

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**MARTINA SPERB KUNZLER**

**APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS NA ESTRUTURA A  
TERMO DA TAXA DE JUROS, COM ÊNFASE EM IMUNIZAÇÃO DE CARTEIRAS  
DE RENDA FIXA**

**PORTO ALEGRE**

**2019**

**MARTINA SPERB KUNZLER**

**APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS NA ESTRUTURA A  
TERMO DA TAXA DE JUROS, COM ÊNFASE EM IMUNIZAÇÃO DE CARTEIRAS  
DE RENDA FIXA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia, modalidade profissional área de concentração economia.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Coorientador: Prof. Dr. Fabian Scholze  
Domingues

**PORTO ALEGRE**

**2019**

## CIP - Catalogação na Publicação

Kunzler, Martina Sperb

Aplicação da análise de componentes principais na estrutura a termo da taxa de juros, com ênfase em imunização de carteiras de renda fixa / Martina Sperb Kunzler. -- 2019.

49 f.

Orientador: Joao Frois Caldeira.

Coorientador: Fabian Scholze Domingues.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, BR-RS, 2019.

1. Análise de componentes principais. 2. Estrutura a termo da taxa de juros. 3. Imunização de carteira. 4. Duration. 5. Renda Fixa. I. Caldeira, Joao Frois, orient. II. Domingues, Fabian Scholze, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**MARTINA SPERB KUNZLER**

**APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS NA ESTRUTURA A  
TERMO DA TAXA DE JUROS, COM ÊNFASE EM IMUNIZAÇÃO DE CARTEIRAS  
DE RENDA FIXA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia, modalidade profissional área de concentração economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 16 de dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. João Frois Caldeira – Orientador  
UFRGS

---

Prof. Dr. Fabian Scholze Domingues – Coorientador  
UFRGS

---

Prof Dr. Nelson Seixas dos Santos  
UFRGS

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo Schonerwald da Silva  
UFRGS

---

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler  
UFRGS

## RESUMO

Na presente dissertação compara-se a aplicação de métodos diferentes de imunização de carteiras de renda fixa no Brasil, para o período de janeiro de 2011 até março de 2016. O universo observado são dados diários dos contratos de DI Futuro negociados na BM&F de janeiro de 2008 à março de 2016, sendo que os três primeiros anos observados servem de embasamento para a formulação da estrutura a termo da curva de juros. Divide-se o trabalho em três partes, onde a primeira consiste em buscar o melhor ajuste da estrutura a termo da taxa de juros, uma vez que não há observação para todos os vértices analisados. Compara-se então o ajuste da curva encontrada através da modelagem proposta por Nelson e Siegel ao ajuste feito pelo método de *cubic spline*. A segunda etapa está em aplicar a análise de componentes principais em ambas as curvas a fim de encontrar quantos são os componentes principais que explicam boa parte da oscilação da curva de juros. Em linha com a literatura, encontrou-se três componentes principais que têm a capacidade de explicar mais de 99% das oscilações na curva de juros observada pelos dois métodos supracitados. Os componentes então, são interpretados como Nível, Inclinação e Curvatura da curva de juros. Por fim, criou-se uma carteira hipotética a ser imunizada por dois métodos amplamente difundidos no mercado. O primeiro deles é o hedge através da duration da carteira, e o segundo é a utilização dos três componentes principais para formulação de uma estratégia de imunização. Os testes foram realizados ao longo de cinco anos e um trimestre, visando aderir à realidade do dia a dia de gestão de risco de mercado de carteiras ativas e passivas, ou seja, leva em consideração o custo de rebalanciamento, a dinâmica da carteira tanto com vencimento de operações ao longo do período, e considerando novas operações no início de cada mês.

**Palavras-chave:** Análise de componentes principais. Estrutura a termo da taxa de juros. Imunização de carteira. *Duration*. Renda Fixa.

## ABSTRACT

This paper compares the application of different methods of fixed income portfolios immunization in Brazil for the period from January of 2011 to March of 2016. The observed universe are the daily data of the Di Futuro contracts traded on the BM&F exchange from January of 2008 to March of 2016, and the first three year serve as basis data to formulate the term structure of the yield curve. This study is divided in three parts. The first part is focused on getting the best fit of the term structure of yield curves to all maturities, since there is no observation to all business days. It then compares the curve fitted by Nelson and Siegel modeling to the adjustment made by the method of cubic splines. The second step is to apply the Principal Component Analysis on both curves to see how many the main components are to explain great part of the fluctuation of yield curves. In line with the literature, the three first components are capable to explain around 98% of fluctuation. This three components are interpreted as level, slope and curvature of the yield curve.

Finally, a hypothetical portfolio was created to be immunized by two widespread methods in financial market and central banks. The first is the hedge through duration of the portfolio and the second is the use of three principal components to formulate an immunization strategy. The test were conducted over five years and one quarter aiming to be faithful to the reality of market risk management of assets and liabilities portfolios, ie, considers the cost of rebalancing, the dynamics of the portfolio during the period of analysis, including new operations every month and also maturities of assets and liabilities in the portfolio.

**Keywords:** Principal Component Analysis. Term structure of interest rate. Portfolio immunization. Duration. Fixed income.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS</b> .....	<b>8</b>
2.1	TAXA SPOT .....	8
2.1.1	Título com cupom zero .....	9
2.1.2	Título com pagamento de cupom.....	9
2.2	TAXA FORWARD.....	10
2.3.1	Indicadores Relevantes.....	12
2.3.2	Instrumentos.....	14
2.4	INTERPOLAÇÃO E MODELAGEM DA ETTJ.....	15
2.4.1	Interpolação Exponencial .....	17
2.4.2	Cubic Spline.....	17
2.4.3	Modelo Nelson Siegel.....	19
2.4.4	Modelo Svensson .....	21
2.5	IMUNIZAÇÃO DA CARTEIRA .....	21
2.5.1	Duration.....	22
2.5.2	Análise dos Componentes Principais.....	24
2.6	MARCAÇÃO E MERCADO .....	26
2.6.1	Interpolação da curva de juros.....	27
2.6.2	Spread sobre a curva .....	27
2.6.3	Letra Financeira do Tesouro – LFT .....	28
2.6.4	Letras do Tesouro Nacional – LTN.....	28
2.6.5	Títulos Privados.....	28
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	<b>30</b>
3.1	AMOSTRA.....	30
3.2	MODELAGEM E INTERPOLAÇÃO DE CURVAS.....	31
3.2.1	Modelo de Nelson e Siegel.....	31
3.2.2	Cubic Spline.....	33
3.2.3	Análise dos Componentes Principais.....	35
3.3	IMUNIZAÇÃO POR <i>DURATION</i> .....	39
3.4	IMUNIZAÇÃO POR COMPONENTES PRINCIPAIS.....	39
3.5	RESULTADOS .....	40
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>47</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O gerenciamento de risco de mercado dentro de instituições financeiras é uma grande preocupação dos gestores de carteiras, e tornou-se primordial na rotina da administração de recursos. Um dos principais riscos incorridos por um banco é o risco de taxa de juros, ou seja, dado seus ativos e passivos, o quanto a instituição pode perder em movimentos adversos nas taxas de juros de mercado. Estratégias de imunização visam minimizar os impactos da variação nos preços de mercado no valor da carteira. Nesse cenário, ferramentas como *Asset Liability Management* (ALM)<sup>1</sup> foram desenvolvidas para gerenciar carteiras de Bancos, Fundos de Pensão, Seguradoras, etc., visando proporcionar um grau de proteção para os riscos enfrentados diariamente. O presente trabalho abordará apenas um dos pilares do ALM, estratégias de imunização do risco de preços, ou melhor, da oscilação dos mesmos, no mercado brasileiro.

Modelos de imunização de carteiras já são amplamente difundidos no mercado brasileiro então o objetivo aqui será verificar sua eficácia quando aplicados. O trabalho foi dividido em três etapas, sendo a primeira a estimação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros. O conhecimento da mesma é de grande importância para tomada de decisão de investimentos e precificação de ativos e passivos por parte dos agentes. Como não é diretamente observável para todos os períodos, uma vez que não há negociação de títulos ou derivativos que permitam a observação direta de preços para todos os dias do horizonte relevante, percebe-se a necessidade de estimar a curva para todos os vértices desejados. Assim, compara-se aqui resultado de estimação da curva através de dois modelos bastante difundidos no mercado brasileiro e internacional, sendo o primeiro um modelo paramétrico, com forma funcional definida, parcimonioso de quatro parâmetros a serem estimados, proposto por Nelson e Siegel (1987), e o segundo é um modelo não paramétrico cuja interpolação se dá por um “conjunto de polinômios de baixo grau, conectados em certos pontos chamados de nós (*knots*), de modo que formem uma função contínua em um intervalo”, segundo Lion (2002), conhecida por *cubic spline*. Ainda na primeira etapa é abordada a revisão bibliográfica que embasa a aplicação do presente trabalho, divididos em três grupos: os aspectos teóricos das taxas de juros

---

<sup>1</sup> Para maiores informações buscar Weiskopf (2003) para aplicação ao mercado brasileiro.



praticadas no Brasil dados os diferentes instrumentos disponíveis (títulos e derivativos); as teorias de imunização de carteiras difundidas na literatura atual; e metodologia de apuração do valor do justo dos ativos, que será de extrema importância nos resultados da aplicação.

A segunda etapa consiste em obter a Estrutura a Termo da Taxa de Juros para o Brasil pelo modelo paramétrico e não paramétrico, a partir de uma base de dados estabelecida. Logo, será observada a aplicabilidade da análise dos componentes principais ao mercado brasileiro, a fim de diminuir o universo de observações sem que haja perda significativa de explicação dos movimentos originais.

A terceira e última etapa, consiste em construir uma estratégia de imunização baseada nos componentes principais encontrados para explicar oscilações na curva de juros e compará-la ao método de hedge por *duration* de uma carteira de renda fixa fictícia, num intervalo relevante de tempo, levando em consideração características aderentes com a realidade novas operações na sua composição, bem como intervalos de avaliação da necessidade de rebalanceamento dos instrumentos de proteção e custos operacionais envolvidos.

## 2 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

Estrutura a Termo da Taxa de Juros, doravante denominada ETTJ, também conhecida por curva de juros, ou *yield curve*, é a relação da taxa de juros em função da sua maturidade. No presente trabalho, a análise da curva de juros será sob o conceito *risk-free*, ou seja, não há possibilidade de *default*, assim, os fatores que influenciam na curva são apenas o valor intertemporal do dinheiro e o risco associado à volatilidade da taxa de juros. O valor do dinheiro no tempo está associada à liquidez disponível, ou seja, se um investidor abre mão da disponibilidade do dinheiro hoje e compra um determinado título com vencimento em  $\tau$ , de hoje até  $\tau$ , ele estará com seu capital indisponível em troca de uma remuneração  $y$ . Conforme falado, em uma situação livre de risco, quanto maior o prazo, maior a remuneração do título. Porém, se esse investidor decide se desfazer do título antes de seu vencimento, ele está exposto à variação do preço desse título no mercado, ou seja, pode acontecer de o valor de revenda do título esteja diferente do valor de compra corrigido pela sua remuneração. Esse risco é o risco associado à oscilação das taxas de juros no curto prazo, denominado risco de mercado.

A estrutura temporal da curva de juros não é diretamente observável no mercado financeiro brasileiro, uma vez que não há títulos negociados para todos os prazos, necessitando tratamento dos dados para conseguir calcular a taxa de juros para todo e qualquer prazo existente e negociado. Normalmente, a construção dessa estrutura se dá a partir da coleta de taxas de juros embutidas nos títulos. Dessa forma, para os prazos em que há vencimento concomitante de títulos, a taxa pode ser obtida facilmente, e esses pontos serão denominados vértices da curva de juros.

Para encontrar os vértices da estrutura temporal da curva de juros, é necessário extrair a taxa dos títulos negociados. Será abordada a metodologia de cálculo das taxas obtidas a partir dos títulos e demais instrumentos disponíveis para conhecimento dos vértices na experiência brasileira.

### 2.1 TAXA SPOT

Taxa de juros à vista, ou taxa spot, é a taxa de juros acumulada do instante atual  $t$  até a maturidade  $\tau$  do título. É chamada também de taxa temporal, e pode ser

calculada a partir dos títulos negociados no mercado, e existem dois tipos de títulos: os que pagam juros (cupom) periódico e os que não pagam, assim, o tratamento para chegar na taxa de juros spot é diferente.

### 2.1.1 Título com cupom zero

Os títulos com cupom zero (conhecidos como *Zero Coupons* ou *Bullet Bond*) são títulos de desconto puro, onde os juros e o principal são pagos apenas no vencimento do título. Como possui apenas um fluxo, sua *duration* é igual ao prazo de vencimento do papel, portanto este título apresenta uma maior sensibilidade às variações nas taxas de juros. O preço desse tipo de título pode ser obtido da seguinte forma:

$$P_t(\tau) = e^{-\tau \cdot y_t(\tau)}$$

Onde,

$P_t(\tau)$  = Preço do título em t;

$y_t(\tau)$  = Taxa de retorno, ou *yield to maturity* do título;

$\tau$  = maturidade do título.

