas, conforme descrito na Seção 6.2.

A primeira análise trata do número de neurônios necessários para gerar a rede neural de melhor performance em relação ao EQM (Figura 6.23). Observa-se que o número mínimo de neurônios necessário foi 10 (sym4) e o mediano, entre 69 (sym4) e 74 (sym6). Ressalta-se que a menor dispersão no número de neurônios é encontrado para os resultados gerados pela utilização da sym10, variando entre 28 e 100 neurônios.

A Figura 6.24 apresenta o EQM para a previsão de um mês. Observa-se que o EQM mediano está em torno de 0,0437, com valor máximo de 1,6812 (sym8); quando desconsiderados os *outliers*, o maior EQM é de 0,3578 (sym10). Ainda, as

menores dispersões do EQM são apresentadas pelos núcleos de inflação baseados em sym2 e sym4.

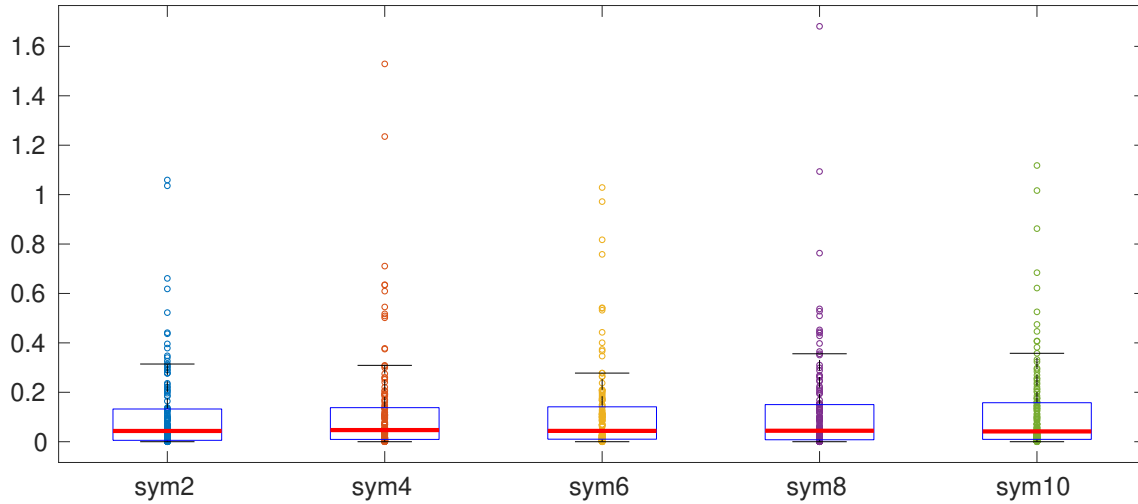


Figura 6.24: EQM para a previsões de um mês com núcleo de inflação baseado em *wavelets* symlet.

A Figura 6.25 mostra o EQM para a previsão de três meses, cuja mediana está em torno de 0,0723. O EQM máximo varia entre 0,5682 (sym6) e 0,6485 (sym10) e, quando desconsiderados os *outliers* – que variam entre 12 (sym2) e 19 (sym4) – o EQM máximo varia entre 0,2692 (sym2) a 0,3383 (sym8). Ainda, nota-se que os núcleos de inflação baseados na sym2 e na sym4 apresentam menores dispersões dos erros nos dois quartis centrais em relação aos demais núcleos de inflação no horizonte de previsão analisado.

A previsão para seis meses é apresentada na Figura 6.26, cujo EQM mediano varia entre 0,1091 (sym6) e 0,1207 (sym10). O EQM máximo varia entre 0,6610 (sym6) a 0,8791 (sym4) e, quando desconsiderados *outliers*, de 0,3306 (sym2) a 0,3747 (sym10).

A Figura 6.27 apresenta o EQM para a previsão no horizonte de nove meses. Nota-se a redução do número de *outliers* e, quanto ao EQM, os valores máximos variam entre 0,4324 (sym6) e 0,4792 (sym4) desconsiderando *outliers*. O EQM mediano, por sua vez, está entre 0,1126 (sym4) e 0,1371 (sym2).

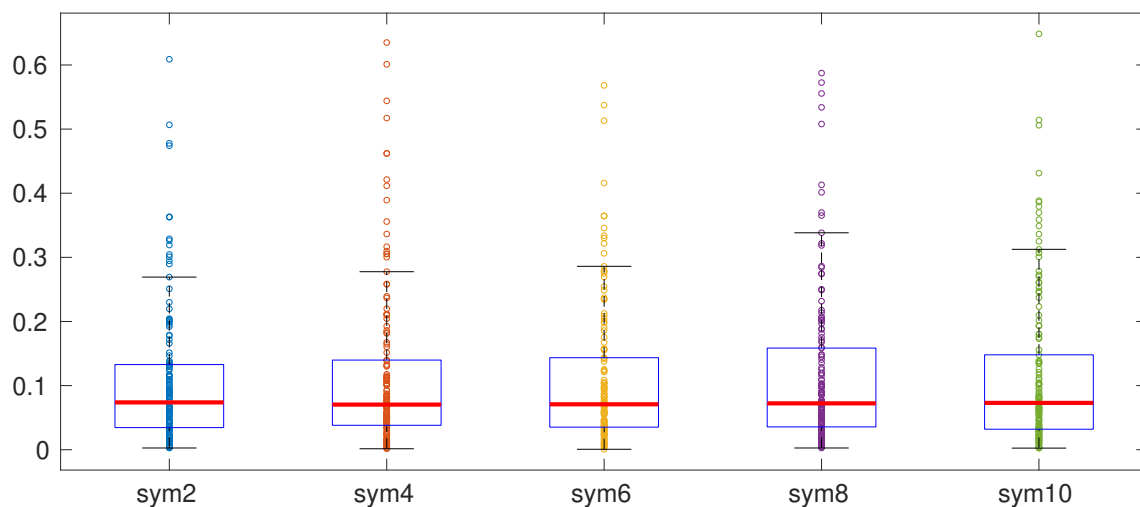


Figura 6.25: EQM para a previsões de três meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* symlet.

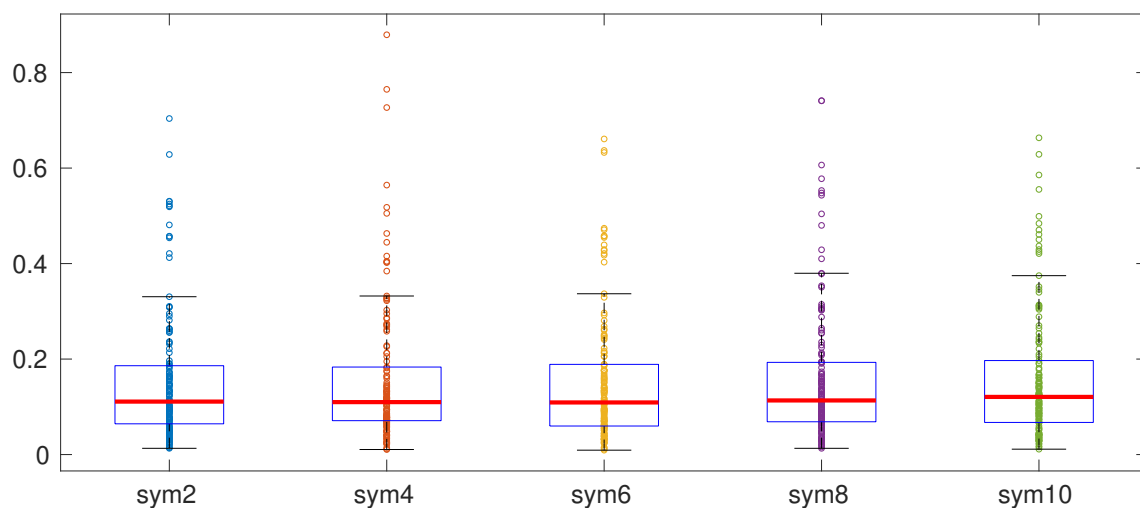


Figura 6.26: EQM para a previsões de seis meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* symlet.

A Figura 6.28 mostra a comparação do EQM para a previsão no horizonte de 12 meses. Destaca-se as previsões geradas pelo núcleo de inflação baseado na sym6, uma vez que apresenta tanto o menor erro ao desconsiderar *outliers*, como a menor dispersão do EQM em relação ao segundo e ao terceiro quartis.

