

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Carlos Rodrigo Pinheiro David**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PAINÉIS DE CONCRETO  
ARMADO SUBMETIDOS AO CORTE PURO**

Porto Alegre  
fevereiro 2010

**CARLOS RODRIGO PINHEIRO DAVID**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PAINÉIS DE CONCRETO  
ARMADO SUBMETIDOS AO CORTE PURO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da  
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do  
Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia na modalidade Acadêmico

**Orientadores: Virgínia Maria Rosito d'Avila  
Eduardo Bittencourt**

Porto Alegre  
fevereiro 2010

**CARLOS RODRIGO PINHEIRO DAVID**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PAINÉIS DE CONCRETO  
ARMADO SUBMETIDOS AO CORTE PURO**

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, fevereiro de 2010

**Prof. Eduardo Bittencourt**

Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

**Profa. Virgínia Maria R. d'Avila**

Dra. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

**Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho**

Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**

Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho (UFRGS)**

Ph.D. pela University of Leeds, Inglaterra

**Prof. Túlio Nogueira Bittencourt (USP)**

Ph.D. pela Cornell University, Estados Unidos

Dedico este trabalho a Deus, meus pais, minha família,  
minha namorada e meus amigos, que sempre me apoiaram  
e, especialmente durante o período do meu Mestrado  
Acadêmico, estiveram sempre ao meu lado.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a DEUS e a minha família que me deram todas as condições para que a realização desta Dissertação fosse possível.

Agradeço à Prof. Virgínia Maria Rosito d'Avila e ao Prof. Eduardo Bittencourt, orientadores deste trabalho, por toda a sua ajuda e ensinamentos, que possibilitaram uma grande evolução no aprendizado pessoal e também uma pequena contribuição ao contínuo desenvolvimento dos estudos na área de simulação numérica de fissuração em concreto armado.

Agradeço à CNPQ pelo auxílio financeiro prestado ao longo de todo o Mestrado Acadêmico.

Agradeço aos funcionários e professores do PPGEC/UFRGS, especialmente os professores do CEMACOM/UFRGS por todos ensinamentos e colaboração durante o desenvolvimento desta Dissertação.

O que mais me surpreende na humanidade são os homens,  
porque perdem a saúde para juntar dinheiro, depois  
perdem dinheiro para recuperar a saúde. E por pensarem  
ansiosamente no futuro, esquecem o presente de tal forma  
que acabam por não viver nem o presente, nem o futuro. E  
vivem como se nunca fossem morrer e morrem como se  
nunca tivessem vivido.

*Dalai Lama*

## RESUMO

DAVID, C. R. P. **Simulação Numérica de Painéis de Concreto Armado Submetidos ao Corte Puro**. 2010. 189 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação, UFRGS, Porto Alegre.

A análise de painéis de concreto armado submetidos a corte puro é um tópico que tem recebido atenção de pesquisadores ao longo dos anos. Isto se deve, principalmente, à dificuldade encontrada na aplicação do carregamento e das condições de vinculação sobre a estrutura. Esta dificuldade é constatada tanto experimentalmente como na análise numérica. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo numérico para simular o comportamento de painéis de concreto simples e de concreto armado submetidos ao corte. Na análise computacional via Elementos Finitos, será utilizado um modelo de fissura incorporada que considera a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrão. O modelo incorporado implementado é uma continuação dos trabalhos desenvolvidos por d'Avila (2003) e Brisotto (2006), baseados no modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990). O modelo de transferência de tensão por aderência de Russo, Zingone e Romano (1990) foi usado por d'Avila para incluir a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. Para representar as barras de aço da armadura, é utilizado o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989) que permite a disposição arbitrária das barras no interior dos elementos de concreto. Os resultados dos ensaios numéricos de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro com diferentes taxas de armadura são comparados com os resultados experimentais apresentados por Vecchio (1981). São incluídos dois diferentes modelos de efeito de pino (resistência ao corte das barras da armadura), analisando-se a influência dos mesmos no comportamento dos painéis ensaiados. O efeito do engrenamento dos agregados na fissura também foi estudado. Vários painéis com diferentes formas de ruptura experimental foram simulados, obtendo-se respostas muito boas para a maioria deles. Comparações da resposta tensão tangencial x distorção com e sem efeito de pino foram feitas, verificando-se a grande importância deste efeito na resposta global.

Palavras-chave: concreto armado, fissura incorporada, elementos finitos, corte puro, efeito de pino, painel, membrana

## ABSTRACT

DAVID, C. R. P. **Simulação Numérica de Painéis de Concreto Armado Submetidos ao Corte Puro**. 2010. 189 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação, UFRGS, Porto Alegre.

### **A numerical simulation of reinforced concrete panels submitted to pure shear**

The analysis of reinforced concrete panels submitted to in-plane shear has received the attention of researchers along the years. It is mainly due to the difficulty to simulate the application of the external loads and the structural boundary conditions. The purpose of this work is to present a numerical model to represent reinforced concrete panels submitted to in-plane shear. In the computational analysis via Finite Elements, an embedded crack model that considers the inclusion of the reinforcement contribution in the internal force equilibrium of the element is presented. This type of model is based in discontinuities embedded into standard finite elements. The implemented formulation uses the model presented by Dvorkin, Cuitiño and Gioia (1990), which does not have the reinforcement contribution in the element internal equilibrium. The adherence stress transfer model of Russo, Zingone and Romano (1990) is used to include this reinforcement contribution. An embedded model was employed to represent the reinforcement bars, allowing that they can be placed in an independent position and shape in the FEM elements. The numerical results are compared with Vecchio's work. Also are included two different dowel action models (transversal shear resistance of the bars) and is studied their influence in the panels' behavior. Panels with different experimental rupture modes were simulated with good responses in the most cases. Comparisons of shear stress x shear strain curve with and without dowel action are performed, showing the importance of this effect on the global response.

Keywords: reinforced concrete, embedded cracking model, finite element, pure shear, dowel action, panel, membrane

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: painéis e elementos de membrana em estruturas de concreto armado.....	20
Figura 2: (a) aparelho de ensaio dos painéis e (b) localização dos pontos de medida.....	27
Figura 3: exemplos de: (a) Círculos de deformação e (b) Círculos de tensão.....	30
Figura 4: dados obtidos das tensões e deformações principais de compressão.....	30
Figura 5: pico da tensão principal de compressão x razão de deformação.....	31
Figura 6: (a) dados obtidos de tensão-deformação de tração e (b) comparação entre valores experimentais e previstos de tensões de tração.....	32
Figura 7: tensões de fissuração x resistência do cilindro.....	34
Figura 8: painel carregado em corte puro.....	35
Figura 9: condições de tensão e deformação para o painel.....	36
Figura 10: condições de tensão e deformação para o concreto, o aço e o painel.....	37
Figura 11: Círculos de Mohr de (a) deformações para o painel e (b) tensões na armadura.....	38
Figura 12: Círculo de Mohr de tensões no concreto.....	39
Figura 13: comparação de condições de tensões e deformações para um cilindro de teste e para um painel de concreto fissurado.....	40
Figura 14: comportamento elástico-linear do concreto intacto.....	50
Figura 15: amolecimento linear.....	51
Figura 16: amolecimento exponencial.....	53
Figura 17: variação do módulo de corte de He e Kwan.....	54
Figura 18: modelo constitutivo do aço ao longo do elemento.....	56
Figura 19: efeito de pino (a) devido à flexão da barra na abertura de fissura e (b) devido ao corte direto da barra.....	57
Figura 20 barra de armadura no interior de um elemento de concreto.....	63
Figura 21: coordenadas ao longo do eixo de armadura.....	63
Figura 22: representação do domínio contínuo.....	67
Figura 23: diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total..	68
Figura 24: representação do domínio com uma superfície interna.....	68
Figura 25: diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total com o campo adicional de forças na superfície interna.....	69
Figura 26: peça de concreto armado tracionada axialmente.....	71
Figura 27: tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente....	72
Figura 28: relação tensão de aderência x escorregamento relativo.....	74
Figura 29: distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço: (a) Peça Longa e (b) Peça Curta.....	78

Figura 30: comportamento de peça curta – caso 2.....	82
Figura 31: fissuração em uma peça longa.....	84
Figura 32: fissuração em uma peça curta.....	85
Figura 33: elemento QMITC (a) nós da interpolação de deslocamentos e (b) pontos de interpolação das deformações.....	88
Figura 34: elemento com a linha de descontinuidade.....	89
Figura 35: forças na armadura em (a) domínio do elemento e (b) linha de localização...	99
Figura 36: tensões em um painel submetido ao corte puro.....	101
Figura 37: simulação de painel sob corte puro.....	103
Figura 38: relação entre nós e volumes para tirantes.....	104
Figura 39: (a) comprimentos de transferência de tensão e (b) número real de fissuras....	107
Figura 40: determinação do escorregamento e abertura de fissura do painel.....	108
Figura 41: comprimentos de transferência de tensão para painéis com taxas de armadura diferentes.....	113
Figura 42: comparação da determinação dos escorregamentos e aberturas de fissura para: (a) painéis com mesma taxa de armadura e (b) painéis com taxas diferentes.....	114
Figura 43: (a) painel quadrado de concreto simples submetido ao corte puro e (b) condições de contorno para a simulação numérica.....	120
Figura 44: curva tensão-deformação do painel de concreto simples.....	121
Figura 45: curva de amolecimento do painel de concreto simples.....	122
Figura 46: painel com (a) 1 elemento e (b) 9 elementos.....	123
Figura 47: curva tensão tangencial x distorção para os painéis com 1 e 9 elementos.....	124
Figura 48: painel quadrado submetido ao corte puro.....	126
Figura 49: curva tensão x distorção do painel PV27.....	128
Figura 50: curvas do painel PV27 de (a) $\varepsilon_l = \varepsilon_t \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração.....	129
Figura 51: curvas do painel PV27: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões.....	131
Figura 52: fissuração experimental do painel PV27.....	132
Figura 53: curva tensão x distorção do painel PV22.....	133
Figura 54: curvas do painel PV22 de (a) $\varepsilon_t \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_t \times \tau$ (c) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (d) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração.....	134
Figura 55: curvas do painel PV22: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações.....	136
Figura 56: curva tensão x distorção do painel PV9.....	137

Figura 57: curvas do painel PV9 de (a) $\varepsilon_l = \varepsilon_l \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração.....	139
Figura 58: curvas do painel PV9: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões.....	140
Figura 59: curva tensão x distorção do painel PV11.....	141
Figura 60: curvas do painel PV11 de (a) $\varepsilon_l \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_l \times \tau$ (c) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (d) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração.....	143
Figura 61: curvas do painel PV11: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações.....	145
Figura 62: curva tensão x distorção do painel PV6.....	146
Figura 63: curvas do painel PV6 de (a) $\varepsilon_l = \varepsilon_l \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração.....	148
Figura 64: curvas do painel PV6: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões.....	149
Figura 65: curva tensão x distorção do painel PV21.....	151
Figura 66: curvas do painel PV21 de (a) $\varepsilon_l \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_l \times \tau$ (c) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (d) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração.....	153
Figura 67: curvas do painel PV21: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações.....	154
Figura 68: curva tensão x distorção do painel PV10.....	156
Figura 69: curvas do painel PV10 de (a) $\varepsilon_l \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_l \times \tau$ (c) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (d) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração.....	158
Figura 70: curvas do painel PV10: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações.....	159
Figura 71: curva tensão x distorção do painel PV14.....	161
Figura 72: curvas do painel PV14 de (a) $\varepsilon_l = \varepsilon_l \times \tau$ ; (b) $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c) $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração.....	163
Figura 73: curvas do painel PV14: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões.....	164
Figura 74: influência do efeito de pino na curva tensão tangencial x distorção para o painel PV27.....	166
Figura 75: influência do efeito de pino na curva tensão tangencial x distorção para o painel PV22.....	166
Figura 76: comparação dos modelos de engrenamento de agregados.....	169
Figura 77: relação entre a resistência à tração do concreto e a energia de fratura.....	170
Figura A1: organograma do algoritmo do presente trabalho (parte 1).....	185
Figura A2: organograma do algoritmo do presente trabalho (parte 2).....	186

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: painéis submetidos a corte puro ensaiados por Vecchio (1981).....	25
Tabela 2: dados do painel de teste das malhas de 1 e 9 elementos.....	124
Tabela 3: resultados dos painéis com 1 e 9 elementos.....	125
Tabela 4: dados do painel PV27.....	127
Tabela 5: dados do painel PV22.....	133
Tabela 6: dados do painel PV9.....	137
Tabela 7: dados do painel PV11.....	141
Tabela 8: dados do painel PV6.....	146
Tabela 9: dados do painel PV21.....	150
Tabela 10: dados do painel PV10.....	155
Tabela 11: dados do painel PV14.....	161
Tabela 12: carga última de corte dos painéis.....	171
Tabela B1: Comparação numérica entre alguns pontos da curva distorção x tensão tangencial dos painéis: (a) PV27, (b) PV22, (c) PV9, (d) PV11 e (e) PV6.....	188
Tabela B2: Comparação numérica entre alguns pontos da curva distorção x tensão tangencial dos painéis: (a) PV21, (b) PV10 e (c) P14.....	189
Tabela B3: Comparação numérica entre as curvas dos painéis PV27 e PV22: (a) com efeito de pino e (b) sem efeito de pino.....	189

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_c$	Área da seção transversal do concreto
$A_s, A^f$	Área da seção transversal do aço
$B_i, C, D$	Constantes de integração do modelo de transferência de tensão por aderência
$\mathbf{B}$	Matriz das derivadas das funções de interpolação padrões
$\mathbf{B}_s$	Vetor das relações deformação-deslocamento para a armadura
$\mathbf{D}^e$	Matriz das constantes elásticas
$\mathbf{D}^{er}$	Matriz de rigidez tangente da linha de localização
$E_c$	Módulo de deformação longitudinal do concreto
$E_s, E^d$	Módulo de deformação longitudinal do aço
FCR	Força no concreto transmitida na fissura
FCRS	Força no aço transmitida na fissura (calculada diretamente através das deformações e tensões do aço na fissura)
FCT	Força total transmitida na fissura
FEL	Força no concreto no domínio do elemento
FES	Força no aço no domínio do elemento
FET	Força total no domínio do elemento
FS	Força no aço transmitida na fissura (calculada pela diferença entre FET e FCR)
FSY	Força transversal nas barras de aço devido ao efeito de pino
$\mathbf{F}$	Vetor forças internas do elemento
$\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_i$	Vetor forças internas do elemento referentes aos nós externos e internos
$G_a$	Módulo de corte do concreto fissurado
$G_f$	Energia de fratura
$G_0$	Módulo de corte do concreto intacto
$G_s, G^f$	Módulo de corte do aço
$H_j$	Funções de interpolação da armadura

$H^{ft}$	Módulo de amolecimento / endurecimento de corte da barra de aço
$H^m$	Funções de interpolação dos elementos de armadura
$I, J_b$	Momento de inércia das barras de aço
$I$	Matriz identidade
$J$	Matriz Jacobiana
$K^*$	Matriz de rigidez tangente
$K_c$	Matriz de rigidez do elemento de concreto
$K_s$	Matriz de rigidez da armadura
$K_{ee}, K_{ii}$	Submatrizes de rigidez do elemento
$K_{ei}, K_{ie}$	
$M_y$	Momento plástico (formulação de Oliver et al. (2008))
NF	Número de fissuras por elemento
$NF_{real}$	Número de fissuras real para painéis
$N$	Matriz de interpolação padrão
$P$	Matriz que seleciona as componentes de tensão que serão transmitidas pela fissura
$Q_s$	Vetor de força nodal equivalente
$R$	Matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade para o sistema global
$S_j$	Superfície interna
$S_L$	Superfície da fissura
$S_t$	Superfície onde as forças de superfície são impostas
$S_u$	Superfície onde o corpo está sujeito a deslocamentos prescritos
$T$	Tolerância do critério de convergência no modelo proposto
UC	Valor da abertura da fissura por elemento
$UC_n$	Abertura total de fissuras na direção normal às mesmas
$UC_t$	Abertura total de fissuras na direção tangencial (deslizamento) às mesmas
UC1	Valor da abertura de cada uma das fissuras na direção normal às mesmas

UC2	Valor da abertura de cada uma das fissuras na direção tangencial às mesmas
<b>U</b>	Vetor deslocamento
<b>U<sup>e</sup></b>	Vetor deslocamentos nodais
<b>V</b>	Volume do elemento
<b>V<sub>1</sub> , V<sub>2</sub></b>	Subdomínios dos elementos
<b>V<sub>h</sub>, V<sub>v</sub></b>	Forças de pino fornecidas pelas armaduras longitudinal e transversal
<b>V<sub>u</sub></b>	Resistência última de pino
<b>V<sub>y</sub></b>	Força de corte correspondente a uma tensão de $\sigma_y$ para o efeito de pino
<b><math>\hat{\mathbf{b}}</math></b>	Força de volume
<b>d, d<sub>b</sub></b>	Diâmetro da barra de aço
<b><math>\mathbf{d}_1</math> , <math>\mathbf{d}_2</math></b>	Vetor dos deslocamentos para os subdomínios $V_1$ e $V_2$
<b><math>\mathbf{d}_N</math></b>	Deslocamento que causa deformação do elemento
<b><math>\mathbf{e}</math></b>	Vetor dos modos de deformação adicionais
<b><math>\mathbf{e}'</math></b>	Vetor das componentes no sistema local da descontinuidade do vetor <b>e</b>
<b><math>f_c, f_c'</math></b>	Resistência à compressão uniaxial do concreto
<b><math>f_{ck}</math></b>	Resistência característica do concreto
<b><math>f_{cr}</math></b>	Tensão de tração de fissuração do concreto
<b><math>f_d</math></b>	Tensão de compressão principal na diagonal comprimida
<b><math>f_{dt}</math></b>	Tensão de tração principal na diagonal tracionada
<b><math>f_l</math></b>	Tensão de compressão longitudinal do concreto
<b><math>f_{nl}</math></b>	Tensão de tração longitudinal externa aplicada no painel
<b><math>f_{nt}</math></b>	Tensão de tração transversal externa aplicada no painel
<b><math>f_p</math></b>	Tensão de pico de compressão no concreto
<b><math>f_{scr1}</math></b>	Tensão de tração local na armadura longitudinal (na fissura)
<b><math>f_{sct}</math></b>	Tensão de tração local na armadura transversal (na fissura)
<b><math>f_{sl}</math></b>	Tensão de tração na armadura longitudinal

$f_{st}$	Tensão de tração na armadura transversal
$f_t$	Tensão de compressão transversal do concreto (nos capítulos 2 e 5)
$f_t$	Resistência à tração uniaxial do concreto (nos capítulos 3, 4 e 6)
$f_y$	Tensão de escoamento do aço
$\mathbf{f}_{ext}$	Vetor forças externas padrão
$\mathbf{f}_{int}$	Vetor forças internas
$k_{eq}$	Módulo de fundação equivalente para o concreto
$k_s$	Modulo de fundação para o concreto
$p$	Carga externa
$s$	Escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente
$s_m$	Espaçamento médio das fissuras
$s_0$	Escorregamento entre o concreto e a armadura na extremidade carregada
$\mathbf{t}$	Forças transmitidas através da fissura
$\mathbf{t}_j$	Forças de superfície na superfície interna
$\hat{\mathbf{t}}$	Forças de superfície impostas
$\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos do elemento
$\hat{\mathbf{u}}$	Deslocamentos impostos
$\tau_{,v}$	Tensão de corte
$v_c$	Tensão de corte agindo no concreto
$v_{ci}$	Tensão tangencial de corte na superfície da fissura
$x, y$	Coordenadas cartesianas
$x', y'$	Coordenadas locais da fissura
$x_R, L_t$	Comprimento de transferência de tensão
$x_{Rcrack}$	Distância da fissura à extremidade carregada
$w, w_c, w_{fis}, U_{crack}$	Abertura da fissura
$w_i$	Fator de peso da integração numérica

$w_{\max}$	Máxima abertura de fissura que permite transferência de tensão
$\Sigma_0$	Perímetro da seção transversal da armadura
$\Psi$	Coefficiente que determina a relação entre a tensão média e a máxima tensão na camada de concreto adjacente à armadura
$\Phi$	Matriz do modelo de Dvorkin et al. (1990) que realiza o correto desconto da abertura da fissura no deslocamento dos nós do elemento
$\alpha$	Rigidez da fundação de concreto
$\beta$	Coefficiente de distorção de corte
$\chi$	Coordenada normalizada da armadura
$\gamma$	Distorção de corte
$\gamma_{lt}$	Distorção de corte normal entre os eixos longitudinal e transversal
$\gamma_m$	Distorção de corte máxima
$\delta, \bar{\delta}$	Deslocamento Prescrito
$\delta_s$	Deslizamento na fissura (abertura tangencial da fissura)
$\varepsilon$	Deformação longitudinal
$\varepsilon_c$	Deformação longitudinal no concreto (no modelo de transferência de tensão)
$\varepsilon_{cr}$	Deformação de tração do concreto no momento do início da fissuração
$\varepsilon_{ct}$	Deformação de fissuração do concreto
$\varepsilon_{c\max}$	Deformação máxima do concreto
$\varepsilon_d$	Deformação principal de compressão do concreto na diagonal comprimida
$\varepsilon_{dt}$	Deformação principal de tração do concreto na diagonal tracionada
$\varepsilon_l$	Deformação de tração da armadura longitudinal
$\varepsilon_0$	Deformação cilíndrica do concreto correspondente a uma tensão igual a $f_{ck}$
$\varepsilon_p$	Deformação de compressão do concreto na tensão de pico de compressão $f_p$
$\varepsilon_t$	Deformação de tração da armadura transversal
$\varepsilon_x$	Igual a $\varepsilon_{dt}$ , porém é uma deformação medida experimentalmente

$\varepsilon_y$	Igual a $\varepsilon_d$ , porém é uma deformação medida experimentalmente
$\varepsilon_s$	Deformação longitudinal da armadura
$\varepsilon_{sm}$	Deformação longitudinal média da armadura
$\varepsilon_{s0}$	Deformação no aço na extremidade carregada
$\varepsilon_{s0L}$	Deformação no aço no limite de separação entre peça longa e curta
$\varepsilon_{s0crack}$	Deformação no aço na extremidade carregada que determina a fissuração do concreto
$\hat{\varepsilon}_{ij}$	Componentes naturais covariantes do tensor deformação
$\varepsilon$	Campo de deformações do elemento
$\theta'$	Ângulo de inclinação das deformações principais
$\theta, \theta_\sigma$	Ângulo de inclinação das tensões principais
$\mu$	Coefficiente de retenção para o módulo de corte
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi, \eta$	Coordenadas normalizadas
$\rho$	Taxa de armadura na zona tracionada
$\rho_l$	Taxa de armadura longitudinal
$\rho_t$	Taxa de armadura transversal
$\sigma$	Tensão
$\sigma_{cm}$	Tensão média no concreto
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais no concreto
$\sigma_s$	Tensão no aço
$\sigma$	Campo de tensões do elemento
$\sigma_c$	Tensor de tensão no concreto
$\sigma_{sy}$	Tensão transversal nas barras de aço causadas pelo efeito de pino
$\sigma_y$	Tensão de escoamento do aço (formulação de Oliver et al. (2008))
$\tau$	Tensão de aderência

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO E METODOLOGIA</b> .....	20
<b>2 PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS AO CORTE</b> .....	25
2.1 PESQUISA EXPERIMENTAL REALIZADA POR VECCHIO.....	25
2.2 MODELO ANALÍTICO DE VECCHIO.....	34
<b>2.2.1 Definição do Problema</b> .....	35
<b>2.2.2 Previsões do Modelo</b> .....	41
2.3 OUTROS MODELOS NUMÉRICOS.....	44
<b>3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS E MODELO DA ARMADURA</b> .....	50
3.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO.....	50
<b>3.1.1 Concreto Intacto</b> .....	50
<b>3.1.2 Concreto Fissurado</b> .....	51
3.1.2.1 Transferência de Tensões Normais à Fissura.....	51
3.1.2.1.1 <i>Amolecimento Linear</i> .....	51
3.1.2.1.2 <i>Amolecimento Exponencial</i> .....	52
3.1.2.2 Transferência de Tensões Tangenciais à Fissura.....	53
3.1.2.2.1 <i>Modelo de He e Kwan (2001)</i> .....	53
3.1.2.2.2 <i>Modelo de Tensão de Corte na Fissura Usado por Vecchio e Lai (2004)</i> .....	54
3.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO.....	56
<b>3.2.1 Armadura ao Longo do Elemento</b> .....	56
<b>3.2.2 Armadura na Fissura (Efeito de Pino)</b> .....	57
3.2.2.1 Modelo de Efeito de Pino Usado por Oliver et al. (2008) – MDA1.....	57
3.2.2.2 Modelo de Efeito de Pino de Di Prisco e Gambarova – MDA2.....	60
3.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	62
<b>4 MODELO DE FISSURA INCORPORADA</b> .....	66
4.1 LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES.....	66
4.2 MODELO DE TRANSFERÊNCIA DE TENSÃO POR ADERÊNCIA.....	70
<b>4.2.1 Caso 1</b> .....	81
<b>4.2.2 Caso 2</b> .....	82
4.3 ANÁLISE DE FISSURAÇÃO PROGRESSIVA DA PEÇA.....	84
4.4 MODELO DE FISSURA INCORPORADA COM INCLUSÃO DA ARMADURA.....	87
<b>4.4.1 Modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia</b> .....	87
<b>4.4.2 Modelos de d’Avila e Brisotto</b> .....	94

<b>5 MODELO PROPOSTO</b> .....	100
5.1 INTRODUÇÃO.....	100
5.2 MUDANÇAS NO MODELO PARA PAINÉIS DE CONCRETO SIMPLES.....	102
5.3 MUDANÇAS NO MODELO PARA PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO.....	106
<b>5.3.1 Número de Fissuras</b> .....	106
<b>5.3.2 Escorregamento</b> .....	107
<b>5.3.3 Deformações</b> .....	109
<b>5.3.4 Efeito de Pino</b> .....	112
<b>5.3.5 Modelo Particularizado para Painéis com Taxas Diferentes de Armadura nas Duas Direções</b> .....	112
<b>5.3.6 Procedimento Proposto</b> .....	115
<b>6 ANÁLISE NUMÉRICA</b> .....	120
6.1 PAINEL DE CONCRETO SIMPLES.....	120
6.2 ESTUDO DE MALHA PARA OS PAINÉIS SIMULADOS.....	122
6.3 PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO ENSAIADOS POR VECCHIO.....	125
<b>6.3.1 Grupo 1: painéis rompidos pelo esmagamento e fendilhamento do concreto..</b>	126
6.3.1.1 PAINEL PV27.....	127
6.3.1.2 PAINEL PV22.....	132
6.3.1.3 PAINEL PV9.....	136
<b>6.3.2 Grupo 2: painéis rompidos pelo escoamento de ambas armaduras</b> .....	140
6.3.2.1 PAINEL PV11.....	141
6.3.2.2 PAINEL PV6.....	146
<b>6.3.3 Grupo 3: painéis rompidos pelo escoamento da armadura transversal</b> .....	150
6.3.3.1 PAINEL PV21.....	150
6.3.3.2 PAINEL PV10.....	155
<b>6.3.4 Grupo 4: painéis rompidos pelo arrancamento das chaves de transmissão de corte (<i>pull-out</i>)</b> .....	160
6.4 COMPARAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO EFEITO DE PINO NO MODELO.....	165
6.5 ANÁLISE DAS TENSÕES TANGENCIAIS NAS FACES DA FISSURA.....	167
6.6 ANÁLISES COMPLEMENTARES.....	169
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES DO TRABALHO</b> .....	172
REFERÊNCIAS .....	176
APÊNDICE A .....	181
APÊNDICE B .....	187



## 1 INTRODUÇÃO E METODOLOGIA

As estruturas de concreto armado podem ser analisadas como a composição de vários elementos mais simples. É importante o entendimento de cada componente para a determinação do comportamento global da estrutura. Muitas estruturas modernas como silos, plataformas, edificações altas, pontes, entre outros, conforme exemplificado na figura 1, são compostas pela combinação de barras de aço, normalmente dispostas em duas direções ortogonais, e concreto. Devido à baixa resistência à tração do concreto, as estruturas já funcionam fissuradas para baixos níveis de carga e a resposta do concreto armado após o início da fissuração é complexa e não-linear. Para estudar estas estruturas, simplifica-se, muitas vezes, a análise em estruturas planas, submetidas a tensões planas, o que se denomina de “painel”. Então é claro que o estudo da fissuração em painéis de concreto armado é muito importante para determinar a resposta de elementos simples de concreto armado e, posteriormente, torna possível o estudo global da estrutura.

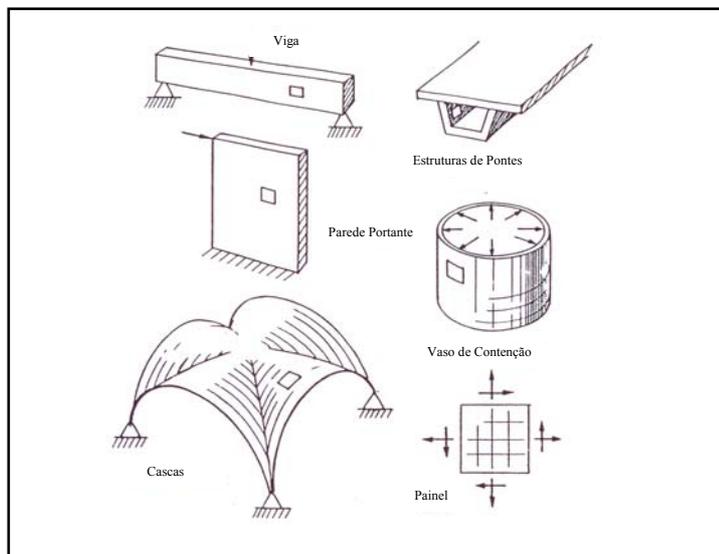


Figura 1: painéis e elementos de membrana em estruturas de concreto armado (VECCHIO, 1981, p.1)

Devido à natureza localizada, a correta modelagem da fissura é um tópico difícil, pois trata da descontinuidade no campo dos deslocamentos. Em uma análise via Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), as fissuras podem ser representadas de formas distintas. Os modelos de fissura incorporada baseiam-se no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de

elementos finitos padrões. Estes modelos foram desenvolvidos como uma alternativa para a simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado, pois permitem a representação tanto de uma única fissura localizada (o que normalmente acontece no concreto simples), quanto de várias fissuras espalhadas ao longo da estrutura (o que normalmente acontece no concreto armado).

Em estruturas de concreto armado, a dificuldade na modelagem da fissura aumenta devido ao complexo comportamento da interação entre os dois materiais envolvidos após o início da fissuração. Assim, a escolha de qual modelo utilizar para simular o comportamento do material fissurado é um aspecto importante na análise numérica. Modelos semi-empíricos são baseados em resultados experimentais e a perfeita aderência entre o concreto e as barras de aço é considerada. Estes modelos são simples de serem implementados e representam relativamente bem o comportamento global da estrutura, porém, eles não fornecem informações sobre o comportamento local dos materiais na fissura (abertura da fissura, tensão do aço na fissura, etc.). Os modelos de transferência de tensão se baseiam na transferência de tensão, por aderência, entre o aço e o concreto e são capazes de fornecer informações sobre o comportamento local da fissura. Basicamente, estes modelos determinam a distribuição das deformações, no aço e no concreto adjacente, ao longo da armadura. Quando as deformações dos dois materiais têm valores diferenciados, ocorre um escorregamento relativo entre os mesmos e a conseqüente formação da fissura.

O problema torna-se ainda mais desafiador quando as direções das barras da armadura não coincidirem com as direções das tensões principais, ou seja, a tensão de tração que irá fissurar o concreto não tem a mesma direção das barras de aço. Este caso ocorre freqüentemente na simulação numérica da fissuração em peças de concreto armado submetidas predominantemente ao cisalhamento, como nos painéis analisados neste trabalho (corte puro), ou na região próxima aos apoios em vigas de concreto armado.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de fissura incorporada para poder simular o comportamento de peças de concreto simples e armado submetidas ao corte puro.

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo elástico-linear. Após o início do processo de fissuração, o concreto simples é representado por um modelo de amolecimento baseado na Mecânica da Fratura. Para o concreto armado, o

material fissurado é representado através do modelo de transferência de tensão por aderência de Russo, Zingone e Romano (1990).

Já para representar as barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento.

No capítulo dois do presente trabalho, apresentam-se alguns estudos realizados por outros pesquisadores na simulação e ensaio de painéis de concreto armado submetidos ao corte. Ressalta-se que alguns itens dos modelos apresentados nestas bibliografias serão usados no modelo proposto desta pesquisa. Já nos capítulos três e quatro, está detalhado o modelo numérico proposto neste trabalho, baseado no modelo de fissura incorporada desenvolvido por d'Avila (2003) e posteriormente modificado por Brisotto (2006).

No capítulo cinco são descritas as modificações propostas para a simulação numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte. Diversas modificações nos modelos originais de Dvorkin et al. (1990) e de d'Avila (2003) foram realizadas para que fosse possível a simulação dos painéis de concreto armado submetidos a corte puro. Resumidamente, foram necessários:

- a) o estudo das condições de contorno a serem aplicadas aos painéis para a simulação numérica do estado de corte puro;
- b) o estudo sobre o comportamento do tensor de tensões e de deformações dos painéis com taxas de armadura iguais nas duas direções e com taxas diferentes;
- c) a modificação do processo de convergência interna do elemento (já que, como é mostrado nos próximos capítulos, a fissura é considerada como uma linha de descontinuidade que separa um domínio contínuo em duas partes, necessitando-se do equilíbrio de tensões das mesmas com as obtidas na linha de descontinuidade). Ou seja, é realizado um ciclo de iterações interno até que as forças do concreto e do aço calculadas no elemento finito e as forças do concreto e do aço calculadas na fissura estejam em equilíbrio;
- d) a forma de ensaiar painéis submetidos a corte puro com o modelo de Dvorkin et al. (1990). Nesse caso específico, a fissura está na direção da diagonal do elemento, com suas extremidades interceptando dois nós do mesmo, sendo que Dvorkin engloba apenas os casos das fissuras atravessando as bordas superior e inferior dos elementos ou atravessando as bordas laterais. Isto implica em mudanças em algumas matrizes originais do modelo do autor;

- e) a simulação de painéis de concreto simples para o melhor entendimento do processo, criando-se um critério rígido de tolerância para a convergência interna das forças do elemento e da fissura;
- f) o estudo do processo iterativo e dos detalhes do modelo de transferência de tensão por aderência para a simulação de painéis de concreto armado;
- g) a determinação do número de fissuras a ser utilizado em cada geração de fissuras (instantes em que são formadas novas fissuras), para cada direção do painel, bem como cálculo do número de fissuras real para a comparação com os resultados experimentais;
- h) a composição dos resultados do modelo de transferência de tensão por aderência que fornece, dentre outros, os escorregamentos e aberturas de fissura para cada direção em que está disposta a armadura. Isto é, como o modelo de transferência de tensão é aplicado na direção das barras da armadura, é necessária a composição das grandezas obtidas nas direções normal (a mesma da tensão principal) e tangencial à fissura, através de relações trigonométricas;
- i) a verificação da correta contribuição das forças fornecidas pelas barras de aço nas diagonais do elemento. Como o modelo de transferência de tensão foi desenvolvido originalmente para tirantes, ele fornece sempre reações positivas (tração) para cada direção e, por conseguinte, para as diagonais do painel. No caso dos painéis analisados, uma diagonal do mesmo está tracionada, mas a outra está comprimida. Portanto, são necessários alguns ajustes para que as forças do aço sejam corretamente contabilizadas no contorno dos elementos;
- j) a inclusão no tensor de deformações das componentes nas direções globais, no centro do elemento finito, devido à aderência com as barras de aço. Originalmente, o centro do elemento possui apenas a componente tangencial de deformação devido à distorção de corte puro orientada a  $45^\circ$ . Porém, como as barras da armadura possuem aderência com o concreto e deformam-se nas duas direções globais, elas induzem no mesmo também as deformações nessas direções, completando-se todo o tensor de deformações para o concreto;
- k) o cálculo da correta distorção angular do painel, bem como o cálculo e padronização das diversas curvas-resposta obtidas para diferentes grandezas, possibilitando-se a comparação com as curvas experimentais dadas por Vecchio (1981);
- l) estudo sobre a influência e a determinação de alguns dos diversos parâmetros a serem fornecidos na entrada de dados do programa, já que muitos deles não foram fornecidos diretamente nos ensaios experimentais de Vecchio (1981);
- m) implementação de dois modelos diferentes de efeito de pino (rigidez adicional dada pela resistência transversal ao corte das barras de aço), bem como o estudo e análise da influência dos mesmos nas respostas dos painéis;
- n) modificações nos passos supracitados para a simulação numérica de painéis com taxas de aço diferentes nas duas direções. Neste caso, as grandezas são diferentes para cada direção global, necessitando-se de alguns ajustes no cálculo do número

de fissuras, na composição de escorregamentos, aberturas de fissura na direção normal, entre outros.

- o) estudo e implementação da variação do ângulo das fissuras e tensões principais para painéis com taxas diferentes de armadura nas duas direções. Para este tipo de painel, o ângulo das deformações e tensões principais variam ao longo do processo e as fissuras vão mudando a sua orientação também. Isto ocorre porque os escorregamentos são diferentes para cada uma das direções globais;
- p) estudo e implementação de dois modelos de engrenamento dos agregados (*aggregate interlock*) para a consideração do atrito causado pelo deslizamento relativo entre as duas faces da fissura.

O capítulo seis apresenta a análise numérica contendo os ensaios realizados e a comparação com estudos experimentais. Finalmente, o capítulo sete traz as conclusões e a análise da pesquisa realizada, bem como sugestões para pesquisas futuras. Além disso, são descritos a seguir alguns pontos da metodologia empregada para a melhor organização e compreensão do trabalho:

A **questão de pesquisa** deste trabalho é: qual é a resposta numérica, usando-se um modelo de fissura incorporada, para a simulação de painéis de concreto armado quadrados submetidos a corte puro, com diferentes taxas de armadura, com a inclusão do efeito de pino e quais são as diferenças obtidas em relação aos ensaios experimentais de Vecchio et al. (1981)?

O **objetivo principal** desta pesquisa é estudar o comportamento de painéis quadrados de concreto armado submetidos ao corte puro, armados com diferentes taxas de armadura, considerando-se também o efeito de pino (rigidez adicional devido à resistência transversal ao corte das barras de aço), e a comparação dos resultados obtidos com os ensaios experimentais de Vecchio et al. (1981).

Os **objetivos secundários** desta pesquisa são: a determinação da magnitude do efeito de pino nas curvas-resposta dos painéis simulados, determinando-se a sua influência nesse tipo de estrutura; simulações complementares para a verificação do correto funcionamento do algoritmo (testes de painel de concreto simples e de tipos de malha) e análises complementares sobre os resultados obtidos (influência do mecanismo de engrenamento de agregados, análise de parâmetros utilizados e comparações de cargas última dos painéis obtidas com diferentes modelos).

A **hipótese** deste trabalho é que a inclusão do efeito de pino na simulação de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro faz com que melhores resultados sejam obtidos e que as curvas tensão-deformação sejam mais próximas das experimentais, atingindo-se um maior nível de carga última, em comparação com a simulação numérica sem a inclusão deste efeito.

## 2 PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS AO CORTE

Neste capítulo é apresentado o estudo teórico-experimental feito por Vecchio (1981) sobre o comportamento de painéis de concreto armado submetidos ao corte. Também é apresentada uma breve revisão dos modelos numéricos encontrados na literatura capazes de simular o comportamento destes painéis.

### 2.1 PESQUISA EXPERIMENTAL REALIZADA POR VECCHIO

Vecchio, em sua tese de Doutorado, ensaiou ao todo 30 painéis de concreto armado, sendo a maioria deles ensaiados sob o estado de corte puro. A relação destes painéis está na tabela 1.

Tabela 1: painéis submetidos a corte puro ensaiados por Vecchio (1981)

Painel		Armadura Longitudinal		Armadura Transversal		Concreto	
		$\rho_l$	$f_{yl}$ (MPa)	$\rho_t$	$f_{yt}$ (MPa)	$\epsilon_0$	$f_c'$ (MPa)
GRUPO I	PV2	0,00183	428	0,00183	428	0,00225	23,5
	PV3	0,00483	662	0,00483	662	0,00230	26,6
	PV16	0,00740	255	0,00740	255	0,00200	21,7
	PV5	0,00742	621	0,00742	621	0,00250	28,3
	PV4	0,01056	242	0,01056	242	0,00250	26,6
	PV9	0,01785	455	0,01785	455	0,00280	11,6
	PV14	0,01785	455	0,01785	455	0,00223	20,4
	PV6	0,01785	266	0,01785	266	0,00250	29,8
	PV7	0,01785	453	0,01785	453	0,00250	31,0
PV8	0,02616	462	0,02616	462	0,00250	29,8	
GRUPO II	PV13	0,01785	248	-	-	0,00270	18,2
	PV18	0,01785	431	0,00315	412	0,00220	19,5
	PV12	0,01785	469	0,00446	269	0,00250	16,0
	PV19	0,01785	458	0,00713	299	0,00215	19,0
	PV20	0,01785	460	0,00885	297	0,00180	19,6
	PV10	0,01785	276	0,00999	276	0,00270	14,5
	PV26	0,01785	456	0,01009	463	0,00185	21,3
	PV21	0,01785	458	0,01296	302	0,00180	19,5
	PV11	0,01785	235	0,01306	235	0,00260	15,6
	PV22	0,01785	458	0,01524	420	0,00200	19,6
	PV1	0,01785	483	0,01680	483	0,00220	34,5
PV27	0,01785	442	0,01785	442	0,00190	20,5	

(fonte: VECCHIO, 1981, p. 52)

Onde,  $\rho_l$  e  $\rho_t$  são as taxas de armadura nas direções longitudinal e transversal;  $f_{yl}$  e  $f_{yt}$  são as tensões de escoamento dessas armaduras;  $f_c'$  é a resistência à compressão do concreto e  $\epsilon_0$  é a deformação do cilindro de concreto numa tensão de compressão igual a  $f_c'$ .

Os painéis de concreto armado testados são quadrados, de lado 890mm e com uma espessura de 70mm, reforçados com duas camadas de armadura. As barras da malha de armadura são sempre paralelas aos lados do painel e em duas direções perpendiculares. Se a área de aço for menor em uma das duas direções, esta direção será indicada como “transversal”. Um cobrimento de 6mm é deixado entre as faces do corpo de prova e a armadura longitudinal. A armadura é composta por telas metálicas de barras lisas soldadas em uma distribuição ortogonal. O diâmetro e espaçamento das barras variam de painel a painel. Os painéis são colocados sobre uma placa rígida de aço que será o suporte para os testes e os corpos de prova são emparafusados (VECCHIO, 1981).

Dois tipos de concreto foram usados para todos os corpos de prova, sendo um concreto mais resistente, colocado numa banda de 100mm ao redor de todo o perímetro, e um concreto menos resistente no resto do painel. Este procedimento é usado para que a fissuração não aconteça nas regiões de transferência de tensão do aparelho ao painel, causando fissuração das bordas do mesmo.

Segundo Vecchio (1981), na determinação das propriedades dos materiais, cilindros de dimensões 150 x 300mm foram feitos junto com os painéis. Três cilindros foram feitos com o concreto de maior resistência e outros sete com o concreto menos resistente. Nos dias em que os painéis foram ensaiados, os três cilindros com o concreto mais resistente e mais quatro cilindros com o concreto menos resistente foram testados para a determinação do  $f_{ck}$ . Os outros três cilindros restantes foram testados no dia seguinte para a determinação das características da relação “tensão-deformação” do concreto em compressão. Para cada painel, a resistência dos cilindros de concreto (determinada no dia em que o painel é testado) e a deformação na tensão de pico são verificadas. Quanto à armadura, as características da relação “tensão-deformação” foram determinadas através de um trecho destacado da malha original. Estes trechos de malha possuíam tipicamente 200mm de comprimento. Para impor-se as características de tensão-deformação da armadura, as malhas dos painéis restantes foram tratadas a calor antes do uso. Para cada painel, seis a oito trechos de armadura foram testados para determinar a tensão de escoamento do aço transversal e longitudinal. A tensão média

obtida é reportada nos ensaios. O valor do módulo de elasticidade do aço é próximo a 200.000 MPa para todos os painéis ensaiados.

O equipamento de ensaio consta de uma composição quadrada de vigas de aço de seção caixão, que foi projetada para suportar as forças de macacos hidráulicos usados para fornecer o carregamento aos painéis testados. Esta composição possui 3,5m de altura, com uma largura de 3,4m e 0,60m de profundidade, conforme mostrado na figura 2(a). O painel é carregado através de forças aplicadas pelos macacos hidráulicos nas chamadas “chaves de corte”, que são mecanismos presos ao longo de todo o perímetro do painel, com a função de transmitir os esforços fornecidos pelo aparelho de testes como forças tangenciais às bordas do painel.

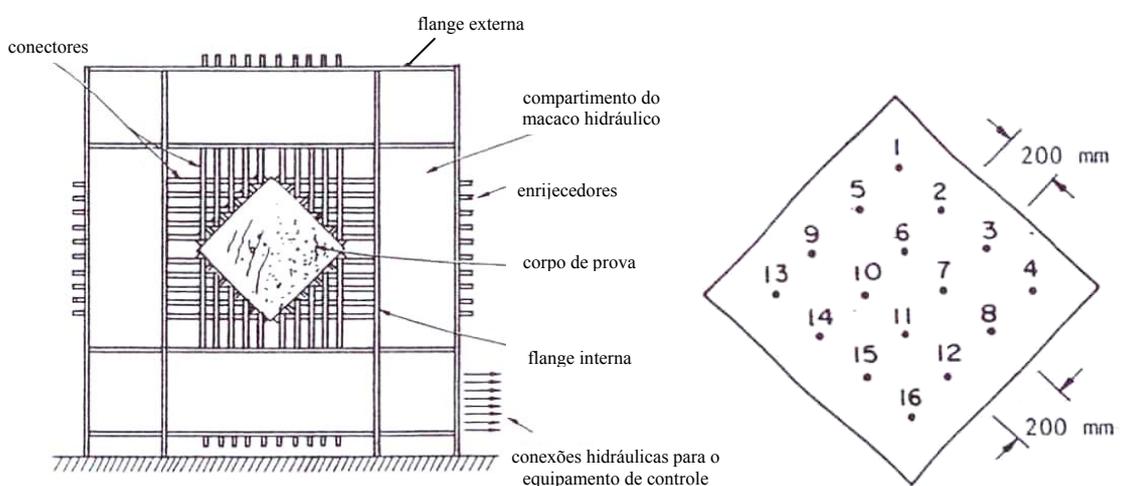


Figura 2: (a) aparelho de ensaio dos painéis e (b) localização dos pontos de medida (VECCHIO, 1981, p. 44 e 47)

Pernas construídas dentro da composição a tornam estável e auto-portante. As medições de deformação foram feitas usando-se medidores mecânicos, “Zurich Gauges”, sensíveis a deslocamentos de 0,01mm. Dezesesseis pontas de medições com espaçamento de 200mm foram instaladas em cada face do painel. Esta rede de pontas é mostrada na figura 2(b) e os medidores monitoraram a deformação no painel através da medição de deslocamento relativo entre as pontas, sobre os comprimentos conhecidos dos medidores. A cada estágio de carregamento, as deformações foram lidas nas direções longitudinal, transversal e nas diagonais do painel, em cada lado do mesmo. No total, 84 deformações foram tomadas para cada estágio de carga. Aproximadamente 10 a 15 minutos foram necessários para um conjunto de leituras completas. Além disso, dois LVDT’s foram usados para monitorar os

deslocamentos das bordas dos painéis e alguns transdutores de pressão foram instalados em vários pontos do sistema para monitorar as pressões hidráulicas do mesmo, indicando possíveis perdas de pressão não desejadas. Em cada estágio de carga, as fissuras no concreto foram marcadas, medidas e fotografadas (VECCHIO, 1981).

Foram realizados 22 ensaios de corte puro, dividindo-se os painéis em dois grupos distintos. Os dois grupos são diferenciados pela taxa de armadura empregada. No Grupo I a porcentagem de aço foi variada, mas sempre com a taxa transversal de aço igual à longitudinal. Para os testes do Grupo II, a taxa de armadura longitudinal foi mantida constante enquanto a taxa de armadura transversal foi variada. Alguns painéis do Grupo I foram testados com a mesma taxa de armadura, porém variando-se a resistência à compressão do concreto.

Nos dois grupos de painéis, uma larga faixa de resistências do concreto foi obtida. Isto se deveu ao fato de que os painéis foram montados e ensaiados em tempos diferentes. O aço também apresentou uma larga faixa na tensão de escoamento, apesar das malhas haverem sido fornecidas pelo mesmo fabricante e tratadas a calor com o mesmo processo. Uma vez tratado, o aço apresentou uma resposta tensão-deformação muito dúctil (VECCHIO, 1981).

No Grupo I, as fissuras iniciais formaram-se a  $45^\circ$  em relação às barras de armadura, em tensões de corte variando de  $0,33\sqrt{f'_c}$  (MPa) a  $0,50\sqrt{f'_c}$  (MPa). Com o aumento da carga, o número e a abertura média das fissuras aumentou, porém não mudando a direção das mesmas. No último estágio de carga, a falha ocorreu pelo escoamento das barras de aço longitudinal e/ou transversal ou por falência de corte do concreto antes do escoamento das barras. Em alguns casos, houve falhas de arrancamento nas chaves de corte, fratura das barras, entre outros.

De acordo com Vecchio (1981), no Grupo II, as fissuras iniciais formaram-se em um ângulo de  $45^\circ$  com as barras da armadura na mesma faixa de tensões dos testes do Grupo I. Em desacordo com o Grupo I, as fissuras começaram a mudar a sua orientação e tornaram-se um pouco mais alinhadas com a direção longitudinal, conforme o aumento do incremento de carga. Esta mudança foi detectável após o escoamento da armadura transversal. A falha última para o Grupo II se deu por três tipos diferentes de mecanismos: o escoamento das armaduras longitudinal e transversal; falha do concreto depois do escoamento da armadura transversal,

mas antes do escoamento da armadura longitudinal; e, falha do concreto antes do escoamento de ambas armaduras. Quatro painéis testados apresentaram o escoamento das armaduras longitudinal e transversal: PV4, PV6, PV11 e PV16. Tipicamente estes painéis apresentaram uma resposta muito dúctil, com aberturas de fissura de 2,5mm ou mais.

Oito painéis, todos pertencentes ao Grupo II, sofreram falha por deslizamento de corte do concreto após o escoamento da armadura transversal, porém antes do escoamento da armadura longitudinal: PV10, PV12, PV13, PV18, PV19, PV20, PV21 e PV26. Foi observado fendilhamento e lascamento severos no concreto.

Os painéis PV9, PV22 e PV27 possuíram uma falha por deslizamento das barras antes do escoamento das armaduras longitudinal e transversal. A resposta de corte destes painéis foi tipicamente muito mais rígida e frágil do que a vista nos painéis que falharam por escoamento da armadura. Uma ruptura frágil e explosiva de corte ocorreu paralela às barras de armadura (VECCHIO, 1981).

Alguns painéis falharam prematuramente pelo arrancamento das chaves de corte que são usadas para transferir as tensões do aparelho de teste para os painéis. Este comportamento ocorreu nos painéis PV1, PV5, PV7, PV8 e PV14. Este tipo de falha ocorreu principalmente nos primeiros testes, onde uma mistura uniforme de concreto foi usada em toda a extensão dos painéis. Nos ensaios posteriores, um concreto mais resistente foi usado na periferia dos painéis para evitar este tipo de falha.

Nem todos os dados fornecidos por Vecchio foram medidos durante os ensaios. Alguns deles foram obtidos analisando-se os Círculos de Mohr de Tensões e Deformações para cada nível de carga medido, separadamente para cada um dos nove sub-elementos no painel, bem como para ele, como um todo. Além disso, as duas faces do mesmo foram analisadas separadamente para a verificação de empenamento. As leituras foram limitadas às deformações médias nas direções longitudinal, transversal e diagonais:  $\varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ . Essas deformações foram usadas para definir os círculos de Mohr das deformações médias para cada estágio de carga, conforme mostrado na figura 3(a). Com quatro medições de deformação realizadas, pode-se construir um Círculo e os demais parâmetros podem ser determinados. Para o Círculo das tensões, foram calculadas as tensões médias no concreto nas direções longitudinal e transversal ( $f_l$  e  $f_t$ ) através das deformações longitudinal e transversal das armaduras. Dada a

tensão tangencial aplicada  $V$ , o Círculo de Tensões fica definido conforme a figura 3(b) (VECCHIO, 1981).

