

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

MODELO DE DINÂMICA VEICULAR DE 14 GRAUS DE LIBERDADE
INCORPORANDO MODELO SEMI-EMPÍRICO DE PNEUS

por

Leonardo Scaravelli

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2020

SCARAVELLI, LEONARDO
MODELO DE DINÂMICA VEICULAR DE 14 GRAUS DE
LIBERDADE INCORPORANDO MODELO SEMI-EMPÍRICO DE PNEUS /
LEONARDO SCARAVELLI. -- 2020.
23 f.
Orientador: Rogério José Marczak.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2020.

1. dinâmica veicular. 2. dinâmica vertical. 3.
dinâmica lateral. 4. modelo de pneus. I. Marczak,
Rogério José, orient. II. Título.

Leonardo Scaravelli

MODELO DE DINÂMICA VEICULAR DE 14 GRAUS DE LIBERDADE
INCORPORANDO MODELO SEMI-EMPÍRICO DE PNEUS

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Mário Roland Sobczyk Sobrinho
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Rogério José Marczak

Prof. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Herbert Martins Gomes

Porto Alegre, novembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, prof. Rogério José Marczak, pela oportunidade de aprendizado, paciência e auxílio na execução desse trabalho.

Aos meus pais, pelo amparo e apoio, que possibilitaram a concretização dos meus sonhos.

À equipe RS Racing UFRGS, pela motivação e oportunidade de me desenvolver dentro do que considero hoje uma vocação.

Por último, à Lu, por estar sempre ao meu lado nessa caminhada, tornando os momentos de maior dificuldade mais felizes e divertidos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2020

MODELO DE DINÂMICA VEICULAR DE 14 GRAUS DE LIBERDADE
INCORPORANDO MODELO SEMI-EMPÍRICO DE PNEUS

Scaravelli, Leonardo

leo_scaravelli96@hotmail.com

Resumo. *Com o objetivo de avaliar a resposta de um modelo de dinâmica veicular de 14 graus de liberdade, o presente trabalho mostra os resultados de uma simulação de manobra semelhante a um teste de step steer fazendo o uso de um modelo de pneus semi-empírico para modelar as forças de contato entre pneu e asfalto. As simulações foram conduzidas variando parâmetros representativos do carro, como rigidez das molas, constantes de amortecimento e distância entre centro de gravidade da massa suspensa e eixo de rolagem. Os resultados mostram a variação do ângulo e velocidade de rolagem para as diferentes condições analisadas, demonstrando que o modelo é adequado para calcular as variáveis de movimento dos valores de parâmetros controlados pelo piloto, como esterçamento das rodas.*

Palavras-chave: *dinâmica veicular, dinâmica vertical, dinâmica lateral, modelo de pneus*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação do modelo e eixos de coordenadas.

Figura 2 - Superfície de força lateral por ângulo de deriva e força normal, com ângulo de inclinação nulo

Figura 3 - Superfície de força longitudinal por razão de deriva e carga normal, com ângulo de inclinação nulo

Figura 4 - Fluxograma ilustrativo de interdependência das variáveis

Figura 6 - Ângulo de esterçamento das rodas ($^{\circ}$) vs tempo (s)

Figura 7 - Ângulo de rolagem. Em azul: Run 51. Em amarelo: Run 50

Figura 8 - Velocidade angular em x. Vermelho: Run 52; Roxo: Run 50

Figura 9 - Ângulo de rolagem. Rosa: Run 53. Amarelo: Run 50.

Figura 10 - Força na mola. Rosa: Run 50. Vermelho: Run 53

Figura 11 - Velocidade angular em x. Roxo: Run 50. Verde: Run 54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados experimentais para pneus Avon 14140S a 21 psi

Tabela 2 - Estatísticas referentes à regressão linear utilizada para determinar os coeficientes de Pacejka

Tabela 3 - Características gerais do veículo

Tabela 4 - Condições avaliadas nas simulações

NOMENCLATURA

δ_{pn}	Deflexão no pneu	m
δ_n	Deflexão nas molas	m
$\dot{\delta}_n$	Velocidade nos amortecedores	m/s
Z_{pn}	Sinal de entrada do terreno	m
\dot{X}_0	Velocidade no CG da massa suspensa	m/s
\ddot{X}_0	Aceleração longitudinal no CG da massa suspensa	m/s ²
\ddot{Y}_0	Aceleração lateral no CG da massa suspensa	m/s ²
Z_0	Deslocamento vertical da massa suspensa	m
\dot{Z}_0	Velocidade vertical da massa suspensa	m/s
\ddot{Z}_0	Aceleração vertical da massa suspensa	m/s ²
θ_x	Ângulo de rolagem da massa suspensa	rad
$\dot{\theta}_x$	Velocidade angular de rolagem da massa suspensa	rad/s
$\ddot{\theta}_x$	Aceleração angular de rolagem da massa suspensa	rad/s ²
θ_y	Ângulo de arfagem da massa suspensa	rad
$\dot{\theta}_y$	Velocidade angular de arfagem da massa suspensa	rad/s
$\ddot{\theta}_y$	Aceleração angular de arfagem da massa suspensa	rad/s ²
θ_z	Ângulo de guinada	rad
$\dot{\theta}_z$	Velocidade angular de guinada	rad/s
$\ddot{\theta}_z$	Aceleração angular de guinada	rad/s ²
x_n	Coordenada em x das massas não suspensas	m
y_n	Coordenada em y das massas não suspensas	m
Z_n	Deslocamento vertical das massas não suspensas	m
\dot{Z}_n	Velocidade vertical das massas não suspensas	m/s
\ddot{Z}_n	Aceleração vertical das massas não suspensas	m/s ²
$\dot{\theta}_{y,n}$	Velocidade angular em y das massas não suspensas	rad/s
$\ddot{\theta}_{y,n}$	Aceleração angular em y das massas não suspensas	rad/s ²
$F_{x,n}$	Força longitudinal dos pneus	N
$F_{y,n}$	Força lateral dos pneus	N
m_0	massa suspensa	kg
$I_{xx,0}$	Momento de inércia em x da massa suspensa	kg.m ²
$I_{yy,0}$	Momento de inércia em y da massa suspensa	kg.m ²
$I_{zz,0}$	Momento de inércia em z da massa suspensa	kg.m ²
m_n	Massas não suspensas	kg
$I_{yy,n}$	Momento de inércia em y das massas não-suspensas	kg.m ²
$k_{s,n}$	Rigidez das molas	N/m
c_n	Constante de amortecimento	N.s/m
h_s	Distância entre CG e eixo de rolagem	m
R_l	Raio carregado do pneu	m
DT	Torque motor	N.m
BT	Torque de frenagem	N.m

1. INTRODUÇÃO

Simulações de dinâmica veicular apresentam grande relevância no projeto de veículos em geral. Obter valores precisos das forças nos elementos flexíveis da suspensão e valores para ângulos de rolagem, arfagem e guinada é imprescindível tanto para o dimensionamento dos componentes estruturais, como para determinação do envelope de performance.

