

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO USANDO XFEM EM  
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE NO PLANO

por

Eduardo Nantes Serenza

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Outubro de 2019

DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO USANDO XFEM EM  
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE NO PLANO

por

Eduardo Nantes Serenza  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Area de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rossi.

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Bitencourt - PPGEC UFRGS

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz - PROMEC UFRGS

Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia de Suarez - UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira  
Coordenador do PROMEC.

Porto Alegre, 3 de Outubro de 2019

A meus pais, Januário (in memoriam) e Eunice,  
e minha esposa Marilise.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha esposa Marilise Bresolin pelo apoio em toda essa jornada. Ao professor Rodrigo Rossi, por toda ajuda e orientação prestada ao longo deste trabalho. Ao professor Oscar Suarez, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo tempo disponibilizado na troca de ideias. Ao PROMEC/UFRGS e a todos professores que fizeram parte desta estapa da minha vida, pela oportunidade e pelo ensino de qualidade.

## RESUMO

A solução dos mais diversos tipos de Problemas de Valor de Contorno (PVC) e Problemas de Valor de Contorno Iniciais (PVCI) por meio da aplicação de métodos numéricos tem tido grande destaque na engenharia, principalmente depois da popularização dos computadores pessoais. Em muitas das aplicações de engenharia em mecânica dos sólidos o Método das Diferenças Finitas (MDF) foi sucedido pelos já consolidado Método dos Elementos Finitos (MEF) devido à sua flexibilidade e precisão na resolução de PVCs e PVCI com geometria e condições de contorno e iniciais complexa. Entretanto, demandas não completamente atendidas pelo MEF estão sendo requeridas atualmente no que tange aspectos como precisão, convergência, robustez e estabilidade em problemas específicos onde métodos já consolidados apresentam dificuldades. Em geral estes problemas envolvem descontinuidades, singularidades e altos gradientes, isto é, possuem algum tipo de localização. A fim de vencer essas dificuldades, o método dos elementos finitos estendidos (XFEM) tem sido desenvolvido para facilitar a modelagem de descontinuidades arbitrárias tal como saltos, singularidades e outros recursos não suaves nos elementos. A técnica promove uma ferramenta poderosa para enriquecimento de espaços de solução com informação vinda das soluções assintóticas e outros conhecimentos da física do problema. O objetivo principal deste trabalho é apresentar a teoria e aplicação do XFEM para problemas ligados a mecânica da fratura linear elástica em problemas de elasticidade no plano. O critério de comparação é o fator de intensidade de tensão (FIT). Para geometrias simples os resultados computacionais são próximos dos valores obtidos com as soluções disponíveis na literatura e assim a qualidade do método é verificada.

Palavras-chave: Singularidades; XFEM; Enriquecimento; Fator de Intensidade de Tensão.

## **ABSTRACT**

The solution of the most diverse types of Contour Value Problems (PVC) and Initial Contour Value Problems (PVCi) through the application of numerical methods has been prominent in engineering, especially after the popularization of personal computers. In many of the solid mechanics engineering applications the Finite Difference Method (MDF) has been succeeded by the already consolidated Finite Element Method (FEM) due to its flexibility and accuracy in the resolution of PVCs and PVCi with geometry and complex boundary and initial conditions. However, demands not fully met by FEM is currently being demanded regarding aspects such as precision, convergence, robustness and stability in problems where already consolidated methods present difficulties. In general these problems involve discontinuities, singularities and high gradients, that is, they have some kind of localization. In order to overcome these difficulties, the extended finite element method (XFEM) has been developed to facilitate the modeling of arbitrary discontinuities such as jumps, singularities, and other non-smooth features in the elements. The technique promotes a powerful tool for enriching solution spaces with information from asymptotic solutions and other knowledge of problem physics. The main objective of this work is to present the theory and application of XFEM for problems related to the mechanics of elastic linear fracture in plane elasticity problems. The comparison criterion is the stress intensity factor (SIF). For simple geometries the computational results are close to the values obtained with the solutions available in the literature and thus the quality of the method is verified.

**Keywords:** Singularities; XFEM; Enriquecimiento; Stress Intensity Factor.

# INDÍCE

<b>1</b>	<b>CARACTERIZAÇÃO DO TRABALHO</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução	1
1.2	Objetivos	2
1.2.1	Objetivo geral	2
1.2.2	Objetivos específicos	2
1.3	Justificativa e limitações	3
1.4	Organização do trabalho	3
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>3</b>
2.1	Atualidade e Relevância do Tema	3
2.1.1	Os métodos do tipo MBMs	3
2.1.2	Os métodos do tipo MLSM	8
2.2	O método dos elementos finitos eXtendidos	13
2.2.1	Interfaces	13
2.2.2	Descontinuidades	14
2.2.3	O campo de deslocamento enriquecido	15
2.2.4	Equação governante de um corpo com trinca	18
2.2.5	Discretização das equações governantes	19
2.2.6	Simulação de crescimento de trinca com XFEM	23
2.2.7	Diagrama dos passos do método XFEM implementando	25
2.3	Mecânica da fratura linear elástica	26
2.3.1	Conceitos básicos em mecânica da fratura	26
2.3.2	Concentração de tensão efeito de fissuras	27
2.3.3	Balanço de energia de Griffith	30
2.3.4	Taxa de liberação de energia	32
2.3.5	Análise de tensão	33
2.3.6	O fator de intensidade de tensão	34
2.3.7	Relações entre FIT e comportamento global	36
2.3.8	Relação entre K e G	38
2.3.9	Fratura no modo misto	40
2.3.10	Trinca angular	40
2.4	Integral J	42
2.4.1	Cálculo da Integral J analítica	42
2.4.2	Calculo da Integral J numérica no MEF	44
2.5	Procedimentos de integração numérica	51
2.5.1	Integração numérica com subelementação	51
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>53</b>
3.1	Caso 1 - Cálculo do Fator de intensidade de tensão de uma placa com trinca submetida a um carregamento uniaxial	53
3.1.1	Comparação entre estratégias de integração numérica para o cálculo do FIT	57

3.2 Caso 2 - Cálculo do FIT de uma placa com trinca no centro submetida a um carregamento uniaxial .....	58
3.3 Caso 3 - Cálculo do Fator de intensidade de tensão de um corpo de prova padronizado ... ..	61
3.4 Caso 4 - Cálculo do Fator de intensidade de tensão de um corpo de prova tipo viga bi-apoiada. ....	65
<b>4 CONCLUSÕES .....</b>	<b>69</b>
4.1 Próximos passos .....	69
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>70</b>



## LISTA DE FIGURAS

2.1 a) Domínio em 1D dos elementos finitos clássicos, dos blending elements I b e dos reproducing elements I* ; b) Somatório das funções partição de unidade no domínio I* e descrição das funções rampa no domínio I b ; c) domínio em 2D dos reproducing elements I* , dos blending elementos I b e dos elementos finitos clássicos; d) Descrição do somatório das funções de partição de unidade no domínio I* e das funções rampa no domínio I b . [Adaptado de Fries e Belytschko,2010] . . . . .	8
2.2 Comparação entre as bandas de cisalhamento preditas pelo método livre de malha RPKM e MEF. Adaptado de Li et al., 2000 . . . . .	11
2.3 Corpo com cobertura por funções tipo EFG. [Adaptado de Rossi et al., 2008]. . . . .	14
2.4 Exemplo para (a) Descontinuidade aberta e (b) fechada. [Adaptado de Fries eBelytschko, 2010] . . . . .	15
2.5 Exemplo para uma (a) descontinuidade forte e (b) fraca através de uma interface. Abaixo estão as malhas adequadas para uma simulação clássica de MEF. [Adaptado de Fries e Belytschko, 2010] . . . . .	15
2.6 Função sinal distância. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	16
2.7 Vista esquemática das funções assintóticas de ponta de trinca. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . .	18
2.8 Geometria do domínio fraturado envolvendo a descontinuidade $\Gamma d$ . [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	19
2.9 Sistema de coordenada local e global na ponta da trinca. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	23
2.10 Método de enriquecimento de elemento de ponta de trinca. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	24
2.11 O esquema de enriquecimento de área fixa utilizado na região da ponta da trinca para aumentar os pontos nodais inseridos no círculo pelas funções de ponta de trinca: (a) Malha quadrilateral; b) Malha triangular. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	25
2.12 Diagrama dos passos do método XFEM implementando. . . . .	26
2.13 Energia potencial e força como uma função da separação atômica. No equilíbrio de separação $x_0$ a energia potencial é minimizada, e as forças de atração e repulsão são balanceadas. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	27
2.14 Furo elíptico em placa plana. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	28
2.15 Tensão na ponta da trinca quando $\rho = 0$ . [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	29
2.16 Uma trinca através da espessura em uma placa infinita ampla submetida a uma tensão de tração remota. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	31
2.17 Pequena trinca circular embutida em um sólido sujeito a uma tensão remota. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	32

2.18	Definição do eixo das coordenadas à frente da ponta de trinca. A direção z é normal para a página. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	34
2.19	Os três modos de carregamento podem ser aplicados na trinca. [Adaptado de Anderson, 2005] .35	
2.20	Tensão normal no plano da trinca modo I. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	36
2.21	Trinca reta em uma placa infinita para um caso geral onde a tensão não é perpendicular ao plano da trinca. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	38
2.22	Aplicação da tensão de fechamento o que encurta a trinca por $\Delta a$ . [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	39
2.23	Propagação típica de uma trinca inicial que não é octogonal a tensão normal aplicada. O carregamento para a trinca angular é uma combinação do modo I e modo II, mas a trinca tende a se propagar em um ângulo normal a tensão aplicada, resultando em um carregamento do modo puro I. [Adaptado de Anderson, 2005] . . . . .	41
2.24	Infinitesimal trinca angular na ponta da trinca macroscópica. [Adaptado de Anderson, 2005] .	42
2.25	O domínio da Integral J para o cálculo de fatores de intensidade de tensão em modo misto. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	45
2.26	Visualização da seleção de nós do domínio utilizando a função peso q. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	49
2.27	Visualização da derivada da função Peso $\partial q/\partial x$ utilizada na integral de Interação I. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	49
2.28	Visualização da derivada da função Peso $\partial q/\partial y$ utilizada na integral de Interação I. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	50
2.29	Visualização da função gradiente na magnitude $\partial q$ mag atuando em nós com valores maiores que 0. [Adaptado de Khoei, 2014] . . . . .	50
2.30	Tipos de elementos utilizados neste método numérico . . . . .	51
2.31	Elemento com enriquecimento de ponta de trinca com subelementação de 3x3 subelementos. .	52
2.32	Relação entre o elemento Master e o subelemento. . . . .	52
3.1	Método de elemento de ponta de trinca e elemento de área fixa, mostrando elementos com enriquecimento de Heaviside, ponta de trinca e elementos que compartilham algum nó enriquecido. . . . .	54
3.2	Placa em carregamento uniaxial. . . . .	54
3.3	Gráfico da placa com trinca em carregamento uniaxial. . . . .	56
3.4	Malha 46x66 e deslocamento na placa com trinca em carregamento uniaxial. . . . .	56
3.5	Tensões na placa com trinca em carregamento uniaxial. . . . .	57
3.6	Placa em carregamento uniaxial. . . . .	58
3.7	Placa com trinca no centro submetida a um carregamento uniaxial. . . . .	59
3.8	Gráfico de convergência para K I da placa com trinca no meio em carregamento uniaxial. . . .	60
3.9	Malha 23x56 e deslocamento na placa com trinca no centro em carregamento uniaxial. . . . .	60

3.10	Tensões na placa com trinca no centro em carregamento uniaxial. ....	61
3.11	Corpo de prova padronizado com trinca submetida a um carregamento uniaxial. ....	62
3.12	Gráfico de convergência para K I do Corpo de prova padronizado. ....	63
3.13	Malha 58x68 do Corpo de prova padronizado. ....	63
3.14	Elementos com enriquecimento de elemento de ponta de trinca com nós em azul. ....	63
3.15	Deslocamento do Corpo de prova padronizado. ....	64
3.16	Tensões no Corpo de prova padronizado. ....	64
3.17	Elementos com enriquecimento de elemento de ponta de trinca com nós em azul, e elementos que compartilham algum nó enriquecido. ....	65
3.18	Caso viga bi-apoiada. ....	66
3.19	Gráfico de convergência da Viga bi-apoiada. ....	67
3.20	Malha 130 x 54, 7020 elementos. ....	67
3.21	Deslocamento na viga bi-apoiada com trinca no centro. ....	67
3.22	Tensões na viga bi-apoiada com trinca no centro. ....	68

## LISTA DE TABELAS

2.1 Campo de tensão à frente da ponta da trinca para modo I e modo II em um material isotrópico elástico linear. . . . .	35
2.2 Campo de deslocamento na ponta da trinca para modo I e modo II para material isotrópico linear elástico. . . . .	35
2.3 Tensões e deslocamentos não-nulos no modo III (material elástico linear isotrópico). . . . .	35
2.4 Derivadas de "r" e "θ" em relação a x e y. . . . .	47
2.5 Derivadas de "u" e "v" em relação a x e y . . . . .	47
3.1 Resultados da placa com trinca em carregamento uniaxial. . . . .	55
3.2 Resultados da placa com trinca em carregamento uniaxial. . . . .	55
3.3 Resultados obtidos com as diferentes estratégias de integração. . . . .	58
3.4 Resultados da placa com trinca em carregamento uniaxial. . . . .	59
3.5 Resultados do corpo de prova padronizado. . . . .	62
3.6 Resultado caso Viga bi apoiada. . . . .	66

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

FIT	Fator de Intensidade de Tensão
GDL	Grau de Liberdade
GFEM	Generalized Finite Element Method
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MEF	Metódo dos Elementos Finitos
PUM	Partition of Unity Method
PU	Partição unitária
XFEM	eXtended Finite Element Method
EPT	Estado Plano de Tensão
EPD	Estado Plano de Deformação
PVC	Problema de Valor de Contorno
PVCI	Problema de Valor de Contorno Inicial
MDF	Método das Diferenças Finitas

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$E$  Módulo de Elasticidade de Young, Pa

$f(x)$  Funcional das funções objetivo

### Símbolos Gregos

$\varepsilon$  Tensor de deformações, m/m

$\nu$  Coeficiente de Poisson

$\rho$  Densidade mássica, kg/m<sup>3</sup>

$\sigma$  Tensor de tensões, Pa

$\sigma_{esc}$  Tensão limite de escoamento, Pa

$\sigma_R$  Tensão limite de ruptura, Pa

# 1 CARACTERIZAÇÃO DO TRABALHO

## 1.1 Introdução

O método de elementos extendidos (XFEM), é uma técnica numérica baseada no método dos elementos finitos (MEF) e no método da partição unitária (PUM). Ele estendendo a abordagem do método dos elementos finitos clássicos enriquecendo do espaço da solução por soluções de equações diferenciais com funções descontínuas. No método dos elementos finitos o salto de deslocamento perto da ponta da trinca é basicamente capturado refinando a malha localmente. O número de GDL pode aumentar drasticamente, especialmente em aplicações tridimensionais. Além disso, o cálculo incremental de um crescimento de trinca requer que a malha seja refeita a cada incremento de propagação. A atualização da malha além de ser uma operação dispendiosa, aumenta o custo computacional e causa algum impacto na qualidade dos resultados. Para evitar essas dificuldades computacionais, uma nova abordagem ao problema consistiu em levar em conta o conhecimento prévio da solução exata, veja em Khoei, 2014. Em XFEM, funções especiais são adicionadas à aproximação de elementos finitos usando a estrutura da partição unitária (PU).

Em um âmbito mais geral, nas últimas duas décadas e meia novos métodos tem sido usados para aproximar as formas fracas provenientes de problemas de valor de contorno, com condições iniciais ou não, sobretudo para certos problemas de engenharia onde os métodos tradicionais, tais como o método de elementos finitos, diferenças finitas e elementos de contorno, apresentam dificuldades. Desde então, muita atenção tem sido dada pela comunidade científica, e em especial à área de matemática aplicada e mecânica computacional, aos chamados *métodos sem malha (meshless methods)* e *métodos livres de malha (mesh-free methods)* bem como aos *métodos* que são *baseados* em uma *malha* de integração, mas que generalizam (ou estendem) os métodos tradicionais, tais como aqueles inerentes ao Método dos Elementos Finitos.

Pode-se perceber que uma primeira diferenciação entre os métodos a serem estudados neste trabalho é se são baseados em uma malha de integração fixa (associada ao suporte da função de interpolação/aproximação) ou não. Desta forma, a fim de simplificar o entendimento vai se chamar aqui Métodos Livres de Malha e Métodos Sem Malha pelo acrônimo MLSM e Métodos Baseados em Malha por MBM.

Em revisões sobre os MLSM, apresentadas por Li e Liu, 2002, Liu 2003 e Chen et al., 2006, e sobre os MBM, em Fries e Belytschko, 2010 e Belytschko et al., 2009a, são comentadas várias áreas onde sua aplicação é promissora. Dentre elas podem-se citar as áreas/problemas de *localização, grandes deformações, propagação de trincas, mudança de fase e descontinuidades*.

Soluções não suaves contendo descontinuidades, singularidades e altos gradientes ocorrem frequentemente em muitos problemas na física. Como exemplo de descontinuidades em fronteiras fechadas pode-se citar as soluções que ocorrem na interface de materiais e em frentes de mudança de fase. Já em trincas as soluções em termos de tensões e deformações são des-

contínuas, em interfaces abertas, e são singulares na ponta da trinca. Bandas de cisalhamento e discordâncias também são exemplos de problemas onde uma descontinuidade no campo de deslocamentos está presente. Problemas de camada limite são exemplos na área de mecânica dos fluídos onde altos gradientes são encontrados.

Soluções analíticas são escassas nesta área, sendo encontradas apenas para casos ideais. Por outro lado, tais problemas são de difícil tratamento numérico, isto é, soluções numéricas costumam fornecer resultados pobres em exatidão próximos a estas regiões, o que pode levar a avaliações erradas. A estratégia mais utilizada em análises usando o Método dos Elementos Finitos é a de usar estratégias de refino “*hp*” da malha de integração, procurando melhorar a discretização ou espaço de solução. Entretanto, existe a possibilidade de utilizar métodos mais “modernos” desenvolvidos especialmente para enfrentar tais problemas sem tem que recorrer a refinamentos e remalhamentos. Estas estratégias consistem na aplicação do MLSM ou mesmo do MBM.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo geral**

O objetivo geral deste trabalho consiste em determinar os fatores de intensidade de tensão (FIT) para problemas da mecânica da fratura linear elástica (MFLE), utilizando o método dos elementos finitos estendidos (XFEM) com elementos quadrilaterais de quatro nós com regularidades do tipo  $C^0$ , construídos com base no Método da Partição de Unidade (MPU) e comparando com as soluções analíticas de FIT da MFLE.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

Os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Implementar um código do MEF para trabalhar com problemas bidimensionais da mecânica dos sólidos linear elástica;
2. Acrescentar uma implementação do método dos elementos finitos estendidos (XFEM) para trabalhar com problemas da mecânica da fratura linear elástica (MFLE);
3. Avaliar o comportamento do código de MEF implementado na solução de alguns problemas clássicos de elasticidade plana infinitesimal;
4. Implementar o cálculo da Integral J numérica para determinação dos fatores de intensidade de tensão (FIT);
5. Verificar o comportamento do XFEM e da Integral J comparando os resultados com problemas clássicos da MFLE.



### **1.3 Justificativa e limitações**

Nesta dissertação é implementada uma versão do método dos elementos extendidos (XFEM). Este método permite uma melhoria significativa na modelagem e avaliação de fraturas, possibilitando, em tese, uma análise de elementos finitos sem haver a necessidade de alterar a malha com a propagação da trinca, tornando assim a trinca geometricamente independente, ou pelo menos, menos dependente da malha. A descontinuidade presente nos elementos, devido à existência da trinca, é descrita através do enriquecimento das funções de aproximação convencionais de elementos finitos. Este método viabiliza tanto o estudo de trincas estacionárias como análise de propagação de trincas.

Todas as análises que se seguem foram efetuadas exclusivamente com trincas preconcebidas. Ainda, somente modelos com módulos elástico lineares, assim, foi somente considerado o estudo da Mecânica da fratura linear elástica (MFLE), isto é, sem considerar plasticidade na região da ponta da trinca.

### **1.4 Organização do trabalho**

Esta dissertação está organizada em 3 capítulos distintos mais a seção de conclusão e referências bibliográficas. No presente capítulo 1 está exposta a introdução e sintetiza-se a constituição da dissertação desenvolvida. No capítulo 2 explica-se o método da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), o fator de intensidade de tensões (FIT), a integral J e o método de elementos finitos extendidos (XFEM). No capítulo 3 os resultados são mostrados e discutidos. Os conteúdos referentes às várias análises efetuadas aos modelos são apresentados. Finalmente, estão disponíveis as conclusões desta dissertação, resumindo os objetivos e resultados alcançados, fazendo ainda referência a sugestões para trabalhos futuros. No final deste trabalho, estão apresentadas as referências bibliográficas utilizadas.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Atualidade e Relevância do Tema

#### 2.1.1 Os métodos do tipo MBMs

**PUM (PuFEM), XFEM, GFEM e SGFEM** Nesta seção é apresentada uma introdução aos métodos baseados em malha de integração que vem ganhando mais e mais destaque nos últimos anos, são eles

- *Partition of Unity Method (PUM) ou Partition of Unity Finite Element Method (PuFEM)* por Melenk e Babuška, 1996;
- *eXtented Finite Element Method (XFEM)* por Moës et al., 1999;
- *Generalized Finite Element Method (GFEM)* por Strouboulis et al., 2000a;
- *Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)* por Babuška e Banerjee, 2012, dentre outras variações.

Os três primeiros métodos apresentados na lista acima são, de fato, muito parecidos. De certa forma os métodos GFEM e XFEM podem ser colocados como métodos que enriquecem um espaço de aproximação construído com Partições de Unidades (PUs) de forma extrínseca. Assim, podem ser vistos como uma derivação do PUM (PuFEM) proposto por Babuška et al., 1994 e elaboradas em Melenk e Babuška, 1996 e Babuška e Melenk, 1997. Esses trabalhos trataram de enriquecimentos globais, com polinômios harmônicos, para as equações de *Laplace* e *Helmholtz*, e funções holomórficas para elasticidade linear. Além disso, enriquecimentos de partição de unidade de baixa ordem com polinômios de ordem superior foram realizados. O objetivo destes trabalhos foi o de melhorar as propriedades de aproximação do espaço original, o qual é em geral um espaço clássico MEF, usando uma estratégia global de refino (em todos os nós da malha).

Fica subentendido que estes trabalhos originais do GFEM tinham o objetivo de enriquecer o espaço de aproximação para melhorar as propriedades gerais da aproximação em todo o domínio e não a captura de fenômenos localmente não-suaves.

Nos trabalhos acima mencionados, a generalidade dos métodos é enfatizada. No entanto, a construção das PUs e a integração numérica da forma fraca podem ser drasticamente diferentes. PUs do tipo Meshfree baseadas no MMQM são bem conhecidas por serem computacionalmente “caras” e notoriamente difíceis de integrar, enquanto os PUs baseados em malha são facilmente construídos pelos elementos finitos de Lagrange sendo a quadratura para integração da forma fraca simples de implementar.

Para eficiência, é desejável reter o máximo possível do MEF clássico no PUM. Esta é a motivação para o GFEM por Strouboulis et al., 2000a (uma combinação do clássico MEF e do

PUM) e do XFEM de Moës et al., 1999. A PU nesses métodos é fornecida pelas funções de forma MEF padrão. O GFEM foi aplicado pela primeira vez em Strouboulis et al., 2000a,b, 2001, 2003, 2006, 2008 a diferentes problemas elípticos (mais frequentemente a equação de Laplace) com vazios; Esses trabalhos também fornecem um histórico matemático do GFEM. Os enriquecimentos analíticos são usados de maneira similar à do PUM, em particular os métodos com enriquecimentos polinomiais e polinomiais harmônicos são relatados.

Embora o nome GFEM tenha sido utilizado anteriormente por autores que contribuíram para a estrutura do atual GFEM, veja em Babuška e Osborn 1983; Babuška et al. 1995, parece que naquela época o termo foi colocado de forma bastante geral, sem relação a partições da unidade, e não leva às interpretações concretas dadas pelo método na sua forma de apresentação atual, isto é, sem relação específica com as PUs. Aqui o nome GFEM é usado no sentido de Strouboulis et al., 2000a.