Geralmente os títulos não são negociados pelos seus preços e nem por suas taxas de retorno, e sim por suas taxas anualizadas. No mercado brasileiro, a convenção para taxa de juros básica brasileira é a capitalização por dias úteis, ou seja, base 252. Logo, a taxa de juros  $y_t(\tau)$  pode ser encontrada por, supondo que o preço do título na sua maturidade seja igual à \$1:

$$y_t(\tau) = -\frac{\log(P_t(\tau))}{\tau}$$

### 2.1.2 Título com pagamento de cupom

Esse título (também conhecido por *Coupon Bonds*) se caracteriza pelo pagamento de cupons regulares e do principal no vencimento. Para encontrar o preço corrente desse ativo, é necessário trazer a valor presente os fluxos de pagamento de cupons e principal pela taxa interna de retorno (TIR) do título.

Considerando que o valor de face (pagamento no vencimento) unitário, e cupom de  $c$ , o preço corrente do título se dá por:

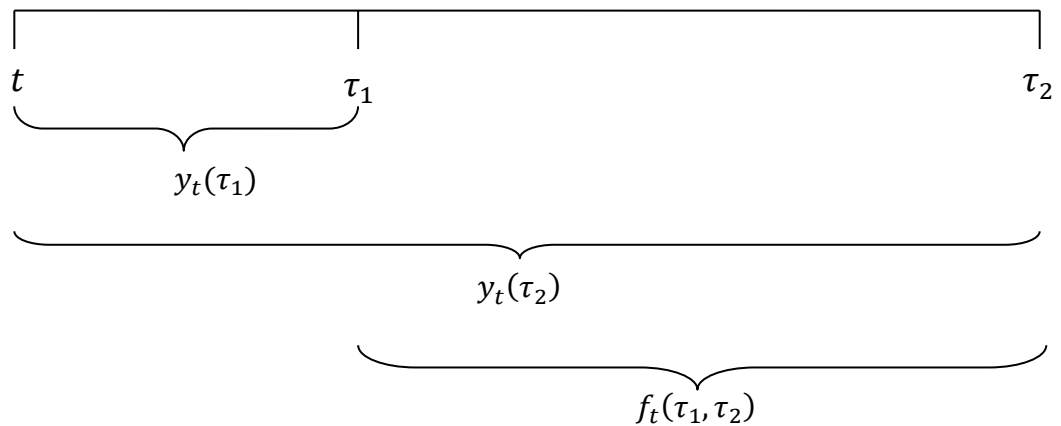
$$P_t(\tau) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-(t_i-t)y_t(\tau)}$$

Supondo que o equilíbrio de mercado depende do retorno esperado dos títulos, seria idêntico o retorno de todos os títulos com vencimento em  $\tau$  mesmo que os fluxos de caixa sejam distintos. A *duration* desse título com pagamento de cupons será menor que o prazo de vencimento e a sensibilidade às variações nas taxas de juros é menor que a do *Zero Coupon*. Outra forma de calcular o valor presente do título e sua taxa de juros embutida é o *Bootstrapping*, que nada mais é do que a formação de vários *Zero Coupon* a partir de um *Coupon Bond*, ou seja, cada cupom é tratado como se fosse um título *Zero* separado.

## 2.2 TAXA FORWARD

Uma taxa *forward* (FRA) é a taxa implícita em um intervalo de tempo à frente da data atual  $t$ , e pode ser calculada partindo da taxa à vista. Assim, no instante  $t$ , realiza-se um investimento que inicia em  $\tau_1$  e termina em  $\tau_2$ , onde  $\tau_1 > t$  e  $\tau_1 < \tau_2$ . A remuneração desse investimento é dada pela taxa *forward* implícita,  $f_t(\tau_1, \tau_2)$ , definida por:

$$f_t(\tau_1, \tau_2) = \frac{\tau_2 \cdot y_t(\tau_2) - \tau_1 \cdot y_t(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}$$



O conceito de *forward* instantânea representa o retorno de um investimento por um período infinitesimal após a liquidação, já que é o acréscimo marginal no retorno total o à medida de um aumento marginal no período de vigência. É a taxa *forward* com um período de investimento infinitesimal após a data de liquidação. Caldeira (2015) define que na prática, a *forward* instantânea é a *forward* overnight, onde a maturidade é um dia após a liquidação.

### 2.3 RENDA FIXA NO MERCADO DE TRABALHO

Os ativos de renda fixa são aqueles que o retorno do capital tem um indexador pré-definido, desta maneira, renda fixa não significa que o retorno do capital já é conhecido no momento em que a aplicação é feita, mas sim qual é a variável que o remunerará ao longo do tempo. Para conhecer a curva básica de juros brasileira, é preciso entender um pouco dos instrumentos negociados no mercado brasileiro, bem como os indexadores considerados *benchmark* de mercado.

### 2.3.1 Indicadores Relevantes

Serão apresentados os indicadores relevantes no mercado de renda fixa no Brasil.

#### 2.3.1.1 Taxa Selic

A Taxa Selic é a taxa de juros básica da economia brasileira, também chamada de taxa referencial de juros. O Banco Central do Brasil, em cada reunião do Copom define a Taxa Selic Meta, e através das suas operações de mercado aberto que faz com que o mercado financeiro pratique essa taxa, ou o mais perto dela. Diariamente as instituições financeiras administram seu fluxo de caixa de curto prazo através de operações de mercado aberto (*open market*), via operações compromissadas<sup>2</sup> com lastro em títulos públicos federais. O volume mais significativo é em operações *overnight*, ou seja, apenas um dia útil, e são todas registradas no Selic<sup>3</sup> e liquidadas diretamente nas contas de reservas bancárias<sup>4</sup> das instituições financeiras participantes.

São essas operações *overnight* que constituem a base de cálculo da Taxa Selic Média Diária, doravante Taxa Selic, que é a taxa média ponderada e ajustada desses financiamentos diários apurados com os títulos públicos federais como lastro. O cálculo final da taxa é divulgado diariamente ao final do dia, após o fechamento do Selic e segue seguinte metodologia:

$$Taxa Selic = \left[ \left( \frac{\sum_{j=1}^n R_j}{\sum_{j=1}^n I_j} \right)^{252} - 1 \right] \times 100$$

Onde,

$n$  = número de operações;

<sup>2</sup> Essas operações podem ser compras com compromisso de revenda, onde a instituição possui um caixa a ser aplicado, ou podem ser de venda com compromisso de recompra, necessitando de financiamento.

<sup>3</sup> Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC), foi criado através da Circular número 366 de II de outubro de 1979 do Banco Central do Brasil e alterada pela Carta Circular do Banco Central do Brasil número 2.311 de 19 de maio de 1993.

<sup>4</sup> Conta de Reservas Bancárias é uma conta que as instituições financeiras possuem no Banco Central.

$R_j$  = Valor financeiro da recompra/revenda da j-ésima operação compromissada;  
 $R_j$  = Valor financeiro da compra/venda da j-ésima operação compromissada.

Para que a taxa não sofra distorções, o universo de cálculo da taxa inclui apenas operações em que o fator  $R_j/I_j$  seja superior a 1 e inferior a 2, e adiciona-se corte de 5% dependendo da distribuição amostral dessas operações<sup>5</sup>.

### 2.3.1.2 Taxa DI

A Taxa DI baseia-se em operações de emissão de Depósitos Interfinanceiros *overnight* prefixados, conhecidos também como DI-*over*. Essas operações são pactuadas por um dia útil, tem registro e liquidação no Cetip<sup>6</sup>, e são caracterizadas por um mercado interbancário de curtíssimo prazo. A Taxa DI é calculada com base em operações Extra-Grupo, ou seja, operações fora de conglomerados financeiros. O processo de cálculo, sobre a ordenação das operações, bem como os critérios de exclusão podem ser obtidos através do Comunicado da Cetip N° 091/2013, de 23 de Setembro de 2013.

Marins (2004) mostra que as taxas do DI têm sido predominantemente menores que a Taxa Selic Diária, o que não acontecia até meados dos anos 90, quando o volume negociado no mercado de DI era mais significativo, e em alguns momentos até apresentavam taxas mais elevadas do que a Selic diária (maior risco de crédito pois não possuem garantias e envolvem títulos privados). Após a crise asiática no final da década de 1990, os volumes transacionados no mercado de DI reduziu drasticamente, e as taxas passaram a se descolar da taxa Selic, predominantemente para baixo. Cabe lembrar que essa taxa ganhou bastante relevância no mercado financeiro e hoje é considerado *benchmark* de mercado, ou seja, o custo de oportunidade do capital, e indexa boa parte dos títulos privados.

<sup>5</sup> Para maiores detalhes, consultar a Circular n°3.671 de 18 de outubro de 2013 do Banco Central do Brasil.

<sup>6</sup> O Cetip (Central de Custódia e de Liquidação Financeira) foi criado em 1986 pela ANDIMA, em conjunto com outras entidades representativas do mercado financeiro. Para mais informações, <http://www.cetip.com.br/Institucional/seguran%C3%A7a-que-move-o-mercado>.

### 2.3.2 Instrumentos

Os instrumentos de maior relevância no mercado financeiro brasileiro são os títulos públicos federais e os instrumentos derivativos.

#### 2.3.2.1 Títulos Públicos Federais

Uma das formas do governo brasileiro se financiar é através da dívida pública interna, com emissões de títulos pelo Tesouro Nacional. Atualmente, são emitidos quatro tipos de títulos:

- a) LFT é um título pós-fixado indexado à Taxa Selic;
- b) LTN é um título pré-fixado, sem pagamento de cupons e tem valor de resgate igual a R\$ 1.000;
- c) NTN-F é um título pré-fixado que paga cupons semestrais de 10% a.a., em janeiro e julho. O preço de resgate de cada título no vencimento será de R\$ 1.000;
- d) NTN-B que é um título composto por uma parte pós-fixada e outra pré-fixada. Na parte pós-fixada, o indexador é o IPCA acrescido de uma taxa pré-fixada, e na parte pré-fixada, este título paga juros de 6% ao ano, semestralmente, em maio e agosto.

#### 2.3.2.2 Derivativos

Os mercados futuros relevantes para o presente estudo são os derivativos envolvendo taxas de juros brasileira, principalmente negociações de Taxa DI futura. Os chamados contratos de DI Futuro negociam a Taxa DI compreendida entre a data de negociação, inclusive, e a taxa de vencimento, exclusive. A forma de negociação se dá em taxa efetiva anual com base em 252 dias úteis, sendo o valor nominal do contrato R\$ 100 mil no vencimento. O vencimento dos contratos é o primeiro dia útil de cada mês, sendo o último dia de negociação o dia útil imediatamente anterior ao vencimento, para todos os meses. O lote padrão desse mercado é de 5 contratos, podendo ser negociado em lotes múltiplos do padrão.

Assim, têm-se as taxas para os meses negociados, sabendo então quanto os agentes de mercado estimam a Taxa DI para os diversos prazos. Ao longo da curva



verifica-se precificação de alta ou baixa da taxa de juro de acordo com a percepção dos agentes em relação à expectativa de mudanças de política monetária, já que Taxa DI tende a acompanhar a Taxa Selic. A forma de cálculo do PU inicial se dá da seguinte forma:

$$PU = \frac{100.000}{(1 + taxa)^{du/252}}$$

Como a posição é atualizada diariamente pela Taxa DI através da dinâmica de atualização do PU pelo fator de correção, o investidor que carrega a posição até o vencimento recebe ajustes diários que somados equivalerão à diferença entre a taxa de juro contratada e a realizada, sobre o montante financeiro da operação. Conclui-se que, quando considerada a teoria das expectativas racionais, é possível transformar as taxas *spot* em taxas *forwards*, e as *forwards* encontram-se implícitas nas taxas *spot*. Logo, taxas *forwards* são projetadas entre duas taxas futuras.

A bolsa disponibiliza também contratos com as mesmas características do DI1, mudando o ativo subjacente, que será a Taxa Selic, porém o volume de negociação é inferior, e os contratos passaram a existir em período posterior ao início do presente estudo.

## 2.4 INTERPOLAÇÃO E MODELAGEM DA ETTJ

Como a ETTJ não é diretamente observável em todos os prazos, para encontrar o taxa em determinado vencimento que não tenha negociação de títulos ou derivativos, é necessário realizar um ajuste. A literatura para interpolação ou modelagem da curva de juros é vasta, e podemos dividir em duas classes, os modelos paramétricos e modelos não paramétricos.

Os modelos não paramétricos não assumem nenhuma forma funcional para a taxa de juros, e têm como foco o perfeito ajuste da estrutura a termo aos vértices observados, ou seja, nos vértices em que houver negociação, o modelo assume uma condição de não arbitragem e a taxa interpolada é exatamente igual à observada. Assim, são considerados modelos mais flexíveis de ajuste à curva. Dentre os principais modelos dessa classe estão McCulloch (1971, 1975),

Litzenberger e Rolfo (1984) e Fisher, Nychka e Zervos (1995) utilizam splines para interpolação da ETTJ; Ron (1987) propõe o uso de programação linear; Vasicek (1977) segue um processo de difusão Markoviano contínuo univariado para taxas de curto prazo; Cox, Ingersall e Ross (1985) aprimoram o modelo Vasicek introduzindo um termo com raiz quadrada no coeficiente de difusão para garantir que as taxas de curto prazo serão positivas; Hull e White (1990) também buscam estender o modelo de Vasicek colocando um parâmetro que varia com o tempo visando ajustar os resultados aos dados da curva de juros observada no mercado; Ho e Lee (1986) propõe um modelo de árvore binomial recombinante para a evolução de toda a curva de juros, assumindo um único fator que permite que toda a curva de juros possa ser explicada somente por uma variável de estado; Black e Karasinski (1991) também apresentam modelo endógeno de não arbitragem.