Inúmeros modelos foram desenvolvidos nesse âmbito, como modelos do tipo massa-mola, muito utilizados em situações mais simplificadas onde não é possível ter informações detalhadas do veículo. Já em cálculos mais detalhados, como os para estimar envelope de performance e tempo de volta, o mais comum é fazer uso de simulações de dinâmica multi-corpos (JAZAR, 2008; BLUNDELL, 2004; GILLESPIE, 1992).

Diversos trabalhos já foram, e continuam sendo, desenvolvidos aplicando modelos massa-mola para cálculo das forças e variáveis de movimento de um veículo sob determinadas condições. Modelos utilizando sete graus de liberdade para combinar efeitos de dinâmica vertical e longitudinal foram implementados levando em consideração acelerações longitudinais e ondulações do terreno como parâmetros de entrada (WEIJH e MARCZAK, 2013). Similarmente, há modelos que calculam as variáveis de movimento combinando dinâmica lateral, longitudinal e vertical para veículos com n eixos (ZETOLA e MARCZAK, 2014). Para veículos de carga, há publicações que mostram forte influência da flexibilidade estrutural na dinâmica lateral (VARGAS e MARCZAK, 2012).

Pode-se destacar também os trabalhos realizados por Pacejka (1977), por ter sido um dos primeiros a abordar esse assunto dando enfoque à modelagem de forças de interação entre pneu e pista. Mais recentemente, alguns estudos abordando essa interação mostram as diferenças na resposta obtida com diferentes modelos de pneus (ZETOLA e MARCZAK, 2017; FREY, 2009; SCHMEITZ, 2004).

O presente trabalho tem por objetivo avaliar os resultados de um modelo de dinâmica veicular de 14 graus de liberdade. Mais especificamente, faz-se o uso de um modelo semi-empírico de pneus do tipo *Magic Formula* para modelar as forças de interação pneu-asfalto e, com isso, permitir o cálculo das variáveis de movimento a partir de parâmetros controlados pelo piloto, como esterçamento das rodas.

2. FUNDAMENTAÇÃO

Há diversas abordagens utilizadas para prever a resposta dinâmica de um veículo à excitações externas. Dependendo do nível de complexidade da análise, modelos extremamente simples e de baixo custo computacional, como *quarter-car* e *half car*, são capazes de prever as forças que surgem nos elementos de suspensão de um veículo (SCHRAMM; HILLER; BARDINI, 2014). Esses modelos podem ser muito úteis para determinar constantes ideais de rigidez e amortecimento em etapas iniciais de projeto, onde parâmetros como massa, momentos de inércia e posição do centro de gravidade raramente estão disponíveis. Entretanto, em etapas mais avançadas, esses modelos não se fazem mais úteis, uma vez que passa a ser necessário obter uma resposta mais detalhada das acelerações e velocidades desenvolvidas, seja para determinar o envelope de performance ou utilizar essa resposta como parâmetro de entrada em outros cálculos.

Para suprir tal necessidade, é muito comum o uso de softwares comerciais. Esses softwares em geral utilizam simulações de dinâmica multi-corpos que permitem resolver detalhadamente o movimento de um veículo sob determinada manobra e condição de pista. Quando o uso desses softwares não é uma alternativa, é possível obter uma boa resposta do movimento de um veículo utilizando formas mais completas de modelos massa-mola.

Nas seções subsequentes, são apresentadas as equações utilizadas na implementação do modelo 14DOF, mostrando como esse foi integrado com um modelo de pneus do tipo *Magic Formula*.

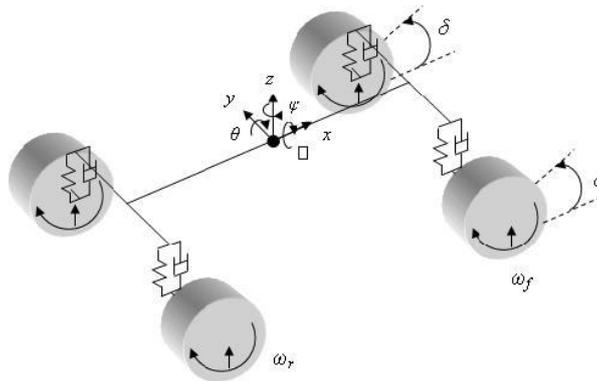
2.1. MODELO DE 14 GRAUS DE LIBERDADE

O modelo utilizado para calcular o movimento do veículo segue o equacionamento adaptado de Jazar (2008). O veículo é representado por 4 massas não-suspensas e uma suspensa. As massas não suspensas representam os conjuntos roda-pneu, juntamente com os componentes a eles diretamente conectados (manga de eixo, cubo de roda, discos e pastilhas de freio e uma fração dos elementos de suspensão). O contato entre as massas não suspensas e o terreno é feito através de uma mola, cuja rigidez equivale a rigidez vertical do pneu. A massa suspensa representa todo o resto do carro que não possui contato direto com o terreno. A massa suspensa é conectada à cada massa não-suspensa através de um conjunto mola-amortecedor.

O sistema de coordenadas adotado segue convenção semelhante a adotada em Milliken (1994): a origem do sistema é posicionada no eixo de rolagem, abaixo do centro de gravidade do veículo. O eixo longitudinal (eixo x), é orientado no mesmo sentido da velocidade do CG, o eixo lateral (eixo y) é posicionado paralelo ao chão e perpendicular ao eixo x, e o eixo Z é posicionado normal ao chão e com sentido positivo para cima.

Os graus de liberdade do sistema são definidos da seguinte forma: a massa suspensa possui liberdade para transladar e rotacionar em torno dos eixos x, y e z; as massas não suspensas transladam apenas em z e rotacionam em y. Uma representação do veículo seguindo essa metodologia está ilustrada na Figura 1.

Figura 1 - Representação do modelo e eixos de coordenadas.



Fonte: SETIAWAN, SAFARUDIN e SINGH (2009).

Para determinar as forças atuando em cada massa, calcula-se as deflexões nas molas e velocidades nos amortecedores, adaptando as equações expostas em Zetola e Marczak, 2014 . As deflexões nos pneus são dadas por:

$$\delta_{pn} = Z_{pn} - Z_n \quad (1)$$

Nas molas:

$$\delta_n = Z_0 + \theta_x * y_n - \theta_y * x_n - Z_n \quad (2)$$

E a velocidade nos amortecedores:

$$\dot{\delta}_n = \dot{Z}_0 + \dot{\theta}_x * y_n - \dot{\theta}_y * x_n - \dot{Z}_n \quad (3)$$