O XFEM também emprega PUs fornecidas pelas funções MEF convencionais, veja Belytschko e Black, 1999 e Nicolas et al., 1999. *Um recurso que distingue o XFEM dos primeiros trabalhos no GFEM é que apenas partes locais do domínio são enriquecidas e essa localização é obtida pelo enriquecimento de um subconjunto dos nós.* Além disso, enriquecimentos que capturam descontinuidades arbitrárias e funções não suaves foram desenvolvidos no contexto do XFEM em Nicolas et al., 1999, que tratou da mecânica linear de fratura elástica. Mais tarde, o XFEM foi utilizado para fenômenos de interface geral, e no âmbito de problemas multimateriais em Sukumar et al., 2001, solidificação em Chessa et al., 2002, bandas de cisalhamento em Areias e Belytschko, 2006, discordâncias em Belytschko e Gracie, 2007, e problemas de multi-campo em Zilian e Legay, 2008, só para citar alguns exemplos de aplicação. As características importantes que descrevem o XFEM são:

1. O enriquecimento é extrínseco e realizado pelo conceito de PU;
2. O enriquecimento é local porque apenas um subconjunto dos nós é enriquecido;
3. O enriquecimento é baseado em malha, ou seja, é construído por meio de funções de forma MEF padrão e
4. enriquecimentos para descontinuidades arbitrárias na função e seus gradientes estão disponíveis.

Esses atributos também estão presentes em algumas realizações posteriores do GFEM e PUM, ver por exemplo os trabalhos de Wells e Sluys, 2001 e Simone et al., 2006. Neste trabalho, onde quer que for utilizado o termo XFEM, o mesmo se aplica ao GFEM e ao PUM, desde que eles usem funções de formas baseadas em malha e enriquecimentos locais. O nome GFEM tem sido usado para métodos que variam do PUM (veja por exemplo Duarte et al., 2001 onde funções *Shepard* livres de malha, bem como funções MEF são empregadas) para métodos semelhantes ao XFEM (como por exemplo em Simone et al., 2006, que não é distinguível do XFEM). Assim,

as distinções entre PUM, GFEM e XFEM tornaram-se bastante confusas. De certo modo, como os nomes são usados hoje, tais métodos são quase idênticos.

### Enriquecimentos usados em MBM

- Enriquecimento global: Dado o conjunto de todos os nós da malha do domínio  $I$  a aproximação é construída fazendo

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(x) u_i}_{\text{FEM aprox.}} + \underbrace{\sum_{i \in I} N_i^*(x) \varphi(x) a_i}_{\text{Enriquecimento}} \quad (2.1)$$

- Enriquecimento local: Dado  $I^* \subset I$  um subconjunto particular de nós do domínio então

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(x) u_i}_{\text{FEM aprox.}} + \underbrace{\sum_{i \in I^*} N_i^*(x) \varphi(x) a_i}_{\text{Enriquecimento}} \quad (2.2)$$

Tais procedimentos de melhorar o espaço de aproximação original, presentes originalmente nas características das funções  $N_i(x)$ , são conhecidos como enriquecimentos *extrínsecos*. O tipo de função  $N_i^*(x)$  e  $\varphi(x)$  utilizados nas discretizações acima depende do tipo de problema a ser abordado, isto é, se o procedimento é utilizado para modelar altos gradientes, singularidades ou ainda para modelar descontinuidades fechadas ou abertas, fixas ou móveis.

A Equação 2.1 é mais utilizada nos métodos baseados em enriquecimento extrínseco nodal onde as funções das PU são globais. Este tipo de enriquecimento é visto no GFEM, SGFEM, PUM, PuFEM, e XFEM. Por outro lado a Equação 2.2 é especificamente utilizada no XFEM onde a metodologia do enriquecimento é baseado na PU porém em nível de elemento Belytschko et al., 2009a. O XFEM com enriquecimento local tem um custo computacional significativamente inferior à mesma metodologia utilizando enriquecimento global. Visto que não se trata mais de enriquecer a função da PU global e sim a parcela que está definida em elementos específicos (*reproducing elements*, ver Figura 2.1) surgem problemas de compatibilidade de funções de forma com elementos vizinhos aos elementos enriquecidos. Para contornar os efeitos de descontinuidade do campo primal há necessidade de utilizar elementos de transição entre os elementos com nós enriquecidos e o restante do domínio global onde são utilizados elementos finitos tradicionais (ver Figura 3.11 (a)-(c)). Estes elementos são conhecidos na literatura como *blending elements* ou em uma tradução livre *elementos de mistura*. Sobre os *blending elements* estão definidas algumas funções da partição de unidade que pertencem ao domínio enriquecido  $I^*$ , contudo estas funções sobre o domínio  $I_b$  (domínio dos suportes dos *blending elements*) não são suficientes para construir uma PU. Apesar da notória diminuição em tempo computacional, da sistemática do refino local, a utilização dos *blending elements* traz consigo o inconveniente de não reproduzir a função de enriquecimento já que não tem sobre os seus suportes uma PU

definida. Este inconveniente origina os coeficientes parasitas de produzem perda significativa de precisão Fries e Belytschko, 2010. Para contornar esta limitação foram propostos alguns procedimentos comentados a seguir:

- Supressão dos *blending elements* forçando as condições de contorno do campo primal entre os elementos finitos clássicos e os *reproducing elements*;
- Utilização dos *blending elements* hierárquicos como uma forma de compensar o efeito desfavorável dos coeficientes parasitas;
- Utilização de funções rampas ou funções peso originando o *Corrected XFEM* Belytschko et al., 2009b.

A função rampa, mostrada na Figura 2.1 (b)-(d) tem como finalidade eliminar por sobreposição os modos parasitas nos *blending elements*. Esta função é obtida a partir das funções de forma de elementos de baixa ordem utilizadas em FEM. Com a utilização das funções rampa a Equação 2.2 é agora descrita pela Equação 2.3 conforme observado em Fries e Belytschko, 2010.

$$u_h(x) = \sum_{I \in \Omega} N_I(x) u_I + \sum_{I^* \in \Omega} N_{I^*}^*(x) R(x) [\varphi(x) - \varphi(x_{I^*})] a_{I^*} \quad (2.3)$$

Na Equação 2.3 o termo entre colchetes corresponde ao *shift method* que é utilizado para garantir que as funções de enriquecimento vão à zeros nos nós enriquecidos. Este procedimento permite que unicamente os valores da PU sejam não nulos nos nós enriquecidos. Para o caso de PU's com propriedade delta de kronecker os valores nodais do campo primal correspondem ao deslocamento físico do nó. Note que isto ocorre por conta que as funções de partição de unidade são funções de interpolação. Este fato não ocorre com partições de unidade PU's obtidas com funções MLS. Algumas propostas na abordagem dos problemas do condicionamento da matriz de rigidez e melhora da convergência na utilização do *corrected XFEM*.

Em Agathos et al., 2016 os autores utilizam o termo *Stable* para abordar o problema tridimensional de simulação de fratura não plana contornando o problema do mal condicionamento e da perda de convergência características do *corrected XFEM* original. Uma das características deste trabalho é a extensão do *corrected XFEM* para uma abordagem global enriquecendo os nós contidos numa região definida por um raio específico medido a partir da ponta da trinca. Nesta abordagem, chamada de CGE-XFEM (*Continuous Enrichment Global XFEM*), também são enriquecidos os nós dos *blending elements* que fazem fronteira com os elementos finitos tradicionais. Os resultados obtidos em norma de energia  $\|u\|_E$  e norma  $\|u\|_{L^2}$  foram menores para a sistemática proposta do que na versão original do XFEM. Quanto ao número de condição escalonado os valores obtidos para CGE-XFEM ficaram próximos ao FEM clássico e muito inferiores aqueles obtidos pelo pelo XFEM original.

Já em Agathos et al., 2019a os autores utilizam o procedimento de quase ortogonização das funções de enriquecimento local utilizadas para simular problemas de mecânica da fratura. A

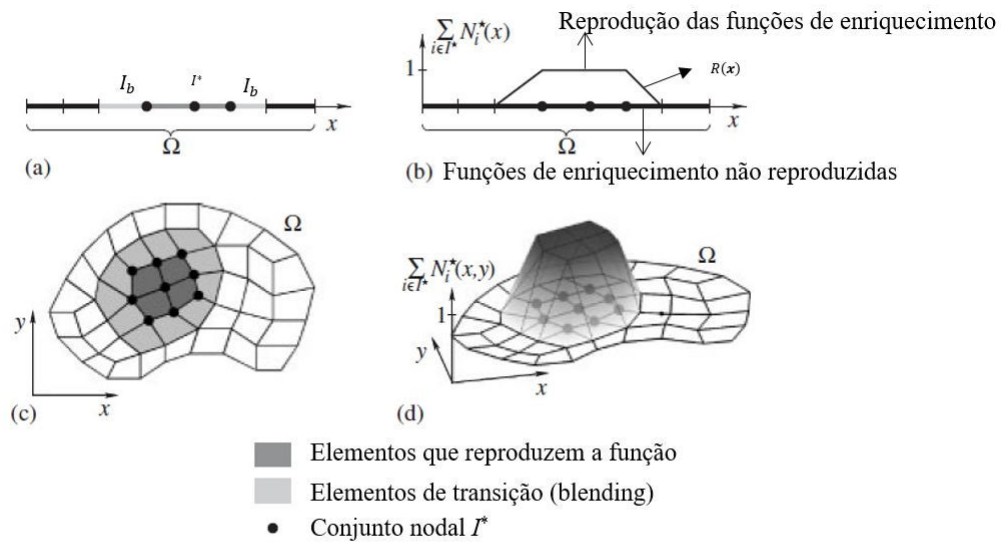


Figura 2.1 – a) Domínio em 1D dos elementos finitos clássicos, dos *blending elements*  $I_b$  e dos *reproducing elements*  $I^*$ ; b) Somatório das funções partição de unidade no domínio  $I^*$  e descrição das funções rampa no domínio  $I_b$ ; c) domínio em 2D dos *reproducing elements*  $I^*$ , dos *blending elements*  $I_b$  e dos elementos finitos clássicos; d) Descrição do somatório das funções de partição de unidade no domínio  $I^*$  e das funções rampa no domínio  $I_b$ . [Adaptado de Fries e Belytschko, 2010].

sistemática utilizada remove os modos linearmente dependentes característicos do enriquecimento das funções de Heaviside e das funções de enriquecimento para a ponta de trinca. O resultados obtidos para a versão extrudada 2D do problema de Westergaard mostraram convergência ótima em norma  $\|u\|_{L^2}$  para a versão geométrica de enriquecimento das funções de ponta de trinca. Com relação ao número de condição a diminuição obtida pelo processo de quase-ortogonalização, com relação aos resultados do XFEM tradicional, é significativa no processo de enriquecimento geométrico porém não produz alterações no enriquecimento topológico.

Resultados semelhantes de crescimento do número de condição são observados para os exemplos do tipo *penny crack* e para o exemplo de trinca de borda num paralelepípedo tracionado em planos perpendiculares à abertura da trinca. O que se observou nos resultados obtidos pelo processo de quase-ortogonalização dos exemplos analisados é que não houveram diferenças, a menos do enriquecimento geométrico, com relação à convergência em norma  $\|u\|_{L^2}$  apesar da diminuição significativa do número de condição da matriz de rigidez observado em todos os exemplos.

Em Agathos et al., 2019b os autores propõem um procedimento misto baseado na quase-ortogonalização das funções de localização citado em Agathos et al., 2019a para melhorar a estabilidade do sistema linear e a utilização do SGFEM (*Stable Generalized Finite Element Method*, Babuška e Banerjee, 2012 na supressão de modos linearmente dependentes que sur-

gem nos blending elements este procedimento foi denominado pelos autores pelo autores de *Polynomial Stable corrected quasi-orthogonal XFEM* (Pi-SC-OE- XFEM). Os resultados numéricos observados pela metodologia proposta mostraram: Convergência ótima em norma de energia em problemas tridimensionais suaves aproximados por enriquecimento polinomial de quarta ordem da PU, contudo com taxas de crescimento elevado do número de condição. Melhora significativa das taxas de convergência em norma  $\|u\|_{L^2}$  para o problema em 2D extrudado de Westergaard utilizando o P1-SC-OE-XFEM com relação ao XFEM tradicional. No que tange ao número de condição a metodologia proposta é efetiva unicamente no refino geométrico não produzindo alterações no refino topológico.

### 2.1.2 Os métodos do tipo MLSM

Embora este trabalho foque no XFEM, vai ser apresentada aqui uma breve revisão sobre os métodos livres e sem malha. O trabalho de Nayroles et al., 1992 foi o pioneiro na utilização desta classe de métodos através do que os autores chamaram de “*diffuse element method* (DEM)”. Neste trabalho os autores fizeram uso do método de aproximação por mínimos quadrados móveis (MMQM)<sup>1</sup> proposto por Lancaster e Salkauskas, 1981 para construir funções de aproximação/interpolação de alta ordem de regularidade. O nome “*diffuse*” vem do uso de pseudo-derivadas destas funções ou gradientes difusos.

Entretanto, foi a partir do trabalho de Belytschko et al., 1994 que o MMQM foi completamente “acomodado” e utilizado dentro de um procedimento de Galerkin para aproximação de PVCs. Os autores chamaram este método de *Element-Free Galerkin* (EFG). A partir deste trabalho surgiram uma gama de novos métodos e com eles novas nomenclaturas foram surgindo. A esta classe de métodos foi dado o nome de métodos sem malha *meshless methods* ou métodos livres de malha *meshfree methods* para aqueles métodos onde não existe uma malha de integração associada diretamente ao suporte da função de aproximação (ou de interpolação em alguns casos) ou existe uma malha de integração, mas esta não está fortemente ligada com o suporte da função. Como exemplo de tais métodos pode-se citar:

- *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH)<sup>2</sup> em Monaghan, 1988;
- *Diffuse Element Method* (DEM) em Nayroles et al., 1992;
- *Element-Free Galerkin* (EFG) em Belytschko et al., 1994;
- *Reproducing Kernel Particle Methods* (RPKM) em Liu et al., 1997;
- *h-p Clouds* em 1996 em Duarte e Oden, 1996b,a;
- *Free Mesh Method* (FMM) em Yagawa e Yamada, 1996;

<sup>1</sup>do inglês “Moving Least Square Approximations” (MLSA).

<sup>2</sup>SPH é um método bem mais antigo o qual foi inicialmente utilizado na astrofísica.

- *Meshless Petrov-Galerkin Method (MLPG)* em Atluri e Zhu, 1998,

dentre várias outras variações.

A nomenclatura dos métodos *meshless* ou *meshfree* surgiu devido a propriedade que as *funções de forma obtidas por parte destes métodos não serem dependentes, ou serem pouco dependentes, de uma da malha de integração*. Muitos autores, Li e Liu, 2002, Liu, 2003 e Chen et al., 2006, apontam ser esta a grande desvantagem do MEF quando comparados com esta classe de métodos. De fato, em certos problemas a malha Lagrangeana construída para uma análise por MEF pode distorcer, movimentar, de tal forma a introduzir erros drásticos dentro da análise.

Contudo, juntamente com o aparecimento e desenvolvimento destes novos métodos surgiram também problemas inerentes a formulação do método, como por exemplo: a necessidade do uso de uma integração numérica apropriada, desenvolvimento de uma estrutura de dados efetiva e também de procedimentos numéricos para a redução do custo computacional; evitar os problemas de condicionamento que acontecem quando se usam procedimentos de enriquecimento hierárquico, *p-adaptatividade*; necessidade do uso de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais e algoritmos que garantam não só a cobertura do domínio de integração mas também satisfaçam condições de estabilidade e não degeneração<sup>3</sup>, dentre outros.

A necessidade de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais surge do fato que, geralmente, as funções de forma finais oriundas dos métodos livres de malha não representam uma interpolação do campo desejado, mas sim uma aproximação. Deste modo, as funções de forma resultantes não satisfazem a propriedade de *delta de kronecker*, propriedade esta vastamente explorada no caso do *Método de Elementos Finitos* (MEF).

**Robustez, localização e dependência da malha** Existem vários outros problemas intrínsecos ligados com a malha, como por exemplo os clássicos efeitos de sensibilidade a direção da malha em localização de bandas de cisalhamento, tal como os apresentados por Needleman, 1988. A seguir são mostrados alguns resultados encontrados na literatura que demonstram a potencialidade dos MLSMs.

Em Li e Liu, 2002 são mostrados várias comparações entre os métodos livres de malha e o método de elementos finitos. Dentre eles é mostrada uma análise comparativa entre as deformadas de um bloco de material hiperelástico sob compressão para diferentes estágios usando um método *meshfree* e o MEF.

Na Figura 2.2 é mostrada a comparação entre as bandas de cisalhamento, regiões mais claras nas Figuras, previstas pelo método livre de malha RPKM versus aquelas previstas pelo MEF. Esta análise foi realizada em Li et al., 2000 e mostra que para malhas de integração diferentes, mais refinadas em uma direção, existem mudanças drásticas na captura das bandas de cisalhamento

---

<sup>3</sup>maiores detalhes em Alves e Rossi, 2003



quando é utilizado o MEF. Já quando é utilizado o RPKM banda de cisalhamento é sempre capturada não importando a direção do refinamento da malha de integração, ou introdução de novas partículas. No caso da Figura 2.2(f) é possível notar que o RPKM além de manter a banda originalmente predita inicia a predição da banda secundária.

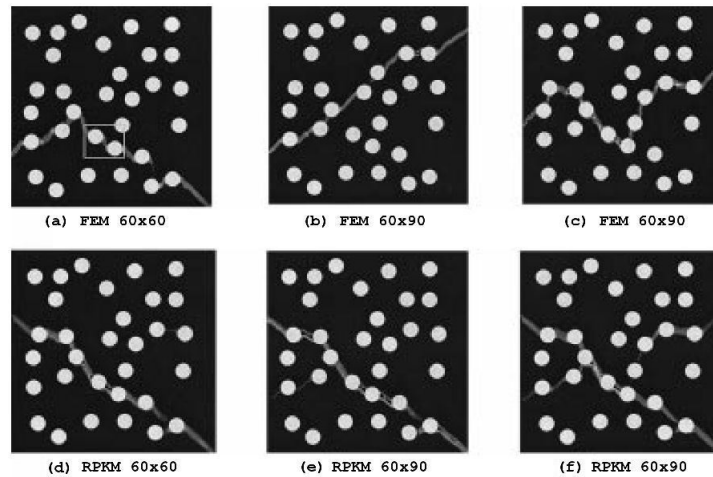


Figura 2.2 – Comparação entre as bandas de cisalhamento previstas pelo método livre de malha RPKM e MEF.  
[Adaptado de Li et al., 2000.]

**Estratégias de construção do espaço de aproximação em MLSM** Abaixo segue uma descrição de como os espaços de aproximação podem ser gerados dentro do contexto do MLSM. Tal apresentação está ligada ao método conhecido como EFG. Outros métodos MLSM podem construir os espaços de forma diferente.

**Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis** O método EFG consiste basicamente na construção de um conjunto de funções de forma globais, que definem o espaço de aproximação, que são posteriormente empregadas em um procedimento de aproximação de *Galerkin*. Tais funções de forma são construídas através da Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis (MMQM). Para uma visão da forma fraca para o problema de elasticidade em pequenas e grandes deformações consulte os apêndices deste trabalho.

O MMQM foi inicialmente utilizado em Lancaster e Salkauskas, 1981 na construção de superfícies suaves. Dado um conjunto de dados discretos é possível construir uma função de aproximação  $u^h$  que se ajusta, no sentido mínimos quadrados, a este conjunto de dados discretos. Isto é feito pelo uso de uma aproximação de mínimos quadrados ponderada, onde cada uma das funções peso associadas a cada uma das partículas/nó, dado discreto, possui a propriedade de ter um suporte variável ou móvel.

Mais especificamente, dado um conjunto de dados discretos  $\{u_I, I = 1, 2, \dots, n_T\}$ , onde  $n_T$  é o número total de partículas, em um domínio  $\Omega$ , a função de aproximação  $u^h(x)$  é definida

como

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p(x) \cdot a(x) \quad (2.4)$$

onde  $p(x)$  representa a base intrínseca empregada no MMQM e  $a(x)$  é o conjunto de coeficientes a determinar. O MMQM consiste no uso de uma base  $p(x)$  e de uma função peso  $w(x)$ , a qual determina a influência de quantas partículas serão consideradas para a determinação de  $a(x)$ .

O critério utilizado para a determinação de  $a(x)$  é a minimização de seguinte norma ponderada

$$J(a) = \sum_{I=1}^n w(x - x_I) [p(x_I) \cdot a(x) - u_I]^2$$

onde  $n$  é o número de partículas na vizinhança de  $x$  para os quais a função peso  $w(x - x_I) \neq 0$ , ou seja é o número de partículas pertencentes ao suporte da função peso, e  $u_I$  é o dado discreto em  $x = x_I$ .

Como resultado da minimização de  $J(a)$  é obtido

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(x) u_I \quad (2.5)$$

onde

$$\Phi_I(x) = p(x) \cdot \mathbf{A}(x)^{-1} b_I(x) \quad (2.6)$$

sendo

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{I=1}^n w(x - x_I) [p(x_I) \otimes p(x_I)] \quad \text{e} \quad b_I(x) = w(x - x_I) p(x_I). \quad (2.7)$$

$\Phi_I(x)$  é a chamada *função de forma global* e  $\mathbf{A}(x)$  é comumente chamada de *matriz de momento*.

A ordem de consistência de uma aproximação é definida como a ordem arbitrária polinomial que pode ser representada exatamente pelo processo de ajuste ou aproximação. Uma das propriedades importantes do MMQM é a de que este método é capaz representar exatamente combinações das funções de base  $p(x)$ . Assim, é possível alcançar uma consistência de ordem  $k$  através do uso de

$$p^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^k, \dots, xy^{k-1}, y^k]. \quad (2.8)$$

Deste modo, para satisfazer a consistência linear é necessário apenas utilizar  $p^T(x) = [1, x, y]$ . Ao se especificar um certo grau de consistência à aproximação são impostas restrições as funções de forma globais as quais levam, no caso de consistência linear, as seguintes relações

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(x) = 1 \quad (2.9)$$

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(x) x_I = x \quad \text{e} \quad \sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(x) y_I = y. \quad (2.10)$$

De acordo com a Equação 2.9 o conjunto  $\{\Phi_I(x), I = 1, 2, \dots, n_T\}$  define uma *partição da unidade*.

Como comentado em Belytschko et al., 1994, as funções de forma oriundas do EFG,  $\Phi_I(x)$ , não satisfazem, em geral, a condição de delta de kronecker, isto é  $\Phi_I(x_J) \neq \delta_{IJ}$ . Isto infelizmente complica a imposição das condições de contorno essenciais já que estas condições não podem ser impostas diretamente pela prescrição dos valores nodais.

**Enriquecimento Intrínseco** O chamado enriquecimento intrínseco está associado a utilização de bases  $p(x)$  que podem variar de partícula para partícula. Por exemplo, uma das mais utilizados enriquecimentos intrínseco é introduzir termos conhecidos a priori que estão presentes na solução analítica de certos problemas. Por exemplo, para o caso de trincas pode se utilizar em nós próximos da ponta da trinca uma base do tipo

$$p^T(x) = \left[ 1, x, y, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (2.11)$$

como apresentado em Belytschko et al., 1996.

**Requisitos sobre a distribuição das partículas** Como já comentado anteriormente, a atribuição do tipo de função peso a uma certa partícula depende do algoritmo de cobertura a ser adotado. Na literatura, é comum encontrar funções peso  $w^{EFG}$  com suporte retangular ou circular. Assim, a atribuição de uma função  $w^{EFG}$  em uma dada partícula da malha, que não pertence ao contorno essencial, está ligada a determinação de um suporte, parametrizado pelo raio da função peso, que não ultrapasse  $\Gamma_E$ , que assegure uma cobertura do domínio e que satisfaça a condição de estabilidade.

De fato, de acordo com as referências Liu et al., 1997, Beissel e Belytschko, 1996 e Huerta e Fernández-Méndez, 2000 a distribuição de partículas deve satisfazer uma condição de estabilidade para que exista a inversa de  $\mathbf{A}(x)$ . Esta condição de estabilidade pode ser enunciada como

$$\text{card} \{x_i | \Phi_i(x_i) \neq 0\} \geq \dim [\mathbf{A}(x_i)]. \quad (2.12)$$

Além disso, a distribuição de partículas deve ser de tal forma que se  $x \in R^n$  então deve existir pelo menos  $n + 1$  partículas cuja os vetores posição formam um elemento *simplex* não nulo. Assim, para  $\Omega \in R^2$  e  $p^T(x) = [1, x, y]$  a distribuição de partículas deve ser tal que para todo  $x \in \bar{\Omega}$  deva existir o suporte de pelo menos três partículas com uma *densidade* diferente de zero. A Figura 2.3 mostra um exemplo de domínio coberto por funções de aproximação do tipo EFG.

