

SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS: TEORIA E ALGORITMOS

PORTFOLIO SELECTION: THEORY AND ALGORITHMS

GUILHERME KIRCH

Doutor em Administração pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: guilhermekirch@gmail.com

Endereço: Rua Washington Luiz, 855 - Centro Histórico de Porto Alegre, Porto Alegre - RS, 90010-460

Resumo: Este estudo tem como objetivo apresentar o modelo de seleção de ativos para composição de carteiras de Markowitz, sem e com restrições de venda a descoberto, e propor abordagens para a solução do problema com restrições de venda a descoberto, visto que nesse caso não é possível obter uma solução analítica. Além do uso da programação linear para solução do problema quadrático do investidor, amplamente discutida na literatura, é proposto neste estudo o uso da abordagem da função de penalização, um método numérico de otimização muito utilizado na solução de problemas de minimização/maximização restritos. Com a finalidade de servir de referência para estudos iniciais sobre o tema, o presente estudo também implementa e demonstra a utilização dos dois algoritmos de seleção de portfólios (programação linear e função de penalização) utilizando o software Matlab® e uma amostra de ações do mercado brasileiro no período de janeiro/2004 a maio/2009. Os códigos (*scripts*) que implementam os algoritmos no software Matlab® encontram-se nos apêndices e podem ser usados livremente.

Palavras-chave: Seleção de Portfólio, Restrição de Venda a Descoberto, Solução Numérica, Programação Linear e Quadrática, Função de Penalização.

Abstract: *The objective of this study is to present the portfolio selection model of Markowitz, with and without short selling restrictions, and to propose approaches for solving the problem with short selling restrictions, since in this case it is not possible to obtain an analytical solution. In addition to the use of linear programming to solve the quadratic problem of the investor, widely discussed in the literature, we propose the use of the penalization function approach, a numerical optimization method widely used in the solution of restricted minimization / maximization problems. In order to serve as a reference for initial studies on the subject, the present study also implements and demonstrates the use of the two portfolio selection algorithms (linear programming and penalization function) using Matlab® software and a sample of stocks from the Brazilian market in the period from January 2004 to May 2009. The codes (scripts) that implement the algorithms in the Matlab® software are found in the appendices and can be used freely.*

Keywords: *Portfolio Selection, Short Selling Restrictions, Numerical Solutions, Linear and Quadratic Programming, Penalization Function.*

1 INTRODUÇÃO

A moderna teoria das carteiras (ou portfólios) teve sua origem com o artigo seminal de Markowitz (1952). Nesse estudo, Markowitz preocupou-se em mostrar que qualquer regra de comportamento que não implicasse na superioridade da diversificação deveria ser rejeitada como hipótese e como máxima.

Segundo Markowitz (1952), uma dessas regras acerca da seleção de portfólios era a de que o investidor deveria maximizar o valor descontado dos retornos esperados futuros. Essa regra falhava em implicar na diversificação do investimento, não importando como os retornos esperados eram formados, se a taxa de desconto era a mesma ou diferente para diferentes ativos, etc. Para ver por que isso acontecia, suponha, por exemplo, que dois ativos tenham o mesmo retorno esperado descontado. Sob a referida regra, qualquer um desses ativos (ou qualquer combinação deles) mostrava-se tão bom quanto o outro, independente de sua variabilidade.

Markowitz (1952, pg. 82) então propôs e demonstrou a utilidade da seguinte regra, denominada de regra do retorno esperado-variância dos retornos ou simplesmente regra de média-variância (*E-V rule*): os investidores devem escolher um portfólio com mínima variância para dado nível de retorno esperado ou máximo retorno esperado para dado nível de variância. Esta regra, segundo o referido autor, implicava na

diversificação e na maximização do retorno esperado descontado. Markowitz (1952) não derivou analiticamente a fronteira eficiente de média-variância, isto é, o conjunto de portfólios selecionáveis, mas ilustrou geometricamente a natureza desta superfície eficiente para o caso de três ativos. Merton (1972) encarregou-se de derivar analiticamente e demonstrar as características da fronteira eficiente para o caso geral de N ativos.

A partir do estudo de Markowitz (1952), diversos estudos objetivaram simplificar o processo de seleção de portfólios e/ou desenvolver algoritmos que resolvessem o problema quadrático associado. Entre estes estudos, que contribuíram para o estabelecimento da moderna teoria das carteiras, destacam-se Markowitz (1959), Sharpe (1963, 1967, 1971) e Stone (1973). Outros estudos objetivaram modificar a regra de seleção dos portfólios eficientes (fronteira eficiente) proposta por Markowitz (1952), usando os conceitos de dominância estocástica, como os estudos de Levy (1973), Kroll e Levy (1982), Levy e Levy (1982) e, mais recentemente, Ruszczynski e Vanderbei (2003).

Dada à importância do tema, o presente estudo pretende apresentar formalmente, com base na literatura, a derivação da fronteira eficiente de média-variância de Markowitz (1952), e, a partir disso, apresentar algoritmos para seleção de portfólios eficientes de média-variância. Além de apresentar a abordagem da programação linear para solução do programa quadrático do investidor, amplamente discutida na literatura, propõe-se neste estudo o uso da abordagem da função de penalização, um método numérico de otimização muito utilizado na solução de problemas de minimização/maximização restritos.

Com a finalidade de servir de referência para estudos iniciais sobre o tema seleção de portfólios, o presente estudo implementa e demonstra a utilização dos algoritmos de seleção de portfólios discutidos no texto utilizando o software Matlab® e uma amostra de ações do mercado brasileiro no período janeiro/2004 a maio/2009.

Para atender aos objetivos propostos, o restante do estudo está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 apresenta-se formalmente o problema de seleção de portfólio de um investidor que segue a regra média-variância e os algoritmos de seleção baseados na programação linear e na função de penalização; no capítulo 3 implementa-se e demonstra-se a utilização dos referidos algoritmos; e no capítulo 4 apresentam-se algumas considerações finais.

2 SELEÇÃO DE PORTFÓLIO

Neste capítulo apresenta-se, formalmente, o processo de seleção de portfólios eficientes de média-variância, sem e com restrições de venda a descoberto, e, no primeiro caso, a derivação formal da fronteira eficiente. Também são apresentados os algoritmos para seleção de portfólios sob a abordagem da programação linear e sob a abordagem da função de penalização, esta última constituindo-se de uma contribuição à literatura pertinente.

2.1 SELEÇÃO DE PORTFÓLIO SEM RESTRIÇÕES DE VENDA A DESCOBERTO

Neste tópico será apresentado, com base em Ingersoll (1987)¹, o problema de seleção de portfólio de um investidor não sujeito a restrições de venda à descoberto, isto é, um investidor que está apto a vender qualquer ativo no presente para financiar parte de seu portfólio. O problema do investidor, nesse caso, é selecionar, em um universo de N ativos, o portfólio de mínima variância com retorno esperado igual a μ e que satisfaça a condição de que a soma dos pesos dos ativos no portfólio seja igual a 1, isto é:

$$\underset{w}{\text{Min}} \frac{1}{2} w^T S w. \quad (2.1)$$

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{1}_N^T w = \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (2.2)$$

$$r^T w = \sum_{i=1}^N r_i \times w_i = \mu, \quad (2.3)$$

onde:

$w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_N]^T$ é o vetor ($N \times 1$) de pesos do portfólio, cujo elemento w_i representa o percentual da riqueza alocada no i -ésimo ativo, $i = 1, 2, \dots, N$;

¹ Ver também Merton (1972).

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1i} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2i} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_{ii} & \cdots & \sigma_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{Ni} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \text{ é a matriz de variância-covariância } (N \times N) \text{ dos retornos dos}$$

N ativos, cujo elemento σ_{ij} representa a variância dos retornos do i -ésimo ativo quando $i = j$ ou a covariância entre os retornos do i -ésimo e j -ésimo ativos quando $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Observe que S é simétrica e assume-se que seja positiva definida.

$\mathbf{1}_N = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T$ é o vetor ($N \times 1$) unitário;

$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_i \ \cdots \ r_N]^T$ é o vetor ($N \times 1$) de retornos esperados, cujo elemento r_i representa o retorno esperado do i -ésimo ativo, $i = 1, 2, \dots, N$.

$\mathbf{w}^T S \mathbf{w}$ é a variância do portfólio; e

$\mathbf{r}^T \mathbf{w}$ é o retorno esperado do portfólio.

Montando o Lagrangeano:

$$L \equiv \frac{1}{2} \mathbf{w}^T S \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{1}_N^T \mathbf{w} - 1) - \gamma (\mathbf{r}^T \mathbf{w} - \mu). \quad (2.4)$$

As condições de primeira ordem são²:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \frac{1}{2} (S + S^T) \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}_N - \gamma \mathbf{r} = S \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}_N - \gamma \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{1}_N^T \mathbf{w} = 0 \rightarrow \mathbf{1}_N^T \mathbf{w} = 1, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \mu - \mathbf{r}^T \mathbf{w} = 0 \rightarrow \mathbf{r}^T \mathbf{w} = \mu. \quad (2.7)$$

Multiplicando (2.5) pela inversa de S e rearranjando obtém-se a expressão para o vetor de pesos ótimos do portfólio:

$$\mathbf{w}^* = \lambda S^{-1} \mathbf{1}_N + \gamma S^{-1} \mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Assim, o percentual da riqueza que deve ser alocado no i -ésimo ativo de forma a resolver o problema do investidor é dado por:

$$w_i^* = \lambda \sum_{j=1}^N S_{ij}^{-1} + \gamma \sum_{j=1}^N S_{ij}^{-1} \times r_j.$$

Multiplicando (2.8) por $\mathbf{1}_N^T$ e usando (2.6) obtém-se:

$$\mathbf{1}_N^T \mathbf{w}^* = \lambda \mathbf{1}_N^T S^{-1} \mathbf{1}_N + \gamma \mathbf{1}_N^T S^{-1} \mathbf{r} = 1. \quad (2.9)$$

Multiplicando (2.8) por \mathbf{r}^T e usando (2.7) obtém-se:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{w}^* = \lambda \mathbf{r}^T S^{-1} \mathbf{1}_N + \gamma \mathbf{r}^T S^{-1} \mathbf{r} = \mu. \quad (2.10)$$

Fazendo $A \equiv \mathbf{1}_N^T S^{-1} \mathbf{1}_N > 0$, $B \equiv \mathbf{1}_N^T S^{-1} \mathbf{r}$ e $C \equiv \mathbf{r}^T S^{-1} \mathbf{r} > 0$ e substituindo em (2.9-2.10)³, obtém-se:

$$\lambda A + \gamma B = 1 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Ao resolver o sistema de duas equações (2.11) encontra-se o valor dos multiplicadores de Lagrange:

² Note que como S é simétrica, tem-se que: $S = S^T$ e $\frac{1}{2}(S + S^T) = S$.