Com isso, aplicando o diagrama de corpo livre em cada massa do sistema, têm-se:

$$m_0\ddot{X}_0 = \sum_{n=1}^4[F_{x,n}] \quad (4)$$

$$m_0\ddot{Y}_0 = \sum_{n=1}^4[F_{y,n}] \quad (5)$$

$$m_0(\ddot{Z}_0 + g) = \sum_{n=1}^4[k_{s,n}(Z_n + \theta_y x_n - \theta_x y_n - Z_0) + c_n(\dot{Z}_n + \dot{\theta}_y x_n - \dot{\theta}_x y_n - \dot{Z}_0)] \quad (6)$$

$$I_{xx,0}\ddot{\theta}_x = \sum_{n=1}^4\{[k_{s,n}(Z_n + \theta_y x_n - \theta_x y_n - Z_0) + c_n(\dot{Z}_n + \dot{\theta}_y x_n - \dot{\theta}_x y_n - \dot{Z}_0)]y_n + F_{y,n}h_s\} \quad (7)$$

$$I_{yy,0}\ddot{\theta}_y = -\sum_{n=1}^4\{[k_{s,n}(Z_n + \theta_y x_n - \theta_x y_n - Z_0) + c_n(\dot{Z}_n + \dot{\theta}_y x_n - \dot{\theta}_x y_n - \dot{Z}_0)]y_n + F_{x,n}h_s\} \quad (8)$$

$$I_{zz,0}\ddot{\theta}_z = \sum_{n=1}^4[F_{y,n}x_n - F_{x,n}y_n] \quad (9)$$

$$m_n(\ddot{Z}_n + g) = k_p(Z_{pn} - Z_n) - k_{s,n}(Z_n + \theta_y x_n - \theta_x y_n - Z_0) - c_n(\dot{Z}_n + \dot{\theta}_y x_n - \dot{\theta}_x y_n - \dot{Z}_0) \quad (10)$$

$$I_{yy,n}\ddot{\theta}_{y,n} = DT - BT - F_{x,n}R_l \quad (11)$$

O subscrito n nas equações indica as rodas do veículo, sendo 1, 2, 3 e 4, respectivamente, as rodas dianteira esquerda, traseira esquerda, traseira direita e dianteira direita.

As Equações 4 a 9 representam o somatório de forças e momentos na massa suspensa nas direções x , y e z , nessa ordem, e as Equações 10 e 11, somatório de forças e momentos nas massas não suspensas. As equações 10 e 11 são reescritas variando-se o índice n de 1 a 4, resultando em duas equações por roda. Assume-se, nessas equações, que os eixos dianteiro e traseiro do veículo se distanciam igualmente do CG, bem como o lado direito e esquerdo. É desconsiderada qualquer inclinação na pista, assim como forças aerodinâmicas. Os eixos de rolagem e arfagem são assumidos coincidentes, paralelos ao chão e com uma distância vertical ao CG da massa suspensa, h_s , constante. No caso analisado, as constantes de amortecimento e rigidez das molas são assumidas iguais nas quatro rodas.

2.2. MODELAGEM DAS FORÇAS ENTRE PNEU E SOLO

As equações de movimento detalhadas na seção 2.1 exigem que se conheçam as forças de contato entre pneu e asfalto para determinar as velocidades e acelerações do sistema. O modelo utilizado para calcular essas forças foi o modelo de Pacejka, Magic Formula (PACEJKA, 2006). Nesse modelo, as forças laterais e longitudinais são dadas em função da razão de deriva, ou *slip ratio*, e ângulo de deriva, ou *slip angle*. Tais quantidades são definidas de acordo com as Equações 12 e 13, respectivamente.

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{|V_{cx}|} \quad (12)$$

$$\alpha = -\frac{V_{cy}}{|V_{cx}|} \quad (13)$$

Onde V_{sx} é a velocidade de deslizamento longitudinal e $V_{cx,y}$ são as velocidades do centro de contato entre pneu e solo. Segundo Milliken (1994), a razão de deriva também pode ser calculada utilizando a Equação 14.

$$\kappa = \left(\frac{\Omega * R_l}{V_n * \cos \alpha}\right) - 1 \quad (14)$$

Onde Ω é a velocidade angular do pneu, em rad/s, R_l é o raio do pneu sob carga dinâmica, ou *loaded radius*, e V_n é a magnitude da velocidade do centro da roda. Por relacionar mais diretamente a razão de deriva às variáveis utilizadas no modelo geral do veículo, essa definição foi utilizada.

No modelo de Pacejka, os ângulos e razões de deriva são inseridos como variáveis independentes no cálculo das forças e momentos. As forças longitudinal e lateral geradas a partir dessas quantidades são dadas respectivamente pelas Equações 15 e 16.

$$F_{x0} = D_x * \sin(C_x * \arctan(B_x * \kappa_x - E_x * (B_x * \kappa_x - \arctan(B_x * \kappa_x)))) + S_{Vx} \quad (15)$$

$$F_{y0} = D_y * \sin(C_y * \arctan(B_y * \alpha_y - E_y * (B_y * \alpha_y - \arctan(B_y * \alpha_y)))) + S_{Vy} \quad (16)$$

Os fatores de forma B_{xy} , C_{xy} , D_{xy} , E_{xy} , e S_{Vxy} nessas equações são utilizados para ajustar as curvas de força lateral e longitudinal a dados de pneus obtidos experimentalmente e são função da carga normal e ângulo de inclinação, ou *inclination angle*. Com o mesmo propósito de adaptar as curvas do modelo à dados experimentais, κ e α são substituídos por κ_x e α_y , definidos nas Equações 17 e 18.

$$\kappa_x = \kappa + S_{Hx} \quad (17)$$

$$\alpha_y = \alpha + S_{Hy} \quad (18)$$

Os fatores de forma são dados em função da carga normal e ângulo de inclinação de acordo com as Equações 19 a 24, para força longitudinal, e 25 a 30, para força lateral (PACEJKA, 2006).

$$C_x = p_{cx1} * \lambda_{Cx} \quad (19)$$

$$D_x = F_z * \zeta_1 * (p_{dx1} + p_{dx2} * df_z) * \lambda_{\mu x} / (1 + \lambda_{\mu V} * V_s / V_o) \quad (20)$$

$$E_x = (p_{Ex1} + p_{Ex2} * df_z + p_{Ex3} * df_z^2) * \{1 - p_{Ex4} * \text{sgn}(\kappa_x)\} * \lambda_{Ex} \quad (21)$$

$$B_x = (F_z * (p_{Kx1} + p_{Kx2} * df_z) * \exp(p_{Kx3} * df_z) * \lambda_{Kx\kappa}) / (C_x * D_x + \varepsilon_x) \quad (22)$$

$$S_{Hx} = (p_{Hx1} + p_{Hx2} * df_z) * \lambda_{Hx} \quad (23)$$

$$S_{Vx} = F_z * (p_{Vx1} + p_{Vx2} * df_z) * \left\{ \frac{|V_{cx}|}{\varepsilon_x + |V_{cx}|} \right\} * \lambda_{Vx} * \lambda'_{Vx} * \zeta_1 \quad (24)$$

$$C_y = p_{cy1} * \lambda_{Cy} \quad (25)$$

$$D_y = F_z * \zeta_2 * (p_{dy1} + p_{dy2} * df_z) * (1 - p_{dy3} * \gamma^{*2}) * \lambda_{\mu y} / (1 + \lambda_{\mu V} * V_s / V_o) \quad (26)$$

$$E_y = (p_{Ey1} + p_{Ey2} * df_z) * \{1 - (p_{Ey3} + p_{Ey4} * \gamma^*) * \text{sgn}(\alpha_y)\} * \lambda_{Ey} \quad (27)$$

$$B_y = ((p_{Ky1} * F'_{zo} * \sin[2 * \arctan \{F_z / (p_{Ky2} * F'_{zo})\}]) * (1 - p_{Ky3} * \gamma^{*2}) * \zeta_3) / (C_y * D_y + \varepsilon_y) \quad (28)$$

$$S_{Hy} = (p_{Hy1} + p_{Hy2} * df_z) * \lambda_{Hy} + p_{Hy3} * \gamma^* * \lambda_{Ky\gamma} * \zeta_0 + \zeta_4 - 1 \quad (29)$$

$$S_{Vy} = F_z * \{(p_{Vy1} + p_{Vy2} * df_z) * \lambda_{Vy} + (p_{Vy3} + p_{Vy4} * df_z) * \gamma * \lambda_{Ky\gamma}\} * \lambda'_{\mu y} * \zeta_2 \quad (30)$$