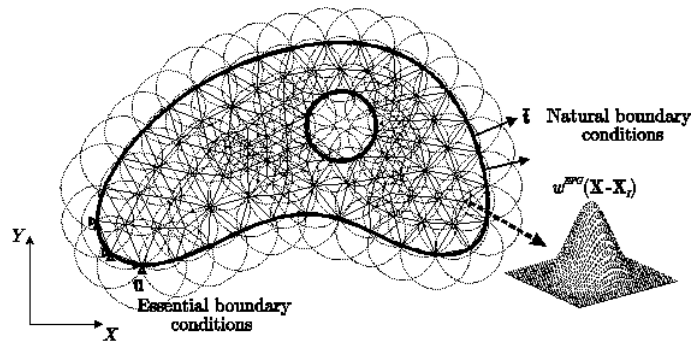


Figura 2.3 – Corpo com cobertura por funções tipo *EFG*.  
[Adaptado de Rossi et al., 2008].

## 2.2 O método dos elementos finitos eXtendidos

### 2.2.1 Interfaces

Considere um domínio  $d$ -dimensional,  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ . Uma 'interface' é um tipo de contorno,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{d-1}$ , dentro do domínio. Em um domínio bidimensional, as interfaces são linhas; em um domínio tridimensional, as interfaces são superfícies. Pode-se classificar as interfaces como abertas e fechadas dependendo se ela termina dentro do domínio ou não, veja a Figura 2.4. Além disso, distinguem-se interfaces que se movem das interfaces fixas. Interfaces fixas são, por exemplo, interfaces materiais em um sólido quando tratadas por descrições Lagrangianas (Indeformadas). Apesar do sólido deformado, a posição relativa da interface não muda. A situação difere por exemplo da interface material em um fluxo de duas fases em termos das coordenadas Eulerianas. Neste caso a interface se move com respeito ao sistema de coordenadas e a sucessiva atualização da interface é necessária durante a simulação. Modelos adicionais são requeridos para a consideração do movimento de interfaces.

### 2.2.2 Descontinuidades

Soluções de modelos com descontinuidades fortes tem saltos através de interfaces. As variáveis em ambos os lados da interface são desacopladas, então seus gradientes também são descontínuos através da interface. Um exemplo pode ser visto na Figura 2.5(a). Soluções com descontinuidades fracas tem dobras através de interfaces, isto é, somente seus gradientes são descontínuos, enquanto a solução é contínua, veja na Figura 2.5(b).

De forma breve, é apresentado como as descontinuidades são tratadas dentro dos Elementos Finitos clássicos. O Método dos Elementos Finitos clássicos confia nas propriedades de aproximação dos polinômios (mapeados). Precisão ideal é alcançada para soluções suaves. Entretanto, elementos internos com saltos levam a um drástico decréscimo de precisão. Portanto é crucial em Elementos Finitos clássicos alinhar a fronteira do elemento da malha com as interfaces onde fortes e fracas descontinuidades aparecem.

Além disso, para descontinuidades fortes, um desacoplamento completo dos elementos pró-

ximos à interface é importante. Em aplicações em que as interfaces estão em movimento, a malha precisa ser atualizada para que os elementos sempre se alinhem com a interface (rastreamento da interface). Veja a Figura 2.5 para exemplos de malhas que podem ser usadas para uma simulação clássica de descontinuidades via o MEF.

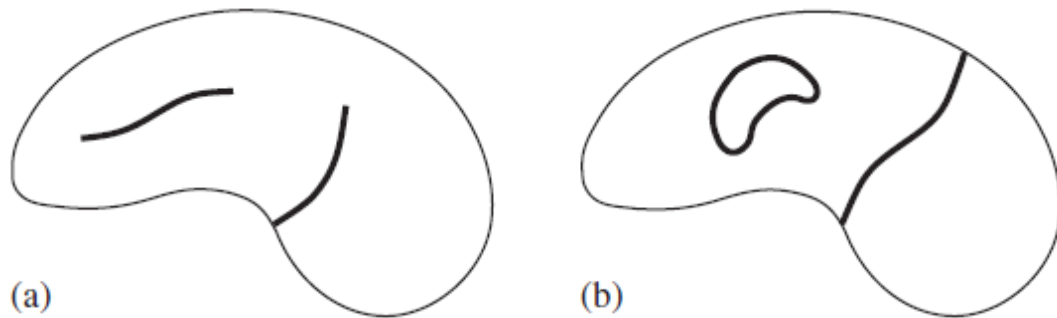


Figura 2.4 – Exemplo para (a) Descontinuidade aberta e (b) fechada.  
[Adaptado de Fries e Belytschko, 2010]

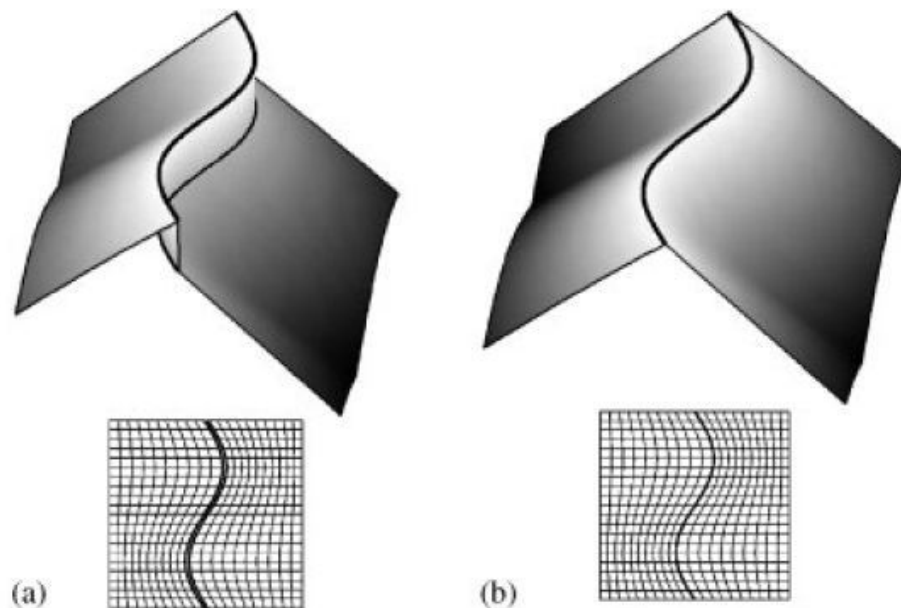


Figura 2.5 – Exemplo para uma (a) descontinuidade forte e (b) fraca através de uma interface. Abaixo estão as malhas adequadas para uma simulação clássica de MEF.  
[Adaptado de Fries e Belytschko, 2010]

### 2.2.3 O campo de deslocamento enriquecido

O campo de deslocamento de um domínio enriquecido pode ser aproximado por

$$u(x) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(x) \tilde{u}_I + \sum_{J \in \mathcal{N}^{enriq}} N_J(x) \psi(x) \tilde{a}_J \quad (2.13)$$

onde:

$\mathcal{N}$	Conjunto de todos os pontos nodais no domínio normal
$\mathcal{N}^{\text{enriq}}$	Conjunto de todos pontos nodais enriquecidos no domínio
$\tilde{u}_I$	Graus de liberdade nodais normais
$\tilde{a}_J$	Graus de liberdade nodais enriquecidos
$\psi(x)$	Função de enriquecimento de Heaviside ou Ponta de Trinca
$N(x)$	Função de forma normal

A função de forma em XFEM pode ser dividida entre parte “normal” e parte “enriquecida” como

$$N^{\text{melhorada}} = [N(x), N(x)\psi(x)]. \quad (2.14)$$

Considerando um campo de deslocamento aproximado definido na Equação 2.13, o valor de  $u(x)$  em um nó enriquecido  $k$  dentro do conjunto  $\mathcal{N}^{\text{enriq}}$  pode ser escrito como

$$u(x_k) = \tilde{u}_k + \psi(x_k)\tilde{a}_k. \quad (2.15)$$

Desde que  $\psi(x_k)$  não seja necessariamente zero, está expressão não é igual ao real valor nodal  $\tilde{u}_k$ , entretanto o campo de deslocamento enriquecido pode ser trocado para

$$u(x, t) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(x)\tilde{u}_I + \sum_{J \in \mathcal{N}^{\text{enriq}}} N_J(x)(\psi(x) - \psi(x_J))\tilde{a}_J \quad (2.16)$$

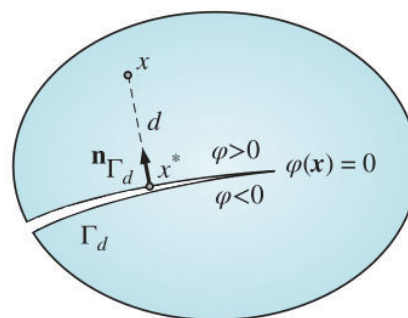


Figura 2.6 – Função sinal distância.  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Na nova definição do último termo da Equação 2.16 resultou numa propriedade esperada, que é,  $u(x_k) = u_k$ . E nesta relação  $\psi(x_J)$  é o valor da função de enriquecimento no  $J^{\text{th}}$  ponto nodal enriquecido. Portanto a função de forma melhorada Equação 2.14 pode ser reescrita como

$$N^{\text{melhorada}} = [N(x), N(x)(\psi(x) - \psi(x_i))] \quad (2.17)$$

A escolha da função de enriquecimento  $\psi(x)$  é dependente da posição da descontinuidade no domínio.

Geralmente existem dois tipos de funções de enriquecimento:

### Função de salto ou função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \varphi(x) \geq 0 \\ -1 & \varphi(x) < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Onde  $\varphi(x)$  é a função sinal distância que é baseada no valor absoluto da função “Level set” como

$$\varphi(x) = \min \llbracket x - x^* \rrbracket \text{sign} \left[ (x - x^*) \cdot n_{\Gamma_d} \right] \quad (2.19)$$

Quando  $\varphi(x) \geq 0$  a função sinal de Heaviside  $H(x) = +1$  é normalmente utilizada para nós que estão localizados acima da trinca e  $H(x) = -1$  para nós localizados abaixo da trinca. Onde  $x^*$  é um ponto na descontinuidade que tem a distância mais próxima do ponto  $x$  como visto na Figura 2.6. A função Heaviside é uma função apropriada para simulação de um domínio fraturado, já que ela gera um salto no deslocamento nodal de elementos que estão localizados na extremidade da descontinuidade, logo o campo de deslocamento dos nós de cima da trinca é independente dos nós que estão localizados abaixo da trinca.

**Função de Ponta de trinca** Para modelar o campo de deslocamento na região da ponta da trinca são usadas as funções assintóticas de ponta de trinca conforme vista esquemática da Figura 2.7, que são extraídas das soluções analíticas de deslocamento e tensão no plano, que são

$$F(r, \theta) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\} \quad (2.20)$$

sendo

$$F_1 = \sqrt{r} \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad F_2 = \sqrt{r} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad F_3 = \sqrt{r} \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad F_4 = \sqrt{r} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen}(\theta) .$$

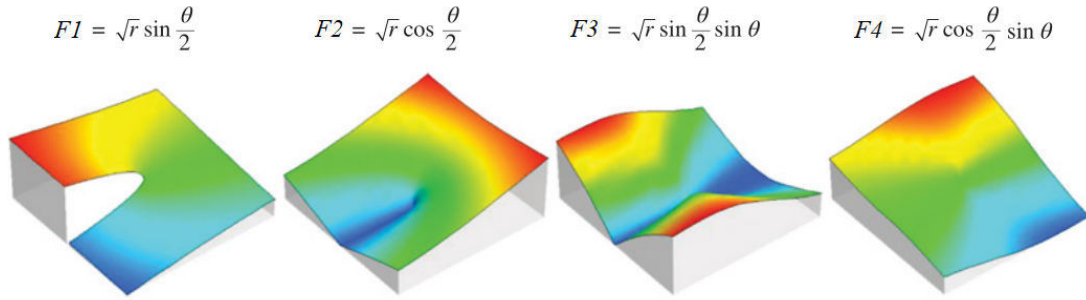


Figura 2.7 – Vista esquemática das funções assintóticas de ponta de trinca. [Adaptado de Khoei, 2014]

Portanto, o campo de deslocamento enriquecido da Equação 2.16, para um elemento com trinca pode ser escrito empregando as funções assintóticas de ponta de trinca, como

$$u(x) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(x) \tilde{u}_I + \sum_{J \in \mathcal{N}^{dis}} N_J(x) (H(x) - H(x_J)) \tilde{d}_J + \sum_{K \in \mathcal{N}^{tip}} N_K(x) \sum_{\alpha=1}^4 (F_\alpha(x) - F_\alpha(x_K)) \tilde{b}_{\alpha K} \quad (2.21)$$

na qual  $\mathcal{N}$  é o conjunto de todos os pontos nodais no domínio,  $\mathcal{N}^{dis}$  é o conjunto de todos os pontos nodais suportados pela bissecção da trinca e  $\mathcal{N}^{tip}$  é o conjunto de todos os pontos nodais que contém a ponta da trinca e suporta as suas funções de forma enriquecidas pelas suas funções assintóticas de ponta de trinca.

Nesta relação,  $\tilde{u}_I$  são as incógnitas dos GDL de elementos finitos clássico no  $I^{th}$  nó,  $\tilde{d}_J$  são as incógnitas dos GDL enriquecidos no  $J$ -ésimo nó que são associados com as funções de enriquecimento de Heaviside e  $\tilde{b}_{\alpha K}$  são as incógnitas dos GDL enriquecidos que são associadas com as funções de ponta de trinca no  $K$ -ésimo nó. Finalmente, com as aproximações de XFEM, pode-se reescrever o campo de deslocamento

$$u(x) = N^{std}(x) \tilde{u} + N^{hev}(x) \tilde{d} + N^{tip}(x) \tilde{b} \equiv N^{std}(x) \tilde{u} + N^{enr}(x) \tilde{a} \quad (2.22)$$

onde

$N^{std}(x) = N(x)$  são as funções de forma de elementos finitos clássico

$N^{enr}(x) = \begin{bmatrix} N^{hev}(x), & N^{tip}(x) \end{bmatrix}$  são matrizes de funções de enriquecimento

De acordo, com o campo de deslocamento aproximado pode-se escrever o correspondente vetor de deformação em termos dos valores nodais “normais” e “enriquecidos” como

$$\varepsilon(x) = \mathbf{B}^{std}(x) \tilde{u} + \mathbf{B}^{hev}(x) \tilde{d} + \mathbf{B}^{tip}(x) \tilde{b} \equiv \mathbf{B}^{std}(x) \tilde{u} + \mathbf{B}^{enr}(x) \tilde{a} \quad (2.23)$$

onde

$$\mathbf{B}^{std} = \mathbf{L}N^{std}(x), \quad \mathbf{B}^{hev} = \mathbf{L}N^{hev}(x), \quad \mathbf{B}^{tip} = \mathbf{L}N^{tip}(x)$$



e

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}$$

### 2.2.4 Equação governante de um corpo com trinca

Para derivar uma equação que governa a mecânica dos sólidos de um domínio com fratura utilizando XFEM é considerado um domínio 2D cortado por uma descontinuidade  $\Gamma_d$ . A forma forte da equação de equilíbrio de um corpo com trinca, pode ser expressa como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + b = 0 \quad (2.24)$$

na qual  $\nabla$  é o operador divergente,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de Cauchy das tensões e  $b$  é a força de corpo aplicada no sistema.

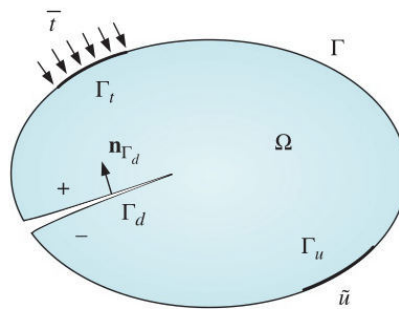


Figura 2.8 – Geometria do domínio fraturado envolvendo a descontinuidade  $\Gamma_d$ .  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Assumindo que o material tem um comportamento elástico linear isotrópico, com relação constitutiva definida como  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ , onde  $\mathbf{D}$  é o tensor constitutivo do material.

As condições de contorno essencial e natural são aplicadas ao problema são:

$$\text{Essenciais} \quad \left\{ u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \right.$$

$$\text{Naturais} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} n_\Gamma = t \text{ em } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma} n_{\Gamma_d} = 0 \text{ em } \Gamma_d \end{array} \right.$$

onde  $\bar{u}$  - Deslocamento prescrito,  $n_\Gamma$  - Vetor normal apontado para fora do contorno  $\Gamma$ ,  $n_{\Gamma_d}$  - Vetor normal à descontinuidade  $\Gamma_d$  e  $t$  - Vetor de tração prescrita.

### 2.2.5 Discretização das equações governantes

A forma fraca da Equação governante 2.24 pode ser derivada baseada na técnica de discretização de Galerkin pela integração do produto da equação de equilíbrio por uma função teste

admissível em torno do domínio. Para o caso da mecânica dos sólidos com fratura a função teste pode ser considerada o mesmo espaço de aproximação do campo de deslocamento definido na Equação 2.22 como

$$\delta u(x) = N^{std}(x)\delta\tilde{u} + N^{hev}(x)\delta\tilde{d} + N^{tip}(x)\delta\tilde{b} \quad (2.25)$$

Utilizando o procedimento de Galerkin na forma forte da Equação de equilíbrio 2.24

$$\int_{\Omega} \delta u(x) \cdot (\nabla \cdot \sigma + b) d\Omega = 0 \quad (2.26)$$

Aplicando o teorema do divergente, impondo condições de contorno naturais e a superfície da descontinuidade estando livre de condições de contorno de tração, a integral da Equação 2.26 pode ser obtida como

$$\int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma d\Omega + \int_{\Gamma_d} \llbracket \delta u \rrbracket \cdot \sigma n_{\Gamma_d} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot t d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega \quad (2.27)$$

onde  $\llbracket \cdot \rrbracket$  denota o salto através da descontinuidade da trinca, que é a diferença entre o valor correspondente nas duas faces da trinca, que são  $\llbracket \Xi \rrbracket = \Xi^+ + \Xi^-$ . Deve ser notado que a segunda integral da Equação 2.27 (lado esquerdo) a descontinuidade  $\Gamma_d$ , essa integral no contorno  $\Gamma_d$  poderá ser eliminada impondo condições de contorno livres de tração nas faces da trinca, que fica  $\sigma n_{\Gamma_d} = 0$ , então

$$- \int_{\Gamma_d^+} \delta u \cdot (\sigma n_{\Gamma_d^+}) d\Gamma - \int_{\Gamma_d^-} \delta u \cdot (\sigma n_{\Gamma_d^-}) d\Gamma = \int_{\Gamma_d} (\delta u^+ + \delta u^-) \cdot \sigma n_{\Gamma_d} d\Gamma \quad (2.28)$$

$$\int_{\Gamma_d} \llbracket \delta u \rrbracket \cdot \sigma n_{\Gamma_d} d\Gamma = 0 \quad (2.29)$$

na qual  $n_{\Gamma_d^+}$  e  $n_{\Gamma_d^-}$  são vetores normais direcionados para  $\Omega^-$  e  $\Omega^+$  e os sobrescritos “+” e “-” acima de  $\Gamma_d$  representam os dois lados da descontinuidade, em que  $n_{\Gamma_d}$  é definido como  $n_{\Gamma_d} = n_{\Gamma_d^-} = -n_{\Gamma_d^+}$  portanto a Equação 2.27 fica

$$\int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot t d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega. \quad (2.30)$$

Aplicando o método de discretização XFEM e usando a função de teste  $\delta u(x, t)$  definida na Equação 2.25, a equação anterior resulta em

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T t d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b d\Omega \quad (2.31)$$

na qual  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}^{std}, \mathbf{B}^{hev}, \mathbf{B}^{tip}]$  e  $\mathbf{N} = [\mathbf{N}^{std}, \mathbf{N}^{hev}, \mathbf{N}^{tip}]$ . O sistema discreto de equações pode ser obtido da Equação 2.31 como  $\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F} = 0$ , onde  $\mathbf{U}^T = [u^T \ d^T \ b^T]$  é um vetor de incógnitas nos pontos nodais,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez total e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças externas. O sistema final de equações pode ser finalmente obtido como

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \equiv \begin{Bmatrix} (\mathbf{B}_u)^T \\ (\mathbf{B}_d)^T \\ (\mathbf{B}_b)^T \end{Bmatrix} \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_b \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{K}$  é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} (\mathbf{B}_u)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_u)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_d d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_u)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega \\ \int_{\Omega} (\mathbf{B}_d)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_d)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_d d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_d)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega \\ \int_{\Omega} (\mathbf{B}_b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_d d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{F}$  fica dado por

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma^r} (\mathbf{N}_u)^T t d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_u)^T b d\Omega \\ \int_{\Gamma^r} (\mathbf{N}_d)^T t d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_d)^T b d\Omega \\ \int_{\Gamma^r} (\mathbf{N}_b)^T t d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{N}_b)^T b d\Omega \end{Bmatrix}$$

onde os subscritos são  $u$  para os deslocamentos normais de elementos finitos clássico,  $d$  para os deslocamentos devido ao enriquecimento de Heaviside e  $b$  para os deslocamentos devido aos enriquecimentos que descrevem o comportamento na região da ponta da trinca.

Escrevendo na forma compacta, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ud} & \mathbf{K}_{ub} \\ \mathbf{K}_{du} & \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{db} \\ \mathbf{K}_{bu} & \mathbf{K}_{bd} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ d \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_d \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

na qual  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $2 \times 2$  e “ $i$ ” é referente ao nó corrente e os deslocamentos  $u \Rightarrow std$ ,  $d \Rightarrow hev$  e  $b \Rightarrow tip$

$$N_i^{std} = N_i \mathbf{I}$$

$$N_i^{hev} = N_i (H(x) - H(x_i)) \mathbf{I}$$

$$N_{\alpha i}^{tip} = N_i (F_{\alpha}(x) - F_{\alpha}(x_i)) \mathbf{I}.$$

As matrizes  $\mathbf{B}^{std}$ ,  $\mathbf{B}^{hev}$  e  $\mathbf{B}^{tip}$  podem ser definida para formulação de XFEM usando o campo de deslocamento enriquecido para o nó “ $i$ ” como

$$\mathbf{B}_i^{std} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dy} \\ \frac{dN_i}{dy} & \frac{dN_i}{dx} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{B}_i^{hev} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i(H(x)-H(x_i))}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i(H(x)-H(x_i))}{dy} \\ \frac{dN_i(H(x)-H(x_i))}{dy} & \frac{dN_i(H(x)-H(x_i))}{dx} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}_{\alpha i}^{tip} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i(F_\alpha(x)-F_\alpha(x_i))}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i(F_\alpha(x)-F_\alpha(x_i))}{dy} \\ \frac{dN_i(F_\alpha(x)-F_\alpha(x_i))}{dy} & \frac{dN_i(F_\alpha(x)-F_\alpha(x_i))}{dx} \end{bmatrix} \quad (\alpha=1,2,3,4) \quad (2.36)$$

Onde a derivada da função de enriquecimento de Heaviside da Equação  $\mathbf{B}_i^{hev}$  na posição (linha 1 e coluna 1) pode ser obtida

$$\frac{d}{dx} \left( N_i(H(x) - H(x_i)) \right) = \frac{dN_i}{dx} \left( H(x) - H(x_i) \right) + N_i \frac{dH(x)}{dx}. \quad (2.37)$$

Já a derivada da função de ponta de trinca  $\mathbf{B}_{\alpha i}^{tip}$  fica

$$\frac{d}{dx} \left( N_i(F_\alpha(x) - F_\alpha(x_i)) \right) = \frac{dN_i}{dx} \left( F_\alpha(x) - F_\alpha(x_i) \right) + N_i \frac{dF_\alpha(x)}{dx} \quad (2.38)$$

na qual  $\frac{dF_\alpha(x)}{dx}$  pode ser obtido fazendo a transformação entre coordenadas polar e coordenadas cartesianas em um sistema de coordenadas local  $(x_1, x_2)$

$$\frac{dF_\alpha}{dx_1} = \frac{dF_\alpha}{dr} \frac{dr}{dx_1} + \frac{dF_\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{dx_1} \quad (2.39)$$

$$\frac{dF_\alpha}{dx_2} = \frac{dF_\alpha}{dr} \frac{dr}{dx_2} + \frac{dF_\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{dx_2} \quad (2.40)$$

onde  $\frac{dr}{dx_1} = \cos(\theta)$ ,  $\frac{dr}{dx_2} = \sin(\theta)$ ,  $\frac{d\theta}{dx_1} = -\frac{1}{r}\sin(\theta)$  e  $\frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{r}\cos(\theta)$

$$\frac{dF_\alpha}{dx_1} = \frac{dF_\alpha}{dr} \cos(\theta) - \frac{dF_\alpha}{d\theta} \frac{1}{r} \sin(\theta) \quad (2.41)$$

$$\frac{dF_\alpha}{dx_2} = \frac{dF_\alpha}{dr} \sin(\theta) + \frac{dF_\alpha}{d\theta} \frac{1}{r} \cos(\theta) \quad (2.42)$$

Pode-se ainda escrever de outra maneira, primeiro definindo o Jacobiano

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

e então escrever de uma maneira mais simplificada conforme abaixo

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dF_\alpha}{dx_1} \\ \frac{dF_\alpha}{dx_2} \end{array} \right\} = [\mathbf{R}] \left\{ \begin{array}{c} \frac{dF_\alpha}{dr} \\ \frac{dF_\alpha}{d\theta} \end{array} \right\}. \quad (2.44)$$

Portanto a derivada local da função assintótica de ponta de trinca  $F(r, \theta)$ , utilizando a definição da Equação 2.40 fica dada pelo conjunto de Equações

$$\frac{dF_1}{dx_1} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.45)$$

$$\frac{dF_1}{dx_2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.46)$$

$$\frac{dF_2}{dx_1} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.47)$$

$$\frac{dF_2}{dx_2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.48)$$

$$\frac{dF_3}{dx_1} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.49)$$

$$\frac{dF_3}{dx_2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos(\theta) \right) \quad (2.50)$$

$$\frac{dF_4}{dx_1} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.51)$$

$$\frac{dF_4}{dx_2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos(\theta) \right) \quad (2.52)$$

Finalmente, as derivadas das funções assintóticas de ponta de trinca com respeito ao sistema de coordenadas global  $(x, y)$  podem ser obtidas por

$$\frac{dF_\alpha}{dx} = \frac{dF_\alpha}{dx_1} \cos(\beta) - \frac{dF_\alpha}{dx_2} \operatorname{sen}(\beta) \quad (2.53)$$

$$\frac{dF_\alpha}{dy} = \frac{dF_\alpha}{dy_1} \operatorname{sen}(\beta) + \frac{dF_\alpha}{dy_2} \cos(\beta) \quad (2.54)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dF_\alpha}{dx} \\ \frac{dF_\alpha}{dy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \frac{dF_\alpha}{dx_1} \\ \frac{dF_\alpha}{dx_2} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

onde  $\alpha$  indica o ângulo da trinca com respeito ao sistema de coordenadas global.