³ $A > 0$ e $C > 0$ pois S e, portanto, S^{-1} são positivas definidas. Note que uma matriz Σ é positiva definida se e somente se $\mathbf{z}^T \Sigma \mathbf{z} > 0 \ \forall \ \mathbf{z} \in \mathfrak{R}^N$.

$$\lambda = \frac{C - \mu B}{AC - B^2} = \frac{C - \mu B}{\Delta}, \quad (2.12)$$

$$\gamma = \frac{\mu A - B}{AC - B^2} = \frac{\mu A - B}{\Delta}, \quad (2.13)$$

onde, segundo Ingersoll (1987, p. 85), $\Delta \equiv AC - B^2 > 0$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

De acordo com Ingersoll (1987), a partir das equações (2.6), (2.7), (2.8), (2.12) e (2.13), pode-se encontrar a equação do conjunto de mínima variância:

$$\sigma^2 = w^T S w = w^T S (\lambda S^{-1} \mathbf{1}_N + \gamma S^{-1} r) = \lambda w^T \mathbf{1}_N + \gamma w^T r = \lambda + \gamma \mu = \frac{\mu^2 A - 2\mu B + C}{\Delta}, \quad (2.14)$$

que é a equação de uma parábola no espaço (μ, σ^2) . No espaço (σ, μ) a curva é uma hipérbole, como ilustra a figura 1. O portfólio de mínima variância global, isto é, o portfólio com a menor variância dentro do conjunto de mínima variância, pode ser encontrado minimizando (2.14) com relação ao retorno esperado do portfólio (μ):

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \mu} = \frac{2\mu A - 2B}{\Delta} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{B}{A}, \quad (2.15)$$

ou seja, o portfólio de mínima variância têm retorno esperado (μ_g) igual a B/A e, por (2.14), variância igual a:

$$\sigma_g^2 = \frac{(B/A)^2 A - 2(B/A)B + C}{\Delta} = \frac{C - (B^2/A)}{\Delta} = \frac{1}{A} \frac{AC - B^2}{\Delta} = \frac{1}{A}. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.15) em (2.12) e (2.13) obtém-se:

$$\lambda = \frac{C - (B^2/A)}{\Delta} = \frac{1}{A} = \sigma_g^2,$$

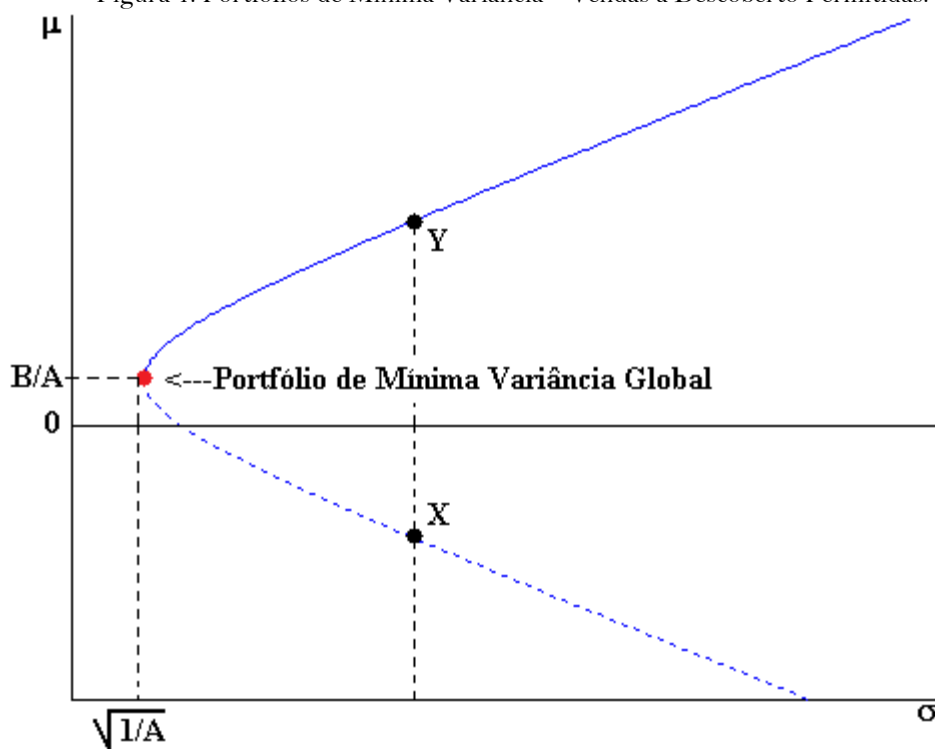
$$\gamma = \frac{B - B}{\Delta} = 0,$$

logo o portfólio de mínima variância global é dado pelo seguinte vetor:

$$w_g = \frac{S^{-1} \mathbf{1}_N}{A} = \frac{S^{-1} \mathbf{1}_N}{\mathbf{1}_N^T S^{-1} \mathbf{1}_N}. \quad (2.17)$$

A figura 1, abaixo, ilustra o conjunto de portfólios de mínima variância, bem como a localização do portfólio de mínima variância global. Note que nem todos os portfólios de mínima variância são eficientes, pois nem todos os portfólios sob a hipérbole apresentam maior retorno esperado para dado nível de desvio-padrão. Observe os portfólios de mínima variância X e Y: ambos possuem o mesmo desvio-padrão, mas o portfólio Y possui maior retorno esperado e, dessa forma, domina o portfólio X. Para cada portfólio localizado na parte inferior da hipérbole (curva tracejada) haverá um portfólio dominante na parte superior (curva contínua), isto é, um portfólio com a mesma variância (desvio-padrão), mas com retorno esperado maior. O conjunto dos portfólios de mínima variância localizados na parte superior da hipérbole (cujos retornos esperados são maiores ou iguais a $\mu_g = B/A$) é denominado conjunto dos portfólios eficientes de média variância.

Figura 1: Portfólios de Mínima Variância – Vendas à Descoberto Permitidas.



Fonte: Adaptado de Ingersoll (1987, p. 85).

De acordo com Ingersoll (1987), por (2.8) pode-se ver que todos os portfólios de mínima variância são combinações de somente dois quaisquer desses portfólios. Como o portfólio de mínima variância global corresponde ao primeiro termo em (2.8), define-se este como o primeiro portfólio. Por simplicidade, assumindo $B \neq 0$, define-se o segundo portfólio da seguinte forma:

$$w_d = \frac{S^{-1}r}{B} = \frac{S^{-1}r}{\mathbf{1}_N^T S^{-1}r}. \quad (2.18)$$

Para fins de localização do portfólio w_d , seu retorno esperado e variância são dados por:

$$\mu_d = r^T w_d = \frac{r^T S^{-1}r}{B} = \frac{C}{B},$$

$$\sigma_d^2 = w_d^T S w_d = \frac{r^T S^{-1}r}{B^2} = \frac{C}{B^2}.$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.8) obtém-se:

$$w = (\lambda A)w_g + (\gamma B)w_d. \quad (2.19)$$

Assim, como sugere (2.19), qualquer portfólio de mínima variância pode ser obtido a partir da combinação linear dos portfólios w_g e w_d . Note que (λA) e (γB) são, respectivamente, os pesos atribuídos aos portfólios w_g e w_d e, portanto, sua soma deve ser igual a 1, o que pode ser verificado em (2.11).

Observe também que os multiplicadores de Lagrange λ e γ e, conseqüentemente, os pesos atribuídos aos portfólios w_g e w_d são funções do retorno esperado do portfólio (μ). Assim, à medida que o investidor altera o parâmetro μ , os pesos atribuídos aos portfólios w_g e w_d mudam de forma a se obter um portfólio de mínima variância com retorno esperado igual a μ . Note que⁴:

⁴ Supondo $B > 0$. Lembre também que A , B , C e A são constantes definidas anteriormente.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = -\frac{B}{\Delta} < 0,$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \mu} = \frac{A}{\Delta} > 0,$$

ou seja, a medida que o investidor aumenta o valor do parâmetro μ (retorno esperado do portfólio) o peso atribuído ao portfólio w_g (mínima variância global e menor retorno entre os portfólios eficientes de média-variância) diminui e o peso atribuído ao portfólio w_d aumenta. De forma mais específica, segundo Ingersoll (1987, p.87), pode-se mostrar que os pesos do portfólio são lineares em μ . Para tal, substitua (2.12) e (2.13) em (2.19) para obter:

$$w(\mu) = \frac{C - \mu B}{\Delta} A w_g + \frac{\mu A - B}{\Delta} B w_d.$$

Somando e subtraindo $\frac{\mu A - B}{\Delta} B w_g$ obtém-se:

$$w(\mu) = w_g + \frac{(\mu A - B)B(w_d - w_g)}{\Delta}. \quad (2.20)$$

De acordo com Ingersoll (1987, p. 86), estes resultados provêm um exemplo do teorema da separação de fundos (ou teorema dos fundos mútuos), pois todos os investidores que escolhem portfólios examinando somente média e variância podem ser satisfeitos mantendo combinações de somente poucos, neste caso dois, fundos mútuos, independente de suas preferências. Assim, todos os ativos originais poderiam ser comprados por dois fundos mútuos e o investidor poderia então alocar sua riqueza entre eles de acordo com sua preferência por retorno e risco.

