

Estimación de parámetros modales de estructuras sometidas a excitaciones ambientales

Marta G. Amani¹, Jorge D. Riera², O. Curadelli³

Trabalho recebido em 04/08/2004 e aprovado para publicação em 22/08/2004.

Resumen

La observación de estructuras sometidas a excitaciones ambientales experimentó un importante crecimiento en la última década debido al avance tecnológico en los sistemas de medición. La idea básica consiste en evaluar el estado en el cual una estructura se encuentra sin interrumpir su normal funcionamiento, a partir de la medición de su respuesta para verificar sus propiedades dinámicas, detectar daño o programar su mantenimiento. En el caso de estructuras de grandes dimensiones, como puentes, edificios altos, diques o estructuras fuera de costa, el ruido ambiental, por ejemplo viento o tráfico de vehículos, usualmente constituye la única excitación técnica o económicamente viable. En este trabajo se presenta una rápida revisión de métodos de identificación de sistemas, dando particular atención a los métodos denominados *estocásticos*, en los cuales sólo se necesita conocer la respuesta. A continuación se describe un método para identificar las características dinámicas de estructuras sometidas a vibraciones ambientales, el cual permite la determinación de las frecuencias y amortiguamientos del sistema. La eficacia del método es examinada por medio de ejemplos teóricos y experimentales, comparándose sus resultados con el esquema denominado SSI-COV en la literatura especializada.

Palabras claves: identificación de sistemas, análisis modal, parámetros modales, excitación ambiental.

¹ Candidata al Doctorado, Universidad Nacional de Tucumán. E-mail: amanimg@yahoo.com

² Prof. Ph.D Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Av. Osvaldo Aranha 99, 3º andar, CEP: 90035-190, POA, RS, Brasil. Tel: +55 51 33163486. Fax: +55 51 33163999. E-mail: riera@cpgec.ufrgs.br

³ Prof. Dr. Universidade de Passo Fundo (UPF). Campus I, BR 285, Km 171, Bairro São José, CEP: 99001-970, Passo Fundo, RS, Brasil. Tel: +55 54 316-8201. Fax: +55 54 316-8211. E-mail: oscar@lci.upf.tche.br

1. Introducción

Se define como identificación de sistemas al proceso por medio del cuál se construye un modelo matemático del sistema de interés, determinándose sus parámetros a partir de mediciones simultáneas de excitación y respuesta o, como será discutido adelante, apenas de la respuesta del mismo a excitaciones desconocidas. Según Ljung (1999), una de las primeras aplicaciones a sistemas dinámicos fue el uso de modelos de identificación en tiempo real utilizados en Ingeniería Eléctrica. Casi simultáneamente, bajo el nombre de análisis experimental modal, comenzaba a desarrollarse en Ingeniería Mecánica un esquema para el análisis de estructuras sometidas a vibraciones. Los parámetros identificados en este caso fueron frecuencias naturales, relaciones de amortiguamiento, formas modales y factores de participación modal (Ewins 1995). A partir de esas propuestas, se desarrollaron durante las últimas tres décadas numerosos métodos para la identificación de parámetros modales que, de acuerdo con el dominio en que son formulados, pueden clasificarse como métodos en el *dominio de la frecuencia* o en el *dominio del tiempo*.

Dentro de los métodos estocásticos en el dominio de la frecuencia, el esquema más utilizado es posiblemente el denominado *detección de picos* (Peak-Picking, PP) (Ewins 1995), en el cual se obtienen primeramente los espectros de los registros medidos en el tiempo por medio de la FFT. Las frecuencias correspondientes a los picos de los espectros constituyen estimadores de las frecuencias naturales. Este método supone que la excitación no presenta componentes armónicas importantes, que el amortiguamiento es bajo y que los modos están bien separados. Un método más avanzado consiste en la obtención de los autovalores de la matriz definida por los espectros de desplazamientos, velocidades o aceleraciones generalizadas. El método mencionado exige la diagonalización de la matriz de densidades espectrales, y fue usado al comienzo de la década del 80 para obtener los modos de vibración de estructuras sometidas a excitación ambiental. El esquema fue posteriormente aplicado a funciones de respuestas en frecuencia (FRF), transformándose en el método denominado *Función indicadora de modos complejos* (Complex Mode Indication Function, CMIF) (Shih et al. 1988). Con este método se elimina la dificultad que presenta la multiplicidad de modos. En este caso el máximo número de polos múltiples a ser detectados no puede exceder la menor dimensión de la matriz de densidades espectrales.

Los problemas encontrados en aplicaciones de métodos en el dominio de la frecuencia condujeron a un renovado interés en los métodos en el dominio del tiempo. El uso directo de la respuesta en el dominio del tiempo sin necesidad de transformarla al dominio de la frecuencia, hace innecesaria la consideración de interferencia de modos debido a valores de amortiguamiento altos o a frecuencias naturales próximas. Se propusieron varios métodos de identificación de sistemas directamente a partir de la respuesta en el dominio del tiempo o determinando las covariancias de las mismas. Una característica importante de los métodos que usan las covariancias entre las respuestas medidas, es que la matriz de covariancias puede ser factorizada en las matrices del siste-

ma. Esta propiedad se transformó en el pilar de los métodos basados en los subespacios. Los primeros algoritmos de subespacio fueron presentados por Van Overschee (Van Overschee et al. 1993). El método de subespacios basado en las covariancias (SSI-COV) (Peeters 2000) usa la matriz de covariancias de las respuestas y un número limitado de respuestas tomadas como referencias, lo cual corresponde al análisis modal clásico donde las matrices de respuesta impulsiva son rectangulares, teniendo como filas el número de respuestas y como columnas el número de excitaciones medidas. En el caso del método SSI-COV las respuestas impulso se reemplazan por las covariancias entre las respuestas, mientras la excitación se reemplaza por las respuestas de referencia.

En resumen, la identificación de sistemas constituye un área de gran interés científico, con importantes implicaciones tecnológicas. En el caso particular de sistemas estructurales, los parámetros identificados – en problemas lineales frecuencias naturales, formas modales y coeficientes de amortiguamiento – son necesarios para verificar o calibrar modelos analíticos. Por otro lado, dichos parámetros son también esenciales en los procedimientos de detección y evaluación del daño estructural (Andersen et al. 1998), así como en control de vibraciones. Todas las aplicaciones mencionadas exigen una evaluación de los parámetros relevantes confiable y precisa, lo que impone fuertes exigencias a los métodos empleados.