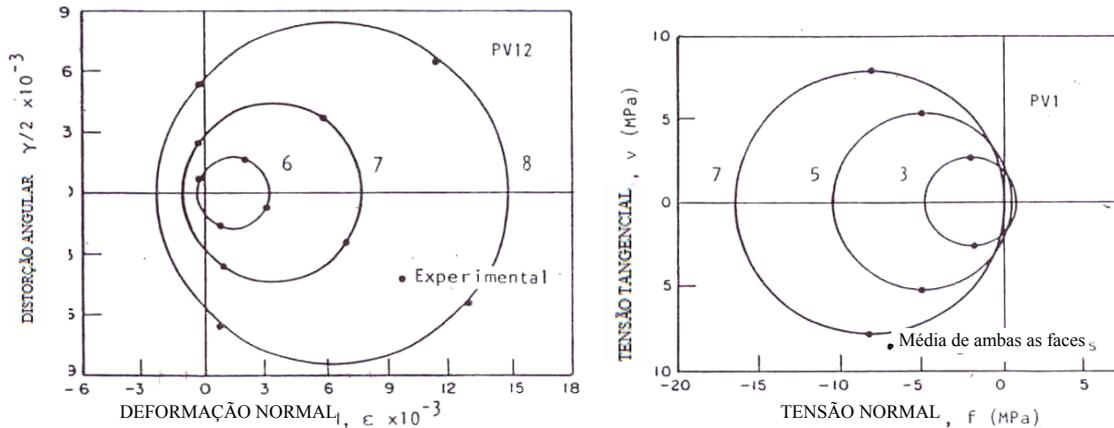


Figura 3: exemplos de: (a) Círculos de deformação e (b) Círculos de tensão (VECCHIO, 1981, p. 73 e 74)

Foi constatada uma certa dispersão nos valores obtidos entre as diversas deformações medidas na face norte (frente do painel) em relação as medidas na face sul (verso do painel), indicando uma variação nas deformações na direção da espessura dos painéis e, por conseguinte, sugerindo uma flexão fora do plano.

Os principais dados de tensão e deformação de compressão ( $f_d : \varepsilon_d$ ), obtidos de todos os painéis testados foram combinados num gráfico. Foram plotados os pontos normalizados  $f_d/f_c \times \varepsilon_d/\varepsilon_0$  e o resultado mostrou a dispersão dos pontos, conforme mostrado na figura 4. Nesta figura também é mostrado um modelo parabólico típico para a resposta de um cilindro de concreto.

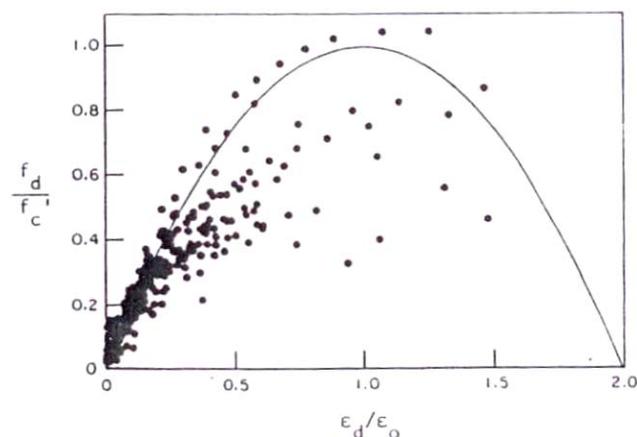


Figura 4: dados obtidos das tensões e deformações principais de compressão (VECCHIO, 1981, p. 78)

Analisando os resultados para um dado nível de deformações, Vecchio concluiu que o nível de tensões era tipicamente maior se a distorção de corte associada era relativamente pequena, ou seja, **a máxima deformação de corte tem um efeito degradante no comportamento tensão-deformação de compressão do concreto**. Portanto ele introduziu um parâmetro “ $\beta$ ” na curva tensão-deformação parabólica comumente usada para o concreto. A expressão modificada é mostrada na equação (1) (VECCHIO, 1981).

$$f_d = f_c' \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right) - \beta \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Onde  $f_c'$  é a resistência à compressão do concreto e  $\varepsilon_0$  é a deformação do cilindro de concreto correspondente, na tensão de compressão de pico. Com a redução dada pelo fator  $\beta$ , a tensão e deformação de pico passam a ser dadas, respectivamente, por:  $f_p = f_c'/\beta$  e  $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\beta$ . Este fator foi determinado a partir dos inúmeros ensaios realizados, através de ajuste de curva, conforme mostrado na figura 5, resultando na expressão (2), onde  $\gamma_m$  é a distorção máxima de corte.

$$\beta = 0,58 + 0,27 \left( \frac{\gamma_m}{\varepsilon_d} \right) \quad (2)$$

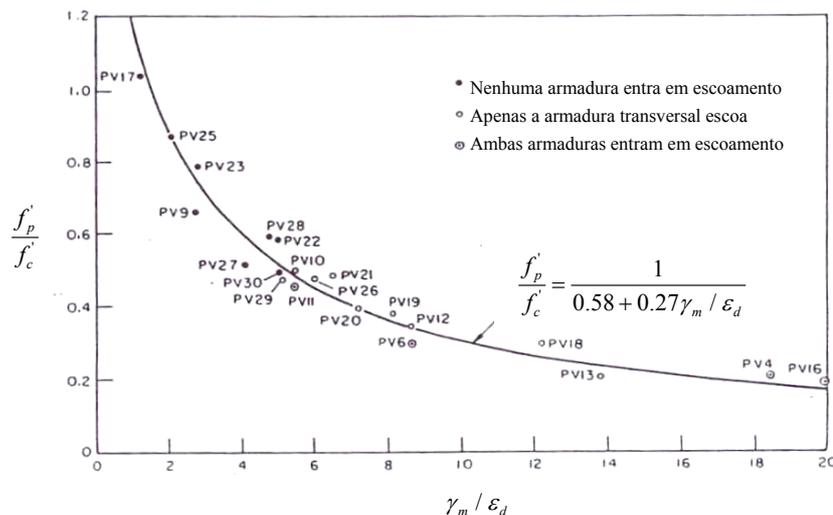


Figura 5: pico da tensão principal de compressão x razão de deformação (VECCHIO, 1981, p. 82)

Também foi constatado que a resposta pós-pico não decai tão rapidamente como indica a equação (1). Então, para a resposta pós-pico, foi usada outra expressão. Isto será melhor tratado no item 2.2 que indica o algoritmo de cálculo usado por Vecchio.

Em relação à diagonal tracionada, Vecchio observou uma importante contribuição do fenômeno chamado “*tension stiffening*”, que é a contribuição de resistência do concreto entre fissuras. Para avaliar este comportamento, foram plotadas curvas, para cada painel, relacionando a deformação da diagonal tracionada,  $\epsilon_{dt}$ , com o valor normalizado da tensão na diagonal tracionada,  $f_{dt}/f_{cr}$ , onde  $f_{cr}$  é a tensão de fissuração do concreto teórica. Antes da fissuração, a relação entre tensão e deformação da diagonal tracionada é linear e, após o início da fissuração,  $f_{dt}$  diminui em relação a  $f_{cr}$ , mas os valores são consideravelmente dispersos, conforme mostra a figura 6(a). **Valores razoavelmente altos de  $f_{dt}$  foram obtidos mesmo para deformações mil vezes maiores que a deformação de fissuração.** Para casos em que houve o escoamento de ambas armaduras, os valores experimentalmente determinados para  $f_{dt}$  foram próximos de zero. Isto se deve ao fato de que, num tirante de concreto armado, por exemplo, a tensão de tração aplicada deve ser igual à tensão de tração no concreto mais a tensão de tração do aço. Como esta tensão aplicada não pode superar o limite de escoamento da armadura, se a resposta do aço é bi-linear com patamar de escoamento, quando a tensão externa aplicada chega a este limite, ela é toda absorvida pela armadura, que entra em escoamento, fazendo com que a tensão de tração no concreto caia a zero.

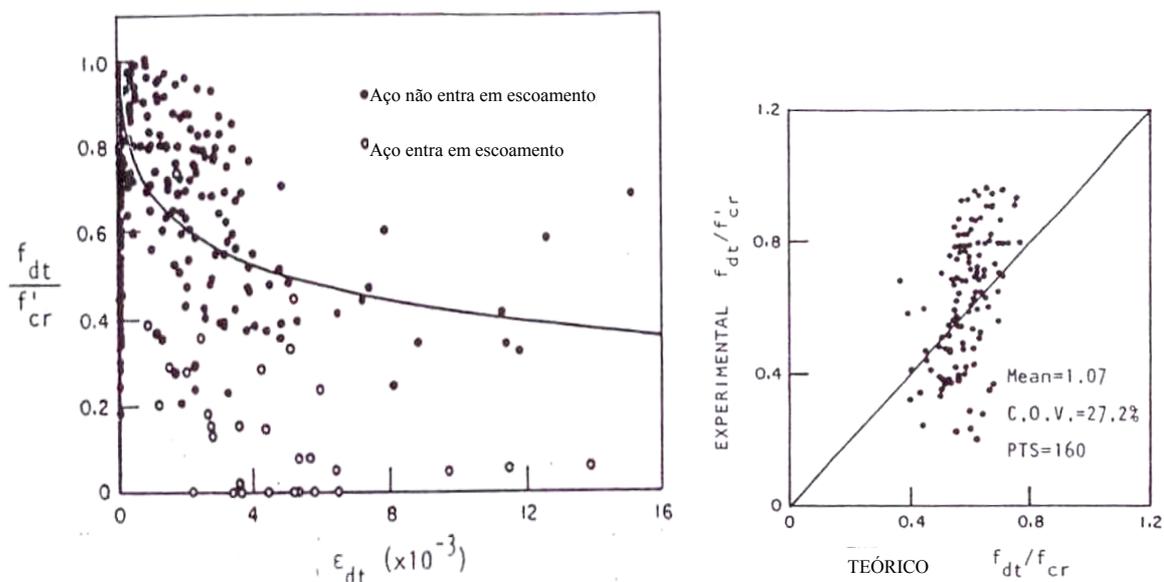


Figura 6: (a) dados obtidos de tensão-deformação de tração e (b) comparação entre valores experimentais e previstos de tensões de tração (VECCHIO, 1981, p. 86 e 89)

Caso  $f_{dt}$ , não seja limitado pela tensão de escoamento do aço, então é usada a equação (3) para descrever-se o comportamento (VECCHIO, 1981).

$$f_{dt} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{dt}}{0,005}}} \quad (3)$$

Apesar destas considerações, os valores entre a teoria e os resultados experimentais mostraram-se bastante dispersos, conforme mostrado na figura 6(b). Portanto, Vecchio (1981, p.89) coloca que:

Felizmente, as tensões de tração são tipicamente um pequeno componente do Círculo de tensões total. Conseqüentemente, grandes erros nas tensões de tração previstas não necessariamente resultarão em grandes erros no comportamento teórico previsto de um painel.

**Quanto à tensão de fissuração dos painéis, foi tomada igual à tensão de tração no concreto correspondente à carga na qual as fissuras foram primeiramente detectadas.** Para a determinação desta tensão, a influência da armadura foi negligenciada. A expressão utilizada para  $f_{cr}$  é dada na equação (4).

$$f_{cr} = 0,33\sqrt{f'_c} \text{ (MPa)} \quad (4)$$

Esta expressão é usada pelo Código ACI para determinar a tensão de tração principal correspondente à fissuração da diagonal. A comparação entre os resultados previstos e obtidos são mostrados na figura 7. É interessante observar que alguns painéis testados em 1981 apresentaram altas tensões de fissuração. **Estes painéis foram testados com 7 dias de idade, com o concreto ainda úmido.**

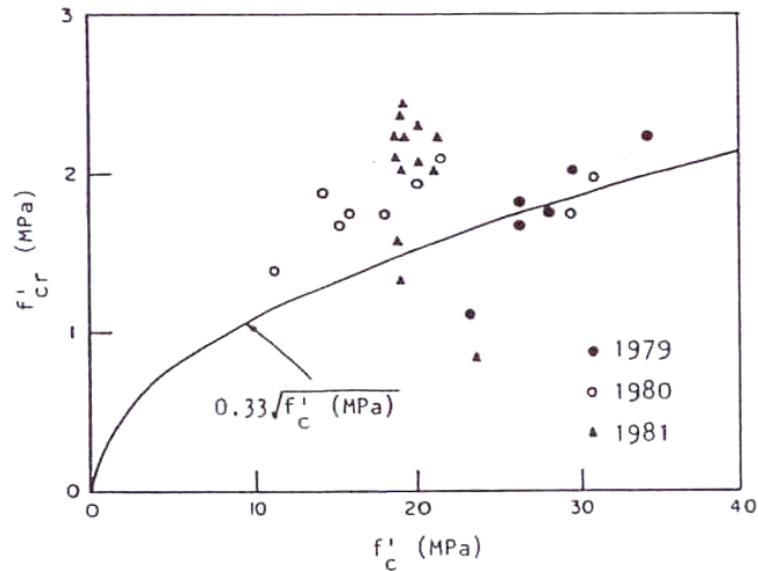


Figura 7: tensões de fissuração x resistência do cilindro (VECCHIO, 1981, p. 91)

## 2.2 MODELO ANALÍTICO DE VECCHIO

Um modelo analítico foi desenvolvido por Vecchio para prever a resposta do concreto armado em tensões normais e tangenciais no plano. O modelo é baseado nas equações de equilíbrio e de compatibilidade e usa relações tensão-deformação realísticas para o aço e para o concreto. As tensões e deformações são consideradas em termos de valores médios sob uma área finita. Uma relação tensão-deformação bi-linear é considerada para a armadura e, para o concreto, foi empregada a relação obtida dos ensaios experimentais (VECCHIO, 1981).

A figura 8 mostra um painel submetido a corte puro, onde o comportamento antes da fissuração pode ser previsto através das teorias da elasticidade. O concreto no painel será submetido a uma tensão compressiva na direção de uma diagonal e a uma tensão trativa na outra diagonal. Quando a tensão de resistência à tração do concreto é atingida, formam-se fissuras diagonais. Depois da fissuração, as tensões de corte são resistidas pelo concreto da diagonal comprimida e pelo aço disposto em duas direções ortogonais.

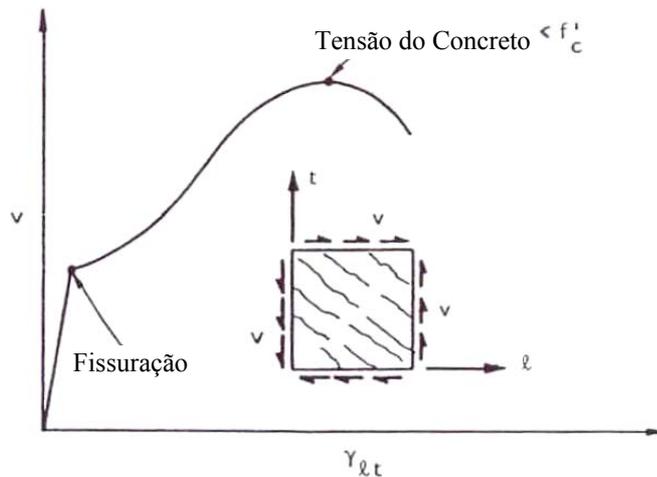


Figura 8: painel carregado em corte puro (VECCHIO, 1981, p. 5)

### 2.2.1 Definição do Problema

O painel mostrado na figura 9(a) representa parte de uma estrutura de concreto armado. O painel é pequeno se comparado à estrutura e as tensões podem ser consideradas uniformes. Os eixos de referência foram escolhidos de forma a coincidir com a direção das barras da armadura. O carregamento no painel é formado por uma tensão normal uniforme nas direções longitudinal ( $f_{nl}$ ) e transversal ( $f_{nt}$ ) e por uma tensão de corte  $V$ . Estas tensões são aplicadas nas bordas do painel, sendo as condições de equilíbrio usadas para determinar as tensões no interior do mesmo. A figura 9(b) mostra o Círculo de Mohr das tensões. Considera-se que as bordas permanecem planas e paralelas, sendo a deformação do painel mostrada na figura 9(c). Dado um certo tipo de problema, deve-se determinar o círculo de tensões dado um círculo de deformações ou vice-versa (VECCHIO, 1981).

Foi considerado que para cada estado de deformação haja apenas um estado possível de tensão. Portanto, situações onde o histórico de cargas é importante não foram tratadas. Apenas tensões e deformações médias foram consideradas para evitar saltos descontínuos devidos às fissuras. Além disso, considerou-se que o concreto e o aço são submetidos às mesmas deformações médias. Isto **não** significa que o concreto e o aço estão perfeitamente aderidos um no outro, ou seja, pode ocorrer escorregamento local entre as barras de armadura e o

concreto. As armaduras longitudinais e transversais são bem distribuídas no painel e são definidas pelas suas taxas em relação à seção transversal (VECCHIO, 1981).

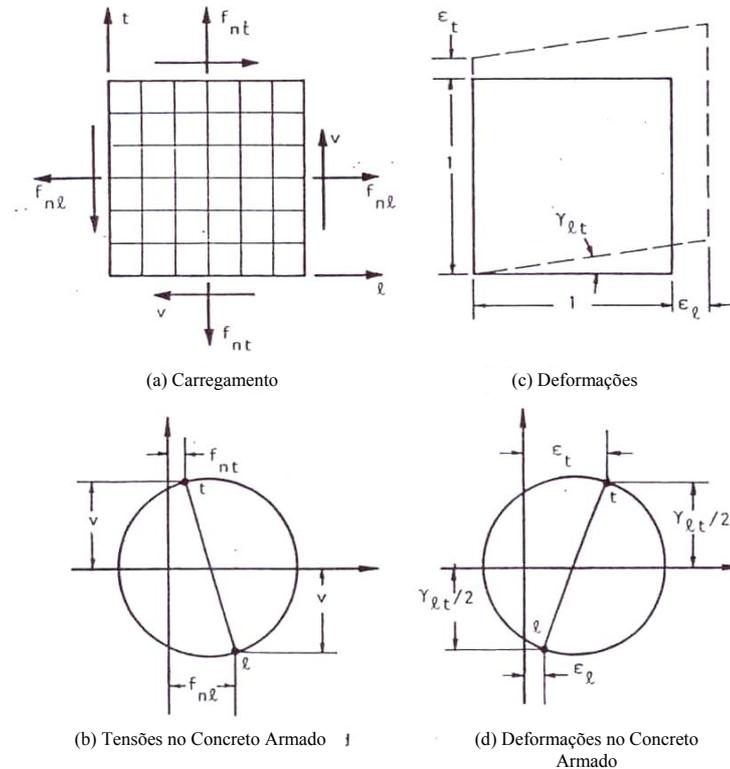


Figura 9: condições de tensão e deformação para o painel (VECCHIO, 1981, p. 19)

Na determinação da resposta dos painéis, condições de equilíbrio, compatibilidade e relações “tensão-deformação” foram usadas. Considerou-se a situação onde as condições de deformação para um dado painel de concreto armado são conhecidas e é requerido o correspondente estado de tensões, conforme mostrado na figura 10. A armadura e o concreto são tratados separadamente e a sua união é dada por requerimentos de compatibilidade, onde as deformações do concreto e do aço são iguais à deformação do painel. O equilíbrio requer que as forças no concreto e na armadura devem ser tais que contra-balancem as forças aplicadas na estrutura. Se forem aplicadas forças consideradas uniformes e não-variantes, então é possível considerar-se condições de equilíbrio em termos de tensão uniforme agindo na área da seção transversal do painel. Para considerar condições de equilíbrio em termos de tensões, é necessário converter as tensões na armadura em tensões equivalentes agindo no painel. Por exemplo, a força na armadura longitudinal, correspondente a uma tensão no aço de  $f_{sl}$ , pode ser considerada como uma tensão de  $\rho_l * f_{sl}$  agindo na área do painel, sendo  $\rho_l$  a taxa de

armadura longitudinal. Em termos de tensões equivalentes, o equilíbrio requer que as tensões do aço completem as tensões do concreto para que sejam iguais às tensões totais no painel. Se ambas tensões, no concreto e aço, podem ser determinadas de suas deformações, o problema pode ser solucionado. Para tanto, as relações tensão-deformação requerem dados experimentais (VECCHIO, 1981).

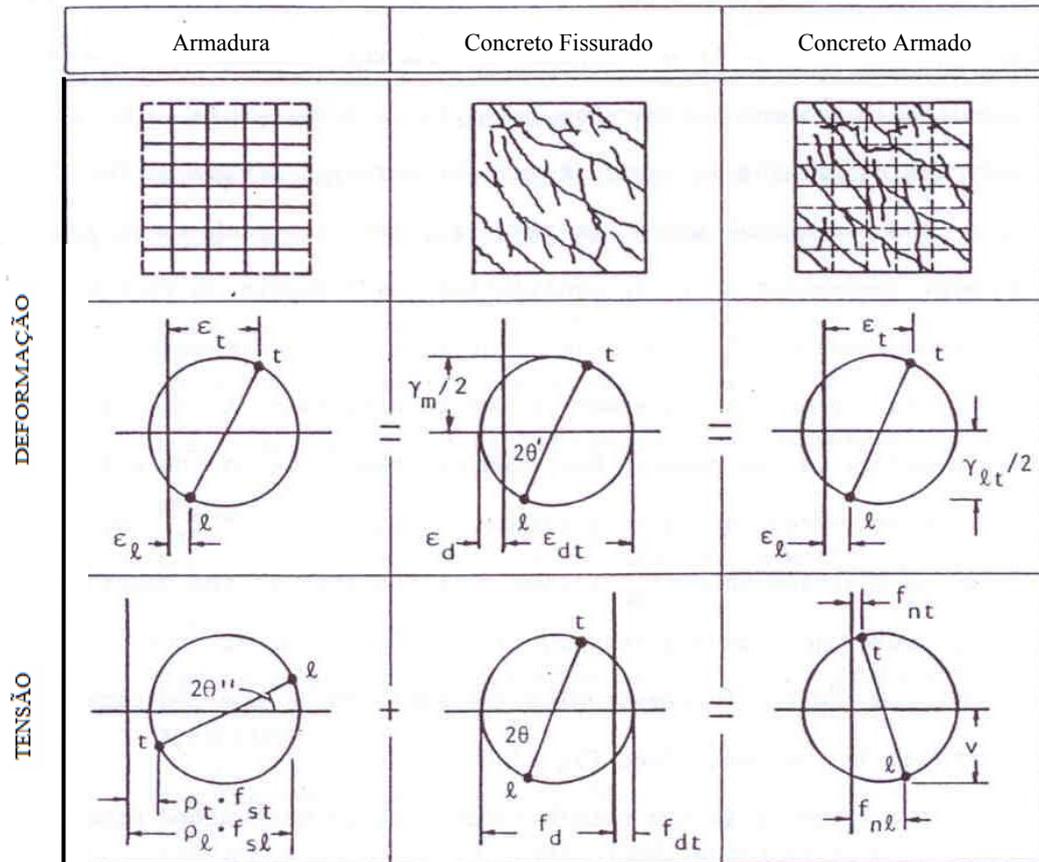


Figura 10: condições de tensão e deformação para o concreto, o aço e o painel (VECCHIO, 1981, p. 21)

As deformações no aço, concreto e na estrutura inteira são todas definidas através do Círculo de Mohr de deformações, conforme mostrado na figura 11(a). Nesta figura são representadas a deformação principal de compressão  $\epsilon_d$ , a deformação principal de tração  $\epsilon_{dt}$ , a deformação normal na direção longitudinal (tração positiva)  $\epsilon_l$ , a deformação normal na direção transversal (tração positiva)  $\epsilon_t$ , a deformação de corte  $\gamma_l$  relativa às direções longitudinal e transversal, a deformação máxima de corte  $\gamma_m$  e o ângulo entre a direção principal da deformação de compressão e a direção longitudinal  $\theta'$ .

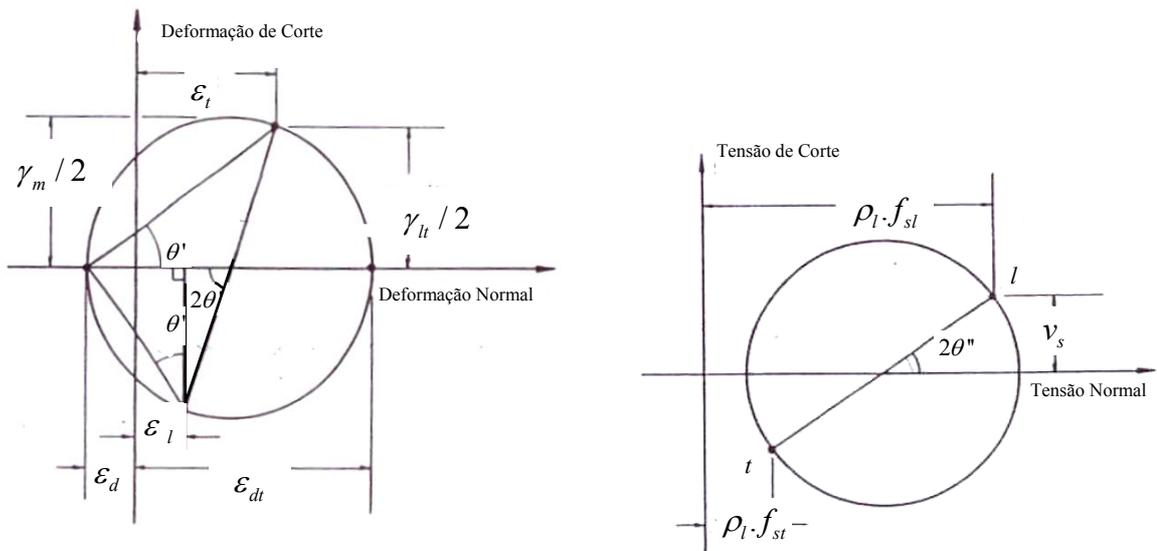


Figura 11: Círculos de Mohr de (a) deformações para o painel e (b) tensões na armadura (VECCHIO, 1981, p. 24 e 25)

Vecchio (1981) coloca que o círculo de deformações pode ser definido por três variáveis independentes. Uma escolha apropriada seria as deformações mostradas na figura 9, chamadas de  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_t$  e  $\gamma_{lt}$ . Porém, por uma questão computacional, é mais conveniente usar-se os parâmetros  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_d$  e  $\theta'$ . Através destes parâmetros, a geometria do círculo é dada pelas relações mostradas nas equações (5) a (9).

$$\gamma_{lt} = \frac{2(\varepsilon_d + \varepsilon_l)}{\tan \theta'} \quad (5)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\gamma_{lt}}{2 \tan \theta'} - \varepsilon_d \quad (6)$$

$$\varepsilon_{dt} = \varepsilon_d + \varepsilon_l + \varepsilon_t \quad (7)$$

$$\gamma_m = \varepsilon_d + \varepsilon_{dt} \quad (8)$$

$$\tan^2 \theta' = \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_l}{\varepsilon_d + \varepsilon_t} \quad (9)$$

As condições de equilíbrio são verificadas com as tensões na armadura, com as tensões no concreto e com as relações entre estas tensões e as tensões no painel. O Círculo de Mohr para as tensões atribuídas à armadura é mostrado na figura 11(b) e é caracterizado pela tensão normal na direção longitudinal (tração positiva)  $\rho_l * f_{sl}$ , pela tensão normal na direção transversal (tração positiva)  $\rho_t * f_{sl}$ , tensão de corte  $V_s$  nos planos longitudinal e transversal e pelo ângulo  $\theta''$  entre a direção da tensão de tração principal e a direção longitudinal.

As condições de tensão no concreto são descritas pelo Círculo de Mohr mostrado na figura 12 e o campo de tensões do concreto é caracterizado pela tensão principal de compressão (compressão positiva)  $f_d$ , tensão principal de tração (tração positiva)  $f_{dt}$ , tensão normal  $f_l$  na direção longitudinal (compressão positiva), pela tensão normal na direção transversal (compressão positiva)  $f_t$ , tensão de corte  $V_c$  nos planos longitudinal e transversal e o ângulo  $\theta$  entre a direção da tensão principal de compressão e a direção longitudinal (VECCHIO, 1981).

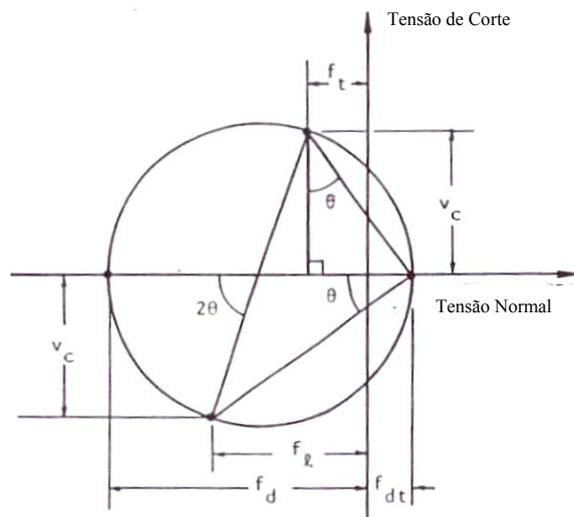


Figura 12: Círculo de Mohr de tensões no concreto (VECCHIO, 1981, p. 26)

Relações ligando as tensões médias às deformações médias são requeridas para a armadura e para o concreto. Elas podem ser significativamente diferentes das relações tensão-deformação locais determinadas em testes padrões. Estas relações médias dependem mais da maneira na qual os valores locais variam dentro do painel. Esta variação será uma função da ligação entre o concreto e o aço e da distribuição das barras de aço no interior do concreto. Na realidade, as relações tensão-deformação do concreto e do aço não são completamente independentes uma da outra, porém, por simplicidade, serão consideradas como independentes. A tensão normal média nas barras longitudinais,  $f_{sl}$ , é suposta depender de apenas um parâmetro de deformação, que é a deformação normal nestas barras  $\epsilon_l$ . Posteriormente é considerado que a tensão de corte média no plano normal às barras, resistida por elas, é zero. Esta suposição não permite a possibilidade que as tensões locais de corte existam nas barras nas vizinhanças da fissura, isto é, não há “*Dowel Action*” (VECCHIO, 1981).

A resposta tensão-deformação do concreto em painéis de concreto armado fissurado pode diferir substancialmente da resposta tensão-deformação determinada através de um cilindro de teste de concreto. A diferença aumenta pelo fato de que um cilindro de concreto não pode representar as condições de deformação encontradas no concreto fissurado. Mais especificamente, o concreto armado fissurado é frequentemente submetido a deformações de tração muito maiores na direção normal ao campo de compressão, conforme mostrado na figura 13 e isto pode influenciar significativamente na resposta.

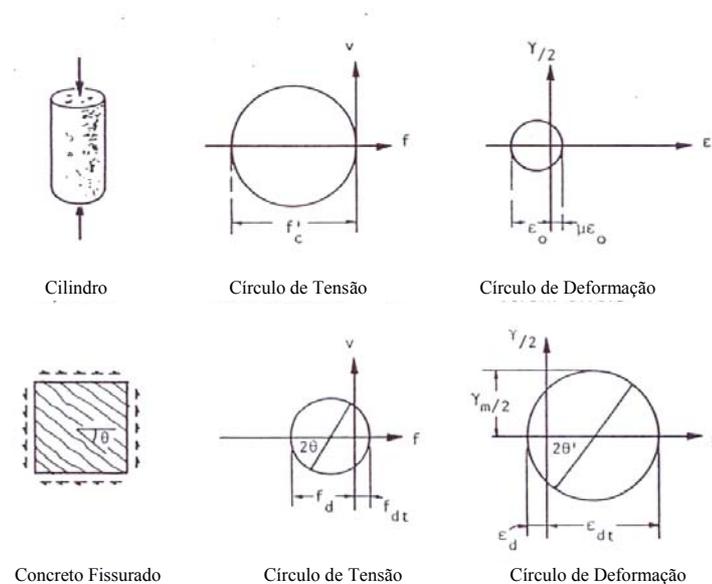


Figura 13: comparação de condições de tensões e deformações para um cilindro de teste e para um painel de concreto fissurado (VECCHIO, 1981, p. 33)

Pelos fatos apresentados, o necessário é uma relação entre as tensões médias e deformações médias para o concreto fissurado. Se as deformações médias no concreto armado fissurado são conhecidas, deve-se determinar as tensões médias. Achar estas tensões envolve a avaliação de três variáveis:  $\theta$ ,  $f_d$  e  $f_{dt}$ . A suposição fundamental da Teoria do Campo de Compressão é que “a direção que é submetida às maiores tensões médias compressivas coincidirá com a direção que é submetida às maiores deformações médias compressivas”. Então, é considerado que  $\theta = \theta'$ . É também considerado que a principal tensão compressiva,  $f_d$ , e a principal tensão trativa,  $f_{dt}$ , podem ser relacionadas às condições de deformação média no concreto (VECCHIO, 1981).

### 2.2.2 Previsões do Modelo

Este item mostra o algoritmo de Vecchio (1981) usado para a previsão da resposta dos painéis, através de um método analítico. Será mostrado o algoritmo de solução para um painel submetido a corte puro. Os dados de entrada são:

$f_c'$  = resistência do cilindro de concreto à compressão;

$\varepsilon_0$  = deformação de pico do concreto;

$\rho_l$  = taxa de armadura longitudinal;

$\rho_t$  = taxa de armadura transversal;

$f_{yl}$  = tensão de escoamento da armadura longitudinal;

$f_{yt}$  = tensão de escoamento da armadura transversal;

$E_s$  = módulo de elasticidade do aço.

O processo para a obtenção da resposta é dado pelos seguintes passos:

- 1) escolha do valor da deformação principal de compressão,  $\varepsilon_d$ ;
- 2) estimativa da deformação longitudinal,  $\varepsilon_l$ ;
- 3) estimativa do ângulo de inclinação da deformação principal,  $\theta'$ ;

4) determinação das outras deformações pelas equações (10) a (13);

$$\gamma_{lt} = \frac{2(\varepsilon_d + \varepsilon_l)}{\tan \theta'} \quad (10)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\gamma_{lt}}{2 \tan \theta'} - \varepsilon_d \quad (11)$$

$$\varepsilon_{dt} = \varepsilon_d + \varepsilon_l + \varepsilon_t \quad (12)$$

$$\gamma_m = 2\varepsilon_d + \varepsilon_l + \varepsilon_t \quad (13)$$

5) determinação das tensões, de acordo com as equações (14) a (19);

$$f_{sl} = \varepsilon_l E_s \leq f_{yl} \quad e \quad f_{st} = \varepsilon_t E_s \leq f_{yt} \quad (14)$$

$$f_l = \rho_l f_{sl} \quad e \quad f_t = \rho_t f_{st} \quad (15)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_0}{\beta} \quad e \quad f_p = \frac{f_c'}{\beta} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_d \leq \varepsilon_p : f_d &= f_c' \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right) - \beta \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_d > \varepsilon_p : f_d &= f_p \left\{ 1 - \left[ \frac{(\varepsilon_d - \varepsilon_p)}{(2\varepsilon_0 - \varepsilon_p)} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
E_c &= 2f_c' / \varepsilon_0; \quad \varepsilon_{cr} = f_{cr} / E_c \\
\varepsilon_{dt} \leq \varepsilon_{cr} : f_{dt} &= \varepsilon_{dt} E_c \\
\varepsilon_{dt} > \varepsilon_{cr} : f_{dt} &= \frac{f_{cr}}{1 + (\varepsilon_{dt} / 0,005)^{0,5}} \\
f_{dt} &\leq \rho_l (f_{yl} - f_{sl}) \text{sen}^2 \theta + \rho_t (f_{yt} - f_{st}) \text{cos}^2 \theta
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{f_d - f_t}{f_d - f_l}} \right) \tag{19}$$

6) checar a compatibilidade: se  $\theta = \theta'$  passa para 7), senão volta para o passo 3);

7) checar equilíbrio: se  $f_{d'} = f_d$  passa para 8, senão volta ao passo 2);

$$f_{d'} = f_l + f_t + f_{dt} \tag{20}$$

8) determinar a tensão de corte;

$$v = (f_d - f_t) \tan \theta \tag{21}$$

9) incrementar  $\varepsilon_d$  e repetir o processo.

Onde,

$\varepsilon_d, \varepsilon_{db}, \varepsilon_l, \varepsilon_t$  = deformações das diagonais comprimida, tracionada e deformações longitudinal e transversal;

$\gamma_{lb}, \gamma_m$  = distorções de corte normal e máxima;

$E_s, E_c$  = módulos de Young do aço e do concreto;

$f_{sb}, f_{st}$  = tensões no aço nas direções longitudinal e transversal;

$f_b, f_t$  = tensões no concreto nas direções longitudinal e transversal causadas pelo aço;

$\rho_l, \rho_t$  = taxas de armadura longitudinal e transversal;

$\varepsilon_p, f_p$  = deformação e tensão de pico do concreto à compressão;

$\varepsilon_0, f_c'$  = deformação de ruptura do cilindro de concreto e tensão correspondente ( $f_{ck}$ );

$\varepsilon_{cr}, f_{cr}$  = deformação de tração do concreto no início da fissuração e tensão correspondente;

$f_d, f_{dt}$  = tensões no concreto nas diagonais comprimida e tracionada;

$\theta', \theta$  = ângulos entre a direção da deformação principal e a horizontal e entre a direção da tensão principal e a horizontal;

O modelo analítico considera uma fissuração distribuída e uniforme e não trata localmente as características da fissura e dos materiais nesta região.

## 2.3 OUTROS MODELOS NUMÉRICOS

Como já foi ressaltado, Vecchio, juntamente com outros pesquisadores como Michael P. Collins e Derek Lai, desenvolveram um vasto estudo (Vecchio (1981); Vecchio e Lai (2004); Collins, Vecchio e Mehlhorn (1985); Vecchio e Collins (1986); Vecchio (2000); Vecchio (2001); Vecchio et al. (2001)) sobre elementos de concreto armado fissurados. Teorias importantes como a *Modified Compression-Field Theory* (Teoria do Campo de Compressão Modificada) e o *Disturbed Stress Field Model* (Modelo do Campo de Tensão Alterado) foram

essenciais para a compreensão e desenvolvimento do presente trabalho. Além disso, os autores apresentaram bons modelos de *aggregate interlock* (engrenamento dos agregados) e estudos detalhados sobre o comportamento das fissuras nos elementos de concreto fissurado.

Outros autores também desenvolveram estudos sobre o mesmo tema, conforme é descrito a seguir.

Gupta (1986) publicou um artigo sobre as armaduras necessárias de flexão e membrana para placas e cascas. Neste trabalho, ele descreveu as solicitações e comportamento de um elemento de flexão e membrana e apresentou as equações de equilíbrio para a determinação das armaduras necessárias para o projeto do elemento.

Villela (1993) usou a teoria do campo de compressão modificada desenvolvida por Vecchio, para a análise de perfis retos de concreto armado e protendido submetidos a esforços transversais cisalhantes. Foi realizado um procedimento iterativo para a verificação de seções laminares de concreto armado e protendido através da composição de elementos de chapa. Usou-se, portanto, a formulação do painel microfissurado de concreto armado.

Zhang e Hsu (1998) ensaiaram cinco painéis de concreto armado de altas resistências (em média, 100MPa) submetidos à tração/compressão biaxial para analisar melhor o comportamento das curvas tensão x distorção dos painéis e das curvas de compressão do concreto. Comparações com painéis previamente ensaiados de resistências menores (de 42MPa e 65MPa) foram feitas para uma melhor análise da influência da resistência do concreto nas leis constitutivas deste material. Outros 9 painéis foram submetidos a corte puro, sendo o comportamento simulado por alguns modelos teóricos.

Martín-Pérez e Pantazopoulou (2001) apresentaram um estudo sobre os efeitos da fissuração em peças de concreto armado, incluindo os mecanismos do efeito de pino, ligação aço-concreto e engrenamento dos agregados. A formulação matemática apresentada usa a aproximação não-linear para a fissuração e armadura distribuídas em elementos de concreto. Eles também simularam alguns painéis de Vecchio (1981) com o seu modelo matemático e apresentaram uma boa concordância de resultados.

He e Kwan (2001) fizeram um estudo em vigas de concreto armado e apresentam modelos para o efeito de pino (como viga repousando em leito elástico de concreto) e engrenamento dos agregados que foram importantes no desenvolvimento do presente trabalho.

Kwak e Kim (2001) apresentam um modelo analítico para simular estruturas planas submetidas ao corte, como painéis e paredes portantes. Baseado no conceito de deformação uniaxial equivalente, relações constitutivas para o concreto são apresentadas nos eixos de ortotropia, que coincidem com os ângulos das deformações principais. É descrito um critério de falha biaxial que mostra efeitos de ganho na resistência à compressão e de redução na resistência à tração do concreto para compressão biaxial e tração-compressão, respectivamente, sendo também considerado o fenômeno *tension stiffening* (rigidez adicional do concreto entre fissuras). As previsões do modelo de elementos finitos são comparadas com resultados experimentais, inclusive com alguns painéis ensaiados por Vecchio (1981). Os autores fizeram a combinação dos modelos de fissuras rotativas com o modelo de fissuras distribuídas e usaram elementos finitos isoparamétricos de 4 nós, com 2x2 pontos de Gauss.

Em outro trabalho, Kwak e Kim (2004) apresentaram este mesmo modelo, mas mostraram algumas comparações entre o uso dos métodos de Newton-Raphson e Comprimento de Arco para a solução do sistema global, além da comparação das respostas com e sem a redução da resistência à compressão do concreto (já que esta resistência diminui com o aumento da abertura das fissuras, sendo, inclusive, dado um fator de redução por Vecchio (1981), conforme mostrado na fórmula (2)).

Além disso, Kwak e Kim (2006) apresentam um estudo de painéis de concreto armado submetidos a trações biaxiais. É desenvolvido um modelo analítico para a simulação numérica de tração uniaxial e biaxial, onde é considerada a interação entre o aço e o concreto, incluindo o fenômeno *tension stiffening*, e realiza-se um estudo detalhado sobre o comportamento dos materiais após o início da fissuração. São comparados os resultados analíticos e experimentais para alguns painéis ensaiados.

Silva (2002) usou uma abordagem probabilista de ruptura de painéis tracionados de concreto armado de granulometria fina com telas soldadas. Ela colocou que a ruptura de materiais frágeis é fortemente dependente de sua heterogeneidade, do tamanho da amostra e da heterogeneidade das tensões. Foi usada uma abordagem probabilista, baseada no modelo de Weibull, para tratar da influência destes efeitos de heterogeneidade na resistência à tração de painéis compósitos de concreto de granulometria fina e telas soldadas.

Soltani, An e Maekawa (2003) e Soltani, An e Maekawa (2004) apresentaram um estudo para membranas de concreto armado submetidas a tensões gerais no plano. É um modelo numérico

iterativo que considera características locais e médias dos materiais, como escorregamento das barras da armadura, contribuição de resistência do concreto entre fissuras por aderência (*tension stiffening*), o efeito de pino (*dowel action*) das barras da armadura e o atrito entre as faces das fissuras (*aggregate interlock*). É um modelo bem completo e foi usado para a comparação com vários painéis de concreto armado (inclusive os de Vecchio (1981)) submetidos a estados planos de tensões, ensaiados experimentalmente. Os resultados numéricos obtidos foram muito bons e refletiram bem o comportamento experimental dos painéis. Foi mostrada também a influência dos micro-mecanismos da transferência de corte nos materiais, além da comparação entre a consideração das armaduras como sendo uma malha de arames ou uma malha de barras de aço.

Soltani, An e Maekawa (2005) também estudaram a influência dos efeitos de tamanho na resposta de elementos planos submetidos ao corte. É implementada neste trabalho uma aproximação do campo de tensões locais exatas para a verificação da dependência / independência do tamanho nas relações tensão x deformação. Nesse estudo, por exemplo, foi variado o diâmetro das barras de aço, tamanho de partículas de agregado, tamanho de corpos de prova, entre outros, para estudar-se a influência desses parâmetros nas respostas média e local da estrutura. Foi estudado também o comportamento de peças de concreto armadas com pouca armadura.

Souza (2004), em sua tese sobre a comparação entre vários métodos de cálculos de elementos de concreto armado, como o Método das Bielas e Tirantes, M.E.F e Método Corda-Painel, comentou sobre o comportamento de elementos de chapa, citando também autores e bibliografias consagrados no assunto, e mostra a determinação da armadura para estes elementos.

El-Ariss (2007) apresenta um modelo analítico para o efeito de pino no estudo de vigas de concreto armado. Ele ressalta a complexidade do fenômeno e a dificuldade da representação deste efeito. Em seu trabalho, há a comparação de resultados analíticos, com e sem efeito de pino, e experimentais para algumas vigas de concreto armado.

Chen e Bella (2006) publicaram, na Revista IBRACON de Estruturas, um estudo sobre o dimensionamento de elementos de superfície de concreto armado envolvendo membranas, placas e cascas. Há exemplos de aplicação muito interessantes neste trabalho, inclusive o

estudo de um elemento de membrana, envolvendo dimensionamento e avaliação de abertura de fissuras.

Manzoli et al. (2007 e 2008) apresentam uma metodologia para modelar elementos estruturais de concreto armado tridimensionais através de elementos finitos com descontinuidade incorporada, no contexto da aproximação contínua de descontinuidades fortes. O concreto armado é tratado como um material compósito, composto por uma matriz de concreto com feixes de fibras de aço orientadas em diferentes direções.

Oliver et al. (2008) apresentam uma nova metodologia na modelagem de falha material, em peças de concreto armado bi-dimensionais. A teoria é usada como uma aproximação metodológica para o modelo de concreto armado como um material compósito, constituído por uma matriz plana de concreto reforçada com dois feixes de fibras longas ortogonais embutidas no mesmo. A matriz de falha é modelada segundo o modelo de dano contínuo, equipada com relaxamento de deformação, considerando que os efeitos dos feixes de fibras são modelados por meio de modelos constitutivos fenomenológicos criados para reproduzir o comportamento axial não-linear, bem como os efeitos de deslizamento de vínculos e efeitos de pino. Conceitos da Teoria da Mistura foram usados para simular o concreto armado como um material compósito constituído por uma matriz de concreto com fibras embutidas (barras de aço), orientadas em duas direções ortogonais. O efeito da matriz plana de concreto e das barras de aço no material compósito é capturado por modelos constitutivos fenomenológicos contínuos, criados para reproduzir a falência do material da matriz, pelo comportamento axial não-linear das fibras, bem como pelos efeitos de interface entre os materiais, como o efeito de pino e escorregamento dos vínculos.

Jazra (2008) realizou um estudo do dimensionamento de chapas de concreto armado. Neste estudo, foram usados dois modelos para a determinação da resposta de chapas de concreto armado: o método de Baumann e o *Modified Compression-Field Theory* (que também é apresentado neste trabalho). Os autores simularam vários painéis de concreto armado, inclusive alguns ensaiados por Vecchio (1981).

Em dois trabalhos, Rahal (Rahal (2008) e Rahal (2010)) também estudou o comportamento de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro, realizando um estudo sobre a avaliação do módulo de corte do painel fissurado e da resistência última de corte. Basicamente, ele apresentou uma fórmula para o cálculo do módulo de corte do painel fissurado, para a

representação da curva tensão tangencial x distorção entre os trechos após o início da fissuração e antes do escoamento das armaduras ou esmagamento do concreto. Esta fórmula previu bastante bem o comportamento de muitos painéis de concreto armado ensaiados, inclusive os de Vecchio (1981), apresentando uma boa relação com os resultados experimentais. Também foi apresentada uma fórmula para a estimativa da capacidade última do painel ao corte. Nesses estudos foram mostradas as comparações entre diversos métodos para a previsão de carga última e modo de ruptura dos painéis, com os resultados experimentais obtidos por diversos pesquisadores. Estudos comparativos avaliando-se a resistência última dos painéis em função da variação das taxas e tensões de escoamento das armaduras também foram apresentados.

Menin, Trautwein e Bittencourt (2009) também realizaram um estudo numérico de vigas de concreto armado e apresentaram o modelo analítico desenvolvido por Vecchio e Collins para a previsão do comportamento de elementos de concreto armado fissurados. Foram feitas comparações entre os resultados experimentais e simulações computacionais, utilizando-se o modelo de fissuração distribuída, de vigas de concreto armado.

Através da pesquisa bibliográfica realizada, é possível, nesse contexto, apresentar o modelo utilizado e implementado no presente trabalho para a simulação numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro.

### 3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS E MODELO DA ARMADURA

Os modelos constitutivos empregados para simular o comportamento do concreto e do aço, assim como o modelo de elementos finitos para representar a armadura, são descritos sucintamente nos itens a seguir.

#### 3.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

Os itens 3.1.1 e 3.1.2 apresentam as relações constitutivas para o concreto intacto e para o concreto fissurado usadas para a simulação deste material nos painéis de concreto armado.

##### 3.1.1 Concreto Intacto

Como os painéis estudados não possuem tensões de compressão significativas para a maior parte da curva tensão tangencial x distorção angular, será usado o modelo elástico-linear neste trabalho para representar o comportamento do concreto intacto, sendo esquematicamente mostrado na figura 14. O concreto intacto à tração também será representado com um comportamento elástico-linear, conforme esquematizado na mesma figura.

Neste caso, a curva tensão-deformação é uma reta com início na origem dos eixos cartesianos e fim no ponto em que é atingida a resistência à tração / compressão do concreto.

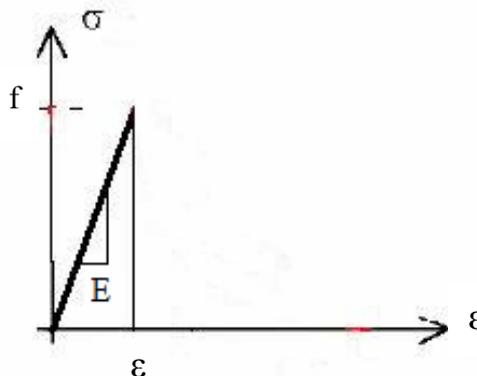


Figura 14: comportamento elástico-linear do concreto intacto

### 3.1.2 Concreto Fissurado

São apresentados, a seguir, os modelos constitutivos empregados para representar a transferência de tensões na fissura através do concreto. Há a transferência de tensões normais à fissura, devido ao amolecimento, e a transferência de tensões cisalhantes entre as faces da fissura causadas pelo atrito das partículas de concreto (*aggregate interlock*).

#### 3.1.2.1 Transferência de Tensões Normais à Fissura

São apresentados dois modelos de amolecimento para o concreto, para a consideração da resistência adicional do mesmo entre fissuras.

##### 3.1.2.1.1 Amolecimento Linear

O modelo utilizado é o de Hillerborg et al. (1976) e está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura, já que a área limitada pela curva *tensão transmitida através da fissura x abertura da fissura* ( $\sigma_c \times w_c$ ) é igual à energia específica de fratura do material ( $G_f$ ) (ver figura 15).

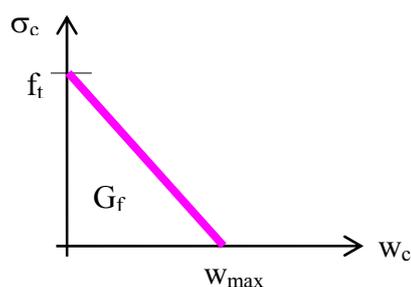


Figura 15: amolecimento linear

Assim, o valor da máxima abertura de fissura que permite a transferência de tensão,  $w_{max}$ , é dado pela fórmula (22).

$$w_{\max} = 2G_f / f_t \quad (22)$$

A energia de fratura é definida, segundo o Código Modelo CEB-FIB 1990, CEB (1993), para o diâmetro de agregados de 16 mm ( $G_{f0} = 0,03 Nmm / mm^2 (= 30 N / m)$ ), através da fórmula (23). Onde,  $G_{f0}$  é o valor básico de energia de fratura e depende do valor do diâmetro máximo dos agregados e  $f_{cm0}$  é um valor de referência da resistência à tração do concreto.

$$G_f = G_{f0} \left( \frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} = 5,986 (f_{cm})^{0,7} \quad (23)$$

Por recomendação do Código Modelo,  $f_{cm0} = 10 MPa$ . Observando-se as expressões anteriores, verifica-se que o modelo necessita de um único parâmetro, a resistência à compressão média do concreto  $f_{cm}$  (em MPa), como informação a ser fornecida externamente, para a obtenção da energia de fratura em [N/m].

### 3.1.2.1.2 Amolecimento Exponencial

Como no modelo linear, este modelo também está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura. A expressão que define a curva de amolecimento é dada, segundo Dvorkin et al. (1990), pela fórmula (24).

$$\sigma_c = f_t e^{-aw_c} \quad (24)$$

sendo  $a = 0,95 f_t / G_f$ .

O valor da máxima abertura de fissura que permite a transferência de tensão,  $w_{max}$ , é determinado impondo-se um limite para o fator  $exp(-aw_c) = 0,05$ , conforme figura 16.

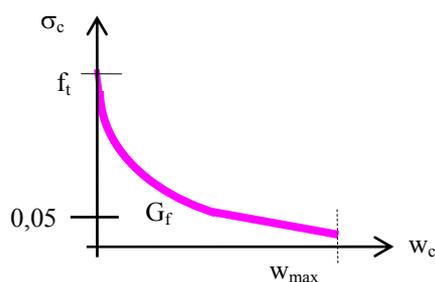


Figura 16: amolecimento exponencial

### 3.1.2.2 Transferência de Tensões Tangenciais à Fissura

Em painéis submetidos a corte puro em que as taxas de armadura horizontal e vertical são diferentes, há um deslizamento relativo entre as faces das fissuras. Isto ocorre porque as armaduras transferem ao painel tensões diferentes nas duas direções globais, fazendo com que as tensões e deformações principais possuam um ângulo de inclinação diferente de  $45^\circ$ . Este deslizamento provoca um atrito entre as paredes da fissura, causado principalmente pelos agregados do concreto. Quanto maior for a abertura das fissuras, maior será este deslizamento. As tensões de corte na superfície da fissura podem ser determinadas por vários tipos de modelos, como equilíbrio de tensões locais ou por modelagem do atrito entre as paredes da fissura (“*aggregate interlock*”). São descritos a seguir dois modelos para a determinação das tensões e/ou dos deslizamentos das faces das fissuras. Uma observação importante é que o modelo de transferência de tensão por aderência (descrito no capítulo 4) também calcula o deslizamento das faces da fissura, não sendo necessário o uso dos modelos descritos neste capítulo. Portanto, o objetivo do trabalho será analisar as diferenças ocorridas na curva resposta dos painéis e no valor calculado para o deslizamento na fissura entre o modelo de transferência de tensão por aderência e os modelos descritos neste capítulo.