Conforme Ingersoll (1987, p. 87), quaisquer dois portfólios de mínima variância poderiam ser usados no lugar de w_g e w_d . Para demonstrar, suponha que w_a e w_b sejam portfólios de mínima variância. Por (2.19) tem-se que:

$$\begin{bmatrix} (1-a) & a \\ (1-b) & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_g \\ w_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \end{bmatrix}.$$

Resolvendo para w_g e w_d :

$$w_g = \frac{w_a b - w_b a}{b - a}, \quad (2.21)$$

$$w_d = \frac{(1-a)w_b - (1-b)w_a}{b - a}. \quad (2.22)$$

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.19) e simplificando⁵ obtém-se:

$$w = (\lambda A) \frac{w_a b - w_b a}{b - a} + (\gamma B) \frac{(1-a)w_b - (1-b)w_a}{b - a} = \frac{\lambda A + b - 1}{b - a} w_a + \frac{1 - a - \lambda A}{b - a} w_b. \quad (2.23)$$

Note que os pesos associados aos portfólios w_a e w_b somam 1, conforme requerido. Portanto, pôde-se demonstrar que quaisquer dois portfólios de mínima variância podem ser combinados para gerar o conjunto completo de portfólios de mínima variância quando não há restrições de venda a descoberto.

1.1 Seleção de Portfólio com Restrições de Venda a Descoberto

Neste tópico descreve-se o problema de seleção de portfólio de um investidor sujeito a restrições de venda a descoberto, condição esta que restringe o peso de qualquer ativo no portfólio a valores não negativos. Nesse caso, o problema do investidor pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\underset{w}{\text{Min}} \frac{1}{2} w^T S w - \lambda r^T w. \quad (2.24)$$

⁵ Para obter o resultado abaixo observe que: $\lambda A + \gamma B = 1$.

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{1}_N^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (2.25)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.26)$$

Comparando com o problema apresentado no tópico anterior, é importante notar que a função objetivo inclui agora um novo termo dado por $\lambda \mathbf{r}^T \mathbf{w}$, o que permite a parametrização do problema e a eliminação da restrição (2.3). O parâmetro $\lambda \geq 0$ representa o inverso da aversão ao risco do investidor e, dessa forma, mede o quanto o investidor está disposto a arriscar-se (aumentar a variabilidade dos retornos do portfólio) para obter maior retorno esperado. Quando $\lambda \rightarrow 0$, caso de aversão ao risco infinita, o investidor preocupa-se apenas em minimizar a variância. A solução do problema, nesse caso, é o portfólio de mínima variância global com restrições de venda a descoberto. Quando $\lambda \rightarrow \infty$, caso de aversão ao risco igual a zero, o investidor preocupa-se apenas em maximizar o retorno esperado do portfólio. A solução do problema, nesse caso, envolverá a concentração do investimento no ativo de maior retorno esperado. Ao variar o parâmetro λ entre 0 e ∞ , obtém-se toda a fronteira eficiente, isto é, todos os portfólios eficientes de média-variância.

Além das restrições de venda a descoberto, em diversas situações o investidor terá suas escolhas restringidas por outros motivos como, por exemplo, obrigações contratuais que impedem o investidor de alocar mais de $x\%$ do portfólio em determinado ativo e/ou que obriguem o mesmo a alocar $z\%$ do portfólio em algum ativo específico. Para que o problema do investidor incorpore quaisquer formas de restrições lineares, substitui-se a restrição específica (2.25) pelos seguintes conjuntos gerais de restrições lineares de igualdade e desigualdade:

$$A_{eq} \mathbf{w} = \mathbf{b}_{eq}, \quad (2.25a)$$

$$A_d \mathbf{w} \leq \mathbf{b}_d, \quad (2.25b)$$

onde:

A_{eq} é uma matriz ($P \times N$) representando um conjunto de P restrições de igualdade. Uma das linhas desta matriz deverá conter o vetor unitário $\mathbf{1}_N^T$ para assegurar que a restrição (2.25) seja satisfeita;

\mathbf{b}_{eq} é um vetor ($P \times 1$) contendo os coeficientes do lado direito das restrições de igualdade;

A_d é uma matriz ($Q \times N$) representando um conjunto de Q restrições de desigualdade;

\mathbf{b}_d é um vetor ($Q \times 1$) contendo os coeficientes do lado direito das restrições de desigualdade.

A inclusão das restrições de não negatividade das variáveis de escolha e/ou de um conjunto de restrições de desigualdade ao problema do investidor implica na impossibilidade de se obter uma expressão analítica, como (2.8) no tópico anterior, para os pesos dos ativos no portfólio. Portanto, para encontrar uma solução será necessário utilizar algum método numérico de otimização. No presente estudo utilizou-se o método simplex para solução de problemas de programação linear, dada sua simplicidade, rapidez e eficiência, e o método da função de penalização que, embora não forneça soluções exatas, mas sim aproximadas, permite maior flexibilidade.

2.1.1 Abordagem da Programação Linear

De acordo com Jensen e Bard (2003), em um programa linear (LP) todas as relações funcionais devem ser lineares. Como se pode perceber, o problema do investidor envolve uma função objetivo quadrática e restrições lineares nas variáveis (programa quadrático)⁶, não atendendo, portanto, os requisitos de um programa linear. No entanto, ao examinar-se as condições de primeira ordem do programa quadrático, as condições de *Karush-Kuhn-Tucker*, observa-se que as mesmas são um conjunto de equações lineares e restrições de complementaridade que podem ser exploradas por uma versão modificada do algoritmo simplex⁷ para encontrar a solução do programa quadrático.

Segundo Jensen e Bard (2003), quando a função objetivo é estritamente convexa para todos os pontos possíveis, o problema quadrático tem um mínimo local único o qual é também o mínimo global. No caso do problema do investidor, uma condição suficiente para garantir a convexidade estrita é que a matriz S de variância-covariância seja positiva definida, condição assumida no presente estudo.

⁶ Segundo os referidos autores, um problema de otimização linearmente restrito e com uma função objetivo quadrática é denominado um programa quadrático (QP).

⁷ De acordo com Goldbarg e Luna (2005, p. 92), “O simplex é um algoritmo que se utiliza de um ferramental baseado na Álgebra Linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um Problema de Programação Linear”.

Excluindo as condições de não negatividade, o Lagrangeano do problema do investidor [(2.24), (2.25a), (2.25b) e (2.26)] é dado por:

$$L \equiv \frac{1}{2} w^T S w - \lambda r^T w - \gamma^T (A_{eq} w - b_{eq}) - \mu^T (b_d - A_d w), \quad (2.27)$$

onde os vetores-coluna $\gamma \in \mathfrak{R}^P$ e $\mu \in \mathfrak{R}^Q$ são, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange associados as restrições de igualdade e desigualdade. As condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) são:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = S w - \lambda r - A_{eq}^T \gamma + A_d^T \mu \geq 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = b_{eq} - A_{eq} w = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = A_d w - b_d \leq 0, \quad (2.30)$$

$$w^T \frac{\partial L}{\partial w} = w^T (S w - \lambda r - A_{eq}^T \gamma + A_d^T \mu) = 0, \quad (2.31)$$

$$\mu^T \frac{\partial L}{\partial \mu} = \mu^T (A_d w - b_d) = 0, \quad (2.32)$$

$$w \geq 0 \text{ e } \mu \geq 0. \quad (2.33)$$

Introduzindo variáveis não negativas $y \in \mathfrak{R}^N$ de excesso às desigualdades na condição (2.28) e variáveis não negativas $z \in \mathfrak{R}^Q$ de folga às desigualdades na condição (2.30), pode-se reescrever as condições de KKT da seguinte forma (JENSEN e BARD, 2003):

$$S w - A_{eq}^T \gamma + A_d^T \mu - y = \lambda r, \quad (2.34)$$

$$A_{eq} w = b_{eq}, \quad (2.35)$$

$$A_d w + z = b_d, \quad (2.36)$$

$$w^T y = 0, \mu^T z = 0, \quad (2.37)$$

$$w \geq 0, \mu \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0. \quad (2.38)$$

As três primeiras condições formam um conjunto de restrições lineares de igualdade, a quarta condição define as condições de complementaridade e a última condição restringe as variáveis a valores não negativos. Após a introdução das variáveis de excesso-folga e dos multiplicadores de Lagrange, o problema passa a ter $2 \times N + 2 \times Q + P$ variáveis. No entanto, conforme Stern et. al. (2006), pelas condições de complementaridade, na solução não há mais que $N + Q + P$ variáveis não nulas, que podem ser escritas como um solução básica do sistema (2.34)-(2.38). Isto sugere, segundo os referidos autores, o uso do algoritmo simplex para resolver o problema de programação quadrática.

Para resolver o problema por meio do algoritmo simplex, assuma, por conveniência, que $b_d \geq 0$ ⁸ e substitua o vetor de variáveis irrestritas γ em (2.34) pela diferença dos seguintes vetores: $0 \leq \gamma^+ = \max(0, \gamma)$ e $0 \leq \gamma^- = \max(0, -\gamma)$. De acordo com Stern et. al. (2006), adicionando variáveis artificiais as equações dadas pelas condições (2.34) e (2.35), pode-se encontrar a solução para o sistema dado pelas condições de KKT por meio da resolução do seguinte problema de programação linear e da satisfação das condições de complementaridade (2.37)⁹:

$$\text{Min } s = cx$$

$$\text{Sujeito } a : \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

onde:

⁸ Se este não for o caso, multiplique por -1 as equações de (2.36) para as quais o lado direito é negativo.

⁹ Para uma prova formal, ver Stern et. al. (2006, p. 50).