En este trabajo se presenta un método para determinar las características dinámicas de estructuras sometidas a vibraciones ambientales a partir del conocimiento de la respuesta del sistema, sin información sobre la excitación. Este procedimiento, aplicable a situaciones en que la excitación es de banda ancha, es decir, que no contiene componentes armónicas de frecuencia constante, es una modificación del método conocido en la literatura especializada como *detección de picos (PP)* (Ewins 1995), en el cual se analiza la densidad espectral de potencia calculada para cada una de las coordenadas modales de la respuesta del sistema. Se compara el desempeño del método con el método SSI-COV, considerado un procedimiento poderoso de identificación.

2. Sistemas lineales con modos complejos

El comportamiento dinámico de un sistema estructural lineal, representado por un modelo discreto de n grados de libertad, con amortiguamiento viscoso, es descrito por medio de la ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\vec{q}}(t) + \mathbf{K} \vec{q}(t) = \vec{f}(t) \quad (1)$$

en la cual \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, $\vec{q}(t)$ es el vector de desplazamientos, $\dot{\vec{q}}(t)$ es el vector de velocidades y $\ddot{\vec{q}}(t)$ es el vector de aceleraciones. El vector $\vec{f}(t)$ describe la excitación. Obsérvese que, en el caso de amortiguamiento viscoso arbitrario, los auto-vectores y auto-valores de la ecuación homogénea ocurren en pares complejos conjugados. En efecto, siendo los coeficientes de las matrices del sistema reales, cualquier auto-valor debe ser real o presentarse en pares de valores complejos conjugados (Ewins, 1995). Así, la respuesta

del sistema lineal a cualquier excitación externa se puede obtener como la suma de las componentes modales, es decir:

$$\vec{q}(t) = \vec{\phi}_1 \eta_1(t) + \vec{\phi}_1^* \bar{\eta}_1(t) + \vec{\phi}_2 \eta_2(t) + \vec{\phi}_2^* \bar{\eta}_2(t) + \dots + \vec{\phi}_n \eta_n(t) + \vec{\phi}_n^* \bar{\eta}_n(t) \quad (2)$$

en la cual $\vec{\phi}_i$ representa la forma modal compleja conjugada y $\bar{\eta}_i(t)$ la respuesta modal compleja conjugada i . Pre-multiplicando ambos miembros de la Ecuación (2) por $\vec{\phi}_r^T \mathbf{M}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{q}(t) &= \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_1 \eta_1(t) + \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_1^* \bar{\eta}_1(t) + \dots \\ &\dots + \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r \eta_r(t) + \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r^* \bar{\eta}_r(t) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Debido a la condición de ortogonalidad con respecto a la matriz de masa, todos los términos de la serie, excepto el r -ésimo, desaparecen (ver demostración en anexo), de modo que:

$$\vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{q}(t) = \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r \eta_r(t) \quad (4)$$

Similarmente, si se pre-multiplican ambos miembros de la Ecuación (2) por $\vec{\phi}_r^T \mathbf{M}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{q}(t) &= \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_1 \eta_1(t) + \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_1^* \bar{\eta}_1(t) + \dots \\ &\dots + \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r \eta_r(t) + \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r^* \bar{\eta}_r(t) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

y por lo tanto, debido a la condición de ortogonalidad resulta:

$$\vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{q}(t) = \vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r \bar{\eta}_r(t) \quad (6)$$

Sumando las Ecuaciones (4) y (6) y considerando a los modos normalizados de tal manera que $\vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r = 1$, se tiene:

$$2 \operatorname{Re}(\vec{\phi}_r^T) \mathbf{M} \vec{q}(t) = 2 \operatorname{Re}(\eta_r(t)) \quad (7)$$

La respuesta modal η_r puede ser considerada como la respuesta de un sistema de un grado de libertad. En consecuencia, en la densidad espectral de potencia de cada función $\eta_r(t)$ aparecerá un único pico, correspondiente a la frecuencia del modo en cuestión. Se determinan la frecuencia y el amortiguamiento de cada modo de vibración ajustando por mínimos cuadrados la función teórica de respuesta en frecuencia de un oscilador lineal a la función así observada. Nótese que dicha función representa la densidad espectral de la respuesta teórica a una excitación de tipo *ruido blanco*. Como muestra la Ecuación (7), para determinar $\eta_r(t)$ se necesita conocer la matriz modal, lo cual implica la adopción previa de un modelo numérico discreto o la obtención de dicha matriz experimentalmente (Inman 1994).

3. Ejemplos

Sistema estructural plano (simulado).

Se analiza el pórtico plano de acero de seis pisos y seis vanos esquematizado en la Figura 1. La masa de cada piso es de 255 t. Las vigas y columnas están constituidas por perfiles I de alas anchas con las siguientes dimensiones: Columnas: WF14x193, WF14x132, WF14x99, Vigas: WF30x116, WF27x102, WF24x68. Debido a que las deformaciones principales de la estructura son del tipo cortante, se consideran para el modelo analítico seis grados de libertad correspondientes a los seis desplazamientos horizontales de cada piso. Se admitió amortiguamiento viscoso no proporcional.

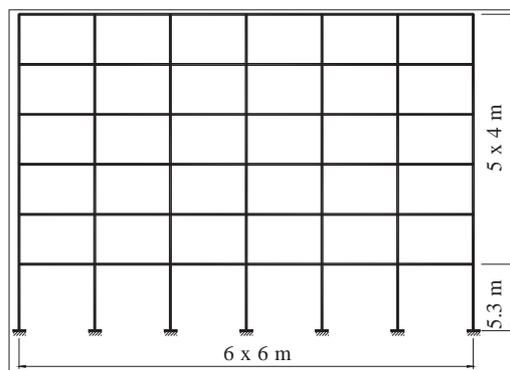


Figura 1: Pórtico plano

Mediante integración numérica se determinó la respuesta, en términos de desplazamientos de piso, de la estructura sometida a las siguientes excitaciones sísmicas: El Centro (1979), Northridge (1994) y Taft (1952). La Tabla 1 muestra los valores de los parámetros modales estimados juntamente con el error relativo respecto a los parámetros de la estructura, determinados analíticamente resolviendo el problema de autovalores del sistema.