Da análise do EQM médio e das suas distribuições, os núcleos de inflação sym2 e sym6 apresentam melhores resultados médios, conforme Tabela 6.3; ainda, da

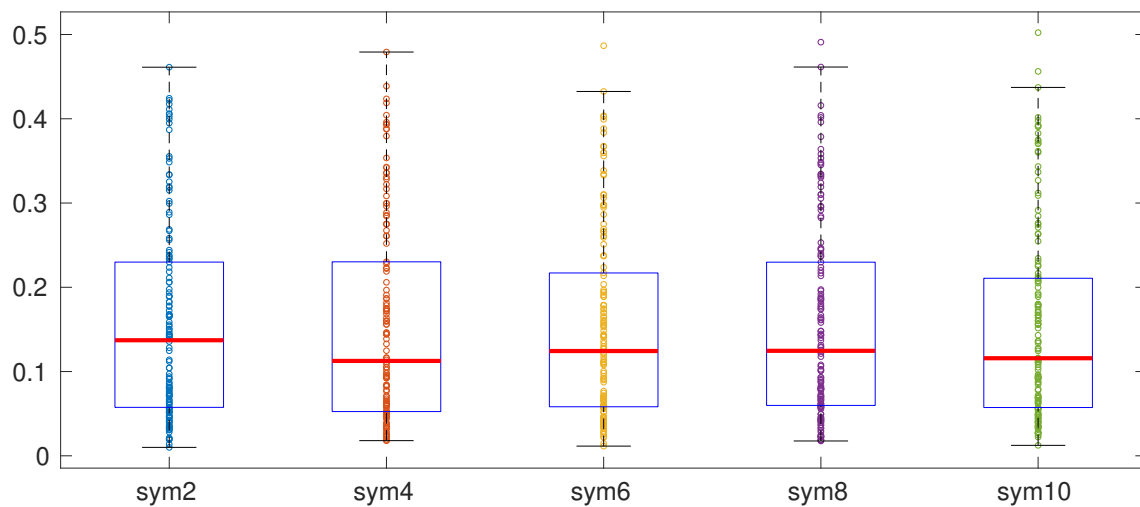


Figura 6.27: EQM para a previsões de nove meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* symlet.

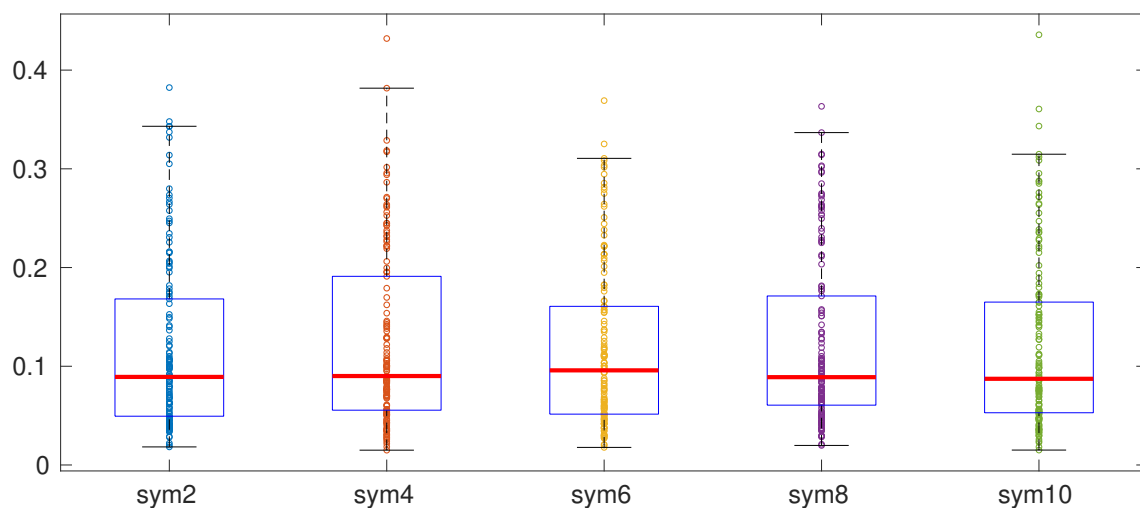


Figura 6.28: EQM para a previsões de doze meses com núcleo de inflação baseado em *wavelets* symlet.

análise da distribuição do EQM, os núcleos de inflação sym2, sym4 e sym6 figuram entre os menores EQMs. Desta forma, os núcleos de inflação baseados na sym2 e sym6 apresentam os melhores resultados quando da análise do EQM.

6.4.2.2 Intervalo de Confiança da Previsão com Núcleos de Inflação Symlets

Para gerar os intervalos de confiança, utiliza-se a organização dos dados descrita na Seção 6.2. Os intervalos de confiança apresentados possuem nível de confiança de 95% e são gerados a partir de 500 simulações.

A Figura 6.29 mostra a previsão da inflação gerada a partir de núcleos de inflação baseados em *wavelets* symlets para o horizonte de três meses. Enquanto a linha preta representa o IPCA, as coloridas representam as médias das aproximações (linhas sólidas) e das previsões (linhas pontilhadas); ainda, as áreas sombreadas representam os intervalos de confiança.

Quanto a aproximação, percebe-se que esta tende a seguir a média do período de agosto a dezembro de 2018. Já para a previsão no horizonte de três meses, os núcleos de inflação foram capazes de prever adequadamente os meses de janeiro e fevereiro de 2019, inclusive a tendência de crescimento para o mês de março de 2019, com exceção da sym2. Ressalta-se que os intervalos de confiança incorporam o valor observado do IPCA, tanto nas aproximações, quanto nas previsões, com exceção dos meses de novembro e dezembro de 2018; quanto ao tamanho do intervalo de confiança, não observa-se diferença significativa entre os núcleos de inflação.

A Figura 6.30 apresenta as previsões para os meses de janeiro a junho de 2019. Nos gráficos, a linha em preto representa o IPCA e as linhas coloridas, as aproximações (linhas sólidas) e as previsões (linhas tracejadas). Os intervalos de confiança são indicados pelas regiões sombreadas, que são delimitadas pelas linhas pontilhadas.

É possível visualizar que, para as aproximações, diferentemente do caso anterior, tanto as médias, quanto os intervalos de confiança, aproximam o sinal adequadamente, e não apenas sua média.

