

## Cálculo del factor de intensidad de tensiones utilizando el metodo de los elementos discretos

R. L. Barrios D'Ambra<sup>1</sup>, I. Iturrioz<sup>2</sup>, H. Coceres<sup>3</sup>, L. E. Kostascki<sup>4</sup>,  
T. W. Tech<sup>5</sup>, y A. Cisilino<sup>6</sup>

---

### Resumen

El cálculo de parámetros fractomecánicos utilizando métodos numéricos computacionales es siempre un área activa de investigación. Tradicionalmente esta tarea se realiza utilizando modelos de Elementos Finitos o Elementos de Contorno. Por su parte el Método de los Elementos Discretos (MED) es una herramienta simple y relativamente sencilla de uso extendido en el campo de la Ingeniería Civil y la Ingeniería de Suelos. El éxito del DEM para modelar mecanismos de falla en estos campos y la habilidad del método para modelar la nucleación de defectos motiva su aplicación a problemas de mecánica de fractura. Es así que se presenta en este trabajo la aplicación del DEM para el cálculo de parámetros fractomecánicos en el campo de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) y el modelado de la propagación inestable de fisuras. La comparación de los resultados obtenidos con los reportados en la bibliografía para un caso de validación y una aplicación a la interacción fisura-arreglo de agujeros demuestra la capacidad del MED para abordar este tipo de análisis.

*Palabras claves:* Mecánica de fractura. Método de los elementos discretos. Factor de intensidad de tensiones.

---

<sup>1</sup> Prof. Mag. Dpto. de Mecánica Aplicada Universidad Nacional de Nordeste. Av. Las Heras 727 (3500) Resistencia, Argentina. Tel: +54 03722-420076. E-mail: rbarrios@ing.unne.edu.ar

<sup>2</sup> Prof. Dr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sarmento Leite, 425, CEP 90050-170, Porto Alegre - RS, Brasil. E-mail: ignacio@mecanica.ufrgs.br

<sup>3</sup> Prof. Mag. Dpto. de Mecánica Aplicada Universidad Nacional de Nordeste. Av. Las Heras 727 (3500) Resistencia, Argentina. Tel: +54 03722-420076. E-mail: hcoceres@ing.unne.edu.ar

<sup>4</sup> Ing. Dpto. de Mecánica Aplicada Universidad Nacional de Nordeste. Av. Las Heras 727 (3500) Resistencia, Argentina. Tel: +54 03722-420076. E-mail: lkostascki@ing.unne.edu.ar

<sup>5</sup> Ing. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sarmento Leite, 425, CEP 90050-170, Porto Alegre - RS, Brasil

<sup>6</sup> Prof. Dr. División Soldadura y Fractomecánica – Intema, Universidad Nacional de Mar del Plata - Conicet. Av. Juan B. Justo 4302 (7600) Mar del Plata, Argentina

# 1 Introduccion

El cálculo de parámetros fractomecánicos utilizando métodos numéricos computacionales es siempre un área activa de investigación, ya que las aplicaciones tecnológicas de la mecánica de fractura llevan al análisis de geometrías y estados de carga complejos que en muchos casos resultan imposibles de resolver utilizando las soluciones analíticas disponibles en manuales (Rooke & Cartwright, 1976). Sin lugar a dudas las técnicas computacionales más extendidas en esta área son el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC) (ver Aliabadi & Rooke, 1991), pero periódicamente se suman nuevos métodos y técnicas desarrolladas para el análisis de problemas y aplicaciones específicas.

En este contexto resulta también de particular interés contar con herramientas capaces de modelar la propagación inestable de los defectos cuando el valor del parámetro fractomecánico asociado supera su valor crítico. Tradicionalmente este fenómeno es modelado utilizando modelos de MEF y MEC basados en la técnicas de interfaces cohesivas como en los trabajos propuestos entre otros por Needelman (1987) y Aliabadi & Saleh (2002), así como modelos formados por partículas discretas como en el trabajo de Cundall & Hart (1989), Munjiza et al (2004), Brara et al. (2004).

El Método de los Elementos Discretos (MED) es una herramienta simple de uso extendido en el campo de la Ingeniería Civil y la Ingeniería de Suelos (ver por ejemplo Schnaid et al., 2004; e Iturrioz & Riera, 1995 y 1998). El éxito del MED para modelar mecanismos de falla en estos campos y la habilidad del método para simular la nucleación de defectos motiva su aplicación a problemas de mecánica de fractura. Es así que se presenta en este trabajo la aplicación del MED para el cálculo de parámetros fractomecánicos en el campo de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) y el modelado de la propagación inestable de fisuras. La precisión de los resultados obtenidos es evaluada mediante su comparación con resultados disponibles en la bibliografía.