Os fatores de escala λ e ζ presentes nas Eqs. 8 a 19 são utilizados para adaptar o modelo a condições especiais de operação e, por padrão, recebem valor unitário. O termo df_z representa a força vertical normalizada, e se relaciona com a carga vertical no pneu pela Equação 31.

$$df_z = \frac{F_z - F'_{zo}}{F'_{zo}} \quad (31)$$

Nessa equação, F_z é a carga normal nas condições de operação do pneu e F'_{zo} é a carga nominal utilizada para normalização de F_z .

Os parâmetros adimensionais indicados pela letra p nas Eqs. 8 a 19 definem a relação dos fatores de forma B_{xy} , C_{xy} , D_{xy} , E_{xy} , S_{Hxy} , S_{Vxy} com a carga normal e ângulo de inclinação e, em geral, são determinados através de métodos de regressão para adaptar as superfícies de atrito aos dados experimentais.

2.3. CÁLCULO DE ÂNGULO E RAZÃO DE DERIVA

Para o uso no modelo implementado, a velocidade V_n e a relação $-V_{cy}/|V_{cx}|$ em cada pneu, presentes nas Equações 12 e 14, precisam ser determinadas em função das velocidades e acelerações no CG do veículo e do ângulo de esterçamento das rodas. Esses termos são expressos, então, pelas Equações 32 e 33.

$$V_n = \dot{X} * R_n / R \quad (32)$$

$$\alpha_n = -V_{cy,n}/|V_{cx,n}| = \delta_n - \text{atan}((x_n - R \sin(\theta_z))/(R \cos(\theta_z) - y_n)) \quad (33)$$

Nessas equações, R e R_n são o raio instantâneo de curvatura no centro de gravidade e no ponto de contato pneu-asfalto, respectivamente. O valor de R é dado pela Equação 34 e os valores de R_n , para cada pneu, é dado pelas Equações 35 a 38, no caso de curvas para esquerda, e pelas Equações 39 a 42, no caso de curvas para a direita.

$$R = \dot{X}_0^2 / \ddot{Y}_0 \quad (34)$$

$$R_1 = R^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})R \cos(\text{atan}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) - \theta_z) \quad (35)$$

$$R_2 = R^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})R \cos(\text{atan}\left(\frac{x_2}{y_2}\right) + \theta_z) \quad (36)$$

$$R_3 = R^2 + x_3^2 + y_3^2 - 2(\sqrt{x_3^2 + y_3^2})R \cos(\text{atan}\left(\frac{x_3}{y_3}\right) + \theta_z + \pi/2) \quad (37)$$

$$R_4 = R^2 + x_4^2 + y_4^2 - 2(\sqrt{x_4^2 + y_4^2})R \cos(\text{atan}\left(\frac{x_4}{y_4}\right) - \theta_z + \pi/2) \quad (38)$$

$$R_1 = R^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})R \cos(\text{atan}\left(\frac{x_1}{y_1}\right) - \theta_z + \pi/2) \quad (39)$$

$$R_2 = R^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})R \cos(\text{atan}\left(\frac{x_2}{y_2}\right) + \theta_z + \pi/2) \quad (40)$$

$$R_3 = R^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})R\cos(\operatorname{atan}\left(\frac{x_2}{y_2}\right) + \theta_z) \quad (41)$$

$$R_4 = R^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(\sqrt{x_2^2 + y_2^2})R\cos(\operatorname{atan}\left(\frac{x_2}{y_2}\right) - \theta_z) \quad (42)$$

3. METODOLOGIA

A implementação do modelo se deu em 4 etapas:

- Determinação dos coeficientes do modelo de Pacejka;
- Implementação e integração entre os modelos de pneu e 14DOF;
- Determinação das características do veículo e condições de simulação;
- Análise de resultados.

3.1. DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE PACEJKA

Os dados utilizados no presente estudo foram disponibilizados pelo fabricante de pneus Avon (AVONTYRES, 2020?) e contemplam apenas dados de testes em condição *free-rolling*, onde não há aplicação de torque de frenagem ou aceleração e, conseqüentemente, não são gerados dados para força longitudinal. A especificação do pneu utilizado para construir o modelo é 14140S sob pressão de 21psi. Os dados de carga lateral para esse pneu encontram-se na Tab 1, onde SAT é o momento auto-alinhante, em N.m e CF (*cornering force*) é a força lateral em kN. Foram omitidos os dados para *inclination angle* diferente de zero, apenas para melhor visualização.

Tab 1 - Dados experimentais para pneus Avon 14140S a 21 psi

Slip Angle	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF	SAT	CF
Normal Load	75kg		150kg		225kg		300kg	
Camber	0°		0°		0°		0°	
-9,0	-13,79	1,37	-31,60	2,58	-48,68	3,22	-66,49	4,34
-8,0	-12,90	1,30	-33,62	2,45	-50,73	3,04	-71,08	4,09
-7,0	-10,02	1,23	-32,53	2,27	-49,55	2,82	-71,90	3,79
-6,0	-8,58	1,15	-32,57	2,13	-49,20	2,60	-72,23	3,47
-5,0	-7,27	1,05	-33,11	1,94	-50,39	2,35	-76,40	3,13
-4,0	-6,46	0,93	-30,30	1,71	-48,02	2,06	-74,34	2,74
-3,0	-6,29	0,79	-29,50	1,42	-46,84	1,69	-70,77	2,20
-2,0	-2,58	0,61	-21,00	1,05	-35,60	1,22	-50,67	1,53
-1,0	2,88	0,34	-6,88	0,55	-14,58	0,62	-17,91	0,74
0,0	11,38	-0,03	16,66	-0,07	20,22	-0,11	29,81	-0,21
1,0	23,00	-0,32	39,50	-0,64	50,75	-0,81	73,07	-1,10
2,0	26,81	-0,57	49,76	-1,10	66,69	-1,35	95,61	-1,84
3,0	28,25	-0,76	54,79	-1,45	73,23	-1,78	102,79	-2,41
4,0	30,12	-0,90	55,60	-1,72	74,02	-2,11	102,18	-2,82
5,0	32,40	-1,02	55,76	-1,93	73,20	-2,37	94,82	-3,13
6,0	33,21	-1,11	54,90	-2,11	70,93	-2,59	88,50	-3,38
7,0	35,00	-1,18	54,69	-2,26	69,02	-2,78	85,86	-3,63
8,0	35,13	-1,26	53,28	-2,39	67,30	-2,97	82,04	-3,85
9,0	37,39	-1,31	53,46	-2,52	66,20	-3,14	77,88	-4,03

Fonte: Adaptado de Avontyres (2020?)