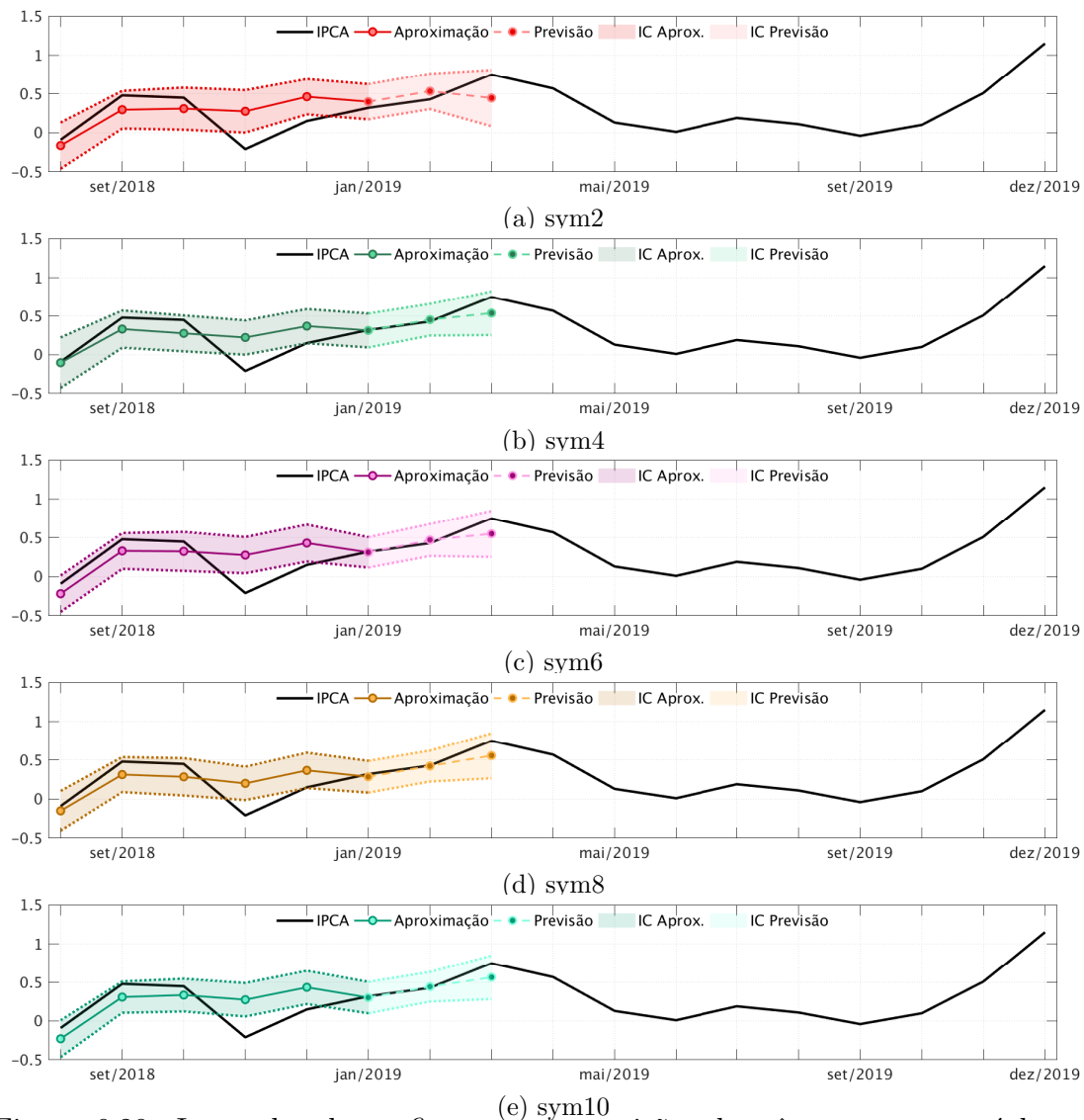


Figura 6.29: Intervalos de confiança para previsões de três meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* symlet.

Quanto às previsões, observa-se que os meses de março, maio e junho de 2019 apresentam-se fora do intervalo de confiança para todas as previsões geradas pelos núcleos de inflação. Destaca-se que as previsões obtidas pelas redes neurais foram capazes de identificar o crescimento do IPCA em março, mas, em geral, não identificaram o decréscimo do IPCA em maio e em junho de 2019. Destaca-se que o núcleo de inflação sym2 (Figura 6.30a) é o único que prevê a tendência de decréscimo do IPCA no mês de junho de 2019.

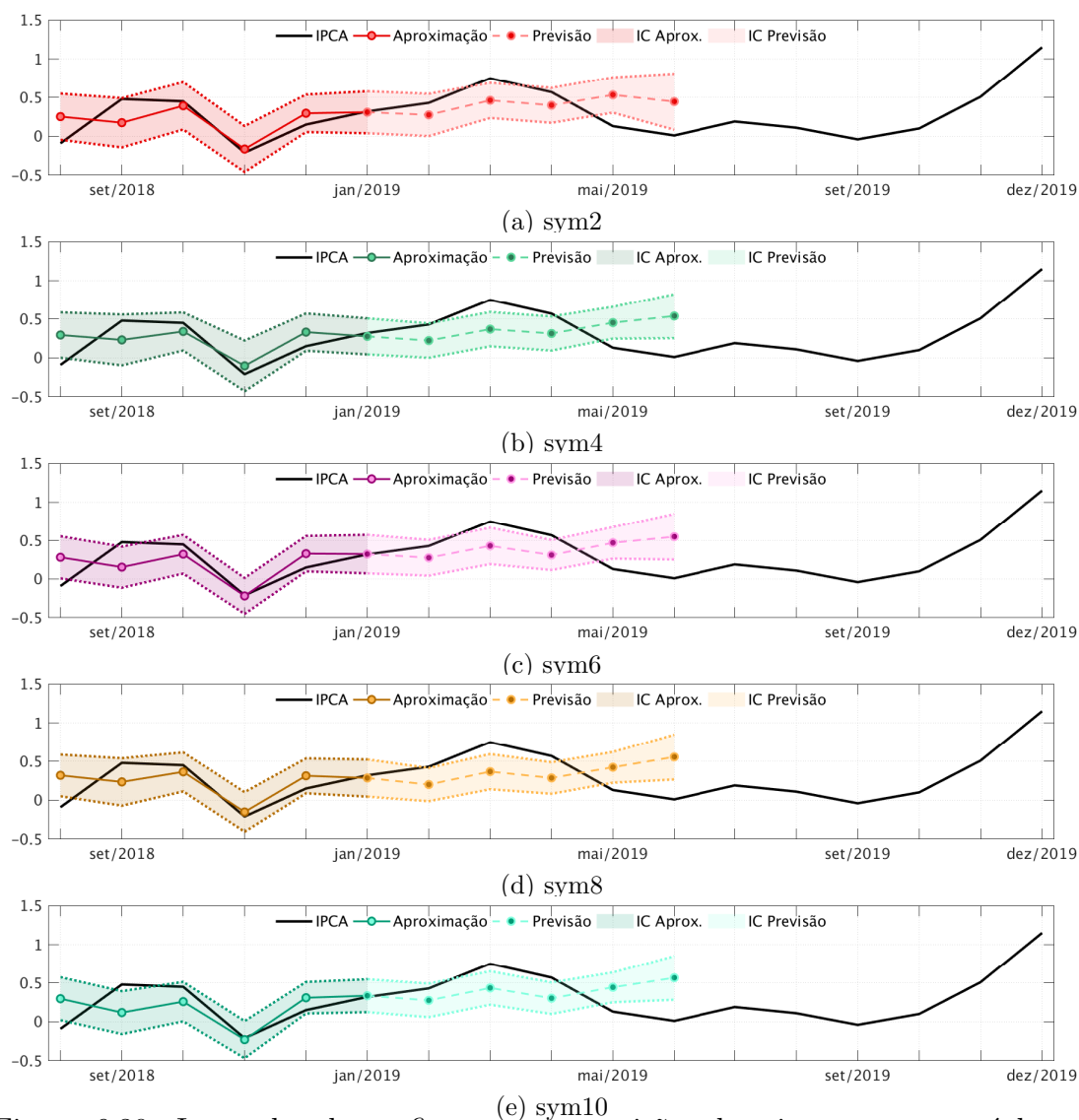


Figura 6.30: Intervalos de confiança para previsões de seis meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* symlet.

As médias das previsões e os respectivos intervalos de confiança para o horizonte de nove meses são apresentados na Figura 6.31. Em preto é representado o IPCA e, em cores, as aproximações (linhas sólidas) e as previsões (linhas tracejadas), assim como os respectivos intervalos de confiança.

As aproximações, mais uma vez, representam a tendência do IPCA. Quanto à previsão, o mês de março de 2019 não é bem representado, uma vez que esta mostra um decréscimo no IPCA quando, na verdade, há um crescimento. É interessante perceber que, de maio a agosto de 2019, o IPCA situa-se no limite do