$c = \begin{bmatrix} 0_{(2N+2P+2Q)} & 1_N^T & 1_P^T \end{bmatrix}$ é um vetor de dimensão $(3 \times N + 3 \times P + 2 \times Q)$ de coeficientes, sendo $0_{(2N+2P+2Q)}$ o vetor linha de dimensão $(2 \times N + 2 \times P + 2 \times Q)$ cujos elementos são todos zeros e 1_P o vetor coluna unitário de dimensão P ;

$x^T = \begin{bmatrix} w^T & \gamma^{+T} & \gamma^{-T} & \mu^T & y^T & z^T & \psi^T & \pi^T \end{bmatrix}$ é um vetor de dimensão $(3 \times N + 3 \times P + 2 \times Q)$ de variáveis, sendo $\psi \in \mathfrak{R}^N$ e $\pi \in \mathfrak{R}^P$ as variáveis artificiais adicionadas, respectivamente, as equações dadas pelas condições (2.34) e (2.35);

$$A = \begin{bmatrix} S & -A_{eq}^T & A_{eq}^T & A_d^T & -I_N & 0_{N \times Q} & \Psi & 0_{N \times P} \\ A_{eq} & 0_{P \times P} & 0_{P \times P} & 0_{P \times Q} & 0_{P \times N} & 0_{P \times Q} & 0_{P \times N} & \Pi \\ A_d & 0_{Q \times P} & 0_{Q \times P} & 0_{Q \times Q} & 0_{Q \times N} & I_Q & 0_{Q \times N} & 0_{Q \times P} \end{bmatrix} \quad \text{é uma matriz de dimensão } [($$

$(N + P + Q) \times (3 \times N + 3 \times P + 2 \times Q)]$ representando um conjunto de $(N + P + Q)$ restrições de igualdade, sendo I_X a matriz identidade de dimensão $X = [N, Q]$, $0_{Y \times Z}$ a matriz de dimensão $[N, P, Q] = Y \times Z = [N, P, Q]$ cujos elementos são todos zeros, $\Psi \equiv \text{diag}(\text{sign}(\lambda r))$ a matriz diagonal de dimensão $(N \times N)$ cujos elementos da diagonal são iguais a 1 nas linhas que correspondem a elementos positivos do vetor λr e -1 caso contrário, e $\Pi \equiv \text{diag}(\text{sign}(b_{eq}))$ a matriz diagonal de dimensão $(P \times P)$ cujos elementos da diagonal são iguais a 1 nas linhas que correspondem a elementos positivos do vetor b_{eq} e -1 caso contrário;

$b^T = \begin{bmatrix} \lambda r^T & b_{eq}^T & b_d^T \end{bmatrix}$ é um vetor de dimensão $(N + P + Q)$ contendo os coeficientes do lado direito das restrições de igualdade.

Como se pode notar, o programa linear (2.39) tem como objetivo minimizar o somatório das variáveis artificiais respeitando um conjunto de restrições lineares de igualdade e a não negatividade das variáveis. A solução para este programa linear pode ser obtida por meio do algoritmo simplex. No entanto, é preciso modificá-lo de forma a garantir que, a cada iteração, as condições de complementaridade (2.37) sejam satisfeitas (JENSEN e BARD, 2003). Segundo os referidos autores, se ao final da execução do algoritmo simplex modificado a função objetivo tiver valor igual a zero, a solução terá satisfeito as condições de KKT (2.34)-(2.38) e, dessa forma, obtém-se a solução ótima do problema quadrático. Nos próximos parágrafos será descrito, com base em Goldbarg e Luna (2005), o algoritmo simplex e a modificação necessária para satisfação das condições de complementaridade.

De acordo com Goldbarg e Luna (2005), o algoritmo simplex parte de uma solução viável do sistema de equações que constituem as restrições do programa linear e vai identificando novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente. Como ressaltado pelos autores, para um correto entendimento do algoritmo, faz-se necessário recordar algumas definições e resultados matemáticos que serão utilizados no desenvolvimento do mesmo¹⁰:

Definição 1: Uma base de uma matriz A ($m \times n$) é uma matriz quadrada¹¹ de m vetores coluna linearmente independentes em \mathfrak{R}^m . Denomina-se de *variáveis básicas* as m variáveis associadas a essas colunas e *variáveis residuais* as demais $(n - m)$ variáveis.

Com base nessa definição, pode-se decompor o vetor das variáveis x em:

$$x = (x_B, x_R),$$

onde x_B representa o vetor das variáveis básicas e x_R é o vetor das variáveis residuais.

Como a solução do conjunto de equações $m \times m$ ocorre em função das variáveis básicas somente, tem-se que $x = (x_B, 0)$. Estendendo o raciocínio à matriz A , pode-se dividi-la em uma matriz $m \times m$, denominada matriz B de posto igual a m , e outra matriz $m \times (n - m)$, denominada de matriz R .

Definição 2: Seja B uma base associada à matriz A . O vetor composto de $x_B = B^{-1}b$ e $x_R = 0$ é denominado de *solução básica*.

Definição 3: Uma solução básica sem componentes negativas é denominada *solução básica viável*.

Definição 4: O conjunto $C = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ denomina-se *conjunto de soluções viáveis*.

¹⁰ Os Teoremas serão apresentados sem provas. Para uma apresentação mais formal ver Goldbarg e Luna (2005).

¹¹ Observe que esta implícita a suposição de que $m < n$.

Teorema 1: O conjunto C das soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto *convexo*.

Teorema 2: O vetor x é uma solução básica viável do sistema $Ax = b$ se e somente se $x \geq 0$ é um *ponto extremo* do conjunto C .

Corolário 1: O conjunto dos pontos extremos de C é finito e limitado.

Corolário 2: Se existe uma solução viável, então existe uma solução básica viável.

Teorema 3: Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C . Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.

Esse conjunto de definições e teoremas fornece o respaldo teórico para justificar a estratégia do método simplex para encontrar a solução ótima em um número finito de passos a partir de uma solução básica viável inicial (vértice inicial).

De acordo com Goldbarg e Luna (2005), partindo de uma solução básica viável para um programa linear como em (2.39), o algoritmo simplex deverá definir as condições de troca de variáveis dentro da matriz básica, para que exista garantia de melhoria da solução ao longo do desenvolvimento dos passos do algoritmo, bem como as regras de parada do algoritmo. As condições ou critérios de troca de variáveis (*pivoteamento*) do algoritmo simplex são baseadas nos seguintes resultados:

Decompondo, a exemplo do vetor de variáveis x , o vetor de coeficientes em $c = (c_B, c_R)$, a solução básica viável inicial possui o seguinte valor associado:

$$s_0 = (c_B, c_R)(x_B, x_R) = (c_B, c_R) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c_B B^{-1}b. \quad (2.40)$$

O sistema de equações $Ax = b$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$b = [B, R](x_B, x_R) = Bx_B + Rx_R. \quad (2.41)$$

Multiplicando (2.41) por B^{-1} e resolvendo para x_B , obtém-se:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R. \quad (2.42)$$

Definindo I como o índice das variáveis básicas e J como o índice das variáveis residuais¹², a função objetivo (s) pode ser reescrita, usando (2.40) e (2.42), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s &= c_B x_B + c_R x_R \\ &= c_B (B^{-1}b - B^{-1}Rx_R) + c_R x_R \\ &= c_B B^{-1}b - c_B B^{-1}Rx_R + c_R x_R, \\ &= s_0 - (c_B B^{-1}R - c_R)x_R \\ &= s_0 - \sum_{j \in J} (c_B B^{-1}a_j - c_j)x_j \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde a_j corresponde a j -ésima coluna de A , c_j é o j -ésimo elemento de c e x_j é o j -ésimo elemento de x .

Conforme Goldbarg e Luna (2005, p. 102), a equação (2.43) “mostra a possibilidade do estabelecimento de um critério de verificação de otimalidade ou de melhoria de uma solução básica”. Quando o valor do termo $c_B B^{-1}a_j - c_j$ é positivo existe a possibilidade de, com a entrada da variável de índice j na base, reduzir o valor da função objetivo em $(c_B B^{-1}a_j - c_j)x_j$, desde que essa variável possa assumir um valor positivo.

Dado que o objetivo é reduzir ao máximo possível o valor da função objetivo, escolhe-se para entrar na base a variável residual de maior valor para o termo $c_B B^{-1}a_j - c_j$ (observando que o mesmo deve ser positivo). Denotando por k o índice dessa variável residual e observando que $x_j = 0 \quad \forall j \neq k \in J$, pode-se reescrever (2.42) da seguinte forma:

¹² Por exemplo, se $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ e x_1, x_3 e x_6 são variáveis básicas, tem-se que $I = [1, 3, 6]$ e $J = [2, 4, 5]$.

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k = \bar{b} - \alpha_k x_k$$

ou (2.44)

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

onde $\bar{b} = B^{-1}b$ e $\alpha_k = B^{-1}a_k$.

De acordo com Goldbarg e Luna (2005, p. 103), se existir $\alpha_{ik} > 0$, então x_{B_i} decresce com o incremento de x_k . Para satisfazer as condições de não-negatividade de uma solução básica viável, a variável x_k que entrará na base só poderá crescer até que a primeira componente x_{B_i} seja reduzida a zero. Assim, escolhe-se para sair da base a variável x_i que apresentar o menor valor entre todos os \bar{b}_i / α_{ik} para os valores positivos de α_{ik} .

Este procedimento de troca de variáveis (*pivotar*) deve ser repetido até que não haja mais $c_B B^{-1}a_j - c_j > 0$. Este será, portanto, o critério de parada do algoritmo e que garantirá que a solução ótima foi alcançada.