## 2 El método de los elementos discretos

### 2.1 Formulación básica del método

El MED consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo en módulos de reticulado regulares, con las rigideces de sus barras (elementos) definidas de forma que su comportamiento es equivalente al del continuo que se representa. La masa del modelo es discretizada, concentrándola en los nodos del modelo. La Figura 1 muestra un módulo con ocho nodos en sus vértices más un nodo central. Cada nodo tiene asociado tres grados de libertad dados por las componentes espaciales del campo de desplazamientos  $u$ . Las masas son unidas por elementos longitudinales y diagonales de longitud  $L_c$  y  $\sqrt{3}/2 L_c$  respectivamente. La equivalencia entre el arreglo cúbico y un sólido elástico ortótropo con los ejes principales del material orientados en la dirección

de los elementos longitudinales fue verificada por Hayashi (1982), dentro del campo de la elasticidad lineal. Sólo debe ser impuesta la restricción  $\nu = 0.25$  al valor del módulo de Poisson para que la equivalencia sea perfecta. Para otros valores de  $\nu$  aparecen pequeñas diferencias en los términos de corte, estas diferencias pueden despreciarse sobre todo cuando se está interesado en la respuesta no lineal del modelo estudiado.

En el caso de materiales con una ley de comportamiento lineal elástica la ecuación de movimiento del sistema de  $N$  grados de libertad resultante de la discretización espacial puede ser expresada en la forma:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q}(t) \quad (1)$$

dónde  $\mathbf{M}$  denota la matriz de masa (diagonal),  $\mathbf{S}$  la matriz de rigidez y  $\mathbf{u}$  y  $\ddot{\mathbf{u}}$  representan los vectores de desplazamiento y aceleraciones generalizadas (desplazamientos y aceleraciones nodales) respectivamente. Por su parte  $\mathbf{q}(t)$  es el vector que contiene las fuerzas externas aplicadas. El sistema (1) puede ser integrado numéricamente en el dominio del tiempo utilizando un esquema clásico de integración explícita (método de las diferencias finitas centrales). Se utiliza este esquema de integración explícita debido a su simplicidad en la implementación, tomando incrementos de tiempo inferiores al crítico para evitar eventuales inestabilidades numéricas

Es interesante notar que la ley constitutiva para la barra uniaxial permite capturar grandes desplazamientos en el análisis en forma directa, ya que esta formulación es naturalmente objetiva por estar el modelo formado por barras articuladas en sus nodos. Además, como la matriz de masa es diagonal, y debido al esquema de integración explícita utilizado, no es necesaria la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, calculando el estado en el siguiente instante de tiempo en función del estado en el instante de tiempo previo.

La convergencia del DEM para elasticidad lineal así como en los problemas de inestabilidad elástica fue verificada por Hayashi (1982).

## 2.2 Ley constitutiva elemental para el modelado de falla frágil

En 1989 Rocha propuso una relación constitutiva bilineal para los elementos que permite modelar la falla frágil del material. La misma se presenta en la forma general

$$\text{Fuerza} = \text{función (deformación de la barra)} \quad (2)$$

Esta relación constitutiva se grafica en la Figura 2, donde  $P_{cr}$  representa la fuerza máxima de tracción transmitida por el elemento,  $\epsilon_p$  es la deformación asociada a  $P_{cr}$ ,  $E_A$  es la rigidez del elemento y  $k_r$  el parámetro que determina la deformación límite para la cual el elemento agota su capacidad para transmitir esfuerzos,  $\epsilon_r$ . De esta forma el MED contempla la nucleación del daño y la falla de una determinada región del modelo, lo que se traduce en la desactivación de los elementos que agotaron su resistencia.

En la Figura 2b se muestra el comportamiento de una barra después de que alcanza la deformación  $\epsilon_p$ , donde se modifica la rigidez de la barra realizándose en este caso la carga por el segmento AC.

El valor de la deformación límite  $\epsilon_r$  debe ser seleccionado de forma que cuando ocurre la falla final del elemento, la energía liberada por la creación de las superficies de fractura en el área que estas representan,  $A_f$ , esté relacionada con la energía específica de fractura del material  $G_f$  por la siguiente expresión:

$$\frac{G_f \cdot A_f}{L_c} = \frac{k_r \cdot \epsilon_p^2 \cdot E_A}{2} \quad (3)$$

Por su parte, el factor de intensidad de tensiones,  $K$ , se define como

$$K = \chi \cdot f_t \cdot \sqrt{a} \quad (4)$$

siendo  $\chi$  un parámetro que depende de la geometría del problema;  $f_t$  la tensión aplicada y  $a$  longitud de la fisura. Considerando el comportamiento lineal elástico del material hasta la falla ( $f_t = E \epsilon_p$ ) y la hipótesis de estado plano de deformaciones, la deformación crítica está dada por:

$$\epsilon_p = R_f \cdot \left[ \frac{G_f}{E \cdot (1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (5)$$

dónde:

$$G_f = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (6)$$

$R_f$  es un "factor de falla" definido como:

$$R_f = \frac{I}{(\chi \cdot \sqrt{a})} \quad (7)$$

Resulta evidente en este punto que los parámetros de la relación constitutiva no dependen únicamente del material sino que también de la discretización del modelo. Tenemos entonces que  $P_{cr}$ ,  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_r$ ,  $G_f$ , y  $R_f$  son propiedades exclusivas del material,  $A_f$  y  $L_c$  son propiedades exclusivas del modelo, mientras que los parámetros  $E_A$  y  $k_r$  dependen tanto del modelo como del material. Finalmente cabe señalar que el método ofrece la posibilidad de considerar la aleatoriedad de las propiedades del material variando las mismas de elemento a elemento de acuerdo a una ley estadística establecida.