	Analítico		Método de los modos complejos			
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	error [%]	ξ [%]	Error [%]
modo 1	0.72	2	0.72	0	2.0	0
modo 2	1.99	5	1.98	0.5	4.97	0.6
modo3	3.42	7.3	3.42	0	7.25	0.7
modo 4	4.99	8.4	4.98	0.4	8.3	1.19
modo 5	6.55	8.9	6.50	0.76	8.75	1.68
modo 6	8.2	9.2	8.17	0.24	9.34	1.5

Tabla 1: Parámetros modales estimados

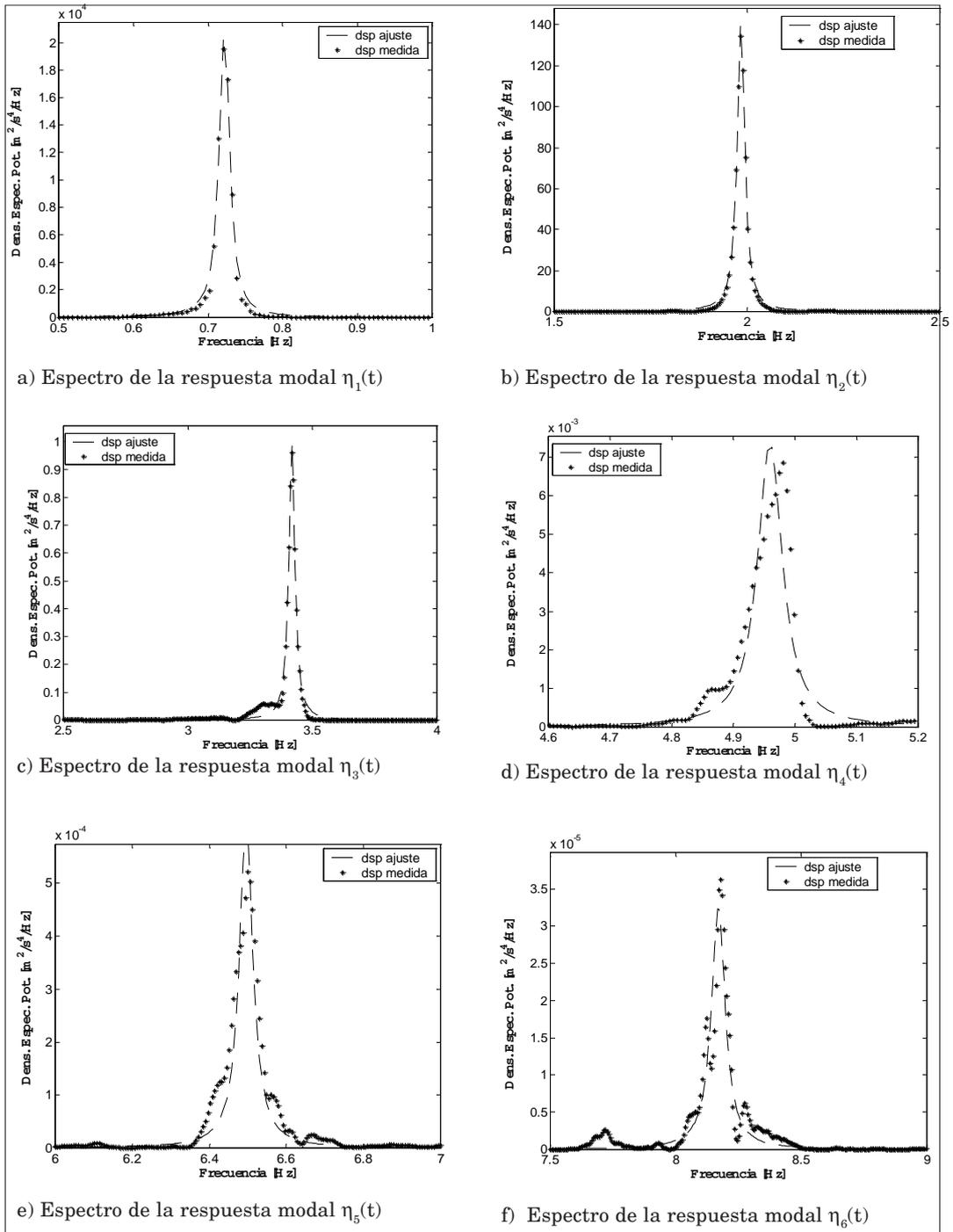


Figura 2: Espectro de las respuestas modales y curvas de ajuste.

En las Figuras 2 a-f se muestra la densidad espectral de potencia de la respuesta modal calculada con la Ecuación (7), y la función de respuesta en frecuencia del oscilador lineal que la ajusta. Se observa que el método propuesto permite estimar con precisión la frecuencia y el amortiguamiento en simulaciones numéricas, es decir sin presencia de ruido de medición.

Pórtico en aluminio (experimental).

Se analiza una estructura tridimensional de seis pisos y un vano en escala 1:5 como se muestra en la Figura 3. Los pisos se construyeron con placas de acrílico cuadradas de 10 mm x 10 mm y 5 mm de espesor. En la Tabla 3 se indican las características geométricas de la estructura.