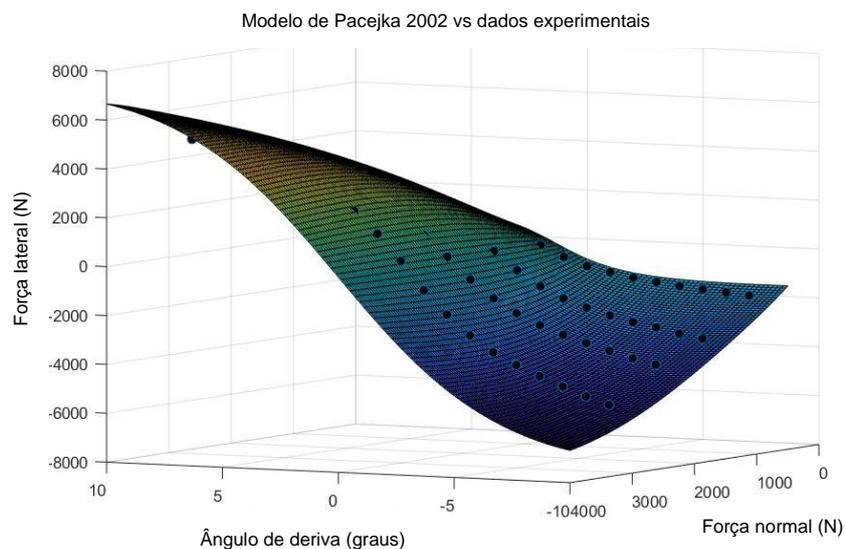
Para obter os coeficientes de Pacejka adequados a esse pneu, foi utilizada a ferramenta de regressão não-linear do Matlab. Os valores iniciais indicados para os coeficientes e os valores após a regressão são mostrados na Tab 2, bem como o p-valor associado.

Tab 2 - Estatísticas referentes à regressão linear utilizada para determinar os coeficientes de Pacejka

Estimated Coefficients:					
Coeficiente	Valor Inicial	Estimativa	Erro Padrão	Estatística-t	P-valor
pcy1	0.9	0.2225	0.000636	349.93	0
pdy1	2.988	15.762	0.008966	1757.9	0
pdy2	-4.30E-04	-0.00055	3.23E-05	-17.106	2.77E-65
pdy3	0.002	0.002709	4.36E-05	62.088	0
pey1	0	1.1014	0.003459	318.45	0
pey2	0	0.000147	2.81E-06	52.266	0
pey3	0	-0.00435	0.000961	-4.5271	6.00E-06
pey4	0	0.000287	0.000406	0.70847	0.47866
pky1	-25894	-1220.7	1.5961	-764.85	0
pky2	-21044	-2472	0.45401	-5444.9	0
pky3	0.0264	0.00572	0.000103	55.588	0
phy1	0	0.23259	0.007824	29.728	2.30E-191
phy2	0	-0.00016	5.19E-06	-31.162	9.31E-210
phy3	0	-0.13076	0.002012	-64.997	0
pvy1	0	-0.01522	0.004158	-3.6602	0.000252
pvy2	0	2.67E-05	2.50E-06	10.691	1.26E-26
pvy3	0	0.067287	0.00153	43.968	0
pvy4	0	-3.42E-05	8.41E-07	-40.707	0

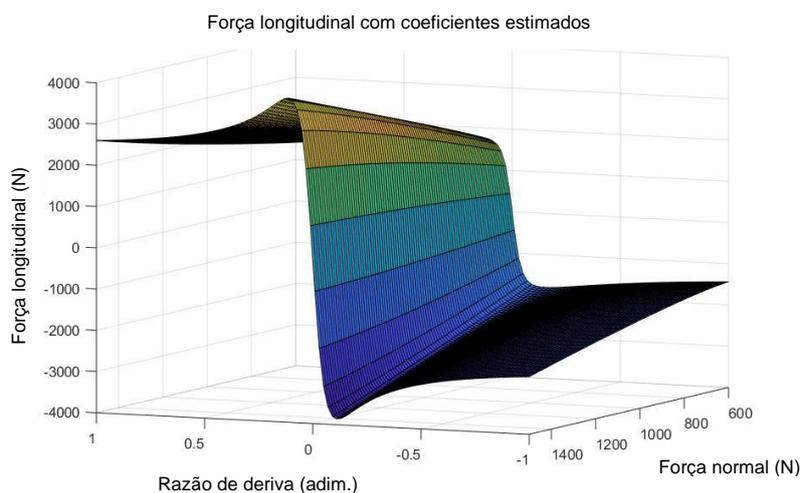
O coeficiente de determinação R^2 (*R-Squared*) encontrado para essa regressão é de 0.998, indicando que o modelo se adapta de forma satisfatória aos dados experimentais. Na Figura 2, está ilustrada a superfície de força lateral em função de ângulo de deriva e carga normal, para ângulo de inclinação nulo. Os dados experimentais estão representados pelos pontos pretos.

Figura 2 - Superfície de força lateral por ângulo de deriva e força normal, com ângulo de inclinação nulo



Devido a indisponibilidade de dados para força longitudinal, não é possível calibrar o modelo para fornecer uma resposta adequada em situações de aceleração e frenagem. Nesse caso, foram assumidos valores hipotéticos para os coeficientes. A superfície gerada para força longitudinal em função de razão de deriva e carga normal para ângulo de inclinação igual a zero está ilustrada na Figura 3.

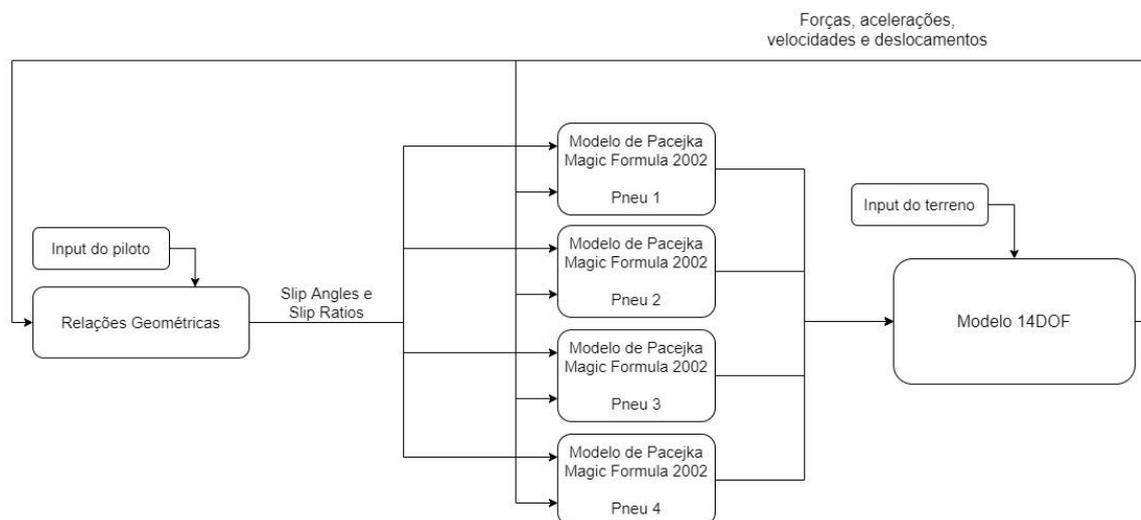
Figura 3 – Superfície de força longitudinal por razão de deriva e carga normal, com ângulo de inclinação nulo