Para solução do problema quadrático, deve-se observar ainda que, além de resolver o problema linear (2.39), tem-se que satisfazer as condições de complementaridade (2.37). Portanto, o algoritmo simplex anteriormente descrito precisa ser modificado para incorporar essa característica da solução. Para tal, conforme Stern et. al. (2006), antes de proceder a troca de variáveis (*pivotar*), deve-se verificar se as condições de complementaridade (2.37) serão satisfeitas com a inclusão de x_k e a exclusão de x_i da base. Usando a notação do programa linear (2.39), não deve-se permitir que:

1. w_i entre na base se y_i estiver na base (a não ser que y_i seja a variável a ser excluída da base), e vice-versa;
2. μ_j entre na base se z_j estiver na base (a não ser que z_j seja a variável a ser excluída da base), e vice-versa;

Por fim, observe que para dar início a execução do algoritmo simplex é necessário ter uma solução básica viável inicial. Conforme Stern et. al. (2006), a solução do programa linear (2.39) envolverá no máximo $N + P + Q$ variáveis não nulas. Logo, utilize como variáveis básicas iniciais as variáveis de folga z e as variáveis artificiais ψ e π , isto é, decomponha inicialmente o vetor de variáveis da seguinte forma: $x_B = (z, \psi, \pi)$ e $x_R = (w, \gamma^+, \gamma^-, \mu, y)$. Supondo $\lambda r > 0$ e $b_{eq} > 0$, o vértice inicial será dado por:

$$\begin{bmatrix} w \\ \gamma^+ \\ \gamma^- \\ \mu \\ y \\ z \\ \psi \\ \pi \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times 1} \\ \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{Q \times 1} \\ \mathbf{0}_{N \times 1} \\ b_d \\ \lambda r \\ b_{eq} \end{bmatrix}$$

Note que este vértice inicial é uma solução básica viável, visto que satisfaz o sistema $Ax = b$ e as condições de não negatividade das variáveis. Como ressaltado anteriormente, se ao final da execução do algoritmo simplex modificado acima descrito o valor da função objetivo for igual a zero, a solução do programa linear (2.39) será a solução ótima que satisfaz as condições de KKT do problema quadrático do investidor.

2.1.1 Abordagem da Função de Penalização

De acordo com Judd (1999, p. 123), a maioria dos métodos de otimização com restrições usam a abordagem da *função de penalização*. Esta abordagem, segundo o referido autor, é baseada numa idéia simples: permita que tudo seja possível, mas altere a função objetivo de forma que seja ‘doloroso’ fazer escolhas que violem as restrições. Nessa abordagem, portanto, substitui-se as restrições por funções de penalização que são incorporadas na função objetivo transformando o problema restrito em um problema irrestrito.

Considere, por exemplo, o seguinte problema restrito:

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & f(x) \\ \text{Sujeito a:} \quad & \begin{cases} g(x) = a, \\ h(x) \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Usando a abordagem da função de penalização, transforma-se o problema restrito de minimização (2.45) no seguinte problema irrestrito (JUDD, 1999):

$$\text{Min}_x \quad F(x; P, a, b) = f(x) + \frac{1}{2} P \left[\sum_i (g^i(x) - a_i)^2 + \sum_j \max(h^j(x) - b_j, 0)^2 + \sum_k \min(x_k, 0)^2 \right], \quad (2.46)$$

onde $P > 0$ é o parâmetro de penalização, g^i representa a i -ésima restrição de igualdade e a_i o lado direito da i -ésima restrição de igualdade, sendo as demais expressões definidas de forma similar.

De acordo com Judd (1999, p. 124), se P é “infinito”, então os dois problemas (2.45) e (2.46) são idênticos. Para um P qualquer o problema irrestrito em geral não terá o mesmo mínimo global do problema restrito, mas para P suficientemente grande as duas soluções estarão provavelmente próximas. Infelizmente, segundo o referido autor, não há como resolver diretamente (2.46) para um valor grande de P , pois neste caso a Hessiana de F , F_{xx} , provavelmente será “mal comportada” (*ill-conditioned*) em pontos distantes da solução, conduzindo a imprecisão numérica e progresso lento do algoritmo na melhor das hipóteses. A solução, de acordo com Judd (1999), é resolver uma sequência de problemas. Resolva (2.46) primeiro para um pequeno valor de P , o qual denota-se por P_1 , resultando na solução x^1 . Execute então a seguinte iteração:

$$x^{l+1} \in \arg \text{Min}_x F(x; P_{l+1}, a, b), \quad (2.47)$$

onde o problema do “mal comportamento” da Hessiana é aliviado pelo uso de x^l como solução inicial na $l+1$ -ésima iteração. De acordo com Judd (1999, p. 124), a cada iteração l a Hessiana calculada na solução, $F_{xx}(x^l; P_l, a, b)$, será geralmente bem comportada pois a violação das restrições será pequena. Então, se P_l não crescer muito rapidamente, a Hessiana inicial na iteração $l+1$, $F_{xx}(x^l; P_{l+1}, a, b)$, estará próxima de $F_{xx}(x^l; P_l, a, b)$ e não será “mal comportada”, caso em que a convergência para x^{l+1} será tão rápida quanto esperado dado o método de minimização escolhido.

Considere agora o problema do investidor (2.24)-(2.25). Usando a abordagem da penalização, pode-se transformar o referido problema restrito no seguinte problema irrestrito:

$$\text{Min}_w \quad F(w; P, 1) = \frac{1}{2} w^T S w - \lambda r^T w + \frac{1}{2} P \left[(1_N^T w - 1)^2 + \sum_{i=1}^N \min(w_i, 0)^2 \right]. \quad (2.48)$$

O gradiente de F , F_w ou simplesmente g , é dado por:

$$F_w = S w - \lambda r + P \left[(1_N^T w - 1) \cdot 1_N + \min(w, 0) \right]. \quad (2.49)$$

A Hessiana de F , F_{ww} ou simplesmente H , é dada por:

$$F_{ww} = S + P \left[1_N \cdot 1_N^T + \phi \right], \quad (2.50)$$

onde ϕ é uma matriz diagonal de dimensão N , cujo i -ésimo elemento da diagonal principal é igual a 1 se $w_i < 0$ e 0 caso contrário.

Uma propriedade muito importante desta abordagem é a flexibilidade, isto é, a possibilidade de alterar o problema para incluir outras restrições ou até mesmo outras formas da função objetivo, sem incorrer em

grandes esforços. Se, por exemplo, forem impostas restrições quanto ao peso máximo de cada ativo no portfólio altera-se a função objetivo, o gradiente e a Hessiana da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min}_w F(w; P, 1, b) &= \frac{1}{2} w^T S w - \lambda r^T w + \frac{1}{2} P \left[\left(\mathbf{1}_N^T w - 1 \right)^2 + \sum_{i=1}^N \max(w_i - b_i, 0)^2 + \sum_{i=1}^N \min(w_i, 0)^2 \right]; \\ F_w &= S w - \lambda r + P \left[\left(\mathbf{1}_N^T w - 1 \right) \cdot \mathbf{1}_N + \max(w - b, 0) + \min(w, 0) \right]; \text{ e} \\ F_{ww} &= S + P \left[\mathbf{1}_N \cdot \mathbf{1}_N^T + \theta + \phi \right], \end{aligned}$$

onde θ é uma matriz diagonal de dimensão N , cujo i -ésimo elemento da diagonal principal é igual a 1 se $w_i - b_i > 0$ e 0 caso contrário, e b é um vetor coluna de dimensão N , cujo i -ésimo elemento representa o peso máximo do i -ésimo ativo no portfólio.

Uma vez definido o problema em termos da função de penalização, faz-se necessária a escolha do método de otimização. Dado que o problema irrestrito do investidor envolve uma função objetivo convexa, a escolha natural passa a ser o método de Newton para o caso multivariado. Segundo Judd (1999, p. 103), o método de Newton é uma abordagem simples que frequentemente resulta em rápidas soluções para problemas que envolvam funções duas vezes continuamente diferenciáveis, como é o caso do problema do investidor em questão.

De acordo com Judd (1999, p. 103), no método de Newton examina-se uma sequência de pontos, x^k , em que a cada iteração substitui-se a função objetivo $f(x)$ por sua aproximação quadrática em torno de x^k e escolhe-se x^{k+1} como sendo o ponto crítico da aproximação local. Em x^k a aproximação quadrática é:

$$f(x) \approx f(x^k) + f_x(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T f_{xx}(x^k)(x - x^k).$$

Segundo Judd (1999, p. 103), se $f(x)$ é convexa, então $f_{xx}(x^k)$ é positiva definida e a aproximação tem um mínimo em:

$$x^{k+1} = x^k - f_{xx}(x^k)^{-1} f_x(x^k)^T.$$

Note que $s^k \equiv x^{k+1} - x^k$ é a solução do sistema linear $f_{xx}(x^k)s^k = -f_x(x^k)^T$. Assim, em cada iteração o real procedimento é resolver o sistema linear para s^k e fazer $x^{k+1} = x^k + s^k$. Este procedimento evita a inversão da Hessiana em cada iteração do algoritmo (JUDD, 1999).

Mesmo quando o método de Newton converge, precisa-se definir uma forma de parar o processo quando se está próximo da solução. Judd (1999, p. 104) sugere um teste de convergência de duas partes que assume a seguinte forma:

1. Verifique se $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon(1 + \|x^k\|)$.
2. Se houve convergência na primeira parte, determine se a última iteração satisfaz a condição de primeira ordem, isto é, se $f_x(x^k)$ é zero. Para tal, verifique se $\|f_x(x^k)\| \leq \delta(1 + |f(x^k)|)$.

De acordo com Judd (1999), em alguns casos a segunda condição não será satisfeita, sinalizando que a sequência esta mudando muito lentamente, mas ainda distante do ótimo e, portanto, que a aproximação quadrática não é boa na vizinhança de x^k . Se isto acontecer, pode-se reiniciar o algoritmo com um valor menor para ε ou escolher outro método de otimização. A escolha das tolerâncias ε e δ dependerá do problema em questão e deve-se testar diversas alternativas para descobrir o trade-off entre a alta velocidade associada a grandes tolerâncias e a acurácia das pequenas tolerâncias.