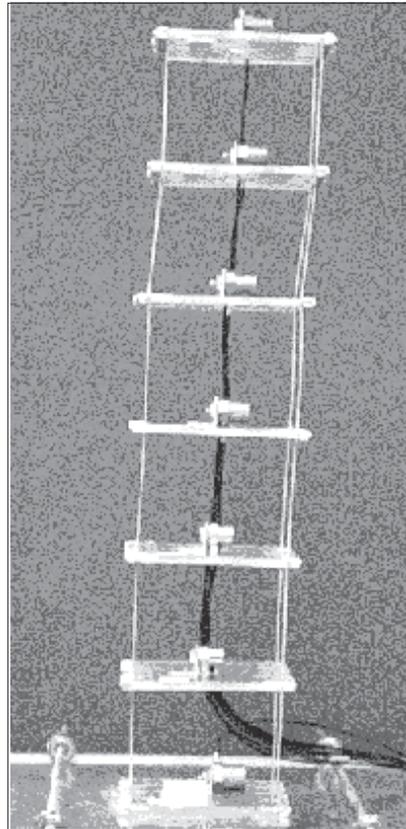


Figura 3: Vista del modelo

Altura total	0.50 m	
Altura de piso	0.083 m	
Longitud de vano	0.10 m	
Sección transversal de las columnas	Piso 1 y 2 Piso 3 y 4 Piso 5 y 6	$6 \times 10^{-4} \text{ m} \times 1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$ $6 \times 10^{-4} \text{ m} \times 1.2 \times 10^{-2} \text{ m}$ $6 \times 10^{-4} \text{ m} \times 0.6 \times 10^{-2} \text{ m}$
Masa total del modelo (incluido acelerómetros)	0.670 kg	
Módulo de elasticidad	$6.7 \times 10^{10} \text{ kN/m}^2$	

Tabla 3: Características geométricas y mecánicas del modelo

Se somete la estructura a un conjunto de registros de aceleraciones en la base tipo ruido blanco gaussiano, con duración de 16 segundos y desvío estándar de 2.0 m/s^2 . Se mide la respuesta en dirección horizontal a través de acelerómetros fijados en cada piso. La Figura 4 muestra un registro de aceleraciones medidas en el sexto piso y el espectro correspondiente.

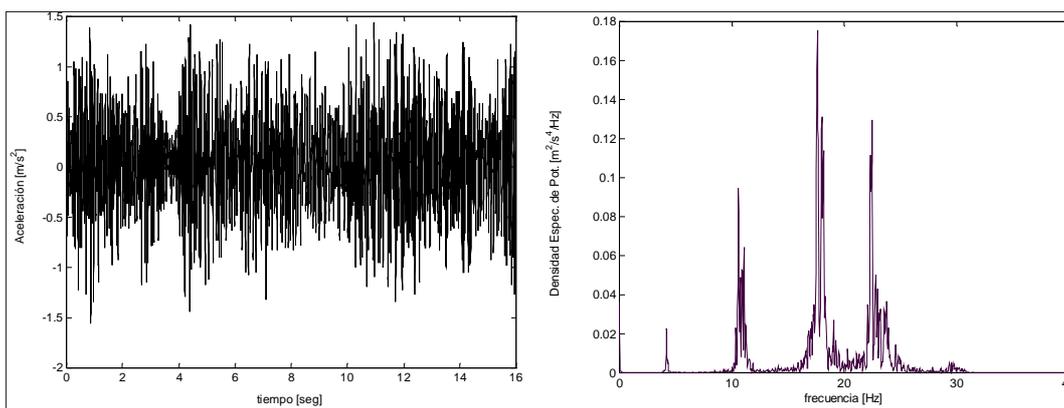


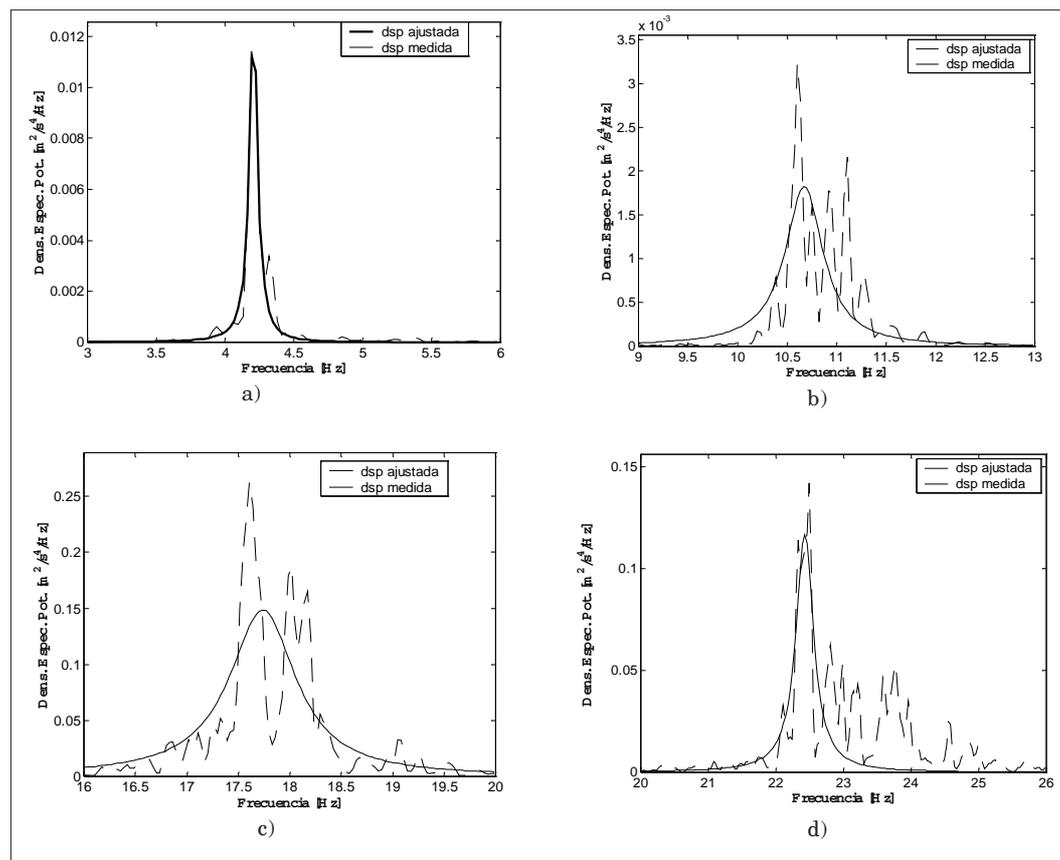
Figura 4: Respuesta del sexto piso en términos de aceleraciones y densidad espectral de potencia de la misma.

En la Tabla 4 se presentan los parámetros estimados a través del método de los modos complejos conjuntamente con los estimados a través del método de identificación basado en las covariancias SSI-Cov (Amani 2004).