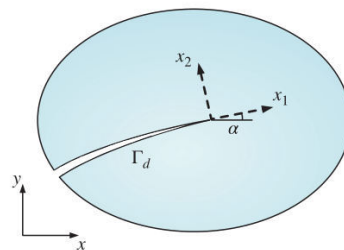


Figura 2.9 – Sistema de coordenada local e global na ponta da trinca.  
[Adaptado de Khoei, 2014]

### 2.2.6 Simulação de crescimento de trinca com XFEM

Em simulação de propagação de trinca, a trinca propaga com um valor predefinido de  $\Delta l$ , se o critério de propagação é satisfeito. Existe basicamente duas técnicas propostas para enriquecimento de pontos nodais na área da ponta da trinca, um baseado no enriquecimento do elemento com ponta de trinca e o enriquecimento de uma área fixa em torno da ponta trinca. No enriquecimento “elemento de ponta de trinca” o enriquecimento é feito de acordo com a posição atual da ponta da trinca a cada passo de tempo.

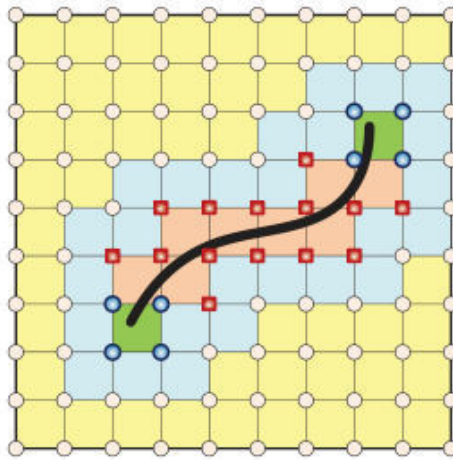


Figura 2.10 – Método de enriquecimento de elemento de ponta de trinca.  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Na Figura 2.10 os nós em vermelhos são enriquecidos por funções de Heaviside, os nós em azul são enriquecidos por funções de ponta de trinca, os elementos em azul são parcialmente enriquecidos e os elementos em amarelo são utilizadas funções de elementos finitos clássicas.

No enriquecimento de área fixa, uma área para enriquecimento é assumida em torno da região da ponta da trinca, em ordem para melhorar a taxa de convergência na simulação de propagação de trinca. Isto foi mostrado por Laborde et al., 2005 que utilizando o “enriquecimento de elemento com ponta de trinca”, enriquece somente os nós do elemento com ponta de trinca. O suporte das funções de enriquecimento se perdem quando o tamanho do elemento tende a zero. De fato, diminuindo o tamanho dos elementos em uma área na ponta da trinca e utilizando “enriquecimento de elemento único” tem um efeito significativo na taxa de convergência da solução. A fim de vencer este problema, um “enriquecimento de área fixa” é assumido na ponta da trinca em uma região independente do tamanho do elemento de área para melhorar os elementos desta área específica. Baseado nesta técnica, uma circunferência virtual/imaginária é considerada em torno da ponta da trinca na posição  $x_{tip}$ , Figura 2.11, com raio  $R$  a cada passo de tempo. O raio é, em geral, assumido como  $0.1^{th}$  da dimensão do domínio. Todos os pontos nodais dentro desta área devem ser enriquecidos com funções de ponta de trinca.

A função de salto de Heaviside é ainda usada para melhorar o enriquecimento de pontos nodais de elementos que interseccionam a trinca e estão fora da área (círculo) em ambos os lados da trinca. Elementos que eram somente enriquecidos por Heaviside agora também são enriquecidos por funções de ponta de trinca.

De acordo com o “Enriquecimento de área fixa”, o campo de deslocamento enriquecido da Equação 2.21 pode ser reescrito como

$$u(x) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(x) \tilde{u}_I + \sum_{J \in \mathcal{N}^{dis}} N_J(x) (H(x) - H(x_J)) \tilde{d}_J + \quad (2.56)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{N}^{fixed}} N_K(x) \sum_{\alpha=1}^4 (F_\alpha(x) - F_\alpha(x_K)) \tilde{b}_{\alpha K}$$

na qual  $K$  é o nó com funções de ponta de trinca,  $\alpha$  é a função de ponta de trinca,  $J$  é o nó com funções de Heaviside,  $I$  é o nó com funções de elementos finitos clássicos sendo  $\mathcal{N}^{fixed}$  o conjunto de nós para enriquecimento de área fixa. O raio fica dado por uma relação do tipo

$$R = 0.1 \sqrt{Lw} \quad (2.57)$$

onde  $L$  é o comprimento característico do domínio e  $w$  é a altura característica do domínio.

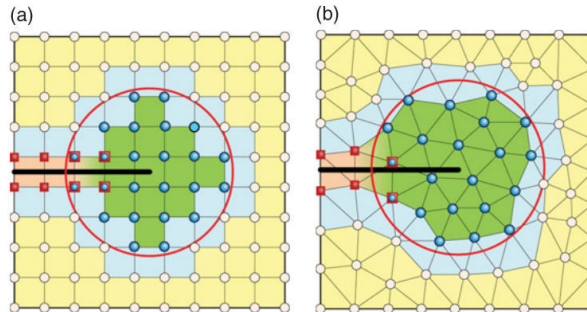


Figura 2.11 – O esquema de enriquecimento de área fixa utilizado na região da ponta da trinca para aumentar os pontos nodais inseridos no círculo pelas funções de ponta de trinca: (a) Malha quadrilateral; b) Malha triangular.

[Adaptado de Khoei, 2014]

### 2.2.7 Diagrama dos passos do método XFEM implementando

Na Figura 2.12 tem-se uma descrição da sequência de passos que o código implementado necessita executar para ao final determinar os fatores de intensidade de tensão (FIT).

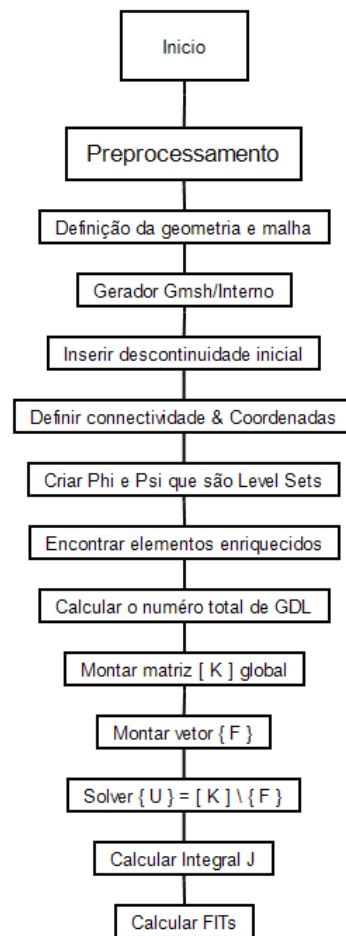


Figura 2.12 – Diagrama dos passos do método XFEM implementando.

## 2.3 Mecânica da fratura linear elástica

### 2.3.1 Conceitos básicos em mecânica da fratura

O material fratura quando suficiente tensão e trabalho são aplicados no nível atômico para quebrar as ligações que mantêm os átomos juntos. A força de atração é fornecida pelas forças de atração entre os átomos.

O equilíbrio ocorre onde a “energia potencial é mínima”. Uma força de tração é requerida para aumentar a distância de separação do valor de equilíbrio. Esta força deve exceder muito a força coesiva para separar completamente a ligação. A energia de ligação é dada como:

$$E_b = \int_{x_0}^{\infty} P dx \quad (2.58)$$

onde  $x_0$  é um espaço de equilíbrio e  $P$  é a força aplicada.

É possível estimar a força coesiva no nível atômico, veja Figura 2.13, idealizando uma relação força deslocamento interatômica como a metade do período de uma onda senoidal.

$$P = P_c \sin \theta \left( \frac{\pi x}{\lambda} \right) \quad (2.59)$$



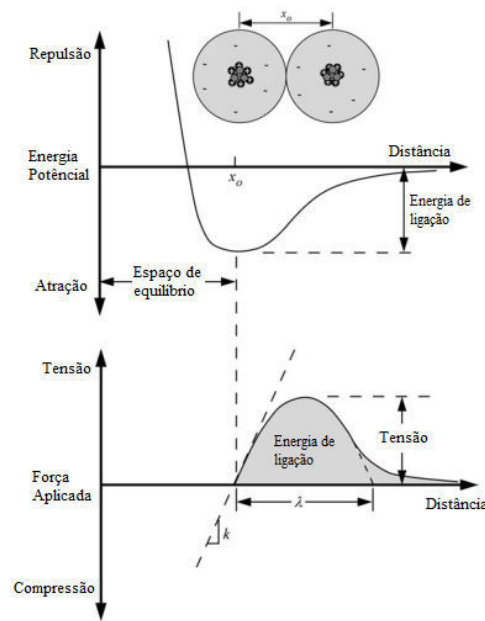


Figura 2.13 – Energia potencial e força como uma função da separação atômica. No equilíbrio de separação  $x_0$  a energia potencial é minimizada, e as forças de atração e repulsão são balanceadas.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

Para montagem de simplificação, a origem é definida em  $x_0$  para pequenos deslocamentos. A relação força - deslocamento é linear:

$$P = P_c \left( \frac{\pi x}{\lambda} \right). \quad (2.60)$$

A rigidez de ligação, isto é, a constante da mola, é dada por:

$$K = P_c \left( \frac{\pi}{\lambda} \right). \quad (2.61)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação pelo número de ligação por unidade de área e comprimento medido  $x_0$ :

$$E = \sigma_c \left( \frac{\pi}{\lambda} \right) x_0 \quad (2.62)$$

$\sigma_c = E \left( \frac{\lambda}{\pi x_0} \right)$  ou  $\sigma_c \approx \frac{E}{\pi}$  quando  $\lambda$  é assumido ser aproximadamente igual ao espaço atômico  $x_0$ . Aqui  $E$  é o módulo de elasticidade.

A energia de superfície pode ser estimada como segue:

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \sigma_c \sin \left( \frac{\pi x}{\lambda} \right) dx = \frac{\sigma_c}{2} \left[ -\frac{\lambda \cos \left( \frac{\pi x}{\lambda} \right)}{\pi} \right]_0^\lambda = \frac{\sigma_c}{2} \left[ -\frac{\lambda \cos(\pi)}{\pi} + \frac{\lambda \cos(0)}{\pi} \right] \quad (2.63)$$

portanto

$$\gamma_S = \sigma_c \left( \frac{\lambda}{\pi} \right). \quad (2.64)$$

A energia de superfície por unidade de área,  $\gamma_S$ , é igual a uma metade da energia da fratura, porque duas superfícies são criadas quando o material fratura.

Isolando  $\lambda$  de  $\sigma_c$  e substituindo na Equação 2.64 obtém-se:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\gamma_S E'}{x_0}}. \quad (2.65)$$

### 2.3.2 Concentração de tensão efeito de fissuras

A derivação na seção anterior mostra que a força coesiva teórica de um material é aproximadamente  $\frac{E'}{\pi}$ , mas a força da fratura experimental para materiais frágeis são tipicamente três ou quatro ordens de magnitude deste valor. Experimentos de Leonardo da Vinci, Griffith, e outros indicam que a discrepância entre a atual força dos materiais frágeis e teorias estimadas era devido a fissuras nestes materiais. Portanto, as trincas devem diminuir a força global pela ampliação local da tensão .

A primeira evidência quantitativa para o efeito de concentração de tensão da fenda foi provida por Inglis, que analisou furos elípticos em placas planas. Sua análise inclui um furo elíptico de comprimento  $2a$  e largura  $2b$  com uma tensão perpendicular ao maior eixo da elipse, veja Figura 2.14.

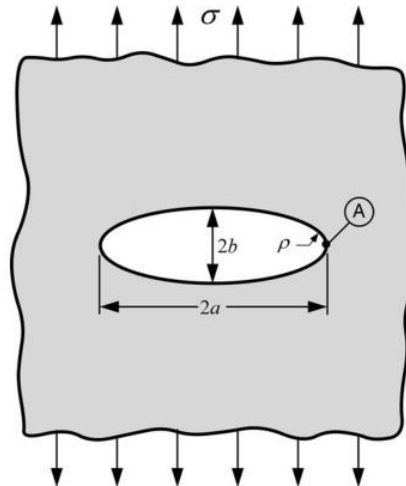


Figura 2.14 – Furo elíptico em placa plana.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

A tensão no eixo maior (ponto A) é dada por:

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (2.66)$$

A razão  $\frac{\sigma_A}{\sigma}$  é definida como o fator de concentração de tensão  $K_t$  quando  $a = b$ , o furo é circular e  $K_t = 3$ , um resultado bem conhecido.

Como o eixo maior, "a", aumenta em relação a "b", o furo elíptico toma a aparência de uma trinca pontiaguda. Para este caso, Inglis encontrou uma maneira mais conveniente para expressar a Equação 2.66 em termos do raio de curvatura  $\rho$ :

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \quad (2.67)$$

na qual  $\rho = \frac{b^2}{a}$ . Quando  $a \gg b$ , a Equação 2.67 se torna

$$\sigma_A = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\rho}}. \quad (2.68)$$

Inglis mostrou que a Equação 2.68 fornece uma boa aproximação da concentração de tensão, devido a um entalhe que não é elíptico, exceto na ponta. A Equação 2.68 prevê uma tensão infinita na ponta de uma trinca pontiaguda, ou trinca aguda apenas, onde  $\rho = 0$ , tal como mostrado na Figura 2.15.

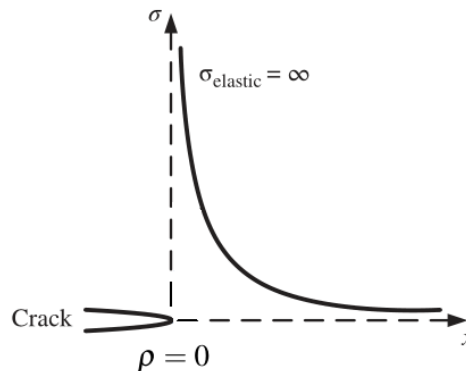


Figura 2.15 – Tensão na ponta da trinca quando  $\rho = 0$ .  
[Adaptado de Anderson, 2005]

Este resultado causou preocupação quando foi descoberto pela primeira vez, porque nenhum material é capaz de resistir a uma tensão infinita.

Um material que contém uma trinca aguda deverá teoricamente falhar sob a aplicação de uma carga infinitesimal. O paradoxo de uma trinca pontiaguda motivou Griffith a desenvolver uma teoria de fratura baseada na energia no lugar da tensão local.

Uma tensão infinita em uma trinca aguda no contínuo é uma abstração matemática, a qual não é relevante para materiais reais. Metais deformam plasticamente, o qual causa inicialmente uma trinca aguda brusca. Na ausência de deformação plástica, o raio mínimo que uma ponta de trinca pode ter é na ordem do raio atômico. Então, substituindo  $\rho = x_0$  dentro da Equação 2.68, obtém-se uma estimativa da concentração de "tensão local" na ponta de uma "trinca aguda atômica":

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{x_0}}. \quad (2.69)$$

Se for assumido que a fratura ocorre quando  $\sigma_A = \sigma_c$ , a Equação 2.69 pode ser feita igual a Equação 2.65, resultando na equação que segue para uma tensão remota na falha:

$$\begin{aligned} 2\sigma \left(\frac{a}{x_0}\right)^{1/2} &= \left(\frac{\gamma_s E}{x_0}\right)^{1/2} \\ \left(2\sigma_f\right)^2 &= \frac{\gamma_s E}{x_0} \frac{x_0}{a} \\ 4\sigma_f^2 &= \frac{\gamma_s E}{4a} \\ \sigma_f &= \left(\frac{\gamma_s E}{4a}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde  $a$  é conhecido como o comprimento do entalhe e  $\sigma_f$  é a tensão na falha.

A Equação 2.70 deve ser vista como uma estimativa aproximada da tensão de falha, porque a suposição sob a análise de Inglis não é válida para o nível atômico. Entretanto, Gehlen e Kaninen, 1979 *apud* Anderson, 2005, obtiveram um resultado similar de uma trinca em reticulado 2D, onde átomos discretos estavam conectados por molas não lineares:

$$\sigma_f = \alpha \left(\frac{\gamma_s E}{a}\right)^{1/2} \quad (2.71)$$

na qual  $\alpha$  é uma constante (na ordem da unidade) que depende levemente da “Lei força deslocamento atômico” da Equação 2.59.

### 2.3.3 Balanço de energia de Griffith

De acordo com a 1ª lei da termodinâmica, quando o sistema vai de um estado de não equilíbrio para um estado de equilíbrio, tem uma diminuição líquida de energia. Em 1920, Griffith aplicou essa ideia na formação da trinca, veja uma discussão mais detalhada em Anderson, 2005 page 36.

**1ª Lei da Termodinâmica:** A energia interna  $E$  do sistema tende a aumentar, se a energia é adicionada como calor  $Q$  e tende a diminuir se a energia é perdida como trabalho  $W$  feito pelo sistema.

$$dE = dQ - dW \quad (2.72)$$

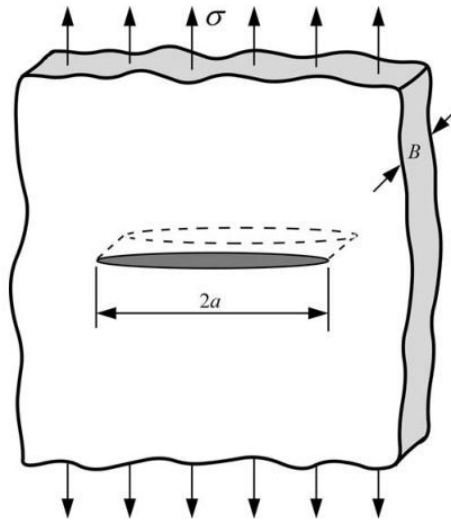


Figura 2.16 – Uma trinca através da espessura em uma placa infinita ampla submetida a uma tensão de tração remota.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

Para esta trinca crescer em tamanho, energia potencial suficiente deve estar disponível na placa para ultrapassar a energia de superfície do material. O balanço de energia de Griffith para um aumento incremental na área da trinca  $dA$ , sob condições de equilíbrio, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0$$

ou  $-\frac{d\pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA}$  onde  $\pi$  é a energia potencial, fornecida pela energia de deformação interna e forças externas, e  $W_s$  é trabalho requerido para criar uma nova superfície.

Para uma placa trincada da Figura 2.16, Griffith usou a análise de tensão de Inglis:

$$\pi = \pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.73)$$

onde  $\pi_0$  é energia potencial de uma placa sem trinca e  $B$  é a espessura da placa.

Como a formação da trinca requer a criação de duas superfícies,  $W_s$  é dado como:

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (2.74)$$

Portanto,

$$2A = 4aB$$

e

$$\frac{dW_s}{dA} = \frac{4aB\gamma_s}{dA} = \frac{2A\gamma_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (2.75)$$

logo

$$-\frac{d\pi}{dA} = \frac{d\pi_0}{dA} - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.76)$$

Igualando as duas últimas equações produz

$$-\frac{d\pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \rightarrow 2\gamma_s = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$$

E solucionando para tensão na fratura  $\sigma_f$  resulta

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (2.77)$$

É importante notar a distinção entre área da trinca e superfície da trinca. A área da trinca é definida como a área projetada da trinca ( $2aB$  neste exemplo), mas desde que a trinca possui duas superfícies correspondentes, a área da superfície é  $2a$ .

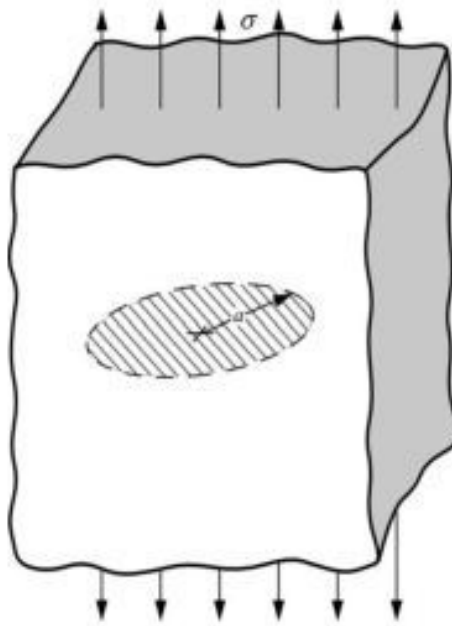


Figura 2.17 – Pequena trinca circular embutida em um sólido sujeito a uma tensão remota.

[Adaptado de Anderson, 2005]

Já para uma trinca circular embutida em um sólido sujeito a uma tensão remota, Figura 2.17, a tensão fica

$$\sigma_f = \left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1-\nu)^2 a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.78)$$

Onde  $a$  é o raio da trinca e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. A abordagem de Griffith também pode ser aplicada a outras formas de trinca.

### 2.3.4 Taxa de liberação de energia

Em 1956, Irwin propôs uma abordagem de energia para fratura que é essencialmente equivalente ao modelo de Griffith, exceto que a abordagem de Irwin é uma forma mais conveniente para solucionar problemas de engenharia. Irwin definiu uma taxa<sup>4</sup> de energia liberada “ $g$ ”, que é uma medida de energia disponível para um incremento de extensão de trinca dada por

$$g = -\frac{d\pi}{dA}. \quad (2.79)$$

Aqui  $g$  é a taxa de mudança na energia potencial com a área da trinca. Desde que  $g$  é obtido da derivada de um potencial, também é chamado de “força da extensão da trinca” ou “força de direção da trinca”.

De acordo com a Equação 2.76 o  $g$  de uma placa ampla em EPT é

$$g = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}. \quad (2.80)$$

Referindo a seção anterior, a extensão da trinca ocorre quando  $g$  atinge um valor crítico.

$$g_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad (2.81)$$

Onde  $g_c$  é a medida de tenacidade à fratura do material.