El MED junto con la relación constitutiva bilineal antes explicada fue utilizado con éxito en el estudio de materiales frágiles como hormigón y hormigón armado (Riera & Iturrioz, 1998), el comportamiento de suelos frente a cargas explosivas (Iturrioz & Riera, 2001), la propagación dinámica de fisuras Spellmeyer et al. (2001), el análisis de

problemas de impacto en materiales compuestos poliméricos (Barrios D’Ambra et al. 2002 y 2003). Otros estudios para la determinación de parámetros fractomecánicos con el MED fueron presentados por Tech et al. (2003).

### 3 Calculo de parámetros fractomecánicos

La energía específica de fractura  $G_f$  se define como la tasa de variación de la energía potencial total  $\Pi$  ante la extensión de la superficie de fractura (ver por ejemplo Anderson, 1995)

$$G_f = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dE_K}{dA} \quad (8)$$

Dónde  $W$  es el potencial de las fuerzas externas,  $A$  es el área de la fisura,  $U$  es la energía de deformación elástica y  $E_K$  es la energía cinética.

Si se verifica que las cargas son aplicadas lentamente, es posible despreciar la contribución de la energía cinética en la expresión (8). Luego, con el objetivo de resolver el problema en forma numérica podemos expresar la ecuación (8) en forma incremental. Considerando con este propósito una fisura alojada en una placa de espesor  $B$  resulta:

$$G_f(\sigma) = \frac{W_{(a+\Delta a)} - W_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (9)$$

dónde el símbolo  $\sigma$  indica que la ecuación (9) corresponde a un nivel de tensiones aplicado.

Luego, si se asume que se aplican sólo tracciones prescriptas como condición de contorno en los bordes de la placa, el Teorema de Clapeyron demuestra que  $dW/dA = 2 dU/dA$ , que sustituida en la ecuación (9) resulta:

$$G_f(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (10)$$

Este cálculo puede ser realizado en forma numérica con el MED realizando dos simulaciones, una con una fisura de longitud  $a$  y otra de longitud  $a + \Delta a$  y sometidas al mismo nivel de cargas  $\sigma$ , evaluando la energía de deformación elástica  $U(a)$  y  $U(a + \Delta a)$  respectivamente. Obtenido el valor de  $G_f$  y considerando estado plano de deformaciones es posible calcular el factor de intensidad de tensiones  $K$ , como se presenta en Anderson (1995) y posteriormente su valor normalizado con respecto al factor de intensidad de tensiones en una placa de dimensiones infinitas  $K_0$ , obteniendo:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\sqrt{\frac{G_f \cdot E}{1-\nu^2}}}{\sigma \sqrt{\pi \cdot a}} \quad (11)$$

## 4 Ejemplos de aplicación

### 4.1 Una placa finita con fisura central

A continuación se analiza el caso de una placa finita de dimensiones indicadas en la Figura 3. Sobre la misma se aplican tracciones prescritas en los bordes extremos con una función en rampa. Se considera el problema en estado plano de deformaciones. Las propiedades del material y los parámetros utilizados en el modelo se presentan en la Tabla 1.

A partir de la información presentada en la Figura 3 y Tabla 1 se construyó un modelo de elementos discretos con 133 x 266 módulos, la fisura fue discretizada con 32 módulos en su longitud, como se observa en la Figura 3b. La fisura fue introducida en el modelo debilitando los elementos que se encontraban en el lugar geométrico de la misma. Para representar las condiciones de estado plano de deformaciones fue considerado sólo un módulo en la dirección del espesor (eje z) restringiendo los desplazamientos en esta misma dirección.

El valor de  $\epsilon_p$ , como ya fue mencionado en la sección 2.2, es una propiedad del material, e indica indirectamente el valor de deformación a partir del cual se pierde la linealidad, la tensión asociada a dicho valor de tensión es  $\sigma_f = E \epsilon_p$ . En la definición del modelo fue adoptada una deformación  $\epsilon_p = \sigma_f/E = 1,25e-3$ . El incremento  $\Delta a$  dado a la fisura en este ejemplo fue de un 6% de la longitud de la fisura  $a$  (un módulo para cada lado de la misma).

Utilizando el procedimiento indicado en la sección 3 para una carga aplicada en forma cuasiestática (carga que no produce fuerzas de inercia considerables durante el proceso simulado) se obtuvieron los resultados que se presentan en la Figura 4.