3.2. IMPLEMENTAÇÃO E INTEGRAÇÃO ENTRE MODELO DE PNEU E MODELO DINÂMICO

O sistema composto pelas Equações 4 a 11 requer que as forças de contato entre pneu e pista sejam conhecidas. O modelo de pneu descrito na seção 2.2. é capaz de calcular essas forças uma vez conhecidos os ângulos e razões de deriva, ângulos de inclinação e cargas normais em cada roda. Entretanto, esses parâmetros de entrada do modelo de pneu dependem de variáveis de saída do modelo 14DOF. Assim, faz-se necessário um processo iterativo. As relações entre as variáveis dos modelos utilizados, bem como a sequência para a solução do conjunto de equações podem ser melhor visualizados no fluxograma da Figura 4.

Figura 4 - Fluxograma ilustrativo de interdependência das variáveis



A solução empregada para contornar a necessidade do processo iterativo foi utilizar o software Simulink, em conjunto com Matlab, e traduzir o sistema de equações diferenciais para um diagrama de blocos. O diagrama geral obtido pode ser visualizado na figura A1, contida no Apêndice.

3.3. DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO VEÍCULO E CONDIÇÕES DE SIMULAÇÃO

3.3.1. CARACTERÍSTICAS DO VEÍCULO

Para realizar as simulações, é necessário definir as propriedades de inércia do veículo a ser analisado, bem como as constantes das molas e amortecedores e dimensões principais do carro. Como os dados usados no ajuste do modelo de Pacejka são referentes a um pneu de fórmula SAE, os parâmetros mencionados serão definidos de forma a representar um veículo típico dessa categoria.

Na Tab 3 estão dispostos os valores utilizados nas simulações, à exceção dos valores de rigidez e constante de amortecimento, que tiveram seus valores alterados nas diferentes simulações realizadas e, portanto, são apresentados posteriormente.

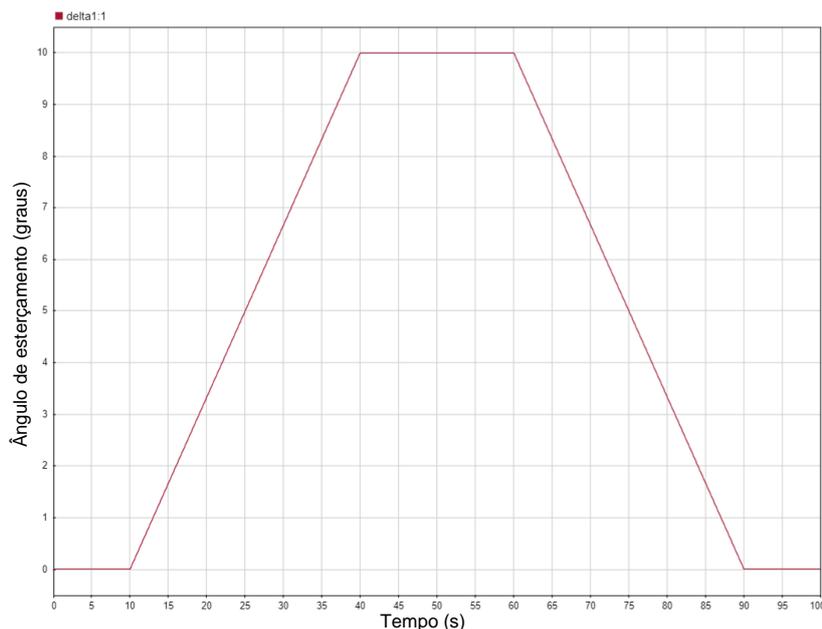
Tab 3 - Características gerais do veículo

Descrição	Símbolo	Unidade	Valor
Entre-eixos	l	m	1.5
Bitola	t	m	1.2
Rigidez vertical do pneu	kt	N/m	202086
<i>Loaded Radius</i>	Rl	m	0.25
Massa suspensa	m0	kg	240
Momento de Inércia em x (massa suspensa)	Ixx0	kg*m ²	48.8
Momento de Inércia em y (massa suspensa)	Iyy0	kg*m ²	65
Momento de Inércia em z (massa suspensa)	Izz0	kg*m ²	73.8
Massa não suspensa	mn	kg	15
Momento de Inércia em y (massa não suspensa)	Iyyn	kg*m ²	1.4

3.3.2 CONDIÇÕES DE SIMULAÇÃO

Como os dados de pneus disponíveis são referentes somente à força lateral, foi escolhida uma condição para simulação onde os efeitos de dinâmica lateral são predominantes. O teste inicia com o veículo andando em linha reta a uma velocidade constante. Em um determinado momento, as rodas são esterçadas em 15° para um lado, mantidas assim por um período de tempo e, na sequência, retornadas a posição original. O sinal de entrada para o esterçamento nas rodas está ilustrado na Figura 5, onde a abscissa é o tempo em segundos e a ordenada é o ângulo de esterçamento em graus.

Figura 5 - Ângulo de esterçamento das rodas (°) vs tempo (s)



Para avaliar a consistência do modelo, a simulação foi executada alterando valores para o coeficiente de amortecimento, rigidez das molas e distância entre CG e eixo de rolagem. O objetivo é avaliar a influência desses parâmetros no movimento de rolagem do veículo.

A Tab 4 reúne as informações das condições de cada simulação.

Tab 4 - Condições avaliadas nas simulações

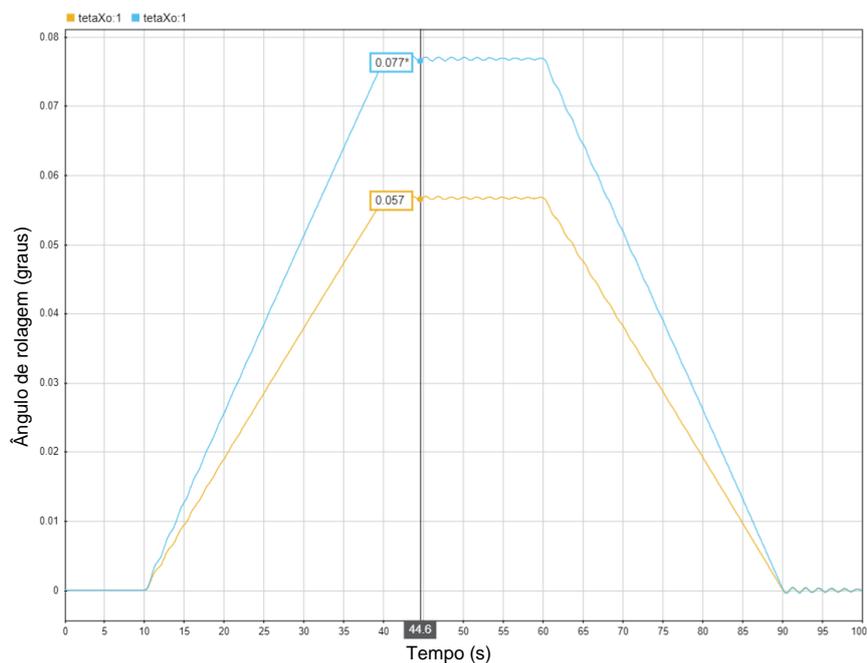
Parâmetros	Simulação				
	Run 50	Run 51	Run 52	Run 53	Run 54
Rigidez das molas (N/m)	150000	75000	150000	150000	150000
Constante de amortecimento (N.s/m)	10000	10000	5000	10000	10000
Distância CG - roll center (m)	0.2	0.2	0.2	0.5	0.2
Presença de oscilações no terreno	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM

Todas as comparações realizadas na análise de resultados foram feitas tomando por base o resultado da simulação “RUN 50”.