A energia potencial de um campo elástico é

$$\pi = U - F \quad (2.82)$$

onde  $U$  é a energia de deformação estocada no corpo e  $F$  é o trabalho feito por forças externas.

### 2.3.5 Análise de tensão

Para certas configurações de trincas sujeitas a forças externas, é possível derivar a forma fechada das tensões no corpo, assumindo material com comportamento elástico linear. Ao se definir um eixo em coordenadas polares com origem na ponta da trinca, veja Figura 2.18, pode-se mostrar que o campo de tensão em qualquer corpo elástico linear é dado por:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.83)$$

na qual  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensão  $r$  e  $\theta$  são raios e ângulo em coordenada polar de uma posição em relação a ponta da trinca,  $f_{ij}$  é uma função adimensional de  $\theta$  no termo principal e  $k$  é uma constante.

<sup>4</sup>O termo taxa não é usado no contexto de derivada com respeito ao tempo

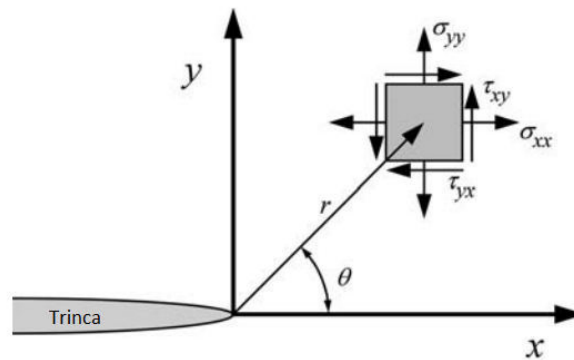


Figura 2.18 – Definição do eixo das coordenadas à frente da ponta de trinca. A direção  $z$  é normal para a página.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

Para os termos de alta ordem,  $A_m$  é a amplitude e  $g_{ij}^{(m)}$  é uma função adimensional função de  $\theta$  para o  $m$ -ésimo termo.

Os termos de alta ordem dependem da geometria, mas a solução para qualquer configuração contém um termo principal para  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ . Com  $r \rightarrow 0$ , o termo principal se aproxima do infinito, mas os outros termos se mantêm finitos ou próximos a zero. Portanto, a tensão próxima a ponta da trinca varia com  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , independentemente da configuração do corpo com trinca. Também pode-se mostrar que o deslocamento próximo a ponta da trinca varia com  $\sqrt{r}$ . A Equação 2.83 expressa uma tensão singular, desde que a tensão é assintótica para  $r = 0$ , Anderson, 2005.

Existe três tipos de carregamentos de ponta de trinca que a trinca pode experimentar, veja Figura 2.19. Carregamento Modo I, onde a principal carga é aplicada na normal ao plano da trinca, tendendo a abrir a trinca. O Modo II corresponde a um carregamento no plano de cisalhamento e tende a escorregar um lado da trinca com respeito ao outro lado. Já o Modo III refere-se a um cisalhamento fora do plano. O corpo com trinca pode ser carregado em qualquer um desses modos, ou a combinação de dois ou três modos.

### 2.3.6 O fator de intensidade de tensão

Cada modo de carregamento produz o termo  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  de singularidade na ponta da trinca, mas a constante de proporcionalidade  $k$  e  $f_{ij}$  depende do modo. Neste ponto é conveniente trocar  $k$  pelo FIT que é o fator de intensidade de tensão, onde  $K = k\sqrt{2\pi}$ . “FIT” normalmente tem um subscrito para indicar o modo de carregamento, isto é,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ .



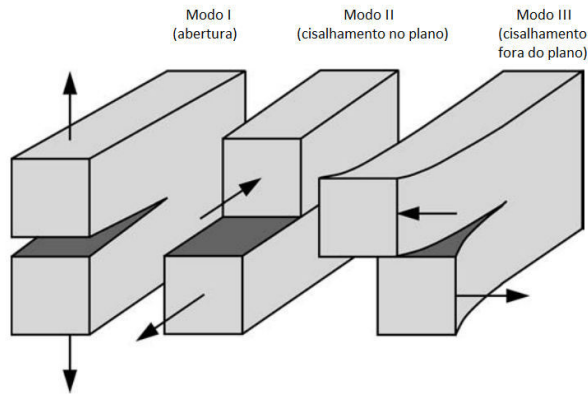


Figura 2.19 – Os três modos de carregamento podem ser aplicados na trinca.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

A fazer  $r \rightarrow 0$  pode-se escrever as seguintes soluções para cada uma dos modos.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (2.84)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad (2.85)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad (2.86)$$

A Tabela 2.1 apresenta o campo de tensões para um material elástico isotrópico e linear. Já a Tabela 2.2 mostra o campo de deslocamento na ponta da trinca para modo I e modo II para material isotrópico linear elástico e a 2.3 apresenta as tensões e os deslocamentos não-nulos no modo III (material elástico linear isotrópico). Nessas Tabelas,  $\mu$  é o módulo de cisalhamento,  $k = 3 - 4\nu$  para estado plano de deformação e  $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  para estado plano de tensão.

Tabela 2.1 – Campo de tensão à frente da ponta da trinca para modo I e modo II em um material isotrópico elástico linear.

Modo I	Modo II
$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$\sigma_{zz} = 0$ EPT e $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ EPD	
$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$	

Em um problema de modo misto, isto é quando mais de um carregamento está presente, as contribuições individuais para um dado componente de tensão são aditivos:

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (2.87)$$

A Equação 2.87 é o princípio da superposição linear.

Tabela 2.2 – Campo de deslocamento na ponta da trinca para modo I e modo II para material isotrópico linear elástico.

modo I	modo II
$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 + 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$u_y = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

Tabela 2.3 – Tensões e deslocamentos não-nulos no modo III (material elástico linear isotrópico).

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Considerando o modo I campo singular no plano da trinca, onde  $\theta = 0$ . De acordo com a Tabela 2.1, as tensões nas direções  $x$  e  $y$  são iguais:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.88)$$

Quando  $\theta = 0$ , as tensões de cisalhamento são zero, o que significa que o plano da trinca é um plano principal para modo puro I de carregamento.

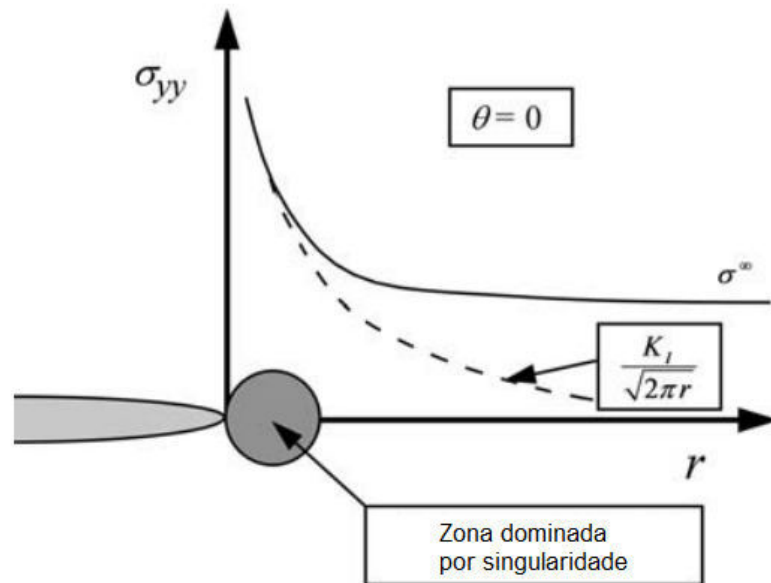


Figura 2.20 – Tensão normal no plano da trinca modo I.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

A Equação 2.88 é válida somente para tensões próximas a ponta da trinca, onde  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  é o campo dominado por singularidade, veja a Figura 2.20.

OBS: Tensões distantes da ponta da trinca são governadas por condições de contorno remotas. Por exemplo, se a estrutura trincada está sujeita a uma tensão remota uniforme,  $\sigma_{yy}$  aborda um valor de  $\sigma^\infty$ , Figura 2.20. Pode-se definir a zona dominada por singularidade como a região onde as Equações da Tabela 2.1 à 2.3 descrevem o campo de ponta de trinca.

O FIT define a amplitude da singularidade na ponta da trinca, ou seja, tensões próximas a ponta da trinca aumentam em proporção a  $K$ . Além disso, o FIT descreve totalmente as condições de ponta da trinca. Se  $K$  é conhecido, então é possível determinar todos os componentes de tensão, deformação e deslocamentos como função de  $r$  e  $\theta$ .

### 2.3.7 Relações entre FIT e comportamento global

Para o fator de intensidade de tensão ser útil, primeiro deve-se determinar  $K$  vindo de cargas remotas e da geometria. Soluções de forma-fechada para  $K$  tem sido determinadas para configurações simples. Para situações mais complexas, o fator de intensidade de tensão pode ser estimado por experimentos ou análise numérica.

Uma configuração para a qual uma solução na forma fechada existe é uma trinca através de uma placa infinita sujeita a uma tensão remota, Figura 2.16. Desde que a tensão remota seja perpendicular ao plano da trinca, o carregamento é puro do modo I. Corpos elásticos devem sofrer tensões proporcionais, isto é, todos os componentes de tensão em todos os locais aumentarão proporcionalmente com as forças aplicadas remotamente. Portanto, as tensões de ponta de trinca deverão ser proporcionais as tensões remotas, e  $K_I \propto \sigma$ . De acordo com a Equação 2.84, a intensidade de tensão tem unidade  $\sigma \sqrt{\text{comprimento}} \equiv \frac{N}{m^2} \sqrt{m}$ . Desde que a única escala de comprimento relevante é o tamanho da trinca, a relação entre  $K_I$  e as condições globais devem ter a seguinte forma:

$$K_I = o(\sigma \sqrt{a}). \quad (2.89)$$

Pode ser mostrado que a solução é do tipo

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (2.90)$$

Portanto a amplitude da singularidade na ponta da trinca para esta configuração é proporcional à tensão remota e a raiz quadrada do tamanho da trinca.

Ao alterar a inclinação da trinca, de acordo como mostradona Figura 2.16, de um ângulo  $\beta$ :

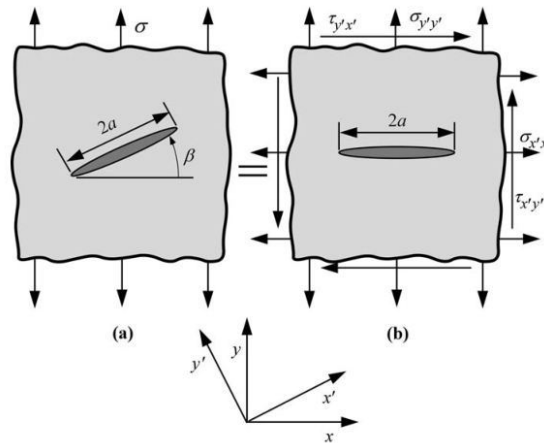


Figura 2.21 – Trinca reta em uma placa infinita para um caso geral onde a tensão não é perpendicular ao plano da trinca.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

$$K_I = \sigma_{y'y'} \sqrt{\pi a} = \sigma \cos^2(\beta) \sqrt{\pi a} \quad (2.91)$$

$$K_{II} = \tau_{x'y'} \sqrt{\pi a} = \sigma \sin(\beta) \cos(\beta) \sqrt{\pi a} \quad (2.92)$$

Note que as Equações 2.91 e 2.92 se reduzem ao modo puro I, quando  $\beta = 0$ . O máximo  $K_{II}$  ocorre em  $\beta = 45^\circ$ , onde a tensão de cisalhamento é máxima.

### 2.3.8 Relação entre K e G

Dois parâmetros que descrevem o comportamento de trincas têm sido introduzidos até agora: A taxa de energia liberada  $G$  e o fator de intensidade de tensão  $K$ . Os parâmetros quantificam a mudança líquida de energia potencial que acompanha um incremento de extensão de trinca; a última quantidade FIT caracteriza a tensão, deformação e deslocamentos próximos à ponta da trinca. A taxa de energia liberada descreve um comportamento global, enquanto  $K$  é um parâmetro local. Para materiais elásticos lineares  $K$  e  $G$  são relacionados.

Para uma trinca através de uma placa infinita sujeita a uma tração uniforme, Figura 2.16,  $G$  e  $K_I$  são dados pelas Equações 2.80 e 2.90, respectivamente. Combinando estas duas equações produz a seguinte relação entre  $G$  e  $K_I$  para estado plano de tensão:

$$G = \frac{K_I^2}{E}. \quad (2.93)$$

Para condição de estado plano de deformação,  $E$  deve ser trocado por  $\frac{E}{(1-\nu^2)}$ . Para evitar escrever expressões separadas para EPD e EPT, a seguinte notação será adotada para EPT

$$E' = E \quad (2.94)$$

e para EPD

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (2.95)$$

Portanto  $G - K_I$  se relacionam para ambos os estados se tornando

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.96)$$

Mas a Equação 2.96 é uma relação geral que é aplicada a todas configurações. Irwin realizou uma análise de trinca fechada que define tal prova. Está apresentada abaixo

Considere uma trinca de comprimento inicial  $a + \Delta a$  sujeito ao modo de carregamento I, como ilustrado na Figura 2.22(a). Neste caso é conveniente colocar a origem na distância  $\Delta a$  ao lado da ponta da trinca.

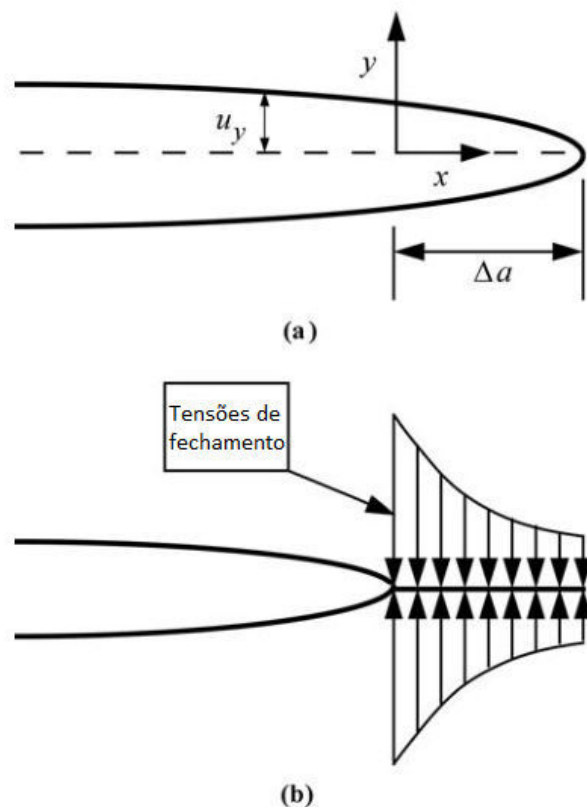


Figura 2.22 – Aplicação da tensão de fechamento o que encurta a trinca por  $\Delta a$ .  
[Adaptado de Anderson, 2005]

Assuma que a placa tem espessura unitária. Permita que um campo de tensão compressivo seja aplicado nas faces da trinca entre  $x = 0$  e  $x = \Delta a$  de suficiente magnitude para fechar a trinca nesta região. O trabalho requerido para fechar a trinca na ponta está relacionado com a taxa de liberação de energia:

$$\mathbf{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta U}{\Delta a} \right)_{\text{carga fixa}} \quad (2.97)$$

na qual  $\Delta U$  é o trabalho de fechamento de trinca, que é igual a soma das contribuições do trabalho vindo de  $x = 0$  para  $x = \Delta a$ :

$$\Delta U = \int_{x=0}^{x=\Delta a} dU(x). \quad (2.98)$$

E o trabalho incremental em  $x$  é igual a área sob a curva força deslocamento:

$$dU(x) = 2 \left( \frac{1}{2} F_y(x) u_y(x) \right) = \sigma_{yy}(x) u_y(x) dx. \quad (2.99)$$

O fator 2 no trabalho é requerido porque os dois lados da trinca são deslocados na distância absoluta  $u_y(x)$ . O deslocamento  $u_y$  em abertura de trinca para modo I é dado na Tabela 2.2 colocando  $\theta = \pi$ .

$$u_y = \frac{(k+1)K_I(a+\Delta a)}{2\mu} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}} \quad (2.100)$$

na qual  $K_I(a+\Delta a)$  define o FIT na ponta original da trinca. A tensão normal necessária para fechar a trinca é relatada por  $K_I$  para trinca encurtada, isto é

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I(a)}{\sqrt{2\pi x}}. \quad (2.101)$$

Combinando a Equação 2.97 com a Equação 2.98 produz

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{(k+1)K_I(a)K_I(a+\Delta a)}{4\pi\mu\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{x}} dx = \frac{(k+1)K_I^2}{8\mu} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.102)$$

Portanto, a Equação 2.96 é a relação geral para o modo I. A análise acima pode ser repetida para outros modos de carregamento. A tensão de encurtamento e deslocamento para o modo II são, respectivamente,  $\tau_{yx}$  e  $u_x$ , e a correspondente quantidade para o modo III são  $\tau_{yz}$  e  $u_z$ . Quando os três modos de carregamentos estão presentes, a taxa de energia liberada e dada por

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.103)$$

Contribuições de  $G$  a partir dos três modos são aditivas porque a taxa de energia liberada, semelhante energia, é uma quantidade escalar. A Equação 2.103, contudo, assume auto-similaridade no crescimento de trinca, isto é, uma trinca plana é assumida manter a forma a medida que cresce. Geralmente este não é o caso para fraturas no modo misto.

### 2.3.9 Fratura no modo misto

Quando dois ou mais modos de carregamento são presentes, a Equação 2.103 indica a taxa de energia liberada contribuindo para cada modo aditivamente. Esta equação assume auto-similaridade com o crescimento de trinca, contudo, considerando uma trinca em ângulo, na

Figura 2.23, a Equação 2.103 fornece a taxa de energia liberada para um crescimento de trinca plana em um ângulo de  $90^\circ - \beta$  em relação à tensão aplicada.

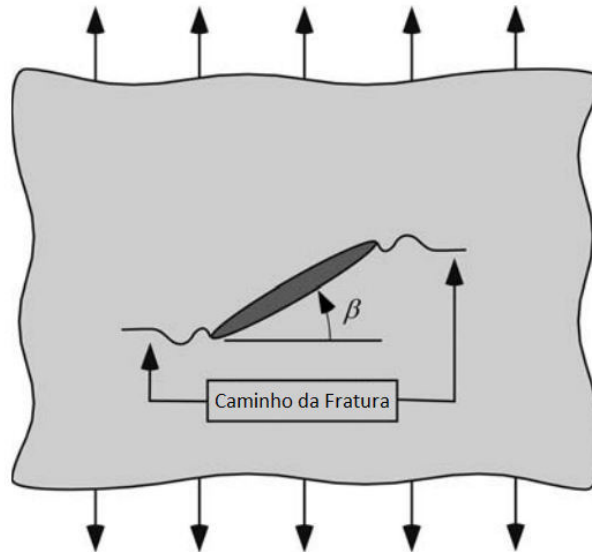


Figura 2.23 – Propagação típica de uma trinca inicial que não é octogonal a tensão normal aplicada. O carregamento para a trinca angular é uma combinação do modo I e modo II, mas a trinca tende a se propagar em um ângulo normal a tensão aplicada, resultando em um carregamento do modo puro I.

[Adaptado de Anderson, 2005]

A propagação da trinca procura um caminho de menor resistência (ou um caminho de máxima força motriz) e não necessariamente ser confinada em seu plano inicial. Se o material é isotrópico e homogêneo, a trinca irá propagar de tal maneira que maximizará a taxa de energia liberada. O que se segue é uma avaliação da taxa de energia liberada como uma função de direção da propagação em problemas de modo misto.

### 2.3.10 Trinca angular

Pode-se generalizar a trinca angular através da espessura na Figura 2.21 para qualquer trinca orientada  $90^\circ - \beta$  a partir da tensão normal aplicada. Para carregamento uniaxial, a FIT para modo I e modo II são dados por:

$$K_I = K_{I(0)} \cos^2(\beta) \quad (2.104)$$

e

$$K_{II} = K_{I(0)} \cos(\beta) \sin(\beta) \quad (2.105)$$

nas quais  $K_{I(0)}$  é o modo I FIT quando  $\beta = 0$ . O campo de tensões na ponta da trinca (em coordenadas polares), para modo I fica dado por:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.106)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.107)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.108)$$

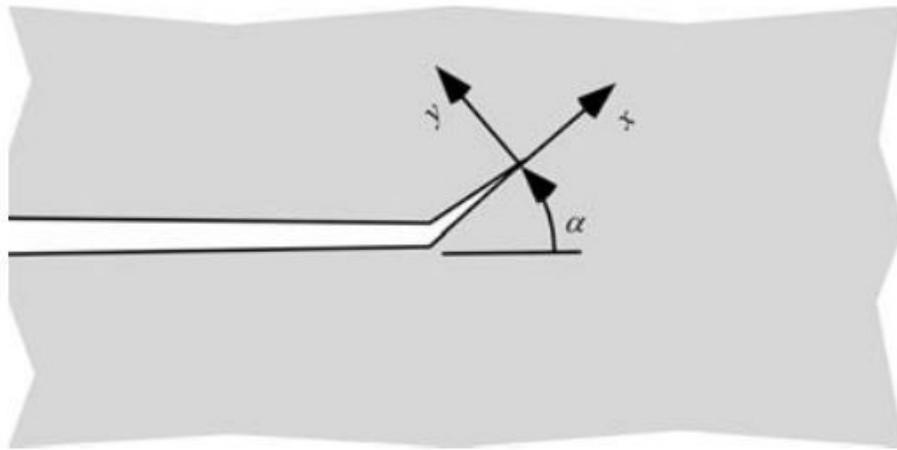


Figura 2.24 – Infinitesimal trinca angular na ponta da trinca macroscópica.  
[Adaptado de Anderson, 2005]

Como dito anteriormente, este campo singular somente é aplicado em  $r \rightarrow 0$ . O campo de tensão singular para o modo II são dados por:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\frac{5}{4} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.109)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\frac{3}{4} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.110)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.111)$$

## 2.4 Integral J

### 2.4.1 Cálculo da Integral J analítica

Ao assumir um comportamento elástico linear em MFLE, os campos de tensão, deformação e deslocamento podem ser determinados empregando o conceito de fator de intensidade de tensão



FIT próximo à região da ponta da trinca. Portanto, é importante avaliar com precisão os FITs para a análise de MEF na MFLE.

Basicamente, os algoritmos computacionais desenvolvidos para avaliar os FITs podem ser categorizados em dois grupos; a abordagem "direta" e a abordagem "energética". A abordagem direta correlaciona os FITs com os resultados do MEF diretamente, enquanto a abordagem de energia é baseada no cálculo da taxa de liberação de energia. Em geral, as abordagens de energia são mais precisas que os procedimentos diretos; no entanto, as abordagens diretas são mais populares e geralmente são usadas para verificar os resultados das abordagens energéticas, pois suas expressões são simples. Os métodos de integral de limite e integral de domínio são as técnicas mais convenientes e precisas propostas para calcular os FITs em condições de modo misto com base nas integrais de energia de interação. Eshelby, 1974 introduziu uma série de integrais de contorno baseadas no teorema da conservação de energia, que são independentes do caminho escolhido. A técnica da "integral J" foi originalmente definida por para calcular a taxa de liberação de energia em problemas de trinca usando um sistema de coordenadas local da ponta de trinca  $(x_1, x_2)$  como, ver Khoei, 2014,

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma. \quad (2.112)$$

na qual  $W$  é a densidade de energia de deformação ( $W = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ ). Fazendo a superposição de dois estados no modo  $I$ , chega-se a

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \left( \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) \delta_{1j} - \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \frac{\partial \left( u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \right)}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (2.113)$$

na qual (1) - Indica o estado puro ou atual e (2) - Indica o estado auxiliar.