En la Figura 4a se presentan los valores de  $G_f$  versus la tensión aplicada, obtenida aplicando la ecuación 10 y el procedimiento explicado en la sección 3. También se grafica la energía disipada por daño, correspondiente a la sumatoria del área del triángulo ABC en la Figura 2b de todas las barras del modelo. En esta figura se ilustra la habilidad del MED para capturar la condición crítica. Se observa que para valores próximos a  $G_f = 300$  N/m, la curva presenta saltos que indican que la fisura comienza a propagar en forma inestable definiendo el valor de la tenacidad a la fractura y de la tensión crítica. En las proximidades de la tensión crítica la energía disipada por daño comienza a incrementarse en forma sensible.

En la Figura 4b se grafica el factor de intensidad de tensiones normalizado en función de la tensión de tracción aplicada.

Se utilizó para comparar los resultados el gráfico de Rooke y Cartwright (1976) en el que se tiene los valores de  $K$  para placas con distintas geometrías normalizados versus el  $K$  de una placa con dimensiones infinitas ( $K_0$ ). Para la placa analizada, el valor del factor de intensidad de tensiones normalizado obtenido con este gráfico es de 1.05

El valor calculado con el método de los elementos discretos es  $K/K_0 = 1,075$ , que presenta un error menor al 3%. Una precisión similar fue también obtenida por Tech et al. (2003) utilizando también MED con una discretización semejante.

En la Figura 5a se presenta el balance energético para la placa con una longitud de fisura  $a$ , donde puede observarse también el incremento de la energía disipada por daño para la tensión crítica. A partir de la tensión crítica la curva de la energía elástica comienza a presentar pequeñas oscilaciones y comienzan a tenerse valores en la energía disipada por daño, esto se debe a que la fisura está propagando. Para el valor de 150 MPa aproximadamente la energía elástica disminuye bruscamente y la energía cinética tiene un salto notable. Esto se debe a que en este instante la fisura llegó al borde de la placa y se produce una “descarga” de la placa, pero esta, ahora partida en dos pedazos comienza a desplazarse.

La configuración final de la placa se ilustra en la Figura 5b, no se presenta en ella modificaciones significativas en el camino seguido por la fisura.

#### 4.2 Placa con una fisura principal próxima a una región debilitada con agujeros

En este segundo ejemplo se presenta un estudio paramétrico del factor de intensidad de tensiones para una fisura contenida en una placa cuando uno de sus vértices se encuentra próximo a una región debilitada por un arreglo de agujeros. Este estudio fue publicado por Tamuz et al. (2000). En el citado estudio se presenta una comparación de resultados analíticos y experimentales buscando medir la influencia de una región debilitada por un arreglo de agujeros sobre la fisura. Este análisis fue realizado sobre una placa de PMMA de 220 x 69 x 3 mm<sup>3</sup> con un módulo de Young  $E = 2,86$  GPa.

En la Figura 6a se presenta un esquema con la geometría y dimensiones del problema. En la Figuras 6b y 6c se presentan una vista total y un detalle del modelo de MED. Fue aquí también considerado en el análisis estado plano de deformaciones y la carga remota fue aplicada en forma cuasiestática.

Los resultados obtenidos se presentan en las Figuras 7a, b, c. En la Figura 7a se presenta la evolución del factor de tensiones normalizado  $\phi_0 = K/K_0$  ( $K_0 = \sigma \sqrt{\pi l}$ ) en función de la longitud normalizada de la fisura  $\Delta = 2l / L$  (ver Figura 6a) en el caso de una placa sin los agujeros. Por su parte en la Figura 7b ilustra la evolución del factor de intensidad de tensiones normalizado  $\phi = K/K_0$  pero ahora considerando la presencia de los agujeros. Finalmente la Figura 7c se presenta la diferencia entre las dos índices calculados ( $\phi - \phi_0$ ) en función también de la longitud normalizada. La Figuras 7a, b, c permiten observar un excelente acuerdo entre los resultados calculados con el MED y los experimentales reportados por Tamuz et al. (2000).

## 5 Conclusiones

En este trabajo se mostró la capacidad de MED en el cálculo de parámetros fractomecánicos. Utilizando una técnica simple y de sencilla implementación se calculó el factor de intensidad de tensiones para un problema clásico de evaluación comparativa y un ejemplo de aplicación consistente en la interacción fisura-arreglo de huecos. En ambos casos los valores de los factores de intensidad de tensiones calculados presentaron un acuerdo excelente con los reportados en la literatura.

Este trabajo sirvió también para mostrar la aptitud del MED para modelar la propagación inestable de la fisura cuando esta alcanza su condición crítica. Esta capacidad hace del método una herramienta atractiva para modelar fenómenos de fractura frágil estática y dinámica.

## Agradecimientos

Los autores desean agradecer el apoyo de la CAPES y CNPQ, órganos de fomento del gobierno brasilero y a la Secretaría General de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Nordeste, así como a la Facultad de Ingeniería de la misma Universidad. Estas entidades apoyaron directa o indirectamente el trabajo aquí presentado.

## Referencias

Aliabadi, M. H.; Rooke D. P. (1991). *Numerical Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers.

Aliabadi, M. H.; Saleh A. L. (2002). *Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method*. Engineering Fracture Mechanics, 69/2, 267-280.

Anderson, T. L. (1995). *Fracture Mechanics*. CRC Press, Second Edition. Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas, USA.