A classe de modelos paramétricos possui uma função valor especificada, onde as variações na taxa de juros dependem dos fatores que compõe o modelo sugerido, que por sua vez afetam de maneira distinta as taxas ao longo da curva. Uma vantagem em relação aos modelos não paramétricos é a possibilidade de relacionar os movimentos da curva com a teoria econômica que explica as reações da estrutura a termo da taxa de juros. Esses modelos priorizam a suavidade das curvas através da estimação dos parâmetros, defendendo diferentes abordagens para tal. Compartilham o fato da definição dos parâmetros ser através do método de minimização dos desvios quadrados dos preços observados em relação aos teóricos propostos. O modelo proposto por Nelson e Siegel (1987) é uma função paramétrica parcimoniosa com quatro fatores. Baseando-se no trabalho original de Nelson e Siegel, Svensson (1994) insere um segundo fator de curvatura; Diebold e Li (2006) aprimoram realizando um processo de estimação em duas etapas, na primeira as equações são tratadas como um modelo *cross-section*, e a segunda as séries temporais são especificações e ajustadas para os fatores; e Diebold, Li e Aruoba (2006), estimam os parâmetros simultaneamente em um sistema de espaço de estados através do Filtro de Kalman. Além destes, Litterman e Scheinkman (1991), Bliss (1997) e Björk e Christensen (1999), por exemplo, também tentaram com esta classe de modelos fazer a precificação da estrutura a termo de taxa de juros.

Existe ainda outra classe de modelos que é deduzida das condições de não arbitragem, porém assumem uma forma paramétrica para as taxas a vista e taxas *forward*. O método estabelecido por Fama e Bliss (1987) extrai as taxas *forward*

iterativamente, ou seja, a cada passo do processo de cálculo as taxas *forward* são calculadas para precificar títulos com maturidades crescentes, dada uma função de desconto linear ajustada para o título com maturidade mais curta. Esse é um método conhecido como *bootstrap*, onde a taxa de juros a termo resultante deste processo é uma função descontínua em relação ao vencimento do título que está sendo utilizado.

Os métodos de ajustes da estrutura a termo da taxa de juros mais difundidos para precificação de derivativos e utilizada pelos bancos centrais<sup>7</sup> são interpolação exponencial, *spline* cúbico e os modelos propostos por Nelson e Siegel (1987), e a extensão de Svensson (1994), que serão abordados com maior profundidade no presente capítulo.

#### 2.4.1 Interpolação Exponencial

Caldeira (2011) define interpolação como uma técnica para estimar valores de funções em pontos intermediários de intervalos a partir de valores da função calculados nos extremos desses intervalos. A interpolação linear é um dos métodos mais simples e consiste basicamente em interpolar linearmente os logaritmos dos fatores de desconto das taxas spot. Podemos dizer que para cada maturidade  $\tau_i$ , temos uma taxa  $y_i$  associada:

$$y_t(\tau) = -\frac{\log(P_t(\tau))}{\tau}$$

Onde,

$$P_t(\tau) = e^{-\tau y_t(\tau)}$$

Logo, substituindo, chega-se a seguinte equação de interpolação exponencial:

$$y(\tau) = \left(\frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}\right) \frac{\tau_{i+1}}{\tau} y_{i+1} + \left(\frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}\right) \frac{\tau_i}{\tau} y_{i+1}$$

#### 2.4.2 Cubic Spline

---

<sup>7</sup> Contatado pelo Banco de Compensações Internacionais – BIS, em 2005, que quatorze dos quinze bancos centrais analisado utilizam modelos paramétricos para a construção das curvas de juros zero cupom, sendo que nove fazem uso do Modelo Nelson e Siegel e/ou do modelo Svensson.

Os métodos baseados em *splines* utilizam polinômios para que cada segmento da curva seja conectado suavemente em cada vértice observado da curva, os chamados *knot points*. Para um intervalo fechado, a função contínua dada pode ser aprimorada através da utilização de um polinômio arbitrário, sendo que a qualidade do ajuste aumenta com a ordem do polinômio. *Cubic Spline* é um dos modelos de interpolação da curva de juros mais difundido no mercado, utiliza polinômios cúbicos para realizar o ajuste entre os vértices, de forma que a função resultante em todo o intervalo possua derivadas de 1ª e 2ª ordem contínuas nos  $n-2$  vértices intermediários. A ideia por trás desse modelo é a suavização dos pontos entre os nós observados na curva.

Seja  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$  e  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  conhecidos, para chegar na função de *cubic spline* serão necessários os coeficientes  $a_i, b_i, c_i, d_i$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Assim, a função valor para qualquer maturidade  $\tau$  será:

$$y(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)^2 + d_i(\tau - \tau_i)^3$$

Com derivadas:

$$y'(\tau) = b_i + 2c_i(\tau - \tau_i) + 3d_i(\tau - \tau_i)^2$$

$$y''(\tau) = 2c_i + 6d_i(\tau - \tau_i)$$

$$y'''(\tau) = 6d_i$$

$$\tau_i \leq \tau \leq \tau_i + 1.$$

Seja  $h_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  daqui em diante, e as restrições impostas são:

- a função de interpolação passa pelos dados (pontos), assim  $a_i = y_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  e  $a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3 = y_n = a_n$ ;
- a função de interpolação passa pelos dados (pontos), assim  $a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = a_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ;
- a função de interpolação é totalmente diferenciável, assim  $b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i = b_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

As restrições constituem um sistema com  $3n-4$  equações com  $4n-4$  parâmetros desconhecidos, e ainda existem  $n$  restrições lineares a serem especificadas. A diferenciabilidade da função de interpolação é garantida desde que a função *forward*  $f(\tau) = \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} \tau$  seja contínua. Assim, tem-se:

$$f(\tau) = a_i + b_i(2\tau_i - \tau) + c_i(\tau_i - \tau)(3\tau - \tau_i) + d_i(\tau - \tau_i)^2(4\tau - \tau_i)$$

Para  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ .

Definindo  $b_n = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_n + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$ , onde  $b_n$  é a derivada da função de interpolação à direita do ponto extremo superior, assim a especificação das demais  $n$  restrições é equivalente à especificação de  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , ou seja,  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  e  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  são definidos por duas equações com dois parâmetros desconhecidos, às quais se resolve, para cada  $i$ , como:

$$m_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i}$$

$$c_i = \frac{3m_i - b_{i+1} - 2b_i}{h_i}$$

$$d_i = \frac{b_{i+1} + b_i - 2m_i}{h_i}$$

Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

### 2.4.3 Modelo Nelson Siegel

O modelo desenvolvido por Nelson e Siegel (1987) é “*simple, parsimonious model that is flexible enough to represent the range of shapes generally associates with the yield curves: monotonic, humped, and S shape*”, conseguindo explicar 96% da variação da curva de juros norte americana entre 1981 e 1983. Surge como uma alternativa à dinâmica explosiva dos *splines* quando se aproximam dos vencimentos/vértices, propondo análise dos *yields* através de um conjunto de equações diferenciais, e a previsão das taxas *forwards* na maturidade  $\tau$  podem ser a solução de equação diferencial de segunda ordem para o caso de raízes iguais:

$$y_i(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{(-\frac{\tau}{\lambda})} + \beta_2 \left( \frac{\tau}{\lambda} e^{(-\frac{\tau}{\lambda})} \right)$$

Onde  $\lambda$  é uma constante de tempo associadas a equação e  $\beta_0, \beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros determinados por condições iniciais. O rendimento até o vencimento de um título (yield to maturity), denotado por  $Y_i(\tau)$ , é a média das taxas forwards:

$$Y_i(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y_i(\tau) d\tau$$

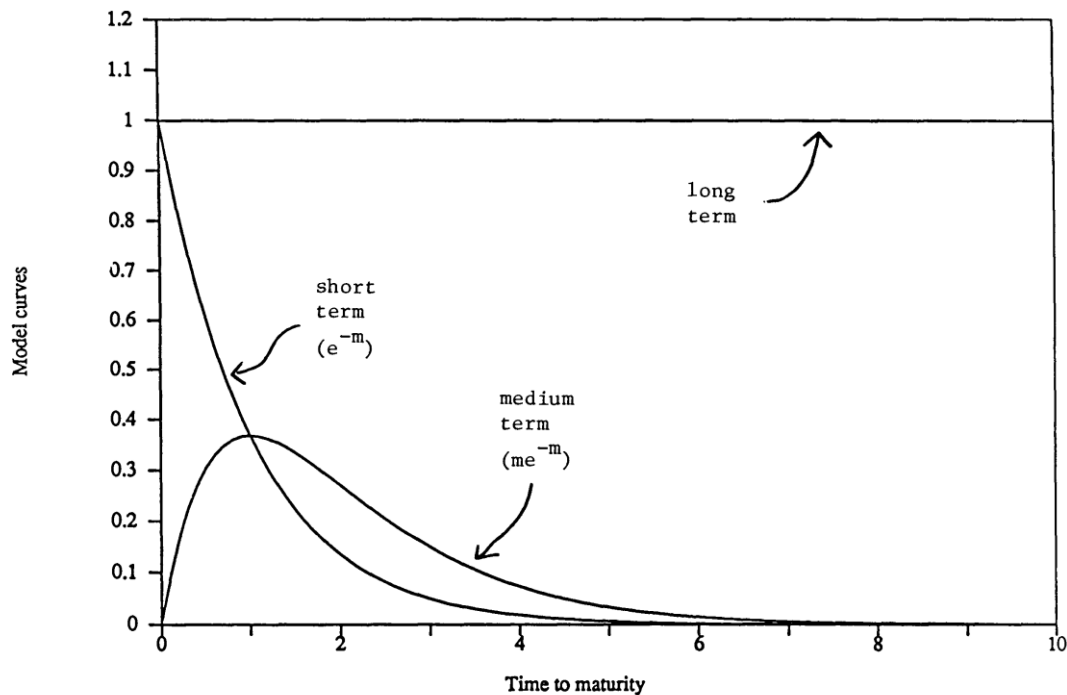
Logo, a curva de juros resultante para zero-cupom é:

$$y_i(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

Os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  da equação foram interpretados como nível, inclinação e curvatura, respectivamente. Sendo  $\beta_0$  um componente de longo prazo, à medida que para maturidades longas, as taxas a vista e *forwards* se aproximam assintoticamente do limite de  $\beta_0$ , que é positivo e no limite da função de segunda ordem não decai para zero.  $\beta_1$  é considerado um componente de curto prazo, uma vez que tem o decaimento mais rápido e monotônico até zero.  $\beta_2$  é o termo de médio prazo pois inicia em zero e tende a zero no limite da função.  $(\beta_0 + \beta_1)$  deve ser positivo e determina o valor inicial na maturidade zero  $\tau_0$ , sendo  $\beta_2$  e  $\lambda$  são responsáveis pela curvatura, onde a magnitude da mesma é dada pelo valor absoluto de  $\beta_2$  enquanto a direção é dada pelo sinal, se negativo indica curva em forma de U e se positivo, em forma de U invertido, já  $\lambda$  que é a taxa de decaimento, sempre positivo, indica a posição da curvatura. Se  $\lambda$  for um valor pequeno, o decaimento é lento e tende a ajustar melhor o longo prazo, porém se for um valor grande, o decaimento é rápido, ajustando melhor o curto prazo.

Segundo Ribeiro (2010), um choque de nível, primeiro fator do modelo, impacta de forma uniforme em todas as taxa de juros da curva, isto é, há um deslocamento paralelo; um choque no segundo fator, inclinação, as mudanças na taxas de curto prazo serão diferentes quando comparadas às mudanças no longo prazo, ou seja, há mudança na inclinação da curva; já um choque no terceiro fator, curvatura, os resultados são diferenciados nas taxa de curto e longo prazos, comparativamente às taxas de médio prazo, ou seja, ocorre mudança na curtose da curva de juros.

**Figura 1 – Decomposição dos três fatores no modelo Nelson Siegel**



Fonte: Nelson e Siegel (1987).

#### 2.4.4 Modelo Svensson

O modelo proposto por Svensson aplica o proposto por Nelson e Siegel ao adicionar um outro termo que possibilita uma segunda curvatura, melhorando a flexibilidade e ajuste do modelo à curva de juros. Para isso, é necessário adotar dois novos parâmetros a serem estimados junto a  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\lambda$ , que são  $\beta_4$  e  $\lambda_2$ . É um modelo que geralmente tende a ter melhor ajuste pois é mais flexível, ao custo de ser menos parcimonioso:

$$y_i(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} - e^{\lambda_1 \tau} \right) + \beta_4 \left( \frac{1 - e^{\lambda_2 \tau}}{\lambda_2 \tau} - e^{\lambda_2 \tau} \right)$$

#### 2.5 IMUNIZAÇÃO DA CARTEIRA

Na gestão de recursos ativos e passivos o gerenciamento de diversos tipos de risco está presente, dentre eles o risco de mercado. É importante a identificação dos fatores que afetam o retorno dos títulos em carteira para que se possa fazer a gestão/ mitigação do risco. Esse processo permite que os agentes de mercado

busquem minimizar os impactos da oscilação de preço dos ativos em carteira, prevenindo prejuízos. Bierwag (1977) propõe o conceito de gerenciamento de risco de taxa de juros através da imunização de carteiras, ou seja, para eliminar o efeito de variações no valor de mercado dos ativos sobre uma carteira, adiciona-se a essa, uma nova carteira.