A integral  $J$  para o estado puro 1 e um estado auxiliar 2 pode ser separada, aparecendo um novo termo

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (2.114)$$

onde  $I^{(1,2)}$  é o termo de interação

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma. \quad (2.115)$$

Já a densidade de energia de deformação de interação é definida por

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}. \quad (2.116)$$

Como está sendo feito a superposição de dois estados em outro, pode-se escrever

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2 \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right)}{E_{eff}} \quad (2.117)$$

resultando em

$$I^{(1,2)} = \frac{2 \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right)}{E'}. \quad (2.118)$$

O fator de intensidade de tensão FIT para o estado atual pode ser encontrado, separando os dois modos de fratura. Seleccionando  $K_I^{(2)} = 1$  e  $K_{II}^{(2)} = 0$ , pode-se resolver  $K_I^{(1)}$ , isto é

$$K_I^{(1)} = \frac{I^{(1, \text{modo I})} E'}{2}. \quad (2.119)$$

Um procedimento similar pode ser feito para  $K_{II}^{(1)}$  resultando em

$$K_{II}^{(1)} = \frac{I^{(1, \text{modo II})} E'}{2}. \quad (2.120)$$

A integral  $J$ , Equação 2.112 pode ser diretamente avaliada ao longo do contorno da malha do MEF. Esse contorno pode ser usualmente avaliado passando pelos pontos de integração de Gauss ao longo do elemento, onde as tensões podem ser calculadas com mais precisão. Entretanto, a implementação prática desta técnica raramente mostra independência do caminho e os resultados se tornam dependentes da malha. Em Li et al., 1985 foi realizado o cálculo da integral  $J$  pela transformação da integral de contorno para uma integral de área equivalente. Esta técnica é simples de implementar no código do MEF e a implementação numérica apresenta grande precisão e independência da superfície da integração. A forma de área da integral  $J$  é definida como

$$J = \int_A \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (2.121)$$

onde  $q$  é uma função de ponderação definida sobre o domínio de integração. O domínio de integração deve ser seleccionado de tal forma que seja suficientemente próximo da ponta da trinca para um padrão complexo de trincas; em segundo lugar, deve ser simples de implementar em um procedimento de simulação totalmente automático e, finalmente, ele precisa ser consistente com geometria e limitação de contornos em complexos contornos e problemas com muitas trincas, Figura 2.25. A função  $q$  tem o valor de 1 (unitário) na região da ponta da trinca e desaparece no lado externo do contorno prescrito para cálculo da integral  $J$ , como verificado na Figura 2.26.

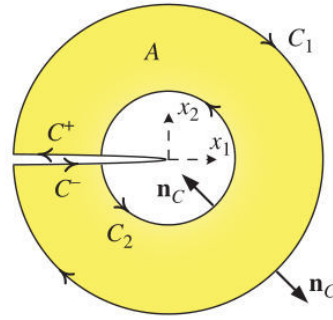


Figura 2.25 – O domínio da Integral  $J$  para o cálculo de fatores de intensidade de tensão em modo misto.  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Baseado na integral  $J$  definido na Equação 2.121, a nova integral de interação pode ser definida como:

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA. \quad (2.122)$$

O modos  $I$  e  $II$  dos FITs  $K_I$  e  $K_{II}$  podem ser finalmente obtidos de acordo com as Equações 2.119 e 2.120 assumindo o estado auxiliar (2) como modo puro  $I$  e/ou modo puro  $II$  como campo assintótico, avaliando os campos de deslocamentos e tensões na área da ponta da trinca e pela substituição destas variáveis na Equação 2.122.

#### 2.4.2 Cálculo da Integral $J$ numérica no MEF

Abaixo são listadas, novamente, as equações pertinentes para o cálculo da integral  $J$  numérica no contexto do método dos elementos finitos e então para o XFEM.

Pode-se partir da Equação 2.122 que é a integral de interação no modo misto, e a partir desta pode-se determinar o fatores de intensidade de tensão (FIT) no modo  $I$  e modo  $II$ , já a integral  $J$  no modo  $I$  e/ou modo  $II$  não será necessária sua determinação, embora a partir dos FITs é possível determinar  $J_I$  e  $J_{II}$ .

A partir do campo de tensões à frente da ponta da trinca para modo  $I$ , dado na Tabela 2.1:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.123)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.124)$$

$$\sigma_{21} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.125)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.126)$$

Também no modo *I*, o campo de deslocamento na ponta da trinca, conforme Tabela 2.2

$$u_1 = \frac{K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k - 1 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.127)$$

$$u_2 = \frac{K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k + 1 - 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.128)$$

Fazendo as derivadas dos campos de deslocamento no modo *I* em relação ao raio

$$\frac{du_1}{dr} = \frac{K_I \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [k - \cos(\theta)] (\nu + 1)}{4E \sqrt{\pi} \sqrt{r}} \quad (2.129)$$

$$\frac{du_2}{dr} = \frac{K_I \sqrt{2} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) [2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + k - 1] (\nu + 1)}{4E \sqrt{\pi} \sqrt{r}} \quad (2.130)$$

$$\frac{du_1}{d\theta} = \frac{K_I \sqrt{2} \sqrt{r} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) [6\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + k - 5] (\nu + 1)}{4E \sqrt{\pi}} \quad (2.131)$$

$$\frac{du_2}{d\theta} = \frac{K_I \sqrt{2} \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [k - 3\cos(\theta) + 2] (\nu + 1)}{4E \sqrt{\pi}} \quad (2.132)$$

E as tensões a frente da ponta da trinca para modo *II*, dado na Tabela 2.1

$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.133)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.134)$$

$$\sigma_{21} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2.135)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.136)$$

No modo *II*, o campo de deslocamento na ponta da trinca, conforme Tabela 2.2

$$u_1 = \frac{K_{II}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k + 1 + 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.137)$$

$$u_2 = -\frac{K_{II}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k - 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.138)$$

Fazendo as derivadas dos campos de deslocamento no modo *II* em relação ao raio

$$\frac{du_1}{dr} = \frac{K_{II}\sqrt{2}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) [k - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3] (\nu + 1)}{4E\sqrt{\pi}\sqrt{r}} \quad (2.139)$$

$$\frac{du_2}{dr} = -\frac{K_{II}\sqrt{2}\text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) [k + \text{cos}(\theta) - 2] (\nu + 1)}{4E\sqrt{\pi}\sqrt{r}} \quad (2.140)$$

$$\frac{du_1}{d\theta} = \frac{K_{II}\sqrt{2}\sqrt{r}\text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) [k + 3\text{cos}(\theta)] (\nu + 1)}{4E\sqrt{\pi}} \quad (2.141)$$

$$\frac{du_2}{d\theta} = \frac{K_{II}\sqrt{2}\sqrt{r}(\nu + 1) [3\text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) - 3\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2k\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)]}{8E\sqrt{\pi}} \quad (2.142)$$

As derivadas de  $r$  e  $\theta$  em relação a  $x$  e  $y$  são apresentadas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Derivadas de " $r$ " e " $\theta$ " em relação a  $x$  e  $y$ .

$\frac{dr}{dx} = \text{cos}\theta$	$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\text{sen}\theta}{r}$
$\frac{dr}{dy} = \text{sen}\theta$	$\frac{d\theta}{dy} = \frac{\text{cos}\theta}{r}$

E com as derivadas da Tabela 2.4 calculadas é possível transformar as derivadas dos campos  $u$  e  $v$  que estão em relação " $r$ " e " $\theta$ ", para as coordenadas  $x$  e  $y$ , conforme a Tabela 2.5 abaixo:

Tabela 2.5 – Derivadas de " $u$ " e " $v$ " em relação a  $x$  e  $y$ .

$\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{dr} \frac{dr}{dx} + \frac{du_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$	$\frac{du_2}{dx} = \frac{du_2}{dr} \frac{dr}{dx} + \frac{du_2}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$
$\frac{du_1}{dy} = \frac{du_1}{dr} \frac{dr}{dy} + \frac{du_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dy}$	$\frac{du_2}{dy} = \frac{du_2}{dr} \frac{dr}{dy} + \frac{du_2}{d\theta} \frac{d\theta}{dy}$

Logo, as deformações que foram modificadas seu sistema de coordenadas polar para cartesiano ficam dadas por

$$\varepsilon_{11} = \frac{du}{dx} = \frac{du_1}{dx} \quad (2.143)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dx} \right) = \varepsilon_{21} \quad (2.144)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{dv}{dy} = \frac{du_2}{dy} \quad (2.145)$$

E com todo o processo anterior obtêm-se a integral de interação da Equação 2.122 para o modo I, conforme a Equação 2.146

$$I_1 = \left( \sigma_{11}^* \frac{du_1}{dx} + \sigma_{21}^* \frac{du_2}{dx} \right) \frac{\partial q^{TIP}}{\partial x_1} + \left( \sigma_{12}^* \frac{du_1}{dx} + \sigma_{22}^* \frac{du_2}{dx} \right) \frac{\partial q^{TIP}}{\partial x_2} \quad (2.146)$$

Como existem casos em que a trinca poderá estar posicionada em qualquer ângulo entre  $0^\circ$  a  $90^\circ$  em qualquer um dos 4 quadrantes do sistema cartesiano, torna-se necessário rotacionar o campo de tensões á frente da ponta da trinca rotacionando o sistema coordenadas local na ponta da trinca, conforme Equação 2.147 abaixo:

$$\sigma^* = [\mathbf{R}] [\sigma] [\mathbf{R}]^T \quad (2.147)$$

onde  $\mathbf{R}$  na Equação 2.147 é a matriz de rotação

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \text{sen}(\omega) \\ -\text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.148)$$

Onde  $\omega$  é o ângulo entre a trinca e o eixo  $x$  do sistema de coordenada global.

**Função de Ponderação/Peso  $q$**  A função de ponderação fica definida da seguinte forma, veja mais detalhes em Khoei, 2014,

$$q = \sum_{I=1}^{N^{elem}} N_I(x) q_I \quad (2.149)$$

na qual  $N^{elem}$  é número de nós do elemento,  $N_I$  é a função de forma do elemento quadrilateral linear atuando no nó  $I$ ,  $q$  função peso/ponderação e  $q_I$  é a função peso atuando no nó  $I$ . Pode-se ainda escrever:

$$q = N_1(x)q_1 + N_2(x)q_2 + N_3(x)q_3 + N_4(x)q_4 \quad (2.150)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\partial N_1}{\partial x} q_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} q_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} q_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} q_4 \quad (2.151)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{\partial N_1}{\partial y} q_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} q_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} q_3 + \frac{\partial N_4}{\partial y} q_4 \quad (2.152)$$

e então escrever

$$\frac{\partial q^{TIP}}{\partial x_j} = [\mathbf{R}] \left\{ \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\}. \quad (2.153)$$

A função  $q$  tem o valor unitário na região da ponta da trinca e desaparece no lado externo do contorno prescrito para cálculo da integral  $J$ , como verificado na Figura 2.26.

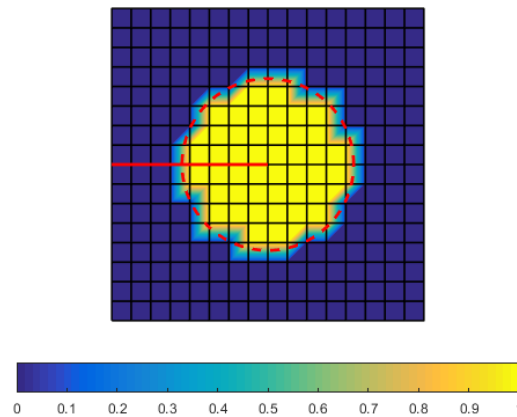


Figura 2.26 – Visualização da seleção de nós do domínio utilizando a função peso  $q$ .  
[Adaptado de Khoei, 2014]

O comportamento dos valores do gradiente  $\frac{\partial q}{\partial x}$  da Equação 2.121 pode ser visualizado na Figura 2.27.

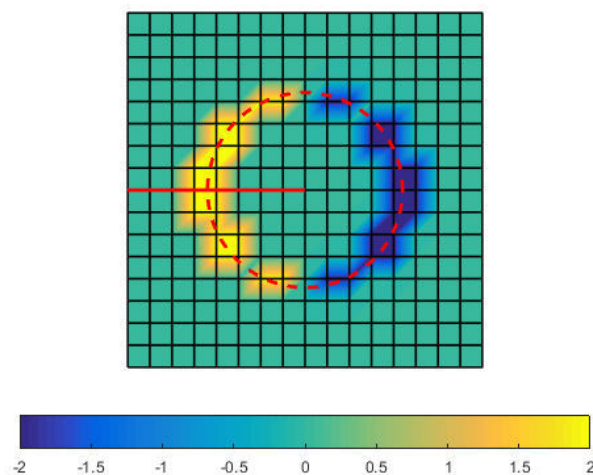


Figura 2.27 – Visualização da derivada da função peso  $\frac{\partial q}{\partial x}$  utilizada na integral de Interação  $I$ .  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Já o comportamento dos valores do gradiente  $\frac{\partial q}{\partial y}$  da Equação 2.121 pode ser visualizado na Figura 2.28.

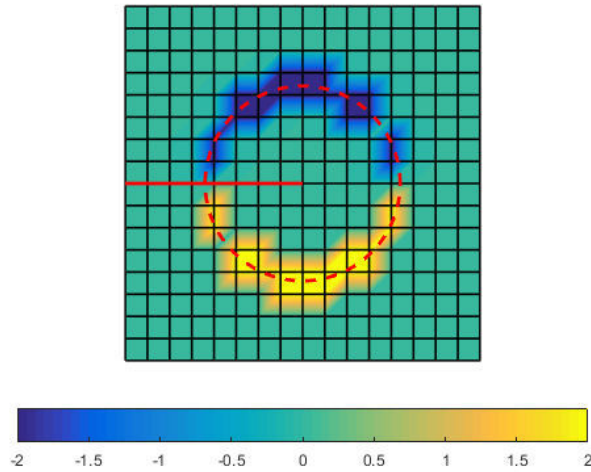


Figura 2.28 – Visualização da derivada da função peso  $\frac{\partial q}{\partial y}$  utilizada na integral de Interação  $I$ .  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Na Figura 2.29 é representado os gradientes da função peso por uma magnitude calculada por  $\partial q_{mag} = \sqrt{\frac{\partial q^2}{\partial x} + \frac{\partial q^2}{\partial y}}$  apenas para visualização. No entanto esta quantidade não participa do cálculo da integral  $J$ .

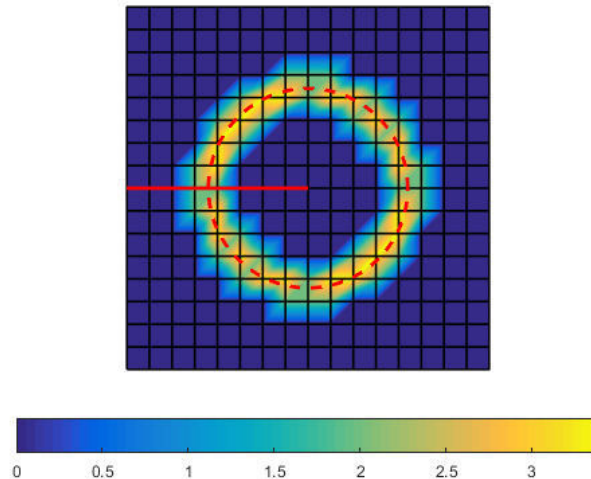


Figura 2.29 – Visualização da função gradiente na magnitude  $\partial q_{mag}$  atuando em nós com valores maiores que 0.  
[Adaptado de Khoei, 2014]

Portanto a Equação 2.122 Khoei, 2014

$$I^{(1,2)} = \int_A \left( -W \delta_{1j} + \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (2.154)$$



pode ser avaliada numericamente usando a regra da Integração de Gauss

$$I^{(1,2)} = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}^{gauss}} \left\{ \left( -W \delta_{1j} + \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} w_m |J| \quad (2.155)$$

onde  $w_m$  são os pesos e  $|J|$  é o determinante do Jacobiano. Uma vez calculada esta integral pode-se utilizar as Equações 2.119 e 2.120 definidas anteriormente para o cálculo dos FITs, mais detalhes podem ser vistos em Khoei, 2014.

## 2.5 Procedimentos de integração numérica

Abaixo estão relacionadas as estratégias de integração numérica utilizando a quadratura de Gauss em função do tipo de enriquecimento do elemento. E os tipos de elementos são:

1. Elementos com quadratura de Gauss 10x10 uniforme, são utilizados quando algum nó tem função de enriquecimento e os outros nós com funções padrões de MEF;
2. Elemento com enriquecimento completo de funções assintóticas de ponta de trinca;
3. Elemento com enriquecimento completo de funções de Heaviside;
4. Elemento com enriquecimento completo, mas com uma mistura de funções de Heaviside e ponta de trinca;
5. Elementos com quadratura de Gauss 2x2 uniforme, sem enriquecimento nenhum.

A Figura 2.30 detalha os tipos de elementos utilizados:

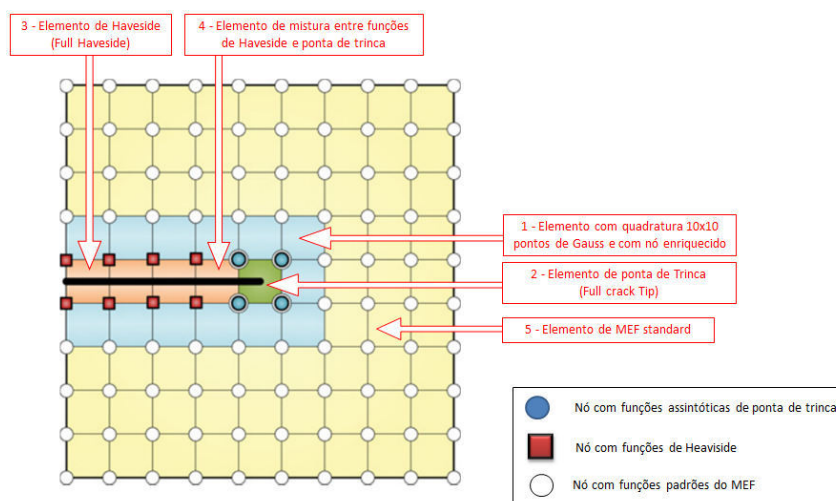


Figura 2.30 – Tipos de elementos utilizados neste método numérico.

### 2.5.1 Integração numérica com subelementação

A subelementação é utilizada para aumentar o suporte de integração numérica uniforme num elemento. Um exemplo é mostrado na Figura 2.31.

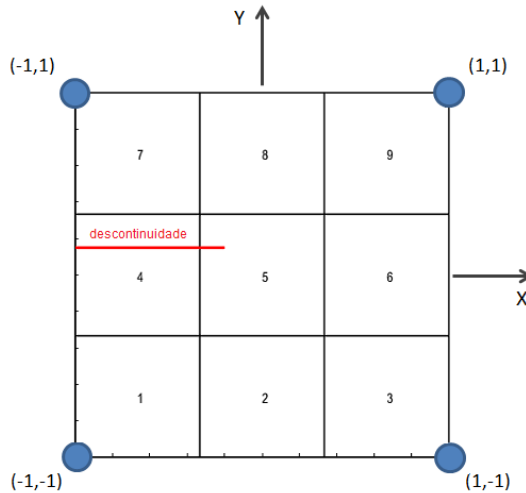


Figura 2.31 – Elemento com enriquecimento de ponta de trinca com subelementação de 3x3 subelementos.

O processo de subelementação consiste na discretização do domínio natural do elemento *Master* e num conjunto de subelementos, onde os pontos de Gauss estão referenciados ao subelemento. Portanto o que deseja determinar são as coordenadas  $(\xi, \eta)$  e o elemento de área  $dA$  do elemento *Master*, a partir das coordenadas  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  do subelemento conforme descrito na Figura 2.32.

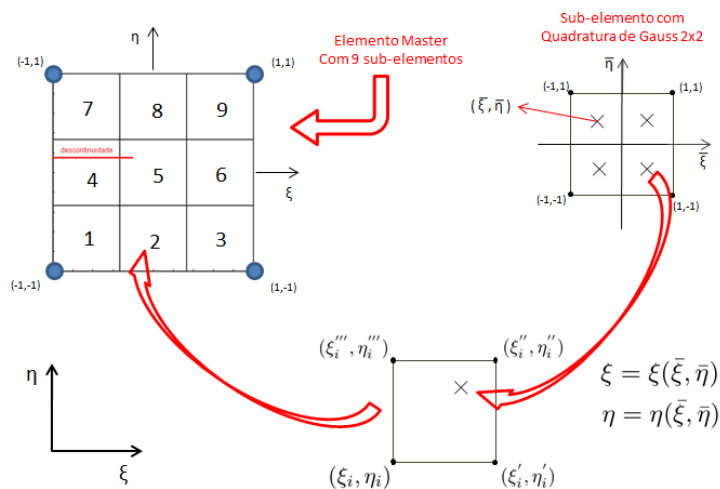


Figura 2.32 – Relação entre o elemento *Master* e o subelemento.

As coordenadas  $(\xi, \eta)$  do elemento *Master* são determinadas pelo mapeamento, conforme as Equações 2.156 e 2.157

$$\xi(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sum_{k=1}^4 N_k(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \xi_k \quad (2.156)$$

$$\eta(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sum_{k=1}^4 N_k(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \eta_k \quad (2.157)$$

O mapeamento de área é obtido através do módulo do vetor normal de área definido pela Equação 2.158

$$d\xi d\eta = \|\mathbf{a}_\xi \times \mathbf{a}_\eta\| d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (2.158)$$

Na Equação 2.158  $\mathbf{a}_\xi$  e  $\mathbf{a}_\eta$  são os vetores covariantes tangentes as coordenadas curvilíneas  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\eta}$  respectivamente. Estes vetores são definidos pelas Equações 2.159 e 2.160

$$\mathbf{a}_\xi = \left[ \sum_{k=1}^4 N_{k,\bar{\xi}} \xi_k \right] \mathbf{i} + \left[ \sum_{k=1}^4 N_{k,\bar{\xi}} \eta_k \right] \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad (2.159)$$

$$\mathbf{a}_\eta = \left[ \sum_{k=1}^4 N_{k,\bar{\eta}} \xi_k \right] \mathbf{i} + \left[ \sum_{k=1}^4 N_{k,\bar{\eta}} \eta_k \right] \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \quad (2.160)$$

Conhecido  $\xi$  e  $\eta$  as coordenadas  $x$  e  $y$  podem ser definidas por mapeamento usando as Equações 2.159 e 2.160. Para o elemento de área  $dA = dx dy$ :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 x_k N_k(\xi, \eta) \quad (2.161)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 y_k N_k(\xi, \eta) \quad (2.162)$$

$$dA = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (2.163)$$

com

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix}.$$

### 3 RESULTADOS

#### 3.1 Caso 1 - Cálculo do Fator de intensidade de tensão de uma placa com trinca submetida a um carregamento uniaxial

Esse exemplo é um caso de elasticidade plana com carregamento e condições de contorno indicados na Figura 3.2. Neste caso será mostrado a análise de convergência do fator de intensidade de tensão  $K_I$  para uma estratégia obtida pelo enriquecimento indicado na Figura 3.1 juntamente com o refinamento homogêneo da malha conforme Tabela 3.1 e 3.2.

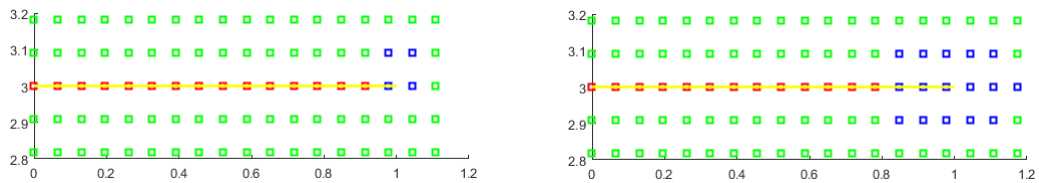


Figura 3.1 – Método de elemento de ponta de trinca e elemento de área fixa, mostrando elementos com enriquecimento de Heaviside, ponta de trinca e elementos que compartilham algum nó enriquecido.

Para o caso da Figura 3.2 a solução exata é

$$K_I = \sigma \sqrt{a\pi} Y \left( \frac{a}{W} \right) \quad (3.1)$$

onde

$$Y \left( \frac{a}{W} \right) = 1.12 - 0,231 \left( \frac{a}{W} \right) + 10.55 \left( \frac{a}{W} \right)^2 - 21.72 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + 30.39 \left( \frac{a}{W} \right)^4. \quad (3.2)$$

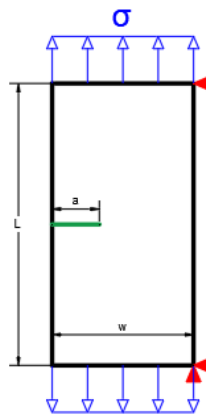


Figura 3.2 – Placa em carregamento uniaxial.

Esse exemplo é um caso de elasticidade plana com carregamento e condições de contorno indicados na Figura 3.2. Foram considerados  $a = 1mm$ ,  $W = 3mm$ ,  $L = 6mm$ ,  $B = 1mm$  (espessura) e  $\sigma = 1MPa$ . São apresentados duas análises de convergência para o problema. A primeira considera a utilização do método de enriquecimento de elemento de ponta de trinca tal como apresentado na Figura 2.10 e a outra está baseada no enriquecimento de uma área fixa, tal como apresentado na Figura 2.11. Em todos os exemplos  $h$  é o tamanho do elemento usado na região da ponta de trinca.