Barrios, D'Ambra R.; Iturrioz I.; Fasce L. A.; Frontini P. M.; Cisilino A. P. (2002). *Utilización del método de los elementos discretos en la simulación numérica de ensayos de impacto para caracterización de materiales compuestos poliméricos*. MECOM 2002- Santa Fé - Paraná, Arg., Octubre 2002. Mecánica Computacional, v. XXI. ISSN 1666-6070. p. 1121-1134.

Barrios, D'Ambra R.; Iturrioz I.; Fasce L. A.; Frontini P. M.; Cisilino A. P. (2003). *Simulación numérica del ensayo de impacto en probetas de polímeros utilizando el método de los elementos discretos*. Anales del XXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, (Cilamce).

Brara, A.; Camborde, F.; Klepaczko, J. R.; Mariotti, C. (2001). *Experimental and Numerical study at high strain rates in tension*. Mechanics of Materials 33, p. 33-45.

Cundall, P. A.; Hart, R. D. (1989). *Numerical modelling of discontinua*. Proc 1<sup>st</sup> US Conf Discrete Element Meth, Golden, CO, p. 1-17.

((a))



- Hayashi, Y. (1982). *Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear*. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982.
- Iturrioz, I.; Riera, J. D. (1995). *Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 11/5, p. 417-426.
- Iturrioz, I.; Riera, J. D. (1998). *Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells*. International Journal of Nuclear Engineering and Design, 179/2, p. 135-144.
- Iturrioz, I.; Riera, J. D. (2001). *Estudio numérico del efecto de explosivos sobre una superficie plana*. In: ENIEF XII, Córdoba, Argentina. Mecánica Computacional, v. 20, p. 422-429. Córdoba, Nov. 2001.
- Munjiza, A.; Bangash, T.; Jhon, N. W. M. (2004). *The combined Finite-Discrete element method for structural failure and collapse*. Engineering Fracture mechanics 71, p. 469-483.
- Needleman, A. (1987). *A Continuum model for void Nucleation by inclusion debonding*, Journal of Applied Mechanics, v. 54, p. 525-531.
- Riera, J. D.; Iturrioz, I. (1995): *Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading*. Communications in Num. Meth. in Eng., v. 11, p. 417-426.
- Riera, J. D.; Iturrioz, I. (1998). *Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading*. Nuclear Engineering and Design, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 179, p. 135-144.
- Rocha, M. M. (1989). *Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil*. Porto Alegre, 123p. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Rooke, D. P.; Cartwright, D. J. (1976). *Compendium of Stress Intensity Factors*. Her majesty's Stationery Office.
- Schnaid, F.; Spinelli, L.; Iturrioz, I.; Rocha, M. (2004). *Fracture mechanics in ground improvement design*. Ground Improvement, 8/1, 7-15. Thomas Thelford.
- Spellmeyer, T.; Barrios D'Ambra, R.; Iturrioz, I. (2001). *Simulación numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos*. In: ENIEF XII, Córdoba, Argentina (2001). Mecánica Computacional, v. 20, p. 506-513. Córdoba, Nov. 2001.
- Tamuzs, V.; Romalis, N.; Petrova, V. (2000). *Fracture of Solids with Microdefects*. Nova Science Publishers, Inc., (2000).
- Tech, T. W.; Batista, R.; Iturrioz, I.; Cisilino, A. (2003). *Aplicação do Método dos Elementos Discretos em Mecânica de Fratura Estática e Dinâmica*. Anales del XXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, (Cilamce).

# Stress intensity factor computation using the discrete element method

## Extended abstract

Numerical computation of fracture parameters is always a busy topic of research. Although most of the computations in this area are performed using the Finite Element and the Boundary Element methods (see Aliabadi & Rooke, 1991), a number of new methods and techniques are periodically developed.

The DEM is a simple and relatively easy to implement numerical tool extensively applied in Ground and Civil Engineering (see for example Iturrioz & Riera, 1995 and 1998). The success of DEM in these fields motivates its application to model the fracture mechanics problems. In particular, the ability of the method to handle crack nucleation and void coalescence (topics not usually covered by FEM models) makes DEM modeling and attractive tool for the intended application.

In the DEM the continuum is represented by an arrangement of bars able to carry axial loads only with the mass lumped at the nodes. The cubic arrangement shown in Figure 1 presents a module with eight nodes at its corners plus a central node. Each node has three degrees of freedom, corresponding to the nodal displacements in the three orthogonal coordinate directions. It is important to point out that for  $\nu = 0.25$ , the equivalence with the isotropic continuum is complete; while for other values of  $\nu$  small errors appear in the shear terms, which may nevertheless be neglected. The resulting system of equations is solved using a standard explicit algorithm. Since nodal coordinates are updated at every time step, large displacements are accounted for naturally. The convergence of solutions obtained with the DEM approach in linear elasticity as well as in elastic instability problems was verified by Riera & Iturrioz (1995).