Assim, diferentes modelos de imunização de carteira foram propostos e os mais difundidos no mercado, que serão objeto de comparação no presente trabalho, são a imunização através da *Duration*, ou da Análise dos Componentes Principais (ACP daqui em diante) da curva de juros.

### 2.5.1 Duration

Frederic Macaulay em 1938 definiu o conceito de *duration* como o prazo médio de um título ou de uma carteira composta por títulos de diferentes vencimentos e características. Este prazo médio leva em consideração não apenas o prazo de cada título, mas também o valor futuro, os fluxos de caixa e a taxa de juros de cada um. Abaixo está a fórmula da *duration*:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \times \frac{F_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t}}$$

Onde:

D= *duration* do título ou conjunto de títulos

$F_t$  = fluxo de pagamento futuro na data t

i = taxa de juro efetiva diária

n = número total de dias úteis até o fluxo mais distante

t = prazo entre o dia de cálculo da *duration* e o instante t, medido em dias úteis.

A sensibilidade da *duration* em relação à taxa de juros é diferente de acordo com a característica das carteiras ou títulos. Em títulos pós fixados, o valor presente é insensível à taxa de juro. Essa sensibilidade é calculada a partir da derivada da *duration* em relação à taxa de juros  $\frac{\partial D}{\partial i}$ . Em carteiras com mais de um fluxo



diferente de zero, por exemplo, títulos com cupons ou carteiras com diferentes vencimentos, a relação é inversamente proporcional (a derivada é negativa), então quanto maior a taxa de juros, menor será a *duration* da carteira ou título. Pelo sinal negativo da primeira derivada, a relação é inversa, ou seja, um aumento na taxa de juros provoca uma redução no valor presente da carteira. Pode-se também analisar as variações relativas no valor de uma carteira, ou seja, variação percentual.

$$\frac{\partial V}{V} = -\partial i \times \frac{D}{(1+i)}$$

Assim, a variação percentual no valor de uma carteira  $\partial V/V$  será tão maior, em termos absolutos, quanto maior for a variação nas taxas de juros ( $\partial i$ ) e quanto maior foi a *duration* (D) dividida pelo fator de juro de um período ( $1 + i$ ). A *Modified Duration*, ou *duration* modificada, representa quantos pontos percentuais do valor de uma carteira é afetado pela variação de um ponto percentual na taxa de juros.

$$D^* = -\frac{\frac{\partial V}{V}}{\partial i}$$

Quanto maior a *Modified Duration*, maior é sua sensibilidade em relação à taxa de juros e por consequência, maior o risco da carteira, ou seja, maior a volatilidade da taxa de juros. Títulos pós-fixados têm *Modified Duration* igual a zero, pois o valor presente não é afetado pela taxa de juro. Diferentes carteiras podem ter igual valor presente, então para classificá-la quanto ao risco, a carteira com maior *Modified Duration* é mais arriscada, uma vez que é mais sensível a taxa de juros, ou seja, mais volátil. A variação absoluta no valor de uma carteira em decorrência da alteração de um ponto percentual na taxa de juros, é igual à *Modified Duration* multiplicada pelo valor presente da carteira. A medida de sensibilidade da *Modified Duration* à variações nas taxas de juros é a convexidade.

Para imunização de carteiras utilizando o método da *duration*, Weiskopf (2003) mostra que a seguinte equação deve ser respeitada:

$$V_A \times D_A = V_P \times D_P$$

Ou seja, o valor marcado a mercado ( $V$ ) dos ativos multiplicados pela duration ( $D$ ) dos ativos deve ser igual ao valor marcado a mercado dos passivos multiplicado pela sua duration.

### 2.5.2 Análise dos Componentes Principais

A ideia central da ACP é, segundo Jolliffe (2002), "reduzir a dimensionalidade de um conjunto de dados nos quais existe um grande número de variáveis inter-relacionadas, mantendo o máximo possível da variação presente no conjunto de dados", onde o conceito da ACP foi originalmente concebida por Pearson em 1901 e desenvolvida por Hotelling (1933), sendo uma técnica estatística que permite reduzir um modelo multivariado a um conjunto de poucos componentes, não correlacionados, que carregam maior parte da informação contida no modelo original. Varga e Valli (2001) ressaltam que a ACP baseia-se no método de diagonalização de matrizes, onde através de uma matriz quadrada e simétrica obtém-se a matriz de autovetores e um vetor dos autovalores, objetos que permitem o estudo de dependência entre uma grande quantidade de variáveis aleatórias.

Sendo  $x$  um vetor de  $p$  variáveis aleatórias normais, o primeiro passo na ACP é buscar uma função linear  $a_1'x$  dos elementos de  $x$  que possuam a maior variância, onde  $a_1$  consiste em um vetor de  $p$  constantes  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}$ , e  $'$  denota transposição, de forma que a função abaixo é considerada como o primeiro componente principal:

$$a_1'x = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = \sum_{j=1}^p a_{1j}x_j$$

Os componentes principais seguintes são escolhidos de maneira que possuam a maior variância possível, mas sujeitos à restrição de não serem correlacionados aos componentes principais anteriores. Assim, considerando uma matriz simétrica de covariância  $V$  da matriz de dados originais normalizados  $X$ , composta por  $p$  variáveis aleatórias, por definição a diagonal de  $V$  representa a variância de cada uma das  $p$  variáveis aleatórias, e os termos de fora da diagonal representam a covariância entre as  $p$  variáveis aleatórias. O método de

diagonalização de matrizes garante a existência de uma matriz  $A$ , quadrada e ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Portanto,  $A'A = I$ , onde  $A'$  é a transposta de  $A$ , e  $I$  é a matriz identidade. Garante também um vetor  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$  com  $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ . Assim, ambos satisfazem a seguinte relação com a matriz de covariância  $V$ :

$$VA = A\Lambda$$

Onde  $\Lambda$  representa a matriz diagonal associada ao vetor  $\lambda$ :

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda)_{N \times N} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Logo, os vetores das colunas  $a_k$  da matriz  $A$  representam os autovetores de  $V$ , e os números de  $\lambda_k$  representam seus autovalores correspondentes, validando a relação  $V = A\Lambda A'$ . A solução para o  $k$ -ésimo componente principal,  $z_k$ , é dada por:

$$z_k = a'_k X$$

Assim,  $a_k$  é um autovetor de  $V$  correspondente ao seu  $k$ -ésimo autovalor, e  $\lambda_k \cdot a_k$  é escolhido tal que  $a'_k a_k = 1$  de maneira que a variância de  $z_k$  seja igual ao autovalor  $\lambda_k$ . Assim, tem-se que  $z = A'X$ , onde  $A$  é a matriz ortogonal cuja  $k$ -ésima coluna,  $a_k$ , é o  $k$ -ésimo vetor de  $V$ .

Conclui-se que os autovalores da matriz  $V$  representam a variância dos dados originais projetadas nos autovetores, ou seja, a variância total dos dados originais é equivalente à somatória dos autovalores. A variância explicada pelo último componente principal é representada por:

$$\text{Var explicada}(z_k) = \frac{\lambda_k}{\text{Var}(X)} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

Litterman e Scheinkman (1991) apresentam o primeiro trabalho utilizando ACP aplicado a taxa de juros, identificando três fatores que são capazes de explicar aproximadamente 98% da variabilidade das taxas implícitas de títulos do mercado norte americano, e interpretam esses três fatores como responsáveis pelo movimento no nível, na inclinação e na curvatura da taxa de juros, e ainda observam que a abordagem de três fatores é especialmente útil para imunização de carteiras:

Ao considerar o efeito de cada um dos três fatores em uma carteira, os investidores podem obter uma posição melhor protegida do que aquela que conseguem obter simplesmente ao possuir uma carteira com duration igual a zero. Como os três fatores explicam quase toda a variabilidade dos retornos de todo o espectro de vencimentos, esta abordagem permite aos investidores proteger títulos com instrumentos que podem não ser do mesmo setor. (LITTERMAN; SCHEINKMAN, 1991, p. 56).

Barber e Cooper (1996) constroem uma matriz de autovetores a partir do histórico de dados mensais e mostram que o modelo de ACP pode ser melhor utilizado para determinar a melhor direção única, antecipando-se às mudanças na taxa à vista, já que seu modelo mostra que uma única direção capturou 81% da variância total da taxa à vista, enquanto a segunda agregou 12% e a terceira e quarta, 4% e 1% respectivamente. Diversos autores aprimoram o uso de ACP usando dados sobre a variação da taxa de juros, destacando-se no mercado externo trabalhos de Barber e Mark (1996), Alexander (2001), Almeida (2005) e no mercado doméstico Barcinski (2000), Varga e Valli (2001), Kojó (2003), Ferreira (2006) e Furcolin Filho (2010).

## 2.6 MARCAÇÃO E MERCADO

A marcação a mercado (doravante MaM) tem como principal objetivo a identificação dos verdadeiros valores dos ativos, ou seja, a obtenção do valor de um ativo pelo qual ele poderia ser negociado no mercado, visando manter o valor da carteira o mais aderente à realidade possível. Garran, Sousa e Luporini (2010) reforçam o conceito, pois “se fosse necessário ou interessante vender o título em questão, poder-se-ia vendê-lo pelo preço marcado”.

O objeto de imunização do presente estudo será o valor de mercado de uma carteira de renda fixa, ou seja, as carteiras de *hedge* serão construídas para mitigar as mudanças de MaM da carteira original.

### 2.6.1 Interpolação da curva de juros

A curva de juros utilizada no Brasil baseia-se nos contratos de DI Futuro negociados na BM&F. Para obter a taxa em um vértice que não há negociação de DI, utilizou-se o método de *cubic spline*, citado anteriormente, pois é importante satisfazer condições de não arbitragem quando levarmos em consideração a precificação das operações na carteira.

### 2.6.2 Spread sobre a curva

Se os ativos são negociados fora da curva de emissão, ou seja, ativos em que haja um *spread* sobre a curva de emissão de um título. Lembrando aqui que a carteira foi composta por ativos livres de risco de crédito, portanto esse *spread* pode ser interpretado por como um prêmio, ágio ou deságio.

$$s = \left( \frac{(1 + Tx.Operação_{du})^{1/252}}{(1 + Tx.Spot_{du})^{1/252}} \right) - 1$$

Onde,

$s = spread$ ;

$Tx.Operação_{du}$  = Taxa contratada em dias úteis;

$Tx.Spot_{du}$  = Taxa de mercado em vigor na data de apuração.

O *spread* pode ser em % do CDI, e será medido com base na diferença entre as taxas negociadas no mercado para determinado vencimento em relação à respectiva curva de juros correspondente. No caso de ágio ou deságio, o ajuste pode ser feito pró-rata através de um fator de desconto:

$$Fator\ de\ Desconto = (1 + \text{ágio}/\text{deságio})^{n/252} = \frac{PU_{par}}{PU_{inicial}}$$

Onde,

$PU_{inicial}$  = Preço inicial da operação de compra ou venda;

$PU_{par}$  = Preço ao par;

$n$  = Número de dias úteis do início ao vencimento.

### 2.6.3 Letra Financeira do Tesouro – LFT

São títulos pós fixados e valorizados diariamente pelo Taxa Selic, normalmente negociados com ágio ou deságio em relação ao  $PU_{par}$ .

$$V_{MaM} = \frac{VNA}{(1 + \text{ágio}/\text{deságio})^{du/252}}$$

Onde,

$$VNA = 1.000 \cdot \prod_{i=1}^n (1 + Selic_i)^{1/252}$$

$n$  = número de dias úteis entre a data de emissão e data da MaM;

$Selic_i$  = Taxa Selic anualizada para o  $i$ -ésimo dia útil;

$du$  = número de dias úteis entre a data da MaM e o vencimento.

### 2.6.4 Letras do Tesouro Nacional – LTN

Títulos prefixados com valor no vencimento igual à 1.000.

$$V_{MaM} = \frac{1.000}{(1 + taxa)^{du/252}}$$

Onde,

$V_{MaM}$  = Valor do título a preço de mercado;

$taxa$  = Taxa de desconto anual na base 252;

$du$  = Dias úteis entre o vencimento e a data base.

### 2.6.5 Títulos Privados

Os títulos privados são títulos de dívida cujo emissor é um banco, financeira ou empresa, podendo ser de emissão prefixada ou pós fixada.

#### 2.6.5.1 Prefixados

A marcação a mercado dos títulos privados prefixados difere um pouco dos títulos públicos uma vez que o valor de resgate pode ser diferente de R\$ 1.

$$V_{MaM} = V_E \cdot \frac{(1 + taxa)^{du/252}}{(1 + y)^{du_t/252}}$$

Onde,

$V_{MaM}$  = Valor do título a preço de mercado;

$V_E$  = Valor na data de emissão;

$taxa$  = taxa negociada no papel;

$y$  = taxa de juros da curva de mercado vigente;

$du$  = Dias úteis entre o vencimento e a data base;

$du_t$  = Dias úteis entre o vencimento e data da MaM.