**Utilizando o método de elemento de ponta de trinca (somente existe 1 elemento com ponta de trinca)** A Tabela 3.1 apresenta os resultados obtidos para um refino da malha como mostrado na primeira coluna.

Tabela 3.1 – Resultados da placa com trinca em carregamento uniaxial.

Malha	Quant. de Elementos	$K_I$ [MPa $\sqrt{mm}$ ]	$I_1$	Raio da Integral J [mm]	1/h	Erro [%]
19x39	741	3,1065	5,6540E-07	0,4737	6,330	1,864
23x45	1035	3,1223	5,6830E-07	0,3913	7,667	1,365
31x49	1519	3,1244	5,6800E-07	0,2903	10,333	1,298
35x65	2275	3,1414	5,7170E-07	0,2571	11,667	0,761
46x66	3036	3,1582	5,7120E-07	0,1800	15,333	0,231

**Utilizando o método de enriquecimento de área fixa** Da mesma forma, a Tabela 3.2 apresenta os resultados obtidos para o mesmo refino de malha do que apresentado na Tabela 3.1, entretanto aqui o raio do enriquecimento é um parâmetro importante para a análise.

Tabela 3.2 – Resultados da placa com trinca em carregamento uniaxial.

Malha	Quant. de Elementos	$K_I$ [MPa $\sqrt{mm}$ ]	$I_1$	Raio da Integral J [mm]	1/h	Erro [%]
19x39	741	3,0974	5,6370E-07	0,4737	6,330	2,151
23x45	1035	3,1448	5,7230E-07	0,3913	7,667	0,654
31x49	1519	3,1629	5,7570E-07	0,2903	10,333	0,082
35x65	2275	3,1700	5,7690E-07	0,2571	11,667	0,142
46x66	3036	3,1693	5,7680E-07	0,1800	15,333	0,120

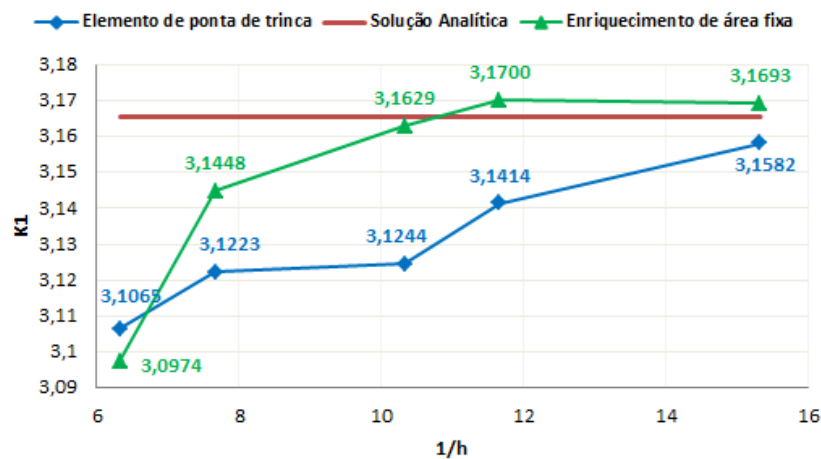


Figura 3.3 – Gráfico da placa com trinca em carregamento uniaxial.

Os resultados de convergência obtidos para  $K_I$  são apresentados na Figura 3.3. Repare que de acordo com o método de enriquecimento escolhido tais resultados mudam bastante. Para o enriquecimento utilizando o *método de elemento de ponta de trinca* a convergência é bastante pior do que para o *método de enriquecimento de área fixa*. A linha em vermelho neste gráfico mostra o valor exato para o  $K_I$  do problema. Para o *método de enriquecimento de área fixa* um patamar é atingido enquanto para o *método de elemento de ponta de trinca* o patamar não parece estar presente.

Na Figura 3.4 estão mostradas a malha 46x66 elementos e o deslocamento  $u_y$  na placa com trinca em carregamento uniaxial.

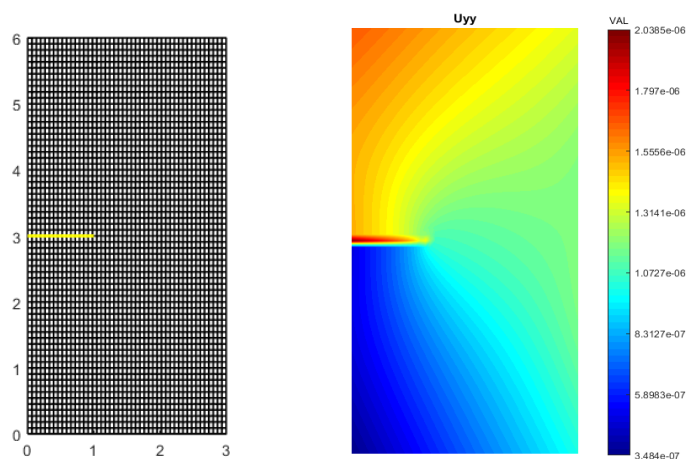


Figura 3.4 – Malha 46x66 e deslocamento na placa com trinca em carregamento uniaxial.

Na Figura 3.5 são apresentadas as isofoixas de tensões, tanto para a tensão de von Mises quanto para as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ .

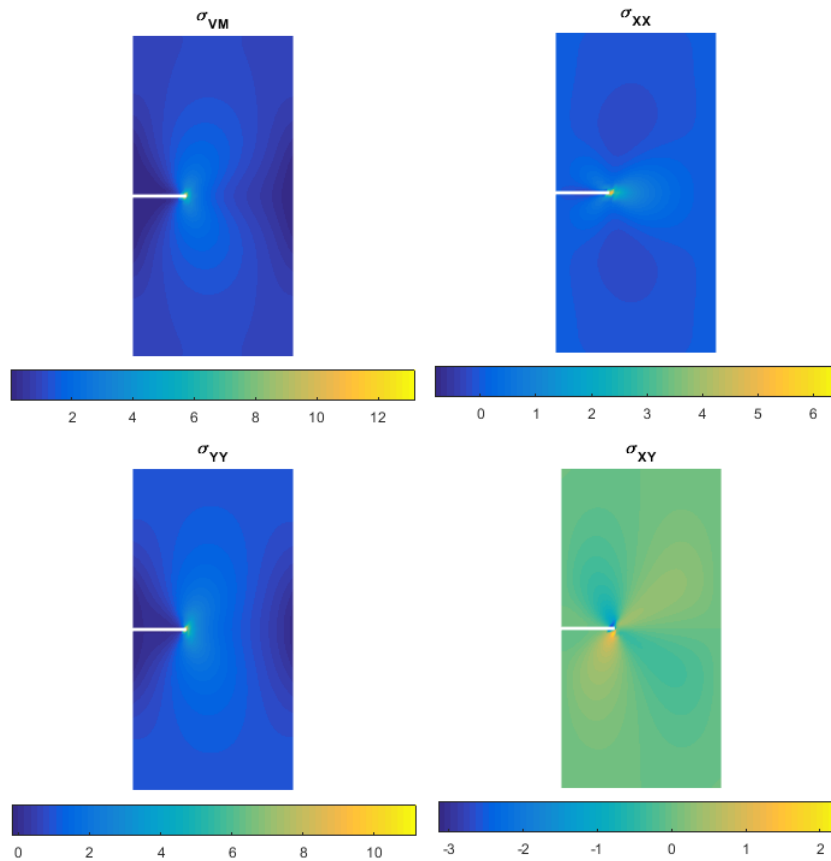


Figura 3.5 – Tensões na placa com trinca em carregamento uniaxial.

### 3.1.1 Comparação entre estratégias de integração numérica para o cálculo do FIT

Nesta subseção são apresentados os resultados obtidos utilizando as várias estratégias de integração numérica para os elementos que tem enriquecimentos, sejam eles Heaviside ou ponta de trinca. Duas estratégias de subelementação e uma estratégia onde foi aumentado o número de pontos de integração de Gauss foram consideradas. Estes casos correspondem aos nomes “ $K_I$ - Sub Q4” e “ $K_I$ - Sub TRI” onde são realizadas integrações com subelementação usando elementos Quadrilaterais de 4 nós e com elementos triangulares de 3 nós. Já o nome “ $K_I$  - Gauss” significa que foram considerados apenas a elevação do número de pontos de Gauss na integração.

A Tabela 3.3 apresenta os valores em termos de  $K_I$  com unidade  $MPa\sqrt{mm}$ , obtidos em função do refino da malha global para o caso 1 aqui considerado, Figura 3.2.

Já a Figura 3.6 mostra o gráfico de  $K_I$  onde a influência de cada uma das estratégias pode ser visualizada. É possível perceber que a estratégia  $K_I$  – *SubTRI* apresentou convergência assintótica não monotônica, por outro lado, as estratégias  $K_I$  – *SubQ4* e  $K_I$  – *Gauss* ambas apresentam convergência assintótica e monotônica.

Tabela 3.3 – Resultados obtidos com as diferentes estratégias de integração.

Malha	$K_I$ - Sub Q4	Erro [%]	$K_I$ - Sub TRI	Erro [%]	$K_I$ - Gauss	Erro [%]	Raio da Integral $J$ [mm]	1/h
19x39	3,1081	1,813	3,1150	1,595	3,1093	1,775	0,3974	6,330
23x45	3,1197	1,447	3,0923	2,312	3,1182	1,494	0,3612	7,667
31x49	3,1259	1,251	3,1721	0,208	3,1276	1,197	0,3111	10,333
35x65	3,1356	0,945	3,1301	1,118	3,1349	0,967	0,2928	11,667
46x71	3,1421	0,739	3,1563	0,291	3,1433	0,701	0,2554	15,333
50x79	3,1437	0,689	3,1432	0,704	3,1438	0,686	0,2449	16,667

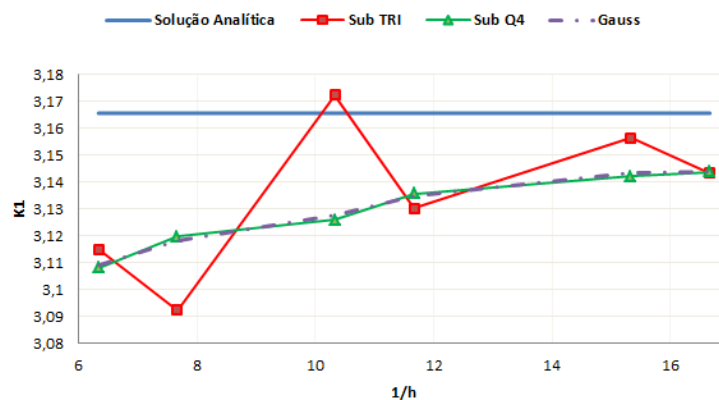


Figura 3.6 – Placa em carregamento uniaxial.

Deve-se ressaltar aqui que a quadratura de gauss no elemento quadrilateral não distorcida é ótima, o que não acontece com subelementos triangulares com o mesmo número de pontos de integração.

### 3.2 Caso 2 - Cálculo do FIT de uma placa com trinca no centro submetida a um carregamento uniaxial

Para o caso da Figura 3.7 a solução exata é a Equação 3.1. Para esse caso o fator geométrico  $Y$  é

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) = 1 + 0.256\left(\frac{a}{W}\right) - 1.152\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 12.2\left(\frac{a}{W}\right)^3.$$



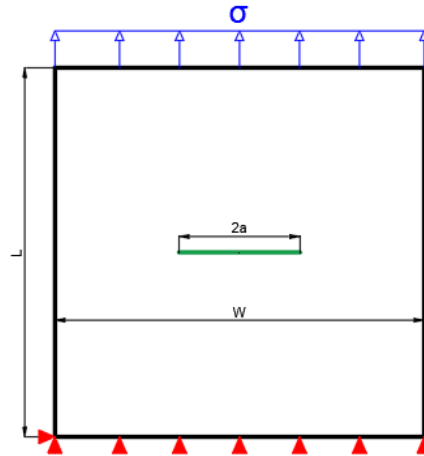


Figura 3.7 – Placa com trinca no centro submetida a um carregamento uniaxial.

As dimensões consideradas para a placa na Figura 3.7 são  $a = 1\text{mm}$ ,  $W = 6\text{mm}$ ,  $L = 14\text{mm}$  e  $B = 1\text{mm}$  (espessura). Novamente foi aplicada uma tensão remota de  $\sigma = 1\text{MPa}$ . Para este caso só foi considerado *método de enriquecimento de área fixa*, devido aos melhores resultados obtidos no primeiro caso estudado. Os resultados para um refino da malha são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Resultados da placa com trinca em carregamento uniaxial.

Malha	Quant. de Elementos	$K_I$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	$I_1$	Raio da Integral $J$ [mm]	$K_I$ analítico [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	1/h	Erro [%]
16x42	672	2,4067	4,376E-07	1,9902	1,823	2,667	32,02
19x53	1007	2,2870	4,125E-07	1,8263	1,823	3,167	25,45
20x53	1060	2,1295	3,891E-07	1,7801	1,823	3,333	16,81
23x54	1242	1,9027	3,463E-07	1,6600	1,823	3,833	4,37
23x56	1288	1,8776	3,417E-07	1,6600	1,823	4,000	3,00

Os resultados de convergência obtidos para  $K_I$  são apresentados também na Figura 3.8. Novamente a linha em vermelho é o valor exato para o  $K_I$  do problema enquanto a linha em verde é a convergência para o refino da malha. Repare que, a menos do resultado da primeira malha, parece existir uma curva de convergência bastante clara para o problema.

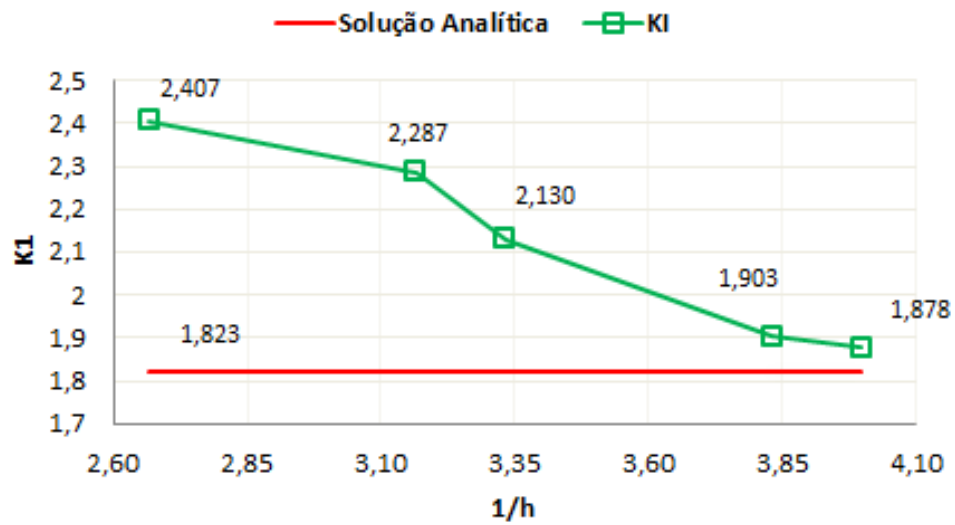


Figura 3.8 – Gráfico de convergência para  $K_I$  da placa com trinca no meio em carregamento uniaxial.

Na Figura 3.9 está mostrado um exemplo de malha de integração para o problema, malha 23x56 elementos, enquanto na Figura 3.9 é apresentada as isoformas para o deslocamento  $u_y$ .

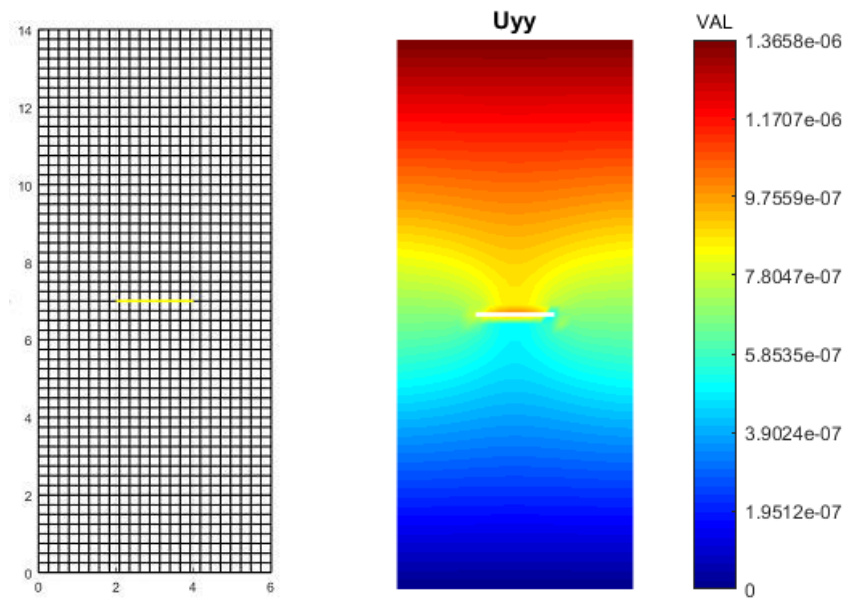


Figura 3.9 – Malha 23x56 e deslocamento na placa com trinca no centro em carregamento uniaxial.

Na Figura 3.10 são apresentadas as isoformas de tensões, tanto para a tensão de von Mises quanto para as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ .

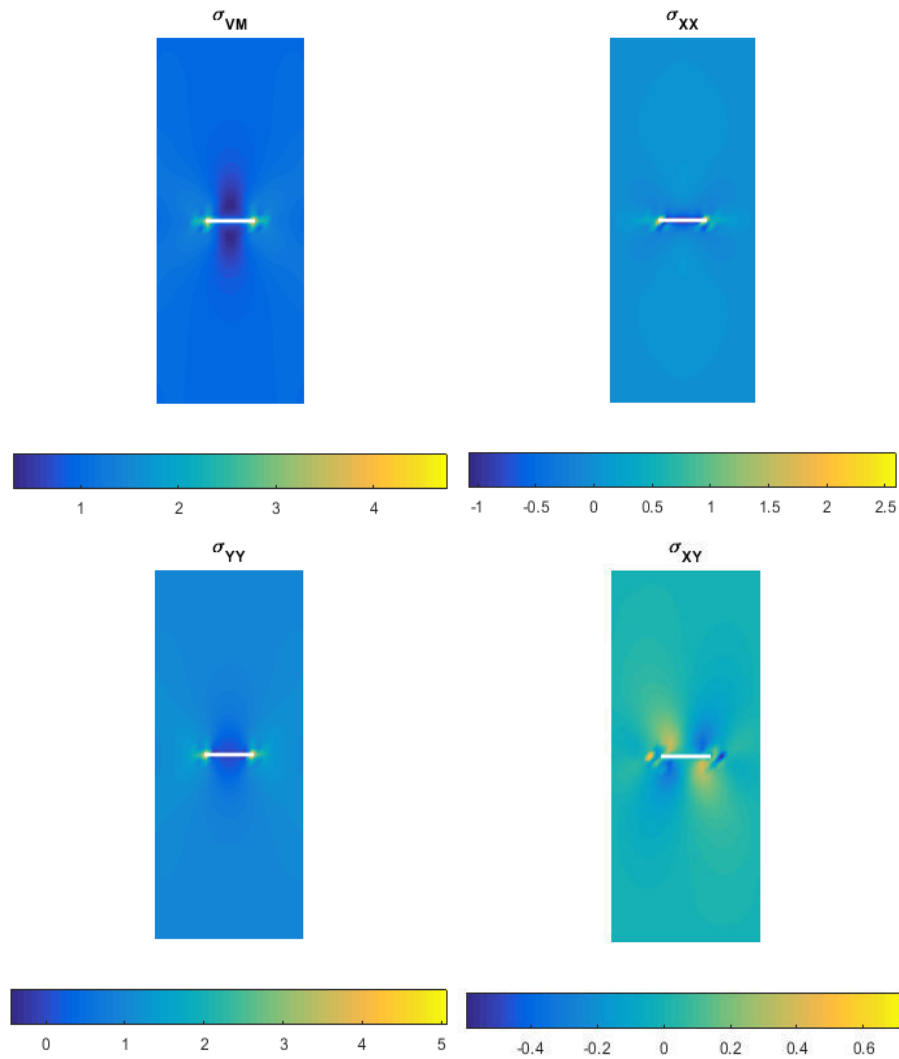


Figura 3.10 – Tensões na placa com trinca no centro em carregamento uniaxial.

### 3.3 Caso 3 - Cálculo do Fator de intensidade de tensão de um corpo de prova padronizado

Para o caso da Figura 3.11 a solução exata para  $K_I$  é dada por

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} Y \left( \frac{a}{W} \right) \quad (3.3)$$

com

$$Y \left( \frac{a}{W} \right) = \frac{\left( 2 + \frac{a}{W} \right) \left[ 0,886 + 4,64 \frac{a}{W} - 13,32 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 14,72 \left( \frac{a}{W} \right)^3 - 5,6 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right]}{\left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.4)$$

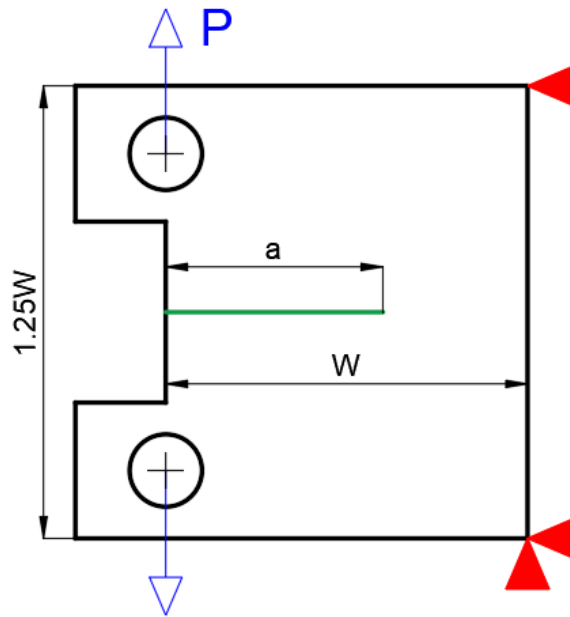


Figura 3.11 – Corpo de prova padronizado com trinca submetida a um carregamento uniaxial.

Para este caso foram consideradas as seguintes dimensões para o problema  $a = 30mm$ ,  $W = 50mm$ ,  $B = 18mm$  (espessura) e uma carga de  $P = 2000N$  foi aplicada na região mostrada da Figura 3.11. Também para este caso só foi considerado *método de enriquecimento de área fixa*. Os resultados para um refino da malha são apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Resultados do corpo de prova padronizado.

Quant. de Elementos	$K_I$ [MPa $\sqrt{mm}$ ]	$I_1$	Raio da Integral $J$ [mm]	$K_I$ analítico [MPa $\sqrt{mm}$ ]	1/h	Erro [%]
576	209,71	1,862E-03	6	214,6	0,608	2,28
852	211,08	1,874E-03	6	214,6	0,750	1,64
1455	212,42	1,886E-03	6	214,6	0,950	1,02
2304	214,03	1,900E-03	6	214,6	1,161	0,27

Os resultados de convergência obtidos para  $K_I$  são apresentados na Figura 3.12. Novamente a linha em vermelho é o valor exato para o  $K_I$  do problema enquanto a linha em verde é a convergência para o refino da malha. Observe que existe uma curva de convergência bastante clara para o problema.

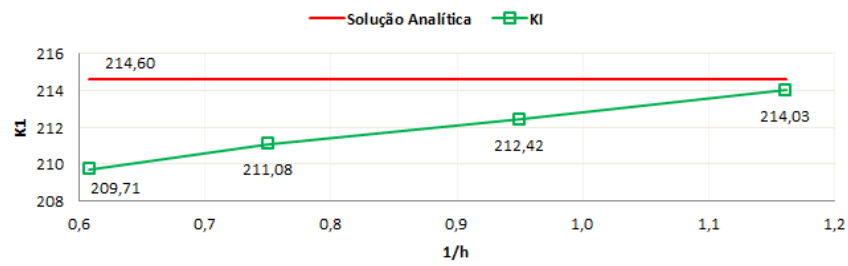


Figura 3.12 – Gráfico de convergência para  $K_I$  do Corpo de prova padronizado.

Na Figura 3.13 está mostrada a malha de integração, chamada de malha 58x68, enquanto na Figura 3.15 é apresentada a saída para o deslocamento  $u_y$  em isoformas.