Riera & Rocha (1991) extended the DEM approach in order to handle fragile fracture by introducing the bilinear elemental constitutive relationship illustrated in Figure 2. This constitutive law aims to capture the irreversible effects of crack nucleation and propagation, therefore, it accounts for the reduction in the element load-carrying capacity. The area under the force vs. strain curve corresponds to the energy density necessary to fracture the area of influence of the element. Once the elastic energy density equals the fracture energy density the element fails, losing its load carrying capacity. In this manner, the DEM handles crack nucleation and material rupture in fragile materials.

Stress intensity factors are computed in this work by means of two computer runs performed for two geometries of the problem under analysis which differ in the crack length. Using standard fracture concepts (Anderson, 1995) the results from the two models are used to compute the total strain energy variation due to the crack extension. This result is then used to calculate the specific fracture energy and stress intensity factors.

The devised methodology is illustrated by solving a classical benchmark problem (a finite sheet under remote tension containing central crack) and an application problem

(the interaction between a crack and an array of holes). Both problem were solved considering quasi-static (i.e. no inertia forces) conditions. The geometry and results for the first problem are illustrated in Figures 3, and 4 and 5 respectively. Computed stress intensity factors showed an excellent agreement to those reported in the literature (Rooke & Cartwright, 1976) with an error less than 3%. The DEM model was also successful to capture the event of crack propagation for the critical condition of the crack. The geometry and results of the second problem are illustrated in Figures 6 and 7. In this case the DEM results are compared to experimental results reported by Tamuz (2000). Very good agreement between the computed and the reference results was found for the cases of the isolated crack (without the presence of the holes) (see Fig. 7a), the hole in the crack vertex vicinity (Fig. 7b) and the assessment of the interaction effects (Figure 7c)

In conclusion, the capacity of the DEM when applied to the computation of stress intensity factors has been shown in this paper. In addition the ability of the method to detect the onset of crack propagation has also been shown. These capacities make the DEM an attractive tool to model problems involving static and dynamic brittle fracture.

## Figuras

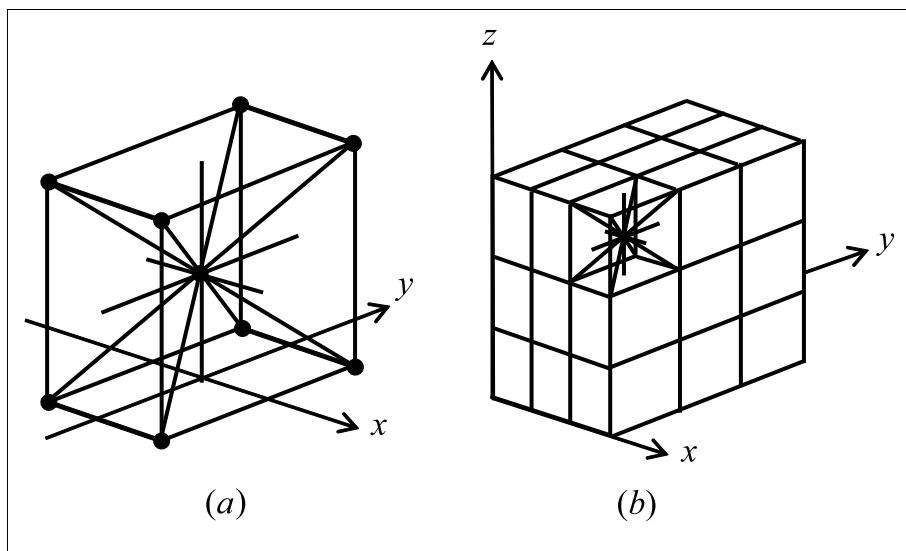


Figura 1: a) Módulo cúbico; b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos

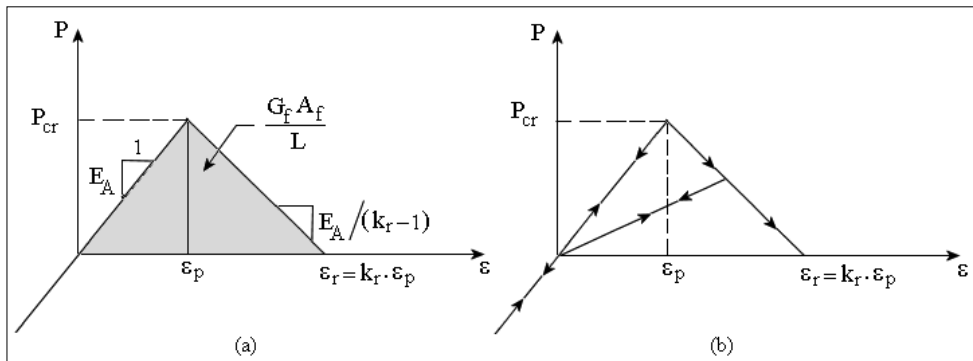


Figura 2: Relación constitutiva elemental de los elementos para el modelado de falla frágil: a) Diagrama de la ley constitutiva con sus respectivos parámetros de control; b) Esquema de carga y descarga. (según Rocha, 1989)