#### 3.1.2.2.1 Modelo de He e Kwan (2001)

Segundo He e Kwan (2001), muitos pesquisadores simplesmente incorporam o *aggregate interlock* na análise realizada, através do uso de um módulo de corte, para este efeito, como sendo um fator de retenção menor que 1 ( $\mu < 1$ ) multiplicado pelo módulo de corte elástico do

concreto intacto. Porém, também é ressaltado que, em estudos de Walraven e de outros pesquisadores, deve ser incluída a abertura de fissura normal no modelo, pois quanto maior for esta grandeza, menor será o atrito entre as faces da fissura. Portanto, é sugerido que o módulo de corte para o *aggregate interlock* seja calculado de acordo com a expressão (25), onde  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1c})$  é uma estimativa da abertura de fissura,  $\varepsilon_1$  é a deformação de tração na direção principal do painel,  $\varepsilon_{1c}$  é a deformação no pico da tensão de tração e  $G_0$  é o módulo de corte elástico do concreto intacto. Assim calcula-se a tensão de corte na superfície da fissura. A curva de variação do módulo de corte de He e Kwan em função da abertura da fissura (estimada por  $\varepsilon_1 - \varepsilon_{1c}$  ou calculada de outra forma) é mostrada na figura 17.

$$\tau = G_a \gamma; \quad G_a = \mu \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{1c}}{0,004} \right)^2 G_0 \quad (25)$$

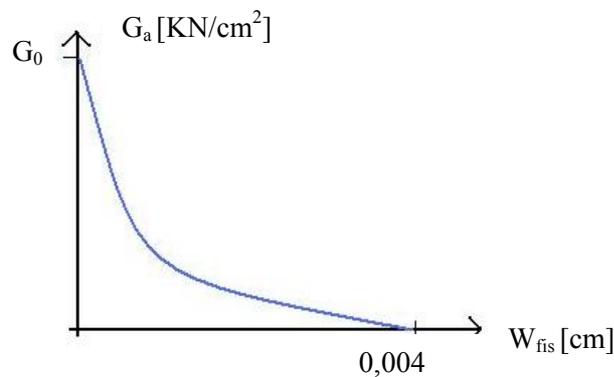


Figura 17: variação do módulo de corte de He e Kwan

#### 3.1.2.2.2 Modelo de Tensão de Corte na Fissura Usado por Vecchio e Lai (2004)

Um modelo para o cálculo da tensão de corte nas faces da fissura é apresentado por Vecchio e Lai (2004) para o uso em seu modelo matemático analítico, na simulação de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro. Este método também foi usado por Menin, Trautwein e Bittencourt (2009) para o estudo de vigas de concreto armado.

Através da contribuição de resistência do concreto entre fissuras (*tension stiffening*), pode ser determinada a tensão média da diagonal tracionada do painel, porém, localmente nas fissuras, esta tensão média cai aproximadamente a zero, sendo que ali há um aumento das tensões no aço para que o carregamento imposto ao painel possa ser contrabalançado. Dessa forma, se a armadura intercepta as paredes das fissuras em ângulos oblíquos (como é o caso dos painéis deste trabalho), são induzidas tensões de cisalhamento nas faces da fissura. Portanto, por equilíbrio local de tensões,  $v_{ci}$  pode ser determinada de acordo com a primeira fórmula de (26). De acordo com o *Disturbed Stress Field Model*, pode-se calcular a distorção média de corte, causada pelo deslizamento, conforme a segunda equação de (26) que, multiplicada pelo espaçamento médio entre fissuras, fornece o valor do deslizamento causado.

Além disso, pode-se usar outro método para o cálculo do deslizamento: determinando-se  $v_{ci}$ , escolhe-se um modelo de *aggregate interlock* para a determinação deste deslizamento, inserindo-se esta tensão tangencial da face da fissura no modelo selecionado (foi escolhido, neste trabalho, o *Lai-Vecchio Model* (Vecchio e Lai (2004)), cujas equações também são mostradas em (26)). Conforme a última equação em (26), é tomado o maior deslizamento entre os calculados por cada um dos métodos.

$$\begin{aligned}
 v_{ci} &= \rho_l (f_{scl} - f_{sl}) \cos \theta_\sigma \operatorname{sen} \theta_\sigma - \rho_t (f_{sct} - f_{st}) \operatorname{sen} \theta_\sigma \cos \theta_\sigma \\
 \delta_{s1} &= s_m \gamma_s = s_m (\gamma_{lt} \cos 2\theta_\sigma + (\varepsilon_t - \varepsilon_l) \operatorname{sen} 2\theta_\sigma) \\
 \text{Lai-Vecchio: } \delta_{s2} &= \delta_2 \sqrt{\frac{\psi}{1-\psi}}; \psi = \frac{v_{ci}}{v_{c\max}}; v_{c\max} = 0,18 \frac{\sqrt{f'_c}}{0,31 + \frac{24w_{fis}}{a+16}}; \\
 \delta_2 &= \frac{0,5v_{c\max} + v_{c0}}{1,8w_{fis}^{-0,8} + (0,234w_{fis}^{-0,707} - 0,2)f_{cc}}; v_{c0} = \frac{f_{cc}}{30}; \\
 \delta_s &= \begin{cases} \delta_{s1}, & \text{se } \delta_{s1} > \delta_{s2} \\ \delta_{s2}, & \text{se } \delta_{s2} > \delta_{s1} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Onde,  $\rho_l$  e  $\rho_t$  são as taxas de armadura nas direções globais;  $f_{sl}$  e  $f_{st}$  são as tensões médias no aço nas duas direções globais;  $f_{scl}$  e  $f_{sct}$  são as tensões locais do aço na fissura nas duas direções globais;  $\theta_\sigma$  é o ângulo entre as tensões principais e a horizontal;  $\varepsilon_l$  e  $\varepsilon_t$  são as deformações médias nas direções globais do elemento;  $\gamma_{lt}$  é a distorção do painel;  $\gamma_s$  é a

distorção causada pelo escorregamento na face da fissura;  $\delta_s$  é o deslizamento na face da fissura;  $s_m$  é o espaçamento médio de fissuras (perpendicular às mesmas);  $v_{ci}$  é a tensão de corte na superfície das fissuras;  $v_{cmax}$  é a máxima tensão de corte que pode ser resistida na fissura;  $w_{fis}$  é a abertura normal da fissura;  $f'_c$  é a resistência à compressão do concreto;  $a$  é o tamanho máximo da partícula de agregado e  $f_{cc}$  é a resistência cúbica do concreto.

## 3.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Nos itens 3.2.1 e 3.2.2 são apresentados os modelos constitutivos usados no trabalho para a armadura ao longo do elemento e para a armadura na fissura (efeito de pino). A transferência de tensão por aderência entre o concreto entre fissuras e a armadura será descrita no item 4.2.

### 3.2.1 Armadura ao Longo do Elemento

De acordo com d'Avila (2003), o modelo constitutivo implementado para simular o comportamento das barras de aço que compõem a armadura ao longo do elemento pode ser considerado elasto-plástico com endurecimento linear. Usa-se um modelo unidimensional já que, no modelo de elementos finitos empregado para simular a armadura, num modelo de armadura incorporada, as barras de aço ao longo do elemento resistem apenas a esforços normais na direção de seu próprio eixo, de acordo com a figura 18.

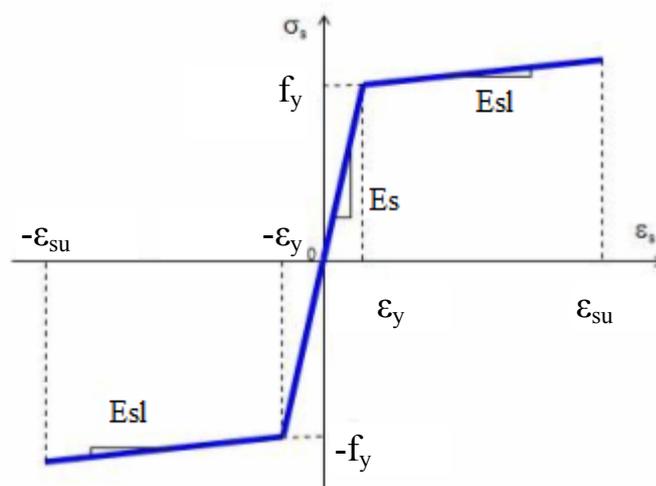


Figura 18: modelo constitutivo do aço ao longo do elemento

### 3.2.2 Armadura na fissura (Efeito de Pino)

Na região das fissuras, o aço é submetido a deformações transversais em relação ao eixo da barra, relacionadas aos mecanismos de corte e flexão das barras causados pela distorção angular do painel (efeito de pino), conforme mostrado na figura 19. Dois modelos diferentes de efeito pino foram implementados neste trabalho e estão detalhados a seguir.

O efeito de pino para este tipo de estrutura é muito importante e não pode ser negligenciado. Vecchio (1981) e Oliver et al. (2008) ressaltam a importância desse efeito. O Boletim 230 do Código Modelo CEB 1996 (CEB-230 (1996, p. 122)) coloca que o efeito de pino torna-se ativo quando a fissuração é de maior importância, normalmente onde a capacidade última de carga é importante e que é um fenômeno muito localizado, **a menos se uma armadura regular é acompanhada por um sistema de fissuração regular, com cargas regularmente distribuídas (típico caso dos painéis a corte puro).**

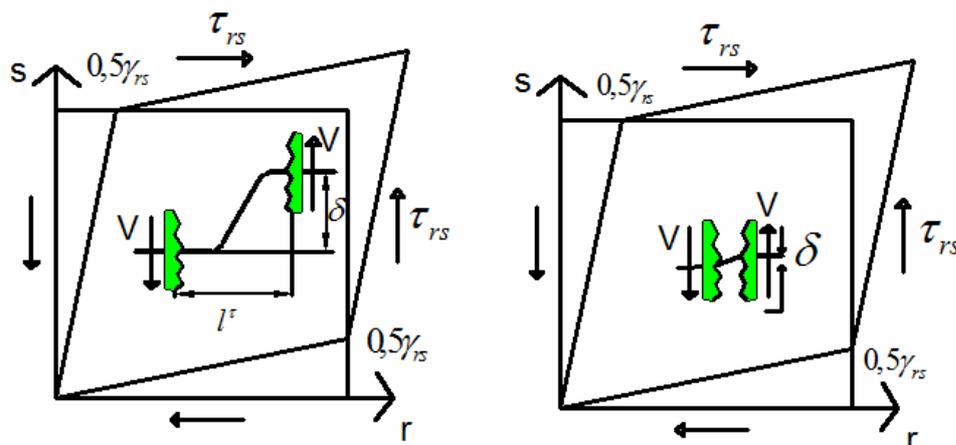


Figura 19: efeito de pino (a) devido à flexão da barra na abertura de fissura e (b) devido ao corte direto da barra (baseada em OLIVER et al., 2008, p. 337)

#### 3.2.2.1 Modelo de Efeito de Pino Usado por Oliver et al. (2008) – MDA1

O primeiro modelo de efeito de pino usado no presente trabalho é baseado no modelo usado por Oliver et al. (2008), conforme é descrito abaixo.

O fortalecimento introduzido pelas barras em peças de concreto armado carregadas em corte tem sido bastante estudado. Num membro de concreto reforçado, quando as fissuras abrem no modo II, o engrenamento dos agregados suporta alguma tensão de corte na interface. As barras de aço também produzem uma importante contribuição ao efeito de fortalecimento de

corte que é o *Dowel Action* (efeito de pino). Este fenômeno ocorre devido a dois mecanismos agindo sobre as barras embutidas no concreto. O primeiro mecanismo, chamado de flexão de viga, é principalmente acionado no modo misto de abertura de fissura, onde a separação da interface da fissura (em modo I) é grande o bastante para tornar relevante a flexão da barra. Para levar em conta este efeito, pode-se considerar uma viga de aço de comprimento  $L$  travada em ambas extremidades, que são deslocadas (as extremidades) uma em relação à outra, como é mostrado na figura 19. Segundo a teoria clássica de vigas de Timoshenko, na parte elástica, o deslocamento relativo determina a força de corte na barra, fornecendo um módulo de corte equivalente, conforme mostrado na fórmula (27). O regime elástico da viga é admitido sempre que o máximo momento fletor ( $M=VL/2$ ) é menor que o momento plástico ( $M_y = \sigma_y(d^3 / 6)$ ), sendo  $\sigma_y$  a tensão de escoamento do aço. Portanto, a força de corte correspondente ao limite elástico e a equivalente tensão de escoamento de corte são dadas pela fórmula (28) (OLIVER et al., 2008).

$$V = \frac{12E^d I}{l^3} \delta = G^f \left( \frac{\delta}{l} \right) A^f \Rightarrow G^f = E^d \frac{12I}{l^2 A^f} \quad (27)$$

$$V_y = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d}{l} \cdot A^f \sigma_y^d = \tau_y^f A^f \Rightarrow \tau_y^f = \frac{4}{3\pi} \frac{d}{l} \sigma_y^d \quad (28)$$

Onde,

$\delta$  = deslocamento relativo;

$V$  = força de corte na barra;

$G^f$  = módulo elástico de corte;

$I$  = momento de inércia da seção transversal da barra;

$A^f$  = área da barra;

$\sigma_y^d$  = tensão de escoamento do aço;

$V_y$  = força de corte correspondente ao limite elástico;

$\tau_y^f$  = tensão de corte correspondente à força  $V_y$ .

$\gamma^f$  = deformação de corte;

$E^d$  = módulo de elasticidade do aço;

O segundo mecanismo, chamado de mecanismo de corte, é dominante quando a fissura abre principalmente em modo II. A resistência de corte da interface é introduzida por meio da força de corte na barra, dada pela fórmula (29). Considerando-se o critério de Von Mises, a força de corte de escoamento  $V_y$  para corte puro é dada pela equação (30). Nos primeiros estágios do regime inelástico, as fissuras são distribuídas na matriz de concreto tal que suas aberturas permanecem pequenas. Portanto, o segundo mecanismo do efeito de pino pode descrever mais aproximadamente o efeito de fortalecimento nestes estágios. **Para aberturas pequenas de fissuras, este é o mecanismo predominante** (OLIVER et al., 2008).

Baseado nos critérios apresentados, o efeito de pino é modelado através de um modelo constitutivo elastoplástico unidimensional de corte e tensão-deformação, similar ao caso axial. Neste caso, o modelo relaciona a tensão de corte na fibra associada ao sistema local de coordenadas  $(r,s)$ , conforme figura 19, com a correspondente deformação na fibra, de acordo com as equações (31) e (32). O módulo de corte é dado ou pela equação (27) ou pela (29), dependendo de qual mecanismo do efeito de pino for o dominante. Da mesma forma, a tensão de corte de escoamento é dada ou pela equação (28) ou pela (30). O módulo de amolecimento/endurecimento de corte da fibra ( $H^f$ ) é comumente considerado com o valor zero.

$$V = \frac{G^f A^f}{l} \delta; \quad G^f = \frac{E^d}{2(1 + \nu)} \quad (29)$$

$$V_y = \frac{\sigma_y^d}{\sqrt{3}} A_f = \tau_y^f A_f \Rightarrow \tau_y^f = \frac{\sigma_y^d}{\sqrt{3}} \quad (30)$$

$$\dot{\tau}^f = G_{tg}^f \dot{\gamma}^f \quad (31)$$

$$G_{tg}^{f\tau} = \begin{cases} G^f & \text{Trecho Elástico} \\ \frac{G^f H^{f\tau}}{G^f + H^{f\tau}} & \text{Trecho Plástico} \end{cases} \quad (32)$$

No presente trabalho, são usadas as mesmas relações dadas por Oliver, mas apenas para o mecanismo de corte, já que a abertura das fissuras é pequena e o efeito de flexão é reduzido. Para a consideração do corte da barra, considera-se toda a abertura das fissuras concentrada no meio do painel (conforme também é realizado para o cálculo dos escorregamentos, tensões, entre outros, no modelo de transferência de tensão por aderência), e duas barras com uma área equivalente à soma de todas as barras de cada direção, engastada em ambas extremidades do painel. O modelo deve ser aplicado para as duas direções ortogonais da armadura. O deslocamento de corte sofrido é tomado como sendo a componente vertical da abertura normal de fissura para a barra horizontal e como sendo a componente horizontal da abertura normal de fissura para a barra vertical. Portanto, a implementação do efeito de pino deste modelo consiste no uso das relações mostradas em (33). Onde  $G$ ,  $E$  e  $\nu$  são o módulo corte, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson das barras de aço,  $f_y$  e  $A_s$  são a tensão de escoamento das barras e a área de aço das mesmas,  $V_h$  e  $V_v$  são as forças devido ao efeito de pino provocadas pelas barras horizontais e verticais,  $W_{fis}$  e  $\theta$  são a abertura normal das fissuras e o ângulo de inclinação da direção das tensões principais e  $L$  é o comprimento do lado do painel.

$$\begin{aligned} G_s &= E_s / 2(1 + \nu_s) \\ V_y &= f_y A_s / \sqrt{3} \\ V_h &= G_{s1} \gamma_1 A_{s1} = G_{s1} A_{s1} \left( \frac{W_{fis} \text{sen}(\theta)}{L} \right) \leq V_{y1} \\ V_v &= G_{s2} \gamma_2 A_{s2} = G_{s2} A_{s2} \left( \frac{W_{fis} \text{cos}(\theta)}{L} \right) \leq V_{y2} \end{aligned} \quad (33)$$

### 3.2.2.2 Modelo de Efeito de Pino de Di Prisco e Gambarova – MDA2

O Boletim 230 do Código Modelo CEB 1996 (CEB-230 (1996, p. 127)) apresenta vários modelos de efeito de pino usados por diferentes autores. Foi escolhido o modelo de Di Prisco e Gambarova por ser baseado na teoria de viga em repouso sobre fundação elástica de concreto, que é uma teoria bastante usada por diversos autores na representação deste efeito. Este modelo é feito para cada barra individual, ao contrário do modelo mostrado no item 3.2.2.1. Simplificadamente, calcula-se o modelo para uma barra em cada direção e multiplica-se o resultado pelo número de barras em cada uma destas direções, já que a distribuição da armadura é uniforme e o sistema de fissuração também o é. As relações usadas são mostradas em (34), onde,  $d_b$  é o diâmetro da barra de aço,  $J_b$  é o momento de inércia da barra,  $E_s$  é o módulo de elasticidade,  $W$  é a abertura unitária de fissura na direção ortogonal à barra de aço,  $K_{eq}$  é o módulo de fundação equivalente,  $\alpha$  é a rigidez da fundação,  $f'_c$  é a resistência à compressão do concreto,  $V_u$  é a resistência última de pino e  $f_y$  é a tensão de escoamento do aço. Para a resistência última de pino, He e Kwan (2001, p. 601) usam a relação de Dulacska. Esta relação também é sugerida por Di Prisco e Gambarova como sendo a resistência última de pino e é mostrada na última equação de (34). A força de pino para cada barra de armadura é obtida pela segunda equação de (34).

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt[4]{\left(\frac{d_b K_{eq}}{4E_s J_b}\right)} \\
 V &= \frac{d_b K_{eq} W}{2\alpha} \\
 K_{eq} &= \gamma K_s \\
 K_s &= \frac{127\sqrt{f'_c}}{d_b^{0,66}} \\
 \gamma &= 2,12 \quad \text{se } \frac{V}{V_u} \leq 0,4 \\
 \gamma &= \left\{ 0,544 + 0,026 \cosh \left[ 8 \left( \frac{V}{V_u} - 0,4 \right) \right] \right\}^{\frac{4}{3}} \quad \text{se } \frac{V}{V_u} > 0,4 \\
 V_u &= 1,27 d_b^2 \sqrt{|f'_c| |f_y|} \quad (\text{Dulacska})
 \end{aligned} \tag{34}$$

### 3.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

O modelo empregado para representar as barras de aço da armadura é o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). Na implementação numérica destes modelos, foram utilizadas sub-rotinas desenvolvidas por Dantas (2000) e empregadas por d'Avila (2003). A seguir, é dada uma visão global da formulação empregada, embasada no trabalho de Machado (2002).

Usa-se uma formulação desenvolvida visando sua aplicação em análise não-linear de estruturas sob estado plano de tensões com solução em deslocamentos.

A implementação do modelo está baseada no fato de que a armadura resiste apenas a tensões axiais em sua direção longitudinal e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual ela está embebida. Desta forma, as barras da armadura contribuem apenas para a rigidez no sentido longitudinal e podem ser dispostas dentro do elemento de concreto de forma arbitrária, não introduzindo novas incógnitas no modelo global de elementos finitos. Os deslocamentos ao longo da barra são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto nos quais a mesma está inserida. Logo, a matriz de rigidez da armadura,  $\mathbf{K}_s$ , tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto,  $\mathbf{K}_c$ , e a matriz de rigidez total (concreto armado) é a soma das duas.

A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa pela fórmula (35).

$$\mathbf{K}_s = E_s A_s \int_S \mathbf{B}_s \mathbf{B}_s^T dS \quad (35)$$

Onde,

$E_s$  = o módulo de deformação longitudinal do aço;

$A_s$  = área da seção transversal da barra de armadura;

$\mathbf{B}_s$  = vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura;

$S$  = comprimento da barra.

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo-se modelar barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos (D'AVILA, 2003). Um elemento de concreto, com uma barra em seu interior, é mostrado na figura 20.

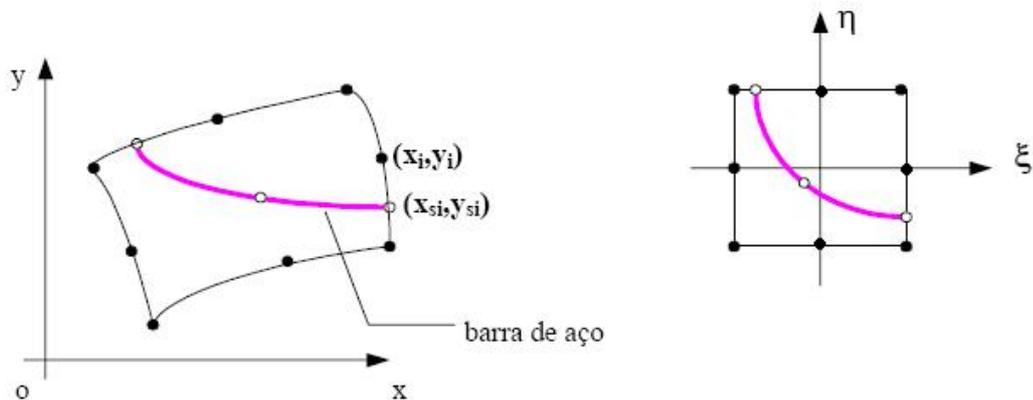


Figura 20: barra de armadura no interior de um elemento de concreto

Uma das grandes vantagens desta formulação é que a localização e geometria das barras da armadura independem da malha de elementos finitos de concreto. Como a armadura é especificada por um conjunto de pontos independentes, faz-se necessária a colocação de pontos adicionais nos elementos de barra para garantir a continuidade inter-elementar adequada, sendo que estes pontos devem estar localizados onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto, sendo os demais pontos das barras determinados por interpolação. As funções de interpolação unidimensionais,  $H_j$ , são expressas em termos de uma coordenada normalizada,  $\chi$ , ver figura 21, onde  $\beta\alpha$  é o ângulo da direção das barras.

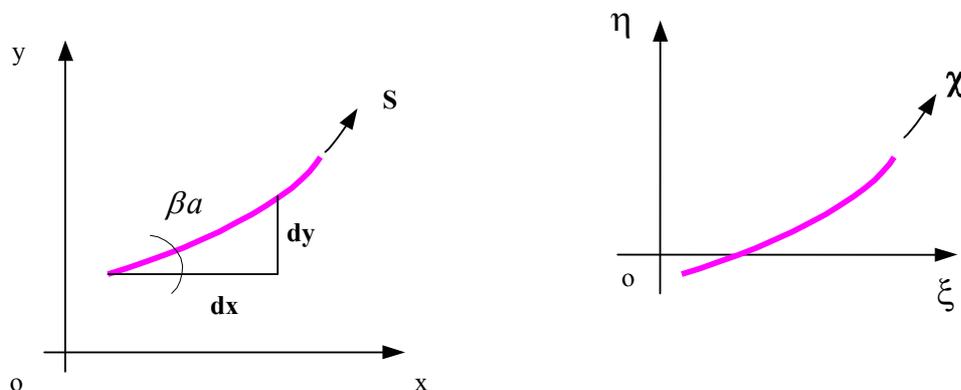


Figura 21: coordenadas ao longo do eixo de armadura

As forças internas associadas à armadura são integradas àquelas do elemento de concreto para a obtenção do vetor de forças internas totais do elemento. Portanto, precisa-se saber quais barras interceptam cada elemento para poder adicionar a contribuição das mesmas, tanto na rigidez como no vetor de forças do elemento. A determinação dos segmentos de barras de armadura que ficam no interior de cada elemento de concreto é feita numericamente de forma automática (D'AVILA, 2003).

As funções de interpolação dos elementos de armadura são representadas através dos polinômios de Lagrange. Segundo Zienkiewicz (1977), estas funções são expressas pela fórmula (36).

$$H^m(\chi) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\chi - \chi_i)}{(\chi_k - \chi_i)} \quad (36)$$

Esta função é um polinômio de grau  $m = n-1$ , em termos de  $\chi$ , possuindo valor unitário em  $\chi = \chi_k$  e nulo para  $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$ , onde  $n$  é o número de nós do elemento de armadura.

Considerando-se aderência perfeita entre concreto e aço, a expressão para a deformação do aço, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hradey (1989), resulta na fórmula (37).

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \beta a + \Delta \varepsilon_y \sin^2 \beta a + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta a \cos \beta a = B_s^T \Delta U^e \quad (37)$$

Onde  $\beta a$  está definido na figura 21 e  $U^e$  é o campo de deslocamentos do elemento de concreto. Após alguns arranjos e aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, a variação do trabalho interno é dada pela fórmula (38).

$$\delta\Delta W = \delta\Delta U^T (K_s \Delta U + Q_s) \quad (38)$$

Onde o vetor de força nodal equivalente  $Q_s$  é determinado através da fórmula (39).

$$Q_s = \int_{\chi} B_s \sigma_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (39)$$

A matriz  $K_s$  pode ser representada, numericamente, pela fórmula (40).

$$K_s = \sum_{l=1}^{ng} B_{sl} E_s B_{sl}^T \frac{ds}{d\chi} A_s w_i \quad (40)$$

Onde  $w_i$  é o fator de peso e  $ng$  é o número de pontos de integração na direção axial da barra de armadura.

## 4 MODELO DE FISSURA INCORPORADA

O modelo usado no presente trabalho é do tipo fissura incorporada e é uma extensão do modelo apresentado por d'Avila (2003), baseado no modelo originalmente proposto por Dvorkin et al. (1990). O modelo original de Dvorkin não inclui a contribuição da armadura. A inclusão da parcela da armadura proposta por d'Avila é feita através de um modelo de transferência de tensão por aderência entre o concreto e as barras de aço.

O modelo empregado por d'Avila é composto por um modelo de fissuras incorporadas aos elementos finitos, um modelo com transferência de tensão por aderência para simular o comportamento do material fissurado e um modelo incorporado para representar as barras da armadura. Para representar o comportamento do concreto intacto, pode-se utilizar o modelo constitutivo elástico-linear. A seguir, antes de introduzir o modelo incorporado empregado, apresentam-se alguns conceitos necessários para a compreensão do trabalho.

Inicialmente, estuda-se a incorporação de uma localização de deformações específicas no interior de um elemento. Também é feita uma breve exposição do modelo de transferência de tensão por aderência proposto por Russo e Romano (1992). Após esta etapa, apresentam-se as modificações que foram feitas no modelo original de fissura incorporada para incluir a parcela da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento, dando origem ao modelo proposto por d'Avila (2003), que será o modelo utilizado neste trabalho.

### 4.1 LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

Na implementação numérica de um modelo de fissura incorporada, uma grande dificuldade é a simulação do processo de localização, que está sempre presente na falha. A Linha de Localização é a deformação intensa de um material dentro de uma zona estreita. A seguir, baseado nos trabalhos de Spencer (2002, apud d'Avila, 2003) e Jirásek (2000, apud d'Avila, 2003), dá-se uma visão global da implementação de uma localização de deformações em um modelo de elementos finitos.

Para entender-se ou visualizar-se melhor as dificuldades que aparecem em um modelo de Elementos Finitos devido à incorporação de uma descontinuidade no interior de um elemento,

será feita uma descrição das modificações feitas em um princípio variacional para poder representar a descontinuidade. A figura 22 mostra um volume contínuo em todo o seu domínio.

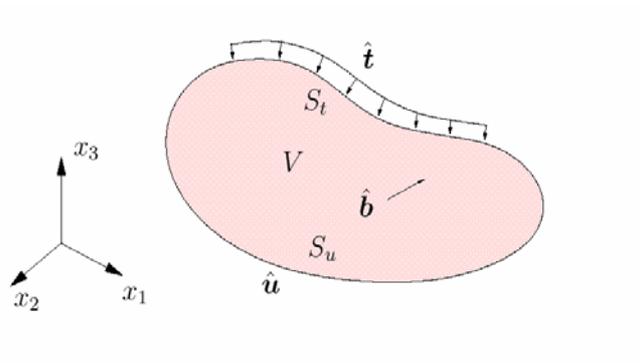


Figura 22: representação do domínio contínuo

De acordo com a figura, três campos são definidos sobre o volume,  $V$ , do domínio: o campo de deslocamentos,  $\mathbf{u}$ ; o campo de deformações,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ; e o campo de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ . Também uma força de volume,  $\hat{\mathbf{b}}$ , é definida sobre o volume  $V$ . A superfície,  $S$ , é dividida em duas partes:  $S_u$  onde o corpo está sujeito a deslocamentos impostos,  $\hat{\mathbf{u}}$ ; e  $S_t$  onde as forças de superfície,  $\hat{\mathbf{t}}$ , são impostas. O campo de deformações está vinculado com o campo de deslocamentos pela equação cinemática ( $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}$ ); o campo de tensões está relacionado com o campo de deformações pela equação constitutiva ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ) e a equação de equilíbrio ( $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{b}} = 0$ ) relaciona o campo de tensões com as forças de volume prescritas.

Segundo d'Avila (2003), para solucionar o problema via Método dos Elementos Finitos, algumas das equações de campo devem ser enfraquecidas, fazendo com que elas só possam ser estabelecidas de forma integral, através de um princípio variacional. Para que isto seja possível, um (ou mais) campo deve ser designado como principal. Todos os campos que são conectados com o principal por intermédio de equações de campo de forma forte tornam-se dependentes do principal.

Uma das melhores formas de visualizar-se as conexões fortes e fracas entre os campos e as condições de contorno é o diagrama de Tonti. Cada campo é representado por um retângulo, que tem linha contínua se o campo é principal ou tracejada se é dependente. As condições de contorno são representadas por retângulos pintados. Vínculos fortes entre campos são mostrados com linhas cheias e os fracos com linhas tracejadas. O sobrescrito em um campo

denota que ele é dependente do campo sobrescrito. O diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total está representado na figura 23. Nele,  $\mathbf{u}$  é tomado como campo principal,  $\boldsymbol{\epsilon}^u$  e  $\boldsymbol{\sigma}^u$  como campos dependentes. A equação de equilíbrio e as condições de contorno de força, que vinculam  $\boldsymbol{\sigma}^u$  a  $\hat{\mathbf{b}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$ , respectivamente, são estabelecidas de forma fraca.

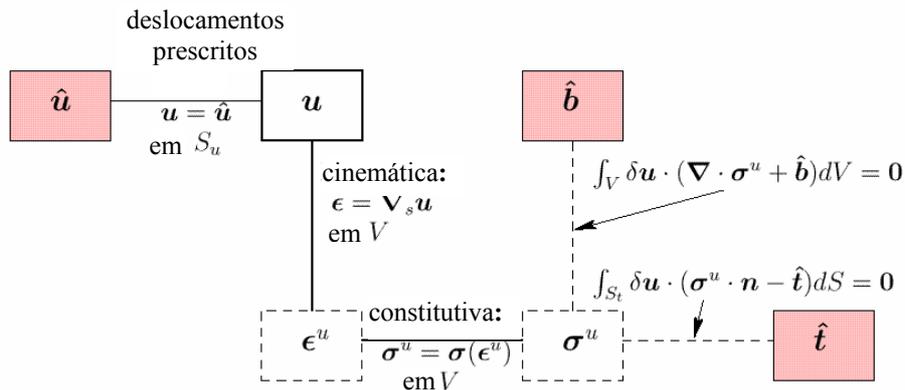


Figura 23: diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total

Este Princípio Variacional da Energia Potencial Total pode ser estendido para um corpo com uma interface interna. Na figura 24 é apresentado um domínio similar ao da figura 22, exceto pela introdução de uma superfície interna,  $S_j$ . O volume  $V$ , os domínios das condições de contorno,  $S_u$  e  $S_t$ , foram divididos em duas partes, "+" e "-", separadas pela superfície interna.

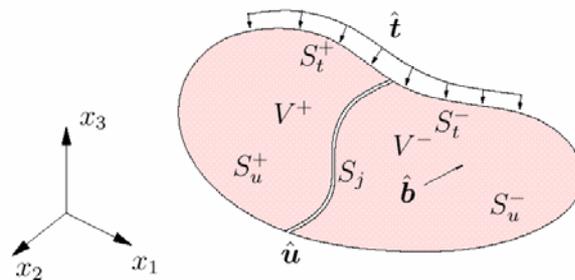


Figura 24: representação do domínio com uma superfície interna

Um campo de forças de superfície,  $\mathbf{t}_j$ , é definido na superfície interna. Este campo de forças é função da descontinuidade de deslocamentos através da interface interna. A figura 25 mostra o diagrama de Tonti com este campo adicional incorporado no Princípio Variacional padrão da Energia Potencial Total.

O campo de forças da interface é dependente do campo de deslocamentos, sendo, assim, representado por  $\mathbf{t}_j^u$ . O equilíbrio entre  $\mathbf{t}_j^u$  e  $\boldsymbol{\sigma}^u$  é imposto de forma fraca.  $V$  não inclui  $S_j$ , e, como consequência disto, existem agora dois conjuntos paralelos de equações de campo. Na interface  $S_j$ , o campo (dependente) de tensões está relacionado com o campo (principal) de deslocamentos através do campo (dependente) de forças de superfície, enquanto que no volume  $V$ , eles estão relacionados por intermédio do campo (dependente) de deformações.

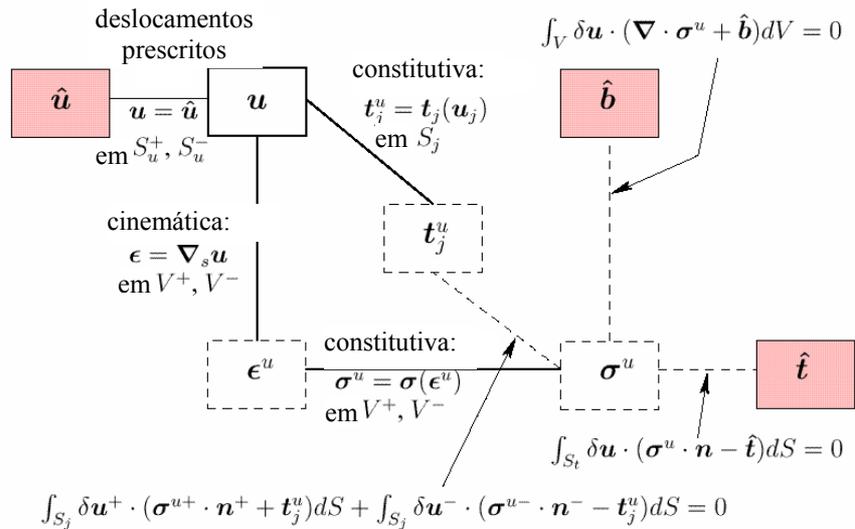


Figura 25: diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total com o campo adicional de forças na superfície interna

Desta forma, a existência de dois conjuntos paralelos de equações de campo possibilita que se obtenha valores diferentes de tensões para um mesmo deslocamento, dependendo de qual conjunto de equações foi utilizado. Como os dois conjuntos não conduzem ao mesmo resultado de forma natural, algum mecanismo deve ser imposto para que isto ocorra. Este procedimento é melhor detalhado na descrição do modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia que será feita posteriormente.

O objetivo principal é a representação da fissuração no concreto. Uma fissura acontece como resultado de uma intensa localização de deformações ao longo de uma zona relativamente estreita do material. Antes que a fissura seja considerada uma fissura aberta, quando não é mais possível a transmissão de esforços através da mesma, existe um período no qual, apesar do material já ter fissurado, ainda é possível a transmissão de esforços. Este período, que é caracterizado por uma diminuição de esforços transmitidos com o aumento da abertura da fissura, é chamado de amolecimento. Portanto, a fissura é uma descontinuidade do campo de

deslocamentos que gera uma interface interna no elemento. Simular a relação entre as forças de superfície nesta interface (os esforços transmitidos através da fissura) e a abertura da fissura (a descontinuidade do campo de deslocamentos interno do elemento) é o objetivo da implementação dos modelos incorporados.

As modificações propostas devem ser implementadas via Método dos Elementos Finitos com solução em deslocamentos. Como este método é amplamente empregado em análise estrutural, existe uma gama de elementos já implementados e com formulação bem conhecida, sobre os quais é possível realizar-se as alterações necessárias. A dificuldade na implementação numérica de modelos incorporados baseados na rigidez está relacionada com o fato de que o campo de forças de superfície está conectado com o campo de tensões no interior do elemento de forma fraca. Dessa forma, as forças nodais, que são computadas através de integrais do campo de forças de superfície ao longo do contorno do elemento, não fornecem informações suficientes para reconstruir o campo de forças de superfície. Não existe solução única para o campo de forças de superfície baseado somente nas forças nodais. Uma das soluções deste problema é um processo iterativo, a nível do elemento, que deve ser realizado para compatibilizar o campo de tensões obtidas no interior do elemento com o campo de forças de superfície na descontinuidade interna (D'AVILA, 2003).

## 4.2 MODELO DE TRANSFERÊNCIA DE TENSÃO POR ADERÊNCIA

O próximo passo é uma sucinta descrição do modelo de transferência de tensão por aderência, proposto por Russo e Romano (1992) e Russo, Zingone e Romano (1990).

Segundo d'Avila (2003), em peças de concreto armado tracionadas ocorre um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente sempre que as deformações dos dois materiais têm valores diferenciados. Este escorregamento está associado à degradação do vínculo entre concreto e aço e ao aparecimento de fissuras no entorno das barras da armadura. Basicamente, estas fissuras são devidas à tensão de tração proveniente da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência. Para que o concreto fissure em uma determinada seção, a tensão no concreto, nesta seção, deve ser igual à resistência à tração do concreto,  $f_t$ , fazendo com que, conseqüentemente, a sua deformação de fissuração,  $\epsilon_{ct}$ , seja atingida. Desse modo, o estudo do fenômeno da fissuração deve ser baseado na análise da

distribuição das deformações ao longo da peça de concreto armado, pois sempre que a deformação no concreto for igual a  $\varepsilon_{ct}$  uma nova fissura formar-se-á. Devido à formação da fissura, a tensão de tração no concreto imediatamente adjacente à mesma deve cair à zero. Novas distribuições de tensão e deformação no concreto e no aço vão acontecer após a fissuração. Se a carga é incrementada além daquela que causou a primeira geração de fissuras, novas fissuras poderão se formar, até que uma configuração final de fissuras seja estabelecida.

Uma peça de concreto armado tracionada é mostrada na figura 26, que tanto pode estar representando um tirante de concreto armado carregado por forças externas aplicadas na barra de aço, como um trecho entre duas fissuras de uma peça fissurada.

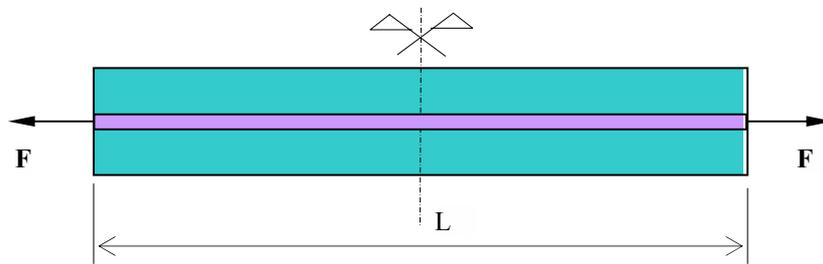


Figura 26: peça de concreto armado tracionada axialmente

As equações diferenciais de equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações para a peça, conforme a figura 27, são dadas, respectivamente, pelas fórmulas (41) e (42).

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = -\tau(s)\Sigma_0 \quad (41)$$

$$\varepsilon_s - \varepsilon_c = -\frac{ds}{dx} = -s' \quad (42)$$

Onde,

$\sigma_s$  = tensão no aço;

$\tau(s)$  = tensão de aderência como função do escorregamento relativo;

$A_s$  = área de aço;

$\Sigma_0$  = perímetro da armadura;

$\varepsilon_s$  = deformação do aço;

$\varepsilon_c$  = deformação do concreto adjacente à interface aço/concreto;

$s(x)$  = escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente.

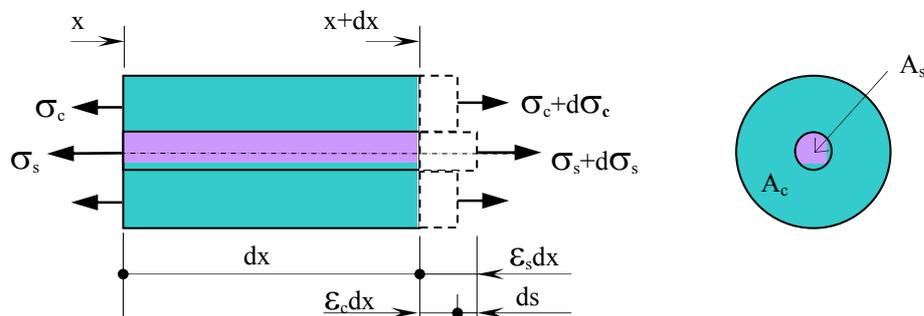


Figura 27: tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente

A transferência de tensão entre o concreto e a armadura pode ser expressa pela fórmula (43).

$$A_c \frac{d\sigma_{cm}}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (43)$$

Onde,

$A_c$  = área de concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão;

$\sigma_{cm}$  = é a tensão média no concreto na área  $A_c$ .

O tamanho da área de concreto efetivamente envolvida na transferência de tensão, assim como a distribuição de tensões ao longo da mesma, ainda é um tema em discussão. No presente estudo, considera-se um parâmetro  $\nu$  que indica a relação entre a tensão média  $\sigma_{cm}$  e a máxima tensão no concreto, que acontece na camada mais próxima da barra.

Considerando que  $\psi$  não varie ao longo da barra, isto é, seja independente de  $x$ , a expressão (43) pode ser reescrita conforme a fórmula (44).

$$\Psi A_c \frac{d\sigma_c}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (44)$$

Derivando-se a equação (42) e considerando-se as equações (41) e (43), conforme detalhado em Russo e Romano (1992), chega-se à fórmula (45).

$$s''(x) - \chi \hat{\tau}[s(x)] = 0 \quad (45)$$

Sendo,

$$\chi = \frac{\Sigma_0}{A_s E_s} (1 + \xi) \quad (46)$$

$$\xi = \frac{n\rho}{\Psi} \quad (47)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (48)$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (49)$$

Onde  $E_c$  e  $E_s$  são, respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal do concreto e do aço.

A equação (45) é uma equação diferencial de segunda ordem, cuja primeira integral é dada pela fórmula (50).

$$s'(x) = \mp \sqrt{2(F(s) + C)} \quad (50)$$

O sinal negativo representa tensão de tração no aço,  $C$  é uma constante de integração e  $F(s)$  é dado na fórmula (51).

$$F(s) = \chi \int \hat{\tau}[s(x)] ds \quad (51)$$

Com o objetivo de possuir uma relação explícita ou implícita do escorregamento  $s$  como função de  $x$ ,  $s = s(x)$  ou  $x = x(s)$ , e considerando-se o aço tracionado, integra-se a expressão (50), resultando na expressão (52).

$$x = B - \int \frac{ds}{\sqrt{2[F(s) + C]}} \quad (52)$$

Onde  $B$  é uma segunda constante de integração.

A equação (45), que é a equação diferencial de aderência, é geral e pode ser resolvida para qualquer relação *tensão de aderência x escorregamento*. O modelo de aderência adotado neste trabalho está representado na figura 28.

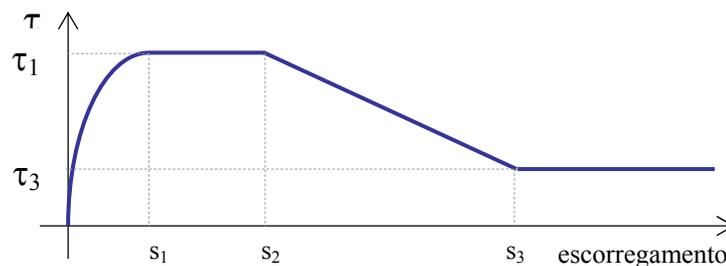


Figura 28: relação tensão de aderência x escorregamento relativo

Conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990, CEB (1993), para concreto não confinado, com barras nervuradas e em boas condições de aderência, os valores que devem ser adotados para os parâmetros do diagrama apresentado na figura 28 são:  $s_1 = s_2 = 0,6mm$ ;  $s_3 = 10mm$ ;  $\tau_1 = 2 f_{ck}^{1/2}$ ;  $\tau_3 = 0,3 f_{ck}^{1/2}$ ; e,  $\alpha = 0,4$ . Estes valores são mantidos fixos para todos os exemplos numéricos testados. Os painéis testados por Vecchio (1981) foram construídos com telas metálicas de barras ortogonais lisas, porém, devem ser usados os dados de escorregamento para barras nervuradas devido ao fato das barras da armadura transversal serem soldadas à armadura longitudinal, funcionando como se fossem corrugações. Isto é corroborado pela Norma NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 29), no item 9.4.4 sobre ancoragem de telas soldadas por aderência que diz: “Quando a tela for composta de fios lisos ou com mossas, podem ser adotados os mesmo critérios definidos para barras nervuradas...”. Além disso, o boletim técnico de telas soldadas (INSTITUTO BRASILEIRO DE TELAS SOLDADAS, 1997) fornece expressões (baseadas em códigos internacionais) para a determinação do comprimento de transferência de tensão necessário para que as barras de aço de telas soldadas transfiram toda a tensão para o concreto. Aplicando-se os modelos dados por este boletim em alguns painéis de Vecchio (1981), foram obtidos resultados de comprimento de transferência de tensão para telas de barras lisas soldadas muito próximos em relação aos fornecidos pelo modelo do presente trabalho, considerando-se, no mesmo, os parâmetros de barras nervuradas mostrados acima. Portanto, em concordância com a Norma NBR 6118 e com os resultados do boletim citado acima (e na falta de ensaios experimentais para comparações mais exatas), justifica-se o uso dos parâmetros de barras nervuradas. O trecho curvo da figura 28 é dado pela expressão (53).

$$\hat{\tau} = \tau_1 \left( \frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (53)$$

Para o trecho curvo,  $0 \leq s \leq s_1$ , a função  $F(s)$  (expressão (51)) resulta na fórmula (54).

$$F(s) = \gamma s(x)^{1+\alpha} \quad (54)$$

Sendo  $\gamma$ , o denominado parâmetro de aderência, dado pela fórmula (55).

$$\gamma = \chi \frac{\tau_1}{(1 + \alpha)s_1^\alpha} \quad (55)$$

Com a substituição do valor de  $F(s)$ , dado por (54) na equação (52), obtém-se a fórmula (56).

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\gamma s^{1+\alpha} + C)^{-1/2} ds \quad (56)$$

Desenvolvendo-se o binômio da expressão anterior em série e integrando-se, resulta nas fórmulas (57) e (58).

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\gamma}{C}\right)^k \frac{s^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad 0 \leq s < \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (57)$$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} < s \quad (58)$$

As equações (57) e (58) mostram, de forma implícita, o escorregamento  $s$  como função de  $x$ . Quando a função  $s(x)$  apresenta um ponto com  $s = 0$  e  $s' = 0$ , a constante de integração  $C$  é nula e a solução da equação diferencial (50) pode ser escrita na forma explícita pela equação (59).

$$s = \left[ -\frac{1-\alpha}{2} \sqrt{2\gamma} (x-B) \right]^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (59)$$

Pela integração da equação (44) e considerando relações lineares para os materiais, chega-se à expressão (60).

$$\varepsilon_c = -\xi \varepsilon_s + D \quad (60)$$

Sendo  $D$  uma constante de integração dada por  $D = \xi \varepsilon_{s0}$ , onde  $\varepsilon_{s0}$  é a deformação do aço na extremidade carregada.

Utilizando-se as relações dadas por (42), (50) e (54) em (60), chega-se às expressões que permitem determinar as deformações no aço e no concreto em função do escorregamento mostradas nas fórmulas (61) e (62).

$$\varepsilon_s = \frac{\xi \varepsilon_{s0} + \sqrt{2(\gamma s^{1+\alpha}) + C}}{1 + \xi} \quad (61)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\xi \varepsilon_{s0} - \xi \sqrt{2(\gamma s^{1+\alpha}) + C}}{1 + \xi} \quad (62)$$

Através do uso das equações apresentadas anteriormente, é possível obter as distribuições, ao longo da peça, de variáveis tais como o escorregamento relativo e as deformações no concreto e na armadura. As constantes de integração são determinadas para cada problema específico.

Segundo d'Avila (2003), deve ser ressaltado que o problema que se está querendo resolver não pode ser resolvido de forma explícita para todas as situações. Há casos em que não existe uma solução explícita e o problema deve ser resolvido através de um processo iterativo,

chegando-se a determinadas situações para as quais não existe solução. Assim, é recomendável que se faça uma avaliação qualitativa prévia da possível distribuição de algumas variáveis ao longo do elemento antes de se tentar resolver o problema.

A existência de um ponto ou região com  $s' = 0$  deve ser averiguada, já que nesta região as deformações no aço e no concreto apresentam o mesmo valor, ver equação (42). Além disso, a existência de uma seção ou região com escorregamento nulo,  $s = 0$ , deve ser analisada. A existência de uma região onde  $s = s' = 0$  permite o uso da expressão explícita (59). Deve-se, portanto, realizar-se uma avaliação prévia para saber qual função ou conjunto de funções que deve ser utilizado na solução do problema.

Para cada tipo de problema, dois comportamentos típicos são possíveis, mostrados na figura 29, diretamente relacionados com o valor da carga externa e o comprimento da peça: (a) comportamento de peça longa, ou (b) comportamento de peça curta.