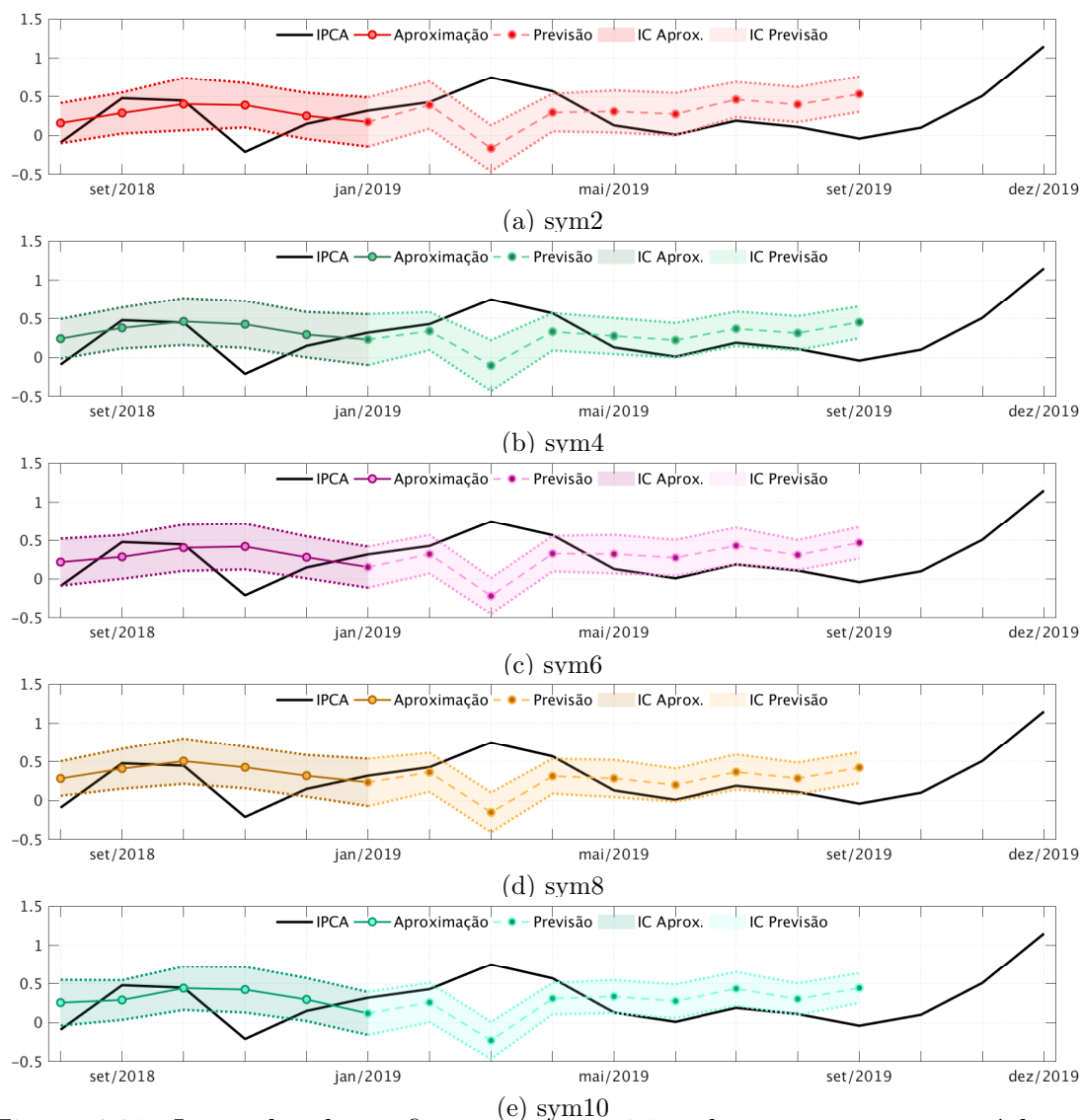


Figura 6.31: Intervalos de confiança para previsões de nove meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets symlet*.

intervalo de confiança. Por fim, todos os núcleos de inflação preveem um crescimento para o mês de setembro de 2019, enquanto pode ser observado um decréscimo do IPCA.

Na Figura 6.32 são apresentadas as aproximações e previsões para o IPCA para o horizonte de doze meses, de janeiro a dezembro de 2019. Enquanto as linhas coloridas representam as aproximações (linhas sólidas) e as previsões (linhas tracejadas), a linha preta representa o IPCA. Os respectivos intervalos de confiança

das aproximações e das previsões podem ser visualizados nas áreas sombreadas, sendo delimitados pelas linhas pontilhadas

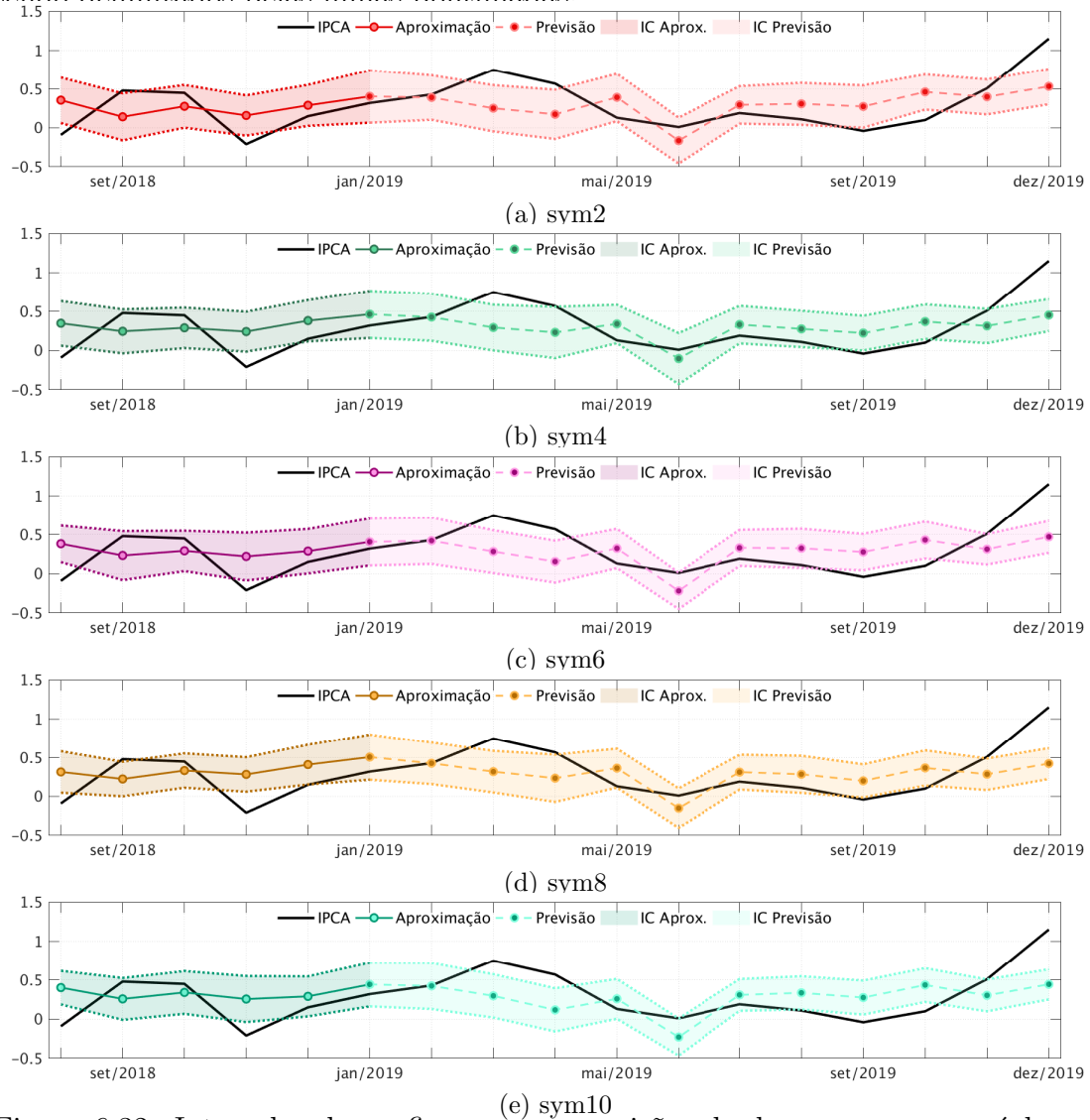


Figura 6.32: Intervalos de confiança para previsões de doze meses com núcleos de inflação baseados em *wavelets* symlet.

Nota-se que a aproximação representa a média de agosto a dezembro de 2018, com intervalos de confiança que englobam o IPCA, exceto nos meses de agosto e novembro de 2018. Quanto à previsão, o mês de março não é representado adequadamente por esses núcleos de inflação; os meses de setembro e novembro de 2019 têm a tendência de decréscimo e de crescimento adequadamente prevista, sendo que o IPCA fica no limite do intervalo de confiança para os núcleos de inflação sym4

(Figura 6.32b) e sym8 (Figura 6.32d). Por fim, para o mês de dezembro de 2019 é previsto um crescimento pelos núcleos de inflação, porém não tão acentuado como o observado.

6.4.2.3 Considerações sobre a Previsão com Núcleos de Inflação Symlets

Da análise do EQM, as previsões geradas pelos núcleos de inflação sym2 e sym6 tiveram menores EQMs em diversos horizontes de análise. Quando analisados os intervalos de confiança para as previsões no ano de 2019, não é possível afirmar que algum núcleo de inflação tenha tido um desempenho significativamente superior que os demais para todos os horizontes de tempo. Ainda assim, destaca-se o núcleo de inflação sym2, para a previsão de seis meses, e sym4 e sym8 para doze meses; nos demais horizontes, não há diferença significativa entre os núcleos de inflação a ponto de permitir a escolha entre esses.

6.5 Considerações Finais sobre a Previsão do IPCA

Nas seções anteriores foram apresentados os resultados para as diversas redes neurais geradas por núcleos de inflação oficiais e baseados em *wavelets*. Tornar-se necessário, ainda, uma comparação entre os diversos tipos de núcleos de inflação.

Em relação ao número médio de neurônios e do R^2 , não houve diferença significativa entre os núcleos de inflação. Para a previsão nos diversos horizontes, percebe-se uma vantagem ao utilizar o núcleo de inflação baseado na db6 na previsão para três meses, uma vez que apresenta menor EQM médio; em contrapartida, os núcleos de inflação oficiais obtiveram menor EQM médio para horizontes de seis e nove meses. Para as previsões de inflação nos demais horizontes de tempo, não foi observada diferença significativa entre os núcleos de inflação oficiais e os baseados em *wavelets*.