#### 2.6.5.2 Pós fixados

Serão consideradas apenas operações indexadas à Taxa DI.

$$V_{MaM} = VNA \cdot \frac{\left\{1 + \left[(1 + y_i)^{1/252} - 1\right] \cdot PC\right\}^{du}}{\left\{1 + \left[(1 + y_i)^{1/252} - 1\right]\right\}^{du}}$$

$$VNA = V_E \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 + \left[(1 + DI_i)^{1/252} - 1\right] \cdot PC\right)$$

Onde,

$V_{MaM}$  = Valor do título a preço de mercado;

$VNA$  = Valor nominal atualizado;

$V_E$  = Valor na data de emissão;

$n$  = número de dias úteis entre a data de emissão e data da MaM;

$DI_i$  = Taxa DI anualizada para o i-ésimo dia útil;

$y_i$  = Taxa DI projetada para o vencimento pela curva de juros;

$du$  = Dias úteis entre o vencimento e a data da MaM;

$PC$  = Percentual sobre o DI contratado no papel.

### 3 METODOLOGIA

O estudo divide-se em duas partes. A primeira delas está na aplicabilidade da análise de componentes principais à ETTJ, obtida através do método de *cubic spline* e do modelo de Nelson e Siegel, conforme descritos no capítulo anterior. Todas as rotinas de tratamento de dados, programação e execução de algoritmos foram traduzidas para linguagem R e realizadas no *software Revolution R*. A segunda parte será a comparação dos métodos de imunização (*Duration* e ACP) de uma carteira simulada, levando em consideração a abordagem do valor de mercado. Nessa etapa, todas as rotinas de criação da carteira, estratégias de utilização dos instrumentos disponíveis de hedge, necessidade de rebalanceamento, valor justo de ativos e passivos, foram realizadas com linguagem de programação VBA, utilizando o *software Microsoft Excel*.

#### 3.1 AMOSTRA

O período de análise se dará de 02/01/2008 até 30/12/2010, e levará em conta dados diários para todos vencimentos disponíveis na BM&F dos contratos de DI futuro. As curvas serão estimadas para vértices múltiplos de 21 dias úteis e maturidade máxima de 10 anos (2.520 dias úteis). A partir da curva de melhor ajuste, será aplicada ACP para encontrar quantos componentes principais reduzirão a amostra do estudo representando alto poder explicativo da variância da curva de juros para diversas maturidades, e assim quantos fatores serão utilizados na imunização de uma carteira teórica. O objetivo é comparar o desempenho de uma imunização utilizando ACP quando comparada ao método de imunização através da *duration* da carteira teórica do período de janeiro de 2011 à março de 2016.

A análise do valor de mercado da carteira bancária teórica, doravante Carteira Original, e das carteiras de imunização através de ACP e *duration*, doravante Carteira ACP e Carteira *Duration*, serão calculados diariamente. A carteira será iniciada no dia 3 de janeiro de 2011 com 30 operações escolhidas de forma aleatória, sendo elas 15 ativas, com valores compreendidos entre R\$ 100 mil e R\$ 500 milhões e vencimento entre 2 e 2520 dias úteis, e 15 operações passivas no mesmo intervalo de valores, porém vencimentos de 2 à 1260 dias úteis. A diferença de prazos visa estar aderente à realidade de gestor de carteiras onde a captação



bancária (passivos) tem um prazo inferior que as aplicações em ativos e operações de crédito. Todas as operações serão prefixadas com base na curva de juros negociada no dia de início da operação. No primeiro dia útil de cada mês observado, a Carteira Original receberá novas 30 operações no mesmo molde da carteira inicial.

A dinâmica de rebalanceamento da carteira ocorrerá quando houver vencimento de alguma operação ou então no primeiro dia útil de cada mês. Os custos do hedge e rebalanceamento serão levados em consideração, visando maior adesão à realidade. A carteira teórica será considerada *risk free*, sem restrições de liquidez, visando o foco em imunização apenas do risco de mercado referente à taxa de juros brasileira. As carteiras ACP e Duration serão compostas exclusivamente por operações de DI Futuro, e suas quantidades serão arredondadas para múltiplos de 5 contratos, em conformidade com o permitido pela BM&F, e o preço de entrada será o preço de ajuste do dia, ou seja, considerando que as operações tenham acontecido durante o *call* de fechamento dos contratos de DI Futuro. Os custos de transação envolvendo DI consideram uma taxa de devolução de corretagem de 99,7%, considerado um volume razoável para a quantidade negociada no presente estudo<sup>8</sup>.

## 3.2 MODELAGEM E INTERPOLAÇÃO DE CURVAS

Visando encontrar o valor das curvas para os vértices determinados no presente estudo, foram utilizadas diferentes metodologias de interpolação das curvas.

### 3.2.1 Modelo de Nelson e Siegel

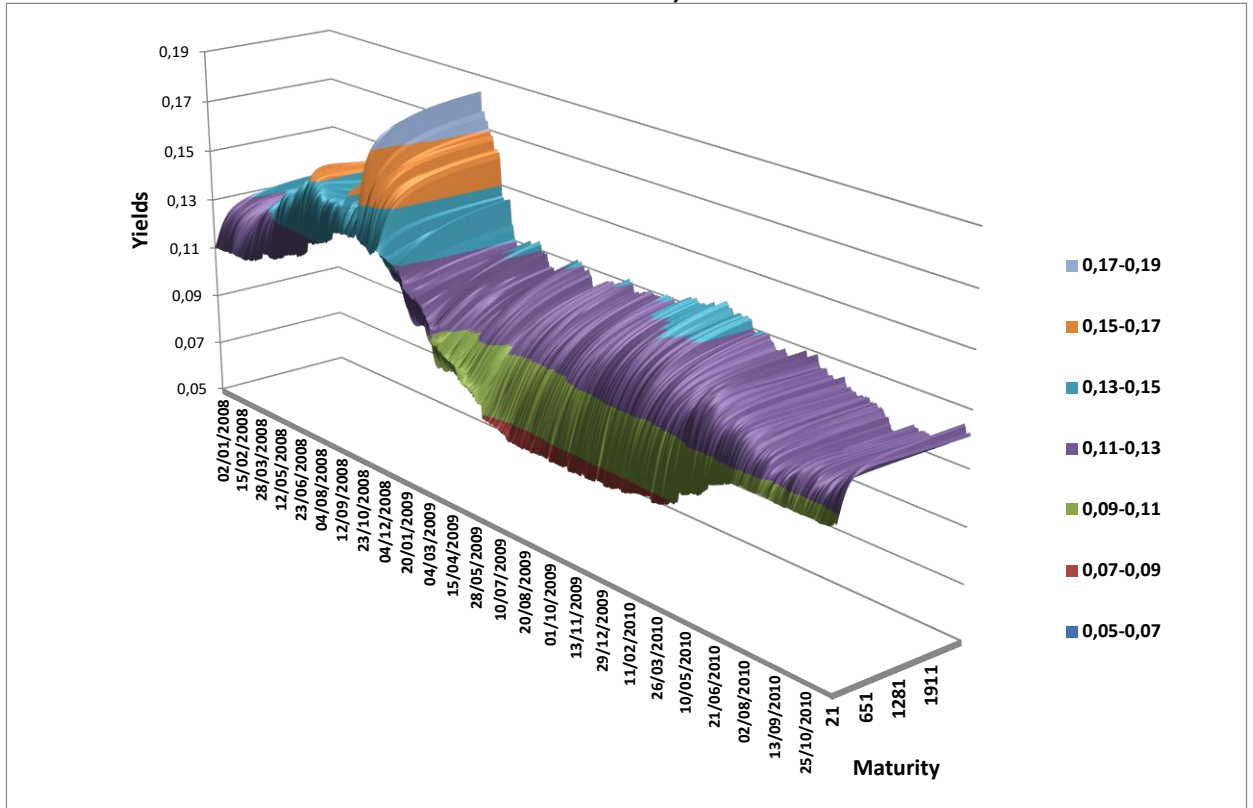
Através do Modelo de Nelson e Siegel, obtém-se a modelagem de uma gama de curvas. Nota-se que no período observado existem diversos formatos assumidos pela curva. A Tabela 1 resume as estatísticas descritivas das curvas estimadas, em linha com a literatura sobre o tema, os vértices mais curtos, até 18 meses, apresentam maior volatilidade, e para todas as maturidades percebe-se a grande

---

<sup>8</sup> Para as taxas de registro e emolumentos cobradas pela BM&Fbovespa, foram utilizadas as disponíveis no site em 01/04/2016, pelo site [http://www.bmfbovespa.com.br/pt\\_br/servicos/tarifas/listados-a-vista-e-derivativos/juros-e-inflacao/tarifas-de-taxa-di/](http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/servicos/tarifas/listados-a-vista-e-derivativos/juros-e-inflacao/tarifas-de-taxa-di/)

diferença entre taxas mínimas e máximas, refletindo a condução da política monetária do período.

**Figura 2 – Estrutura a termo da curva de juros através do Modelo de Nelson e Siegel (jan/2008 – dez/2010)**



Fonte: Elaborado pela autora.

**Tabela 1 – Estatísticas descritivas da curva de juros estimada por Nelson e Siegel**

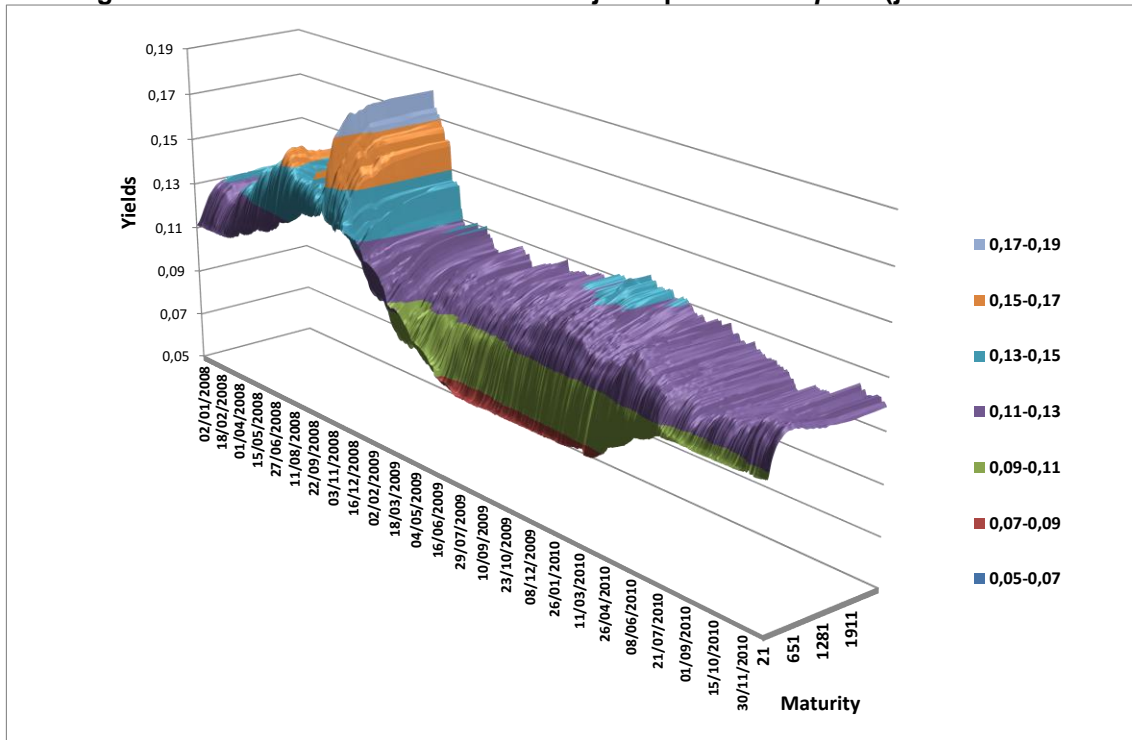
<b>Vértices (DU)</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Desv Padrão</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>
21	0,1065	0,1057	0,0170	0,0839	0,1395
63	0,1089	0,1075	0,0168	0,0860	0,1463
126	0,1124	0,1105	0,0171	0,0883	0,1552
189	0,1153	0,1128	0,0172	0,0904	0,1615
252	0,1175	0,1143	0,0170	0,0931	0,1658
378	0,1208	0,1163	0,0160	0,0981	0,1710
504	0,1229	0,1176	0,0150	0,1014	0,1740
630	0,1245	0,1201	0,0142	0,1043	0,1759
756	0,1256	0,1216	0,0135	0,1068	0,1772
1008	0,1272	0,1232	0,0126	0,1106	0,1792
1260	0,1282	0,1243	0,0121	0,1110	0,1807
1512	0,1290	0,1254	0,0118	0,1108	0,1818
1764	0,1295	0,1263	0,0116	0,1106	0,1826
2016	0,1299	0,1272	0,0115	0,1105	0,1832
2268	0,1303	0,1282	0,0115	0,1104	0,1836
2520	0,1306	0,1289	0,0114	0,1103	0,1840
<b>Total</b>	<b>0,1260</b>	<b>0,1244</b>	<b>0,0143</b>	<b>0,0839</b>	<b>0,1840</b>

Fonte: Elaborada pela autora.

### 3.2.2 Cubic Spline

Para perceber as curvas estimadas em uma condição de não arbitragem e modelagem mais flexível da curva de juros, realizou-se a interpolação das curvas através do modelo de *cubic spline* para as observações diárias dos vértices de DI futuro negociados na BM&F. As estatísticas descritivas das curvas encontradas são expostas abaixo, e percebe-se que são semelhantes às encontradas na modelagem da curva através de Nelson e Siegel no que diz respeito à média, mediana e desvio padrão, porém, a curva estimada através de *cubic splines* apresenta menor amplitude quanto comparada as taxa mínimas e máximas observadas.