Modos de flexión	Métodos de los modos complejos		SSI_Cov		Coef. de Variación [%]	
	F [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	ξ [%]	f	ξ
Modo 1	4.19	2.0	4.18	2.1	0.17	3.45
Modo 2	10.75	1.2	10.77	1.7	0.13	24.3
Modo3	17.6	1.2	17.69	1.5	0.36	15.7
Modo 4	22.41	1.45	22.43	1.8	0.06	15.2
Modo 5	29.8	2.0	29.78	1.9	0.05	3.6
Modo 6	36.5	1.3	36.67	1.8	0.33	22.8

Tabla 4: Comparación de parámetros identificados por ambos métodos

Las Figuras 5 a-f muestran la densidad espectral de potencia de la respuesta modal y la función de respuesta en frecuencia de un oscilador lineal que la ajusta.



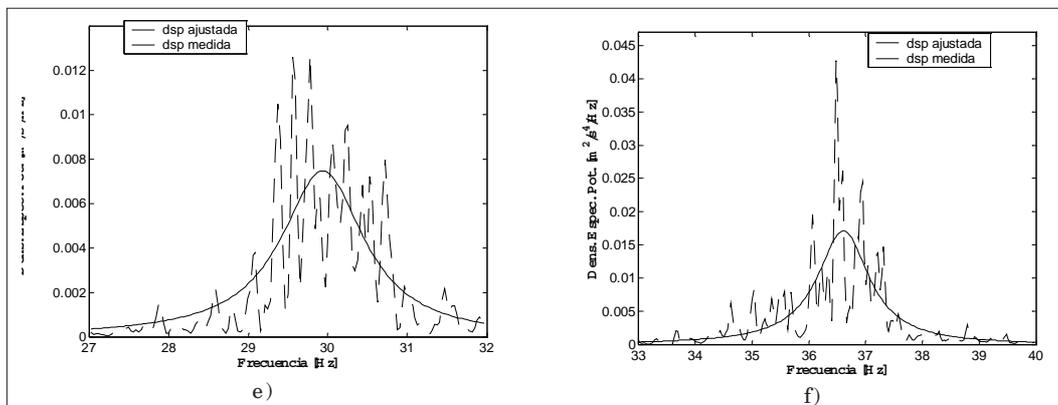


Figura 5: Densidad espectral de potencia de las respuestas modales:
a) modo 1, b) modo 2, c) modo 3, d) modo 4, e) modo 5, f) modo 6.

Los resultados obtenidos muestran alta precisión en las frecuencias estimadas, confirmando el alto desempeño del método de identificación. Sin embargo, se observa imprecisión en la estimación del amortiguamiento.

Viga de hormigón armado (experimental).

Se estudia una viga simplemente apoyada de hormigón armado (hormigón H17 y acero ADN 420) de 5.60 m de longitud, sección transversal rectangular (0.10 x 0.20)m y módulo de elasticidad $1.355 \cdot 10^7$ kN/m² (más detalles en Palazzo 2001). La Figura 6 muestra un esquema de la viga de H^oA^o.

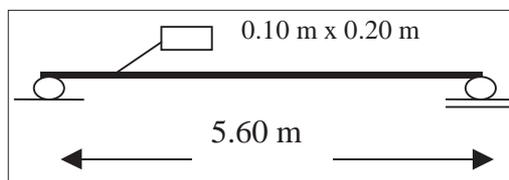


Figura 6: Esquema de la viga de H^oA^o

La viga fue excitada través de un pulso, provocado por el golpe de un martillo aplicado manualmente. Se midieron las respuestas en términos de aceleraciones en cuatro puntos de la viga. Más detalles sobre los ensayos son dados por Palazzo (2001). Las Figuras 7 a-d muestran la densidad espectral de potencia de la respuesta modal juntamente con la curva de ajuste.

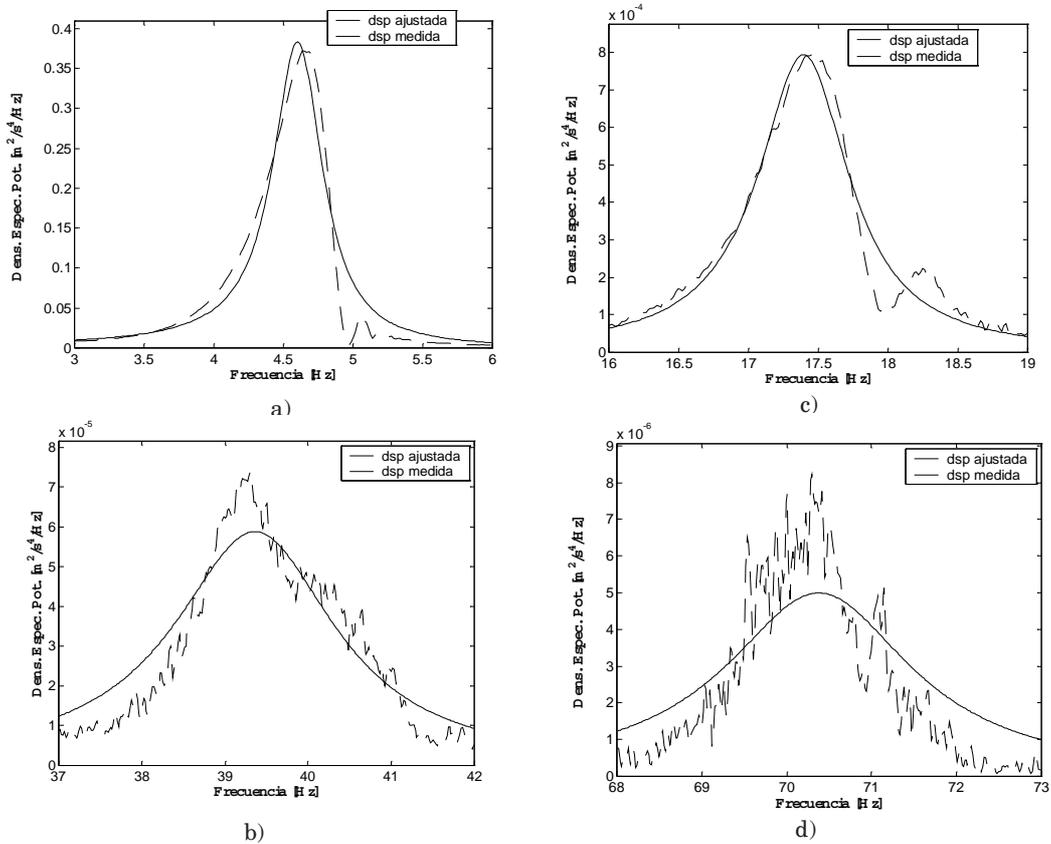


Figura 7: Densidad espectral de potencia de las respuestas modales:
 a) modo 1, b) modo 2, c) modo 3, d) modo 4.