Quando analisada a dispersão do EQM em torno da mediana, considerando apenas os dois quartis centrais, observou-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* apresentaram menor dispersão nas previsões até seis meses; para nove e doze meses, a menor dispersão do EQM foi obtida pelo IPCA-MA. A partir deste fato, infere-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* possuem uma performance melhor em horizontes de tempo menores, enquanto os núcleos de inflação oficiais nos demais.

Por fim, quando analisado os intervalos de confiança das previsões para o ano de 2019, corrobora-se a afirmação de que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* tendem a gerar previsões melhores para horizontes de tempo inferiores a seis meses. Destaca-se, em particular, que tais núcleos de inflação conseguiram identificar tendências de crescimento no IPCA, por exemplo, na previsão de três meses, em março de 2019, ou então, o núcleo de inflação baseado na *sym2* que foi capaz de identificar a tendência de queda do IPCA para a previsão no horizonte de seis meses.

Quando é analisada a previsão para os doze meses de 2019, e os respectivos intervalos de confiança, todos os núcleos de inflação tendem a gerar uma versão suave do IPCA. Destacam-se os núcleos de inflação IPCA-MS e *sym8*, que são capazes de aproximar, no limite do intervalo de confiança, os meses de setembro e outubro de 2019; entretanto, nenhum núcleo de inflação consegue prever o crescimento observado no IPCA nos meses de novembro e dezembro de 2019. Tal aumento acentuado no IPCA deu-se por um crescimento na demanda por proteínas para exportação [56], tendo posterior dissipação, o que corrobora que a previsão gerada pelas redes neurais tende a se comportar em conformidade com os núcleos de inflação, não sendo capaz de identificar movimentos transitórios do IPCA.

Em resumo, embora as redes neurais não tenham uma previsão acurada do IPCA, as previsões geradas possuem o comportamento de um núcleo de inflação, indicando apenas tendências persistentes do IPCA. Independente do núcleo de in-

flação, essa capacidade fornece informações suficientes para determinar o comportamento mediano da inflação, até mesmo nas análises com maior horizonte de tempo deste trabalho, isto é, doze meses.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Os núcleos de inflação são índices que permitem a observação da evolução dos preços a partir da exclusão de componentes temporários que atribuem volatilidade aos índices. Essa exclusão busca permitir que restem, apenas, componentes persistentes que podem ser utilizados na determinação da tendência da inflação em um determinado mercado, podendo ser utilizados, inclusive, para a previsão do índice futuro.

Bancos Centrais de vários países adotaram núcleos de inflação como instrumento de auxílio no delineamento de políticas monetárias. No Brasil, os núcleos de inflação foram adotados no final da década de 90, juntamente com as metas de inflação, cuja referência é o IPCA. Uma série de núcleos de inflação são calculados pelo Banco Central do Brasil, parte destes obtidos através da exclusão de grupos determinados de produtos que compõe originalmente o IPCA, e outros obtidos a partir de ferramentas matemáticas e estatísticas.

A primeira proposta deste trabalho foi a construção de núcleos de inflação baseado em *wavelets*. A principal vantagem em relação aos núcleos de inflação tradicionais é não ser necessário suposições adicionais em relação à tendência ou ao comportamento do ruído, não sendo realizada a simples exclusão de determinados grupos de produtos, conseqüentemente, de informações relevantes contidas nesses grupos. Desta forma, objetiva-se a obtenção de núcleos de inflação que reflitam a tendência da inflação, assim como sejam bons indicadores da inflação futura. Para a construção dos núcleos de inflação foram utilizadas duas famílias de *wavelets*: as *daubechies* e as *symlets*.

Alguns aspectos são analisados a fim de determinar se os núcleos de inflação possuem as características desejadas. O primeiro aspecto analisado é o

comportamento em relação ao IPCA: núcleos de inflação oficiais baseados em ferramentas estatísticas e matemáticas tendem a apresentar uma média mais próxima do IPCA, assim como os núcleos de inflação aqui propostos. Quanto à estacionariedade, alguns núcleos de inflação aqui propostos apresentaram componentes não determinísticos, entre eles o db4, db8, db10 e sym8. Destaca-se que tal resultado é observado para defasagens superiores a nove meses. Quando trata-se da ausência de viés, isto é, do comportamento do núcleo de inflação no longo prazo, observa-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* têm um melhor desempenho, em geral, que os núcleos de inflação oficiais. Quanto a dinâmica do núcleo de inflação em relação ao IPCA, verifica-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets*, mais uma vez, tendem a identificar e se ajustar melhor ao IPCA quando comparados com os núcleos de inflação oficiais.

O próximo passo, então, foi a previsão da inflação a partir dos núcleos de inflação. A previsão foi gerada através da construção de redes neurais, cuja vantagem reside na possibilidade de lidar com problemas altamente complexos e que muitas vezes não podem ser descritos por modelos analíticos. O erro quadrático médio (EQM) é utilizado na escolha das redes neurais de melhor performance.

Da análise do EQM, conclui-se que os núcleos de inflação baseados em *wavelets* possuem desempenho superior quando comparado com as previsões dos núcleos de inflação oficiais para horizontes de previsão de até seis meses. Para as previsões no horizonte de nove e doze meses, os núcleos de inflação oficiais construídos com ferramentas estatísticas e matemáticas tiveram um desempenho melhor que os aqui propostos – fato ligado à presença de componentes não determinísticos nesses últimos.

A construção de intervalos de confiança permitiu que fossem delineados intervalos de estimativas prováveis, a fim de avaliar a confiabilidade das estimativas. Para gerar um número adequado de séries temporais, foi utilizada a técnica estatística de *bootstrap* de forma permutar e aumentar a disponibilidade dos da-

dos. Da análise dos intervalos de confiança, é possível corroborar que os núcleos de inflação aqui propostos possuem melhores resultados para horizontes mais breves, principalmente aqueles menores ou iguais a seis meses. Para previsões com horizontes maiores, como, por exemplo, doze meses, observa-se um comportamento suavizado para a previsão do IPCA, indicando que a previsão fornece não o índice, mas sim uma tendência da inflação.

A conjunção entre núcleos de inflação e redes neurais, por fim, tenta fornecer uma previsão futura do índice de inflação de forma a determinar o comportamento sem a influência de componentes transitórios. Tal informação é de grande valia para o delineamento de políticas monetárias, uma vez que permite a construção de diretrizes e mudanças de curso com antecedência para o controle de preços da economia.

Limitações do modelo estão centradas na quantidade de dados, principalmente quando delimitados por contextos políticos e econômicos. Ainda, mudanças de metodologias no cálculo dos índices de inflação podem produzir diferenças ao longo do tempo, não sendo possível determinar a influência desses no aprendizado da rede neural e, muito menos, na previsão.

Dentre as possibilidades para trabalhos futuros, estão o estudo de novas arquiteturas e topologias para as redes neurais. Além disso, a incorporação de séries temporais que traduzam outras variáveis macroeconômicas traz possibilidades para o entendimento da dinâmica de preços da economia e, conseqüentemente, sua previsão. Dentre essas variáveis macroeconômicas, citam-se o Produto Interno Bruto (PIB), as taxas de câmbio, nível de produção e emprego e, até mesmo, as expectativas do mercado. Tais variáveis possivelmente criam subsídios para a tentativa de criação de um modelo com capacidade explicativa e preditiva para contextos inflacionários com maior nível de incerteza, como 2020, ano fortemente afetado por choques econômicos provocados pela pandemia de Covid-19.

Referências Bibliográficas

- [1] Abdullah, S. N. e Zeng, X. Machine learning approach for crude oil price prediction with artificial neural networks-quantitative (ANN-Q) model. In *The 2010 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, pages 1–8. IEEE, 2010.
- [2] Abu-Mostafa, Y. S., Magdon-Ismail, M., e Lin, H.-T. *Learning from data*, volume 4. AMLBook New York, NY, USA:, 2012.
- [3] Addison, P. S. *The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. CRC press, 2002.
- [4] Ahmad, K. *et al. Wavelet Packets and Their Statistical Applications*. Springer, 2018.
- [5] Akkoyun, H. Ç., Atuk, O., Koçak, N. A., Özmen, U., *et al.* Filtering short term fluctuations in inflation analysis. *TCMB Çalışma Tebliğleri*, 1120, 2011.
- [6] Alem, A. *Macroeconomia: teoria e prática no Brasil*. Elsevier Brasil, 2018.
- [7] Alexandridis, A. K. e Zaprakis, A. D. *Wavelet neural networks: with applications in financial engineering, chaos, and classification*. John Wiley & Sons, 2014.
- [8] Andersson, F. N. *et al.* Core inflation-why the federal reserve got it wrong. Technical report, 2008.
- [9] Atkins, F. e Sun, Z. Using wavelets to uncover the Fisher effect. *Discussion Paper 2003-09*, 2003.
- [10] Aussem, A. Wavelet-based feature extraction and decomposition strategies for financial forecasting. *International Journal of Computational Intelligence in Finance*, 6:5–12, 1998.