Figura 3 – Estrutura a termo da curva de juros por *Cubic Spline* (jan/2008 – dez/2010)



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas da curva de juros estimada por *Cubic Spline*

Vértices (DU)	Média	Mediana	Desv Padrão	Mínimo	Máximo
21	0,1073	0,1065	0,0167	0,0859	0,1408
63	0,1082	0,1069	0,0171	0,0859	0,1451
126	0,1106	0,1085	0,0176	0,0861	0,1532
189	0,1133	0,1111	0,0178	0,0873	0,1604
252	0,1162	0,1129	0,0176	0,0899	0,1640
378	0,1208	0,1164	0,0165	0,0955	0,1712
504	0,1237	0,1187	0,0151	0,1006	0,1744
630	0,1253	0,1213	0,0143	0,1041	0,1778
756	0,1263	0,1221	0,0134	0,1071	0,1783
1008	0,1277	0,1231	0,0123	0,1111	0,1800
1260	0,1284	0,1243	0,0120	0,1106	0,1810
1512	0,1289	0,1254	0,0117	0,1106	0,1814
1764	0,1293	0,1262	0,0116	0,1103	0,1815
2016	0,1295	0,1267	0,0115	0,1104	0,1815
2268	0,1295	0,1269	0,0115	0,1104	0,1815
2520	0,1296	0,1271	0,0114	0,1102	0,1815
<b>Total</b>	<b>0,1259</b>	<b>0,1242</b>	<b>0,0144</b>	<b>0,0858</b>	<b>0,1816</b>

Fonte: Elaborado pela autora.

### 3.2.3 Análise dos Componentes Principais

A utilização de ACP para estratégias de imunização de carteiras parte do princípio que os Componentes Principais, doravante CP, expliquem grande parte do movimento da curva de juros, permitindo que a curva estimada através de ACP seja aderente à realidade, e por consequência, refletir a oscilação no valor de mercado dos ativos e passivos da carteira. Nessa seção, testou-se a aderência do método de ACP às curvas estimadas tanto por Nelson e Siegel quanto por *Cubic Spline*.

**Tabela 3 – Variância Explicada pelos CPs**

	Nelson e Siegel		Cubic Spline	
	Var. Explicada	Var. Expl. Acum.	Var. Explicada	Var. Expl. Acum.
CP1	68,44%	68,44%	87,69%	87,69%
CP2	27,45%	95,89%	8,02%	95,71%
CP3	2,80%	98,69%	1,61%	97,32%
CP4	1,11%	99,80%	0,74%	98,06%
CP5	0,18%	99,98%	0,38%	98,44%
CP6	0,02%	100,00%	0,26%	98,70%
CP7	0,00%	100,00%	0,17%	98,87%
CP8	0,00%	100,00%	0,15%	99,02%
CP9	0,00%	100,00%	0,12%	99,14%
CP10	0,00%	100,00%	0,10%	99,24%
CP11	0,00%	100,00%	0,10%	99,34%
CP12	0,00%	100,00%	0,07%	99,41%
CP13	0,00%	100,00%	0,06%	99,47%
CP14	0,00%	100,00%	0,06%	99,53%
CP15	0,00%	100,00%	0,05%	99,58%
CP16	0,00%	100,00%	0,05%	99,63%
CP17	0,00%	100,00%	0,04%	99,67%
CP18	0,00%	100,00%	0,03%	99,70%
CP19	0,00%	100,00%	0,03%	99,73%
CP20	0,00%	100,00%	0,03%	99,76%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
CP45	0,00%	100,00%	0,00%	100,00%
<b>Total</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>

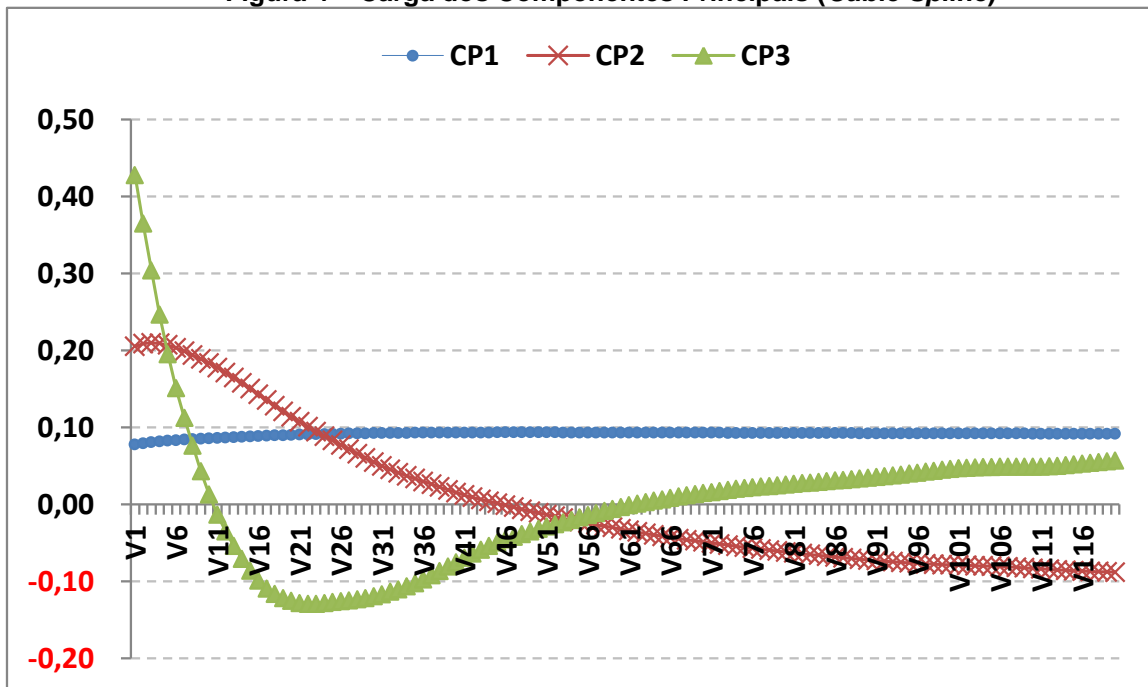
Fonte: Elaborado pela autora.

Poder-se-ia escolher um número qualquer de CP desde que não haja perda de explicação significativa da variância total na série original. Os trabalhos sobre o tema costumam utilizar os primeiros três componentes, e o objetivo aqui é escolher o menor número de componentes, visando diminuir os custos de *hedge*. Percebe-se então bastante aderência das curvas estimadas por ACP à realidade, uma vez que

apenas os três primeiros componentes explicam boa parte da oscilação da curva de juros original: 98,69% das variações das curvas estimadas pelo modelo de Nelson e Siegel são explicadas por estes componentes, enquanto 97,32% nas curvas estimadas por *cubic spline*.

Varga e Valli (2001) já interpretavam esses componentes como Nível, Inclinação e Curvatura. O CP1 tem a carga positiva para todos os períodos em ambos os modelos, indicando que um deslocamento neste componente gera um deslocamento de toda a curva no mesmo sentido, ainda que possa ser em magnitudes diferentes, como foi evidenciado pelo estudo de Silveira e Bessada (2003).

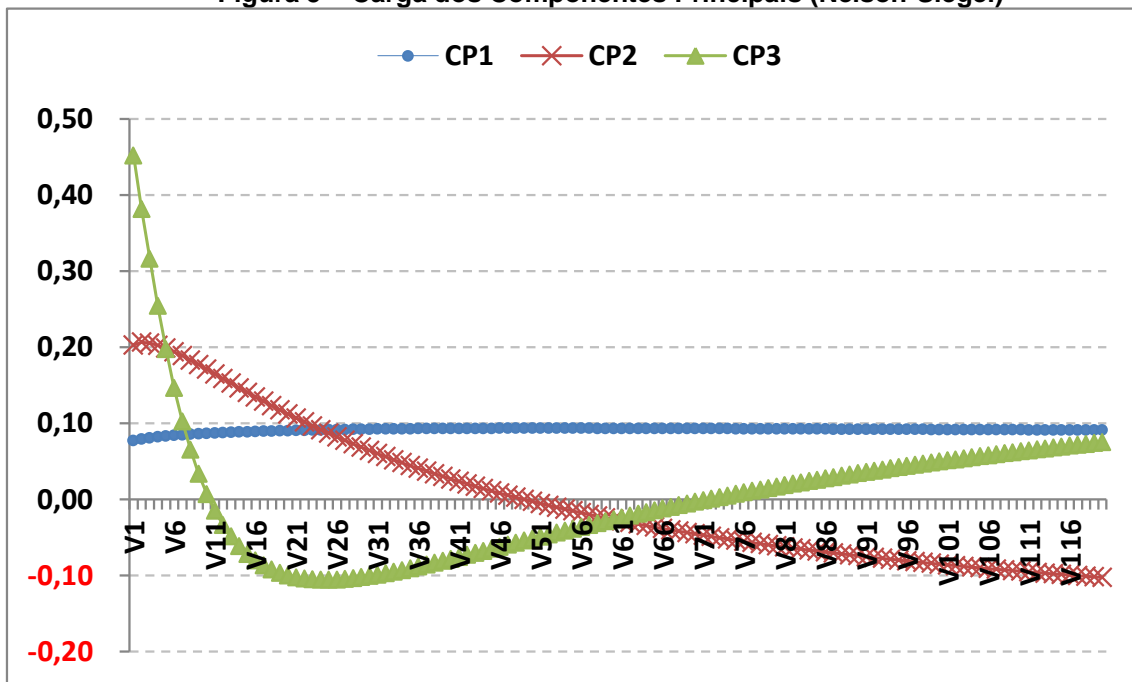
Figura 4 – Carga dos Componentes Principais (*Cubic Spline*)



Fonte: Elaborado pela autora.

Os choques no segundo componente afetam a curva curta e longa em sentidos diferentes, modificando a inclinação da curva. Um choque positivo, por exemplo, desloca os vértices de curto prazo para cima, enquanto vértices mais longos caem, inclinando negativamente a curva, enquanto um choque negativo inclina a curva no sentido positivo. O terceiro componente representa a curvatura da curva pois afeta as taxas de curto e longo prazo no mesmo sentido, porém o médio prazo, o miolo da curva, sofre impacto no sentido oposto.

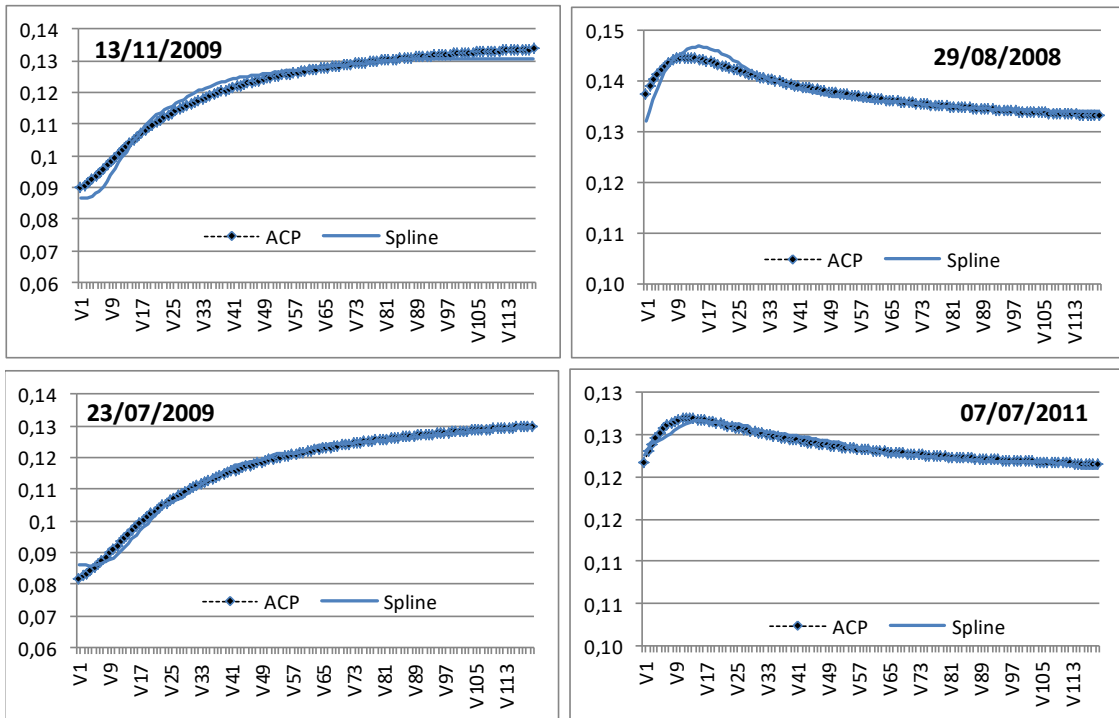
Figura 5 – Carga dos Componentes Principais (Nelson-Siegel)



Fonte: Elaborado pela autora.