O método de Newton, portanto, pode ser resumido no seguinte algoritmo (JUDD, 1999, p.105):

Inicialização: Escolha uma solução (palpite) inicial x^0 e parâmetros de tolerância ε e δ ;

Passo 1: Compute a Hessiana, $f_{xx}(x^k)$, e o gradiente, $f_x(x^k)$, e resolva o sistema linear $f_{xx}(x^k)s^k = -f_x(x^k)^T$ para s^k ;

Passo 2: Compute $x^{k+1} = x^k + s^k$;

Passo 3: Se $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon(1 + \|x^k\|)$, vá para o passo 4; caso contrário volte ao passo 1;

Passo 4: Se $\|f_x(x^k)\| \leq \delta(1 + |f(x^k)|)$, pare e reporte sucesso; caso contrário pare e reporte convergência para ponto não ótimo.

Por fim, como ressaltado inicialmente, deve-se estar ciente de que a abordagem da penalização resultará, geralmente, em soluções próximas a solução ótima, mas não iguais a esta última. Embora a função de penalização seja uma abordagem intuitiva e flexível, quando a precisão for indispensável, como no caso de seleção de carteiras para fins de investimento real, as abordagens anteriores (programação quadrática e linear) provavelmente serão mais confiáveis.

3 ALGORITMOS PARA SELEÇÃO DE PORTFÓLIO: IMPLEMENTAÇÃO VIA MATLAB (M-FILES)

Neste capítulo pretende-se apresentar e tecer alguns comentários sobre três funções (M-files) para seleção de portfólios desenvolvidas em Matlab® pelo autor do presente trabalho. De forma mais específica, objetiva-se apresentar os principais comandos executados em cada função, seus argumentos de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*), bem como mostrar alguns resultados da execução de cada função. É importante mencionar que o programa Matlab® possui funções internas (nativas) específicas para seleção de portfólios e que as funções desenvolvidas pelo autor são apenas para fins de ilustração da aplicação dos algoritmos de seleção de portfólios discutidos no capítulo anterior.

Para fins de demonstração do uso das funções, utilizou-se uma amostra de 46 ações negociadas na bolsa de valores de São Paulo (BOVESPA). A seleção da amostra observou o seguinte critério de liquidez: a ação, para ser incluída na amostra, deveria ter pelo menos uma cotação em cada mês do período dezembro/2003 a maio/2005 e pertencer à carteira teórica do índice Ibovespa no quadrimestre setembro-dezembro/2009. As cotações foram obtidas junto ao banco de dados da Economática®. Por meio das cotações, foram calculados os retornos mensais para o período janeiro/2004 a maio/2009. As 46 séries de retornos, compostas cada uma de 65 observações mensais, foram então utilizadas para calcular o retorno médio do período (uma estimativa ingênua de retorno esperado) e a matriz de variância-covariância dos retornos destas ações. No apêndice 1 estão listadas as ações que compõem a amostra, bem como as estatísticas descritivas de seus retornos no período.

A primeira função, *portfselection* (ver apêndice 2), trata da seleção de portfólio de um investidor sem restrições de venda à descoberto. O principal propósito da função é *plotar* a curva dos portfólios de mínima variância, bem como identificar a localização dos portfólios w_g e w_d descritos no tópico 2.1. A função é executada por meio do seguinte comando:

$$\text{returns} = \text{portfselection}(r, S); \quad (3.1)$$

O primeiro argumento de entrada (*input*), r , é o vetor de retornos esperados de dimensão $(N \times 1)$, onde N denota o número de ativos. O segundo argumento de entrada, S , é a matriz $(N \times N)$ de variância-covariância dos retornos dos N ativos. A função retorna uma estrutura (argumento de saída) com os seguintes componentes:

- w_g = vetor $(N \times 1)$ de pesos dos ativos no portfólio de mínima variância global (w_g);
- w_d = vetor $(N \times 1)$ de pesos dos ativos no portfólio w_d ;
- z_g = retorno esperado do portfólio w_g ;
- z_d = retorno esperado do portfólio w_d ;
- sigma2g = variância do portfólio w_g ;
- sigma2d = variância do portfólio w_d ;

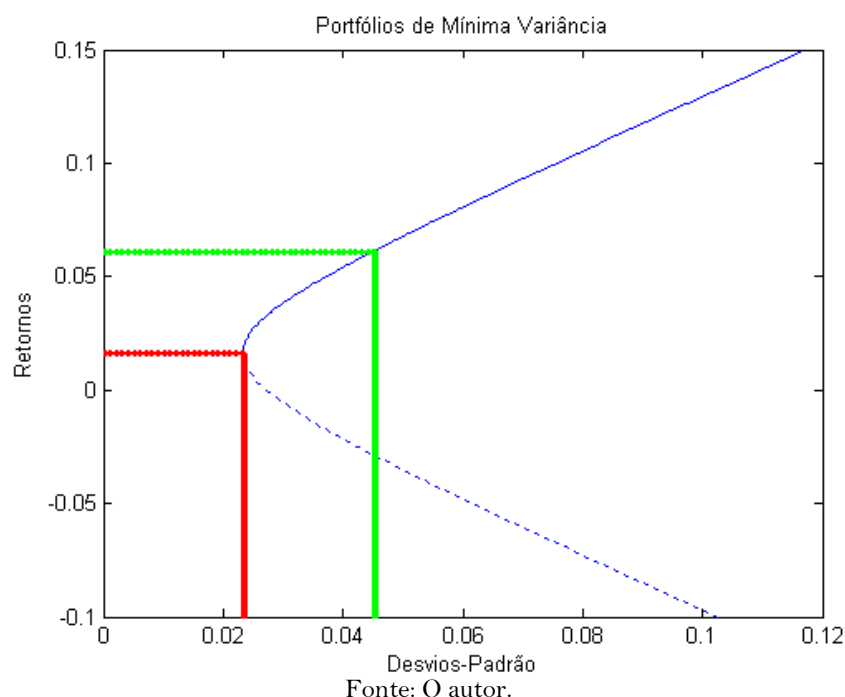
Se o comando (3.1) for utilizado, qualquer argumento de saída pode ser acessado utilizando-se o comando: `returns.nomedocomponente`. Assim, por exemplo, para acessar o retorno esperado do portfólio w_g execute o comando: `returns.zg`. Além destes argumentos de saída, a função *plota* a curva dos portfólios de mínima variância e identifica a localização de w_g e w_d na referida curva.

Em termos de estrutura, o arquivo `portfselection.m` inicia com a linha que define a função “function `returns = portfselection(r, S)`”, sendo `returns` a estrutura de saída, `portfselection` o nome da função e `r` e `S` os argumentos de entrada. As linhas iniciando com o carácter “%” são comentários que, devido à localização abaixo da linha que define a função, serão exibidos sempre que o seguinte comando for executado: `help portfselection`. Ao corpo da função pertencem todas as demais linhas. Os comandos iniciais do corpo da função objetivam verificar se os argumentos de entrada foram fornecidos de forma adequada. Por exemplo, se o argumento `r` não for um vetor uma mensagem de erro é enviada para a linha de comando do Matlab® e se o argumento `S` não for uma matriz quadrada com linhas e colunas em número igual ao número de linhas do

vetor r outra mensagem de erro é enviada. Observe que as linhas iniciando com o carácter '%' e que pertencem ao corpo da função não são exibidas no help e servem apenas como comentário. Os demais comandos da sequência computam o valor de um conjunto de variáveis descritas no tópico 2.1, bem como o valor dos componentes de saída da função, e montam o gráfico com a curva dos portfólios de mínima variância.

Utilizando os retornos médios e a matriz de variância-covariância da amostra anteriormente descrita, executou-se a função *portfselection*, por meio do comando (3.1). Como primeiro resultado, obteve-se a figura 2 com a representação gráfica dos portfólios de mínima variância. A curva dos portfólios de mínima variância é *plotada* em duas partes: a fronteira eficiente, isto é, os portfólios dominantes de mínima variância, aparecem como uma linha contínua enquanto que os portfólios dominados de mínima variância são representados pela linha tracejada. Na figura 2 é possível também identificar a localização dos portfólios w_g (linhas vermelhas) e w_d (linhas verdes) sobre a fronteira eficiente.

Figura 2: Portfólios de Mínima Variância – Output da função *portfselection*



Os demais resultados da execução da função *portfselection* são resumidos na tabela 1. No painel A, componentes escalares, estão dispostos os retornos esperados, variâncias e desvios-padrão dos portfólios w_g e w_d . No painel B, componentes vetores, apresentam-se estatísticas dos vetores de pesos dos ativos nos referidos portfólios. É possível observar que as distribuições dos pesos dos ativos nos portfólios w_g e w_d possuem a mesma média, mas a distribuição dos pesos dos ativos no portfólio de mínima variância global (w_g) é muito menos volátil, com pesos variando no intervalo -137.78% (Petrobrás PN) a 145.09% (Petrobrás ON), enquanto que no caso do portfólio w_d os pesos variam no intervalo -294.12% (Petrobrás PN) a 305.26% (Petrobrás ON). Por fim, a figura 3 apresenta os histogramas dos pesos dos ativos nos portfólios w_g e w_d .