En la Tabla 5 se comparan los parámetros modales estimados mediante los métodos de los modos complejos y SSI-Cov (Amani 2004). Se presentan también los valores determinados por Palazzo (2001). Existe una alta correlación entre los parámetros estimados por los diferentes métodos.

Tabla 5: Parámetros modales identificados por los autores y Palazzo (2001)

Modos de flexión	Métodos de los modos complejos		SSI_Cov		Peak-picking (Palazzo 2001)	
	f [Hz]	ξ [%]	f [Hz]	ξ [%]	f	ξ
Modo 1	4.54	3.57	4.52	3.62	4.55	3.34
Modo 2	17.31	2.73	17.29	2.94	17.16	1.98
Modo3	39.1	2.05	39.56	1.77	38.52	0.83
Modo 4	70.4	3.3	70.98	3.44	69.77	—

En la estimación del amortiguamiento, los valores obtenidos por los métodos de los modos complejos y de sub-espacios (SSI-Cov) son muy próximos, ya en la comparación con el método de detección de picos se percibe que este último tiende a subestimar el amortiguamiento. Con relación a la frecuencia, los tres procedimientos mostraron buen desempeño.

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó un método para determinar las características dinámicas de estructuras sometidas a vibraciones ambientales a partir del conocimiento exclusivo de la respuesta del sistema, denominado Método de los Modos Complejos. Del análisis de los resultados numéricos, sin ruido de medición, se puede inferir que:

(a) El error relativo en la estimación de las frecuencias naturales crece con el orden del modo. Para un sistema con seis grados de libertad, el mismo fue siempre inferior a 1%.

(b) Se observa el mismo efecto en la determinación del amortiguamiento, para el cual el error relativo no superó 3%, incluso en los modos más altos.

(c) Los valores obtenidos, tanto de frecuencias como de amortiguamientos, son comparables o superiores a los correspondientes al método SSI-Cov, que se considera uno de los procedimientos más atractivos existentes en la literatura técnica.

(d) En relación a estudios experimentales, con ruido de medición, se puede concluir que es también posible estimar las frecuencias naturales con buena precisión, en general error menor que 1%. La estimación del amortiguamiento, por el contrario, presenta mayor incertidumbre. Estas conclusiones son también aplicables al método SSI-Cov.

La necesidad del conocimiento previo de las formas modales puede constituir una desventaja del método aquí propuesto. Sin embargo, dicha información es casi siempre necesaria y está disponible o puede ser obtenida por el analista. Resta cuantificar hasta qué punto pueden ser reducidos los errores de estimación a través del aumento de datos, esto es, de la duración total de los registros de respuesta. La utilización de procedimientos precisos de identificación de las propiedades modales es esencial en cualquier método de identificación de daño, tema de trabajo actualmente en desarrollo.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo del CONICET, Argentina, CNPq y CAPES, Brasil.

Referencias

- Amani, M. G. (2004). *Identificación de Sistemas y Evaluación del Daño Estructural*. Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Exactas y Tec., Universidad Nacional de Tucumán, Argentina. (En evaluación).
- Andersen, P. and Kikergaard, P. H. (1998). *Statistical damage detection in civil engineering structures using ARMAV models*. Aalborg University, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg, Denmark.
- Ewins, D. J. (1995). *Modal testing: Theory and Practice*. John Wiley & Sons Inc., USA
- Inman, D. J. (1994). *Engineering Vibration*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs. NJ, USA.
- Ljung, L. (1999). *System Identification : Theory for the User*. Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Palazzo, G. L. (2001). *Identificación del Daño Estructural a través del Cambio en las Propiedades Dinámicas*. Tesis de Magister, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.
- Peeters, B. (2000). *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Shih, C. Y.; Tsuei, Y. G.; Allemang, R. J. and Brown, D. L. (1988). *Complex mode indication function and its application to spatial domain parameter estimation*. Mechanical System and Signal Processing, 2(4), p. 367-377.
- Van Overschee, P. and De Moor, B. (1993). *Subspace algorithm for the stochastic identification problem*. Automatica, 29(3), p. 649-660.

Anexos

A.1 Propiedad de Ortogonalidad

Se sabe que cada componente de cualquier autovector de un sistema no amortiguado o con amortiguamiento proporcional se distingue de otra componente por su amplitud únicamente ya que sus ángulos de fase son iguales o se diferencian en 180°. Por lo tanto en un sistema de n grados de libertad, es necesario un conjunto de n ecuaciones para obtener las n amplitudes para un modo dado. Para un sistema con amortiguamiento no proporcional, cada componente de un auto-vector se distingue no sólo por su amplitud sino también por el ángulo de fase, por eso se necesita un conjunto de $2n$ ecuaciones para determinar las n componentes en cada modo.