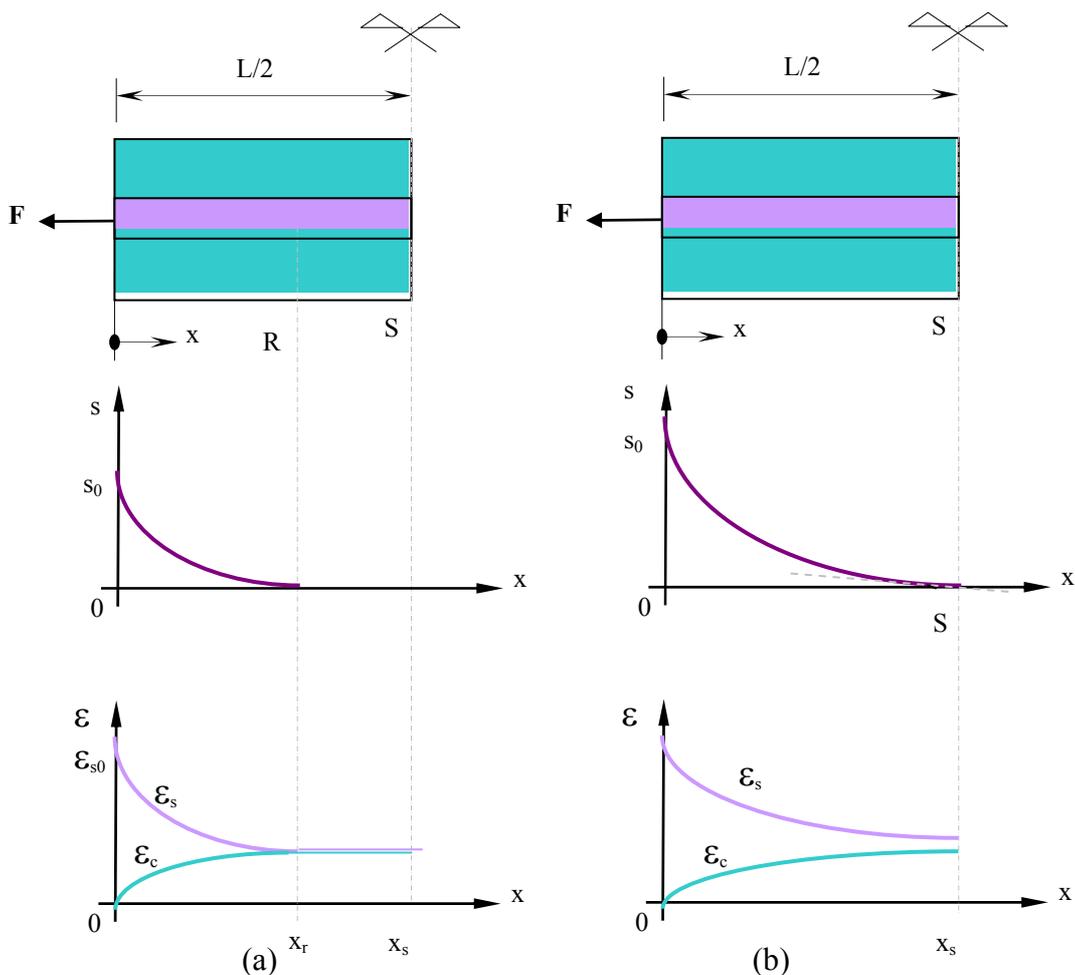


Figura 29: distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço:

(a) Peça Longa e (b) Peça Curta

O primeiro comportamento mostrado na figura 29(a) é chamado de **comportamento de peça longa** e é caracterizado pela existência de uma região onde não existe escorregamento relativo entre o aço e o concreto adjacente, possuindo, os dois materiais, a mesma deformação. Isto ocorre devido ao fato de que a peça é longa o suficiente para que a barra de armadura possa transferir para o concreto, por aderência, a força necessária para que isso aconteça. O escorregamento relativo  $s$  possui solução explícita, sendo determinado pela expressão (59) no intervalo  $0 \leq x \leq x_r$  e é nulo,  $s = 0$ , para  $x_r \leq x \leq L/2$ . O comprimento  $x_r$  necessário para satisfazer a condição de igualdade entre as deformações no aço (valor mínimo) e no concreto (valor máximo) é chamado de comprimento de transferência,  $L_t$ . Segundo d'Avila (2003), o escorregamento na extremidade carregada é dado por Russo e Romano (1992) através da fórmula (63).

$$s_0 = \left( \frac{\varepsilon_{s0}^2}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (63)$$

Onde  $\varepsilon_{s0}$  é a deformação do aço na extremidade carregada. Na seção  $R$  da figura 29(a), a deformação máxima do concreto é dada pela fórmula (64) e sua abscissa pela fórmula (65).

$$\varepsilon_{c\max,L} = \frac{\xi}{1+\xi} \varepsilon_{s0} \quad (64)$$

$$x_R = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \varepsilon_{s0} \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (65)$$

Onde  $x_R$  é o comprimento de transferência. A condição determinante para que uma peça seja longa é que  $\varepsilon_{s0} \leq \varepsilon_{s0L}$ . Para  $x_R = L/2$ , a equação (65) dá o limite superior do valor da deformação do aço na extremidade carregada, apresentado na fórmula (66).

$$\varepsilon_{s_0L} = (2\gamma) \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{(1-\alpha)L}{4} \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (66)$$

O segundo comportamento mostrado na figura 29(b) é chamado de **comportamento de peça curta**, onde o aço e o concreto apresentam deformações diferentes ao longo de todo o comprimento da peça,  $\varepsilon_s > \varepsilon_c$  e o escorregamento relativo entre os materiais é zero apenas no centro da peça, devido à simetria. A deformação máxima no concreto para a peça curta ocorre na seção  $S$ , de simetria, e é função do escorregamento  $s_0$ . Não existe uma solução de forma explícita para a equação diferencial (50) para esta situação e a distribuição do escorregamento é obtida através das equações gerais, (57) e (58). Além disto, para o escorregamento dado na fórmula (67), as equações (57) e (58) não possuem solução.

$$s = s_d = \left( \frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (67)$$

O valor da constante  $B$  da equação (57), a partir de agora chamada de  $B_1$ , é determinado através da condição de contorno da seção de simetria ( $x=L/2$ ), onde o escorregamento é nulo, de tal forma que  $B_1=L/2$ . Da mesma forma, a constante  $B$  da equação (58), agora chamada de  $B_2$ , pode ser expressa através da condição de contorno na extremidade carregada ( $x=0$ ) onde o escorregamento possui um valor conhecido chamado de  $s_0$ , sendo dada na fórmula (68).

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( k^{\frac{-1}{2}} \right) \left( \frac{C}{\gamma} \right)^k \frac{s_0^{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)} \quad (68)$$

A constante  $C$ , dada na fórmula (69), pode ser expressa através das equações (42), (50) e (54). Para  $x = 0$  ( $\varepsilon_c = 0$  e  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s0}$ ).

$$C = \frac{\varepsilon_{s0}^2}{2} - \gamma s_0^{1+\alpha} \quad (69)$$

Como o escorregamento decai ao longo do comprimento da peça e chega a zero na seção de simetria, a equação (57) só é válida para uma região próxima desta seção. Próximo da extremidade carregada será empregada a equação (58). Desse modo, dois casos distintos dentro do comportamento de peças curtas podem ocorrer e são denominados Caso 1 e Caso 2. O parâmetro determinante na separação dos casos é dado na fórmula (70). Para  $s_0 < s_d$  usa-se o caso 1, sendo o caso 2 usado para  $s_0 > s_d$ .

$$s_d = \left( \frac{\varepsilon_{s0}^2}{2\gamma} - s_0^{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (70)$$

#### 4.2.1 Caso 1

A equação (57) é aplicada ao longo do comprimento da peça e, substituindo-se os valores das constantes nesta equação, obtém-se a fórmula (71) que é válida para o limite dado na inequação (72).

$$f(s_0) = \frac{L}{2} - \frac{1}{\sqrt{2 \left( \frac{\varepsilon_{s0}^2}{2} - \gamma s_0^{1+\alpha} \right)}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( k^{\frac{-1}{2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\frac{\varepsilon_{s0}^2}{2} - \gamma s_0^{1+\alpha}} \right)^k \frac{s_0^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} = 0 \quad (71)$$

$$0 \leq s_0 < \left( \frac{\varepsilon_{s_0}^2}{4\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (72)$$

Deve-se resolver o problema por iterações, encontrando-se o valor de  $s_0$  e, posteriormente, calcula-se o valor da constante  $C$ . Então, variando-se  $s$  entre 0 e  $s_0$ , encontra-se o valor da abscissa  $x$  dado pela fórmula (57).

#### 4.2.2 Caso 2

Denominando-se  $x_d$  o valor da abscissa  $x$  na qual o valor de escorregamento é igual a  $s_d$  (valor que separa as soluções), Russo e Romano (1992) tomam as expressões (57) e (58) e igualam as duas para determinar a solução no entorno do ponto  $x = x_d$ , conforme mostrado na figura 30. Lembra-se que  $x$  cresce ao aproximar-se da seção de simetria, enquanto o escorregamento decai. Dessa forma, escreve-se a equação (57) para a seção  $x = x_d + dx_1$ , onde  $s = s_d - ds$  e escreve-se a equação (58) para  $x = x_d - dx_2$ , onde  $s = s_d + ds$ , sendo  $dx$  e  $ds$  variações infinitesimais das respectivas variáveis. O resultado é mostrado na fórmula (73).

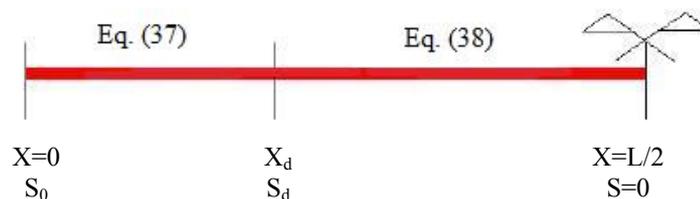


Figura 30: comportamento de peça curta – caso 2

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} (k^{-1/2}) \frac{\left[ \left( \frac{\gamma}{C} \right)^{\frac{k}{1+k(1+\alpha)} + \frac{1}{(1+\alpha)}} - ds \left( \frac{\gamma}{C} \right)^{\frac{k}{1+k(1+\alpha)}} \right]^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} - \\
& \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} (k^{-1/2}) \left( \frac{C}{\gamma} \right)^k \frac{s_0^{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)} + \\
& \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} (k^{-1/2}) \frac{\left[ \left( \frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{k}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)} + \frac{1}{(1+\alpha)}} + ds \left( \frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{k}{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1-\alpha}{2} - k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2} + k(1+\alpha)} + \frac{L}{2} = dx_1 + dx_2
\end{aligned} \tag{73}$$

A validade da igualdade (73) é dada pela inequação (74). Através das fórmulas (69) e (73), determina-se, iterativamente, o valor de  $s_0$  e  $C$  e, posteriormente, calculam-se os valores de  $B_2$  e  $s_d$ .

Encontrando-se o valor do escorregamento ao longo da peça, é possível determinar-se as tensões de aderência através das fórmulas apresentadas neste capítulo. Uma forma mais prática de determinar se irá ser usado o caso 1 ou o caso 2 é através do valor da função  $f(s_0)$ . Esta função tem valor positivo para  $s_0 = 0$  e decresce com o aumento de  $s_0$ . Assim, se  $f(s_0) < 0$  deve-se usar o Caso 1, caso contrário usa-se o Caso 2. Este valor de  $f(s_0)$  deve ser calculado para um valor de escorregamento fictício situado no limite entre os dois casos  $\underline{s_0}$  dado pela expressão (75).

$$s_0 > \left( \frac{\varepsilon_{s_0}^2}{4\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{74}$$

$$s_0 = \underline{s}_0 = \left( \frac{\varepsilon_{s0}^2}{4\gamma} - du \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (75)$$

### 4.3 ANÁLISE DE FISSURAÇÃO PROGRESSIVA DA PEÇA

A seguir, analisar-se-á a fissuração progressiva de uma peça inicialmente não fissurada, considerando que a carga é incrementada monotonicamente.

De acordo com d'Avila (2003), para valores muito baixos de carga e, conseqüentemente, de deformação na extremidade carregada,  $\varepsilon_{s0}$ , o escorregamento relativo anula-se antes do eixo de simetria, como em peças longas. O elemento ainda não fissurou e  $\varepsilon_{cr} < \varepsilon_{ct}$ , sendo  $\varepsilon_{cr}$  o valor de  $\varepsilon_c$  no ponto  $R$  da figura 29(a), com  $s' = 0$  e  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cmax}$ . Qualquer incremento de carga desloca o ponto  $R$  em direção ao eixo de simetria e  $\varepsilon_{cr}$  aumenta. Um incremento de carga maior pode produzir duas respostas diferentes na peça:

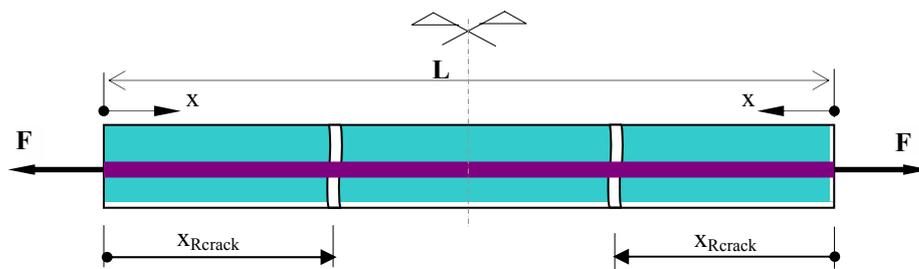


Figura 31: fissuração em uma peça longa

- a) pode ocorrer que a deformação no concreto alcance o valor de fissuração no ponto  $R$  com  $x_R \leq L/2$ . Neste caso,  $x_R = x_{Rcrack}$ , sendo  $x_{Rcrack}$  a distância da fissura até a extremidade carregada. As primeiras fissuras primárias se formam e a peça é subdividida em  $m$  partes, conforme visto na figura 31. O número de fissuras que se originam é igual a  $NF=L/x_{Rcrack}$ . Este caso pode ser definido como a fissuração de uma peça longa;
- b) por outro lado, pode acontecer que o ponto  $R$  alcance o eixo de simetria ( $x_R = L/2$ ) com a deformação do concreto permanecendo menor que  $\varepsilon_{ct}$ . Para fissurar a peça,

uma carga ainda maior deve ser aplicada. Com o incremento da carga, a deformação do concreto vai aumentar, mas seu valor máximo,  $\varepsilon_{cmax}$ , continuará acontecendo no centro da peça, já que o valor de  $x_R$  não pode ir além de  $L/2$  devido à simetria. Conseqüentemente, a primeira fissura aparecerá, na seção de simetria, quando  $\varepsilon_{cmax}$  alcançar o valor  $\varepsilon_{ct}$ . Assim, na fissuração, a peça é dividida em duas partes iguais de dimensão  $L/2$ , ver figura 32. Este caso é definido como fissuração de uma peça curta.

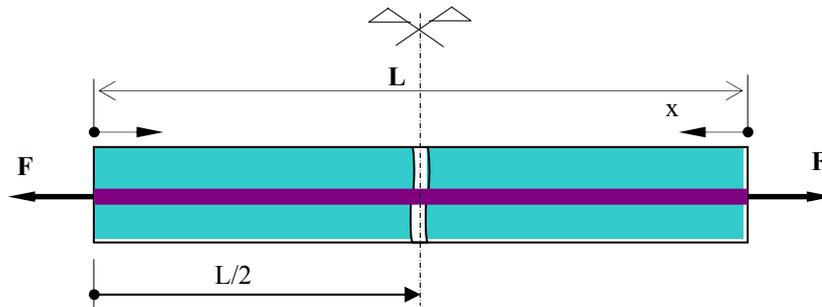


Figura 32: fissuração em uma peça curta

A condição que garante que a fissuração da peça irá acontecer antes que  $x_R$  alcance o eixo de simetria, ou seja, que a peça funcionará como peça longa é dada na fórmula (76).

$$\varepsilon_{s0crack} \leq \varepsilon_{s0L} \quad (76)$$

Sendo  $\varepsilon_{s0crack}$  a deformação no aço, na extremidade carregada, que determina a fissuração do concreto dada na fórmula (77) e  $\varepsilon_{s0L}$  é dado na fórmula (78).

$$\varepsilon_{s0crack} = \left( \frac{\xi + 1}{\xi} \right) \varepsilon_{ct} \quad (77)$$

$$\varepsilon_{s0L} = (2\gamma)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[ \frac{(1-\alpha)L}{4} \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (78)$$

Neste caso,  $x_{Rcrack}$ , a distância da fissura até a extremidade carregada, é determinada pela expressão (79).

$$x_{Rcrack} = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \varepsilon_{s0crack} \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (79)$$

Por outro lado, se  $\varepsilon_{s0crack} > \varepsilon_{s0L}$ , a peça funcionará como peça curta desde a primeira fissura, o que gera apenas uma fissura na seção de simetria da peça.

Após a formação das primeiras fissuras, uma segunda geração de fissuras pode ocorrer para um nível de carga ainda maior. Antes desta segunda geração, cada parte originária da primeira geração de fissuras está em uma situação de carga similar à de uma peça curta. Mesmo as originadas de peças longas terão comprimento igual a  $x_{Rcrack}$ , o que faz com que a segunda geração de fissuras possa acontecer somente na seção de simetria de cada parte. Baseado nas considerações acima e considerando um material homogêneo (o que não é propriamente o caso do concreto, cujas propriedades físicas e mecânicas têm uma considerável dispersão), conclui-se que, sob cargas monotonicamente crescentes, depois da primeira geração de fissuras primárias, novas fissuras podem ocorrer apenas pela fissuração da seção central de cada parte (D'AVILA, 2003).

O estado de fissuração estabilizada é atingido quando o comprimento de cada parte não é mais suficiente para permitir que a deformação do concreto atinja o valor de fissuração na tração,  $\varepsilon_{ct}$ , no meio do vão, por maior que seja o incremento de  $\varepsilon_{s0}$ .

Já que a deformação,  $\varepsilon_{cmax}$ , depende do valor do escorregamento na extremidade carregada,  $s_0$ , que é a variável principal do problema em estudo, a distância mínima entre as fissuras é determinada pela análise da fissuração progressiva da peça e suas divisões em partes menores.

O escorregamento da extremidade carregada,  $s_0$ , dá a diferença entre os alongamentos do aço e do concreto na metade da peça. Assim, em uma peça fissurada, a abertura da fissura na superfície do aço,  $w$ , é dada pela fórmula (80).

$$w = s_{01} + s_{02} \quad (80)$$

Sendo  $s_{01}$  e  $s_{02}$  os escorregamentos das extremidades de dois trechos consecutivos.

#### 4.4 MODELO DE FISSURA INCORPORADA COM INCLUSÃO DA ARMADURA

Os modelos de fissura incorporada surgem como uma excelente alternativa na simulação numérica do colapso das estruturas. Eles conseguem simular a localização de deformações específicas no seu interior de forma objetiva e sem o conhecimento prévio da dimensão da banda de fissuração.

##### 4.4.1 Modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia

As principais características da formulação do modelo originalmente proposto por Dvorkin et al. (1990), quando o mesmo foi utilizado para simular o comportamento de peças de concreto simples são:

- a) a localização de deformações específicas envolve o elemento completo como domínio mínimo, ao invés de trabalhar com pontos de integração;
- b) considera-se a localização de deformações específicas na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos incorporada no domínio do elemento;
- c) existem duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do material: uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação convencional tensão-deformação para o resto do domínio;
- d) os elementos finitos resultantes são não-conformes.

O elemento finito usado neste modelo é o QMITC (Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components), de Dvorkin e Vassolo (1989). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional baseado no método de interpolação mista dos componentes tensoriais, ou seja, adota uma interpolação para os deslocamentos e uma para as deformações específicas, realizando as duas interpolações em conjunto.

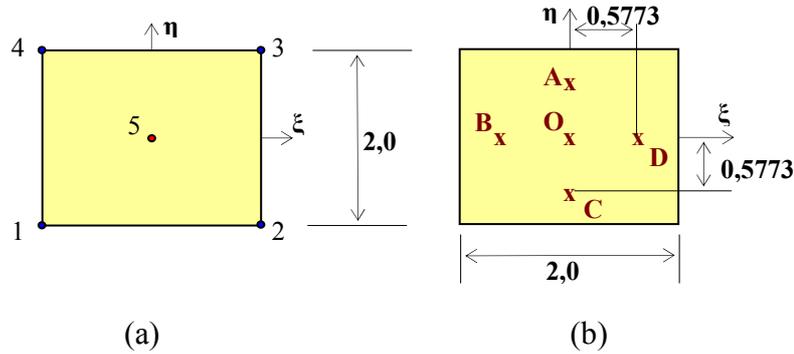


Figura 33: elemento QMITC (a) nós da interpolação de deslocamentos e (b) pontos de interpolação das deformações

Na interpolação dos deslocamentos, utiliza-se as funções de interpolação do elemento isoparamétrico com 5 (cinco) nós, ver figura 33(a). A interpolação do campo de deformações dentro do elemento é dada nas fórmulas (81), (82) e (83).

$$\hat{\epsilon}_{\xi\xi} = \hat{\epsilon}_{\xi\xi}|_O^{DI} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\xi\xi}|_D^{DI} - \hat{\epsilon}_{\xi\xi}|_B^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \xi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\xi\xi}|_A^{DI} - \hat{\epsilon}_{\xi\xi}|_C^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \eta \quad (81)$$

$$\hat{\epsilon}_{\eta\eta} = \hat{\epsilon}_{\eta\eta}|_O^{DI} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\eta\eta}|_D^{DI} - \hat{\epsilon}_{\eta\eta}|_B^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \xi + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{\epsilon}_{\eta\eta}|_A^{DI} - \hat{\epsilon}_{\eta\eta}|_C^{DI}) \frac{|J_O|}{|J|} \eta \quad (82)$$

$$\hat{\epsilon}_{\xi\eta} = \hat{\epsilon}_{\xi\eta}|_O^{DI} \quad (83)$$

Onde,

$\hat{\epsilon}_{ij}|_{A,B,C,D,O}^{DI}$  = componentes naturais covariantes do tensor de deformação ( $i = \xi, \eta$ ) nos pontos  $A, B, C, D$  e  $O$ , ver figura 33(b), determinadas pela interpolação dos deslocamentos;

$|\mathbf{J}_0|$  = determinante da matriz Jacobiana no centro do elemento;

$|\mathbf{J}|$  = determinante do Jacobiano no ponto de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ .

Como os deslocamentos estão referidos ao sistema cartesiano  $(x, y)$  e as deformações ao sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , para poder-se trabalhar com as duas interpolações em conjunto, deve-se referir todas as grandezas ao mesmo sistema de coordenadas. A determinação das deformações no sistema cartesiano está detalhada em d'Avila (2003).

Os dois deslocamentos correspondentes ao nó 5 (cinco), ver figura 33(a), são condensados à nível do elemento. A matriz de rigidez do elemento QMITC é calculada usando integração numérica com 2x2 pontos de Gauss.

Na figura 34 está representado o elemento finito com a linha de descontinuidade de deslocamento. A linha de descontinuidade divide o elemento em dois subdomínios:  $V_1$  e  $V_2$ .

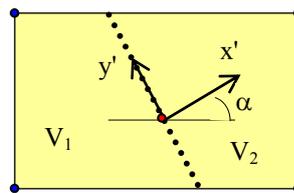


Figura 34: elemento com a linha de descontinuidade

O vetor  $\mathbf{e}$ , que contém as componentes do deslocamento rígido incremental relativo de  $V_2$  em relação à  $V_1$ , ou seja, o valor da abertura da fissura no sistema global, é dado pela fórmula (84). Salienta-se que a linha de descontinuidade deve passar pelo nó central do elemento.

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (84)$$

Onde,

$\mathbf{e}'$  = vetor que contém as componentes no sistema local  $(x', y')$  do vetor  $\mathbf{e}$ ;

$\mathbf{R}$  = matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade  $(x', y')$  para o sistema de coordenadas do elemento;

As interpolações dos deslocamentos para  $V1$  e  $V2$ , já considerando-se a linha de descontinuidade, são mostradas nas fórmulas (85) e (86).

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}') = \mathbf{NU} - \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}' \quad (85)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{NU} - (\mathbf{N}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{I})\mathbf{Re}' = \mathbf{NU} - \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}\mathbf{Re}' - \mathbf{Re}', \quad (86)$$

Onde,

$\mathbf{N}$  = matriz que contém as funções de interpolação padrão;

$\mathbf{U}$  = vetor deslocamento nodal;

$\mathbf{e}'$  = vetor descontinuidade interna de deslocamentos;

$\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

A matriz  $\boldsymbol{\phi}$  é definida pela fórmula (87).

$$\boldsymbol{\phi}^T = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_n] \quad (87)$$

Onde  $n$  é o número de nós do elemento e cada uma das submatrizes  $\boldsymbol{\phi}_i$ , de dimensão (2x2) para o caso bidimensional, depende da posição do nó  $i$  em relação à linha de localização, conforme mostrado na fórmula (88). Salienta-se que são estas matrizes que apresentam problemas no uso de elementos quadrados submetidos a corte puro. Pelo modelo de Dvorkin apresentado, quando se separa o elemento em dois subdomínios  $V1$  e  $V2$ , automaticamente fica definido se a fissura atravessa as bordas superior e inferior do elemento ou as laterais, indicando-se diretamente quais são os nós pertencentes a cada volume. Em corte puro, como a fissura atravessa o elemento interceptando exatamente os nós extremos da diagonal do

mesmo, essa definição a qual volume os nós pertencem não é automática e as matrizes  $\phi_i$  não são as mesmas dadas em (88). Uma melhor abordagem desse problema, bem como a solução apresentada juntamente com as matrizes usadas, é apresentada no capítulo 5.

$$\phi_i = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{em } V_1 \\ \mathbf{I} & \text{em } V_2 \end{cases} \quad (88)$$

Para dois pontos vizinhos, um do lado esquerdo e outro do lado direito da linha de localização, a descontinuidade de deslocamento é dada pela fórmula (89).

$$\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^- = \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (89)$$

Derivando-se as equações (85) e (86) obtém-se a mesma deformação incremental. Assim, para qualquer ponto em  $V1$  ou  $V2$ , a deformação é dada pela fórmula (90).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{U} - \phi\mathbf{R}\mathbf{e}') = \mathbf{B}\mathbf{d}_N \quad (90)$$

Sendo  $\mathbf{d}_N$  o vetor deslocamento que vai causar deformação no elemento.

Para que cada um dos subdomínios resultantes da subdivisão do elemento esteja em equilíbrio, a equação (91) deve ser satisfeita.

$$\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \, dS = \int_{S_L} \mathbf{t} \, dS \quad (91)$$

A matriz  $\mathbf{P}$  tem a função de selecionar as componentes de tensão que serão transmitidas pela fissura. As relações constitutivas, colocadas agora de forma incremental e linearizadas, para a linha de localização e o resto do domínio são definidas, respectivamente, de acordo com as fórmulas (92) e (93).

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (92)$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (93)$$

Onde  $\mathbf{D}^e$  é a matriz de rigidez elástica do material e  $\mathbf{D}^{cr}$  é a matriz de rigidez tangente da linha de localização. Substituindo-se as equações (93) e (90) na equação de equilíbrio de forças ( $f_{ext} = f_{int}$ ) e após alguns arranjos chega-se à fórmula (94).

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{U} - \phi \mathbf{R} \mathbf{e}') dV = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - {}^t \mathbf{F} \quad (94)$$

Onde,

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} = \int_S \mathbf{N}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} dS \quad (95)$$

$${}^t \mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T {}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (96)$$

Substituindo-se na equação (91) as relações constitutivas dadas em (92) e (93) e agrupando-se os parâmetros mostrados nas fórmulas (97) e (98), chega-se à expressão que relaciona os graus de liberdade internos e externos de forma direta, ver fórmula (99).

$$\mathbf{S}_{uu} = \int_{S_L} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} dS \quad (97)$$

$$\mathbf{S}_{cc} = \int_{S_L} (\mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \phi \mathbf{R} + \mathbf{D}^{cr}) dS \quad (98)$$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu} \mathbf{U} \quad (99)$$

Pode-se condensar os graus de liberdade correspondentes à linha de localização a nível de elemento. Usando-se a equação (99) na equação (94), finalmente chega-se ao passo linearizado mostrado nas equações (100) e (101).

$${}^t \mathbf{K}^* \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - {}^t \mathbf{F} \quad (100)$$

$${}^t \mathbf{K}^* = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{I} - \phi \mathbf{R} \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu}) dV \quad (101)$$

Onde  ${}^t \mathbf{K}^*$  é a matriz de rigidez tangente consistente da nova formulação. A configuração final de equilíbrio é obtida efetuando-se duas etapas de iterações: no elemento até que a igualdade (91) seja estabelecida; e na estrutura global, equação (100), a iteração padrão, amplamente utilizada em análise via Elementos Finitos. A iteração da equação (91) até que o equilíbrio entre as forças transmitidas na fissura e as forças no domínio do elemento seja estabelecido é o ponto decisivo do modelo. A seguir, apresenta-se como o processo é feito no modelo original de Dvorkin et al. (1990), considerando-se apenas a contribuição do concreto.

Quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento, para a  $i$ -ésima iteração em (100), os seguintes procedimentos devem ser realizados a nível do elemento:

1)  $k=0$ ;

${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_{(0)}{}^{(i)} = {}^t\mathbf{e}'$  - abertura da fissura igual à da iteração anterior;

2)  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{d}_{N(k)}{}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\phi}\mathbf{R}\mathbf{e}'_{(k)}{}^{(i)}$  - deslocamento que vai causar deformação no elemento;

3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno (condensado), resolvendo-se o sistema (102).

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{ee}{}^{(i)} & {}^t\mathbf{K}_{ei}{}^{(i)} \\ {}^t\mathbf{K}_{ie}{}^{(i)} & {}^t\mathbf{K}_{ii}{}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{d}_{Ne(k)}{}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{d}_{Ni(k)}{}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e{}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i{}^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (102)$$

O sub-índice  $i$  refere-se ao nó interno e o sub-índice  $e$  aos quatro nós externos do elemento.

4) Calcular, utilizando (90) para determinar as deformações, as tensões incrementais no domínio do elemento,  $\boldsymbol{\sigma}_{(k)}{}^{(i)}$ , por (93);

5) Calcular as tensões incrementais na linha de localização,  $\mathbf{t}_{(k)}{}^{(i)}$ , usando-se a relação (92);

6) Calcula-se  $\Delta\mathbf{e}'_{(k)}{}^{(i)} = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \left[ \int_{S_L} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{(k)}{}^{(i)} dS - \int_{S_L} \mathbf{t}_{(k)}{}^{(i)} dS \right]$  - incremento da abertura da fissura;

7) Se  $(|\Delta\mathbf{e}'|) < (\text{tolerância})$ , então a convergência a nível do elemento foi alcançada; se não, incrementa-se a abertura de fissura:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_{(k+1)}{}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_{(k)}{}^{(i)} + \Delta\mathbf{e}'_{(k)}{}^{(i)}$ ,  $k = k+1$  e retorna-se ao passo 2.

Para os elementos onde a linha de localização foi aberta, a valor da tensão só é relevante no centro do elemento.

#### 4.4.2 Modelos de d'Avila e Brisotto

Em estruturas de concreto armado, uma das principais características é o aparecimento de várias fissuras espalhadas ao longo da peça. Com o intuito de representar este comportamento, d'Avila (2003) fez algumas alterações no modelo original proposto por Dvorkin et al. (1990). O modelo resultante é capaz de representar um número variável de fissuras em cada elemento e considera a parcela referente à armadura no equilíbrio de forças no elemento.

A armadura altera significativamente o processo de formação e abertura das fissuras no concreto e, conseqüentemente, a transmissão de forças através das mesmas. O surgimento de uma fissura acontece quando as deformações nas barras de aço da armadura e o concreto adjacente têm valores diferenciados, havendo um escorregamento relativo entre os dois materiais. Assim, a abertura da fissura é governada pelas diferenças entre as distribuições de deformações do aço e do concreto na região da fissura.

Uma observação importante colocada por Brisotto (2006) é que o modelo de d'Avila (2003) somente pode simular a transferência de tensão através de fissuras que sejam ortogonais às armaduras. Desse modo, somente as tensões (ou forças, ou deformações) na direção normal à fissura (e longitudinal à barra de aço) são determinadas. Porém, mesmo podendo-se trabalhar com as grandezas envolvidas de forma escalar (já que somente uma direção é considerada), a forma tensorial de representação das variáveis é mantida.

Com a inclusão das barras de armadura no modelo, a configuração de equilíbrio para a igualdade (91) não é mais obtida pela iteração descrita anteriormente. Agora, o processo é governado pela transferência de tensões por aderência entre as barras de armadura e o concreto adjacente.

O procedimento, do modelo de d'Avila (2003), para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a *i*-ésima iteração da estrutura global, é o seguinte:

- 1) Considerar a abertura da fissura igual à abertura da fissura da iteração global anterior (como no processo original de Dvorkin et al. (1990));
- 2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que vai causar deformação no elemento (como no processo original de Dvorkin et al. (1990));
- 3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno (como no processo original de Dvorkin et al. (1990));
- 4) Determinar as deformações,  $\epsilon_c^{(i)}$ , e as tensões,  $\sigma_{(k)}^{(i)}$ , do concreto no domínio do elemento, respectivamente pelas equações (90) e (93) (como no processo original de Dvorkin et al. (1990));
- 5) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento e na fissura igual aos valores da iteração global anterior, conforme fórmulas (103) e (104);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i-1)} \quad (103)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i-1)} \quad (104)$$

6) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento,  $\boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)}$ , considerando o comportamento elasto-plástico perfeito para o material;

7) Determinar as tensões na linha de localização,  $\mathbf{t}_{(k)}^{(i)}$ , usando a relação (92) (como no processo original de Dvorkin et al. (1990));

8) Calcular as forças atuantes:

a) a força resultante do concreto no domínio do elemento,  $\mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)}$ , utilizando a parte esquerda na igualdade (91);

b) a força resultante do aço no domínio do elemento, conforme fórmula (105);

$$\mathbf{F}_{ES(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)} A_s \quad (105)$$

c) a força resultante total no domínio do elemento, conforme fórmula (106);

$$\mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{ES(k)}^{(i)} \quad (106)$$

d) a força resultante do concreto transmitida na linha de localização,  $\mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)}$ , utilizando a parte direita na igualdade (91);

e) a força resultante no aço na fissura, de acordo com a fórmula (107);

$$\mathbf{F}_S^{(i)} = \mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)} - \mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)} \quad (107)$$

9) Determinar a deformação na armadura na fissura, de acordo com a fórmula (108);

$$\epsilon_{s0(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{S(k)}^{(i)} / E_s / A_s \quad (108)$$

10) Com o valor da deformação na armadura na fissura,  $\epsilon_{s0(k)}^{(i)}$ , para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência e calcular:

- a) o comprimento de transferência  $x_{Rcrack}$ , através de (79);
- b) a deformação média do aço ao longo do elemento,  $\epsilon_{sm(k)}^{(i)}$ , utilizando a equação (61) para determinar os valores extremos;
- c) a deformação média do concreto no domínio do elemento,  $\epsilon_{cm(k)}^{(i)}$ , utilizando a equação (62) para determinar os valores extremos;
- d) o espaçamento entre fissuras,  $DLS$ , e a quantidade de fissuras do elemento,  $NF$ , conforme o caso de peça longa ou curta;
- e) o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente,  $s_0$ , utilizando-se a equação (59) ou as equações (57) e (58);

11) Calcular o valor da abertura de cada fissura (que será utilizado na equação (92) para determinar o valor da tensão na fissura) através da fórmula (109);

$$UC_1 = \mathbf{e}'(1) = 2s_0 \quad (109)$$

12) Calcular o valor total da abertura da fissura por elemento, que será utilizado nas equações (85) e (86) na determinação do deslocamento que vai causar deformação no elemento, através da fórmula (110);

$$UC = \mathbf{e}'(1) = UC_1 \times NF \quad (110)$$

13) Repetir as etapas 6), 7) e 8-a), 8-b), 8-c), 8-d);

14) Calcular as forças:

a) a força resultante no aço na fissura, de acordo com a fórmula (111);

$$\mathbf{F}_{\text{CRS}(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} E_s A_s \quad (111)$$

b) a força resultante total na linha de localização, de acordo com a fórmula (112);

$$\mathbf{F}_{\text{CT}(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{\text{CR}(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{\text{CRS}(k)}^{(i)} \quad (112)$$

15) Repetir o processo todo mais uma vez.

No modelo de Dvorkin, apenas uma fissura pode formar-se em cada elemento, passando pelo nó central. No concreto armado, surgem várias fissuras espalhadas ao longo do elemento, mas, para o equilíbrio interno de forças, considera-se todas agrupadas no centro do mesmo.

O procedimento exposto acima é repetido somente duas vezes para cada iteração global a nível de estrutura. Isto se deve ao fato de que, durante este procedimento, é utilizada a rotina do modelo de transferência de tensão, cujos parâmetros também são determinados via processo iterativo. Quando a convergência a nível de estrutura é alcançada, a convergência a nível de elemento também é atingida. Após o surgimento da fissura, todas as solicitações são determinadas apenas para o nó central do elemento, por onde passa a linha de localização. As solicitações que serão utilizadas na iteração da estrutura global, equação (100), são as tensões no concreto no domínio do elemento e na armadura ao longo do mesmo.

Uma das modificações mais significativas que Brisotto (2006) realizou no modelo de d'Avila (2003), que tem restrição de simular somente a transferência de tensão por aderência em fissuras normais ao eixo longitudinal das barras de armadura, foi a consideração de fissuras inclinadas em relação às mesmas. Portanto, no processo iterativo apresentado anteriormente, todas as solicitações são calculadas na direção normal à fissura, que coincide com a direção da barra de aço. No modelo de Brisotto (2006), é considerado o ângulo de inclinação da fissura no cálculo das solicitações na linha de localização.

Primeiramente, no cálculo da tensão,  $\sigma_{ES}$ , e da força resultante,  $F_{ES}$ , da armadura no domínio do elemento, são determinadas as contribuições da armadura longitudinal ( $\sigma_{ES}(1)$  e  $F_{ES}(1)$ ) e transversal ( $\sigma_{ES}(2)$  e  $F_{ES}(2)$ ). Em seguida, é feita a rotação da força,  $F_{ES}$ , do sistema de coordenadas globais para o sistema de coordenadas locais da fissura,  $F_{ES}'$ , como mostra a figura 35(a). A força resultante no aço na fissura,  $F_S'$ , dada pela equação (107), passa a ser calculada nas direções normal e tangencial à fissura, ver figura 35(b). Em seguida, para a realização dos demais passos do processo iterativo, é feita a rotação desta força do sistema local para o global,  $F_S$ . Assim, é possível simular a transferência de tensões também em fissuras inclinadas, bem como a influência da armadura transversal no processo de fissuração.

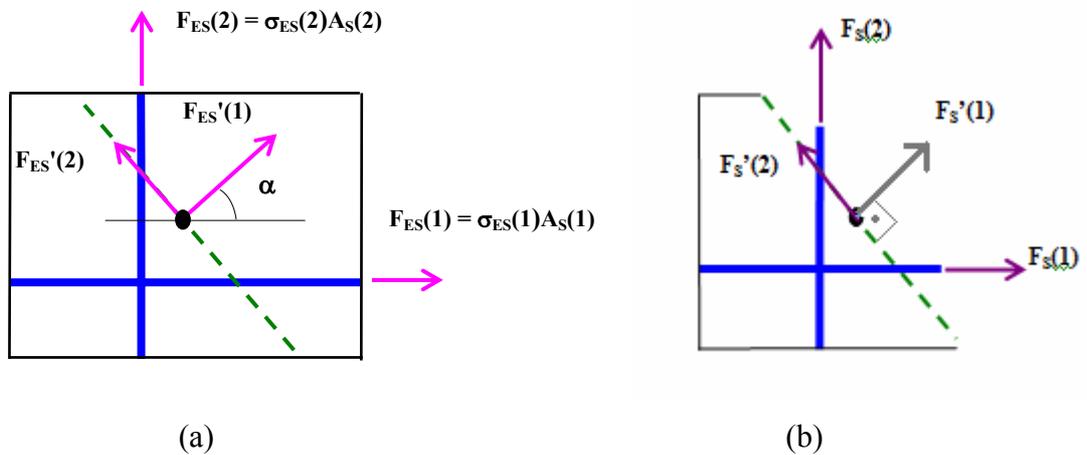


Figura 35: forças na armadura em (a) domínio do elemento e (b) linha de localização

## 5 MODELO PROPOSTO

### 5.1 INTRODUÇÃO

Para que seja possível simular corretamente painéis de concreto armado quadrados submetidos ao corte puro, algumas modificações devem ser incluídas nos modelos apresentados no item 4.4.

Em estruturas submetidas ao corte puro, não há tensões normais às faces do painel, apenas tensões tangenciais, sendo o tensor de tensões para o estado plano dado em (113). Este tensor é obtido via M.E.F. (Método dos Elementos Finitos) a partir dos deslocamentos nodais dos elementos (onde,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  é a tensão tangencial no painel).

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

As direções principais de tensões ou deformações estão inclinadas a 45° com a horizontal. Assim, para o painel quadrado da figura 36, a linha de localização possui um ângulo de inclinação de 45° em relação à horizontal, passando no nó central e terminando em nós de extremidade do elemento. O fluxo de tensões nas faces do elemento deve ser constante e possuir a orientação indicada na mesma figura, sendo uma diagonal do elemento tracionada e a outra comprimida. Salienta-se que a fissura no modelo sempre se forma perpendicularmente em relação à direção da tensão principal, sendo esta tensão com o mesmo valor, em módulo, da tensão tangencial aplicada.

Deve-se ressaltar que, na rotina de cálculo das forças internas do elemento fissurado apresentada no item 4.4, as tensões são calculadas apenas no nó central. Desse modo, primeiramente calcula-se a deformação em cada direção do nó central a partir dos deslocamentos nodais externos e da abertura da fissura, determinam-se as tensões neste nó e as forças equivalentes em cada direção, realiza-se o equilíbrio interno do elemento e monta-se o vetor de forças internas equivalentes.

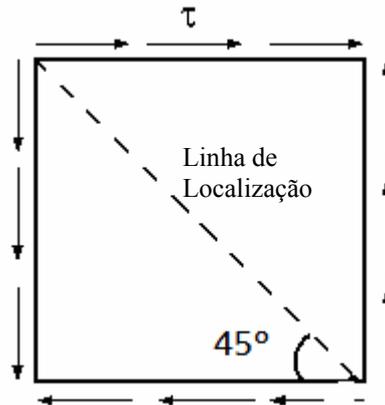


Figura 36: tensões em um painel submetido ao corte puro

O ponto crucial da metodologia empregada é a compatibilidade entre as tensões no elemento obtidas através do método dos elementos finitos com as tensões transmitidas na linha de localização da fissura. Isso ocorre devido ao fato de que para obter-se a convergência do processo, o equilíbrio entre a linha de localização e o elemento finito deve ser obtido. Para que isto seja possível, a condição expressa na equação (114) deve ser cumprida e é esta condição que governa o problema.

$$\mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{ES(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{CRS(k)}^{(i)} \quad (114)$$

Onde,

$\mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)}$  = força no concreto calculada no centro do elemento finito através da integração das tensões do elemento;

$\mathbf{F}_{ES(k)}^{(i)}$  = força no aço calculada no centro do elemento finito através da deformação média do aço ao longo do elemento ( $\varepsilon_{sm}$ );

$\mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)}$  = força no concreto calculada na fissura através da integração das tensões transmitidas através da fissura;

$\mathbf{F}_{CRS(k)}^{(i)}$  = força no aço calculada na fissura através da deformação do aço na fissura ( $\varepsilon_{s0}$ );

Esta condição indica que as forças totais no elemento finito e na fissura, no centro do elemento, devem ser iguais para que exista o equilíbrio interno do mesmo. Ainda assim, não necessariamente o equilíbrio externo é alcançado, devendo-se resolver o sistema de equações global da estrutura, analisando-se a convergência externa. Ou seja, há um circuito de  $m$  iterações internas dentro de uma iteração externa e um circuito de  $n$  iterações externas dentro de um mesmo incremento de carga ou deslocamento. O algoritmo incremental iterativo usado no modelo é do tipo Newton-Raphson modificado. Observa-se ainda que, devido à inclusão das barras de armadura, o processo torna-se bem mais complicado devido à lei de escorregamento e transferência de tensão por aderência do modelo, o que será discutido posteriormente. Salienta-se também que nos modelos desenvolvidos por d'Avila (2003) e Brisotto (2006), apenas duas iterações internas eram realizadas. Isto funciona bem para tirantes de concreto simples ou armado e para vigas em flexão onde a componente normal de tensão é predominante. Porém, para painéis submetidos ao corte, a convergência das forças internas do elemento precisa de um número maior de iterações, necessitando-se de um critério de convergência interno.

O estudo de painéis submetidos ao corte puro deve ser separado em dois grandes grupos para que se possa haver uma maior compreensão do fenômeno físico: painéis de concreto simples e painéis de concreto armado. Há grandes diferenças no modelo numérico entre estes dois grupos de painéis, principalmente porque, em concreto simples, a abertura da fissura é obtida através da diferença de forças entre o concreto no elemento e na fissura e, em concreto armado, a abertura da fissura é obtida pela lei de escorregamento das barras de armadura e este escorregamento deve estar de acordo com o balanço de forças dado na fórmula (114), o que torna o processo de convergência mais complicado. Portanto, primeiramente, são apresentadas as modificações realizadas necessárias para a correta simulação de painéis de concreto simples submetidos a corte puro e, a seguir, são colocadas as mudanças necessárias para painéis de concreto armado.

## 5.2 MUDANÇAS NO MODELO PARA PAINÉIS DE CONCRETO SIMPLES

Na simulação numérica de painéis quadrados submetidos a corte puro, para obter-se o comportamento físico correto, uma alternativa é o uso de incrementos em deslocamentos prescritos nos quatro nós de extremidade do painel, mantendo-se todos eles vinculados nas

duas direções globais  $x$  e  $y$ , conforme mostrado na figura 37. Desse modo, as tensões são iguais em cada face do elemento para o mesmo incremento de deslocamento, bem como as reações e deslocamentos nos nós.

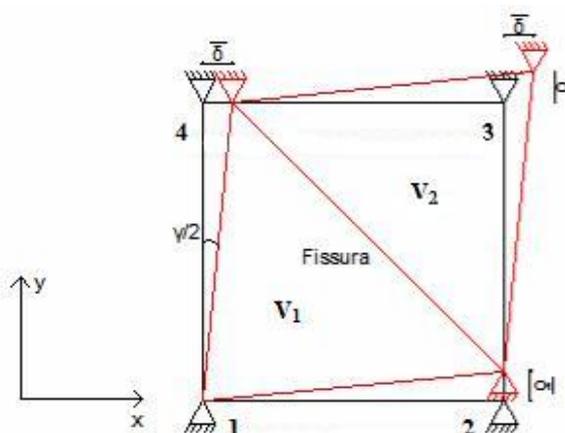


Figura 37: simulação de painel sob corte puro

Uma das dificuldades na resolução deste tipo de problema é que a fissura intercepta dois nós externos do elemento. No modelo de Dvorkin et al. (1990), esta situação não está prevista: a fissura atravessa as bordas superior e inferior do elemento (figura 38(b)) ou atravessa as laterais do mesmo (figura 38(a)). Desta forma, a definição de qual volume cada nó pertence é automática, já que, segundo Dvorkin et al. (1990), quando a linha de localização é formada, o elemento é dividido em 2 volumes:  $V1$ , que se mantém fixo e  $V2$ , que sofre um deslocamento de corpo rígido em relação a  $V1$ .

No caso dos painéis submetidos a corte puro, conforme já mostrado, os nós interceptados pela fissura ficam, a princípio, indefinidos em relação ao volume a qual pertencem. Mas, analisando-se o problema mais de perto, percebe-se que a definição do volume a qual pertencem os nós é importante para a determinação das matrizes  $\phi_i$  do modelo de Dvorkin et al. (1990) (ver fórmulas (88), (89) e (90)). A função destas matrizes no algoritmo é permitir que a abertura da fissura seja descontada do deslocamento prescrito dos nós, para que se obtenha o deslocamento que causa a deformação no elemento, conforme a fórmula (90). Dessa forma, fica claro que, para o painel, deve-se descontar a abertura da fissura nos nós apenas nas direções dos deslocamentos prescritos dados. Por exemplo, para o nó superior esquerdo da figura 37, deve-se descontar a abertura apenas do deslocamento prescrito na

horizontal, já que, na vertical, não há deslocamento prescrito e, caso fosse descontada a abertura nesta direção, haveria um movimento vertical deste nó sem nenhum sentido físico, perdendo-se o estado de corte puro, o que é errado. Similarmente, é feito um raciocínio semelhante para os demais nós. Concluindo-se, para que se obtenha os resultados corretos na simulação numérica, na determinação dos deslocamentos associados às deformações (ver equações (85), (86) e (90)), deve-se descontar a abertura da fissura apenas nas direções dos deslocamentos possíveis dos nós. Portanto, a matriz  $\phi$  no modelo modificado, é constituída por submatrizes  $\phi_i$  que não necessariamente são  $\phi_i = \mathbf{0}$  em  $V1$  e  $\phi_i = \mathbf{I}$  em  $V2$ . Dessa forma, apenas por definição, determina-se que os nós com deslocamentos prescritos pertencem ao volume 2, porém usando-se as matrizes dadas em (116) e fica para o volume 1 os nós sem nenhum deslocamento prescrito, conforme mostrado em (115).

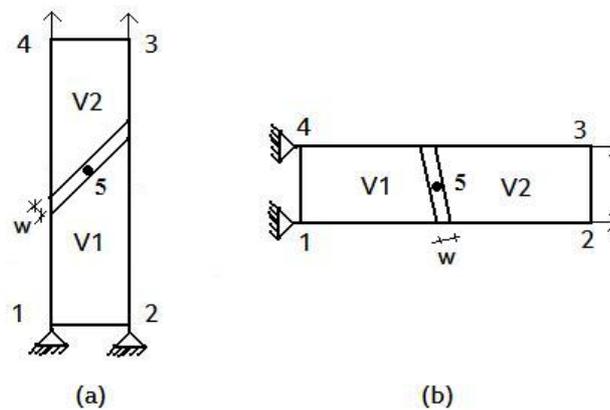


Figura 38: relação entre nós e volumes para tirantes

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Os nós 2, 3, e 4 pertencem ao volume  $V2$ , sendo suas submatrizes  $\phi_i$  dadas em (116).

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Antes de passar para os painéis com armadura, cabe ainda salientar o critério de convergência adotado para o circuito de interações internas. Para o concreto simples, a abertura da fissura é calculada através de incrementos de abertura dados pela fórmula (117). Toma-se, para cada iteração interna do algoritmo, a diferença das forças do concreto no elemento e fissura, conforme a equação (114) (anulando-se as parcelas referentes ao aço) e divide-se esta diferença pela matriz  $S_{cc}$  dada em (98). Acumulando-se os diversos incrementos de abertura ( $U_{crack(k)}^{(i)}$ ), obtém-se o valor total da abertura da fissura para o incremento de carga ( $U_{crack}^{(i)}$ ) e, por consequência, o equilíbrio interno do elemento, conforme mostrado em (118). Quanto mais iterações forem feitas, menor será o incremento da abertura e maior será a abertura total acumulada, sendo que o cálculo do critério de convergência usado é mostrado em (119).

$$U_{crack(k)}^{(i)} = S_{cc}^{-1} (\mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)} - \mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)}) \quad (117)$$

$$U_{crack}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_k} U_{crack(k)}^{(i)} \quad (118)$$

$$T = \frac{(U_{crack(k)}^{(i)})^2}{(U_{crack}^{(i)})^2} * 10^5 < 1 \quad (119)$$

### 5.3 MUDANÇAS NO MODELO PARA PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO

Implementadas as mudanças para painéis de concreto simples, o próximo passo é a implementação das mudanças para painéis de concreto armado. Conforme já mencionado anteriormente, o processo iterativo a nível interno do elemento torna-se mais complexo, pois agora a abertura da fissura não é mais calculada a partir das equações (117), (118) e (119). Esta abertura é calculada através do escorregamento das barras de armadura em relação ao concreto, de acordo com a teoria de transferência de tensão por aderência mostrada no item 4.2. O problema é que o modelo envolve casos complexos, com solução iterativa e que, em algumas vezes, as equações não possuem solução. Além disso, este modelo de transferência de tensão deve fornecer aberturas coerentes que devem culminar com o equilíbrio interno do elemento, havendo mais um certo número de iterações dentro das  $m$  iterações internas do elemento, o que pode tornar o processo mais demorado e altamente instável. Ressalta-se também que o modelo de transferência de tensão por aderência foi desenvolvido para tirantes de concreto armado e deve ser adaptado para os painéis.

Primeiramente, as mudanças realizadas para painéis de concreto simples são mantidas, porém, o critério de convergência é alterado já que a abertura não é mais calculada daquela forma. A seguir, descreve-se as alterações feitas para painéis com a mesma taxa de armadura nas duas direções e, posteriormente, as modificações necessárias para painéis com taxas de armadura diferentes.

#### 5.3.1 Número de Fissuras

É necessária a determinação da quantidade correta de fissuras no painel. Em concreto simples, em geral, apenas uma fissura é formada, sendo a sua abertura unitária igual à abertura total de fissura de todo o painel. Em concreto armado, várias fissuras formar-se-ão de acordo com o escorregamento das barras de armadura. Para determinar-se esse número de fissuras, deve-se tomar o comprimento do elemento perpendicular à linha de localização e dividi-lo pelo comprimento de transferência de tensão, dado na fórmula (79), necessário para formar-se uma nova fissura. Como este comprimento de transferência é calculado na direção das barras da armadura, calcula-se o comprimento de transferência horizontal ( $x_{r1}$ ), o comprimento de transferência vertical ( $x_{r2}$ ) e, compondo-se vetorialmente os dois, é obtido o

comprimento de transferência normal ( $x_{rn}$ ). Tomando-se a diagonal do elemento (perpendicular à fissura) e dividindo-se por  $x_{rn}$ , obtém-se o número de fissuras ( $NF$ ) (ver figura 39(a)). Este é o número de fissuras que deve ser usado na determinação do deslocamento que causa deformação (110).