A segunda função, *portfselection_simplex* (ver apêndice 3), propõe-se a resolver o problema de seleção de portfólio de um investidor sujeito a restrições de venda à descoberto, utilizando para isso o algoritmo simplex modificado descrito no tópico 2.2. A principal finalidade da função é definir os pesos ótimos dos N ativos no portfólio, observando o parâmetro de aversão ao risco do investidor. A função é executada por meio do seguinte comando:

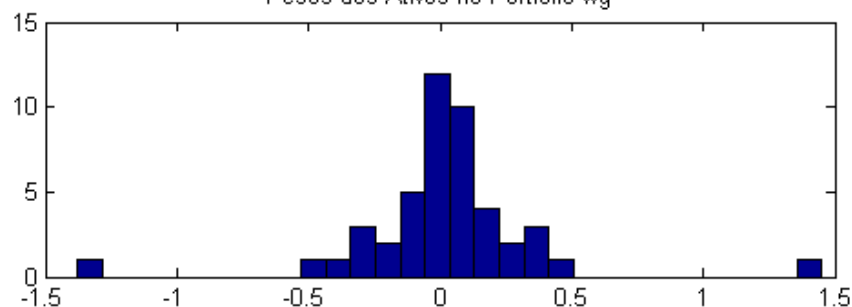
```
[w, fval, iter, mi, gamma] = portfselection_simplex(r, S, Ad, bd, ...
Aeq, beq, lambda);
```

(3.2)

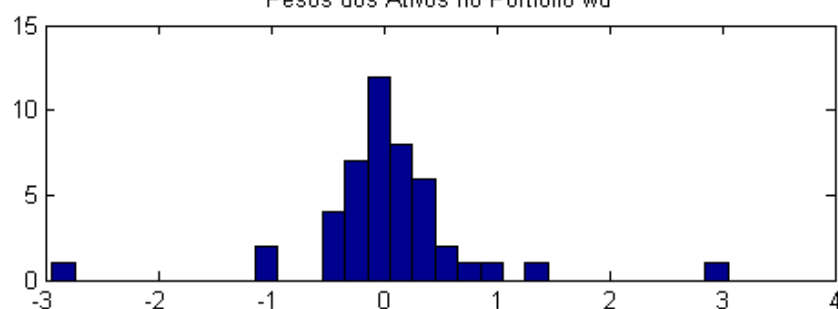
Tabela 1: Componentes de Saída da Função *portfselection*

Painel A: Componentes escalares		
Descrição	Componente	Valor
Retorno Esperado do Portfólio wg	zg	1.63%
Variância do Portfólio wg	sigma2g	0.00054
Desvio Padrão do Portfólio wg		2.33%
Retorno Esperado do Portfólio wd	zd	6.15%
Variância do Portfólio wd	sigma2d	0.00210
Desvio Padrão do Portfólio wd		4.58%
Painel B: Componentes vetores		
Pesos dos Ativos no Portfólio	Estatística	Valor
Componente: wg	Média	2.17%
	Desvio-Padrão	35.86%
	Máximo	145.09%
	Mínimo	-137.78%
Componente: wd	Média	2.17%
	Desvio-Padrão	76.05%
	Máximo	305.26%
	Mínimo	-294.12%

Fonte: O Autor.

Figura 3: Pesos dos Ativos nos Portfólios wg e wd
Pesos dos Ativos no Portfólio wg

Pesos dos Ativos no Portfólio wd



Fonte: O Autor.

Além dos argumentos de entrada r e S , que são os mesmos da função *portfselection*, há agora mais cinco argumentos, cujo fornecimento não é obrigatório para a execução da função. Os argumentos Ad e bd referem-se, respectivamente, a matriz do lado esquerdo e o vetor do lado direito das restrições de desigualdade dadas por (2.25b). Se bd é fornecido deve-se fornecer também Ad e vice-versa. Os argumentos Aeq e beq referem-se, respectivamente, a matriz do lado esquerdo e o vetor do lado direito das restrições de igualdade dadas por (2.25a). Se beq é fornecido deve-se fornecer também Aeq e vice-versa. Embora estes últimos argumentos não sejam obrigatórios, note que, como ressaltado no tópico 2.2, a restrição de que a soma dos pesos dos ativos no portfólio seja igual a 1 deve ser satisfeita e, portanto, haverá no mínimo uma restrição de igualdade. O argumento $lambda$ denota o inverso da aversão ao risco do investidor e quando não for fornecido pelo usuário assumirá o valor 1.

Os argumentos de saída são w , $fval$, $iter$, mi e $gamma$, sendo os dois últimos facultativos. O argumento de saída w é um vetor de dimensão N contendo os pesos dos ativos no portfólio selecionado. $fval$ contém o valor da função objetivo dada por (2.24) e $iter$ o número de iterações utilizadas pelo algoritmo simplex modificado para chegar a solução ótima. Os argumentos facultativos de saída mi e $gamma$ representam os multiplicadores de Lagrange associados as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

A estrutura do arquivo `portfselection_simplex.m` é a padrão: inicia com a linha que define a função, as linhas seguintes iniciando com o carácter '%' são comentários que serão exibidos no *help* e as demais linhas pertencem ao corpo da função. Os comandos iniciais do corpo da função objetivam verificar se os argumentos de entrada foram fornecidos de forma adequada, bem como definir valores padrão a certas variáveis quando as mesmas não são fornecidas pelo usuário. Posteriormente, são montadas, de acordo com o conjunto de restrições fornecido, as matrizes e vetores que serão utilizadas pelo método simplex modificado. Em seguida, tais matrizes e vetores são passados como argumentos de entrada (*inputs*) para a função local¹³ `simplexalg`, que executa o algoritmo simplex modificado descrito no tópico 2.2 gerando os seguintes *outputs*: $iter$ (número de iterações), w (o vetor de variáveis do programa linear) e $fval$ (o valor da função objetivo sendo minimizada, nesse caso a soma das variáveis artificiais). Na sequência, verifica-se se o valor de $fval$ é diferente de zero, caso em que a solução encontrada não corresponde à solução desejada (satisfação das condições de KKT). Se $fval$ é diferente de zero uma mensagem de erro é enviada e a função é abortada. Se $fval$ é igual a zero a função executa os demais comandos de atribuição de valores às seguintes variáveis de saída (*outputs*): mi , $gamma$, $fval$ e w (as duas primeiras somente se for necessário). Por fim, têm-se a definição e os comandos a serem executados pela função local `simplexalg`.

A terceira função, `portfselection_penalization` (ver apêndice 4), possui o mesmo propósito da função `portfselection_simplex`, porém utiliza a abordagem da função de penalização para encontrar a solução do problema restrito do investidor. Essa função é executada por meio do seguinte comando:

```
[w, fval, iter] = portfselection_penalization(r, S, P, epsilon, delta, ub, lambda); (3.3)
```

Os argumentos de entrada r e S são os mesmos das funções anteriormente discutidas. Há, no entanto, mais cinco argumentos: P é um vetor contendo os parâmetros de penalização em ordem crescente de valor; $epsilon$ e $delta$ são os parâmetros de tolerância do método de Newton; ub é um vetor de limites superiores para os pesos dos ativos no portfólio (opcional); e $lambda$ denota o inverso da aversão ao risco do investidor. Os argumentos de saída (w , $fval$, $iter$) são os mesmos da função `portfselection_simplex`, sendo que esta última fornece dois argumentos opcionais de saída (mi e $gamma$) que não estão disponíveis na função `portfselection_penalization`.

A estrutura do arquivo `portfselection_penalization.m` também segue o padrão anteriormente apresentado. Os comandos iniciais do corpo da função objetivam verificar se os argumentos de entrada foram fornecidos de forma adequada, bem como definir valores padrão a certas variáveis quando as mesmas não são fornecidas pelo usuário. Posteriormente, é montado um vetor com a solução (palpite) inicial e um vetor que armazenará o número de iterações do método de Newton para cada parâmetro de penalização P . Em seguida, verifica-se se o vetor com os limites superiores dos pesos dos ativos no portfólio (ub) foi fornecido. Se ub for vazio, chama-se a função local `newtons_method`, caso contrário chama-se a função local `newtons_method_ub`. Essas funções locais, que implementam o algoritmo de Newton descrito no tópico 2.3, são chamadas para cada elemento do vetor de parâmetros de penalização P . Observe que a solução inicial utilizada pelo método de Newton para cada elemento do vetor P (exceto o 1º elemento, que utiliza o palpite inicial anteriormente mencionado) refere-se a solução ótima encontrada pela aplicação do método de Newton ao elemento anterior do vetor P . Por fim, têm-se as definições e os comandos a serem executados pela funções locais `newtons_method` e `newtons_method_ub`.

Utilizando os retornos médios e a matriz de variância-covariância da amostra anteriormente descrita, executou-se as funções `portfselection_simplex` e `portfselection_penalization`, ambas com parâmetro $lambda = 1$, por meio dos seguintes comandos, respectivamente:

```
[w, fval, iter, mi, gamma] = portfselection_simplex(r, S, [], [], ones(1,46), 1, 1);
[z, gval, iterac] = portfselection_penalization(r, S, [0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.5, 1, ...
10, 100, 1000, 10000], 0.000001, 0.001, [], 1);
```

Para fins de comparação, executou-se a função interna do Matlab® `quadprog` por meio do seguinte comando:

```
[x, val, flag, out, lambda] = quadprog(S, -r, [], [], ones(1,46), 1, zeros(46,1), []);
```

Na tabela 2 são apresentados os principais resultados da execução dos três comandos acima referidos. Antes de qualquer coisa é importante observar que as funções `portfselection_simplex` e `quadprog` deverão apresentar as mesmas soluções, embora os tempos de execução possam ser diferentes. Já a função `portfselection_penalization`, por ser uma aproximação, provavelmente apresentará soluções apenas aproximadas da solução ótima exata. Também é importante lembrar que esses resultados foram encontrados para um parâmetro $lambda = 1$, e que o uso de outros valores implicará em portfólios diferentes. Como mostra a tabela 2, todos as funções selecionaram os mesmos 4 ativos dentre os 46 possíveis para compor o portfólio. Para as demais 42 ações foram atribuídos, em todos os casos, pesos iguais a zero. A abordagem da função de penalização superestimou os pesos dos ativos CCR Rodovias ON (CCRO3), Sid Nacional ON (CSNA3) e Tran Paulist PN (TRPL4) e, para compensar, subestimou o peso do ativo Rossi Resid ON (RSID3) no portfólio. Em função disto, o valor da função objetivo e os valores do retorno esperado, variância e desvio-padrão do portfólio são diferentes entre as abordagens, embora o erro implicado pelo uso da abordagem de penalização possa ser

¹³ Local pelo fato de estar “visível” somente para a função `portfselection_simplex`, ou seja, a função `simplexalg` somente pode ser chamada dentro da função `portfselection_simplex`, não estando disponível para as demais funções. A definição e os comandos a serem executados pelas funções locais estão, normalmente, localizados no final da função principal que leva o nome do arquivo.

considerado pequeno em termos do valor da função objetivo. Quanto ao tempo de execução, as abordagens da função de penalização e do simplex precisaram de, aproximadamente, 0.29 segundos para encontrar a solução, enquanto que a função *quadprog* precisou de quase 1 segundo para ser executada.