- [11] Bachmann, G., Narici, L., e Beckenstein, E. *Fourier and wavelet analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] Baer, W. *Economia brasileira*. Nobel, 2002.
- [13] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *SGS - Sistema Gerenciador de Séries Temporais - v2.1*. Url: <https://bit.ly/1ivvjfd>.
- [14] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de inflação: Núcleo de Inflação - Setembro 2000*. Comitê de Política Monetária, 2000. Url: <https://bit.ly/3nVFxwg>.
- [15] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Metodologia do Novo Conjunto de Medidas de Núcleos de Inflação - Dezembro de 2009*. Comitê de Política Monetária, 2009. Url: <https://bit.ly/3aJa9wU>.
- [16] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de inflação: Três Novas Medidas de Núcleo de Inflação - Setembro 2009*. Comitê de Política Monetária, 2009. Url: <https://bit.ly/3nKJ6VM>.
- [17] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de Inflação: Março 2016*. Departamento de Relacionamento com Investidores e Estudos Especiais (Gerin), 2016. Url: <https://bit.ly/370sg2H>.
- [18] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de inflação: Inflação no Setor de Serviços - Setembro 2016*. Comitê de Política Monetária, 2016. Url: <https://bit.ly/2De1SA2>.
- [19] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de inflação: Viés e Capacidade Preditiva das Medidas de Inflação Subjacentes - Dezembro 2018*. Comitê de Política Monetária, 2018. Url: <https://bit.ly/3rDE8g2>.
- [20] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de inflação: Viés e Capacidade Preditiva das Medidas de Inflação Subjacentes - Dezembro 2018*. Comitê de Política Monetária, 2018. Url: <https://bit.ly/3rDE8g2>.

- [21] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Relatório de inflação: Novas Medidas de Núcleo de Inflação - Junho 2018*. Comitê de Política Monetária, 2018. Url: <https://bit.ly/3n0EfDb>.
- [22] Baqaee, D. Using wavelets to measure core inflation: The case of New Zealand. *The North American Journal of Economics and Finance*, 21(3):241–255, 2010.
- [23] Barron, A. R. Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function. *IEEE Transactions on Information theory*, 39(3):930–945, 1993.
- [24] Barrow, D. K. e Crone, S. F. Crogging (cross-validation aggregation) for forecasting—a novel algorithm of neural network ensembles on time series subsamples. In *The 2013 international joint conference on neural networks (IJCNN)*, pages 1–8. IEEE, 2013.
- [25] Bechtel, M. G., McEllhiney, E., Kim, M., e Yun, H. Deeppicar: A low-cost deep neural network-based autonomous car. In *2018 IEEE 24th International Conference on Embedded and Real-Time Computing Systems and Applications (RTCSA)*, pages 11–21. IEEE, 2018.
- [26] Bergmeir, C., Hyndman, R. J., e Koo, B. A note on the validity of cross-validation for evaluating autoregressive time series prediction. *Computational Statistics & Data Analysis*, 120:70–83, 2018.
- [27] Bishop, C. M. *Pattern recognition and machine learning*. springer, 2006.
- [28] Bouoiyour, J. e Selmi, R. The nexus between inflation and inflation uncertainty via wavelet approach: Some lessons from egyptian case. 2018.
- [29] Boussaada, Z., Curea, O., Remaci, A., Camblong, H., e Mrabet Bellaaaj, N. A nonlinear autoregressive exogenous (NARX) neural network model for the prediction of the daily direct solar radiation. *Energies*, 11(3):620, 2018.

- [30] Bozdogan, H. Model selection and akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, 52(3):345–370, 1987.
- [31] Braga, A. d. P. *Redes neurais artificiais: teoria e aplicações*. Livros Técnicos e Científicos, 2000.
- [32] BRASIL. *Lei n. 13.152, de 29 de jul. de 2015. Política de valorização do salário-mínimo*. Brasília, DF, jul 2015.
Url: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13152.htm.
- [33] BRASIL, PORTAL. *Índice nacional de preços ao consumidor amplo (IPCA)*, 2018 (Acessado em 29/12/2018). Url: <https://bit.ly/2LDEKh2>.
- [34] Bryan, M. F. e Cecchetti, S. G. Measuring core inflation. In *Monetary policy*, pages 195–219. The University of Chicago Press, 1994.
- [35] Bui, H.-Q. e Laugesen, R. Uniqueness for the continuous wavelet transform. *arXiv preprint arXiv:1103.3317*, 2011.
- [36] Bultheel, A. e Huybrechs, D. *Wavelets with applications in signal and image processing*. Notas de Aula. Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica, 2011.
- [37] Burdick, R. K. e Graybill, F. A. *Confidence intervals on variance components*. Number 04; QA276. 74, B8. 1992.
- [38] Cardot, H. *Recurrent neural networks for temporal data processing*. BoD–Books on Demand, 2011.
- [39] Carrara, A. F. e Correa, A. L. O regime de metas de inflação no Brasil: uma análise empírica do IPCA. *Revista de Economia Contemporânea*, pages 441–462, 2012.
- [40] Chan, Y. *Wavelet basics*. Springer Science & Business Media, 1994.

- [41] Chiroma, H., Abdulkareem, S., e Herawan, T. Evolutionary neural network model for west texas intermediate crude oil price prediction. *Applied Energy*, 142:266–273, 2015.
- [42] Chow, T. W.-s. e Cho, D. S.-y. *Neural networks and computing: Learning algorithms and applications*, volume 7. World Scientific, 2007.
- [43] Chryssolouris, G., Lee, M., e Ramsey, A. Confidence interval prediction for neural network models. *IEEE Transactions on neural networks*, 7(1):229–232, 1996.
- [44] Chui, C. e Jiang, Q. *Applied Mathematics: Data Compression, Spectral Methods, Fourier Analysis, Wavelets, and Applications*. Mathematics Textbooks for Science and Engineering. Atlantis Press, 2013.
- [45] Clark, T. E. *et al.* Comparing measures of core inflation. *Economic Review-Federal Reserve Bank of Kansas City*, 86(2):5–32, 2001.
- [46] Cogley, T. A simple adaptive measure of core inflation. *Journal of money, credit and banking*, pages 94–113, 2002.
- [47] Cohen, A. *Numerical analysis of wavelet methods*. Elsevier, 2003.
- [48] Cowen, T., Dawson, J., e Tabarrok, A. *Modern Principles: Macroeconomics*. Macmillan Higher Education, 2012.
- [49] Craigmile, P. F. e Percival, D. B. Asymptotic decorrelation of between-scale wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3):1039–1048, 2005.
- [50] Cristadoro, R., Forni, M., Reichlin, L., e Veronese, G. A core inflation indicator for the euro area. *Journal of Money, Credit and Banking*, pages 539–560, 2005.
- [51] Cutler, J. Core inflation in the UK. Technical report, External MPC Unit Discussion Paper, 2001.

- [52] Cybenko, G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of control, signals and systems*, 2(4):303–314, 1989.
- [53] Da Costa Lewis, N. *Neural Networks for Time Series Forecasting with R: An Intuitive Step by Step Blueprint for Beginners*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017.
- [54] da Silva, N. *et al.* Medidas de núcleo de inflação para o Brasil baseadas no método wavelets? Technical report, 2020.
- [55] da Silva Filho, T. N. T., Figueiredo, F. M. R., *et al.* Revisitando as medidas de núcleo de inflação do Banco Central do Brasil. *Banco Central do Brasil-Trabalhos para Discussão*, 356, 2014.
- [56] Daniela Amorim. *Com alta da carne, inflação acelera em dezembro e fecha 2019 em 4,31% acima do centro da meta. 10/01/2020*. Estadão. Url: <https://bit.ly/393wdjI>.
- [57] Daubechies, I. *et al.* *Ten lectures on wavelets*, volume 61. SIAM, 1992.
- [58] De Araujo, E. C., Modenesi, A. D. M., *et al.* A importância do setor externo na evolução do IPCA: Uma análise com base em um modelo SVAR. In *Anais do XXXVIII Encontro Nacional de Economia [Proceedings of the 38th Brazilian Economics Meeting]*, number 009, 2011.
- [59] Debnath, L. *Integral Transforms and Their Applications*. Taylor & Francis, 1995.
- [60] Debnath, L. e Shah, F. A. *Wavelet transforms and their applications*. Springer, 2002.
- [61] Demuth, H. B., Beale, M. H., De Jess, O., e Hagan, M. T. *Neural network design*. Martin Hagan, 2014.