A.2 Prueba de ortogonalidad con respecto a las matrices A y B

El sistema definido por la Ecuación (1) también puede ser descrito por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden usando un vector auxiliar denominado vector de estado

$$\mathbf{A} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (\text{A.1})$$

ou

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{q}(t) \\ \dot{\vec{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

en la cual $\vec{x}(t)$ es el vector de estado, \mathbf{A} la matriz de estado, \mathbf{B} la matriz de entrada y $\vec{u}(t)$ el vector de excitación. En caso de amortiguamiento viscoso, las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} son de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Los autovectores del sistema representado por la Ecuación (A.1) tienen la forma:

$$\vec{\Psi}_j = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_j \\ \lambda_j \vec{\Phi}_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (\text{A.4})$$

los cuáles cumplen con las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\vec{\Psi}^T \mathbf{A} \vec{\Psi} = \mathbf{M}_d, \quad \vec{\Psi}^T \mathbf{B} \vec{\Psi} = -\lambda \mathbf{M}_d, \quad \text{con } \lambda = \text{diag}\{\lambda_j\} \text{ y } \mathbf{M}_d = \text{diag}\{m_j\} \quad (\text{A.5})$$

Consideremos dos modos diferentes s y r , que satisfacen la ecuación $(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \psi = 0$. Si la ecuación correspondiente al r -ésimo modo es pre-multiplicada por $\vec{\Psi}_s^T$, se tiene:

$$\lambda_r \vec{\Psi}_s^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_r = -\vec{\Psi}_s^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_r \quad (\text{A.6})$$

Como \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices simétricas, si se transpone la Ecuación (A.6) se tiene:

$$\lambda_r \vec{\Psi}_r^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_s = -\vec{\Psi}_r^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_s \quad (\text{A.7})$$

Si la ecuación para el modo s es ahora pre-multiplicada por $\vec{\Psi}_r^T$, se obtiene:

$$\lambda_s \vec{\Psi}_r^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_s = -\vec{\Psi}_r^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_s \quad (\text{A.8})$$

Restando la Ecuación (A.8) de (A.7) resulta:

$$(\lambda_r - \lambda_s) \vec{\Psi}_r^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_s = 0 \quad (\text{A.9})$$

Cuando λ_r y λ_s son diferentes, la siguiente propiedad relaciona a los correspondientes auto-vectores:

$$\vec{\Psi}_r^T \mathbf{A} \vec{\Psi}_s = 0 \quad (\text{A.10})$$

de igual modo se verifica que:

$$\vec{\Psi}_r^T \mathbf{B} \vec{\Psi}_s = 0 \quad (\text{A.11})$$

Para amortiguamiento menor que el crítico, estas propiedades se verifican también para los dos auto-vectores complejos conjugados, ya que se cumple que λ_r es diferente de λ_r^* , a saber:

$$\lambda_r = \alpha_r - i\beta_r \quad \text{y} \quad \lambda_r^* = \alpha_r + i\beta_r \quad (\text{A.12})$$

entonces

$$\lambda_r - \lambda_r^* = (\alpha_r - i\beta_r) - (\alpha_r + i\beta_r) = -2i\beta_r \neq 0 \quad (\text{A.13})$$

A.3 Ortogonalidad con respecto a la matriz de masa \mathbf{M}

La Ecuación (A.5) se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{\varphi} & \bar{\bar{\varphi}} \\ \lambda\bar{\varphi} & \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi} & \bar{\bar{\varphi}} \\ \lambda\bar{\varphi} & \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}^T \mathbf{K} \bar{\varphi} - \lambda\bar{\varphi}^T \mathbf{M} \lambda\bar{\varphi} & \bar{\varphi}^T \mathbf{K} \bar{\bar{\varphi}} - \lambda\bar{\varphi}^T \mathbf{M} \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}} \\ \bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{K} \bar{\varphi} - \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{M} \lambda\bar{\varphi} & \bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{K} \bar{\bar{\varphi}} - \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{M} \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}} \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{M}_d \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

entonces

$$\bar{\varphi}^T \mathbf{K} \bar{\varphi} - \lambda\bar{\varphi}^T \mathbf{M} \lambda\bar{\varphi} = [diag] \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{K} \bar{\bar{\varphi}} - \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{M} \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}} = [diag]$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda\bar{\varphi}^T \mathbf{M} \lambda\bar{\varphi} &= [diag] \\ \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}}^T \mathbf{M} \bar{\lambda}\bar{\bar{\varphi}} &= [diag] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Estimation of modal parameters of structures under ambient excitation

Abstract

Structural monitoring under ambient vibrations has been a subject of growing interest in recent years, due to the impressive progress experienced by transducers and recording equipment. The final objective of monitoring is to evaluate the state of the structure, without interrupting its normal operation, from vibration measurements. In general, in civil engineering structures such as bridges, tall buildings, dams or off-shore structures, the excitation will most likely be natural excitation from wind, traffic or seismic soil motions. In those cases, so-called stochastic system identification methods are commonly used to estimate the modal parameters. One such output only method to identify the dynamic characteristics of structures characterized by arbitrary damping and subjected to ambient excitation is described in this paper. This approach allows obtaining the natural frequencies and damping from the spectral power densities of the modal accelerations. The method is illustrated by three examples (a) a theoretical plane frame of a building, (b) a 1:50 scale aluminium storey building model tested on a vibration table and (c) a simply supported reinforced concrete beam also tested under laboratory conditions. The results were considered satisfactory in all cases, suggesting the it has considerable potential in damage identification.

Key words: system identification, modal analysis, modal parameters.

1. Introduction

Structural system identification is an area of increasing interest for Structural Engineers. The resulting parameters, such as natural frequencies, modal shapes or damping ratios, may be needed to verify or calibrate analytical models. Moreover, those parameters gain fundamental importance in damage detection and evaluation (Andersen and Kikergaard 1998). Thus, several methods for modal identification were proposed in the last few decades, which may be classified as frequency or time domain methods.

For purposes of structural identification, it is in general necessary to measure both the input and the output. However, in many big civil engineering structures, such as bridges, dams, off-shore structures, etc. it is often not feasible to monitor the excitation. This practical difficulty led to the development of output-only system identification methods. These methods are based on a strong hypothesis related to the unknown

excitation: that it can be modelled as a stochastic stationary process (gaussian white noise).

In this work, an output-only method is proposed. This approach is a modification of the Peak-picking method (Ewins, 1995), in which the spectral power density for each modal response is analysed.

2. Linear systems with complex modes

The dynamic behaviour of a discrete mechanical system consisting in n degrees of freedom with viscous damping can be described by differential equation (1), in which \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} denote the mass, damping and stiffness matrices respectively, $\vec{q}(t)$ is the displacements vector, $\dot{\vec{q}}(t)$ is the velocities vector and $\ddot{\vec{q}}(t)$ is the accelerations vector. The vector $\vec{f}(t)$ is the excitation force. Note that for systems with arbitrary viscous damping, the eigenvectors and eigenvalues occur in complex conjugate pairs. This results from the fact that the matrices are real and thus its characteristic values must either be real or occur in complex conjugate pairs (Ewins 1995).