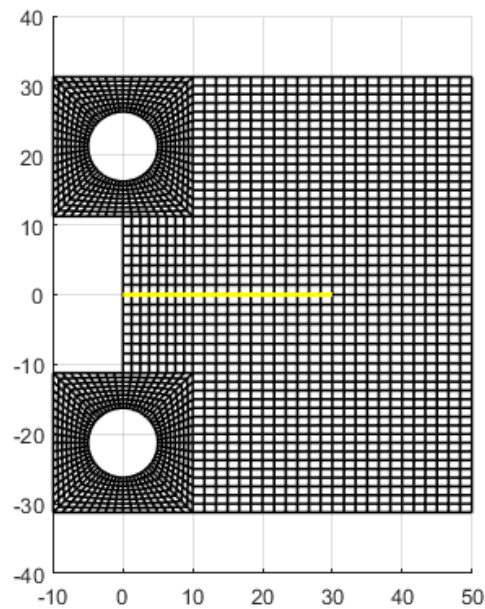


Figura 3.13 – Malha 58x68 do Corpo de prova padronizado.

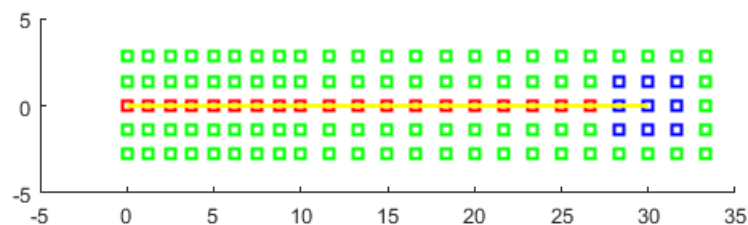


Figura 3.14 – Elementos com enriquecimento de elemento de ponta de trinca com nós em azul.

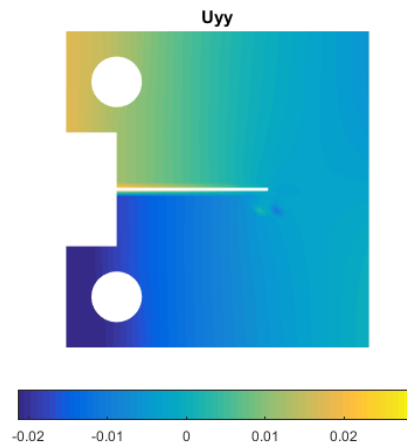


Figura 3.15 – Deslocamento do Corpo de prova padronizado.

Na Figura 3.16 são apresentadas as isofaixas de tensões, para a malha da Figura 3.13, tanto para a tensão de von Mises quanto para as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ .

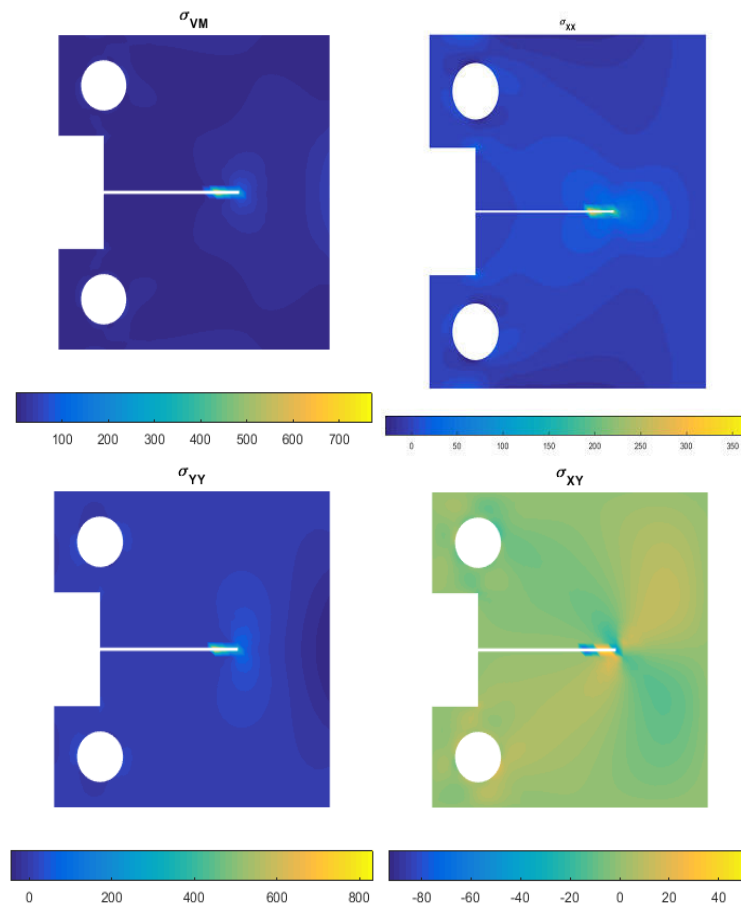


Figura 3.16 – Tensões no Corpo de prova padronizado.

### 3.4 Caso 4 - Cálculo do Fator de intensidade de tensão de um corpo de prova tipo viga bi-apoiada.

Esse exemplo é um caso de elasticidade plana com carregamento e condições de contorno indicados na Figura 3.18. Neste caso será mostrado a análise de convergência do fator de intensidade de tensão  $K_I$  para uma estratégia obtida pelo enriquecimento indicado na Figura 3.17 juntamente com o refinamento homogêneo da malha conforme Tabela 3.6.

O fator de concentração de tensão para este caso é

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} Y\left(\frac{a}{W}\right) \quad (3.5)$$

com

$$Y\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{3\frac{S}{W}\sqrt{\frac{a}{W}}}{2\left(1+2\frac{a}{W}\right)\left(1-\frac{a}{W}\right)^{3/2}} \left[ 1.99 - \frac{a}{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left( 2.15 - 3.93\frac{a}{W} + 2.7\left(\frac{a}{W}\right)^2 \right) \right]. \quad (3.6)$$

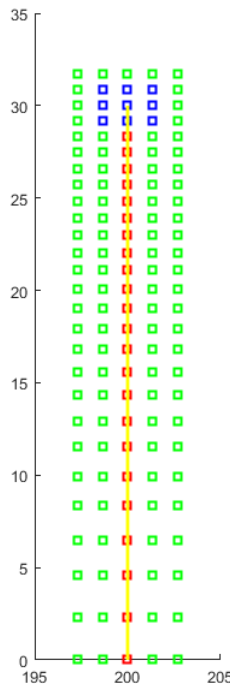


Figura 3.17 – Elementos com enriquecimento de elemento de ponta de trinca com nós em azul, e elementos que compartilham algum nó enriquecido.

Na Figura 3.18 são consideradas  $a = 30\text{mm}$ ,  $W = 100\text{mm}$ ,  $S = 4W$ ,  $B = 30\text{mm}$  (espessura) e  $P = 4000\text{N}$ .

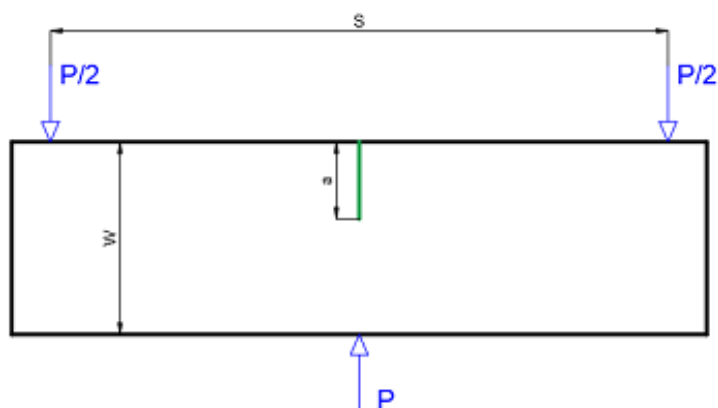


Figura 3.18 – Caso viga bi-apoiada.

Seguindo a mesma linha adotada para os últimos casos, aqui também para este caso só foi considerado *método de enriquecimento de área fixa*. Os resultados para um refino da malha são apresentados na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Resultado caso Viga bi apoiada.

Malha	Quant. de Elementos	$K_I$ [MPa $\sqrt{mm}$ ]	$I_1$	Raio Integral $J$ [mm]	$K_I$ analítico [MPa $\sqrt{mm}$ ]	Erro [%]
20x12	240	54,8515	4,754e-04	10	81,133	32,39
40x18	720	82,4749	7,148e-04	10	81,133	1,65
50x20	1000	67,6774	5,865E-04	10	81,133	16,58
60x24	1440	82,1035	7,116E-04	10	81,133	1,20
70x26	1820	73,3960	6,361E-04	10	81,133	9,54
90x32	2880	83,5075	7,237E-04	10	81,133	2,93
102x38	3876	79,2703	6,870E-04	10	81,133	2,30
110x44	4840	82,5708	7,156E-04	10	81,133	1,77
120x50	6000	80,1482	6,946E-04	10	81,133	1,21
130x54	7020	81,4851	7,062E-04	10	81,133	0,43

Os resultados de convergência obtidos para  $K_I$  são apresentados na Figura 3.19. Novamente a linha em vermelho é o valor exato para o  $K_I$  do problema enquanto a linha em verde é a convergência para o refino da malha. Diferentemente dos casos anteriores aqui a convergência não apresenta uma curva de tendência. Embora apresente um comportamento “dente de serra” e fique difícil falar em convergência pode-se notar que os valores em verde oscilam em torno do valor exato tendo uma tendência de diminuição a medida em que o número de elementos é aumentado.



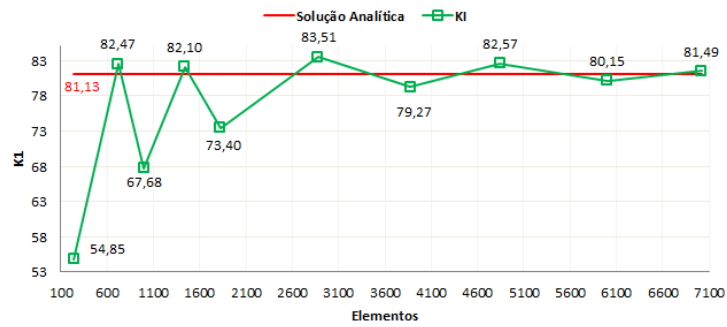


Figura 3.19 – Gráfico de convergência da Viga bi-apoiada.

Na Figura 3.20 está mostrada uma malha de integração para o problema da viga bi-apoiada enquanto na Figura 3.21 é apresentada a saída para o deslocamento  $u_x$  na viga em flexão com trinca no centro em isofaixas.

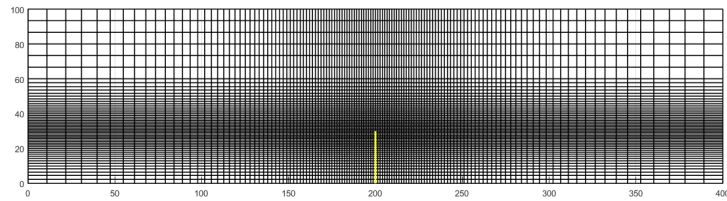


Figura 3.20 – Malha 130 x 54, 7020 elementos.

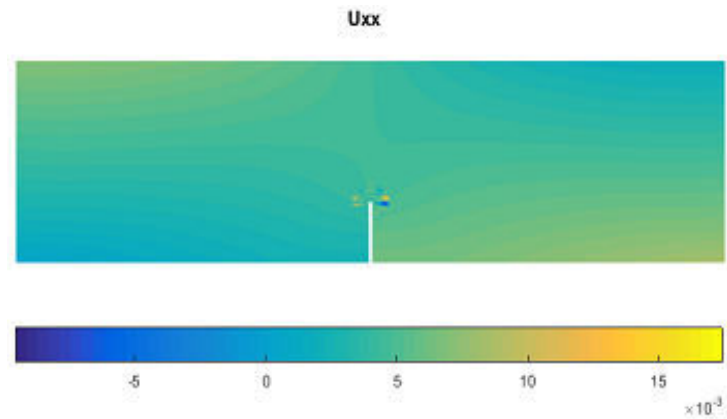


Figura 3.21 – Deslocamento na viga bi-apoiada com trinca no centro.

Na Figura 3.22 são apresentadas as isofaixas de tensões, para a malha da Figura 3.20, tanto para a tensão de von Mises quanto para as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ .

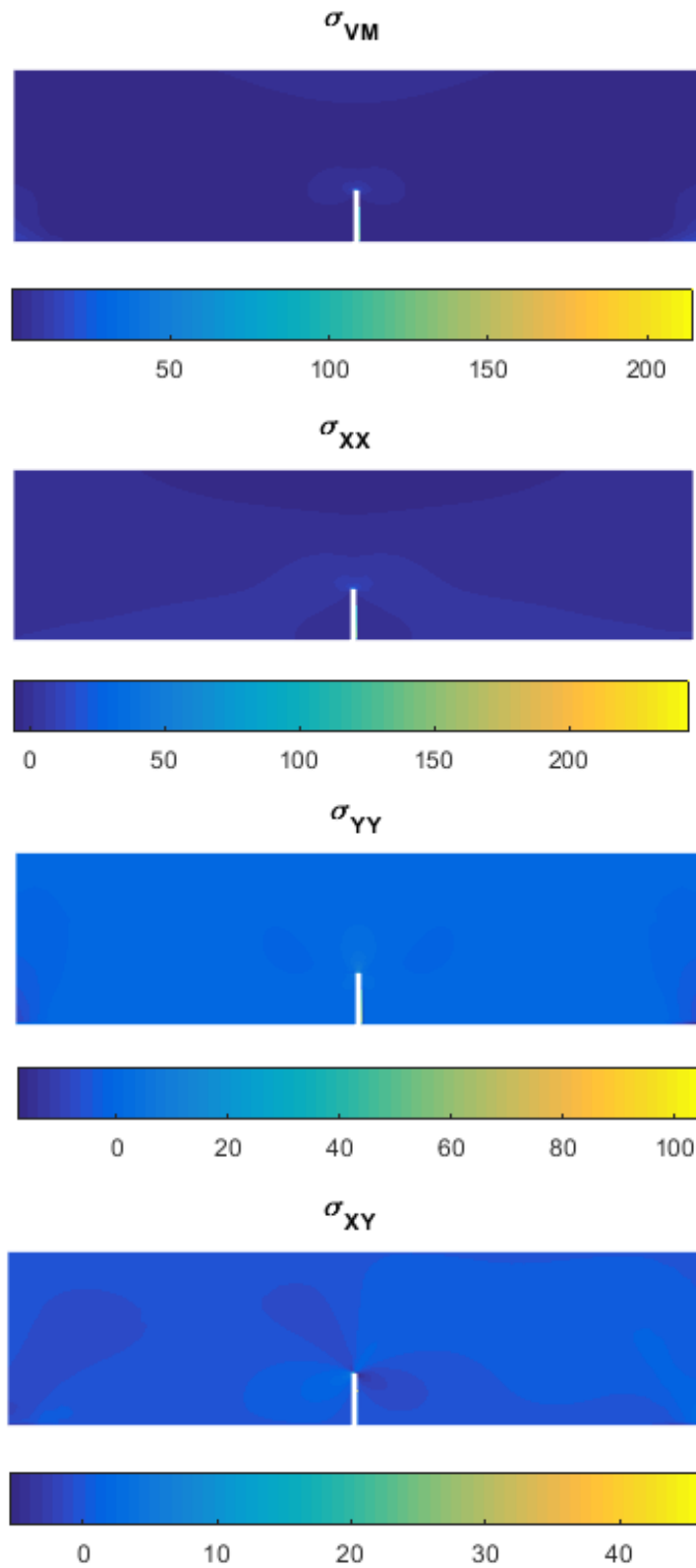


Figura 3.22 – Tensões na viga biapoiada com trinca no centro.

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi analisada a determinação do fator de intensidade de tensão em problemas da mecânica da fratura elástica linear utilizando a técnica numérica conhecida como método dos elementos finitos estendidos. Este foi um primeiro trabalho realizado pelo Grupo de Mecânica Aplicada do Departamento de Engenharia Mecânica e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica nesta área e teve como um dos objetivos o de entender as “nuances” deste método, identificando pontos positivos e outros que necessitam ainda de alguma análise. No XFEM implementado neste trabalho, funções de enriquecimento foram introduzidas para simular a descontinuidade da trinca e o campo de deslocamento singular ao redor da ponta da trinca; em seguida, a integral de interação é empregada para calcular os fatores de intensidade de tensão (FIT) nos problemas de fratura elástica linear. O método é flexível e versátil mas notou-se uma grande dependência nos resultados dos FIT para a posição da trinca em relação ao elemento/malha, tipo de enriquecimento utilizado e procedimento de integração usado. Em muitos dos casos analisados a convergência só começou a ter resultados interessantes para uma malha já bem refinada na região da trinca. Em casos onde se dispõem de valores analíticos para a verificação isso talvez não seja um problema mas, para casos práticos, tal dependência da malha de integração pode levar a dificuldades de interpretação do resultado.

### 4.1 Próximos passos

1. Adicionar elementos Q4 com regularidade  $C^1$  e  $C^2$ , em elementos que precisam ser enriquecidos por funções de ponta de trinca e funções de Heaviside, buscando verificar a melhoria na convergência da solução;
2. Acrescentar um modelo de plasticidade na região da ponta da trinca, que atenda a estados de não linearidade material;
3. Desenvolver um método iterativo que possa verificar se ocorrerá propagação na ponta da trinca a cada passo da iteração de carregamento;
4. Com as funções Level Set já desenvolvidas no presente trabalho, adicionar um caso que permita ter inclusão com propriedades do material diferente da matriz.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agathos, K., Bordas, S. P., e Chatzi, E. **Improving the conditioning of XFEM/GFEM for fracture mechanics problems through enrichment quasi-orthogonalization**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 346, p. 1051 – 1073, 2019a.

Agathos, K., Chatzi, E., e Bordas, S. P. **A unified enrichment approach addressing blending and conditioning issues in enriched finite elements**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 349, p. 673 – 700, 2019b.

Agathos, K., Chatzi, E., Bordas, S. P. A., e Talaslidis, D. **A well-conditioned and optimally convergent XFEM for 3D linear elastic fracture**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 105(9), p. 643–677, 2016.

Alves, M. K. e Rossi, R. **A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions enforced by an extended partition of unity finite element weight function**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57(11), p. 1523–1552, 2003.

Anderson, T. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. CRC Press, 3rd edition edition, 2005.

Areias, P. M. A. e Belytschko, T. **Two-scale shear band evolution by local partition of unity**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66(5), p. 878–910, 2006.

Atluri, S. N. e Zhu, T. **A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics**, *Computational Mechanics*, vol. 22, p. 117–127, 1998.

Babuška, I. e Banerjee, U. **Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201–204, p. 91–111, 2012.

Babuška, I., Caloz, G., e Osborn, J. E. **Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients**, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31(4), p. 945–981, 1994.

Babuška, I., Ihlenburg, F., Paik, E. T., e Sauter, S. A. **A Generalized Finite Element Method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 128(3), p. 325 – 359, 1995.

Babuška, I. e Melenk, J. M. **The partition of unity method**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40(4), p. 727–758, 1997.

Babuška, I. e Osborn, J. E. **Generalized Finite Element Methods: Their Performance and Their Relation to Mixed Methods**, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 20(3), p. 510–536, 1983.

Beissel, S. e Belytschko, T. **Nodal integration of the element-free Galerkin method**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1), p. 49 – 74, 1996.

Belytschko, T. e Black, T. **Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 45(5), p. 601–620, 1999.

Belytschko, T. e Gracie, R. **On XFEM applications to dislocations and interfaces**, International Journal of Plasticity, vol. 23(10), p. 1721 – 1738, 2007.

Belytschko, T., Gracie, R., e Ventura, G. **A review of extended/generalized finite element methods for material modeling**, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, vol. 17(4), p. 043001, 2009a.

Belytschko, T., Gracie, R., e Ventura, G. **A review of extended/generalized finite element methods for material modeling**, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, vol. 17(4), p. 043001, 2009b.

Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., e Krysl, P. **Meshless methods: An overview and recent developments**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139(1), p. 3 – 47, 1996.

Belytschko, T., Lu, Y. Y., e Gu, L. **Element-free Galerkin methods**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37(2), p. 229–256, 1994.

Chen, Y., Lee, J., e Eskandarian, A. **Meshless Methods in Solid Mechanics**. Springer, 2006.

Chessa, J., Smolinski, P., e Belytschko, T. **The extended finite element method (XFEM) for solidification problems**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53(8), p. 1959–1977, 2002.

Duarte, C., Hamzeh, O., Lyszka, T., e Tworzydło, W. **A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190(15), p. 2227 – 2262, 2001.

Duarte, C. A. e Oden, J. T. **An h-p adaptive method using clouds**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139(1-4), p. 237–262, 1996a.

Duarte, C. A. e Oden, J. T. **H-p Clouds—an h-p meshless method**, Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 12(6), p. 673–705, 1996b.

Fries, T.-P. e Belytschko, T. **The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 84(3), p. 253–304, 2010.

Huerta, A. e Fernández-Méndez, S. **Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 48(11), p.1615–1636, 2000.

Khoei, A. R. **Extended Finite Element Method: Theory and Applications**. Wiley, 2014.

Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., e Salaün, M. **High-order extended finite element method for cracked domains**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 64(3), p. 354–381, 2005.

Lancaster, P. e Salkauskas, K. **Surfaces generated by moving least squares methods**, Mathematical of Computational, vol. 37, p. 141–158, 1981.

Li, F., Shih, C., e Needleman, A. **A comparison of methods for calculating energy release rates**, Engineering Fracture Mechanics, vol. 21(2), p. 405 – 421, 1985.

Li, S., Hao, W., e Liu, W. K. **Mesh-free simulations of shear banding in large deformation**, International Journal of Solids and Structures, vol. 37(48-50), p. 7185 – 7206, 2000.

Li, S. e Liu, W. K. **Meshfree and particle methods and their applications**, Applied Mechanics Reviews, vol. 55(1), p. 1–34, 2002.

Liu, G. **Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. CRC Press, 2003.

Liu, W.-K., Li, S., e Belytschko, T. **Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.143(1-2), p. 113–154, 1997.

Melenk, J. e Babuška, I. **The partition of unity finite element method: Basic theory and applications**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139(1), p. 289– 314, 1996.

Moës, N., Dolbow, J., e Belytschko, T. **A finite element method for crack growth without remeshing**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46(1), p.131–150, 1999.

Monaghan, J. **An introduction to SPH**, Computer Physics Communications, vol. 48(1), p. 89– 96, 1988.

Nayroles, B., Touzot, G., e Villon, P. **Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements**, Computational Mechanics, vol. 10, p. 307–318, 1992.

Needleman, A. **Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 67(1), p. 69 – 85, 1988.

Nicolas, M., John, D., e Ted, B. **A finite element method for crack growth without remeshing**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46(1), p. 131– 150, 1999.

Rossi, R., Alves, M. K., e Al-Qureshi, H. A. **A total Lagrangian framework for simulation of powder compaction process based on a smooth three-surface Cap model and a mesh-free method**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 75(12), p.1457–1491, 2008.

Simone, A., Duarte, C. A., e Van der Giessen, E. **A Generalized Finite Element Method for polycrystals with discontinuous grain boundaries**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 67(8), p. 1122–1145, 2006.

Strouboulis, T., Babuška, I., e Copps, K. **The design and analysis of the Generalized Finite Element Method**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 181(1), p.43 – 69, 2000a.

Strouboulis, T., Babuška, I., e Hidajat, R. **The generalized finite element method for Helmholtz equation: Theory, computation, and open problems**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195(37), p. 4711 – 4731, 2006.

Strouboulis, T., Copps, K., e Babuška, I. **The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 47(8), p. 1401–1417, 2000b.

Strouboulis, T., Copps, K., e Babuška, I. **The generalized finite element method**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190(32), p. 4081 – 4193, 2001.

Strouboulis, T., Hidajat, R., e Babuška, I. **The generalized finite element method for Helmholtz equation. Part II: Effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197(5), p. 364 – 380, 2008.

Strouboulis, T., Zhang, L., e Babuška, I. **Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192(28), p. 3109 – 3161, 2003.

Sukumar, N., Chopp, D., Moës, N., e Belytschko, T. **Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190(46), p. 6183 – 6200, 2001.

Wells, G. N. e Sluys, L. J. **A new method for modelling cohesive cracks using finite elements**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50(12), p. 2667–2682, 2001.

Yagawa, G. e Yamada, T. **Free mesh method: A new meshless finite element method**, Computational Mechanics, vol. 18, p. 383–386, 1996.

Zilian, A. e Legay, A. **The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 75(3), p. 305–334, 2008.