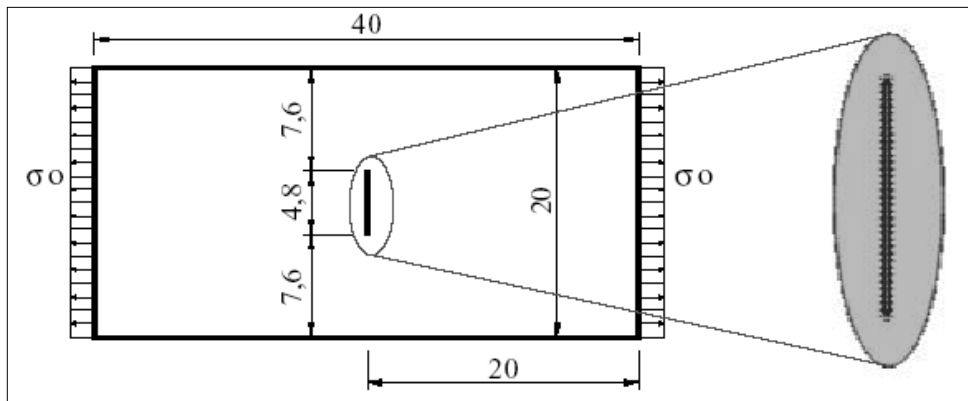


Figura 3: Esquema de la placa finita con fisura central a) Dimensiones de la placa en mm. b) detalle modelo con MED.

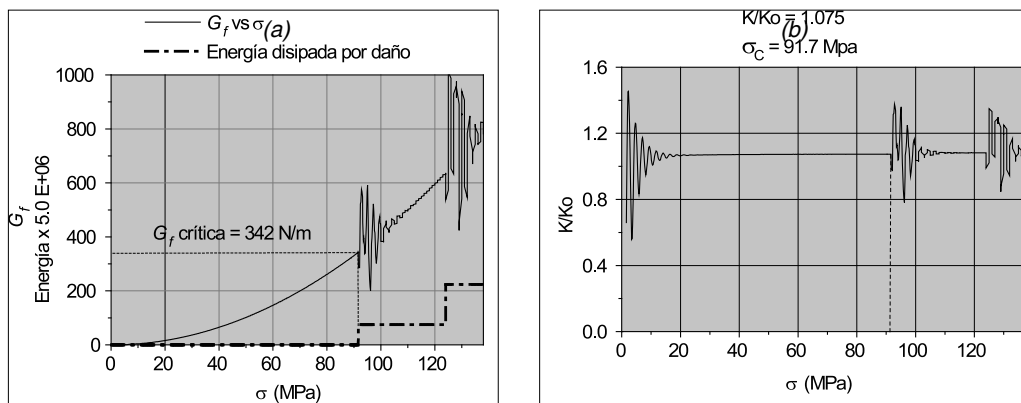


Figura 4: Placa finita con fisura central a) Variación de la energía específica de fractura  $G_f$  en función de la tracción remota aplicada; b) Factor de intensidad de tensiones normalizado  $K/K_0$  en función de la tracción remota

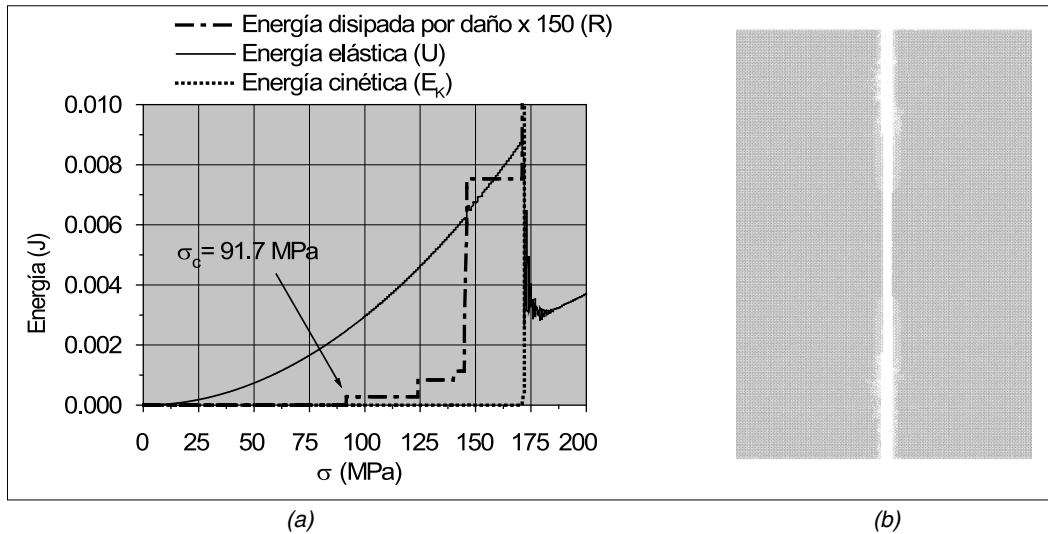


Figura 5: Placa finita con fisura central: a) Balance energético durante el proceso de rotura; b) Detalle con la geometría de configuración de rotura