- [62] Denardin, A. A., Kozakevicius, A., Schmidt, A. A., *et al.* Avaliação da medida de núcleo de inflação baseada no método wavelet para o Brasil. In *Anais do XLIV Encontro Nacional de Economia [Proceedings of the 44th Brazilian Economics Meeting]*, number 34. ANPEC-Associação, 2018.
- [63] Deshpande, A. e Kumar, M. *Artificial Intelligence for Big Data: Complete Guide to Automating Big Data Solutions Using Artificial Intelligence Techniques*. Packt Publishing Ltd, 2018.
- [64] Dickey, D. A. e Fuller, W. A. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 1057–1072, 1981.
- [65] Dowd, K., Cotter, J., e Loh, L. US core inflation: A wavelet analysis. *Macroeconomic Dynamics*, 15(4):513–536, 2011.
- [66] Du Plessis, S., du Rand, G., e Kotzé, K. Measuring core inflation in South Africa. *South African Journal of Economics*, 83(4):527–548, 2015.
- [67] Efron, B. e Tibshirani, R. J. *An introduction to the bootstrap*. CRC press, 1994.
- [68] Fedorov, V. V. e Hackl, P. *Model-oriented design of experiments*, volume 125. Springer Science & Business Media, 2012.
- [69] Figueiredo, F. R. Evaluating core inflation measures for Brazil. *Banco Central de Brasil Working Paper*, (14), 2001.
- [70] Fine, T. *Feedforward Neural Network Methodology*. Information Science and Statistics. Springer New York, 2006.
- [71] Folha Online. *Veja os principais fatos ocorridos na economia em 2008. 29/12/2008*. Folha de São Paulo. Url: <https://bit.ly/390j7n2>.

- [72] Friedman, M. e Goodhart, C. A. E. *Money, inflation and the constitutional position of the central bank*. Institute of Economic Affairs, 2003.
- [73] Fuller, W., Watson, J., e Fuller, W. *Introduction to Statistical Time Series*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1996.
- [74] G1. *Protestos pelo país têm 1,25 milhão de pessoas, um morto e confrontos*. 21/06/2013. G1, São Paulo. Url: <https://glo.bo/3pJUnWV>.
- [75] Galeshchuk, S. Neural networks performance in exchange rate prediction. *Neurocomputing*, 172:446–452, 2016.
- [76] Gallegati, M. e Semmler, W. *Wavelet applications in economics and finance*. Springer, 2014.
- [77] Gao, R. e Yan, R. *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*. SpringerLink : Bücher. Springer US, 2010.
- [78] Giambiagi, F. e Villela, A. A. *Economia brasileira contemporânea. 2. ed.* Elsevier Brasil, 2005.
- [79] Goodfellow, I., Bengio, Y., e Courville, A. *Deep learning*. MIT press, 2016.
- [80] Grgic, S., Kers, K., e Grgic, M. Image compression using wavelets. In *Industrial Electronics, 1999. ISIE'99. Proceedings of the IEEE International Symposium on*, volume 1, pages 99–104. IEEE, 1999.
- [81] Grossmann, A. e Morlet, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM journal on mathematical analysis*, 15(4):723–736, 1984.
- [82] Gurney, K. *An Introduction to Neural Networks*. Taylor & Francis, 1997.
- [83] Hastie, T., Tibshirani, R., e Friedman, J. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer Science & Business Media, 2009.

- [84] Haykin, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. International edition. Prentice Hall, 1999.
- [85] Haykin, S. *Neural Networks and Learning Machines*, volume 10. Prentice Hall, 2009.
- [86] Hazlitt, H. *What You Should Know About Inflation*. Ludwig von Mises Institute, 2007.
- [87] Heaton, J. *Introduction to Neural Networks with Java*. Heaton Research, 2008.
- [88] Heskes, T. Practical confidence and prediction intervals. In *Advances in neural information processing systems*, pages 176–182, 1997.
- [89] Holling, H. e Schwabe, R. Statistical optimal design theory. *Handbook of item response theory: Vol. 2. Statistical tools*, pages 313–340, 2016.
- [90] Holschneider, M., Kronland-Martinet, R., Morlet, J., e Tchamitchian, P. A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. In *Wavelets*, pages 286–297. Springer, 1990.
- [91] Hramov, A. E., Koronovskii, A. A., Makarov, V. A., Pavlov, A. N., e Sitnikova, E. *Wavelets in neuroscience*. Springer, 2015.
- [92] IBGE. *IPCA de março fica em 0,48%. Abril/2008*. IBGE, Agência IBGE Notícias, 2008. Url: <https://bit.ly/3nigm5X>.
- [93] IBGE. *IPCA de dezembro fica em 0,28% e fecha 2008 em 5,90%. Janeiro/2009*. IBGE, Agência IBGE Notícias, 2009. Url: <https://bit.ly/38ZJpGb>.
- [94] IBGE. *Em janeiro, IPCA ficam em 0,48%. Fevereiro/2009*. IBGE, Agência IBGE Notícias, 2009. Url: <https://bit.ly/3hFC4zC>.
- [95] IBGE. *IPCA de janeiro fica em 0,83%. Fevereiro/2011*. IBGE, Agência IBGE Notícias, 2011. Url: <https://bit.ly/3n7HBzJ>.

- [96] IBGE. *IPCA de junho fica em 0,26%. Julho/2013*. IBGE, Agência IBGE Notícias, 2013. Url: <https://bit.ly/3hDc47E>.
- [97] IBGE. *Sistema nacional de índices de preços ao consumidor : métodos de cálculo*. 7. ed., volume 14. IBGE, Coordenação de Índices de Preços, 2013. Url: <https://bit.ly/2WK8XRR>.
- [98] IBGE. *Sistema nacional de índices de preços ao consumidor : estruturas de ponderação a partir da pesquisa de orçamentos familiares : 2008-2009*. 2. ed., volume 39. IBGE, Coordenação de Índices de Preços, 2014. Url: <https://bit.ly/2KYSB52>.
- [99] IBGE. *Método para os Trabalhos de Campo - Manual de Entrevista. Sistema Nacional de Índices de Preços ao Consumidor - SNIPC*. IBGE, Coordenação de Índices de Preços, 2015. Url: <https://bit.ly/37LYhbB>.
- [100] IBGE. *Atualização da estrutura de ponderação do IPCA e repercussão nas suas classificações - Estudo Especial 69/2019. Dezembro/2019*. IBGE, Coordenação de Índices de Preços, 2019. Url: <https://bit.ly/2YCnAZ0>.
- [101] In, F. e Kim, S. *An introduction to wavelet theory in finance: a wavelet multiscale approach*. World scientific, 2013.
- [102] Jiang, C., Chang, T., e Li, X.-L. Money growth and inflation in China: New evidence from a wavelet analysis. *International Review of Economics & Finance*, 35:249–261, 2015.
- [103] Kaiser, G. *A friendly guide to wavelets*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [104] Kamruzzaman, J. e Sarker, R. A. Forecasting of currency exchange rates using ann: A case study. In *International Conference on Neural Networks and Signal Processing, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 1, pages 793–797. IEEE, 2003.

- [105] Kriesel, D. A brief introduction to neural networks. (*Online*) http://www.dkriesel.com/en/science/neural_networks (Última atualização: 30-10-2015), 2005.
- [106] Kristjanpoller, W. e Minutolo, M. C. Forecasting volatility of oil price using an artificial neural network-garch model. *Expert Systems with Applications*, 65:233–241, 2016.
- [107] Kunsch, H. R. The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *The annals of Statistics*, pages 1217–1241, 1989.
- [108] Lahura, E., Vega, M., *et al.* Evaluation of wavelet based core inflation measures: Evidence from Perú. *Documento de Trabajo*, (320), 2011.
- [109] Lee, K. Y., Chung, N., e Hwang, S. Application of an artificial neural network (ANN) model for predicting mosquito abundances in urban areas. *Ecological informatics*, 36:172–180, 2016.
- [110] Levin, A. T., Natalucci, F. M., e Piger, J. Explicit inflation objectives and macroeconomic outcomes. 2004.
- [111] Magalhães, M. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. Edusp, 2006.
- [112] Mallat, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*. Academic Press, 3rd edition, 2008.
- [113] Mankiw, N. *Macroeconomics*. Worth Publishers, 2010.
- [114] Marques, C. R., Neves, P. D., e Sarmiento, L. M. Evaluating core inflation indicators. *Economic modelling*, 20(4):765–775, 2003.
- [115] Martinez, T. S. e Cerqueira, V. d. S. Estrutura da inflação brasileira: determinantes e desagregação do IPCA. 2011.
- [116] McCulloch, W. S. e Pitts, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, 5(4):115–133, 1943.