No caso de painéis com taxas de armadura iguais nas duas direções,  $NF = NF_1 = NF_2$ , onde  $NF_1$  e  $NF_2$  são, respectivamente, o número de fissuras calculado para as direções horizontal e vertical. Salienta-se que o número total de fissuras do painel é dado pela equação (120), conforme mostrado na figura 39(b).

$$NF_{real} = (NF_1 + NF_2) - 1 \quad (120)$$

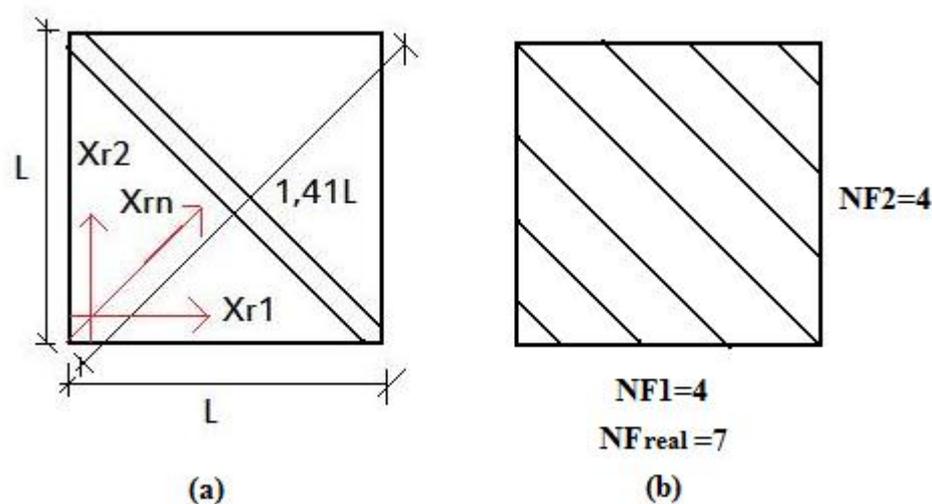


Figura 39: (a) comprimentos de transferência de tensão e (b) número real de fissuras

### 5.3.2 Escorregamento

O próximo passo é a determinação do cálculo do escorregamento para as barras do painel. Cada direção (horizontal e vertical) é trabalhada independentemente, como se fosse um tirante

de concreto armado, compondo-se as duas direções para formar o comportamento diagonal do painel. Portanto, usa-se o modelo de transferência de tensão por aderência, apresentado no item 4.2, para o cálculo do escorregamento e deformações no aço e no concreto para as direções  $x$  e  $y$ . Dessa forma, toma-se a área perpendicular às direções das barras de armadura, determina-se o comportamento da peça (longa ou curta) e calcula-se o escorregamento das barras, sendo este procedimento feito para cada direção global que coincide com a direção das mesmas. Em seguida, compõe-se a parcela diagonal do escorregamento para o painel conforme mostrado na figura 40. Percebe-se pela figura que, se os escorregamentos são iguais nas duas direções (no caso de painéis com a mesma taxa de armadura nas duas direções), deve-se tomar, para o escorregamento normal, metade da soma vetorial dos escorregamentos  $s_1$  e  $s_2$ , para que a abertura da fissura a ser calculada esteja correta. A abertura da fissura é sempre igual a duas vezes o escorregamento ( $U_{cn} = 2S_n$ ), segundo o modelo de transferência de tensão por aderência. Observando-se os nós 2 e 4 na figura 40, percebe-se que eles encontram-se na metade da linha de localização, devendo-se descontar horizontalmente do nó 4 e verticalmente do nó 2 apenas a metade da abertura da fissura. Isto faz com que o painel, que possuía uma distorção angular de  $\gamma/2$  em cada uma das bordas, retorne a uma distorção de  $\gamma'/2$ , ou seja, desconta-se o movimento de corpo rígido provocado pela fissura para que se possa calcular o deslocamento que causa deformação, conforme a equação (90).

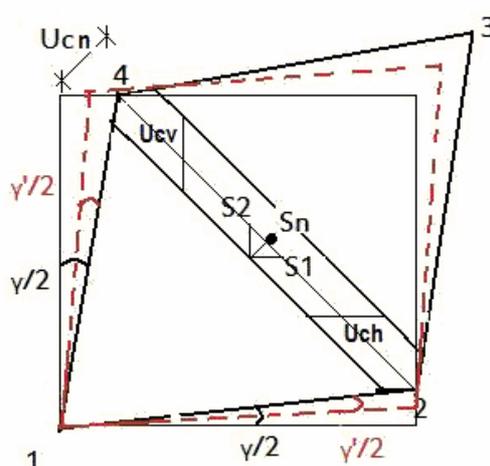


Figura 40: determinação do escorregamento e abertura de fissura do painel

Uma observação importante é que, para retornar-se a distorção do painel para a posição  $\gamma'/2$ , descontando-se meia abertura horizontal ( $U_{ch}/2$ ) do nó 4 e meia abertura vertical ( $U_{cv}/2$ ) do nó

2, deve-se descontar estas mesmas quantidades do nó 3, para que os comprimentos dos lados do painel mantenham-se constantes e a simulação seja correta. Lembrando-se que  $U_{ch}/2 = U_{cv}/2 = U_{cn} / \sqrt{2}$  e, ao descontar-se estas aberturas do nó 3 nas direções horizontal e vertical, na verdade desconta-se deste nó uma abertura normal inteira na direção a 45°, o que é realmente necessário de acordo com a figura.

### 5.3.3 Deformações

Deve-se ter cuidado também para que a soma da contribuição das barras de aço seja feita corretamente no sentido em que uma diagonal do painel está tracionada e a outra está comprimida. Como o modelo de transferência de tensão por aderência é desenvolvido para barras tracionadas (tirantes de concreto armado), deve-se somar as parcelas nos nós 2 e 4 no sentido contrário, já que a diagonal destes dois nós está comprimida (ver figura 36).

Uma outra modificação ocorrida no modelo, causada pela inclusão das barras da armadura, é a aparição de deformações no concreto no sentido das barras longitudinal e transversal devido à transferência de tensão por aderência. Pelo M.E.F., só há tensões e deformações tangenciais no elemento, ou seja, para o nó central, por exemplo, há apenas a deformação na direção inclinada a 45° em relação à horizontal, não havendo deformações no elemento nas direções dos eixos globais  $x$  e  $y$ . Porém, como as barras da armadura estão aderidas ao concreto, orientadas nas direções globais  $x$  e  $y$  e possuem deformações nestas direções, o concreto ao redor destas barras também possuirá deformações nestas direções pela transferência de tensão por aderência das barras da armadura. Dessa forma, o nó central possui as duas deformações orientadas nas direções dos eixos globais, causadas pela deformação das barras de armadura (deformações calculadas pelo modelo de transferência de tensão por aderência) e possui a deformação tangencial, obtida via M.E.F., pelo estado de corte imposto ao painel, completando-se todo o tensor de deformações do estado plano.

Quanto a plotagem e saída dos resultados, a principal curva a ser comparada entre os resultados numéricos e experimentais é a da distorção angular x tensão tangencial. Conforme Vecchio (1981) mostra, a distorção angular pode ser calculada pela fórmula (5), que envolve a deformação da diagonal comprimida de concreto mais a deformação longitudinal causada pela armadura. Por relações trigonométricas, prova-se que a deformação da diagonal comprimida é

igual ao deslocamento prescrito imposto dividido pelo comprimento da borda do painel. A deformação longitudinal do aço é obtida diretamente do modelo de transferência de tensão por aderência, possibilitando-se, então, o cálculo da distorção pela fórmula (121).

$$\gamma_{it} = 2 \left( \frac{\delta}{L} + \varepsilon_l \right) / \tan \theta \quad (121)$$

A tensão tangencial é calculada a partir das reações obtidas nos vínculos do painel divididas pela área da borda. Para a plotagem da curva, a tensão deve estar em *MPa* e a distorção multiplicada por mil. As outras curvas a serem comparadas são:

a) deformação longitudinal x tensão tangencial: plota-se a deformação longitudinal,  $\varepsilon_l$ , obtida da lei de escorregamento, pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);

b) deformação transversal x tensão tangencial: plota-se a deformação transversal,  $\varepsilon_t$ , obtida da lei de escorregamento, pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);

c) deformação da diagonal comprimida x tensão tangencial: plota-se a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$ , obtida conforme descrito anteriormente, pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);

d) deformação da diagonal tracionada x tensão tangencial: plota-se a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$ , obtida conforme a equação (7), pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);

e) tensão da diagonal comprimida x tensão tangencial: plota-se a tensão da diagonal comprimida,  $f_d$ , obtida através das relações dos Círculos de Mohr de Tensões (conforme o valor, em módulo, dado na equação (122), baseada na figura 4), além da tensão da diagonal comprimida calculada analiticamente pela equação (17) do modelo de Vecchio (1981), pela tensão tangencial e comparam-se estas duas curvas com a experimental e a analítica obtidas pelo mesmo autor.

$$\begin{aligned} \text{Raio} &= \frac{\sqrt{(f_t - f_l)^2 + (2V)^2}}{2} \\ f_d &= \text{raio} + \frac{(f_t + f_l)}{2} \end{aligned} \quad (122)$$

$f_l, f_t$  = tensões no concreto causadas pelo aço nas direções longitudinal e transversal;

$V$  = tensão tangencial;

f) tensão da diagonal tracionada x tensão tangencial: plota-se a tensão da diagonal tracionada,  $f_{dt}$ , obtida através das relações dos Círculos de Mohr de Tensões (conforme o valor, em módulo, dado na equação (123), baseada na figura 4), além da tensão da diagonal tracionada calculada analiticamente pela equação (18) do modelo de Vecchio (1981), pela tensão tangencial e comparam-se estas duas curvas com a experimental e a analítica obtidas pelo mesmo autor.

$$Raio = \frac{\sqrt{(f_l - f_t)^2 + (2V)^2}}{2} \quad (123)$$

$$f_{dt} = raio - \frac{(f_l + f_t)}{2}$$

g) Círculos de Mohr de Tensões e Deformações para diversos estágios do carregamento;

h) Variação do ângulo das tensões e deformações principais com o aumento da tensão tangencial: apenas para os painéis com taxas de armadura diferentes nas duas direções, o que faz com que os ângulos das tensões e deformações principais sejam diferentes de 45°. Isto é melhor detalhado no item 5.3.4.

Cabe ainda salientar-se a consideração de alguns parâmetros dos materiais usados como entrada de dados na simulação dos painéis. O módulo de elasticidade do concreto foi calculado pela tangente à origem da parábola tensão x deformação do concreto comprimido. Este valor é igual a duas vezes a resistência à compressão do concreto dividida pela deformação de compressão obtida em um nível de tensão igual à resistência à compressão, conforme expressão da fórmula (18). O coeficiente de Poisson para o concreto foi mantido constante em 0,25 para todos os exemplos. A resistência à compressão do concreto é dada experimentalmente por Vecchio (1981) para cada painel ensaiado, bem como as taxas, diâmetros, tensão de escoamento e distribuição das barras da armadura. O módulo de elasticidade do aço foi mantido em 200.000 MPa para todos os painéis. Quanto à resistência à tração do concreto, foram tomados maiores cuidados, pois é o principal parâmetro a influenciar no processo: para cada painel, Vecchio (1981) dá a tensão no nível de carga onde foram percebidas as primeiras fissuras a serem formadas nos painéis. Então é óbvio que a

resistência à tração real do concreto é menor que este nível observado, já que quando as fissuras são percebidas, elas já possuem uma certa abertura que pode ser detectada e a resistência à tração já foi ultrapassada. Portanto, este seria um limite superior da resistência à tração do concreto. Já pela curva distorção angular x tensão tangencial, como são medidas estas grandezas para cada nível de carga, sempre haverá uma medição no trecho elástico (antes de ser atingida a resistência à tração) e uma primeira medida no trecho inelástico (logo após ser atingida a resistência à tração), que é justamente onde a curva muda de inclinação, tornando-se não-linear e perdendo rigidez. Esta última medição no trecho elástico seria um limite inferior para a resistência à tração. Portanto, os valores dos painéis usados como entrada de dados para a resistência à tração estão todos dentro desta faixa: entre a última medição do trecho elástico e o nível de tensão observado onde se formaram as primeiras fissuras. Quanto à energia de fratura do concreto, foram adotados valores comumente usados na prática da Engenharia.

### **5.3.4 Efeito de Pino**

A inclusão do efeito de pino é feita com o uso dos modelos que foram apresentados no item 3.2.2. Através desses modelos, é possível a determinação das forças de pino para as armaduras longitudinal e transversal, conforme a formulação apresentada. De posse das forças de pino e das áreas da armadura, pode ser calculada uma tensão de pino e, dessa forma, calcula-se essa contribuição adicional do aço no vetor de forças do elemento através do próprio M.E.F. (da mesma forma que foi calculada a parcela de contribuição das barras de aço na direção do seu próprio eixo). Dessa forma, as reações nas bordas do painel serão maiores se comparadas aos resultados sem a inclusão do efeito.

### **5.3.5 Modelo Particularizado para Painéis com Taxas Diferentes de Armadura nas Duas Direções**

Para painéis onde a taxa de barras de aço em uma direção não for igual à taxa de aço na outra direção ( $\rho_l \neq \rho_t$ ), há algumas modificações adicionais a serem feitas no modelo proposto.

Primeiramente, mantêm-se as modificações realizadas para os painéis com a mesma taxa de armadura nas duas direções e as seguintes correções devem ser realizadas:

- a) no cálculo da quantidade de fissuras, como os comprimentos de transferência de tensão são diferentes nas duas direções, a composição do vetor não resulta a  $45^\circ$ , conforme mostrado na figura 41. Desse modo, deve-se decompor este vetor resultante em duas componentes, uma orientada a  $45^\circ$  e a outra perpendicular a esta direção. O número de fissuras será dado pela divisão do comprimento da diagonal do painel (perpendicular à linha de localização) pela componente na direção a  $45^\circ$ ;

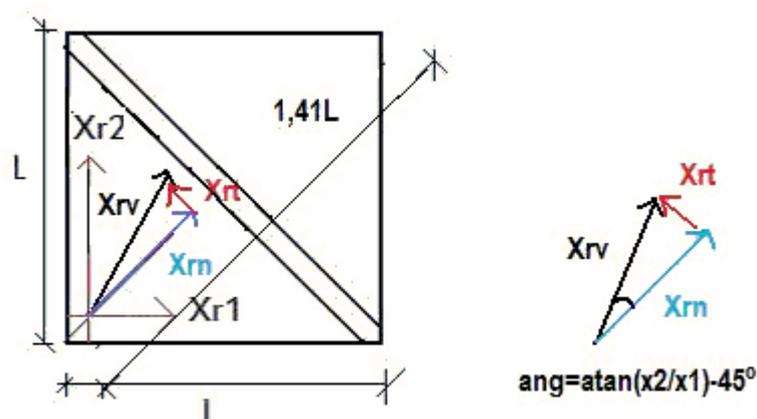


Figura 41: comprimentos de transferência de tensão para painéis com taxas de armadura diferentes

- b) no cálculo do escorregamento do painel acontece algo similar, pois os escorregamentos também são diferentes em cada uma das duas direções. Da mesma forma, toma-se os escorregamentos das duas direções, compõe-se o vetor que possuirá uma direção diferente de  $45^\circ$  e, finalmente, decompõe-se este vetor em duas componentes, uma orientada a  $45^\circ$  e a outra perpendicular a esta direção. O escorregamento normal é tomado com sendo a metade da componente orientada a  $45^\circ$  e o escorregamento tangencial é tomado como metade da componente na direção da fissura, conforme mostrado na figura 42. A abertura normal da fissura é:  $Ucn = 2Sn$  e a abertura tangencial (deslizamento na fissura) é:  $Uct = 2St$ . Salienta-se que, como Vecchio (1981) define sempre que a armadura transversal é a que possui a menor taxa de aço (normalmente menor diâmetro das barras), sempre o escorregamento das barras verticais será maior que o das barras horizontais e o painel distorce conforme mostrado na figura 42;

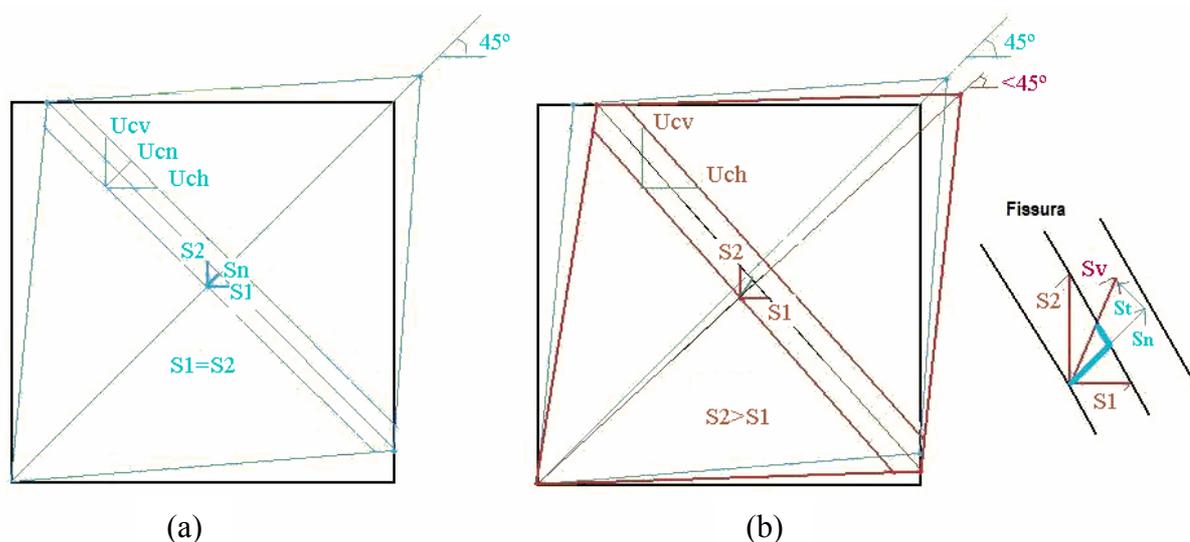


Figura 42: comparação da determinação dos escorregamentos e aberturas de fissura para: (a) painéis com mesma taxa de armadura e (b) painéis com taxas diferentes

- c) Uma observação muito importante a ser feita é que, nos painéis com taxas de armadura diferentes, o ângulo de distorção do painel é diferente de  $45^\circ$ . Portanto, o painel real a ser ensaiado deveria possuir deslocamentos prescritos diferentes, dependendo do nó em questão, para que este ângulo fosse fornecido. Ensaiar o painel deste modo seria completamente inviável, pois, para cada incremento de deslocamento, o deslocamento prescrito estaria em função do resultado dos escorregamentos obtidos e variariam de incremento para incremento, já que o ângulo de distorção também é variável neste tipo de problema, como pode ser visto nos resultados mostrados por Vecchio (1981) em seus painéis ensaiados. Para contornar este problema e para que seja possível a realização das simulações, adota-se um procedimento simplificado, porém que fornece a mesma resposta real. Este procedimento consiste em ensaiar o painel a  $45^\circ$ , mantendo-se os incrementos de deslocamentos prescritos constantes ao longo de todo o processo e decompor-se o vetor escorregamento nas direções a  $45^\circ$  e perpendicular a ela, ao invés de decompor-se nas direções do ângulo real ( $<45^\circ$ ) e perpendicular a ele. Isto faz com que as reações obtidas no final do processo sejam diferentes entre as bordas horizontais e verticais, porém, que podem ser separadas em uma parte composta por reações iguais, que causam o estado constante de corte puro, assim calculando-se a tensão tangencial, e em uma parte composta por reações de mesmo módulo, porém orientadas em tais direções que ao invés de causarem corte, causam uma rotação (movimento de corpo rígido) no painel, indicando que a configuração real do corpo pode ser tomada como a distorção a  $45^\circ$  mais esta rotação indicada. O ângulo real do painel vem justamente da relação entre as reações diferentes obtidas. Se fosse possível ensaiar a distorção real, seriam obtidas reações iguais, nenhuma rotação na configuração final do painel, seria obtido diretamente o ângulo de distorção e, os escorregamentos nas direções horizontal e vertical continuariam a ser diferentes, mas de tal forma que a diferença de forças no aço obtida por causa destes escorregamentos seriam compensadas pela diferença das áreas de aço nestas duas direções causando, portanto, reações iguais em todo o painel. Ao invés disso, em resumo, ensaia-se o painel a  $45^\circ$ , obtém-se reações

diferentes para as bordas horizontais e verticais, separa-se estas reações em duas partes: uma com reações iguais que provocam o corte puro e outra com reações em igual módulo, porém com o sentido tal que causam rotação no painel e assim é possível determinar o ângulo de distorção real e a configuração distorcida real;

- d) ressalta-se que os ângulos das deformações e tensões principais determinados experimentalmente para os painéis ensaiados por Vecchio (1981) não coincidem, conforme mostrado nas curvas da variação destes ângulos pela tensão tangencial aplicada, no capítulo 6 do presente trabalho. Conforme explicado anteriormente, o ângulo a entrar na fórmula (121) é obtido a partir da relação entre os valores das reações verticais e horizontais, sendo que este ângulo obtido sempre se encontra entre os valores dos ângulos das deformações e tensões principais determinados experimentalmente por Vecchio (1981).

### 5.3.6 Procedimento Proposto

De posse destas modificações, o procedimento proposto no presente trabalho para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a *i-ésima* iteração da estrutura global, é o seguinte (estão destacadas em itálico as modificações propostas pelo autor no presente trabalho em relação ao modelo original de d'Avila e Brisotto (item 4.4.2)):

- 1) Considerar a abertura da fissura igual à abertura da iteração global anterior;
- 2) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento, na fissura e a deformação média do concreto ao longo do elemento iguais aos valores da iteração global anterior, conforme fórmulas (124), (125) e (126);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i-1)} \quad (124)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i-1)} \quad (125)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cm(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{cm(k)}^{(i-1)} \quad (126)$$

3) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que vai causar deformação no elemento. Nesta etapa, entram no cálculo as matrizes  $\phi$  modificadas do modelo de Dvorkin, conforme mostrado no item 5.2;

4) Calcular o deslocamento incremental do nó interno;

5) Determinar as deformações,  $\epsilon_c^{(i)}$ , do concreto no domínio do elemento pela equação (90);

6) Completar o tensor de deformações do concreto com as componentes de deformação orientadas nas duas direções globais devido à aderência das barras da armadura ( $\epsilon_{cm}^{(k)(i)}$ ) e calcular as tensões,  $\sigma_{(k)}^{(i)}$ , do concreto no domínio do elemento (equação (93));

7) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento,  $\sigma_{ES(k)}^{(i)}$ , considerando comportamento elasto-plástico perfeito para o material;

8) Determinar as tensões na linha de localização,  $t_{(k)}^{(i)}$ , usando a relação (92). Nesta etapa, pode ser usado algum modelo de engrenamento dos agregados para a avaliação do deslizamento relativo das faces da fissura e da tensão de corte adicional nas mesmas. Este procedimento é melhor descrito no item 6.5 ;

9) Calcular as forças atuantes:

a) a força resultante do concreto no domínio do elemento,  $F_{EL(k)}^{(i)}$ , utilizando a parte esquerda na igualdade (91);

b) a força resultante do aço no domínio do elemento, conforme fórmula (127);

$$F_{ES(k)}^{(i)} = \sigma_{ES(k)}^{(i)} A_s \quad (127)$$

c) a força resultante total no domínio do elemento, conforme fórmula (128);

$$F_{ET(k)}^{(i)} = F_{EL(k)}^{(i)} + F_{ES(k)}^{(i)} \quad (128)$$

d) a força resultante do concreto transmitida na linha de localização,  $F_{CR(k)}^{(i)}$ , utilizando a parte direita na igualdade (91). Esta força pode ser modificada ao

*utilizar-se um modelo de engrenamento de agregados, conforme especificado no passo 8;*

- e) a força resultante no aço na fissura, de acordo com a fórmula (129);

$$\mathbf{F}_S^{(k)(i)} = \mathbf{F}_{ET}^{(k)(i)} - \mathbf{F}_{CR}^{(k)(i)} \quad (129)$$

- f) a força resultante no aço na fissura, de posse da deformação do aço na fissura da iteração anterior, dada pela equação (130). Esta força e a expressa na fórmula (129) devem convergir no final do processo iterativo;

$$\mathbf{F}_{CRS}^{(k)(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0}^{(k)(i)} E_s A_s \quad (130)$$

- g) a força resultante total na linha de localização, de acordo com a fórmula (131). Esta força e a força total do elemento dado em (128) devem convergir no final do processo iterativo;

$$\mathbf{F}_{CT}^{(k)(i)} = \mathbf{F}_{CR}^{(k)(i)} + \mathbf{F}_{CRS}^{(k)(i)} \quad (131)$$

10) *Consideração da tensão adicional nos painéis causada pelo efeito de pino das barras da armadura, através das equações (33) e (34), do item 3.2.2. Com as forças de pino para as armaduras horizontal e vertical calculadas por estas fórmulas ( $\mathbf{F}_{SY}$ ), pode-se calcular as tensões provocadas pelo efeito de pino através da fórmula (132). Com esta tensão de pino, pode-se calcular uma contribuição adicional do aço no vetor de forças do elemento. A força de pino é uma carga adicional ao painel fornecida pelas barras de aço e não entra no equilíbrio da linha de localização (equação (114)), já que o escorregamento ocorre na direção das barras e não perpendicular às mesmas. Uma observação é que o concreto ao redor da barra na região onde ocorre o efeito de pino está sujeito a um complexo estado triaxial de tensões. Lembra-se que foram usados modelos simplificados para o efeito de pino neste algoritmo, que já é muito complexo, e essas tensões locais no concreto nestas regiões do pino não foram consideradas.*

$$\sigma_{SY(k)}^{(i)} = F_{SY(k)}^{(i)} / A_s \quad (132)$$

11) Determinar a deformação na armadura na fissura, de acordo com a fórmula (133);

$$\epsilon_{s0(k)}^{(i)} = F_{S(k)}^{(i)} / E_s / A_s \quad (133)$$

12) Com o valor da deformação na armadura na fissura,  $\epsilon_{s0(k)}^{(i)}$ , para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência, para cada uma das direções globais (onde estão orientadas as barras da armadura), compondo-se posteriormente a direção normal, observadas as modificações para a simulação de painéis com taxas de armadura diferentes nas duas direções, calculando-se:

- a) o comprimento de transferência  $x_{Rcrack}$ , através de (79);
- b) a deformação média do aço ao longo do elemento,  $\epsilon_{sm(k)}^{(i)}$ , utilizando a equação (61) para determinar os valores extremos;
- c) a deformação média do concreto no domínio do elemento,  $\epsilon_{cm(k)}^{(i)}$ , utilizando a equação (62) para determinar os valores extremos;
- d) a deformação máxima do concreto no domínio do elemento,  $\epsilon_{cmax(k)}^{(i)}$ ;
- e) o espaçamento entre fissuras,  $DLS$ , e a quantidade de fissuras do elemento (vistas as observações feitas no modelo proposto para cálculo desta grandeza),  $NF$ , conforme o caso de peça longa ou curta;
- f) o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente,  $s_0$ , utilizando-se a equação (59) ou as equações (57) e (58);

13) Calcular o valor da abertura normal e tangencial (se as taxas de armadura nas duas direções forem diferentes) de cada fissura (que será utilizado na equação (92) para determinar o valor da tensão na fissura) através das fórmulas (134) e (135);

$$UC_1 = \mathbf{e}'(\mathbf{1}) = 2s_{0n} \quad (134)$$

$$UC_2 = \mathbf{e}'(\mathbf{2}) = 2s_{0t} \quad (135)$$

14) Calcular o valor total da abertura normal da fissura por elemento e da abertura de deslizamento (tangencial) da mesma, que serão utilizadas nas equações (85) e (86) na determinação do deslocamento que vai causar deformação no elemento, através das fórmulas (136) e (137);

$$UC_n = \mathbf{e}'(\mathbf{1}) \times NF = UC_1 \times NF \quad (136)$$

$$UC_t = \mathbf{e}'(\mathbf{2}) \times NF = UC_2 \times NF \quad (137)$$

15) Repetir as etapas 7), 8), 9) e 10);

16) Verificar a convergência através do balanço de forças dado na equação (114) pela fórmula (138);

$$T = \left[ 1 - \left( \frac{\mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)}}{\mathbf{F}_{CT(k)}^{(i)}} \right)^2 \right] * 1000 < 1 \quad (138)$$

17) São guardados os parâmetros da iteração atual e repete-se o processo até a convergência.

**O procedimento descrito acima é a nível interno de elemento. Detalhes sobre o procedimento global do algoritmo, com mais descrições do processo incremental-iterativo e convergência do método, encontram-se no Apêndice A.**

## 6 ANÁLISE NUMÉRICA

Este capítulo traz os exemplos numéricos realizados e a comparação dos mesmos com os resultados experimentais. Ao todo são testados 8 painéis de concreto armado (sub-divididos em 4 grupos); um painel de concreto simples para a verificação do correto funcionamento do modelo de fissura incorporada e um melhor entendimento do problema; e um painel testado com 1 e 9 elementos para a confirmação da baixa influência do número de elementos no algoritmo empregado, sendo que todos os painéis de concreto armado foram analisados com apenas um elemento. É importante salientar que, para este trabalho, a energia de fratura é considerada como sendo apenas uma propriedade material do concreto, mas há divergências entre os pesquisadores sobre essa consideração.

### 6.1 PAINEL DE CONCRETO SIMPLES

Primeiramente foi analisado um painel de concreto simples submetido ao corte puro, conforme a figura 43, para a verificação das mudanças realizadas no algoritmo de fissuras incorporadas mostradas no item 5.2. Não há ensaios experimentais realizados para este painel, sendo os resultados obtidos deste exemplo usados apenas para a comprovação do funcionamento do modelo proposto. As condições de contorno e os deslocamentos impostos estão de acordo com a figura 37. Ressalta-se que é usado apenas 1 elemento finito já que, como será mostrado posteriormente, o método é muito pouco dependente da malha para os casos estudados.

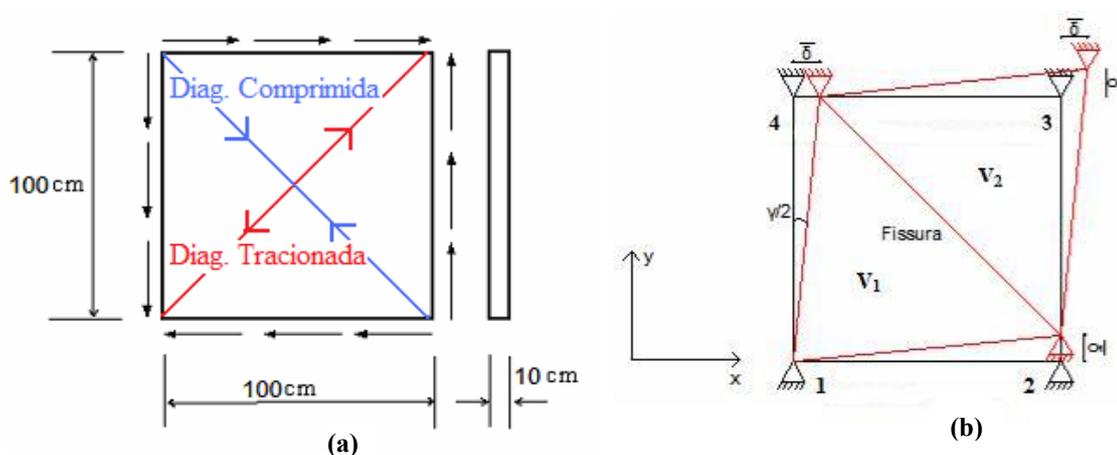


Figura 43: (a) painel quadrado de concreto simples submetido ao corte puro e (b) condições de contorno para a simulação numérica

As propriedades mecânicas do concreto empregadas na simulação são: resistência à compressão,  $f_c' = 20$  MPa; resistência a tração,  $f_t = 2$  MPa; módulo de elasticidade,  $E = 30.000$  MPa; coeficiente de Poisson,  $\nu = 0.2$ ; e, energia de fratura,  $G_f = 900$  N/m. É considerado um comportamento elástico linear para o material intacto. A curva tensão tangencial x distorção obtida numericamente é mostrada na figura 44. Salienta-se que o valor de energia de fratura adotado para este exemplo é entorno de 10 vezes maior em relação a um valor de energia de fratura real. Isto foi feito propositalmente, já que um painel de concreto simples rompe quando a resistência à tração do concreto é atingida e, por isso, para que fosse obtido o comportamento da parte fissurada (com a intenção de testar as modificações nas matrizes  $\Phi$  do modelo de Dvorkin e os resultados de distorção e de corte puro do algoritmo apenas para o concreto simples, fazendo com que ocorresse a curva de amolecimento e que ela fosse bastante visível) foi adotada esta medida, já que este exemplo é teórico e possui apenas a função de ajustar o modelo utilizado.

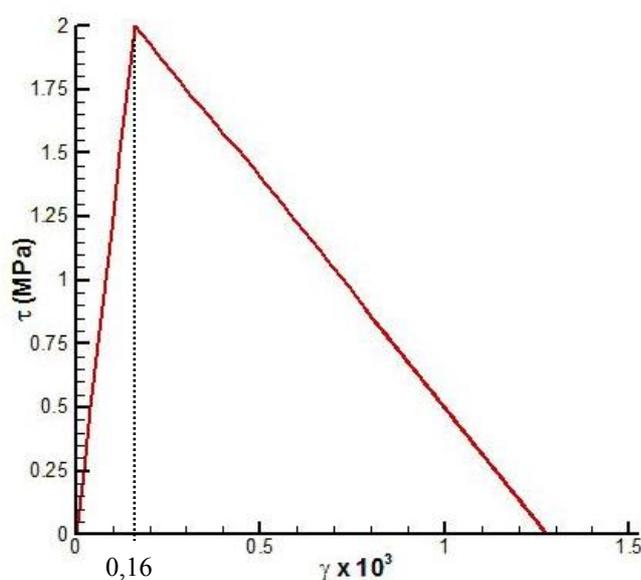


Figura 44: curva tensão-deformação do painel de concreto simples

Na figura 44, percebe-se que a tensão correspondente à resistência à tração do concreto é atingida para uma distorção angular de  $0,16 (x10^{-3})$ , o que está de acordo com a fórmula (119) e com a relação  $\tau = G_c \gamma$  (sendo que  $\tau$  possui o mesmo valor de  $f_t$  para esta distorção, o que está de acordo com a teoria empregada). Isto mostra que os painéis sob corte puro já fissuram

para distorções bastante baixas (esta distorção corresponde a um deslocamento prescrito de 0,008cm).

Foi utilizada uma lei de amolecimento linear para o concreto fissurado. Portanto, a abertura máxima da fissura (quando a tensão transmitida atinge o valor zero) pode ser determinada por  $w_{máx} = 2G_f / f_t = 0,09cm = 0,9mm$ . Na figura 45, encontra-se a curva tração transmitida na fissura x abertura da fissura obtida na análise numérica. Pode-se verificar o perfeito ajuste da curva numérica com a teórica.

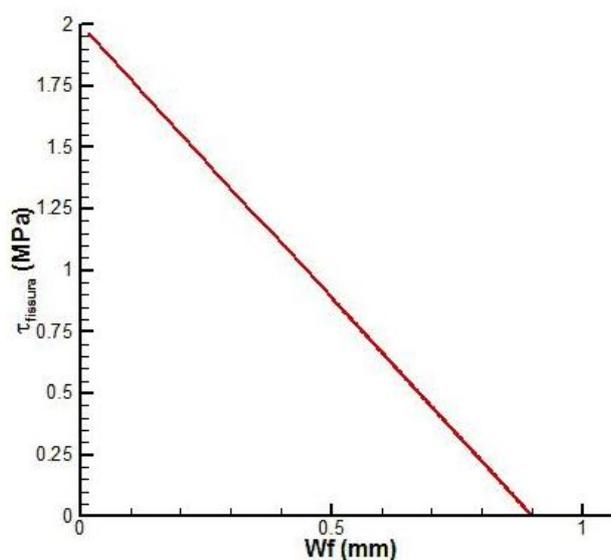


Figura 45: curva de amolecimento do painel de concreto simples

As reações obtidas na simulação numérica são iguais em módulo para todos os nós, resultando numa tensão uniforme no painel. Cabe salientar que, sem as alterações propostas no item 5.2, as reações obtidas não eram iguais, o que era incoerente com o exemplo estudado.

## 6.2 ESTUDO DE MALHA PARA OS PAINÉIS SIMULADOS

O objetivo deste exemplo é mostrar que o modelo de fissuração incorporada empregado no presente trabalho fornece resultados muito semelhantes para duas malhas de elementos finitos distintas usadas na simulação dos painéis submetidos a corte puro. Dessa forma, apesar do algoritmo empregado ser bastante complexo e exigir um certo esforço computacional, há uma

forte indicação de que é possível simular todos os painéis testados utilizando-se apenas 1 elemento finito (obtendo-se já um comportamento bastante preciso), o que torna o processo substancialmente mais rápido, fornecendo uma resposta muito semelhante se fosse usada uma malha mais densa. Salienta-se que, neste caso, cada elemento deve ser uma parte homogênea e semelhante ao resto do painel, ou seja, cada elemento deve possuir concreto e armadura nas duas direções. Isto significa que há um limite mínimo de tamanho de elemento (ou um limite máximo de número de elementos) para que essas condições sejam cumpridas.

Para os testes de malha realizados, foi usado um painel de concreto armado com dimensões de 900 x 900 x 70mm, conforme figura 46, com dimensões e parâmetros parecidos com os painéis ensaiados por Vecchio (1981). Foram comparadas as respostas utilizando-se 1 e 9 (que já torna o processo bem mais demorado) elementos finitos. Os demais parâmetros do painel são dados na tabela 2, sendo:  $f_c$  a resistência à compressão do concreto;  $\epsilon_0$  a deformação do cilindro de concreto na tensão de compressão de pico;  $f_t$  a resistência à tração do concreto;  $E_c$  o módulo de Young do concreto;  $\nu$  o coeficiente de Poisson do concreto;  $E_s$  o módulo de Young do aço;  $f_{yh}$  a tensão de escoamento das barras horizontais;  $f_{yv}$  a tensão de escoamento das barras verticais;  $G_f$  a energia de fratura do concreto e  $G_s$  o módulo de corte das barras de aço.

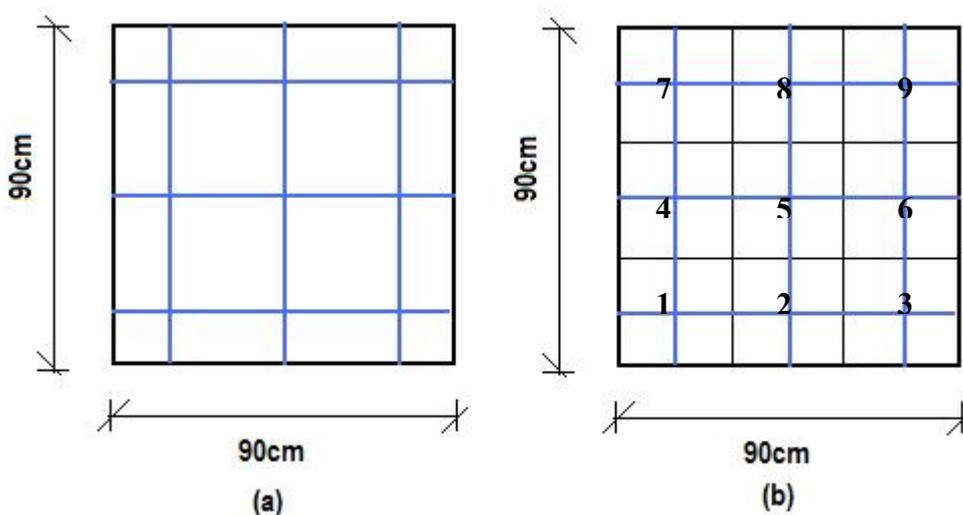


Figura 46: painel com (a) 1 elemento e (b) 9 elementos

Tabela 2: dados do painel de teste das malhas de 1 e 9 elementos

$f_c$ (MPa)	20,5	$E_s$ (MPa)	200.000
$\epsilon_0$ (adim.)	0,0021	$f_{yh}$ (MPa)	442
$f_t$ (MPa)	2,04	$f_{yv}$ (MPa)	442
$E_c$ (MPa)	19.500	$G_f$ (N/m)	140
$\nu$ (adim.)	0,25	$G_s$ (MPa)	80.000

O painel é composto por 3 barras em cada direção passando no centro de cada um dos 9 elementos finitos do painel. O resultado dos dois modelos é mostrado na figura 47.

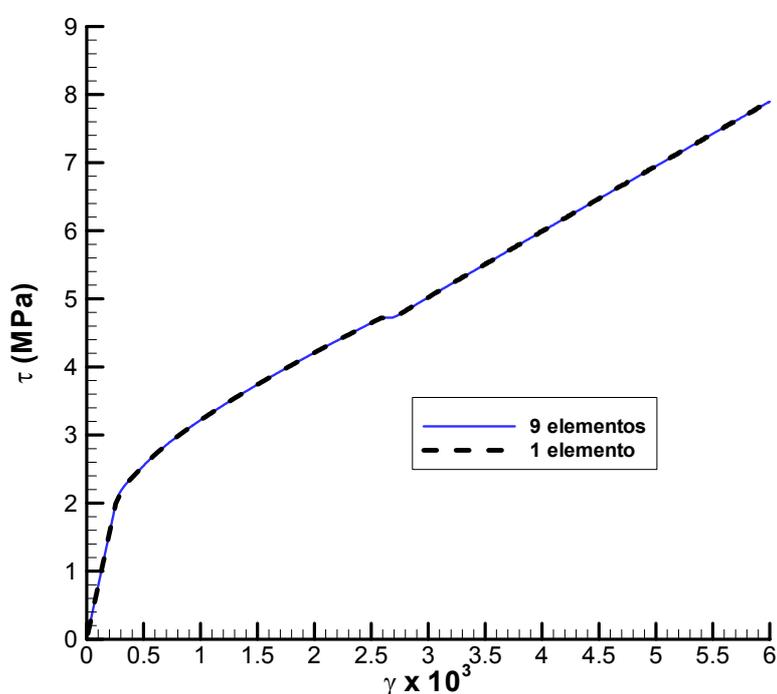


Figura 47: curva tensão tangencial x distorção para os painéis com 1 e 9 elementos

A curva mostra resultados praticamente iguais para a simulação com malhas diferentes. Portanto, em todos os painéis de Vecchio simulados neste trabalho (item 6.3), foi usado apenas um elemento finito. Observa-se que as curvas são idênticas até o final do processo, inclusive para o trecho após a formação da segunda geração de fissuras, (onde o número de fissuras é dobrado na simulação) que pode ser observada próxima à tensão de 5MPa, onde há uma pequena “quebra” na curva. Para comprovar que não apenas a curva acima forneceu resultados muito parecidos e sim todos os demais parâmetros da fissura e dos elementos também, foi montada a tabela 3 que compara alguns dos parâmetros simulados para dois

incrementos distintos de deslocamento, sendo o primeiro após o estágio inicial de fissuração e um mais próximo ao estágio final de carga, após a segunda geração de fissuras. Foi possível observar erros desprezíveis entre os dados, sendo a maioria deles menores de 0,2%.

Tabela 3: resultados dos painéis com 1 e 9 elementos

<b>Deslocamento Prescrito (canto superior direito): 0,0135cm</b>			
<b>Parâmetro</b>	<b>1 elemento</b>	<b>9 elementos</b>	<b>Diferença</b>
Abertura Unitária da Fissura (cm)	8,6270E-04	8,6082E-04	0,2182%
Tensão Tangencial do Concreto no Centro do Elemento (kN/cm <sup>2</sup> )	1,8172E-01	1,8184E-01	0,0655%
Tensão Transmitida na Fissura (kN/cm <sup>2</sup> )	1,9118E-01	1,9120E-01	0,0120%
Reações (kN)	8,1618E+01	8,1580E+01	0,0466%
Tensões Horiz. e Vert. do Concreto no Centro do Elemento (kN/cm <sup>2</sup> )	3,8138E-02	3,7793E-02	0,9052%
Tensão na Armadura no Elemento (kN/cm <sup>2</sup> )	2,2293E+00	2,2336E+00	0,1947%
Tensão na Armadura na Fissura (kN/cm <sup>2</sup> )	3,8486E+00	3,8492E+00	0,0156%
<b>Deslocamento Prescrito (canto superior direito): 0,0576cm</b>			
<b>Parâmetro</b>	<b>1 elemento</b>	<b>9 elementos</b>	<b>Erro</b>
Abertura Unitária da Fissura (cm)	7,6106E-03	7,6097E-03	0,0112%
Tensão Tangencial do Concreto no Centro do Elemento (kN/cm <sup>2</sup> )	7,4695E-02	7,4689E-02	0,0086%
Tensão Transmitida na Fissura (kN/cm <sup>2</sup> )	9,0885E-02	9,0906E-02	0,0226%
Reações (kN)	1,8098E+02	1,8098E+02	0,0033%
Tensões Horiz. e Vert. do Concreto no Centro do Elemento (kN/cm <sup>2</sup> )	6,4294E-02	6,4302E-02	0,0119%
Tensão na Armadura no Elemento (kN/cm <sup>2</sup> )	2,4682E+01	2,4680E+01	0,0094%
Tensão na Armadura na Fissura (kN/cm <sup>2</sup> )	2,7414E+01	2,7412E+01	0,0091%

### 6.3 PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO ENSAIADOS POR VECCHIO

Este capítulo refere-se aos painéis de concreto armado ensaiados por Vecchio (1981). Todos os painéis ensaiados possuem dimensões de 890 x 890 x 70mm e são sujeitos ao corte puro, conforme mostrado na figura 48. Para fornecer o estado de corte puro, são dados os incrementos de deslocamentos prescritos conforme figura 37. Os diversos painéis ensaiados foram separados em quatro grupos, de acordo com a principal causa de ruptura dos mesmos. Inclusive, Vecchio fez esta separação em sua tese e indicou algumas características peculiares de cada grupo. Estes grupos são formados por: painéis onde houve o escoamento de ambas armaduras; onde houve o escoamento apenas da armadura transversal; onde ocorreu falha por

esmagamento e fendilhamento do concreto, sem escoar nenhuma armadura; e por arrancamento das chaves de transmissão de corte (“*pull-out*”). **O Apêndice B mostra os valores numéricos de alguns pontos das curvas tensão x distorção (figuras 49, 53, 56, 59, 62, 65, 68 e 71) dos painéis para haver uma idéia mais exata da diferença numérica entre os resultados experimentais e os obtidos dos diferentes modelos mostrados nas figuras.**

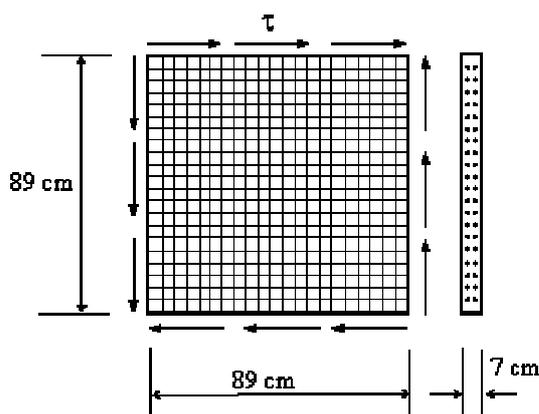


Figura 48: painel quadrado submetido ao corte puro

Ao todo foram simulados 8 painéis ensaiados por Vecchio (1981). Para cada um deles, além das dimensões e características especificadas acima, são dados as disposições das barras de aço e os parâmetros necessários para a entrada de dados no algoritmo. Basicamente, a saída de dados consiste em 10 curvas para cada painel, sendo descritas no item 5.3.3 do presente trabalho. Novamente ressalta-se que as curvas numéricas são sempre comparadas com as experimentais obtidas por Vecchio, com as curvas analíticas do modelo matemático desenvolvido por Vecchio (1981) e com curvas numéricas obtidas por outros pesquisadores.

### 6.3.1 Grupo 1: painéis rompidos pelo esmagamento e fendilhamento do concreto

Segundo Vecchio (1981), nos painéis PV9, PV22 e PV27 ocorreu o esmagamento do concreto sem o escoamento de nenhuma das armaduras. Isto ocorreu porque as taxas de armaduras e as tensões de escoamento das mesmas eram altas e bastante resistentes se comparadas com o concreto usado no painel. Naturalmente era de se esperar que este tipo de falha ocorresse. Foram simulados todos os 3 painéis pertencentes a este grupo.

## 6.3.1.1 Painel PV27

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% em cada direção ( $\rho_l = \rho_t = 1,785\%$ ). O diâmetro das barras é de 6,35mm. Os demais dados estão na tabela 4.

Tabela 4: dados do painel PV27

<b><math>f_c</math> (MPa)</b>	20,5	<b><math>E_s</math> (MPa)</b>	200.000
<b><math>\epsilon_0</math> (adim.)</b>	0,0019	<b><math>f_{vh}</math> (MPa)</b>	442
<b><math>f_t</math> (MPa)</b>	2,04	<b><math>f_{yv}</math> (MPa)</b>	442
<b><math>E_c</math> (MPa)</b>	21.500	<b><math>G_f</math> (N/m)</b>	110
<b><math>\nu</math> (adim.)</b>	0,25	<b><math>G_s</math> (MPa)</b>	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 49, 50 e 51. As curvas MDA1 e MDA2 referem-se aos modelos de efeito de pino utilizados que foram descritos no item 3.2.2. No caso desse painel em específico, na curva tensão x distorção (figura 49), há também os dados numéricos obtidos por Oliver (2008) e Brisotto (2008), além de três curvas experimentais obtidas por Vecchio (1981): uma medindo-se a parte da frente do painel; uma medindo-se o verso do mesmo; e uma tomando-se a média das outras duas, sendo todas plotadas como uma nuvem de pontos.

A curva tensão tangencial x distorção (figura 49) está muito próxima da curva experimental média, apresentando bons resultados, principalmente para o modelo de efeito de pino de Di Prisco e Gambarova (MDA2), onde se considera a barra de aço repousando em leito elástico de concreto. Há uma “quebra” na curva próxima ao nível de tensões de 5MPa indicando a formação da segunda geração de fissuras que, no modelo numérico, é quando o número de fissuras é dobrado instantaneamente. Isto causa uma certa instabilidade numérica, que faz parte do modelo de fissuração incorporada empregado. Ressalta-se que os resultados numéricos obtidos são bem mais próximos dos reais se comparados com o modelo de Vecchio (1981).

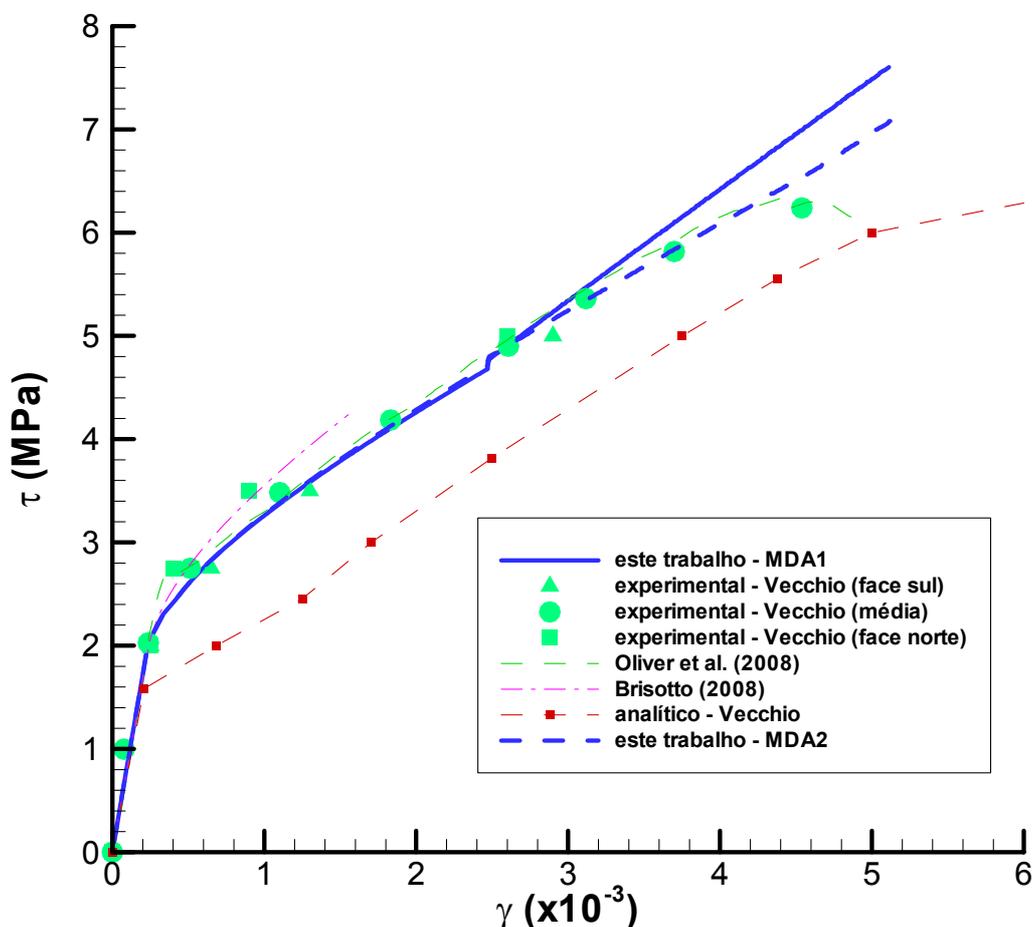


Figura 49: curva tensão x distorção do painel PV27

Para os estágios próximos à carga última, neste tipo de painel em que houve falha por esmagamento do concreto, a consideração de comportamento não-linear deste material torna-se importante, o que não foi considerado neste trabalho. Assim, as duas curvas (MDA1 e MDA2) afastam-se da curva experimental no trecho final.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 50(a)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos. Também se nota a “quebra” próxima a 5MPa indicando a formação da 2ª geração de fissuras.