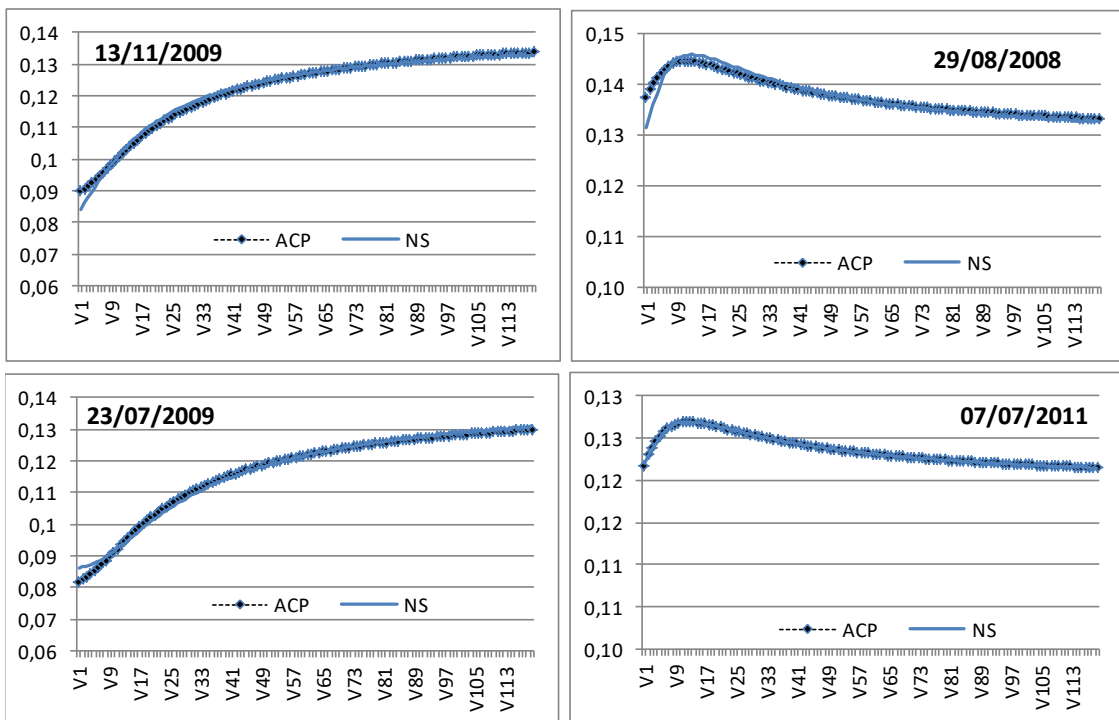
Kojó (2003) reconstrói as curvas utilizando apenas os componentes principais selecionados a fim de verificar sua adesão às séries originais. Replicou-se essa metodologia, conforme tabela abaixo, apresentando dias específicos, e percebe-se grande adesão das curvas estimadas por ACP às curvas originais, tanto quando estimadas por Nelson e Siegel, quanto por *cubic spline*. Isso valida o alto poder explicativo dos três primeiros componentes principais.

**Figura 6 – Comparação Curva ACP vs. Curva Cubic Spline**



Fonte: Elaborado pela autora.

**Figura 7 – Comparação Curva ACP vs. Curva Nelson e Siegel (NS)**



Fonte: Elaborado pela autora.



### 3.3 IMUNIZAÇÃO POR *DURATION*

*Duration hedge* consiste em construir uma carteira com apenas um título de vencimento igual à *duration* da carteira original. No presente trabalho, por uma questão de liquidez e conversibilidade dos títulos e derivativos negociados no mercado, a carteira será composta pelo vencimento do DI Futuro mais líquido próximo a *duration* original da carteira.

Os títulos que compõem a carteira original serão representadas pelo vetor de prazos  $T = (\tau_1 \tau_2 \dots \tau_N)$ , onde  $\tau_N$  representa o  $i$ -ésimo prazo, e o vetor  $y = (y_1 y_2 \dots y_N)$  representa o conjunto de taxa contínuas médias para cada vencimento. Logo, o vetor preço será representado por  $P = (p_1 p_2 \dots p_N)$ , enquanto o preço de cada título se dá por  $P_t(\tau) = e^{-\tau \cdot y_t(\tau)}$ . Uma variação qualquer na estrutura a termo da taxa de juros será representada pelo vetor- coluna  $\Delta Y = (\Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_N)$ . O valor de mercado ( $VM$ ) da carteira ( $C$ ) é dado por:

$$VM(C) = \sum_{i=1}^N P_i$$

Assim,  $VM(C) = -(\tau_1 \cdot P_1 \tau_2 \cdot P_2 \dots \tau_N \cdot P_N)$ . Seja  $D$  a *duration* da carteira, a imunização será feita no vencimento do derivativo  $DI_D$  com liquidez considerável mais próximo à mesma, onde  $1 \leq D \leq N$ , a quantidade a ser investida nesse vértice se dá por:

$$Q_{DI_D} = -\frac{VM(C) \cdot D}{P_{DI_D} \cdot du_{DI_D}}$$

Sendo  $du_{DI_1}$  a quantidade de dias úteis até o vencimento de DI escolhido para imunização. A quantidade encontrada será arredondada para respeitar as regras de negociação do derivativo, ou seja, múltiplos de 5 contratos.

### 3.4 IMUNIZAÇÃO POR COMPONENTES PRINCIPAIS

Na imunização de carteiras utilizando ACP, os três primeiros componentes serão utilizado para montar a carteira, portanto, serão três prazos diferentes na

carteira teórica:  $DI_1, DI_2$  e  $DI_3$ , de preferência com maior liquidez e sem correlação entre si. Para escolher os prazos utilizados na imunização, o método é um deles o mais próximo da *duration* ( $DI_2 = DI_D$ ), e os outros dois equidistantes, isto é, o vencimento curto  $DI_1$  será o vencimento compreendido entre o primeiro futuro e o vencimento de  $DI_D$ . A distância entre  $DI_1$  e  $DI_2$  será aplicada para o vencimento mais longo, ou seja, a distância entre  $DI_1$  e  $DI_3$  será a mesma para  $DI_2$ .

Definidos os vencimentos, as quantidades alocadas em cada se dará pelo valor de MaM da carteira original. A carteira associada à esses prazos é conotada por  $Q = (Q_{DI_1}, Q_{DI_2}, Q_{DI_3})$ , e os respectivos prazos para os vencimentos serão  $du_{DI_1}, du_{DI_2}, du_{DI_3}$ . Para encontrar as quantidades necessárias em cada um dos vencimentos dos DIs:

$$Q_{DI_1} = - \left( \frac{\left( 1 - \frac{(du_D - du_{DI_1})}{(du_{DI_2} - du_{DI_1})} \right)}{\left( \frac{P_{DI_1}}{P_{DI_2}} \right) \frac{(du_D - du_{DI_1})}{(du_{DI_2} - du_{DI_1})}} \right) \cdot VM(C)$$

$$Q_{DI_2} = - \left( \frac{\left( 1 - \frac{(du_D - du_{DI_2})}{(du_{DI_3} - du_{DI_2})} \right)}{\left( \frac{P_{DI_2}}{P_{DI_3}} \right) \frac{(du_D - du_{DI_2})}{(du_{DI_3} - du_{DI_2})}} \right) \cdot VM(C)$$

$$Q_{DI_3} = - \left( 1 - \frac{\left( 1 - \frac{(du_D - du_{DI_2})}{(du_{DI_3} - du_{DI_2})} \right)}{\left( \frac{P_{DI_2}}{P_{DI_3}} \right) \frac{(du_D - du_{DI_2})}{(du_{DI_3} - du_{DI_2})}} \right) \cdot VM(C)$$

### 3.5 RESULTADOS

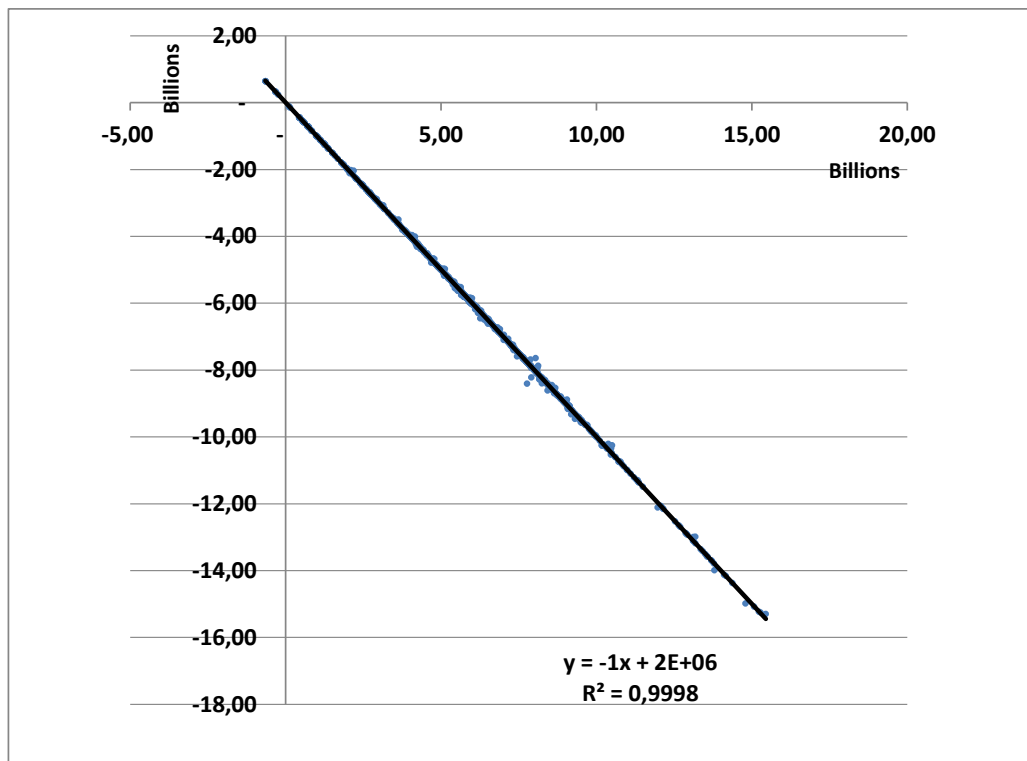
Constituídas a carteira original e as carteiras de imunização, sendo a primeira baseada nos três componentes principais, e a segunda na *duration*, verifica-se a evolução do valor de mercado das três. As regressões lineares nos valores de MaM obtidos, mostram que ambos os métodos imunizam de modo eficiente as variações de valor de mercado sofridas pela carteira original. A Carteira ACP imuniza na média

99,98% das oscilações da carteira original, enquanto a Carteira *Duration* imuniza 98,83%. Isso reforça o fato do primeiro componente principal (Nível) possui variância grande, quando comparado com os demais componentes.

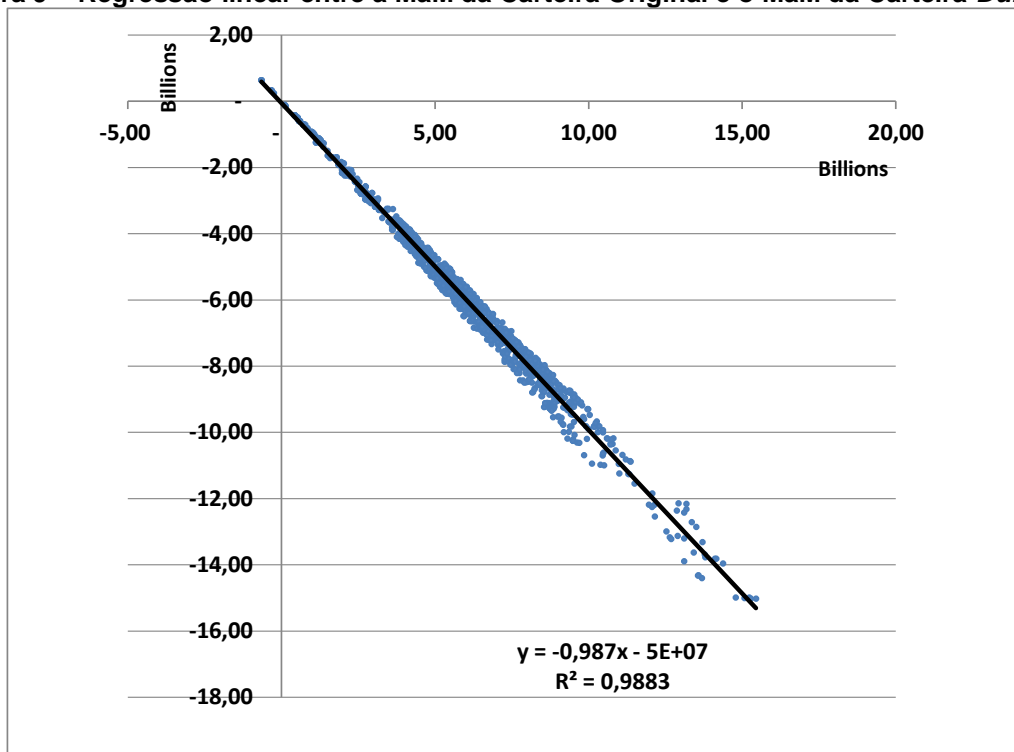
Nas figuras 8 e 9 percebe-se que o melhor ajuste é realizado pela Carteira ACP, uma vez que a dispersão média dos valores ao dia é de apenas 0,022% do valor médio da carteira original, enquanto a Carteira *Duration* apresenta dispersão média de 0,29%.

Pelo fato da Carteira ACP englobar mais de um vencimento de DI Futuro, espera-se um melhor ajuste em troca de maiores custos. De fato isso é absorvido, a Carteira ACP possui um custo 2,52 vezes maior que a Carteira *Duration*, porém o ajuste do valor de mercado à carteira original é 3,82 vezes melhor, compensando o maior custo. Apesar de ao longo do período a explicação de ambas carteiras são bastante satisfatórias, a Carteira ACP apresenta vantagens em relação à *Duration* pois o desvio padrão é significativamente menor, R\$ 39,3 milhões, versus R\$ 291,8 milhões, ou seja, o desvio padrão da Carteira *Duration* é 7,4 vezes maior.