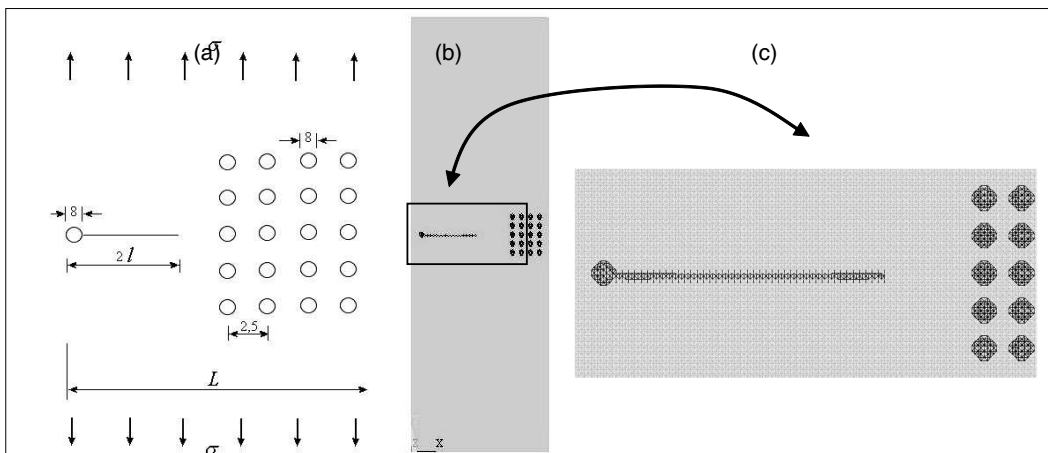


Figura 6: Ejemplo 2: a) Geometría de la placa con fisura y agujeros con dimensiones en mm; b) Vista del modelo de DEM completo; c) Detalle del modelo

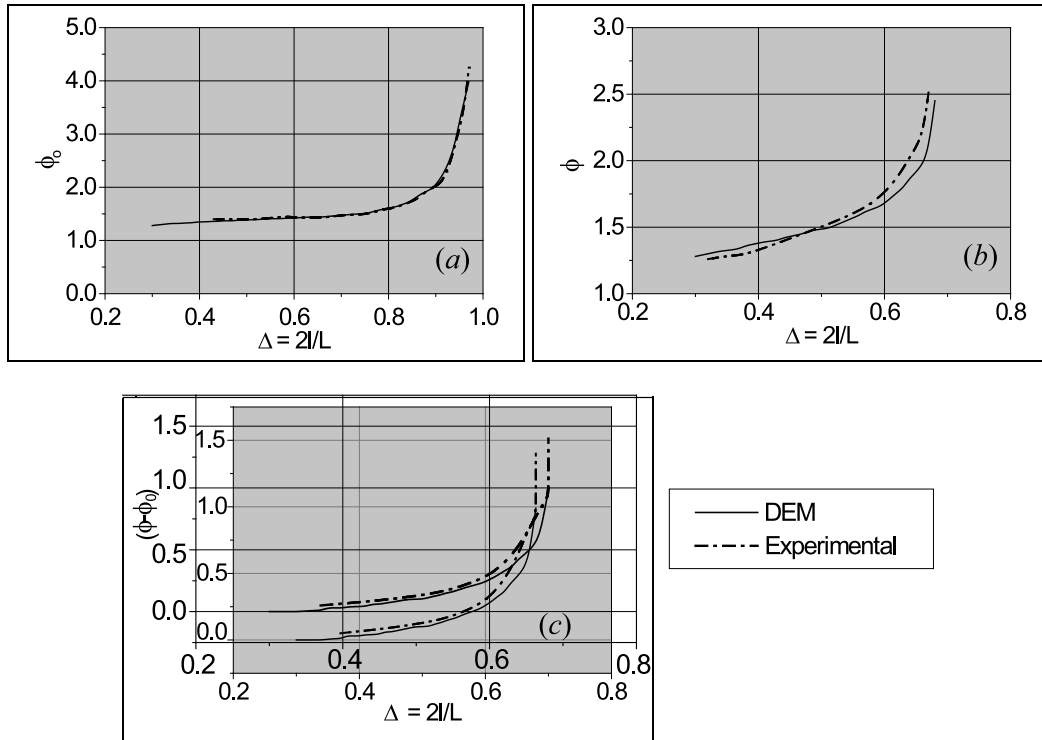


Figura 7: Ejemplo 2: a) resultados para el factor de intensidad de tensiones para la fisura sin influencia de los agujeros; b) resultados para el factor de intensidad de tensiones para la fisura considerando la influencia de los agujeros; c) valoración de la influencia de los agujeros

## Tabla

Tabla 1: Propiedades del material para el ejemplo 1

E (módulo de elasticidad)	$2,0 \times 10^{11}$ Pa
$\sigma_f$ (tensión de fluencia)	250 Mpa
$\nu$ (coeficiente de Poisson)	0,3
$\rho$ (densidad)	5000 kg/m <sup>3</sup>
$G_c$ (tenacidad)	300 N/m