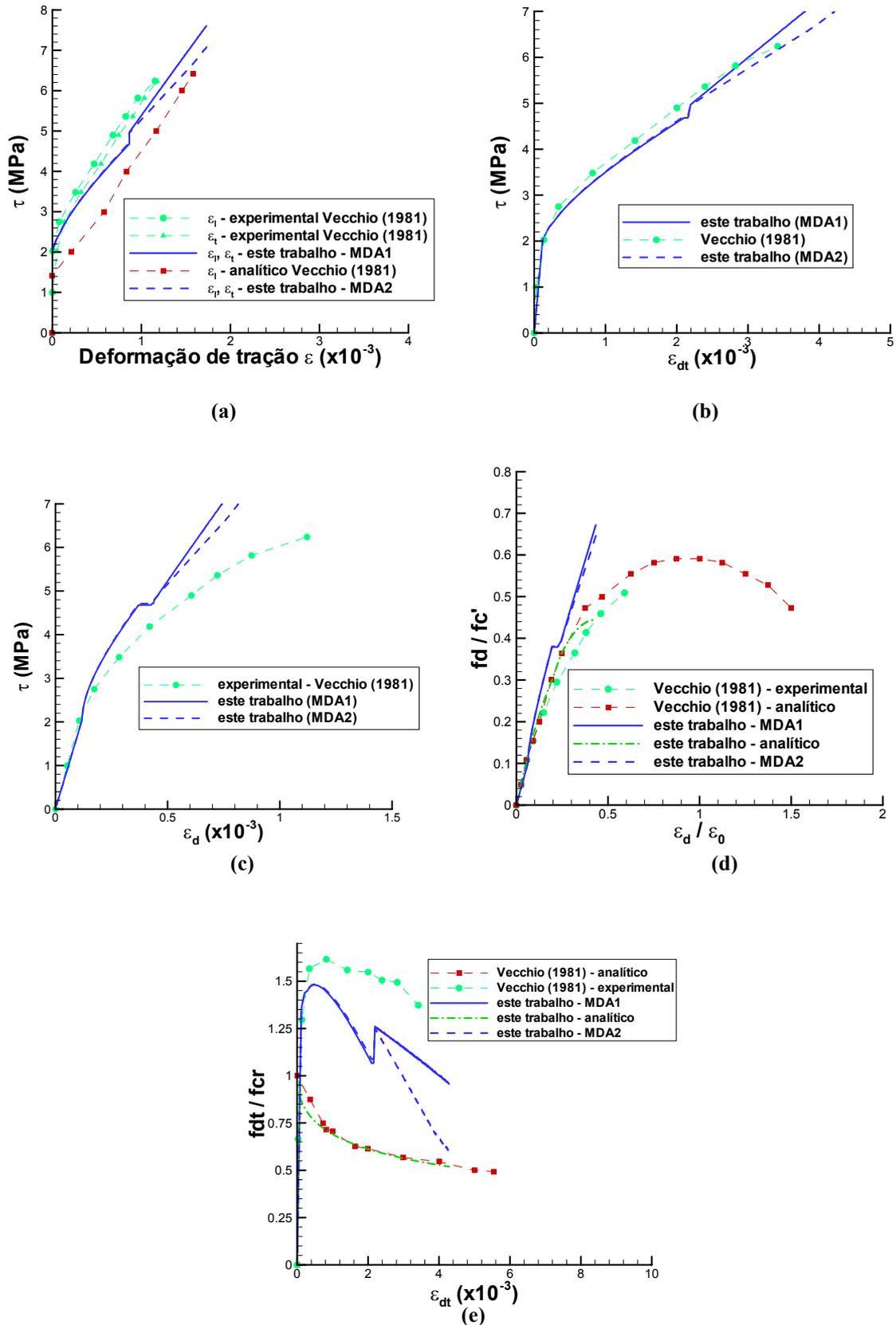


Figura 50: curvas do painel PV27 de (a)  $\varepsilon_l = \varepsilon_t \times \tau$ ; (b)  $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c)  $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração

A curva da figura 50(b) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$  (ver fórmula (7)), para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade bastante boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho. A curva experimental foi criada diretamente da listagem de resultados experimentais de Vecchio (1981), sendo que o autor não apresentou esta curva em forma de gráfico e, por isso, não há a curva analítica do modelo matemático para a comparação de resultados.

A curva da figura 50(c) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Como este trabalho simulou os painéis com incrementos de deslocamentos prescritos, a deformação da diagonal comprimida é conhecida *a priori*. Pela figura 37, pode-se deduzir que esta deformação é igual ao deslocamento prescrito dividido pelo comprimento do lado do painel ( $\varepsilon_d = \bar{\delta} / L$ ). Esta curva não resultou tão próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981), onde foram fornecidas forças prescritas ao painel através do aparelho de ensaios, devido ao modelo constitutivo linear empregado para o concreto. Em outros painéis, como será mostrado posteriormente, esta curva resultou bem mais próxima da experimental.

As figuras 50(d) e 50(e) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Em cada uma das figuras há 5 curvas: a experimental e analítica de Vecchio, a numérica real do presente trabalho (calculada por Círculos de Mohr (ver fórmulas (122) e (123)), para cada um dos modelos de efeito de pino) e a analítica do presente trabalho (usando-se o modelo analítico de Vecchio, porém com os dados e resultados do algoritmo deste trabalho). Em ambas figuras, as curvas **analíticas** de Vecchio e do presente trabalho resultaram muito próximas, indicando que o modelo proposto fornece resultados coerentes. Já as curvas numéricas reais do presente trabalho foram muito melhores nas tensões da diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ) que o modelo analítico de Vecchio e foram ligeiramente piores nas tensões da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), desconsiderando-se o trecho final da curva onde a não-linearidade do concreto torna-se importante. Neste caso, o modelo de efeito de Pino MDA1 simulou melhor a tensão na diagonal tracionada se comparado ao MDA2. A repentina “quebra” na curva da diagonal tracionada foi devido à 2ª geração de fissuras. Na realidade, o número de fissuras vai aumentando progressivamente, mas, no modelo de fissura incorporada, esse número é dobrado instantaneamente, fazendo com que a abertura unitária das fissuras também decaia instantaneamente para que o algoritmo seja estável (fazendo com

que a tensão na diagonal tracionada suba nesse instante, já que quanto menor é a abertura de fissura, mais tensão é resistida pelo concreto entre fissuras). Portanto, isto é uma desvantagem do modelo incorporado e, o que poderia ser feito para se obter uma curva mais coerente, é uma suavização de resultados unindo-se as retas finais à primeira parte das curvas de  $(\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr})$ .

A figura 51 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. A numeração destes estágios está de acordo com a tese de Vecchio (1981). Os Círculos são obtidos da seguinte forma: as deformações  $(\varepsilon_d, \varepsilon_{dt})$  / tensões principais  $(f_d, f_{dt})$  são plotadas no eixo das abscissas segundo o seu valor em módulo e sinal (positivo para tração e negativo para compressão). Desse modo, é possível a determinação do centro e do raio da circunferência e, por conseguinte, é possível realizar o traçado do Círculo. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para os estágios de deformações e tensões menores. Próximo ao final da curva, há o esmagamento do concreto e a curva tensão tangencial x distorção afasta-se um pouco, piorando os resultados dos Círculos. Os dois modelos de efeito de pino forneceram resultados semelhantes para esta figura. Salienta-se que os pontos onde os Círculos interceptam o eixo horizontal são as deformações / tensões das diagonais tracionada e comprimida. Uma outra observação é que os Círculos de Deformações são iguais para os dois modelos de efeito de pino, o que é óbvio, pois a diferença entre os dois modelos é que fornecem tensões adicionais diferentes para um mesmo incremento de distorção, ou seja, apenas o Círculo de Tensões é diferente.

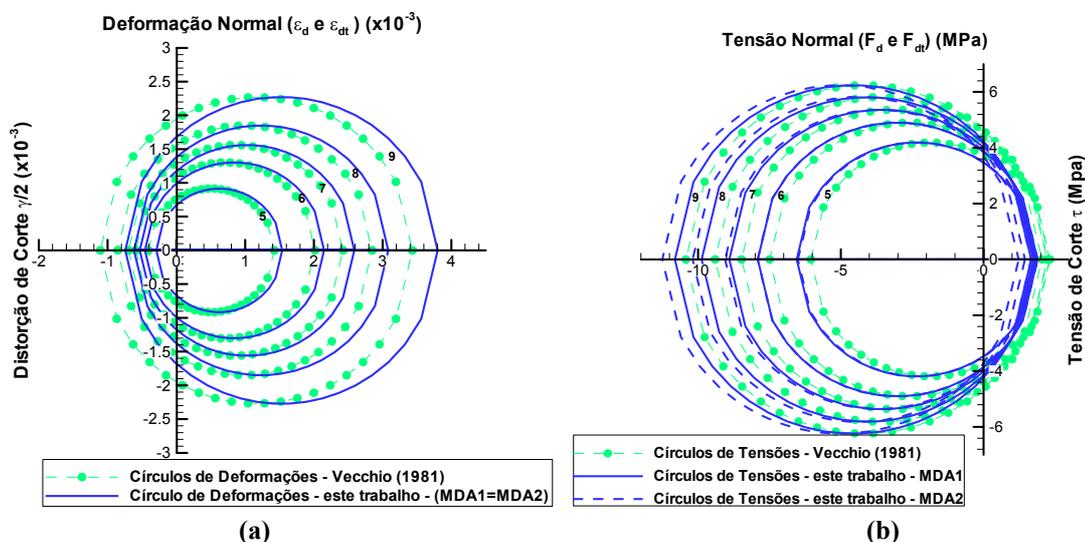


Figura 51: curvas do painel PV27: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 4,9 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as fissuras nas duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 8,8 fissuras (espaçamento de 140mm). No trecho após a 2ª geração de fissuras, o número de fissuras real passa para 18,6 fissuras (espaçamento de 67mm). Vecchio (1981, p.315) coloca que a 3,45MPa, o padrão de fissuras é uniforme, com abertura das fissuras entre 0,05 a 0,10mm, espaçadas de 75 a 100mm e inclinadas a 45°. A 5,24MPa, primeiros sinais de fendilhamento do concreto; fissuras com aberturas de 0,10mm a 0,15mm, espaçadas de 50mm. Percebe-se que o número de fissuras simulado ficou um pouco abaixo do modelo experimental, mas deve-se levar em conta a dificuldade na medição do espaçamento das fissuras experimentalmente, a dificuldade em separar-se uma fissura de outra se estão próximas e que provavelmente foram contadas também pequenas fissuras que atravessaram apenas uma pequena extensão do painel e estas não tem como ser consideradas no modelo numérico. Isto pode ser visto na figura 52, que mostra o painel PV27 fissurado que foi ensaiado por Vecchio.

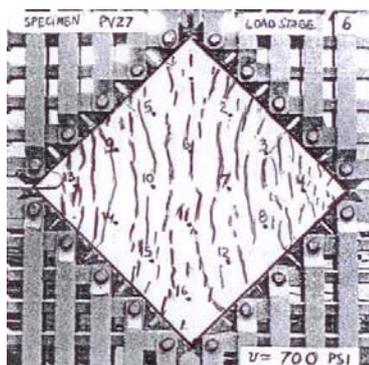


Figura 52: fissuração experimental do painel PV27

### 6.3.1.2 Painel PV22

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% na direção horizontal ( $\rho_l=1,785\%$ ) e 1,524% na direção vertical ( $\rho_t=1,524\%$ ). O diâmetro das barras horizontais é de 6,35mm e das barras verticais é de 5,87mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 5 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

Tabela 5: dados do painel PV22

$f_c$ (MPa)	19,6	$E_s$ (MPa)	200.000
$\epsilon_0$ (adim.)	0,002	$f_{vh}$ (MPa)	458
$f_t$ (MPa)	1,9	$f_{yv}$ (MPa)	420
$E_c$ (MPa)	19.600	$G_f$ (N/m)	100
$\nu$ (adim.)	0,25	$G_s$ (MPa)	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 53, 54 e 55.

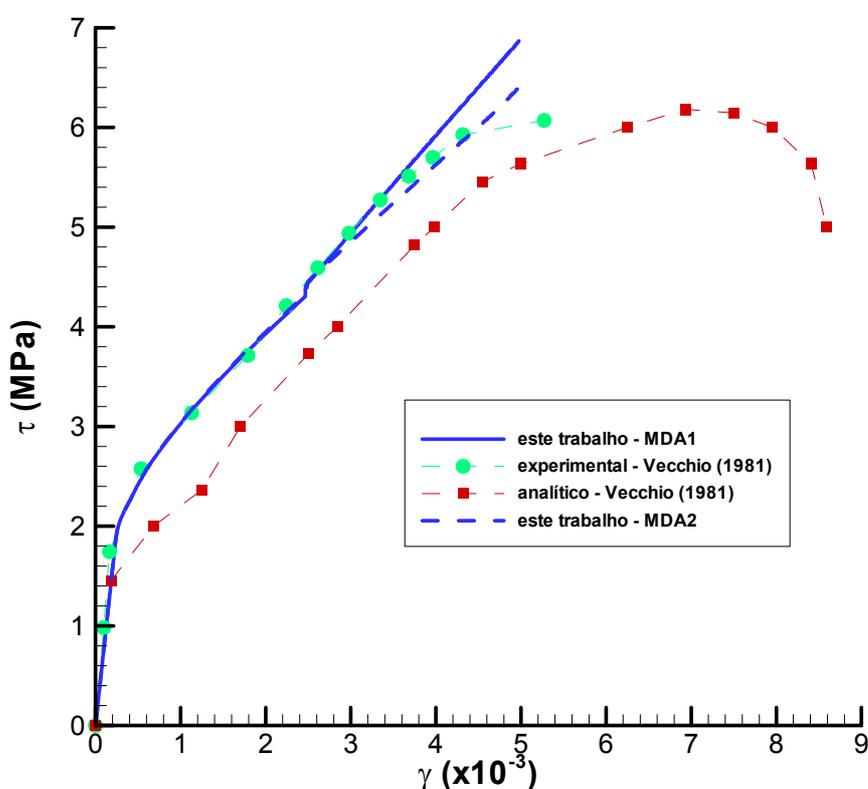


Figura 53: curva tensão x distorção do painel PV22

A curva tensão tangencial x distorção (figura 53) está muito próxima da curva experimental, apresentando bons resultados, principalmente para o modelo de efeito de pino de Di Prisco e Gambarova (MDA2). Há uma “quebra” na curva próxima ao nível de tensões de 4MPa indicando a formação da segunda geração de fissuras. Ressalta-se que os resultados numéricos obtidos são bem mais próximos dos reais se comparados com o modelo matemático de Vecchio. O trecho final de todas as curvas mostradas afasta-se do resultado experimental porque o concreto foi considerado um material elástico-linear, conforme já foi comentado.

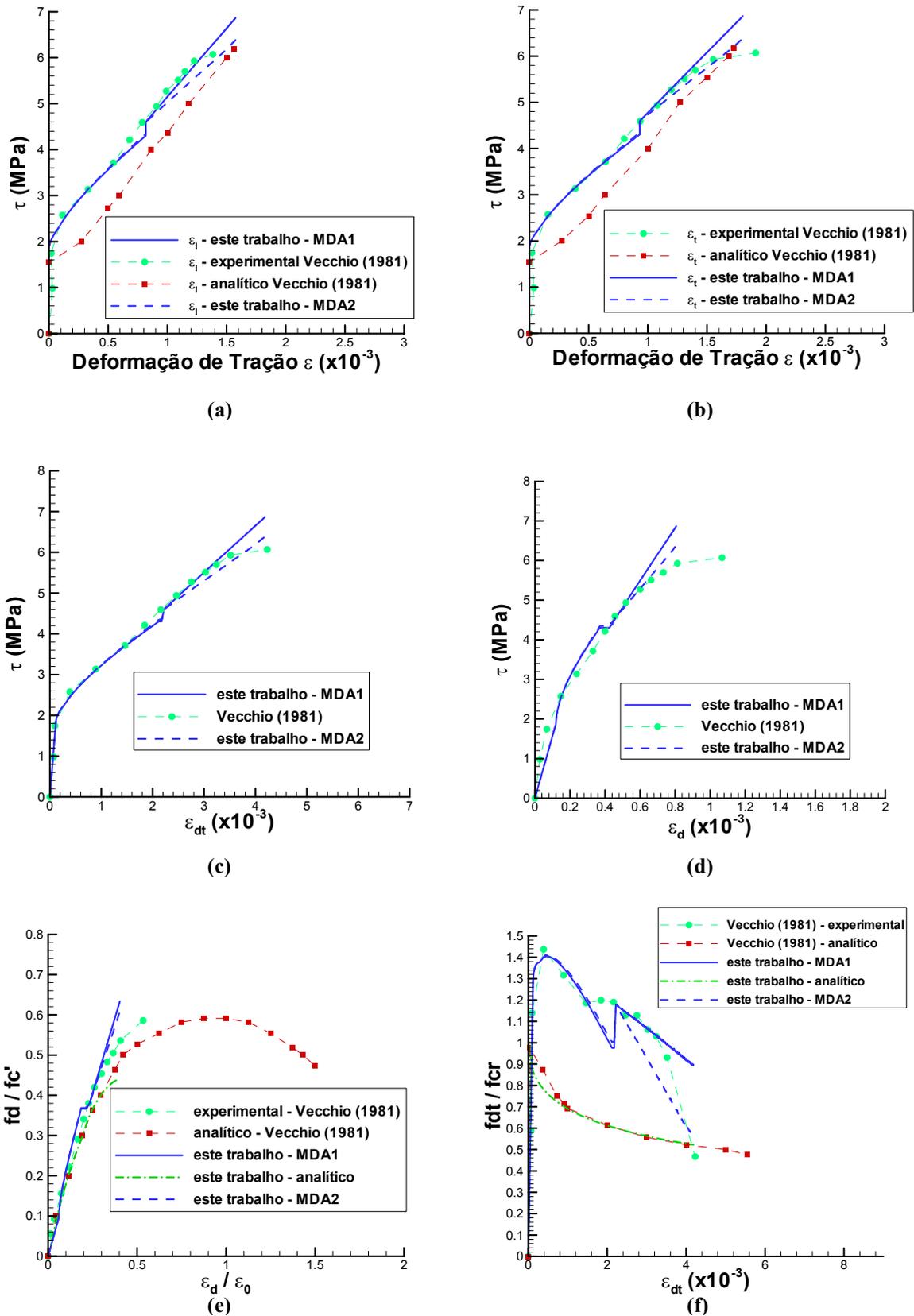


Figura 54: curvas do painel PV22 de (a)  $\varepsilon_t \times \tau$ ; (b)  $\varepsilon_t \times \tau$  (c)  $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (d)  $\varepsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 54(a) e 54(b)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos. Também se nota a “quebra” próxima a 4MPa indicando a formação da 2ª geração de fissuras.

A curva da figura 54(c) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$  (ver fórmula (7)), para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade bastante boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho.

A curva da figura 54(d) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$  (onde,  $\varepsilon_d = \bar{\delta} / L$ ), para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou bastante próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981), até um nível de carregamento de 5MPa, ao contrário do painel PV27.

As figuras 54(e) e 54(f) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Pode-se constatar que o modelo proposto consegue simular o comportamento do painel bastante bem (desconsiderando-se o trecho final da curva onde a não-linearidade do concreto torna-se importante). Neste caso, o modelo de efeito de Pino MDA1 simulou melhor a tensão na diagonal tracionada se comparado ao MDA2. A repentina “quebra” na curva da diagonal tracionada foi devido à 2ª geração de fissuras, da mesma forma que ocorreu para o painel PV27.

A figura 55 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. Estes Círculos são obtidos conforme foi descrito para o painel PV27. A numeração destes estágios está de acordo com a tese de Vecchio (1981). Percebe-se uma boa concordância nos resultados para todos os estágios. O modelo de efeito de pino MDA1 forneceu círculos melhores de tensões que o modelo MDA2. Mostra-se também a variação do ângulo das deformações e tensões principais experimentais do painel e a variação do ângulo calculado numericamente na figura 55(c). O ângulo numérico é obtido conforme explicado no item 5.3.5, estando sempre entre os ângulos das tensões e deformações principais que não são iguais, como supunha o modelo analítico de Vecchio, sendo que a diferença aumenta para níveis maiores de carga.

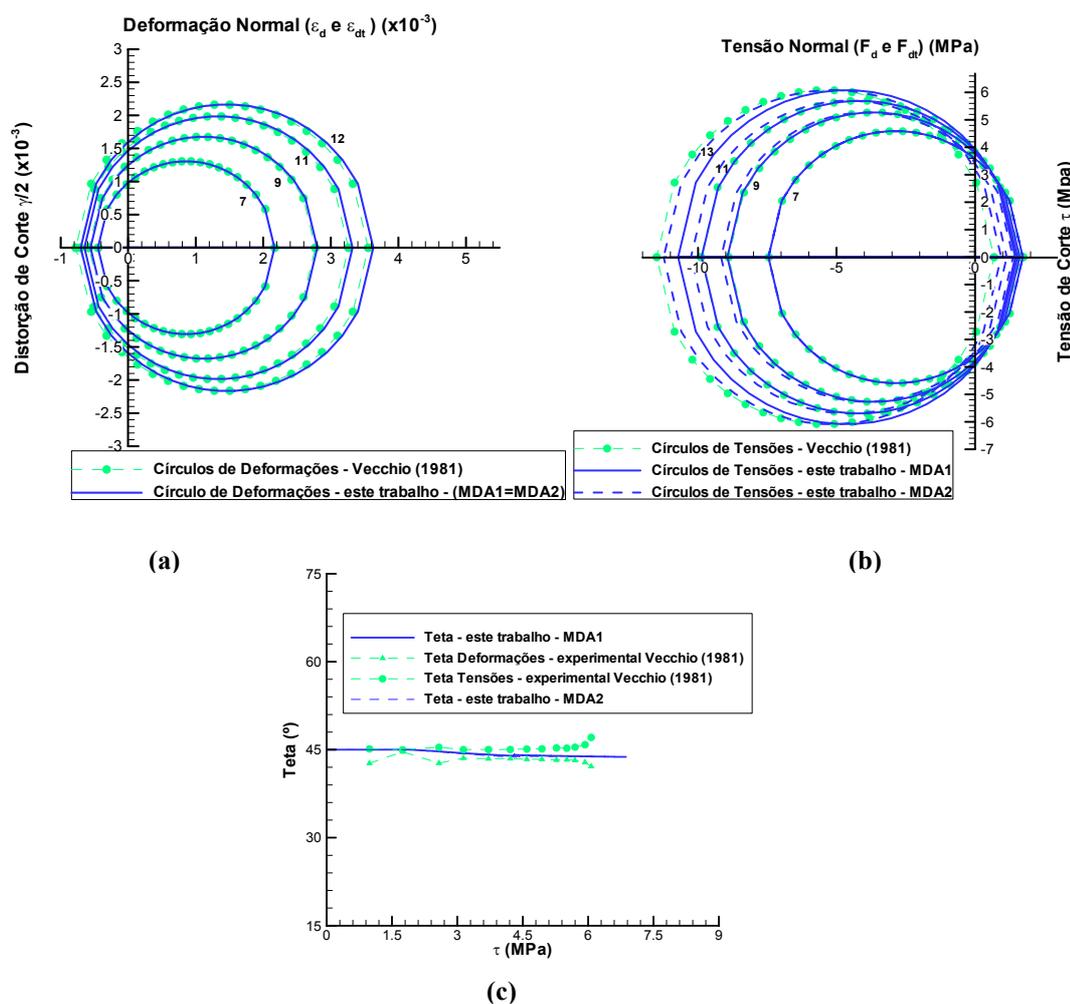


Figura 55: curvas do painel PV22: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 4,9 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 8,8 fissuras (espaçamento de 140mm). Após a 2ª geração, o número de fissuras real passa para 18,6 fissuras (espaçamento de 67mm). Vecchio (1981, p.293) coloca apenas que o espaçamento das fissuras para a carga última desse painel é de 50 a 75mm. Então o número de fissuras simulado está dentro da faixa observada.

### 6.3.1.3 Painel PV9

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% em cada direção

( $\rho_l = \rho_t = 1,785\%$ ). O diâmetro das barras é de 6,35mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 6 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

Tabela 6: dados do painel PV9

$f_c$ (MPa)	11,6	$E_s$ (MPa)	200.000
$\epsilon_0$ (adim.)	0,0028	$f_{vh}$ (MPa)	455
$f_t$ (MPa)	1,0	$f_{yv}$ (MPa)	455
$E_c$ (MPa)	8.300	$G_f$ (N/m)	30
$\nu$ (adim.)	0,25	$G_s$ (MPa)	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 56, 57 e 58.

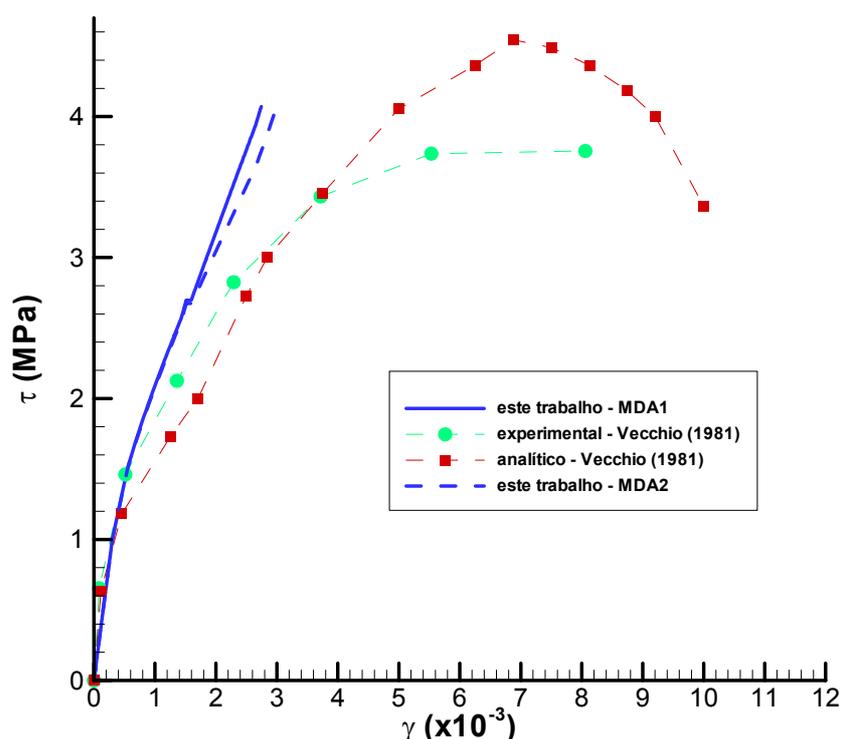


Figura 56: curva tensão x distorção do painel PV9

A curva tensão tangencial x distorção (figura 56) não está muito próxima da curva experimental. Isto se deve ao fato do concreto possuir uma resistência à compressão muito baixa e já se comportar de forma não-linear para baixos níveis de carga. Neste problema, a

não-linearidade e esmagamento do concreto são importantes ao longo de todo o carregamento e, por isto, as respostas numéricas não foram muito próximas às experimentais. Novamente aqui, a “quebra” na curva próxima ao nível de tensões de 2,5MPa indica a formação da segunda geração de fissuras. Ressalta-se que, mesmo assim, os resultados numéricos obtidos estão tão próximos da curva experimental, quanto os obtidos pelo modelo analítico de Vecchio (1981), até o nível de tensões de 2,5MPa. No trecho final da curva, o esmagamento do concreto possui uma grande influência no processo.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 57(a)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental, o mesmo que ocorreu com a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos.

A curva da figura 57(b) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$  (ver fórmula (7)), para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade razoavelmente boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho, principalmente nos trechos iniciais do carregamento.

A curva da figura 57(c) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$  (onde,  $\varepsilon_d = \bar{\delta} / L$ ), para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva não resultou próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981). A deformação da diagonal comprimida real é maior do que a simulada numericamente. Isto influencia todo o cálculo das tensões e outras deformações do concreto deste painel. Ressalta-se que este painel foi confeccionado com um  $f_{ck}$  extremamente baixo.

As figuras 57(d) e 57(e) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Em ambas figuras, as curvas **analíticas** de Vecchio e do presente trabalho resultaram muito próximas, indicando que os dados empregados estão certos e que o algoritmo fornece resultados coerentes. Já as curvas numéricas reais do presente trabalho foram melhores nas tensões da diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ) que o modelo analítico de Vecchio, representando bem o comportamento desta diagonal, e foram piores nas tensões da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), comprovando-se, mais uma vez, a grande influência do esmagamento do concreto neste tipo de problema. Neste caso, o modelo de efeito de Pino MDA2 simulou melhor a tensão na diagonal tracionada se comparado ao MDA1.

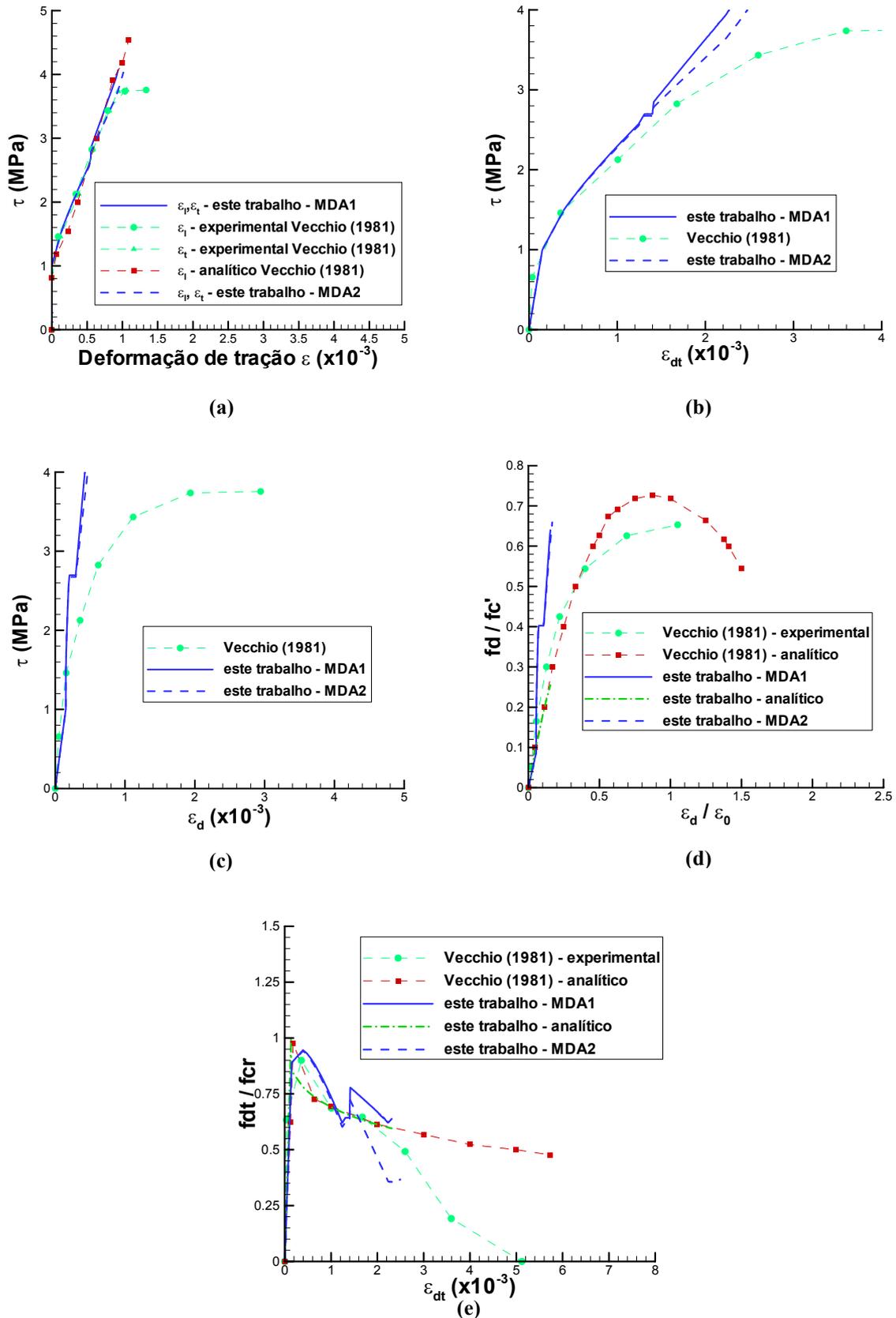


Figura 57: curvas do painel PV9 de (a)  $\varepsilon_l = \varepsilon_t \times \tau$ ; (b)  $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c)  $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração

A figura 58 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para os estágios iniciais e pouca concordância nos estágios finais, pelas razões já mencionadas. O modelo de efeito de pino MDA2 forneceu círculos melhores de tensões que o modelo MDA1.

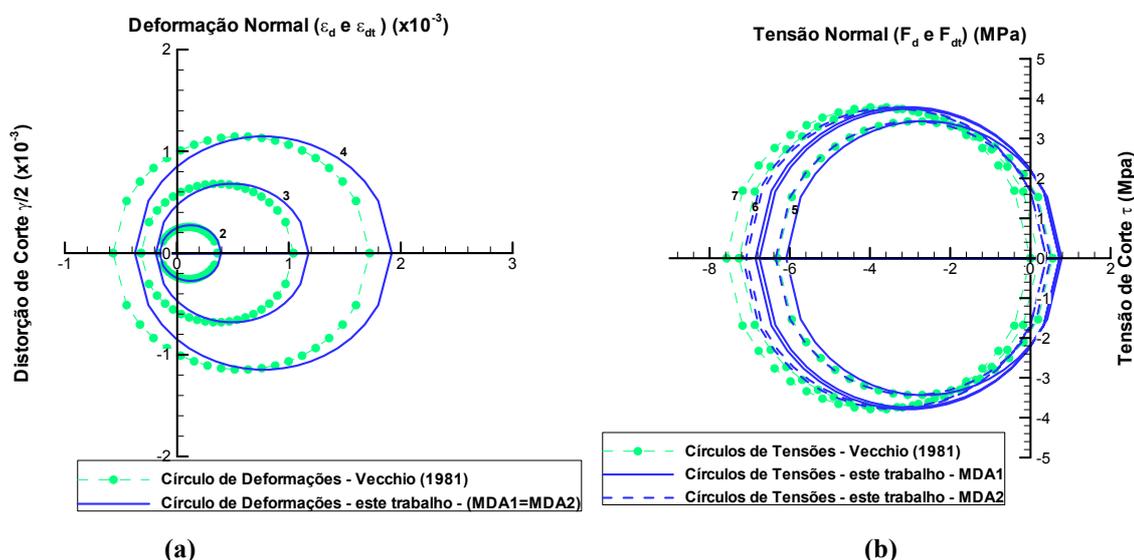


Figura 58: curvas do painel PV9: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 4,5 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 8,0 fissuras (espaçamento de 155mm). No trecho após a 2ª geração de fissuras, o número de fissuras real passa para 17,0 fissuras (espaçamento de 75mm). Vecchio (1981, p.240) não indica o espaçamento de fissuras para este painel.

### 6.3.2 Grupo 2: painéis rompidos pelo escoamento de ambas armaduras

Em 4 painéis ensaiados por Vecchio (1981) ocorreu o escoamento de ambas as armaduras, sem o esmagamento do concreto. Isto ocorreu porque as taxas de armaduras e as tensões de escoamento das mesmas eram relativamente baixas e pouco resistentes se comparadas com o concreto usado no painel. Dentre estes painéis, foram simulados 2 pertencentes a este grupo: PV6 e PV11.

## 6.3.2.1 Painei PV11

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% na direção horizontal ( $\rho_l=1,785\%$ ) e 1,306% na direção vertical ( $\rho_t=1,306\%$ ). O diâmetro das barras horizontais é de 6,35mm e das barras verticais é de 5,44mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 7 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

Tabela 7: dados do painel PV11

$f_c$ (MPa)	15,6	$E_s$ (MPa)	200.000
$\epsilon_0$ (adim.)	0,0026	$f_{yh}$ (MPa)	235
$f_t$ (MPa)	1,2	$f_{yv}$ (MPa)	235
$E_c$ (MPa)	12.000	$G_f$ (N/m)	40
$\nu$ (adim.)	0,25	$G_s$ (MPa)	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 59, 60 e 61.

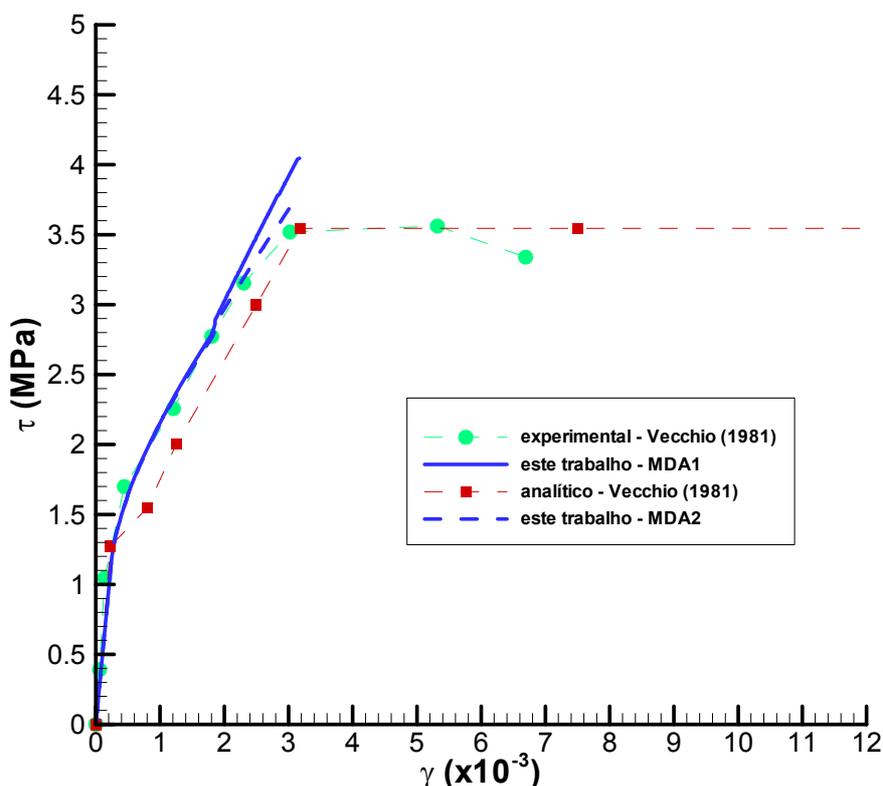


Figura 59: curva tensão x distorção do painei PV11

A curva tensão tangencial x distorção (figura 59) está muito próxima da curva experimental até a tensão de escoamento, apresentando bons resultados, principalmente para o modelo de efeito de pino de Di Prisco e Gambarova (MDA2). Há uma “quebra” na curva próxima ao nível de tensões de 3MPa indicando a formação da segunda geração de fissuras. Ressalta-se que os resultados numéricos obtidos são bem mais próximos dos experimentais comparados com o modelo de Vecchio (1981).

Como neste painel a ruptura se deu por escoamento das barras da armadura sem o esmagamento do concreto, o modelo proposto neste trabalho conseguiu simular bastante bem o comportamento do mesmo até a carga de ruptura, apesar de usar um modelo constitutivo elástico-linear para o concreto. Ressalta-se que, no algoritmo do presente trabalho, quando a tensão de escoamento de alguma armadura é atingida, o processo instabiliza-se, não fornecendo o patamar plástico do comportamento do painel, mas já é o suficiente para prever-se o comportamento completo da estrutura, inclusive podendo-se estimar a sua carga de ruptura.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 60(a) e 60(b)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos. Quando as deformações atingiram a tensão de escoamento, o processo foi interrompido.

A curva da figura 60(c) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$  (ver fórmula (7)), para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade bastante boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho.

A curva da figura 60(d) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$  (onde,  $\varepsilon_d = \bar{\delta} / L$ ), para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981), lembrando que a deformação da diagonal comprimida é calculada diretamente dos deslocamentos prescritos impostos.

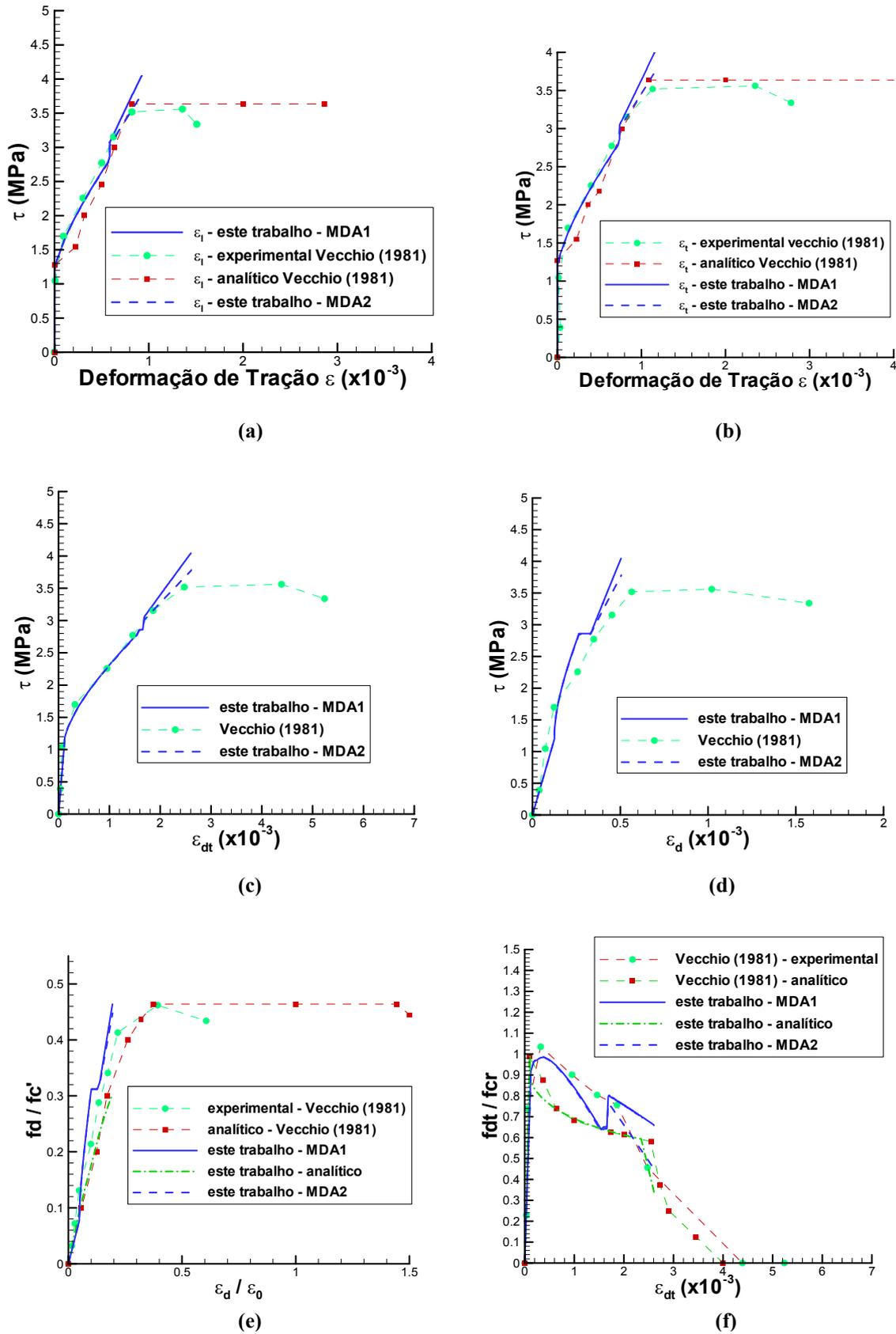


Figura 60: curvas do painel PV11 de (a)  $\epsilon_l \times \tau$ ; (b)  $\epsilon_l \times \tau$  (c)  $\epsilon_{dt} \times \tau$ ; (d)  $\epsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração

As figuras 60(e) e 60(f) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Em ambas figuras, as curvas **analíticas** de Vecchio e do presente trabalho resultaram muito próximas, indicando que os dados empregados estão certos e que o algoritmo fornece resultados coerentes. Já as curvas numéricas reais do presente trabalho foram muito melhores nas tensões da diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ) que o modelo analítico de Vecchio e foram também boas nas tensões da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), concordando bem com as tensões experimentais. Neste caso, o modelo de efeito de Pino MDA2 simulou melhor a tensão na diagonal tracionada se comparado ao MDA1. A repentina “quebra” na curva da diagonal tracionada foi devido à 2ª geração de fissuras, onde cabem os mesmos comentários feitos ao painel PV27.

A figura 61 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. O método para a confecção dos Círculos é o mesmo que foi detalhado no painel PV27. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para todos os estágios. O modelo de efeito de pino MDA2 forneceu Círculos melhores de tensões que o modelo MDA1, apresentando Círculos excelentes para os estágios de tensões e deformações experimentais apresentados. Há também a variação do ângulo das deformações e tensões principais experimentais do painel e a variação do ângulo calculado numericamente na figura 61 (c). O ângulo numérico é obtido conforme explicado no item 5.3.5, estando sempre entre os ângulos das tensões e deformações principais que não são iguais, como supunha o modelo analítico de Vecchio, sendo que a diferença aumenta para níveis maiores de carga. Observou-se que houve dificuldade nas medições experimentais destes ângulos para o início do processo, no trecho elástico-linear do painel.

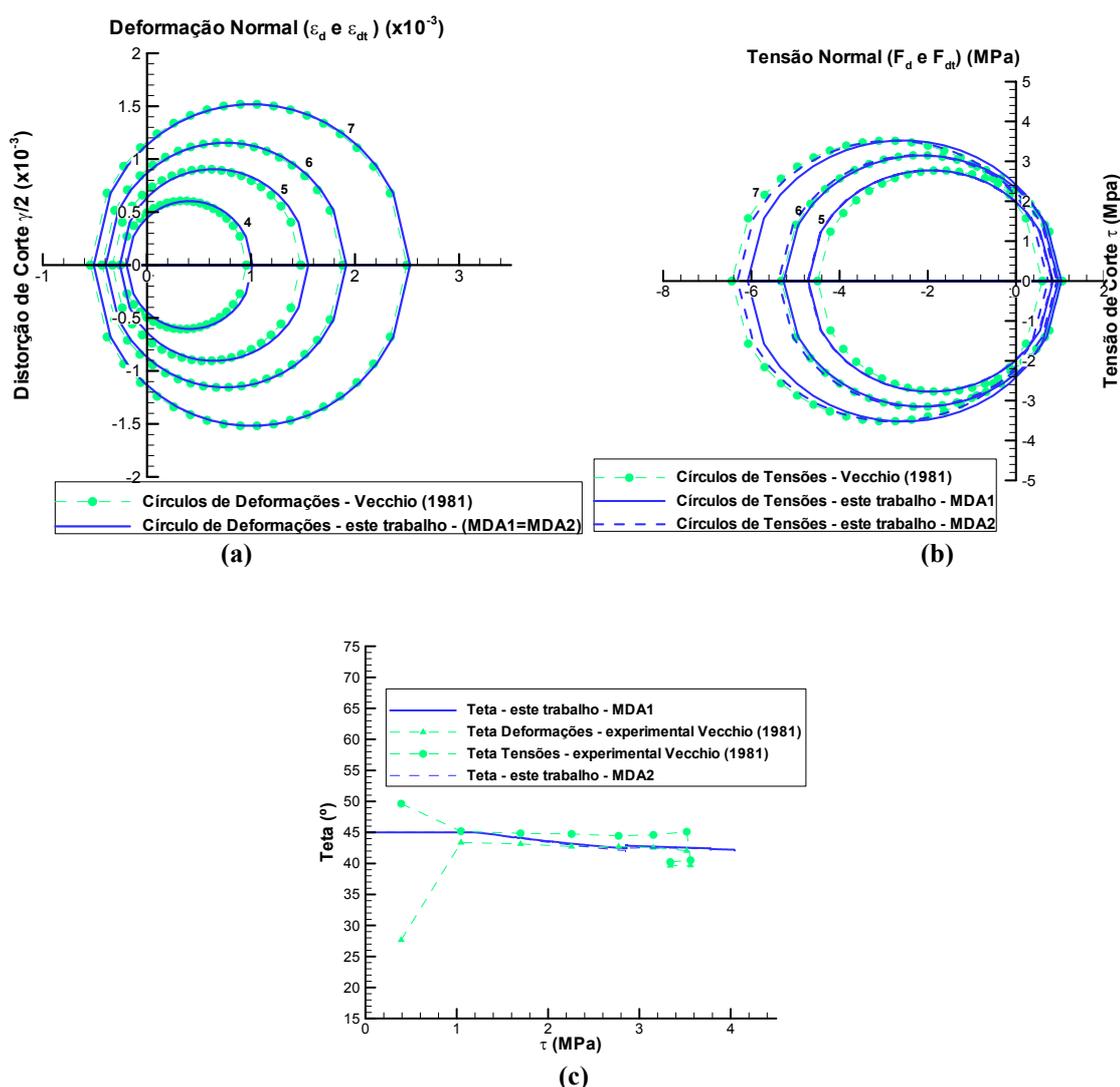


Figura 61: curvas do painel PV11: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 5,2 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 9,4 fissuras (espaçamento de 130mm). No trecho após a 2ª geração de fissuras, o número de fissuras passa para 19,8 fissuras (espaçamento de 65mm). Vecchio (1981, p.248) coloca que as fissuras iniciais estão espaçadas de 100mm a 200mm, inclinadas a 45°. A 3,45MPa as fissuras estão espaçadas de 75mm a 100mm. Os resultados mostram que o espaçamento inicial de fissuras simulado está dentro da faixa verificada nos ensaios experimentais e que o espaçamento final das mesmas também está muito próximo dos resultados obtidos por Vecchio (1981). Além disso, se o ângulo inicial das fissuras era de 45°, como foi constatado por Vecchio, os ângulos das deformações e tensões

principais também deveriam possuir um valor próximo de 45°, denotando a dificuldade da determinação destes ângulos, experimentalmente, para níveis baixos de carga.

### 6.3.2.2 Painei PV6

Neste painei, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% em cada direção ( $\rho_l = \rho_t = 1,785\%$ ). O diâmetro das barras é de 6,35mm. Os demais dados do painei são dados na tabela 8 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painei PV27. Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 62, 63 e 64.

Tabela 8: dados do painei PV6

$f_c$ (MPa)	29,8	$E_s$ (MPa)	200.000
$\epsilon_0$ (adim.)	0,0025	$f_{vh}$ (MPa)	266
$f_t$ (MPa)	1,8	$f_{yv}$ (MPa)	266
$E_c$ (MPa)	23.800	$G_f$ (N/m)	80
$\nu$ (adim.)	0,25	$G_s$ (MPa)	80.000

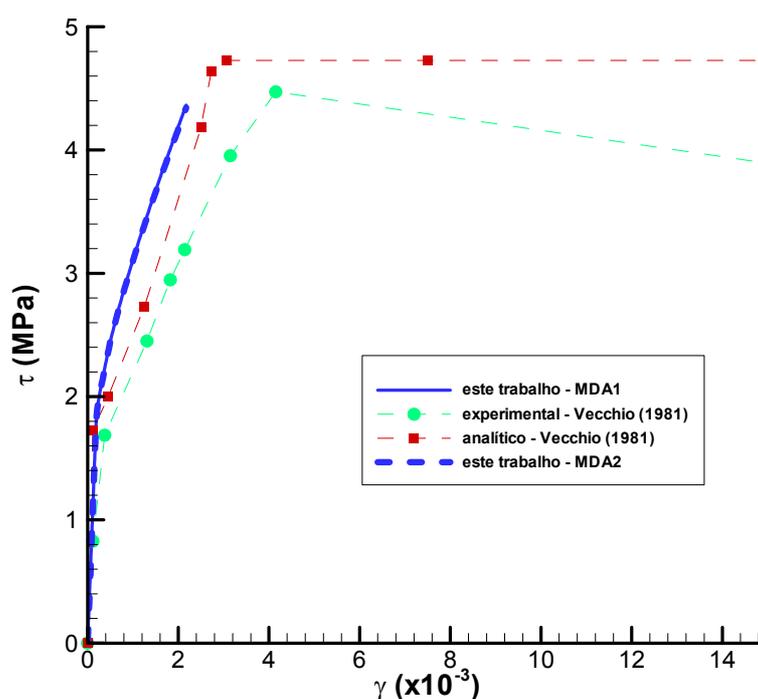


Figura 62: curva tensão x distorção do painei PV6

Alguns painéis ensaiados por Vecchio (1981) apresentaram deformações maiores do que os esperados para o mesmo nível de tensões. No caso deste painel, esperava-se uma resposta experimental mais rígida, tanto pelo modelo analítico de Vecchio (1981) (que para os outros painéis mostrados até agora, sempre se apresentou abaixo da curva experimental, ou seja, sempre foi mais flexível), quanto pelo modelo numérico apresentado neste trabalho (ver figura 62). Isso é um indicativo de que, provavelmente, deve haver ocorrido problemas no ensaio experimental deste painel. Novamente, o processo numérico parou ao atingir-se a tensão de escoamento das barras de aço.

Neste painel, não ocorreu a 2ª geração de fissuras, sendo que a armadura entrou em escoamento já para baixos níveis de carga. Os valores obtidos pela simulação numérica não estão muito próximos dos experimentais, mas o comportamento da curva numérica apresenta a mesma tendência (diminuição da rigidez com o aumento do carregamento) da curva experimental. Ao contrário, na curva analítica de Vecchio, observa-se um aumento da rigidez com o aumento do carregamento.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 63(a)), foi obtida uma resposta mais rígida que a experimental, o mesmo que ocorreu com a analítica de Vecchio (1981).

A curva da figura 63(b) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Como as deformações nas barras da armadura não foram muito próximas das experimentais, as deformações da diagonal tracionada, determinada através de Círculos de Mohr, também não resultaram próximas.

A curva da figura 63(c) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva resultou relativamente próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981). A deformação da diagonal comprimida experimental é maior do que a simulada numericamente. Isto também influencia todo o cálculo das tensões e outras deformações do concreto deste painel, mas não tanto quanto a divergência entre as deformações experimentais e numéricas das armaduras.