4. RESULTADOS

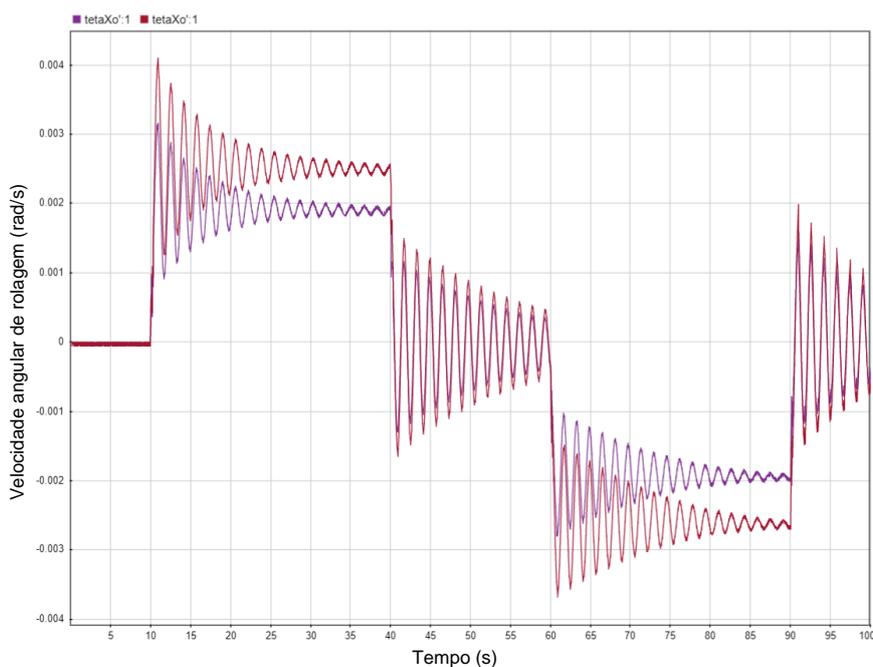
A primeira comparação feita diz respeito a mudança na rigidez das molas. A Figura 6 mostra que para uma redução de 50% na rigidez, o ângulo de rolagem atingido aumenta de 0,057° para 0,077°.

Figura 6 - Ângulo de rolagem. Em azul: Run 51. Em amarelo: Run 50



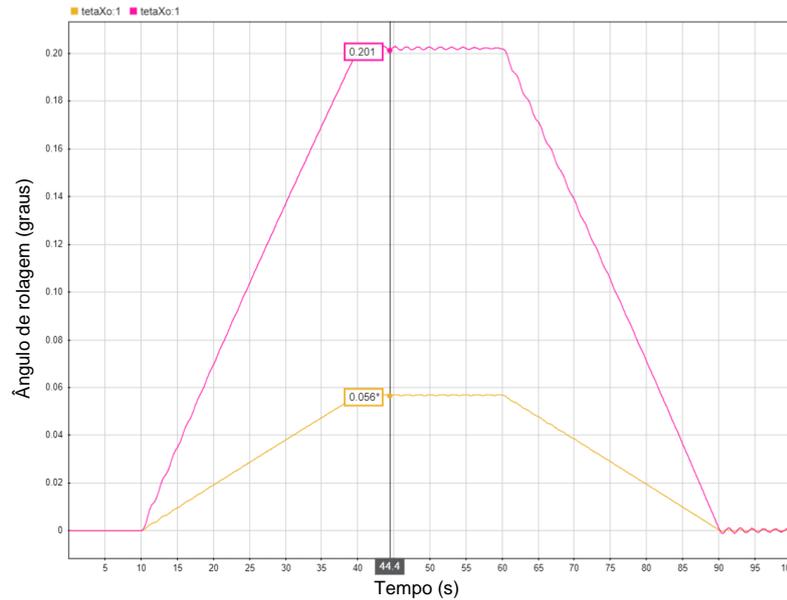
Em ambas as situações, o valor de aceleração lateral atingido foi o mesmo: 0,23g. Alterações no valor das constantes de amortecimento não causaram mudança no ângulo de rolagem. Entretanto, as velocidades de rotação em torno do eixo de rolagem se mostram significativamente maiores quando o valor da constante é reduzido. Essa diferença pode ser constatada na Figura 7.

Figura 7 - Velocidade angular em x. Vermelho: Run 52; Roxo: Run 50



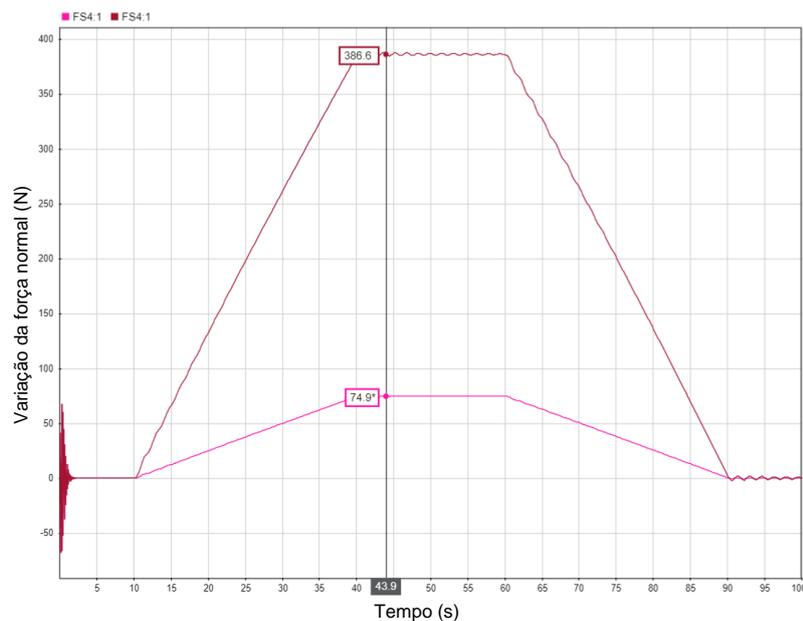
A influência da posição do *roll axis* também pode ser avaliada nos resultados das simulações. Conforme mostra a Figura 8, o ângulo de rolagem no estado permanente da curva aumentou de $0,056^\circ$ para $0,201^\circ$.