The linear system response to any external excitation is given by Eq. (2), in which the vectors $\vec{\phi}_i$ represent the complex conjugate modal shapes and $\vec{\eta}_i(t)$ the i complex conjugate modal response.

Pre-multiplying both sides of Equation (2) by $\vec{\phi}_r^T \mathbf{M}$ yields Eq. (3). Due to the orthogonality condition with respect to the mass matrix, all terms of the series, except the r th, disappear, as shown in the appendix, thus Eq.(4) follows. Similarly, if both members of Equation (2) are pre-multilied by $\vec{\phi}_r^T \mathbf{M}$ Eq. (5) results. Thus, the orthogonality condition is expressed by Eq. (6). Summing Equations (4) and (6) and considering the normalised modes in such a way that $\vec{\phi}_r^T \mathbf{M} \vec{\phi}_r = 1$, Eq. (7) is obtained.

The modal response η_r can be considered as a single degree of freedom response, therefore in the spectral power density of each response function $\eta_r(t)$ only one peak will appear, centered at the frequency of the r th mode. The frequency and damping ratio for each mode may then be determined by fitting the theoretical frequency response function of a linear oscillator to this power spectral density. This was achieved by means of the least sum of squares method. As shown in Equation (7), to determine $\eta_r(t)$ it is necessary to previously know the modal matrix, which means that either a numerical discrete model or the modal matrix obtained experimentally (Inman 1994) are needed.

3. Examples

Plane structural system (numerical simulation). A steel sixstorey plane frame is analysed (Figure 1). The mass per floor is 255tn. A shear building behavior is assumed. Hence, six degrees of freedom corresponding to the six horizontal displacements are considered. Non-proportional viscous damping was assumed. In Table 1, frequencies obtained solving the eigenvalue problem and modal damping for each mode are pre-

sented. Table 2 compare the estimated parameters and the relative errors with the analytical values. The fitted power spectral density functions of the modal responses are shown in Figures 2 to 7. The results show that the performance of the method is in this case quite satisfactory. The uncertainties on the estimated frequencies and damping ratios are quite low, which may be partly explained by the absence of measurement noise.

Aluminium frame (experimental). A 1:50 scale aluminium six stories building is analysed next (Figure 8). The geometric properties of the building are indicated in Table 3. The structure is subjected to a set of horizontal accelerations (Gaussian white noise) at the base, the horizontal acceleration response being measured at each floor level. Figure 9 shows the measured acceleration at the sixth floor and its power spectral density. The parameters estimated by both the complex modes and SSI-Cov methods (Amani 2004) are compared in Table 4. Figures 10 to 15 show the power spectral density of the modal response for the six modes to the experimental spectral densities. Note that the latter can be smoothed out by increasing the number of records, i.e., the experimental data base. Again, the results confirm the excellent performance of the method proposed herein in connection with natural frequencies. Damping ratio estimates are satisfactory for the lower modes, but the coefficient of variation of the estimated values tends to increase with the modal frequency.

Reinforced concrete beam (experimental). The simply-supported reinforced concrete beam with $L=5.60\text{m}$ length and rectangular cross section ($0.10\text{m}\times 0.20\text{m}$) shown in Fig. 16 was studied next. A manual hammer was used to apply impact excitation on the beam. Acceleration responses at four locations along the beam were measured. Additional details on the experimental set-up are given by Palazzo (2001). Figures 17 to 20 show the fitted power spectral densities of the modal response as well as the measured normalized functions. The estimated parameters assessed by the complex modes and SSI-Cov methods (Amani 2004) are compared in Table 5 with the values furnished by Palazzo (2001). Once again, the results confirm the reliability of the predictions of the proposed method, that are in this case comparable to those obtained through the SSI-Cov procedure, and superior to those estimated by the peak-picking method .

4. Conclusions

In this paper an output-only system identification scheme designated as *Complex Modes Method (CMM)* was described. The examples presented indicate that in systems with well separated frequencies, the performance of the method is excellent. The error in the natural frequencies estimates for the six degree of freedom system was less than 1%. Damping ratios were estimated with errors smaller than 3%.

The performance of the CMM in connection with experimentally observed structural response was also very good, confirming that estimation errors are smaller for frequencies, with coefficients of variation much less than 1%, than for damping terms, which show coefficients of variation increasing with frequency from about 3% for the first mode to about 20% for the sixth mode.

A disadvantage of the Complex Modes Method is the requirement of previous knowledge of the mode shapes. However, in structures with few degrees of freedom this method is a simple alternative, since the mode shape can be obtained experimentally.

Appendix

A.1. Orthogonality properties

It is well known that any eigenvector component of an undamped or viscously (proportional) damped system differs from the other by its amplitude only, since their phase angles are equal or differ in 180°. Therefore, for an n degrees of freedom system, a set of n equations to obtain the n amplitudes for a given mode is necessary. For a non-proportionally damped system, each eigenvector component differs not only in its amplitude but also in the phase angle, because of which a set of $2n$ equations are needed to determine the n components of each mode.

A.2. Orthogonality of normal modes with respect to \mathbf{A} and \mathbf{B} matrices

The system defined by Equation (1) can be described by a set of first order differential equations in the state space as indicated by Eqs. (A.1) (A.2) and (A.3). The system eigenvectors have the form (A.4). Consider two different modes s and r , that satisfy the Equation $(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}$. If this equation is pre-multiplied by the r th mode $\bar{\boldsymbol{\psi}}_r^T$ Eq. (A.6) results. Both \mathbf{A} and \mathbf{B} matrices are symmetric, hence the transpose of Eq. (A.6) is Eq. (A.7). Now if the equation for s th mode is multiplied by $\bar{\boldsymbol{\psi}}_r^T$ Eq. (A.8) is obtained, and subtracting Eq. (A.8) from Eq. (A.7) leads to eq.(A.9). If \mathbf{l}_r and \mathbf{l}_s are different, then the orthogonality properties (A.10) and (A.11) hold. For the underdamped case these properties can be verified too, leading to (A.12) and (A.13).