**Figura 8 – Regressão linear entre a MaM da Carteira Original e a MaM da Carteira ACP**



Fonte: Elaborado pela autora.

**Figura 9 – Regressão linear entre a MaM da Carteira Original e o MaM da Carteira *Duration***

Fonte: Elaborado pela autora.



**Tabela 5 – Quantidade de Operações e Duration das Carteiras**

Mensal	Carteira Original		Carteira Método ACP			Carteira Método Duration		
	Qtidade	Duration (1)	Qtidade	Duration (2)	Dif. (2)-(1)	Qtidade	Duration (3)	Dif. (3)-(1)
jan/11	29	419	6	427	8	2	439	20
fev/11	57	396	12	399	4	4	412	16
mar/11	84	387	14	379	-8	5	392	6
abr/11	111	338	15	356	18	5	368	30
mai/11	133	318	28	320	2	12	329	12
jun/11	154	339	23	326	-12	9	341	2
jul/11	172	332	26	352	20	11	351	19
ago/11	189	331	32	336	5	12	348	16
set/11	208	334	32	335	1	14	336	2
out/11	225	348	30	355	7	11	363	15
nov/11	239	349	36	358	10	13	365	16
dez/11	251	354	40	379	25	15	387	33
jan/12	259	378	38	390	12	15	402	24
fev/12	267	380	28	398	18	10	409	29
mar/12	279	390	47	404	13	16	412	21
abr/12	288	390	32	418	28	12	432	41
mai/12	300	402	40	431	28	15	438	35
jun/12	312	399	39	436	37	14	439	40
jul/12	324	397	44	421	24	15	429	32
ago/12	333	396	37	420	24	14	424	28
set/12	349	385	29	430	45	11	446	62
out/12	357	380	40	420	40	17	427	47
nov/12	365	376	35	399	23	13	405	29
dez/12	369	375	45	399	23	16	402	27
jan/13	374	375	50	423	48	24	429	55
fev/13	412	364	43	401	38	16	411	47
mar/13	411	376	48	391	15	18	398	22
abr/13	419	377	41	419	43	15	424	47
mai/13	426	371	37	406	35	25	416	45
jun/13	423	374	54	383	9	36	394	21
jul/13	426	381	47	383	2	32	398	17
ago/13	425	396	48	397	1	38	411	14
set/13	430	400	42	401	1	30	411	11
out/13	431	392	53	415	24	34	424	32
nov/13	423	408	55	392	-16	40	406	-1
dez/13	420	414	49	407	-7	34	425	12
jan/14	419	425	43	413	-13	30	430	5
fev/14	424	421	48	408	-13	32	415	-6
mar/14	424	423	44	431	8	30	451	28
abr/14	427	425	40	420	-5	28	433	8
mai/14	436	428	38	429	0	26	438	9
jun/14	445	426	41	433	7	28	451	25
jul/14	443	432	46	422	-11	30	432	0
ago/14	447	427	44	427	0	30	438	10
set/14	454	414	36	430	16	26	450	37
out/14	461	417	41	416	-1	34	429	12
nov/14	464	415	40	410	-5	30	421	5
dez/14	456	431	42	418	-14	32	451	20
jan/15	455	433	41	431	-2	30	440	7
fev/15	465	436	48	452	16	32	472	36
mar/15	463	434	48	430	-4	34	452	19
abr/15	464	439	45	417	-22	30	430	-9
mai/15	471	433	41	435	2	26	447	14
jun/15	482	422	41	430	8	28	452	30
jul/15	491	406	37	417	11	24	430	24
ago/15	497	401	50	396	-5	34	410	8
set/15	499	407	48	373	-34	32	388	-19
out/15	502	408	44	372	-36	28	387	-20
nov/15	503	414	46	389	-25	34	407	-7
dez/15	499	426	50	379	-47	34	389	-37
jan/16	504	426	49	406	-20	32	424	-2
fev/16	501	434	44	395	-39	30	410	-24
mar/16	502	444	47	431	-12	30	448	5
Média	369,38	396,27	39,63	401,80	5,53	22,81	413,77	17,50
Desvio Padrao	124,11	31,42	10,02	29,03	20,53	9,93	31,05	18,93

Fonte: Elaborada pela autora.

Nota: Médias de cada mês.

## 4 CONCLUSÃO

Ambos métodos utilizados para modelagem da ETTJ são difundidos no mercado financeiro e Bancos Centrais. O estudo manteve-se na curva de juros brasileira, partindo dos dados diários dos negócios com DI Futuro na BM&F. Os resultados seguem em linha com a literatura, apresentando boa aderência à realidade, ajustando a curva de maneira eficiente. As curvas ajustadas por Nelson e Siegel, como o próprio modelo sugere, apresentam maior suavidade na modelagem das curvas, enquanto a interpolação pelo métodos de *cubic splines*, pelo princípio de não arbitragem, apresenta dinâmicas mais explosivas quando se aproxima dos vértices observados.

Partindo das curvas obtidas pelos dois métodos acima descritos, aplicou-se então a análise dos componentes principais visando identificar os fatores que mais influenciam o comportamento da estrutura a termo da curva de juros brasileira. Em ambos os casos percebe-se a proximidade dos resultados obtidos por Litterman e Sheinkman (1991) para o caso americano, isto é, os movimentos paralelos na curva de juros são dominantes. Nas curvas modeladas por Nelson e Siegel, variações no nível representam 68,4% da variação total da curva, enquanto no modelo de *cubic spline* a representação sobe para 87,7%. A utilização dos três primeiros componentes, representados na literatura por nível, inclinação e curvatura, explicam grande parte do movimento total: 98,69% quando as curvas são estimadas por Nelson e Siegel, e 97,32% por *cubic spline*. A conclusão tirada para a construção de estratégias de imunização é a mesma, independente do tipo de modelagem da curva, três componentes tem alto poder explicativo. A fim de refletir a representatividade dos componentes significativos na explicação da oscilação da curva de juros brasileira, na composição da carteira de imunização utilizando ACP, foram utilizados três vértices de contratos de DI Futuro, enquanto a carteira de *hedge* pela *duration*, apenas um, dada a simplificação dos fluxos em apenas um vencimento.

Após aplicar ambos modelos de imunização em uma carteira dinâmica ao longo de cinco anos, os resultados obtidos foram satisfatórios tanto para imunização por ACP quanto pela *duration*. A proximidade dos resultados confirma a experiência de grande poder explicativo das oscilações em nível da curva de juros brasileira, porém, conforme esperado, o método que apresentou maior efetividade foi a

Carteira ACP, cujos componentes englobam as oscilações de inclinação e curvatura, quando comparado à carteira de proteção apenas pela *duration*. O grande desafio dos gestores de carteira no Brasil para a aplicação da imunização de portfólio através do método de análise dos componentes principais acontece em função do custo do hedge, que por ser alto, tem representatividade no resultado geral do estudo realizado. Nos demais aspectos, que diz respeito à gestão de risco de mercado, as carteiras teóricas de imunização pela *duration* têm uma performance inferior que as carteiras por componentes principais. A utilização da estratégia de imunização por componentes principais é preferível mesmo com níveis maiores de custos, e se justifica pela performance superior na aderência da carteira imunizada, e no que diz respeito ao valor justo, 99,98% da oscilação da marcação a mercado da carteira foi mitigada pela oscilação de preços da Carteira ACP, enquanto a Carteira Duration mitigou 98,83%. No que tange às demais medidas estatísticas, a Carteira ACP também foi superior por representar menor volatilidade e dispersão nos resultados, apresentando um desvio padrão de 0,02%, contra os 0,39% da Carteira *Duration*.



## REFERÊNCIAS

ALEXANDER, C. **Market models: a guide to financial data analysis**. Chichester: John Wiley, 2001.

ALMEIDA, C. A note on the relation between principal components and dynamic factors in affine term structure models. **Brazilian Review of Econometrics**, Rio de Janeiro, v. 25, n. 1, p. 89-114, 2005. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/bre/article/view/2673/1624>. Acesso em: 5 nov. 2019.

BARBER, J.; COPPER, M. Immunization using principal component analysis. **Journal of Portfolio Management**, London, v. 23, n. 1, p. 99-105, 1996. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12197-010-9142-y>. Acesso em: 1 set. 2016.

BARCINSKI, A. Hedging strategies using a multifactor model for the Brazilian interest rate. In: BONOMO, M. (org.). **Finanças aplicadas ao Brasil**. Rio de Janeiro: FGV, 2002.

BIERWAG, G. Immunization, duration, and the term structure of interest rates. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge, v. 12, n. 5, p. 725-742, 1977.

BJORK, T.; CHRISTENSEN, B. **Interest rate dynamics and consistente forward rate curves**. [S.l.]: School of Economics and Management, 1999. (Management working papers).

BLACK F.; KARASINSKI, P. Bond and option pricing when short rates are lognormal, **Financial Analysts Journal**, London, n. 47, p. 52-59, 1991.

BLISS, R. Movements in the term structure of interest rates. **Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review**, Atlanta, n. 4, p. 16-33, 1997.

CALDEIRA, J.; MOURA, G.; PORTUGAL, M. Efficient yield curve estimation and forecasting in Brazil. **Economia**, [s.l.], v. 11, n. 1, p. 27-51, 2010.

CALDEIRA, J.; TORRENT, H. **Previsão de curvas de juros zero-cupom: estimação não-paramétrica de dados funcionais**. [S.l.]: Escola de Séries Temporais e Econometria, 2011.

COX, J.; INGERSOLL JR., J.; ROSS, S. A theory of the term structure of interest rates. **Econometrica**, New Haven, v. 53, n. 2, p. 385-407, 1985.

DIEBOLD, F.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 130, n. 2, p. 337-364, 2006.

DIEBOLD, F.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, n. 130, p. 337-364, 2006.

DIEBOLD, F.; RUDEBUSCH, G.; ARUOBA, S. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 131, n. 1-2, p. 309–338, 2006.

FABOZZI, F. **Mercados, análise e estratégias de bônus**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2000.

FABOZZI, F. **The handbook of fixed income securities**. New York: McGraw-Hill, 1997.

FAMA, E.; BLISS, R. The information in long-maturity forward rates. **American Economic Review**, Pittsburgh, v. 77, n. 4, p. 680–692, 1987.

FERREIRA, L. **Análise da curva de cupom cambial brasileira**: uma aplicação da análise de componentes principais com ênfase em sua utilização para imunização de carteiras. 2006. 74 f. Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia Empresarial) – Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2006.

FISHER, M.; NYCHKA, D.; ZERVOS, D. **Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines**. [S.l.], 1995. (Federal Reserve System working paper, 95).

FURCOLIN FILHO, A. **Imunização de carteiras de renda fixa utilizando a análise de componentes principais na estrutura a termo das taxas de juros brasileira**. 2010. Trabalho de conclusão (Graduação em Administração) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

GARRAN, F.; SOUSA, A.; LUPORINI, C. O uso de contratos futuros para proteção de ativo e passivo circulantes contra a flutuação na taxa de juros de curto prazo. **Revista Finanças Aplicadas**, São Paulo, p. 1-10, 17 maio 2010.

HO, T.; LEE, S. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. **Journal of Finance**, [s.l.], v. 41, n. 5, p. 1011-1029, Dec. 1986.

HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest-rate-derivative securities. **Review of Financial Studies**, Oxford, v. 3, n. 4, p. 573-592, Oct. 1990.

JOLLIFFE, I. **Principal component analysis**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

KOJÓ, E. **Sistema de stress para análise de carteiras com aplicação de análise de componentes principais**. 2003. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática em Finanças) - Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

LION, O. **Um estudo sobre a modelagem da estrutura a termo das taxas de juros e a precificação de opções sobre títulos de renda fixa**. 2002. 126 f. Tese

(Doutorado em Engenharia de Produção) – Faculdade COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns. **Journal of Fixed Income**, v. 1, n. 1, p. 54-61, Summer 1991.

LITZENBERGER, R.; ROLFO, J. An international study of tax effects on government bonds. **Journal of Finance**, [s.l.], v. 39, n. 1, p. 1-22, Mar. 1984.

MCCULLOCH, J. Measuring the term structure of interest rates. **Journal of Business**, [s.l.], v. 44, n. 1, p. 19-31, 1971.

MCCULLOCH, J. The tax-adjusted yield curve. **Journal of Finance**, [s.l.], v. 30, n. 3, p. 811-830, June 1975.

NELSON, C.; SIEGEL, A. Parsimonious modeling of yield curves. **Journal of Business**, New York, v. 60, n. 4, p. 473-489, 1987.

RIBEIRO, P. **Estrutura a termo da taxa de juros no Brasil e previsibilidade de ciclos econômicos**. 2010. 82 f. Tese (Doutorado em Economia) – Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2010.

SILVEIRA, G.; BESSADA, O. **Análise de componentes principais de dados funcionais: uma aplicação às estruturas a termo de taxas de juros**. Brasília: Banco Central do Brasil, 2003. (Working paper, 73).

VARGA, G.; VALLI, M. Movimentos da estrutura a termo da taxas de juros brasileira e imunização. **Revista de Estudos Avançados da USP**, São Paulo, jan. 2001.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of Financial Economics**, Amsterdam, v. 5, n. 2, p. 177-188, 1977.

WEISKOPF, M. **Imunização de carteiras de renda fixa**. 2003. 15 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.