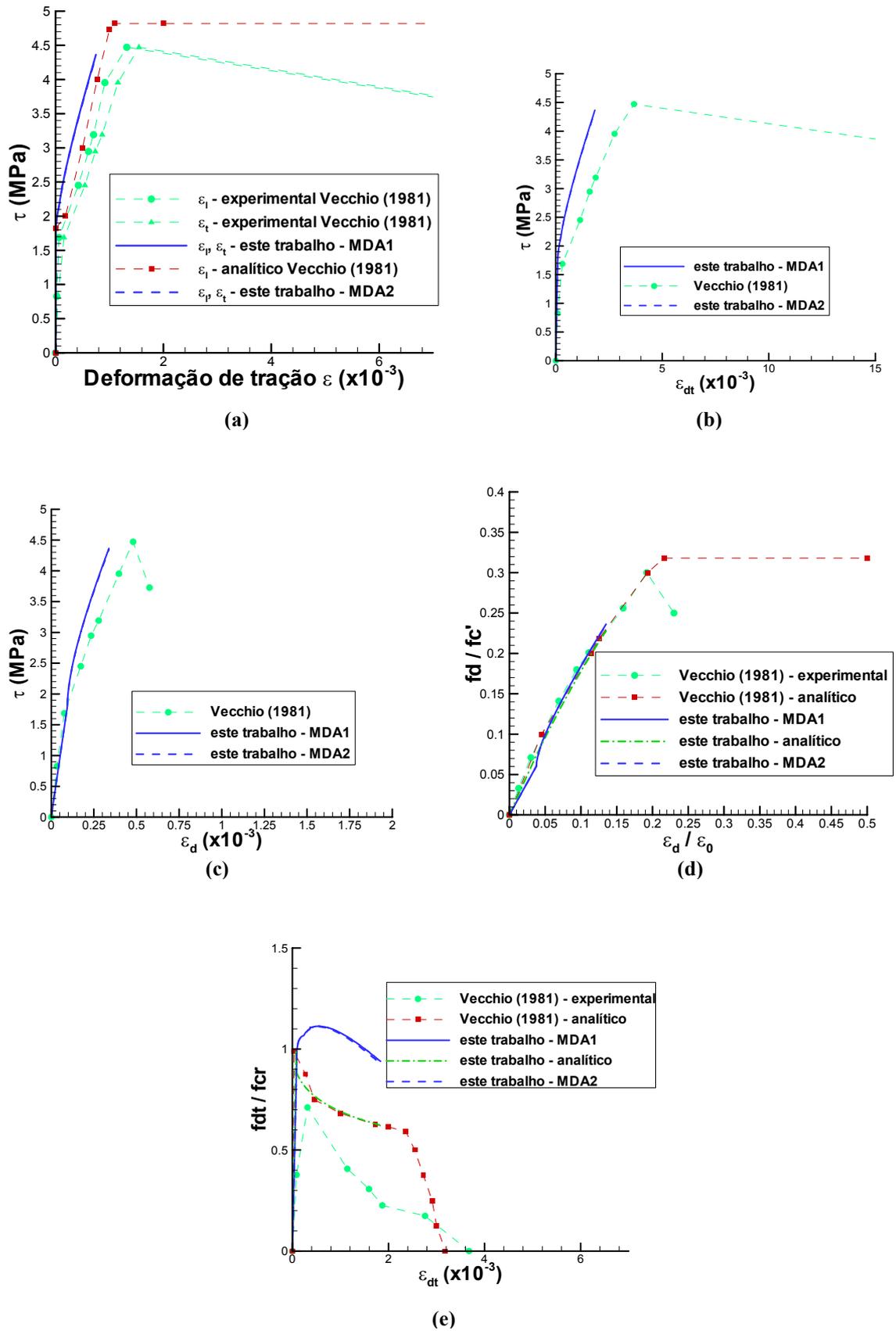


Figura 63: curvas do painel PV6 de (a)  $\varepsilon_l = \varepsilon_l \times \tau$ ; (b)  $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c)  $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração

As figuras 63(d) e 63(e) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Todos os modelos apresentados resultaram muito bons para a tensão da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), já que o esmagamento do concreto é de menor significância neste painel. Para a diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ), os modelos **analíticos** de Vecchio (1981) e o deste trabalho simularam melhor o comportamento experimental da estrutura. Em relação às tensões calculadas através Círculos de Mohr, já que as deformações de tração já não estavam muito próximas e a curva tensão tangencial x distorção também não, os resultados para esta curva também resultaram distantes dos experimentais.

A figura 64 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para os Círculos de Deformações e pouca concordância nos Círculos de Tensões calculados. Isto indica, realmente, que para um mesmo nível de tensões tangenciais (eixo das ordenadas do Círculo de Mohr de tensões), era esperado que a armadura possuísse uma tensão menor do que a real medida (ou seja, os Círculos experimentais possuem maior tensão na diagonal comprimida,  $f_d$ , que mostra que as tensões nas armaduras são maiores (ver fórmula (122)), se comparadas às numéricas, o que não era esperado). Isto implicaria numa curva tensão tangencial x distorção mais rígida, pois se as tensões experimentais nas armaduras são maiores é porque as deformações nas mesmas também são, o que indica uma distorção maior do painel (ver fórmula (121)) para uma mesma tensão tangencial.

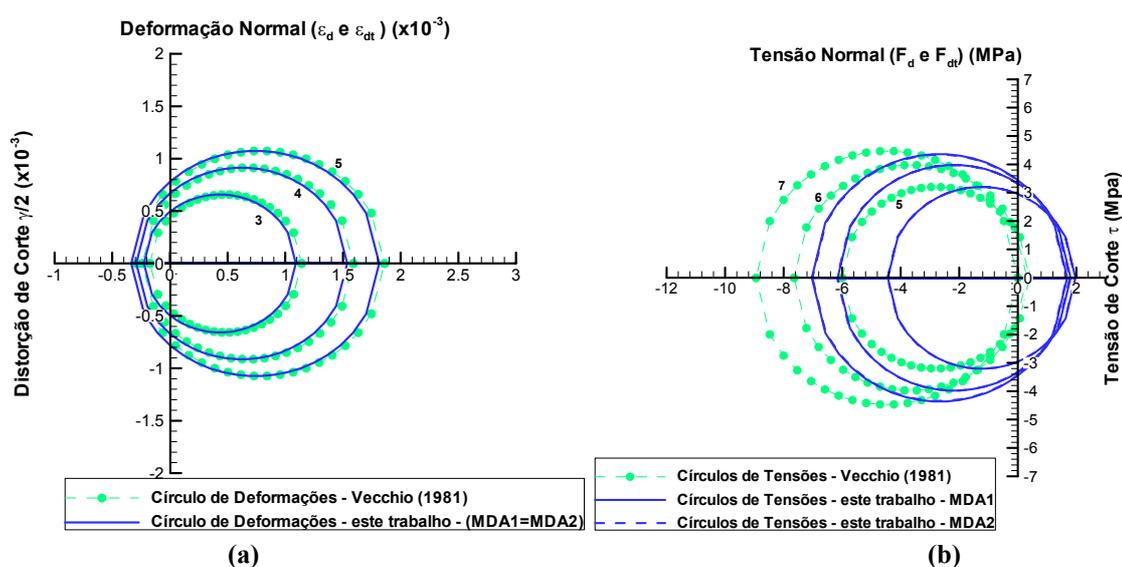


Figura 64: curvas do painel PV6: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 6,3 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 11,6 fissuras (espaçamento de 110mm). Vecchio (1981, p.228) indica que as fissuras iniciais possuíam espaçamento de 75mm a 100mm. Ou seja, o espaçamento simulado está muito próximo do real observado por Vecchio. Há também o espaçamento final de fissuras de 50mm a 75mm, que não pode ser comparado, já que é para os estágios finais de carga, após um longo escoamento da armadura, conforme mostrado na figura 62, e a curva numérica não possui o patamar de escoamento.

### 6.3.3 Grupo 3: painéis rompidos pelo escoamento da armadura transversal

Em 8 painéis ensaiados por Vecchio (1981), ocorreu o escoamento da armadura transversal, sem o esmagamento do concreto ou o escoamento da armadura longitudinal. Isto ocorreu porque as taxas de armaduras transversais e as tensões de escoamento das mesmas eram relativamente baixas e pouco resistentes se comparadas com os outros materiais. Dos 8 painéis onde ocorreu esta forma de ruptura, foram simulados 2: PV10 e PV21.

#### 6.3.3.1 Painel PV21

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% na direção horizontal ( $\rho_t=1,785\%$ ) e 1,296% na direção vertical ( $\rho_t=1,296\%$ ). O diâmetro das barras horizontais é de 6,35mm e das barras verticais é de 5,41mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 9 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

Tabela 9: dados do painel PV21

<b><math>f_c</math> (MPa)</b>	19,5	<b><math>E_s</math> (MPa)</b>	200.000
<b><math>\epsilon_0</math> (adim.)</b>	0,0018	<b><math>f_{yh}</math> (MPa)</b>	458
<b><math>f_t</math> (MPa)</b>	1,9	<b><math>f_{yv}</math> (MPa)</b>	302
<b><math>E_c</math> (MPa)</b>	21.500	<b><math>G_f</math> (N/m)</b>	110
<b><math>\nu</math> (adim.)</b>	0,25	<b><math>G_s</math> (MPa)</b>	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 65, 66 e 67.

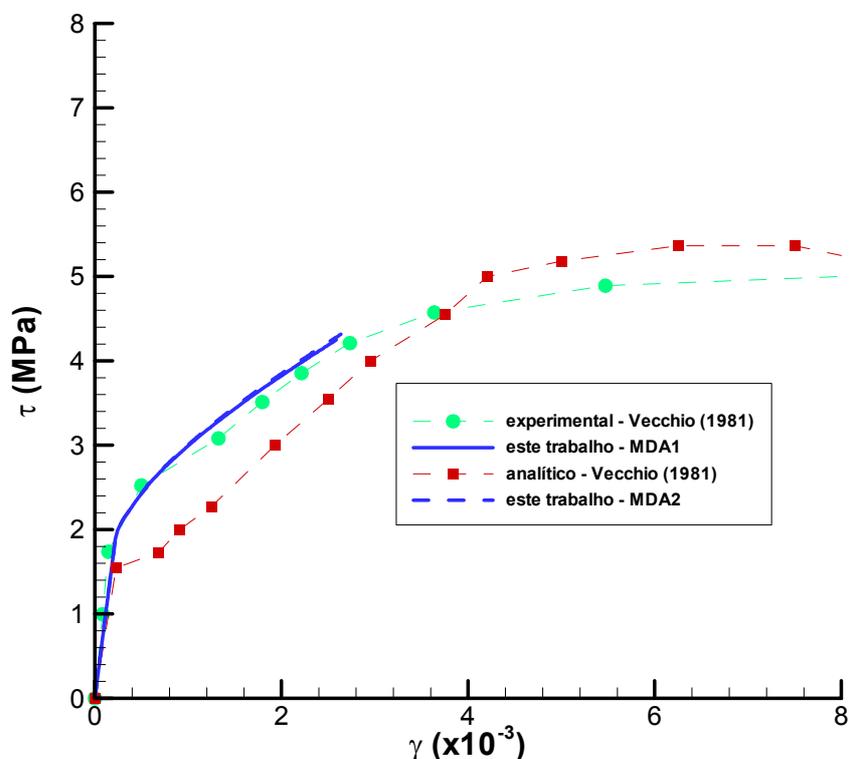


Figura 65: curva tensão x distorção do painel PV21

A curva tensão tangencial x distorção (figura 65) está muito próxima da curva experimental até o nível de carregamento de, aproximadamente, 4,4MPa, apresentando bons resultados, para ambos modelos de efeito de pino. Não há a formação da segunda geração de fissuras neste painel. Os resultados numéricos obtidos até o nível de carga de 4,4MPa são bem mais próximos dos experimentais se comparados com o modelo matemático de Vecchio (1981).

Ressalta-se que, no algoritmo do presente trabalho, quando a tensão de escoamento de alguma armadura é atingida, o processo instabiliza-se. Portanto, esta tensão de 4,4MPa não deve ser tomada como tensão última da peça e sim como a tensão relativa ao início do escoamento da armadura transversal. Cabe ainda salientar que, neste mesmo ponto, a curva experimental sofre uma flexibilização (diminuição da rigidez) o que, possivelmente, está relacionado com o escoamento da armadura.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 66(a) e 66(b)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos até o nível de 4,4MPa. Quando as deformações atingiram a tensão de escoamento no modelo numérico, o processo foi interrompido.

A curva da figura 66(c) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade excelente dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho. A curva experimental foi criada diretamente da listagem de resultados experimentais de Vecchio (1981), sendo que o autor não apresentou esta curva em forma de gráfico e, por isso, não há a curva analítica do modelo matemático para a comparação de resultados.

A curva da figura 66(d) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou muito próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981), lembrando que a deformação da diagonal comprimida é calculada diretamente dos deslocamentos prescritos impostos.

As figuras 66(e) e 66(f) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Em ambas figuras, as curvas **analíticas** de Vecchio e do presente trabalho resultaram muito próximas, indicando que os dados de entrada do programa estão certos e que o algoritmo fornece resultados coerentes. Já as curvas numéricas do presente trabalho foram muito melhores nas tensões da diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ), que o modelo analítico de Vecchio, representando-se bem o comportamento desta diagonal do painel, e estão muito próximas da curva experimental da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), concordando bem com as tensões experimentais. Neste caso, o modelo de efeito de pino MDA1 foi ligeiramente melhor, na simulação numérica, se comparado ao MDA2.

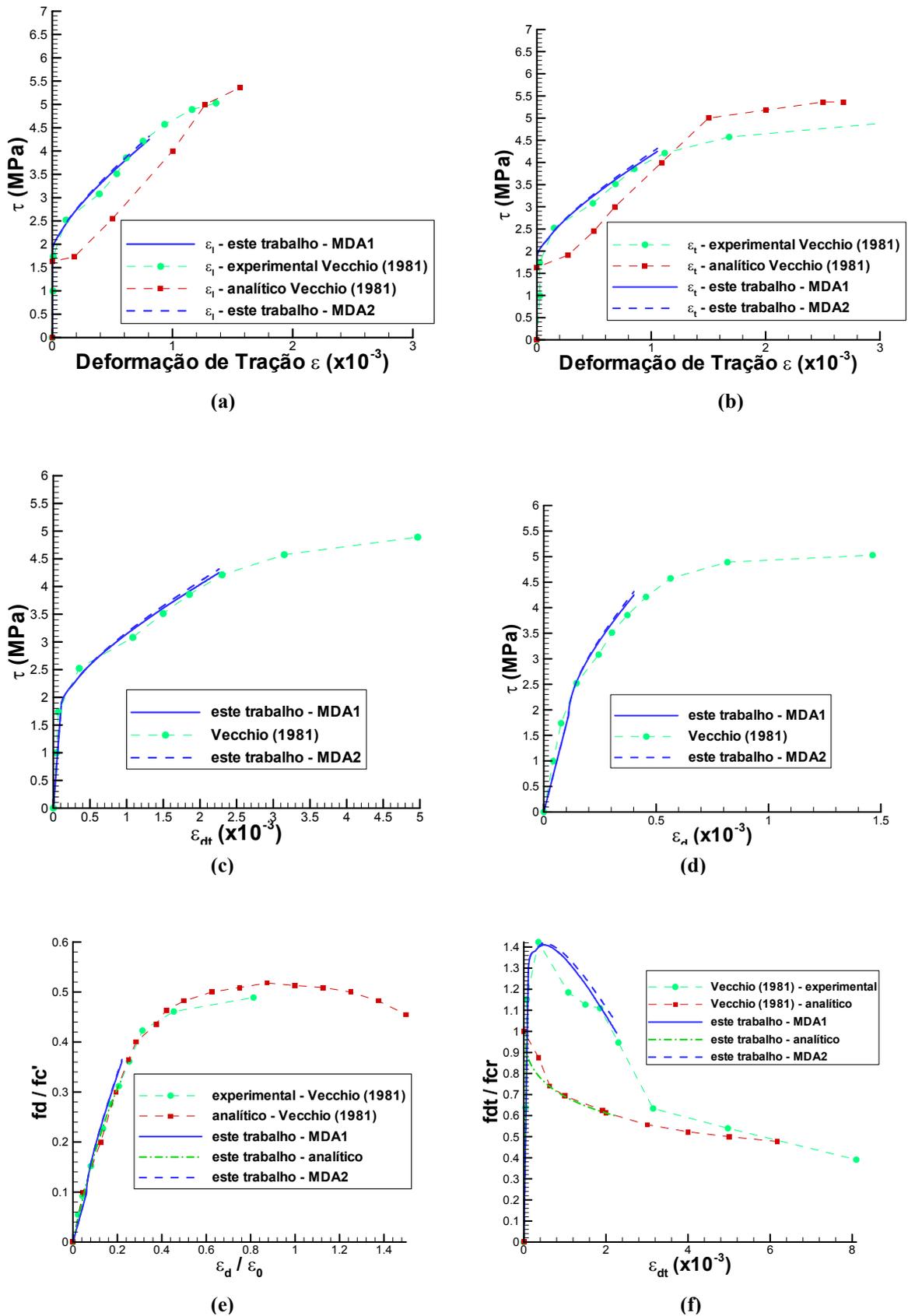


Figura 66: curvas do painel PV21 de (a)  $\varepsilon_t \times \tau$ ; (b)  $\varepsilon_t \times \tau$  (c)  $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (d)  $\varepsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração

A figura 67 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para todos os estágios. O modelo de efeito de pino MDA1 forneceu círculos ligeiramente melhores de tensões que o modelo MDA2, resultando em Círculos excelentes para os estágios de tensões e deformações experimentais apresentados. Há também a variação do ângulo das deformações e tensões principais experimentais do painel e a variação do ângulo calculado numericamente na figura 67(c). O ângulo numérico está sempre entre os ângulos das tensões e deformações principais que não são iguais, como supunha o modelo analítico de Vecchio, sendo que a diferença aumenta para níveis maiores de carga.

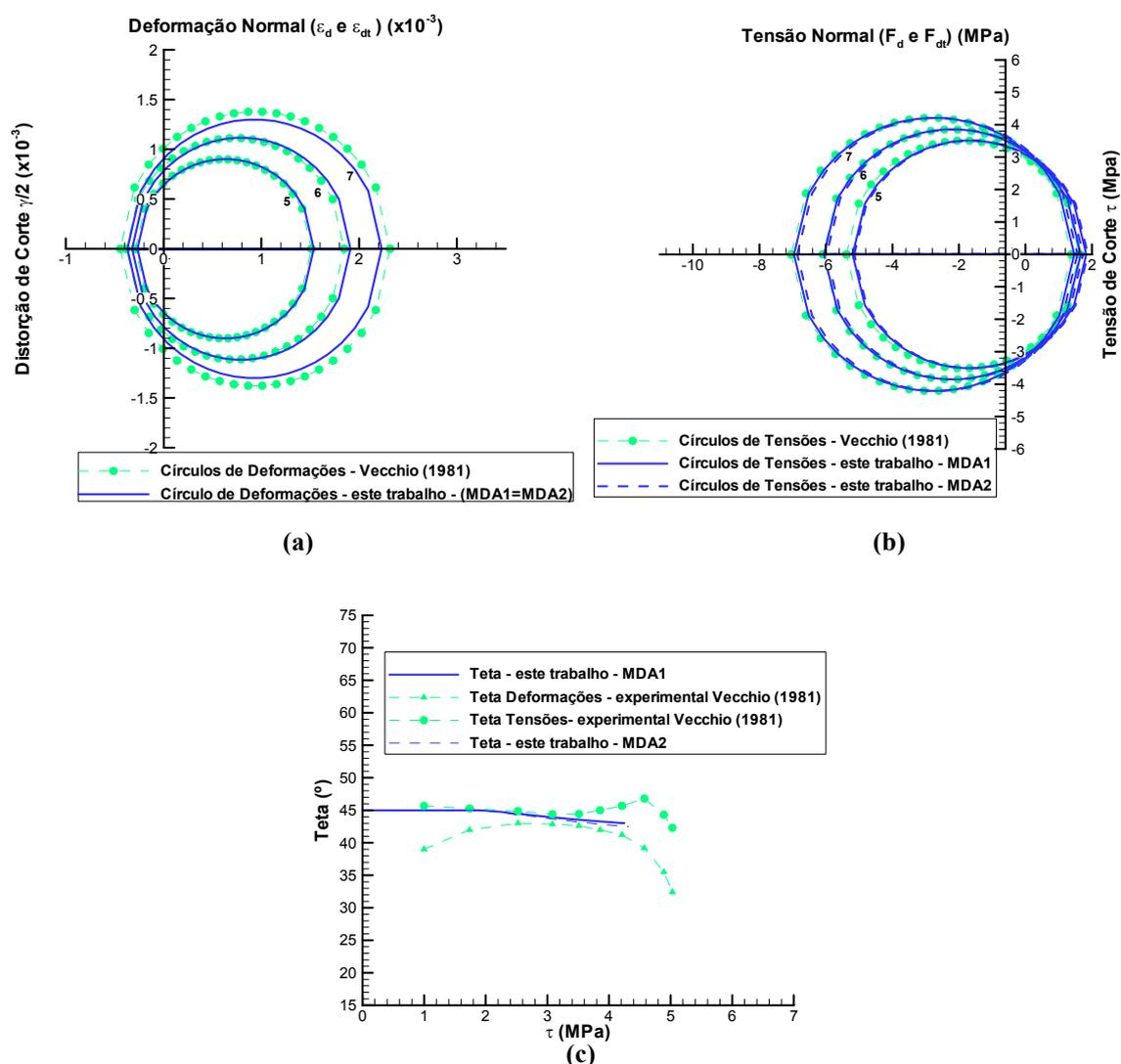


Figura 67: curvas do painel PV21: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações

Observou-se que houve dificuldade nas medições experimentais destes ângulos para o início do processo, no trecho elástico-linear do painel.

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 4,8 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 8,6 fissuras (espaçamento de 145mm). Vecchio (1981, p.289) coloca que a 3,45MPa, as fissuras estão espaçadas de 75mm a 100mm. Os resultados mostram que o espaçamento inicial de fissuras simulado está um pouco acima da faixa verificada nos ensaios experimentais. Além disso, Vecchio coloca que o ângulo inicial das fissuras era de 45°. Dessa forma, os ângulos das deformações e tensões principais também deveriam possuir um valor próximo de 45°, denotando a dificuldade da determinação destes ângulos, experimentalmente, para níveis muito baixos de carga.

### 6.3.3.2 Painel PV10

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% na direção horizontal ( $\rho_l=1,785\%$ ) e 0,999% na direção vertical ( $\rho_t=0,999\%$ ). O diâmetro das barras horizontais é de 6,35mm e das barras verticais é de 4,70mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 10 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

Tabela 10: dados do painel PV10

<b><math>f_c</math> (MPa)</b>	14,5	<b><math>E_s</math> (MPa)</b>	200.000
<b><math>\epsilon_0</math> (adim.)</b>	0,0027	<b><math>f_{vh}</math> (MPa)</b>	276
<b><math>f_t</math> (MPa)</b>	1,5	<b><math>f_{vv}</math> (MPa)</b>	276
<b><math>E_c</math> (MPa)</b>	12.800	<b><math>G_f</math> (N/m)</b>	75
<b><math>\nu</math> (adim.)</b>	0,25	<b><math>G_s</math> (MPa)</b>	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 68, 69 e 70.

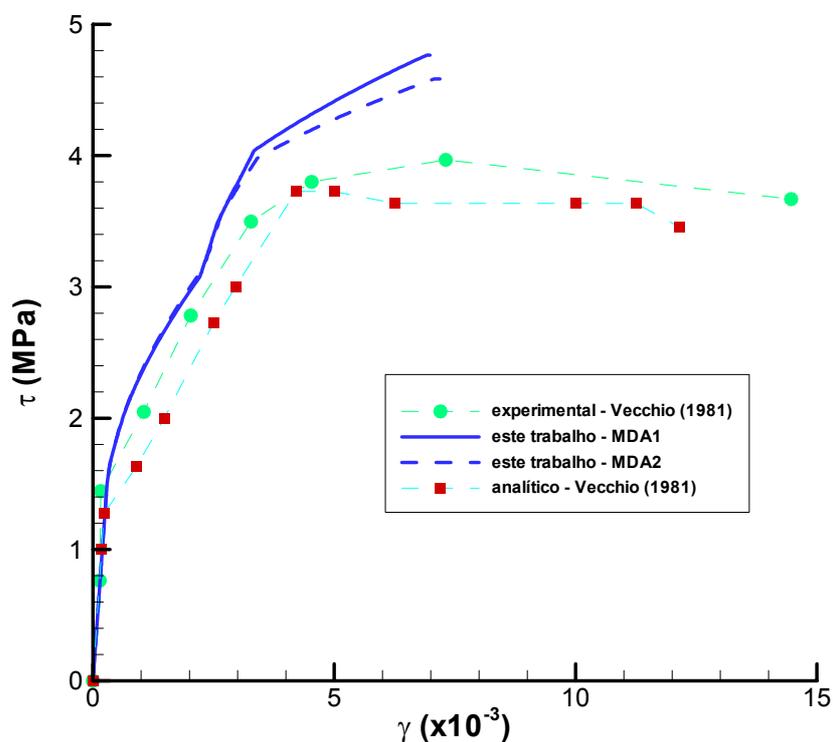


Figura 68: curva tensão x distorção do painel PV10

A curva tensão tangencial x distorção (figura 68) apresenta resultados razoáveis, para ambos modelos de efeito de pino. O escoamento da armadura transversal ocorreu para uma tensão tangencial próxima a 4,5MPa, um pouco acima da constatada experimentalmente. Observa-se que a queda de rigidez da curva próximo à tensão de escoamento da armadura transversal foi bem captada pelo modelo numérico. Ressalta-se que o concreto usado no painel é de baixa resistência e que assim, a consideração de comportamento não-linear para o concreto comprimido seria o mais indicado, o que pode explicar a dispersão nos resultados.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 69(a) e 69(b)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981), com exceção do trecho final da curva, indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos. Quando as deformações atingiram a tensão de escoamento no modelo numérico, o processo foi interrompido. A curva distanciou-se no final do processo, pois, no ensaio experimental, a armadura entrou em escoamento antes que no ensaio numérico e, apesar da causa de ruptura ser devida ao escoamento da armadura transversal, o concreto

também possuía uma baixa resistência e seu comportamento não-linear possui maior influência no trecho final da curva.

A curva da figura 69(c) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma boa proximidade dos resultados experimentais e numéricos para a maior parte da curva, com exceção do trecho final, que já foi comentado anteriormente.

A curva da figura 69(d) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou razoavelmente próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981) para o trecho inicial.

As figuras 69(e) e 69(f) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Em ambas figuras, as curvas **analíticas** de Vecchio e do presente trabalho resultaram próximas, na maior parte do processo. Já as curvas numéricas do presente trabalho foram muito melhores nas tensões da diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ), que o modelo analítico de Vecchio, representando-se bem o comportamento real desta diagonal do painel, e estão muito próximas da curva experimental da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), concordando bem com as tensões experimentais, para o início da curva. Neste caso, o modelo de efeito de pino MDA2 foi ligeiramente melhor, na simulação numérica, se comparado ao MDA1. Novamente, ressalta-se que há uma “quebra” na curva da diagonal tracionada causada pela 2ª geração de fissuras, onde o número de fissuras dobra instantaneamente e a abertura unitária das mesmas decai, o que é uma característica da teoria de fissuração incorporada empregada. Isto já foi melhor explicado para o painel PV27, podendo ser adotadas as mesmas medidas, para a diagonal tracionada, descritas para este painel.

A figura 70 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para todos os estágios de deformações e uma concordância razoavelmente boa para as tensões. O modelo de efeito de pino MDA2 forneceu círculos ligeiramente melhores de tensões que o modelo MDA1. Há também a variação do ângulo das deformações e tensões principais experimentais do painel e a variação do ângulo calculado numericamente na figura 70(c). A variação numérica do ângulo acompanhou muito bem a variação dos ângulos experimentais.

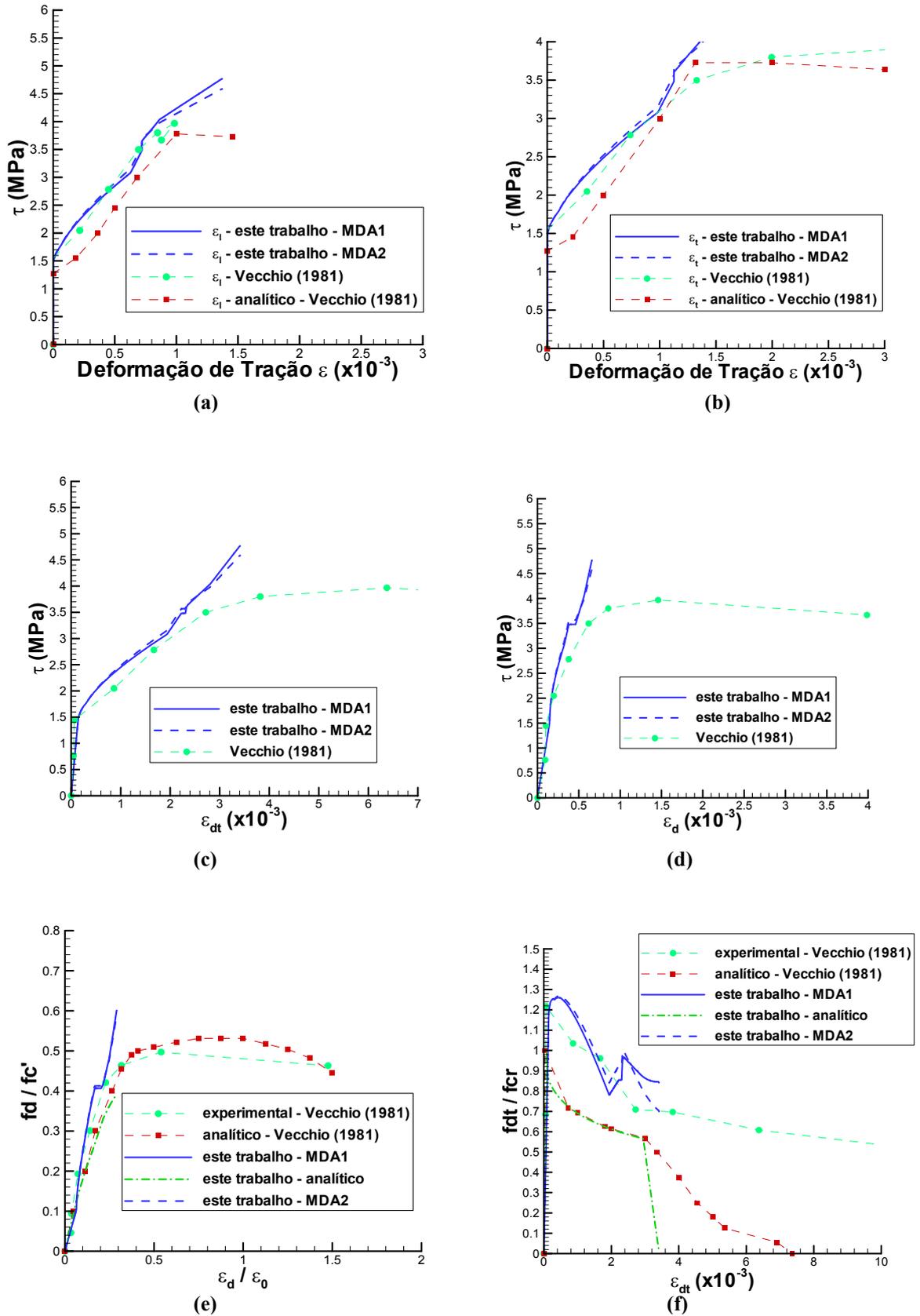


Figura 69: curvas do painel PV10 de (a)  $\epsilon_t \times \tau$ ; (b)  $\epsilon_t \times \tau$  (c)  $\epsilon_{dt} \times \tau$ ; (d)  $\epsilon_d \times \tau$ ; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração

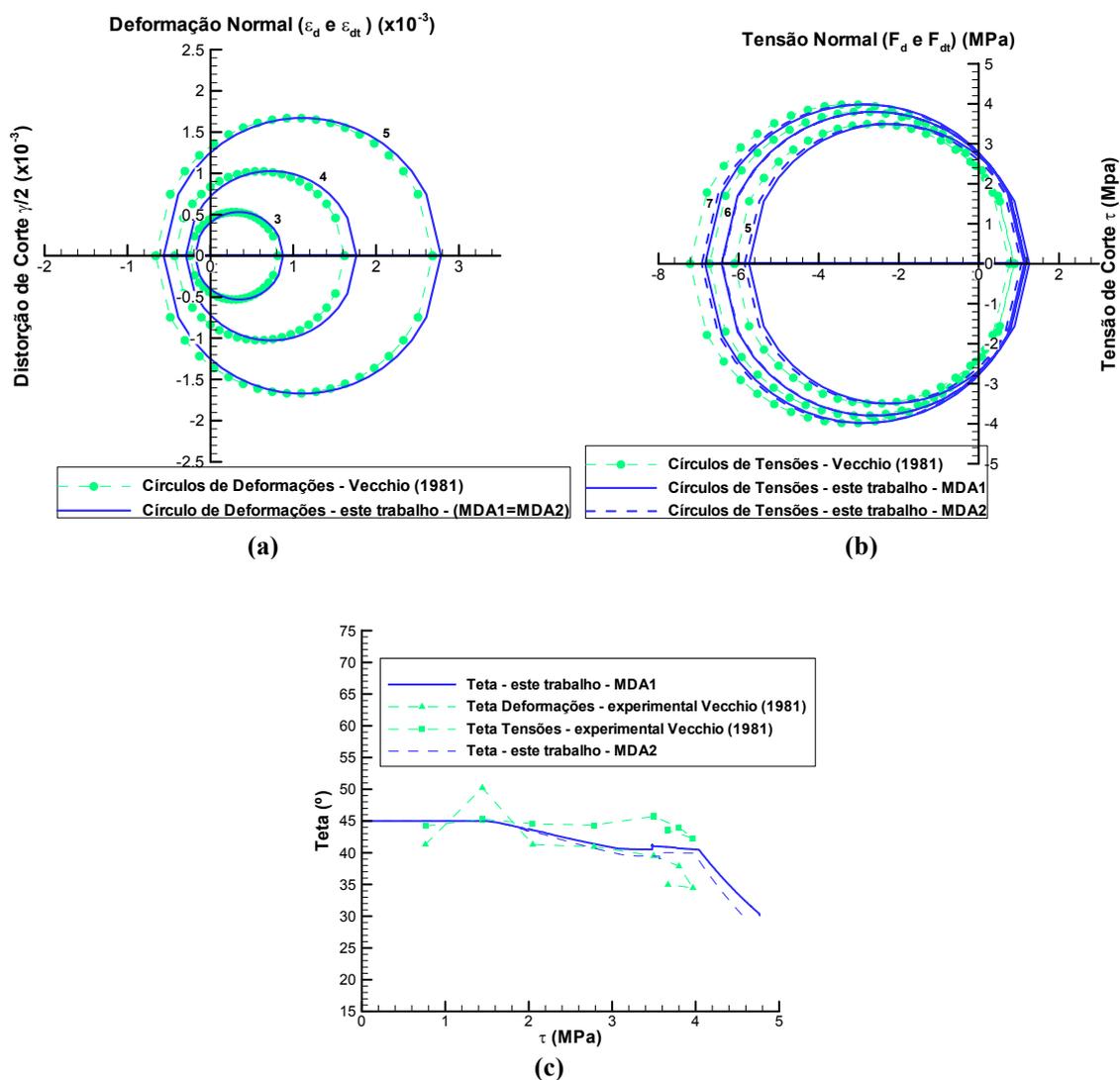


Figura 70: curvas do painel PV10: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões; (c) variação do ângulo das tensões e deformações

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 4,4 fissuras e o final foi de 8,8 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 7,8 fissuras (espaçamento de 160mm) e, no final do processo, passa para 16,6 (espaçamento de 76mm). Vecchio (1981, p.244) coloca que, inicialmente, as fissuras estão espaçadas de 75 a 100mm e, próximo à ruptura, estão espaçadas de 50mm a 75mm. Os resultados mostram que o espaçamento inicial de fissuras simulado está acima da faixa verificada nos ensaios experimentais e que o espaçamento final está próximo do limite superior indicado pelos mesmos ensaios. Ressalta-se, mais uma vez, que a determinação experimental do

espaçamento das fissuras não é simples, conforme explicado no painel PV27, e que o modelo numérico não tem como simular fissuras que não atravessem todo o painel.

#### **6.3.4 Grupo 4: painéis rompidos pelo arrancamento das chaves de transmissão de corte (*pull-out*)**

Em vários ensaios experimentais realizados, ocorreu uma ruptura localizada na borda dos painéis. Isto ocorreu na ligação do concreto do painel com as chaves de corte, que são os mecanismos do aparelho experimental de Vecchio com a função de transmitir o carregamento imposto deste aparelho para o painel, ou seja, é o mecanismo que transmite as forças dos macacos hidráulicos para as bordas do corpo de prova em forma de tensões tangenciais. Inclusive, para que esta ruptura prematura não ocorresse em todos os outros ensaios, Vecchio reforçou os painéis com uma borda no perímetro de 10cm de largura de um concreto mais resistente. É enfatizado que, no presente trabalho, os painéis foram todos simulados sem a consideração desta borda mais resistente, utilizando-se apenas um tipo de concreto para todo o painel.

De posse destas observações, dos 5 ensaios onde ocorreu esta ruptura, foi simulado apenas 1 painel: PV14, onde este fenômeno não apresentou-se com tanta influência na rigidez da curva resposta, sendo que apenas houve o problema da carga última de ruptura ser menor que a esperada. Dessa forma, pode-se comparar o comportamento das curvas resposta obtidas experimentalmente e numericamente, não se dando tanta importância para a carga última.

##### Painel PV14

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% em cada direção ( $\rho_l = \rho_t = 1,785\%$ ). O diâmetro das barras é de 6,35mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 11 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

Tabela 11: dados do painel PV14

$f_c$ (MPa)	20,4	$E_s$ (MPa)	200.000
$\epsilon_0$ (adim.)	0,00223	$f_{vh}$ (MPa)	455
$f_t$ (MPa)	1,7	$f_{yv}$ (MPa)	455
$E_c$ (MPa)	18.300	$G_f$ (N/m)	60
$\nu$ (adim.)	0,25	$G_s$ (MPa)	80.000

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 71, 72 e 73.

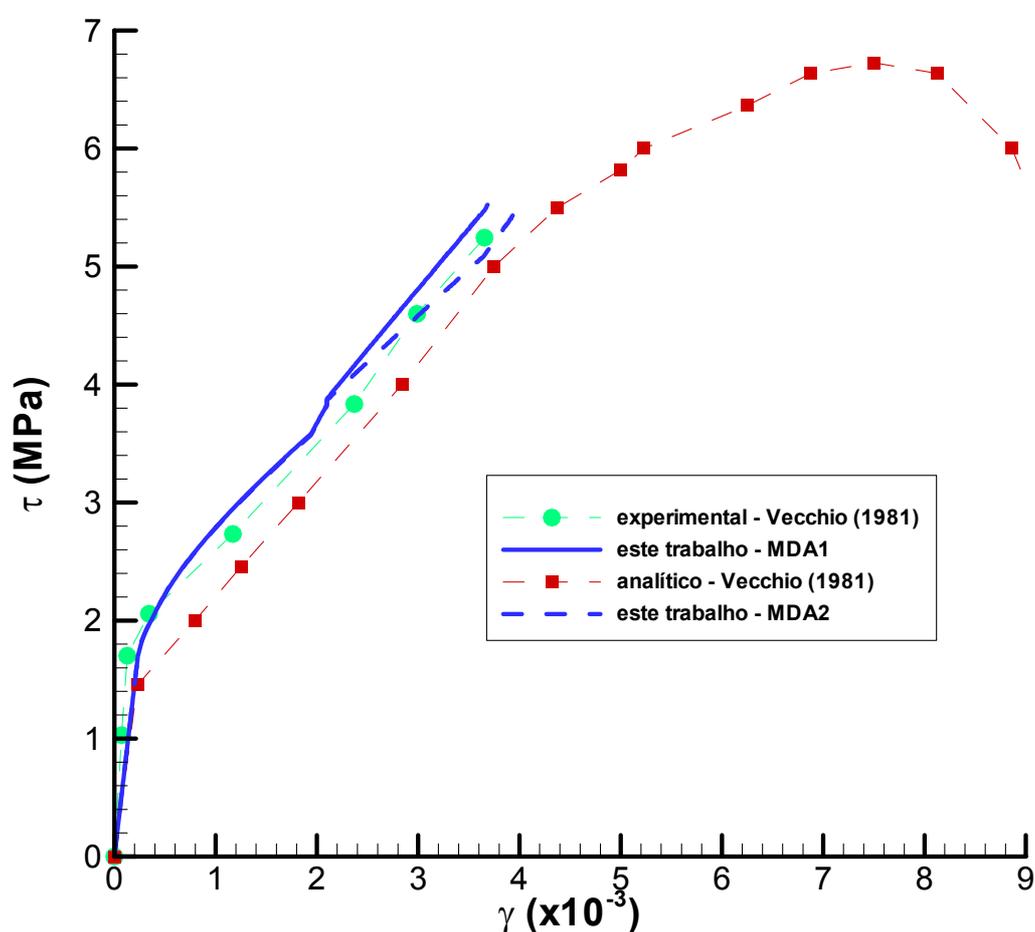


Figura 71: curva tensão x distorção do painel PV14

A curva tensão tangencial x distorção (ver figura 71) está muito próxima da curva experimental, apresentando bons resultados, para ambos modelos de efeito de pino. A segunda geração de fissuras ocorre por volta de 4MPa. Ressalta-se que os resultados

numéricos obtidos são bem mais próximos dos reais se comparados com o modelo matemático de Vecchio (1981). Pelo modelo analítico de Vecchio, o painel deveria ter resistido a cargas ainda maiores, não podendo ser previsto o arrancamento das chaves de corte.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 72(a)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental, assim como a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos.

A curva da figura 72(b) mostra a deformação da diagonal tracionada,  $\varepsilon_{dt}$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade muito boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho.

A curva da figura 72(c) mostra a deformação da diagonal comprimida,  $\varepsilon_d$ , para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981), lembrando que a deformação da diagonal comprimida é calculada diretamente dos deslocamentos prescritos impostos.

As figuras 72(d) e 72(e) mostram os resultados para o cálculo das tensões nas duas diagonais do painel. Em ambas figuras, as curvas **analíticas** de Vecchio e do presente trabalho resultaram muito próximas. Já as curvas numéricas reais do presente trabalho representaram melhores as tensões da diagonal tracionada ( $\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$ ), que o modelo analítico de Vecchio (e o comportamento da curva também), e estão muito próximas da curva experimental da diagonal comprimida ( $\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c'$ ), concordando bem com as tensões experimentais. Neste caso, o modelo de efeito de pino MDA1 foi ligeiramente melhor, na simulação numérica, se comparado ao MDA2. A “quebra” na curva da diagonal tracionada recebe os mesmos comentários já feitos para o painel PV27.

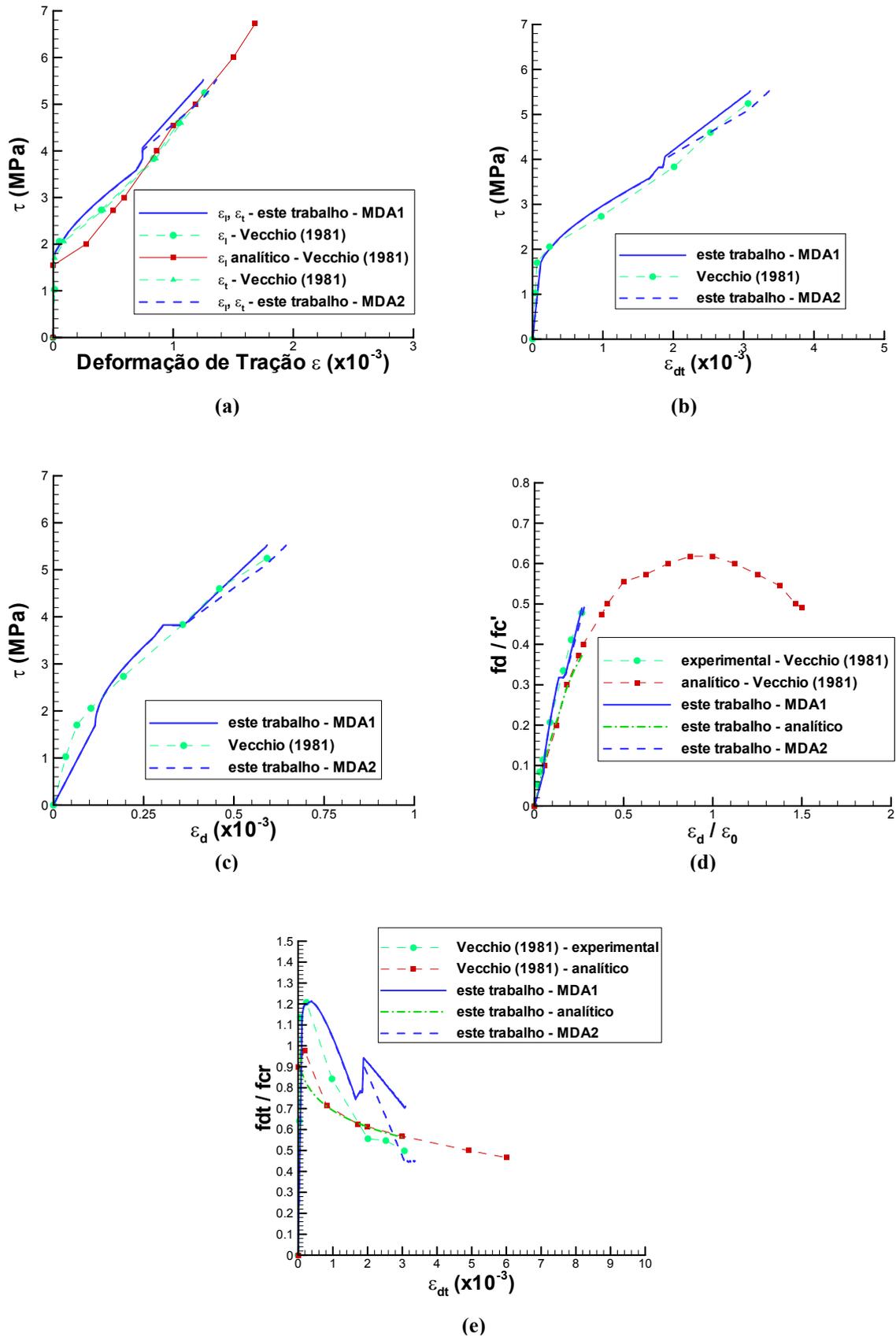


Figura 72: curvas do painel PV14 de (a)  $\varepsilon_t = \varepsilon_t \times \tau$ ; (b)  $\varepsilon_{dt} \times \tau$ ; (c)  $\varepsilon_d \times \tau$ ; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração

A figura 73 mostra os Círculos de Mohr para vários estágios de tensões e deformações. Percebe-se uma boa concordância nos resultados para todos os estágios. O modelo de efeito de pino MDA2 forneceu círculos ligeiramente melhores de tensões que o modelo MDA1, apresentando Círculos excelentes para os estágios de tensões e deformações experimentais apresentados.

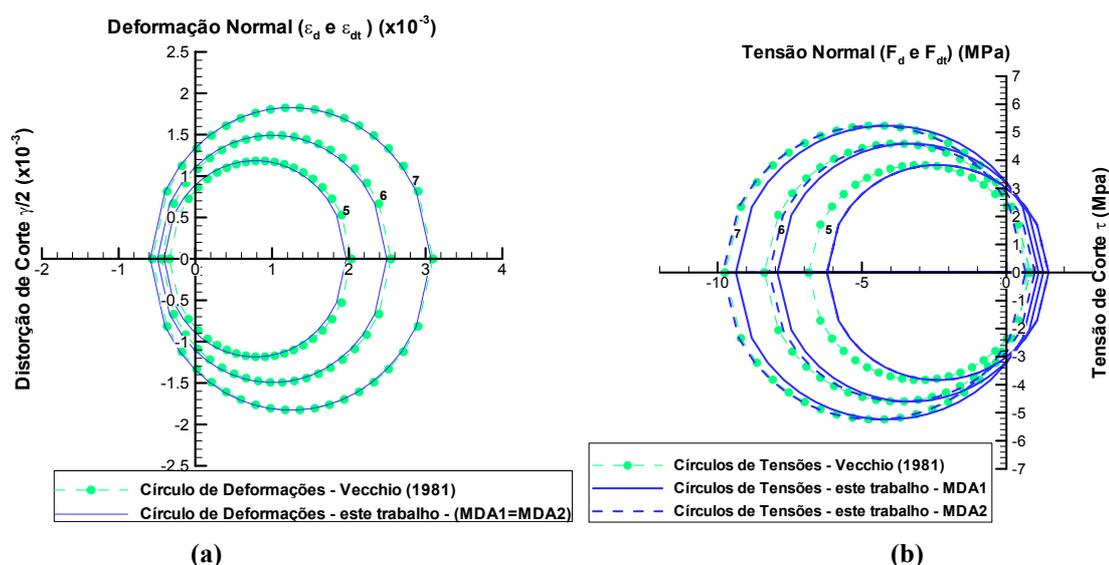


Figura 73: curvas do painel PV14: (a) Círculos de Mohr de Deformações; (b) Círculos de Mohr de Tensões

Finalmente, o número de fissuras na 1ª geração deste painel, para cada direção, foi de 5,3 fissuras. De acordo com a fórmula (120), compondo-se as duas direções globais, o número de fissuras real obtido numericamente é de 9,6 fissuras (espaçamento de 130mm). O número de fissuras real para os estágios finais de carga resultou em 20,2 (espaçamento de 62mm). Vecchio (1981, p.260) coloca que as fissuras iniciais estavam espaçadas de 75mm a 100mm e, as finais, de 25mm a 50mm. Novamente, o espaçamento de fissuras simulado numericamente resultou um pouco acima da faixa real experimental e valem os mesmos comentários feitos para os outros painéis, onde isso também ocorreu.

Neste painel não houve muita influência do arrancamento da chave de transmissão de corte na rigidez da curva tensão tangencial x distorção do mesmo, sendo que ambas as simulações numéricas deste trabalho e a de Vecchio (1981) conseguiram captar bem a resposta do ensaio realizado. Salienta-se que a carga última experimental foi baixa pelos motivos já expostos e que a curva numérica do presente trabalho foi truncada no término da curva experimental, já que ela continuaria linear (pois não possui o comportamento não-linear do concreto), sem a

possibilidade de comparação com os resultados experimentais e sem haver sentido na comparação com a analítica de Vecchio, que usa um modelo não-linear para o concreto.

#### 6.4 COMPARAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO EFEITO DE PINO NO MODELO

O efeito de pino possui um papel significativo em painéis de concreto armado submetidos ao corte puro, onde um sistema regular de barras de armadura e de fissuração inclinada em relação às barras está presente em toda a estrutura. O efeito vai tornando-se mais significativo com o crescimento do nível de carga (no caso, com a tensão tangencial) e não pode ser desprezado.

Os painéis apresentados no item 6.3 foram todos ensaiados para dois modelos de efeito de pino distintos e seus resultados foram apresentados e comentados. Para que se possa ter uma noção mais exata da magnitude deste efeito, são apresentadas, nas figuras 74 e 75, as curvas tensão tangencial x distorção para os painéis PV27 e PV22. Estas curvas já foram apresentadas no item 6.3, mas agora, juntamente com elas, há mais duas curvas: uma sem a consideração de efeito de pino, usando-se a mesma energia de fratura já ensaiada e a outra também sem a consideração de efeito de pino, porém usando-se uma energia de fratura maior.