Figura 8 - Ângulo de rolagem. Rosa: Run 53. Amarelo: Run 50.



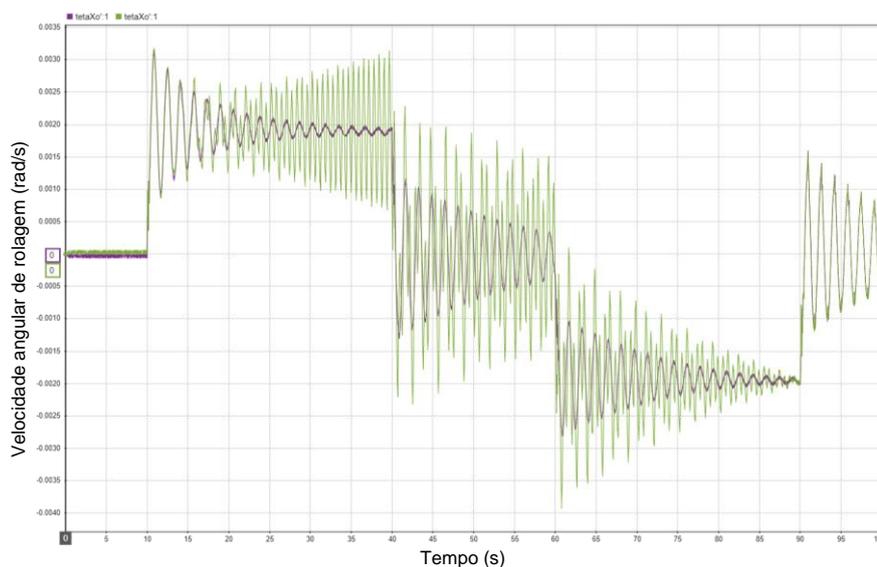
Tal resultado condiz com o esperado, uma vez que um incremento nessa distância aumenta a componente elástica de transferência de carga e reduz a componente geométrica, carregando mais as molas e menos os elementos rígidos da suspensão. Isso se confirma ao avaliar a força na mola da roda dianteira externa a curva. A Figura 9 mostra que a variação na força da mola aumentou de 75N para 385N com a nova distância *CG – roll axis*.

Figura 9 - Força na mola. Rosa: Run 50. Vermelho: Run 53



Conforme o esperado, as oscilações do terreno não produzem diferença significativa no ângulo de rolagem após a aceleração lateral ter se desenvolvido. O impacto do terreno se dá na velocidade que, conforme mostra a Figura 10, possui uma amplitude maior de oscilação para o caso em que as imperfeições do terreno são inseridas.

Figura 10 - Velocidade angular em x. Roxo: Run 50. Verde: Run 54



5. CONCLUSÃO

Muito embora não tenha sido possível realizar simulações combinando efeitos de dinâmica lateral, longitudinal e vertical simultaneamente, devido as restrições impostas pela indisponibilidade de dados experimentais de pneus, as simulações combinando efeitos de dinâmica lateral e vertical mostraram-se coerentes na comparação dos diferentes casos analisados, mostrando-se capaz de reproduzir efeitos condizentes com o esperado pela teoria de vibrações e dinâmica veicular.

Para fins de uso em projetos de veículos, o modelo implementado pode ser utilizado para determinar limites de aceleração lateral e produzir diagramas de momento de guinada, apenas cruzando os dados de momento resultante em z com os dados de aceleração lateral obtidos na manobra. Isso possibilita ao projetista obter uma resposta rápida da influência de cada parâmetro sobre o equilíbrio e controle do veículo.

Para aumentar a utilidade do modelo, deve-se em primeiro lugar alimentá-lo com dados que permitam a calibração dos pneus para forças longitudinais, tornando assim possível utilizá-lo também na etapa de dimensionamento do sistema de freios e trem de potência. Outra melhoria que pode ser aplicada é a remoção das hipóteses feitas na dedução das equações. Considerar que o CG se posiciona na metade do entre-eixos e que as molas possuem a mesma rigidez simplifica a análise, mas induz os resultados a sempre apontarem para um veículo neutro, ou seja, nem sub-esterçante, nem sobre-esterçante. Ainda, a custo de um aumento significativo na complexidade, é possível também integrar o modelo com resultados de simulações aerodinâmicas e prever a influência de variáveis como ângulo de rolagem no *downforce* produzido e vice-versa.

Por fim, o presente trabalho proporcionou a oportunidade de conhecer e implementar as equações de movimento de um sistema dinâmico mais complexo que o usualmente encontrado em disciplinas elementares de graduação.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AVONTYRES. **Technical Data Resources**. Disponível em: <<https://www.avontyres.com/en-gb/tyre-care/motorsport-technical-data/technical-data-resources/>> Acesso em: 01 Ago. 2020
- BLUNDELL, M. **The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics Second Edition**. [S. l.: s. n.]. *E-book*.
- FREY, N. Development of a Rigid Ring Tire Model and Comparasion Among Various Tire Models for Ride Comfrot Simulations. [S. l.], 2009.
- GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. [S. l.: s. n.]. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.4271/r-114>
- JAZAR, R. N. **Vehicle dynamics: Theory and applications**. [S. l.: s. n.]. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74244-1>
- PACEJKA, H. B. VEHICLE SYSTEM DYNAMICS. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], 1977.
- PACEJKA, H. B. **Tire and Vehicle Dynamics**. [S. l.: s. n.]. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-6918-4.X5000-X>
- SCHMEITZ, A. J. C. **A Semi-Empirical Three-Dimensional Model of the Pneumatic Tyre Rolling over Arbitrarily Uneven Road Surfaces**. [S. l.: s. n.]
- SCHRAMM, D.; HILLER, M.; BARDINI, R. **Vehicle dynamics: Modeling and simulation**. [S. l.: s. n.]. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-36045-2>
- SETIAWAN, J. D.; SAFARUDIN, M.; SINGH, A. Modeling, simulation and validation of 14 DOF full vehicle model. In: 2009, **Anais [...]**. [S. l.: s. n.] Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICICI-BME.2009.5417285>
- VARGAS, V. A. de.; MARCZAK, J. Efeitos da Flexibilidade Estrutural em Simulações de Dinâmica Lateral de Veículo de Transporte de Carga. [S. l.], 2012.
- WEIJH, A.; MARCZAK, J. Modelagem de veículos de carga com dinâmica vertical e longitudinal em ambiente multicorpos e desenvolvimento de ferramenta gráfica para manipulação de modelos Lista de símbolos. [S. l.], p. 1–14, 2013.
- WILLIAM F.MILLIKEN; DOUGLAS L. MILLIKEN. **Race car vehicle dynamics**. [s. l.], 1994.
- ZETOLA, F. B.; MARCZAK, J. **Modelo de veiculo multicorpos com dinâmica lateral**. [S. l.: s. n.]
- ZETOLA, F. B.; MARCZAK, J. Comparative Analysis of the Dynamic Response of an Alternative Tire Model. [S. l.], n. December, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2017-0085>

APÊNDICE**Figura A1 – Diagrama de blocos utilizado na implementação do modelo no ambiente Simulink**