Tabela 2: Resultados das Funções para Solução do Problema do Investidor c/ Restrições de Venda a Descoberto.

Painel A: Composição do Portfólio				
Ações	Quadprog	Simplex	Penalization	Erro
CCR Rodovias ON (CCRO3)	22.85%	22.85%	29.16%	6.31%
Rossi Resid ON (RSID3)	27.27%	27.27%	16.07%	-11.20%
Sid Nacional ON (CSNA3)	36.31%	36.31%	37.96%	1.65%
Tran Paulist PN (TRPL4)	13.58%	13.58%	16.91%	3.33%
Total	100%	100%	100%	0%
Painel B: Outros Resultados				
Descrição	Quadprog	Simplex	Penalization	Erro
Tempo de execução (segundos)	0.988943	0.292878	0.288745	-
Iterações	Não se Aplica	104	43.6*	-
Valor da função objetivo	-0.0277	-0.0277	-0.0275	0.0002
Retorno Esperado do Portfólio	3.30%	3.30%	3.15%	-0.15%
Variância do Portfólio	0.0106	0.0106	0.0081	-0.0025
Desvio-Padrão do Portfólio	10.30%	10.30%	9.00%	-1.30%

* Média para a sequência de 10 parâmetros de penalização utilizados.

Fonte: O Autor.

Para evitar a concentração do portfólio em poucos ativos, pode-se incluir restrições adicionais quanto ao limite superior dos pesos dos ativos no portfólio. Para fins de ilustração, estabelece-se o peso máximo de um ativo no portfólio em 5% e executa-se os seguintes comandos:

```
[w, fval, iter, mi, gamma] = portfselection_simplex(r, S, eye(46), ...
    ones(46,1)*0.05, ones(1,46), 1, 1);
[z, gval, iterac] = portfselection_penalization(r, S, [0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.5, 1, ...
    10, 100, 1000, 10000], 0.000001, 0.001, ones(46,1)*0.05, 1);
[x, val, flag, out, lambda] = quadprog(S, -r, [], [], ones(1,46), 1, ...
    zeros(46,1), ones(46,1)*0.05);
```

Na tabela 3 são reportados os principais resultados da execução dos três comandos acima. As funções *portfselection_simplex* e *quadprog* selecionaram 21 ativos para compor o portfólio. Desses 21 ativos, somente dois, Cemig PN (CMIG4) e Comgas PNA (CGAS5), não atingiram o peso máximo de 5%. A função *portfselection_penalization* selecionou 22 ativos para compor o portfólio: os mesmos 21 ativos das demais funções e o ativo Telemar N L PNA (TMAR5), sendo este último com o menor peso entre os ativos selecionados. Os erros implicados pelo uso da abordagem da penalização, quando comparados com a situação anterior, são agora bem menores e, como esperado, somam zero. Embora o erro associado ao valor da função objetivo tenha sido maior, os erros associados aos valores do retorno esperado, variância e desvio-padrão do portfólio são inferiores aos anteriormente observados.

Tabela 3: Resultados das Funções para Solução do Problema do Investidor c/ Restrições de Venda à Descoberto e Limite Superior dos Pesos dos Ativos no Portfólio.

Painel A: Composição do Portfólio				
Ações	Quadprog	Simplex	Penalization	Erro
Bradesco PN (BBDC4)	5.00%	5.00%	4.65%	-0.35%
Bradespar PN (BRAP4)	5.00%	5.00%	4.68%	-0.32%
Brasil ON (BBAS3)	5.00%	5.00%	4.56%	-0.44%
CCR Rodovias ON (CCRO3)	5.00%	5.00%	4.79%	-0.21%
Cemig PN (CMIG4)	2.98%	2.98%	4.29%	1.31%
Comgas PNA (CGAS5)	2.02%	2.02%	4.41%	2.39%
Gerdau Met PN (GOAU4)	5.00%	5.00%	4.62%	-0.38%
Gerdau PN (GGBR4)	5.00%	5.00%	4.70%	-0.30%
Itausa PN (ITSA4)	5.00%	5.00%	4.65%	-0.35%
ItauUnibanco PN (ITUB4)	5.00%	5.00%	4.47%	-0.53%
Lojas Americ PN (LAME4)	5.00%	5.00%	4.57%	-0.43%
Petrobras ON (PETR3)	5.00%	5.00%	4.72%	-0.28%
Petrobras PN (PETR4)	5.00%	5.00%	4.69%	-0.31%
Rossi Resid ON (RSID3)	5.00%	5.00%	4.89%	-0.11%
Sid Nacional ON (CSNA3)	5.00%	5.00%	4.78%	-0.22%
Telemar N L PNA (TMAR5)	0.00%	0.00%	3.31%	3.31%
Tim Part S/A ON (TCSL3)	5.00%	5.00%	4.61%	-0.39%
Tran Paulist PN (TRPL4)	5.00%	5.00%	4.76%	-0.24%
Usiminas ON (USIM3)	5.00%	5.00%	4.72%	-0.28%
Usiminas PNA (USIM5)	5.00%	5.00%	4.63%	-0.37%
Vale R Doce ON (VALE3)	5.00%	5.00%	4.44%	-0.56%
Vale R Doce PNA (VALE5)	5.00%	5.00%	4.09%	-0.91%
Total	100%	100%	100%	0%

Painel B: Outros Resultados				
Descrição	Quadprog	Simplex	Penalization	Erro
Tempo de execução (segundos)	0.360471	0.706072	0.454097	-
Iterações	Não se Aplica	100	12.2*	-
Valor da função objetivo	-0.0213	-0.0213	-0.0210	0.0003
Retorno Esperado do Portfólio	2.47%	2.47%	2.41%	-0.06%
Variância do Portfólio	0.0069	0.0069	0.0063	-0.0006
Desvio-Padrão do Portfólio	8.31%	8.31%	7.94%	-0.37%

* Média para a sequência de 10 parâmetros de penalização utilizados.

Fonte: O Autor.

Por fim, cabe salientar que esses resultados não são indicações de investimento, mas sim a simples aplicação dos algoritmos desenvolvidos ao longo do capítulo 2 para seleção de portfólio de um investidor sujeito a determinadas restrições. Quanto as funções *quadprog* e *portfselection_simplex*, é importante observar que as mesmas são suficientemente gerais a ponto de permitirem qualquer tipo de restrição linear de igualdade ou desigualdade. E no que se refere a função *portfselection_penalization*, deve-se atentar para o fato de que a mesma representa uma aproximação sujeita a erros nem sempre desprezíveis.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo objetivou apresentar formalmente a derivação da fronteira eficiente de média-variância de Markowitz (1952) e apresentar algoritmos para seleção de portfólios eficientes de média-variância. Além de apresentar a abordagem da programação linear para solução do programa quadrático do investidor, a qual provê soluções exatas utilizando o algoritmo simplex modificado, propôs-se também o uso da abordagem da função de penalização, a qual provê soluções inexatas mas que se aproximam da verdadeira solução ótima.

O presente estudo também implementou e demonstrou a utilização dos algoritmos de seleção de portfólios acima referidos utilizando o software Matlab® e uma amostra de ações do mercado brasileiro no período janeiro/2004 a maio/2009. Espera-se que isso incentive o uso dos referidos algoritmos, cujos códigos (M-files) encontram-se nos apêndices (2-4) do presente estudo e podem ser requisitados junto ao autor.

Para futuros estudos, sugere-se a expansão dos algoritmos descritos no presente estudo para que permitam encontrar, de maneira simplificada, todos os portfólios da fronteira eficiente, no caso de restrições de venda à descoberto. Sugere-se também a implementação e demonstração do uso do algoritmo proposto por Ruszczynski e Vanderbei (2003), o qual incorpora o conceito de dominância estocástica e, por isso, representa um avanço em relação a regra de média-variância.

REFERÊNCIAS

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. *Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

INGERSOLL JR, Jonathan E. *Theory of Financial Decision Making*. Savage: Rowman & Littlefield Publishers, 1987.

JENSEN, Paul A.; BARD, Jonathan F. *Operations Research: Models and Methods*. Hoboken: Wiley, 2003.

JUDD, Kenneth L. *Numerical Methods in Economics*. Cambridge: The MIT Press, 1999.

KROLL, Yoram; LEVY, Haim. Stochastic Dominance: A Note. *Journal of Finance*, Vol. 37, No. 3, Junho de 1982, pp. 871-875.

LEVY, Haim. Stochastic Dominance, Efficiency Criteria, and Efficient Portfolios: The Multi-Period Case. *American Economic Review*, Vol. 63, No. 5, Dezembro de 1973, pp. 986-994.

LEVY, Haim; LEVY, Azriel. Stochastic Dominance and the Investment Horizon with Riskless Assets. *Review of Economic Studies*, Vol. 49, No. 3, Julho de 1982, pp. 427-438.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, Março de 1952, pp. 77-91.

MARKOWITZ, Harry. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons, 1959.

MERTON, Robert C. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 7, No. 4, Setembro de 1972, pp. 1851-1872.

RUSZCZYŃSKI, Andrzej; VANDERBEI, Robert J. Frontiers of Stochastically Nondominated Portfolios. *Econometrica*, Vol. 71, No. 4, Julho de 2003, pp. 1287-1297.

SHARPE, William F. A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection. *Management Science*, Vol. 13, No. 7, Março de 1967, pp. 499-510.

SHARPE, William F. A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 6, No. 5, Dezembro de 1971, pp. 1263-1275.

SHARPE, William F. A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, Vol. 9, No. 2, Janeiro de 1963, pp. 277-293.

STERN, Júlio M.; PEREIRA, Carlos A. B.; RIBEIRO, Celma de O.; DUNDER, Cibele; NAKANO, Fábio; LAURETTO, Marcelo. *Otimização e Processos Estocásticos Aplicados à Economia e Finanças*. São Paulo: IME-USP, 2006.

STONE, Bernell K. A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 8, No. 4, Setembro de 1973, pp. 621-636.