Para ambos os painéis, verifica-se que o efeito de pino possui uma influência relevante na resposta, sendo necessária uma energia de fratura muito maior (e irreal) para que se obtenha uma resposta numérica semelhante, sem a consideração deste efeito. Além disso, comparando-se as respostas com e sem o efeito de pino para a mesma energia de fratura, percebe-se nitidamente o crescimento da diferença das mesmas, já que o efeito vai tornando-se cada vez mais importante, o que está de acordo com a teoria empregada. Em ambos os casos, mesmo utilizando-se energias de fratura muito altas, não foi obtida uma resposta muito semelhante e tão boa como na simulação com o efeito de pino, sendo que a curva numérica também parou e instabilizou-se para níveis muito menores de carga, conforme pode ser facilmente observado. Observa-se que, mesmo sem a consideração do efeito de pino, a resposta numérica obtida pelo presente trabalho já é mais próxima da experimental se comparada com o modelo analítico de Vecchio. **A tabela B3 (Apêndice B) traz os valores numéricos de alguns pontos das diferentes curvas das figuras 74 e 75 para que haja uma noção mais exata das diferenças entre as mesmas, para alguns níveis de carregamento.**

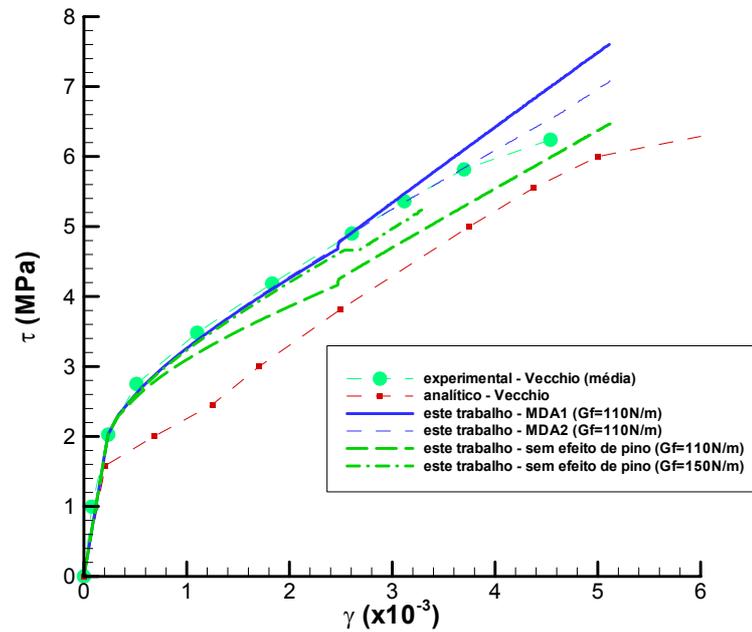


Figura 74: influência do efeito de pino na curva tensão tangencial x distorção para o painel PV27

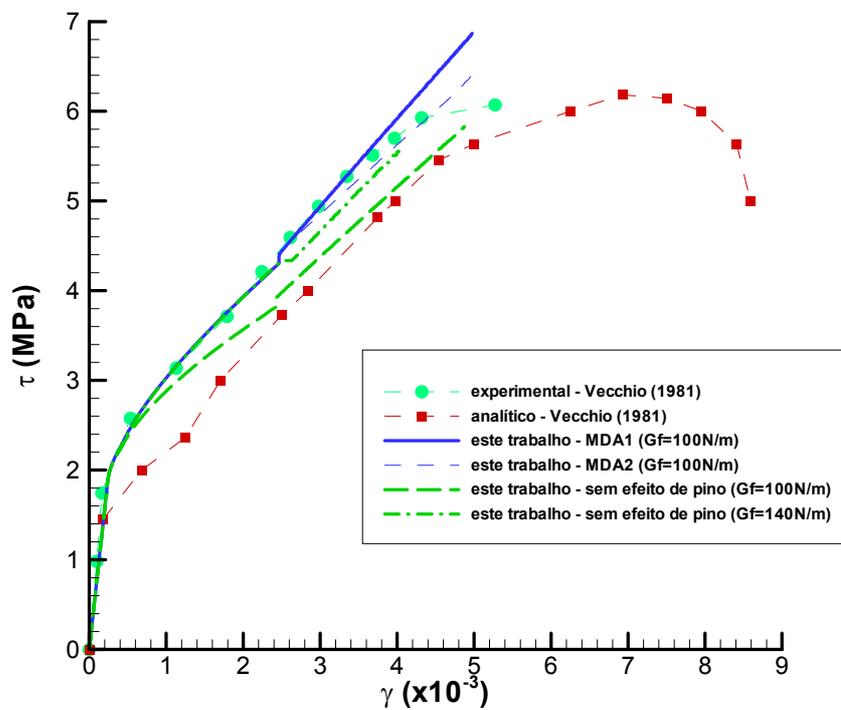


Figura 75: influência do efeito de pino na curva tensão tangencial x distorção para o painel PV22

## 6.5 ANÁLISE DAS TENSÕES TANGENCIAIS NAS FACES DA FISSURA

Para verificar o efeito do *aggregate interlock*, foi recalculada a curva tensão tangencial x distorção para o painel PV22, impondo-se as tensões de corte na fissura calculadas de acordo com os modelos apresentados. Na figura 76, são mostradas, além das curvas experimental e analítica de Vecchio (1981), quatro curvas numéricas: a primeira é a mesma já apresentada no item 6.3; a segunda usa o modelo de *aggregate interlock* de He e Kwan, apresentado no item 3.1.2.2, porém, utilizando-se a abertura da fissura calculada pelo modelo de transferência de tensão do presente trabalho, ao invés da estimativa da abertura dada por estes autores; a terceira usa o mesmo modelo da segunda, porém, com a abertura da fissura estimada segundo a indicação de He e Kwan; e a quarta usa o modelo de Vecchio e Lai (2004), onde é determinada uma tensão de corte nas faces da fissura por relações de equilíbrio locais, sendo esta inserida no modelo de *aggregate interlock* chamado *Lai-Vecchio Model*, que é uma combinação dos modelos de Walraven e Okamura-Maekawa, para a obtenção do deslizamento das faces da fissura.

Basicamente, o procedimento usado foi adicionar a tensão de corte nas paredes da fissura (calculada pelos diferentes modelos do item 3.1.2.2) para o cálculo da força do concreto transmitida na fissura (FCR - passo 9(d) do item 5.3.6). Além disso, para o modelo de Vecchio e Lai (2004), também se substituiu o deslizamento calculado pelo modelo de transferência de tensão por aderência do presente trabalho pelo deslizamento calculado pelo modelo desses autores (ver fórmula (26)).

Observa-se, nas curvas, em todos os diferentes modelos de *aggregate interlock*, quando são usados dados obtidos do modelo de transferência de tensão por aderência, como a abertura normal da fissura (para o modelo de He e Kwan), a deformação da diagonal tracionada para a estimativa da abertura da fissura (para o modelo de He e Kwan) e as tensões do aço na fissura e abertura normal da fissura (para o modelo de Vecchio e Lai), que elas (as curvas) praticamente não apresentam diferenças. Isto ocorre porque o modelo de transferência de tensão usado neste trabalho é iterativo e ajusta as tensões e demais parâmetros para a abertura e deslizamento calculados na fissura pelo próprio modelo, já acrescentando então implicitamente o efeito do *aggregate interlock*.

Salienta-se, mais uma vez, que as tensões do aço na fissura inseridas no modelo de Vecchio e Lai (2004) são as obtidas pelo modelo de transferência de tensão por aderência do presente

trabalho. Haveria a opção de determinar essas tensões através do *Disturbed Stress Field Model* (modelo usado por esses autores), porém, como o modelo de transferência de tensão é iterativo e só converge para as tensões do aço na fissura calculadas por ele, não é possível se impor tensões calculadas por outros modelos, evitando-se assim a instabilidade do processo.

Devido aos fatos apresentados, como o processo é iterativo e se ajusta pelo modelo de transferência de tensão por aderência (que já fornece o comportamento completo, com tensões e deslizamento na fissura), é natural que, impondo-se essas tensões de corte na fissura adicionais no modelo, mais iterações são necessárias para a convergência do processo, obtendo-se a mesma curva resposta, convergindo estas tensões adicionais impostas a zero, mostrando que o deslizamento na fissura calculado pelo modelo de transferência de tensão por aderência é o correto. Portanto, o modelo usado no presente trabalho já fornece um deslizamento das faces da fissura, ou seja, ele já engloba implicitamente o comportamento do *aggregate interlock*. Desse modo, a aplicação dos modelos do item 3.1.2.2 fica desnecessária, apenas implicando em modificações muito pequenas na curva da resposta numérica do problema, caso forem realizadas. Por exemplo: na equação (26) de Vecchio e Lai (2004), usando-se as tensões do aço na fissura obtidas pelo modelo de transferência de tensão usado neste trabalho, o resultado para a tensão de corte na fissura será próximo de zero. Isto ocorre justamente porque as tensões do aço na fissura já são calculadas para estarem de acordo com a abertura normal de fissura e o deslizamento determinados pelo modelo. Ou seja, o valor para a tensão de corte na fissura próximo de zero indica que não há nenhum efeito de *aggregate interlock* adicional além daquele já contabilizado pelo modelo de transferência de tensão. Caso contrário, se fosse aplicada a equação (26) obtendo-se valores significativos de tensões de corte na fissura, haveria mais força do concreto transmitida na fissura (FCR), entrando diretamente no equilíbrio da linha de localização, instabilizando o equilíbrio interno obtido com o modelo de transferência de tensão por aderência. Concluindo-se, o mais correto é comparar-se as curvas numéricas obtidas pelo presente trabalho com as obtidas por outros autores que englobam os efeitos de pino e *aggregate interlock*.

Portanto, em todos os painéis ensaiados no item 6.3, foi calculado o deslizamento das faces da fissura (e seu efeito na resposta global) com o modelo de transferência de tensão por aderência do presente trabalho, não se usando outros modelos para o cálculo das tensões de corte na face da fissura.

Por todas as razões acima descritas, não foi possível separar o efeito do *aggregate interlock* dentro do modelo de transferência de tensão por aderência usado (e, por conseguinte, nas curvas numéricas), fazendo com que a magnitude desse efeito na resposta final não possa ser avaliada separadamente, como foi feito no item 6.4 para o efeito de pino.

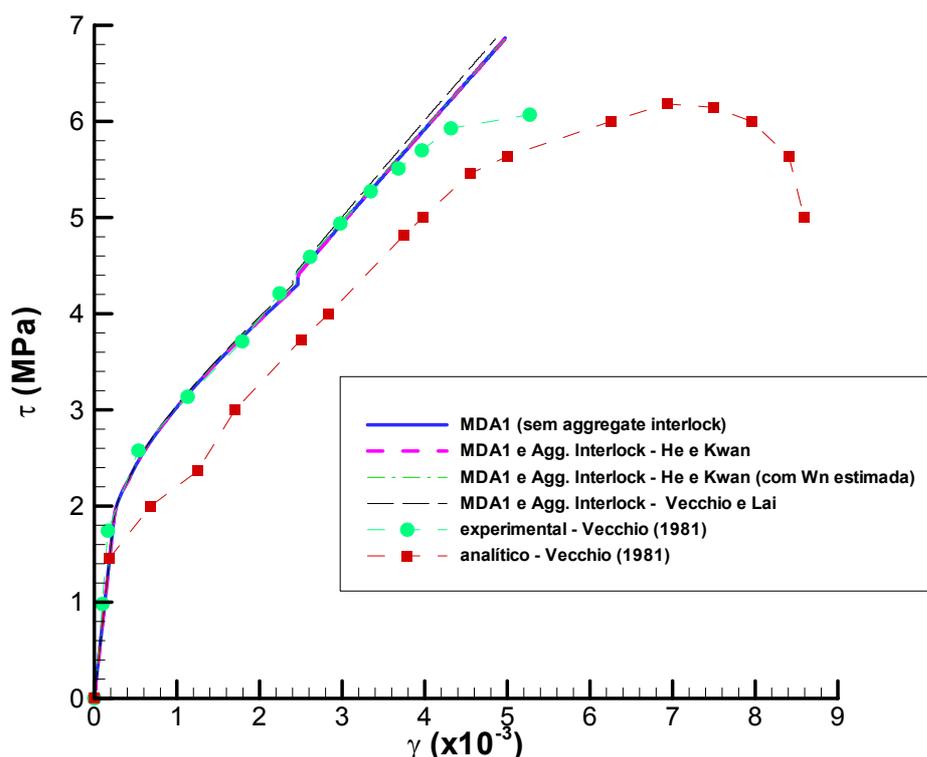


Figura 76: comparação dos modelos de engrenamento dos agregados

## 6.6 ANÁLISES COMPLEMENTARES

Além de todos os resultados apresentados, cabe ainda realizar-se uma análise das estimativas de alguns parâmetros dos painéis do presente trabalho:

- a) **estimativa da energia de fratura:** a figura 77 mostra a relação entre a energia de fratura adotada e a resistência à tração do concreto para os diversos painéis deste trabalho. Pela nuvem de pontos plotada, percebe-se um bom ajuste de curva linear entre esses dois parâmetros. A equação mostrada no gráfico serve para uma

estimativa de um desses parâmetros na análise de painéis de concreto armado submetidos ao corte.

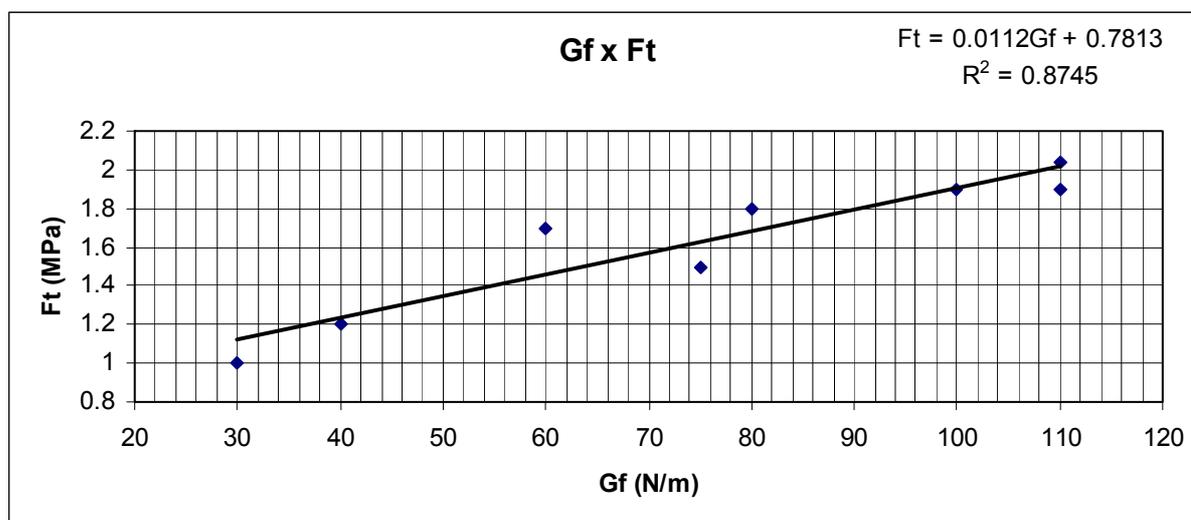


Figura 77: relação entre a resistência à tração do concreto e a energia de fratura

- b) **estimativa da carga última dos painéis:** é interessante também a previsão da carga última de ruptura dos painéis. Há diversos métodos existentes para a estimativa desta carga de ruptura, porém, esta tarefa tem se mostrado bastante desafiadora devido à dificuldade na sua previsão, já que possui uma grande quantidade de parâmetros envolvidos, modos diferentes de ruptura e fatores locais da estrutura, além da heterogeneidade dos materiais (onde há dificuldades na determinação dos diversos parâmetros e propriedades dos mesmos). Um bom método para a estimativa da carga última dos painéis é apresentado por Rahal (2008), chamado SMCS (*Simple Model for Combined Stress-Resultants*). Simplificadamente, usa-se as equações mostradas em (139), onde,  $f'_c$  é a resistência à compressão do concreto,  $\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas de armadura longitudinal e transversal,  $f_{yx}$  e  $f_{yy}$  são as tensões de escoamento do aço,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são as tensões externas aplicadas nas duas direções globais e  $v_n$  é a tensão última de corte. Estas relações também são muito convenientes para situações de dimensionamento (projeto) desses painéis, na determinação das taxas de armadura necessárias para resistir a uma determinada resistência de corte última desejada.

$$\frac{v_n}{f'_c} = \sqrt{\omega_x \omega_y} \leq k$$

$$\omega_x = \frac{\rho_x f_{yx} - \sigma_x}{f'_c} \leq k; \quad \omega_y = \frac{\rho_y f_{yy} - \sigma_y}{f'_c} \leq k; \quad k = \frac{1}{3} - \frac{f'_c}{900}$$
(139)

Portanto, através das curvas obtidas neste trabalho, é possível realizar a comparação das resistências última de corte dos painéis simulados com as obtidas por diversos modelos teóricos e com os resultados experimentais de Vecchio. A tabela 12 mostra a relação entre as cargas última obtidas pelo presente trabalho, MCFT (*Modified Compression-Field Theory* - modelo de Vecchio), SMCS (modelo de Rahal), ACI (modelo do código ACI - *American Concrete Institute*) e Teoria da Plasticidade (modelo baseado nesta teoria) em relação aos resultados experimentais de Vecchio (1981).

Tabela 12: carga última de corte dos painéis

Painel	$f'_c$	$\frac{v_{uexp}}{f'_c}$	$\frac{v_{SMCS (Rahal)}}{f'_c}$	$\frac{v_{MCFT}}{f'_c}$	$\frac{v_{este\ trabalho}}{f'_c}$	$\frac{v_{uexp}}{v_{SMCS (Rahal)}}$	$\frac{v_{uexp}}{v_{MCFT}}$	$\frac{v_{uexp}}{v_{este\ trabalho}}$	$\frac{v_{uexp}}{v_{ACI}}$	$\frac{v_{uexp}}{v_{Plasticidade}}$
PV6	29,8	0,153	0,159	0,159	0,147	0,96	0,96	1,04	0,84	0,96
PV9	11,6	0,323	0,320	0,387	0,347	1,01	0,83	0,93	1,10	0,87
PV10	14,5	0,274	0,246	0,254	0,316	1,11	1,08	0,87	1,05	1,08
PV11	15,6	0,228	0,230	0,230	0,242	0,99	0,99	0,94	0,90	0,99
PV14	20,4	0,257	0,313	0,326	0,271	0,82	0,79	0,95	-	-
PV21	19,5	0,258	0,250	0,275	0,222	1,03	0,94	1,16	1,14	0,89
PV22	19,6	0,310	0,312	0,315	0,326	0,99	0,98	0,95	1,38	0,88
PV27	20,5	0,310	0,311	0,314	0,345	1,00	0,99	0,90	1,41	0,89
Média						0,99	0,95	0,97	1,12	0,94
Desvio Padrão						0,08	0,09	0,09	0,22	0,08

Analisando-se a tabela 12, percebe-se que os modelos numéricos de Vecchio (1981), Rahal (2008) e do presente trabalho foram os que forneceram resultados mais próximos da carga de ruptura real dos painéis. Salienta-se que a carga última é a máxima carga resistida pelo painel durante todo o processo, lembrando que não necessariamente é a mesma que a da última medição do ensaio, já que, no regime plástico, os painéis sofrem um grande aumento na distorção, suportando tensões menores que a carga última, como é o caso, por exemplo, dos painéis PV6, PV10 e PV11 (ver figuras 59, 62, 68). Além disso, na maior parte dos casos, a resistência última prevista pelos métodos numéricos está um pouco abaixo da experimental, o que, numa possível situação de projeto, está a favor da segurança. Reitera-se que o objetivo principal deste trabalho não foi a determinação da carga última dos painéis e sim a previsão do comportamento de toda a curva distorção angular x tensão tangencial, para que esses elementos (painéis) possam ser usados como parte de estruturas mais complexas (região de apoio em vigas, paredes portantes, silos, entre outros), afim de realizar-se uma análise mais completa e precisa dessas estruturas. Resultados mais precisos para a carga última de corte poderiam ser obtidos se fosse usada uma lei constitutiva não-linear para o concreto em compressão.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES DO TRABALHO

O trabalho apresentou um estudo detalhado e um modelo recentemente desenvolvido para a simulação numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte. A importância do estudo desses elementos é muito grande porque eles podem ser considerados como sendo uma pequena parte de estruturas complexas, como plataformas *offshore*, paredes portantes, silos, entre outros. Descrevendo-se bem uma pequena parte dessas estruturas, é possível, futuramente, estender-se o processo para a análise global das mesmas, possibilitando-se projetos mais econômicos e seguros. Finalmente, ressalta-se a importância do estudo da fissuração em estruturas de concreto armado para o melhor entendimento do comportamento estrutural dos materiais e assim, cada vez mais, desenvolver-se um maior conhecimento sobre as estruturas executadas, havendo mais segurança aos projetistas e usuários, com menos problemas e patologias nas edificações.

De posse do modelo e dos resultados obtidos de diversos painéis ensaiados (item 6.3), foi possível a conclusão do principal objetivo deste trabalho que é a determinação da resposta numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte, com diferentes características e taxas de armadura, ensaiados experimentalmente por Vecchio (1981). A hipótese colocada também foi confirmada no item 6.4, onde é visível a importância do efeito de pino para este tipo de estrutura. Realmente a inclusão do efeito de pino fornece uma resposta muito mais real da estrutura, apresentando curvas numéricas muito boas para a maioria dos painéis. Quanto ao efeito do engrenamento dos agregados, conforme mostrado no item 6.5, não foi possível determinar a magnitude do seu efeito na resposta dos painéis. Foi também comprovada a validade do modelo ensaiando-se um painel de concreto simples (item 6.1) e mostrou-se a independência do método em relação à malha de elementos finitos para estados constantes de tensões (item 6.2). Além disso, análises complementares sobre a estimativa de alguns parâmetros dos ensaios, como energia de fratura e resistência à tração do concreto, foram realizadas, bem como foram apresentados modelos e comparações da previsão da carga última de ruptura dos ensaios (item 6.6). A seguir são colocadas algumas análises sobre as diversas curvas numéricas obtidas para os painéis:

- a) resposta global: salienta-se que nos painéis onde ocorreu o escoamento de uma (PV10 e PV21) ou de ambas armaduras (PV6 e PV11), a resposta tensão tangencial x distorção tende a ser mais independente da não-linearidade do

concreto e as curvas numéricas aproximam-se das experimentais para a maior parte do processo, como foi o caso dos painéis PV10, PV11 e PV21. A resposta do painel PV6 foi mais rígida e não se aproximou muito da experimental. Para o painel PV14, onde houve o arrancamento da chave de corte, o efeito da não-linearidade do concreto não ficou visível pelo prematuro rompimento do painel, sendo que a curva numérica aproximou-se bem da experimental em toda a sua extensão. Para os painéis onde houve falha por esmagamento do concreto (PV27, PV22 e PV9), a não-linearidade deste material é muito importante, principalmente no final do processo, próximo à carga de ruptura. Neste caso, a simulação numérica previu bastante bem o comportamento experimental dos painéis PV22 e PV27 para a maior parte da curva tensão tangencial x distorção, porém o trecho final divergiu pela consideração do comportamento do concreto como sendo linear na simulação. O painel PV9 possui uma resistência à compressão muito baixa e, por isso, a não-linearidade do concreto já é muito influente desde o início do processo. A simulação numérica captou muito bem as deformações e tensões na armadura para esse painel, mas a resposta final simulada ficou comprometida por causa do concreto.

- b) deformações e tensões das armaduras: As deformações e tensões nas armaduras obtidas numericamente resultaram muito boas para a grande maioria dos painéis, com exceção do PV6. Salienta-se que a resposta deste painel era esperada ser mais rígida, já que em todos os outros ensaios, o modelo analítico de Vecchio forneceu curvas mais flexíveis que as experimentais (como era de se esperar pela própria teoria do Modified Compression-Field Theory usada pelo autor) e, para este painel em específico, esta curva analítica resultou mais rígida.
- c) deformações nas diagonais dos painéis: As deformações das duas diagonais dos painéis resultaram muito boas para alguns deles e satisfatórias para outros. Salienta-se que a deformação da diagonal tracionada é obtida a partir da deformação da diagonal comprimida e da deformação das armaduras, por relações dos Círculos de Mohr. Como este trabalho simulou os painéis sendo carregados por deslocamentos prescritos, a deformação da diagonal comprimida já é conhecida a priori. Nos ensaios experimentais, os painéis foram submetidos a forças prescritas e todas as deformações foram medidas. Desse modo, é de se esperar uma maior dificuldade na convergência das deformações numéricas e experimentais da diagonal comprimida, sendo que esta dificuldade esteve presente principalmente em painéis onde a não-linearidade do concreto possuiu maior influência. Porém, em vários painéis, essas deformações da diagonal comprimida concordaram bem numericamente e experimentalmente.
- d) tensões nas diagonais dos painéis: Quanto às tensões nas diagonais tracionada e comprimida, em todos os painéis foram obtidas curvas muito semelhantes entre as analíticas do modelo de Vecchio (1981) e as analíticas do presente trabalho (que usa o modelo analítico de Vecchio, porém inserindo-se os dados obtidos com o algoritmo implementado do presente trabalho). Em relação às curvas numéricas das diagonais obtidas através dos Círculos de Mohr, a diagonal comprimida apresentou um comportamento longe do real para o final das curvas, pela não consideração da não-linearidade do concreto, como era de se esperar, porém, para a maior parte do processo, foram obtidos resultados bons das tensões desta diagonal para quase a totalidade dos painéis (com exceção do PV9, pela baixa

resistência à compressão do concreto), inclusive sendo muitos deles melhores do que os analíticos obtidos por Vecchio. Em relação à diagonal tracionada, a grande maioria dos painéis possuiu uma curva resposta muito boa e, em muitos casos, muito melhor do que as analíticas de Vecchio (1981) (com exceção do PV6), que inclusive coloca em seu trabalho a dificuldade e a pouca precisão na consideração das tensões da diagonal tracionada, mas que isso não possui tanta influência no processo, (ver página 33). O comportamento dessas curvas foi muito próximo das experimentais. A descontinuidade presente nessas curvas das tensões da diagonal tracionada se deve à formação da 2ª geração de fissuras, onde o número de fissuras é dobrado instantaneamente e a abertura unitária das fissuras é reduzida. Isto é esperado, pois faz parte do modelo do algoritmo implementado. Poderia ser realizada uma suavização dos resultados unindo-se o ponto inicial da reta final das curvas com o primeiro ramo das mesmas.

- e) Círculos de Mohr: Também foi feita a representação dos Círculos de Mohr de deformações e tensões para vários estágios de carregamento dados por Vecchio (1981), para a comparação com as respostas experimentais. Verificou-se que, de modo geral, o Círculo de deformações resultou melhor que o de tensões e que o modelo de efeito de pino MDA2 foi melhor que o modelo MDA1. Isso era de se esperar, já que o MDA2 é um modelo de pino mais sofisticado (barra de aço repousando sob leito elástico de concreto) que o MDA1 (solicitações de corte de Timoshenko para viga de aço bi-engastada).
- f) variação do ângulo das tensões e deformações principais: Para painéis com taxas diferentes de armadura nas duas direções globais, é mostrada também a variação do ângulo das tensões principais, já que o painel fissurado distorce num ângulo diferente de  $45^\circ$  pela diferença da transferência de tensão das duas armaduras. O método usado neste trabalho (descrito no capítulo 5) mostrou-se muito satisfatório, sendo que o ângulo usado na simulação numérica sempre está entre os ângulos das tensões e deformações principais experimentais, conforme mostrado no capítulo 6.

Finalmente, da análise dos resultados apresentados no capítulo 6 e comentados acima, mais uma vez, salienta-se a importância da consideração do efeito de pino no modelo numérico (ver item 6.4). Este fato já havia sido alertado por Vecchio que, apesar de não haver considerado este efeito em seu modelo analítico, concluiu que o mesmo pode possuir um efeito significativo nas estruturas ensaiadas.

Além disso, são apresentadas também algumas sugestões desta pesquisa para trabalhos futuros:

- a) implementação da não-linearidade do concreto para representar melhor o comportamento deste material à compressão;
- b) ajustes no algoritmo implementado para representar o patamar de escoamento das barras de armadura nos painéis ensaiados;

- c) aplicação do método em outros tipos de análises, ou seja, realização de simulações de estruturas mais complexas como vigas, silos, entre outros.

Portanto, através da pesquisa apresentada, foi possível uma boa simulação numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro. Conforme mostrado acima, há ainda algumas implementações necessárias a serem feitas no algoritmo utilizado para a obtenção de curvas numéricas ainda melhores e mais próximas das experimentais, possibilitando-se uma simulação excelente de elementos de estruturas mais complexas, para que, futuramente, estas estruturas possam ser projetadas com muito mais segurança e economia.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003
- BRISOTTO, D.S. **Um Modelo de Fissura Incorporada para a Análise da Fissuração em Peças de Concreto Armado Fletidas via Método dos Elementos Finitos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.
- CHEN, R.; BELLA, J.C.D. **Dimensionamento de Elementos de Superfície de Concreto armado: Membranas, Placas e Cascas**. Revista IBRACON de Estruturas, v. 2, No. 3, p. 320-370, 2006.
- COLLINS, M.P.; VECCHIO, F.J.; MELHORN, G. **An International Competition to Predict The Response of Reinforced Concrete Panels**. Canadian Journal of Civil Engineering, v. 12, p. 624-644, 1985.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Code Model 1990**. Bulletin d'Information **n.213/214**, Lausanne, Switzerland: CEB, mar. 1993.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Code Model 1990**. Bulletin d'Information **n. 230**. RC elements under cyclic loading – State of Art. New York: ASCE, Publication Sales Department, 1996.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Code Model 1990**. Bulletin d'Information **n. 237**. Concrete tension and size effects. Lausanne, Switzerland: 1997.
- DANTAS, A.U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- D'AVILA, V.M.R. **Estudo Sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- D'AVILA, V.M.R.; BRISOTTO, D.S.; BITTENCOURT, E. **Numerical simulation of cracking in reinforced concrete members by an embedded model**. Engineering Computations. Emerald, London, U. 25, nº 8, p.739 – 763, 2008.
- DVORKIN, E. N.; VASSOLO, S. A quadrilateral 2-D finite element based on mixed interpolation of tensorial components. **Engineering Computations**, Pineidge Press, v.6, p.217-224, sep. 1989.

- DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M.; GIOIA, G. Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distorsions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.30, p.541-564, 1990.
- DVORKIN, E.N.; ASSANELLI, A.P. 2D finite-elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.90 n.1-3, p.829-844, sep. 1991.
- EL-ARISS, B. **Behavior of Beams with Dowel Action**. Engineering Structures, v. 29, p. 899-903, 2007. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- ELWI, A.E.; HRUDEY, M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, New York, ASCE, v.115, n.4, p.740-754, apr. 1989.
- GUPTA, A.K. **Combined Membrane and Flexural Reinforcement in Plates and Shells**. Journal of Structural Engineering, v. 112, No. 3, 1986. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- HE, X.G.; KWAN, A.K.H. **Modeling Dowel Action of Reinforcement Bars for Finite Element Analysis of Concrete Structures**. Computer and Structures, v. 79, p. 595-604, 2001. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSON, P.E. Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. **Cemente and Concrete Reserch**, v.6, p.773-782, 1976.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE TELAS SOLDADAS. **Telas Soldadas Emendas: Boletim Técnico**. 3ª edição, São Paulo, 1997.
- JAZRA, F.M. **Dimensionamento de Chapas de Concreto Armado**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) –Universidade de São Paulo, São Paulo.
- JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.188, p.307-330, 2000.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model.: I. Basic formulation; II: Combination with smeared cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.50, p.1269-1305, 2001.
- KWAK, H.G.; KIM, D.Y. **Nonlinear Analysis of RC Shear Walls Considering Tension-Stiffening Effect**. Computer and Structures, v. 79, p. 499-517, 2001. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

- KWAK, H.G.; KIM, D.Y. **Material Nonlinear Analysis of RC Shear Walls Subject to Monotonic Loadings**. Engineering Structures, v. 26, p. 1517-1533, 2004. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- KWAK, H.G.; KIM, D.Y. **Cracking Behavior of RC Panels Subject to Biaxial Tensile Stresses**. Computer and Structures, v. 84, p. 305-317, 2006. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- MACHADO, M.A.S. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplástica de Peças de Concreto Armado e Protendido, Submetidas a Estados Planos de Tensão**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.
- MANZOLI, O.L.; DIAZ, G.; OLIVER, J.; HUESPE, A.E. **Análise Tridimensional de Elementos Estruturais de Concreto Armado Via Elementos Finitos com Descontinuidades Incorporadas**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, n. 49, 19 f., 2007, Bento Gonçalves.
- MANZOLI, O.L.; OLIVER, J.; DIAZ, G.; HUESPE, A.E. **Análise Tridimensional de Elementos Estruturais de Concreto Armado Via Elementos Finitos com Descontinuidades Incorporadas**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 1, No. 1, p. 58-83, 2008.
- MARTÍN-PÉREZ, B.; PANTAZOPOULOU, S.J. **Effect of Bond, Aggregate Interlock and Dowel Action on The Shear Strenght Degradation of Reinforced Concrete**. Engineering Structures, v. 23, p. 214-227, 2001. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- MENIN, R.C.G.; TRAUTWEIN, L.M.; BITTENCOURT, T.N. **Modelos de Fissuração Distribuída em Vigas de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 2, No. 2, p. 166-200, 2009.
- OLIVER, J.; LINERO, D.L.; HUESPE, A.E.; MANZOLI, O.L. **Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 197, p. 332-348, 2008. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- RAHAL, K.N. **Simplified Design and Capacity Calculations of Shear Strenght in Reinforced Concrete Membrane Elements**. Engineering Structures, v. 30, p. 2782-2791, 2008. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- RAHAL, K.N. **Post-cracking Shear Modulus of Reinforced Concrete Membrane Elements**. Engineering Structures, v. 32, p. 218-225, 2010. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

- RUSSO, G.; ZINGONE, G.; ROMANO, F. Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforced Bars in R.C. Joints. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.116, n.2, p.336-355, feb. 1990.
- RUSSO, G.; ROMANO, F. Cracking Response of RC Members Subjected to Uniaxial Tension. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.118, n.5, p.1172-1190, may 1992.
- SILVA, A.R.C. **Uma Abordagem Probabilista da Ruptura de Painéis Tracionados de Concreto de Granulometria Fina Armados com Telas Soldadas**. 2002. 150 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia da Universidade de São Carlos, São Carlos.
- SOLTANI, M.; AN, X.; MAEKAWA, K. **Computational Model for Post-cracking Analysis of RC Membrane Elements Based on Local Stress-Strain Characteristics**. *Engineering Structures*, v. 25, p. 993-1007, 2003. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- SOLTANI, M.; AN, X.; MAEKAWA, K. **Cracking Response and Local Stress Characteristics of RC Membrane Elements Reinforced with Welded Wire Mesh**. *Cement e Concrete Composites*, v. 26, p. 389-404, 2004. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- SOLTANI, M.; AN, X.; MAEKAWA, K. **Localized Nonlinearity and Size-dependent Mechanics of In-plane RC Element in Shear**. *Engineering Structures*, v. 27, p. 891-908, 2005. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).
- SOUZA, R.A. **Concreto Estrutural: Análise e Dimensionamento de Elementos com Descontinuidades**. 2004. 442 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- SPENCER, B. **Embedded Crack Elements for Analysis of Reinforced Concrete**. Ph.D. Thesis Proposal, University of Colorado, Boulder, Colorado, July 2000.
- VECCHIO, F.J. **The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses**. Thesis (Doctor of Philosophy) –Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto - Canada, 1981.
- VECCHIO, F.J.; COLLINS, M.P. **The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear**. *ACI Journal*, p. 219-231, Março-Abril, 1986.
- VECCHIO, F.J. **Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation**. *Journal of Structural Engineering*, v. 126, No. 9, 2000. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

VECCHIO, F.J. **Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Implementation.** Journal of Structural Engineering, v. 127, No. 1, 01/2001. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

VECCHIO, F.J.; LAI, D.; SHIM, W.; NG, J. **Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Validation.** Journal of Structural Engineering, v. 127, No. 4, 04/2001. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

VECCHIO, F.J.; LAI, D. **Crack Shear-Slip in Reinforced Concrete Elements .** Journal of Advanced Concrete Technology, v. 2, No. 3, p. 289-300, 2004.

VILLELA, C.A.X. **Aplicação da Teoria do Campo de Compressão Modificada aos Perfis Retos de Concreto Armado e Protendido.** 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) –COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

ZHANG, L.X.; HSU, T.T.C. **Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements.** Journal of Structural Engineering, v. 124, No. 1, 1998. Disponível em: [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com).

ZIENKIEWICKZ, O. C. **The finite element method.** London: McGraw-Hill, 1977.

## **APÊNDICE A – Características Gerais do Algoritmo do Presente Trabalho**

## FUNCIONAMENTO DO ALGORITMO DO PRESENTE TRABALHO

No final do capítulo 5 (item 5.3.6), foi descrito o processo de solução do algoritmo a nível interno de elemento finito, descrevendo-se como é usado o modelo de transferência de tensão por aderência, como é calculado o efeito de pino, como são obtidas as tensões e deformações nos materiais, como são empregadas as relações constitutivas, entre outros. Faltou apenas a descrição da solução global do sistema a nível de estrutura. Portanto, é feita uma descrição das principais etapas a serem realizadas para a obtenção da resposta global, sendo esquematizadas nas figuras A1 e A2 deste apêndice:

- a) **Início:** o módulo principal do programa é iniciado e são feitos a alocação dos parâmetros e o dimensionamento das matrizes, bem como é realizada a abertura de vários arquivos novos para a gravação de resultados;
- b) **Entrada de dados:** a seguir é lido o arquivo de entrada de dados do teste. Este arquivo possui todas as informações necessárias para o cálculo completo do algoritmo. Informa-se primeiramente os parâmetros gerais, como número de nós, número de elementos, número de nós vinculados, número de nós por elemento, número de materiais diferentes, número de carregamentos diferentes, número de incrementos e a opção de recalculer ou não a matriz de rigidez global a cada incremento de carga; depois informa-se os números dos elementos, o tipo de material e as suas conectividades; logo após são dadas as coordenadas dos nós, a sua vinculação e os deslocamentos prescritos (caso houverem); informa-se as características de cada tipo de concreto, como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, resistências, entre outros; coloca-se a opção do tipo de modelo de amolecimento desejado e a opção do tipo de modelo de compressão para o concreto intacto; depois coloca-se o número de barras de cada armadura, o tipo de aço a qual pertencem e os parâmetros materiais de cada tipo de aço; insere-se também, para cada barra, as coordenadas dos pontos inicial e final se a opção for para barras retas e as coordenadas dos três pontos se forem barras curvas; após esta etapa, coloca-se o número de carregamentos, o tipo (distribuído ou concentrado), os nós que recebem carga, a direção e o valor das cargas; finalmente, coloca-se os incrementos de cargas ou deslocamentos prescritos, bem como o valor da tolerância para cada um deles, e o número máximo de iterações externas;
- c) **Cálculo das forças nodais consistentes:** para a aplicação do método dos elementos finitos, os carregamentos fornecidos devem ser transformados em forças nodais consistentes para o cálculo da solução do sistema de equações. Isto faz parte da teoria clássica de elementos finitos;
- d) **Condição do número de barras de aço:** neste ponto o programa analisa se há barras de aço na estrutura inserida. O algoritmo mostrado nas figuras A1 e A2 são para concreto armado. Para concreto simples, usa-se outro algoritmo, muito semelhante a este, porém, sem todos os cálculos referentes às armaduras;

- e) **Laço do número de incrementos:** este é o laço principal do programa, responsável pelo processo incremental (de cargas ou deslocamentos). Para os painéis ensaiados neste trabalho, foram usados incrementos pequenos da ordem de 0,001cm;
- f) **Incrementos nos elementos:** toma-se os incrementos de carga ou deslocamentos fornecidos na entrada de dados do programa e incrementa-se os nós dos elementos (que recebem o carregamento) com os mesmos;
- g) **Laço do número de iterações globais:** esse é o laço que governa o processo de convergência da solução global. Até não ocorrer a convergência da solução, o laço é repetido (a menos se for alcançado o número máximo de iterações). Para os painéis do presente trabalho, foi adotado um número máximo de iterações globais igual a 50;
- h) **Cálculo da matriz de rigidez dos elementos:** é calculada a matriz de rigidez dos elementos, baseada no modelo de Dvorkin et al. apresentado neste trabalho, que utiliza funções de interpolação distintas para deslocamentos e deformações;
- i) **Solução do sistema de equações:** resolve-se o sistema  $KU=P$  para a determinação dos deslocamentos. A solução é feita através do método de Newton-Raphson Modificado;
- j) **Cálculo das forças internas do elemento:** nesta etapa são feitos os cálculos preliminares para o equilíbrio de forças internas do elemento e é feita a verificação de fissuração do mesmo. Nesta etapa, são analisadas as posições e propriedades de cada barra de aço no interior dos elementos, a determinação das coordenadas e deslocamentos dos nós após os incrementos fornecidos no programa principal e a determinação da matriz  $\Phi$  do modelo de Dvorkin, conforme mostrado no capítulo 5;
- k) **Condição que verifica a formação de fissuras:** para os incrementos iniciais, onde ainda não ocorreu o processo de fissuração, as tensões e deformações no concreto e armadura são calculadas via processo tradicional de M.E.F. O critério que determina se a peça fissurou é quando a tensão principal de tração supera o valor da resistência à tração do concreto. A partir desta etapa, a peça trabalha fissurada e o equilíbrio interno da linha de localização, conforme procedimento mostrado em 5.3.6, deve ser realizado;
- l) **Equilíbrio interno do elemento:** através das modificações propostas no capítulo 5, com as relações constitutivas, modelo de transferência de tensão por aderência, modelos de efeito de pino, entre outros, realiza-se o processo de equilíbrio da linha de localização (equação (114)), através de um circuito de iterações internas que deve obedecer ao critério de convergência dado em (138);
- m) **Condensação do nó interno do elemento:** esta condensação é proposta no modelo de Dvorkin, sendo dada pela equação (102).
- n) **Verificação da convergência da solução:** esta etapa verifica se o processo global de solução converge para uma tolerância aceitável. Esta convergência é calculada a partir das forças internas e externas dos elementos, conforme fórmula (140),

onde, **FE** e **FI** são, respectivamente, os vetores de forças externas e internas do elemento para cada grau de liberdade (GDL) de cada nó do mesmo, já se acumulando a contribuição de cada elemento em nós em comum; *ngdl* é o número total de graus de liberdade da estrutura; *R* é a razão de convergência e o nível de tolerância é de 0,001.

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{ngdl} [\mathbf{FE}(i) - \mathbf{FI}(i)]^2}{\sum_{i=1}^{ngdl} [\mathbf{FE}(i)]^2}} < 0,001 \quad (140)$$

- o) **Cálculo dos demais parâmetros e saída de resultados:** são calculados os demais parâmetros necessários para a comparação com os resultados de Vecchio (1981), conforme descrição feita no item 5.3.3. Os resultados são escritos em arquivos de texto para plotagens em *softwares* gráficos. Além disso, há o principal arquivo de resposta que apresenta os principais dados de entrada do programa, os deslocamentos de cada nó de cada elemento, as reações nos mesmos, as tensões nos elementos, os resultados do modelo de transferência de tensão por aderência (tensões na fissura, número de fissuras, tensões e deformações nas armaduras, entre outros) para cada incremento realizado e a razão de convergência de cada iteração externa.
- p) **Encerramento do processo incremental:** se for atingido o número máximo de incrementos realizados, é declarado o fim do algoritmo, senão, a rotina retorna para o próximo incremento. O fim do algoritmo também é decretado se há a instabilização do processo em algum incremento fornecido.

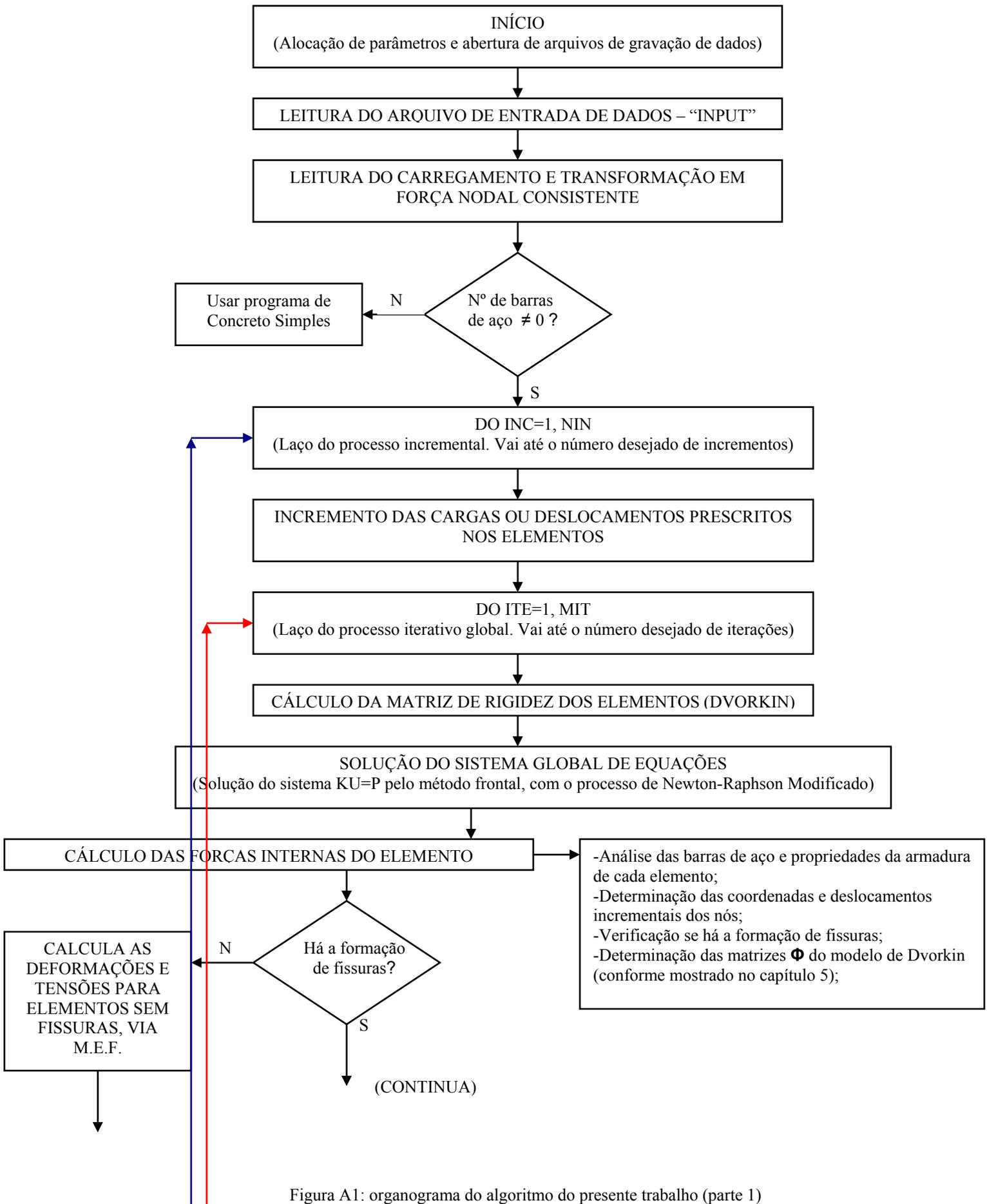


Figura A1: organograma do algoritmo do presente trabalho (parte 1)

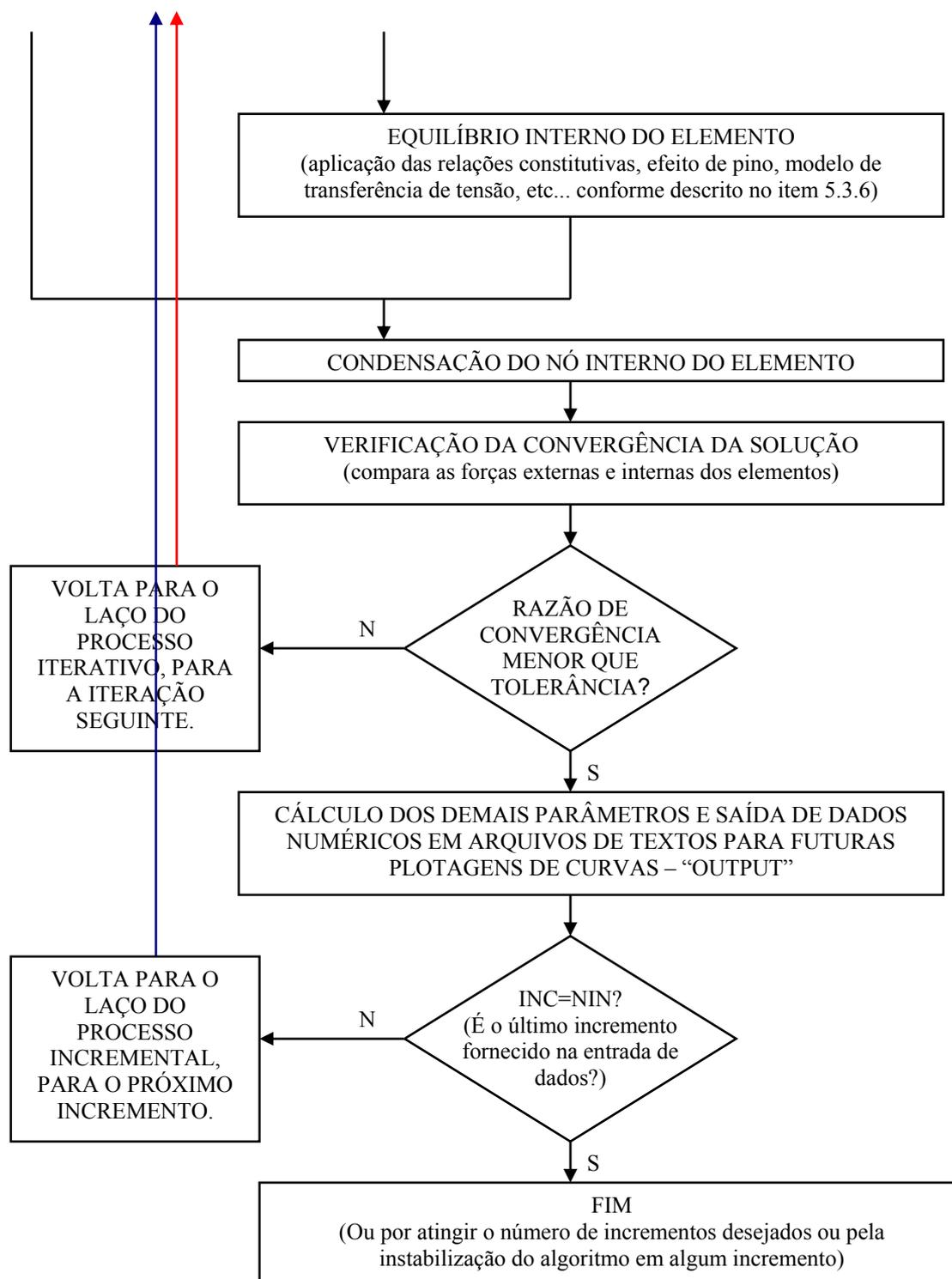


Figura A2: organograma do algoritmo do presente trabalho (parte 2)

## **APÊNDICE B – Tabelas Complementares dos Painéis Ensaados**

Tabela B1. Comparação numérica entre alguns pontos da curva distorção x tensão tangencial dos painéis: (a) PV27, (b) PV22, (c) PV9, (d) PV11 e (e) PV6

Painel PV27								
Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	1.102	3.483	2.330	33.104%	3.373	3.158%	3.384	2.842%
2	2.607	4.900	3.920	20.000%	4.910	0.204%	4.911	0.224%
3	3.699	5.817	4.951	14.887%	6.100	4.865%	5.830	0.223%

Painel PV22								
Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	1.131	3.137	2.288	27.074%	3.161	0.759%	3.171	1.068%
2	2.612	4.592	3.816	16.899%	4.554	0.828%	4.545	1.024%
3	3.346	5.273	4.454	15.532%	5.282	0.167%	5.123	2.845%
4	4.317	5.928	5.272	11.066%	6.222	4.960%	5.868	1.012%

Painel PV9								
Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	0.514	1.461	1.222	16.359%	1.431	2.060%	1.428	2.286%
2	1.361	2.126	1.794	15.635%	2.494	17.310%	2.474	16.369%
3	2.292	2.825	2.536	10.230%	3.522	24.673%	3.315	17.345%

Painel PV11								
Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	0.443	1.699	1.476	13.125%	1.561	8.122%	1.559	8.240%
2	1.805	2.773	2.444	11.864%	2.791	0.649%	2.762	0.397%
3	2.304	3.154	2.843	9.860%	3.303	4.718%	3.191	1.186%

Painel PV6								
Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	0.377	1.687	1.938	14.849%	2.228	32.069%	2.227	32.009%
2	1.824	2.947	3.395	15.202%	4.000	35.731%	3.990	35.392%
3	2.143	3.192	3.766	17.982%	4.330	35.652%	4.313	35.119%

Tabela B2. Comparação numérica entre alguns pontos da curva distorção x tensão tangencial dos painéis: (a) PV21, (b) PV10 e (c) P14

Painel PV21								
(a) Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	0.499	2.523	1.654	34.451%	2.425	3.884%	2.429	3.726%
2	1.795	3.512	2.854	18.736%	3.670	4.490%	3.694	5.168%
3	2.215	3.855	3.272	15.136%	3.980	3.243%	4.010	4.021%

Painel PV10								
(b) Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	1.055	2.048	1.730	15.527%	2.378	16.113%	2.393	16.846%
2	2.028	2.782	2.390	14.091%	2.970	6.758%	3.000	7.836%
3	3.276	3.498	3.187	8.891%	3.990	14.065%	3.906	11.664%

Painel PV14								
(c) Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - Vecchio$			$\tau(MPa) - este trabalho$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{analítico}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	0.342	2.058	1.565	23.955%	1.967	4.446%	1.966	4.470%
2	2.369	3.835	3.538	7.744%	4.159	8.449%	4.084	6.493%
3	3.655	5.244	4.895	6.655%	5.475	4.405%	5.097	2.803%

Tabela B3. Comparação numérica entre as curvas dos painéis PV27 e PV22: (a) com efeito de pino e (b) sem efeito de pino

Comparação do Efeito de Pino - PV27								
(a) Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - sem ef. pino$			$\tau(MPa) - com ef. pino$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{sem pino}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	1.102	3.483	3.186	8.527%	3.373	3.158%	3.384	2.842%
2	2.607	4.900	4.358	11.061%	4.910	0.204%	4.911	0.224%
3	3.699	5.817	5.286	9.128%	6.100	4.865%	5.830	0.223%

Comparação do Efeito de Pino - PV22								
(b) Ponto	$\gamma (x10^{-3})$	$\tau(MPa) - sem ef. pino$			$\tau(MPa) - com ef. pino$			
		$\tau_{experimental}$	$\tau_{sem pino}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA1}$	Diferença (%)	$\tau_{MDA2}$	Diferença (%)
1	1.131	3.137	2.984	4.877%	3.161	0.759%	3.171	1.068%
2	2.612	4.592	4.067	11.433%	4.554	0.828%	4.545	1.024%
3	3.346	5.273	4.646	11.891%	5.282	0.167%	5.123	2.845%
4	4.317	5.928	5.402	8.873%	6.222	4.960%	5.868	1.012%