- [117] Mehra, Y. P. e Reilly, D. Short-term headline-core inflation dynamics. *FRB Richmond Economic Quarterly*, 95(3):289–313, 2009.
- [118] Moghaddam, A. H., Moghaddam, M. H., e Esfandyari, M. Stock market index prediction using artificial neural network. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 21(41):89–93, 2016.
- [119] Morettin, P. A. *Econometria Financeira: Um curso em Séries Temporais Financeiras. 2. Edição Revista e Ampliada*. 2011.
- [120] Muller, M., Ellis, D. P., Klapuri, A., e Richard, G. Signal processing for music analysis. *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, 5(6):1088–1110, 2011.
- [121] Neumann, M. J., Greiber, C., *et al.* Inflation and core money growth in the Euro Area. Technical report, Discussion paper Series 1/Volkswirtschaftliches Forschungszentrum der, 2004.
- [122] Nguyen, H. T. e Kreinovich, V. *Applications of continuous mathematics to computer science*, volume 38. Springer Science & Business Media, 1997.
- [123] Nievergelt, Y. *Wavelets Made Easy*. Birkhauser, 1999.
- [124] Okkan, U. Wavelet neural network model for reservoir inflow prediction. *Scientia Iranica*, 19(6):1445–1455, 2012.
- [125] Oktay, O., Ferrante, E., Kamnitsas, K., Heinrich, M., Bai, W., Caballero, J., Cook, S. A., De Marvao, A., Dawes, T., O’Regan, D. P., *et al.* Anatomically constrained neural networks (ACNNs): application to cardiac image enhancement and segmentation. *IEEE transactions on medical imaging*, 37(2):384–395, 2018.
- [126] O’Neill, R., Ralph, J., e Smith, P. A. *Inflation: History and Measurement*. Springer, 2017.

- [127] Pastore, A., Gazzano, M., e Pinotti, M. *Inflação e crises: O papel da moeda*. Elsevier Brasil, 2014.
- [128] Pathak, R. S. *The wavelet transform*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2009.
- [129] Percival, D. e Walden, A. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2006.
- [130] Pereira, L. C. B. A inflação decifrada. *Revista de economia política*, 6(4):64, 1996.
- [131] Pereira, L. C. B. e Nakano, Y. *Inflação e recessão*. Brasiliense, 1984.
- [132] Qiu, M., Song, Y., e Akagi, F. Application of artificial neural network for the prediction of stock market returns: The case of the japanese stock market. *Chaos, Solitons & Fractals*, 85:1–7, 2016.
- [133] Quah, D. e Vahey, S. P. Measuring core inflation. *The Economic Journal*, pages 1130–1144, 1995.
- [134] Radunovic, D. P. *Wavelets: From Math to Practice*. Springer Publishing Company, 1st edition, 2009.
- [135] Rao, C. R., Rao, C. R., Statistiker, M., Rao, C. R., e Rao, C. R. *Linear statistical inference and its applications*, volume 2. Wiley New York, 1973.
- [136] Rao, R. e Bopardikar, A. *Wavelet Transforms: Introduction to Theory and Applications*. Addison-Wesley, 1998.
- [137] Raviv, Y. e Intrator, N. Bootstrapping with noise: An effective regularization technique. *Connection Science*, 8(3-4):355–372, 1996.

- [138] Rhif, M., Ben Abbes, A., Farah, I. R., Martínez, B., e Sang, Y. Wavelet transform application for/in non-stationary time-series analysis: A review. *Applied Sciences*, 9(7):1345, 2019.
- [139] Ribeiro, A. *Arsenal vai medir efeito do câmbio na inflação*. Valor Econômico, 13/Jun/2018 (Acessado em 16/01/2019). Url: <https://bit.ly/2HgzsA1>.
- [140] Roger, S. Core inflation: concepts, uses and measurement. 1998.
- [141] Rohatgi, V. K. *Statistical inference*. Courier Corporation, 2013.
- [142] Rojas, R. *Neural networks: a systematic introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [143] Rua, A. Money growth and inflation in the euro area: a time-frequency view. Technical report, Banco de Portugal, Economics and Research Department, 2011.
- [144] Santos, C. e Castelar, I. Avaliando as medidas de núcleo da inflação no brasil. *Economia Aplicada*, 20(1):35–56, 2016.
- [145] Sapuan, S. e Mujtaba, I. *Composite Materials Technology: Neural Network Applications*. CRC Press, 2009.
- [146] Schleicher, C. *et al. An introduction to wavelets for economists*. Citeseer, 2002.
- [147] Schwartzman, F. F. Estimativa de curva de phillips para o brasil com preços desagregados. *Economia Aplicada*, 10(1):137–155, 2006.
- [148] Sicsú, J. Teoria e evidências do regime de metas inflacionárias. *Revista de Economia Política*, 22(1):85, 2002.
- [149] Silva Filho, T. N. T. d. e Figueiredo, F. M. R. Has core inflation been doing a good job in Brazil? *Revista Brasileira de Economia*, 65(2):207–233, 2011.

- [150] Soman, K., Resmi, N., e Ramachandran, K. *Insight Into Wavelets : from Theory to Practice*. PHI Learning, 2010.
- [151] Stankovic, L., Mandic, D. P., Dakovic, M., Kisil, I., Sejdic, E., e Constantini-des, A. G. Understanding the basis of graph signal processing via an intuitive example-driven approach [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 36(6):133–145, 2019.
- [152] Strauß, H. *Demand and Supply of Aggregate Exports of Goods and Services: Multivariate Cointegration Analyses for the United States, Canada, and Germany*. Kiel Institute for World Economics.
- [153] Takeuchi, H. e Nonaka, I. *Gestão do conhecimento*. Bookman Editora, 2009.
- [154] TANAKA, T., SAITO, T., e YAMASHITA, Y. Wavelets and subband coding wavelets and subband coding, 1995. *IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences*, 86(8):1935–1941, 2003.
- [155] Tekatli, N. A new core inflation indicator for turkey. *Central Bank Review*, 10 (2):9, 2010.
- [156] Thais Herédia. *Tomate: de vilão a estreda das redes sociais. 05/04/2013*. G1. Url: <https://glo.bo/3rZpbFg>.
- [157] Tian, Y., Pei, K., Jana, S., e Ray, B. Deeptest: Automated testing of deep-neural-network-driven autonomous cars. In *Proceedings of the 40th international conference on software engineering*, pages 303–314. ACM, 2018.
- [158] Tidd, J. e Bessant, J. *Gestão da inovação - 5.ed.* Bookman Editora, 2015.
- [159] Tura-Gawron, K. What is the central bank effectively targeting in practice? svensson’s concept of inflation forecast targeting and measures of inflation projections-the experiences of selected european countries. 2016.
- [160] Váňa, Z. Discrete wavelet transform in linear system identification. 2014.

- [161] Vicente, J. V. M. e Guillen, O. T. d. C. Do inflation-linked bonds contain information about future inflation? *Revista Brasileira de Economia*, 67(2): 251–260, 2013.
- [162] Walnut, D. *An Introduction to Wavelet Analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, 2013.
- [163] Wen, Q., Sun, L., Song, X., Gao, J., Wang, X., e Xu, H. Time series data augmentation for deep learning: A survey. *arXiv preprint arXiv:2002.12478*, 2020.
- [164] Wynne, M. Core inflation: a review of some conceptual issues. 1999.
- [165] Yang, J.-S., Yu, S.-P., e Liu, G.-M. Multi-step-ahead predictor design for effective long-term forecast of hydrological signals using a novel wavelet-nn hybrid model. *Hydrology & Earth System Sciences Discussions*, 10(7), 2013.
- [166] Ysusi, C. Analysis of the dynamics of mexican inflation using wavelets. Technical report, Working Papers, Banco de México, 2009.
- [167] Yu, L., Wang, S., e Lai, K. K. A neural-network-based nonlinear metamodeling approach to financial time series forecasting. *Applied Soft Computing*, 9(2): 563–574, 2009.
- [168] Zaniol, C. e Moraes, J. C. Previsão e núcleo de inflação: uma abordagem baseada em wavelets e redes neurais. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 7(1), 2020.
- [169] Zaniol, C., Pazinato, C. B., e Moraes, J. C. Intervalos de confiança de núcleos de inflação utilizando wavelets e redes neurais. *Anais do X Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul – ERMAC-RS*, 2020.

- [170] Zapranis, A. e Livanis, E. Prediction intervals for neural network models. In *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Computers*, page 76. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2005.