UFRGS
EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

Pré-Cálculo

UFRGS
EDITORA

Pré-Cálculo

Claus Ivo Doering
Liana Beatriz Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Organizadores

Terceira Edição

SÉRIE GRADUAÇÃO

1ª edição: 2012

Projeto Gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão e Editoração eletrônica: Claus Ivo Doering

Os autores são professores efetivos do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFRGS, com experiência no ensino das disciplinas de Cálculo oferecidas pelo Departamento. Todos têm se dedicado aos cursos de Pré-Cálculo da UFRGS.

P922 Pré-cálculo / organizado por Claus Ivo Doering, Liana Beatriz Costi Nácul [e] Luisa Rodríguez Doering.– 3. ed. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
140 p. : il. ; 21x25cm

(Série Graduação)

Reimpressão 2018

Inclui respostas selecionadas.

Inclui índice remissivo.

Inclui figuras, gráficos e quadros.

1. Matemática. 2. Cálculo – Pré-cálculo. 3. Álgebra elementar. 4. Funções reais. 5. Geometria analítica. 6. Polinômios. 7. Trigonometria. I. Doering, Claus Ivo. II. Nácul, Liana Beatriz Costi. III. Doering, Luisa Rodríguez Doering.

CDU 517.3

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0182-1

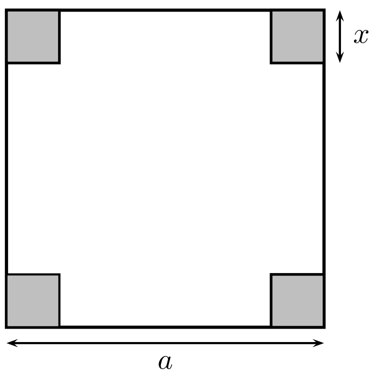
Polinômios

Capítulo 2

Ada Maria de Souza Doering
Luisa Rodríguez Doering

Muitos dos problemas práticos que surgem no cotidiano de uma pessoa ou de alguma empresa ou, ainda, provenientes de questões com que se depara um cientista ou um assistente de um centro tecnológico, podem ser *modelados* em termos matemáticos e ter, então, *a posteriori*, encontrada sua solução mediante a resolução de algum tipo de *equação matemática*. Essas equações matemáticas, por sua vez, podem ser de natureza diversa; o objeto principal neste capítulo é entender, e muitas vezes resolver, as equações *polinomiais*. Para isso, veremos algumas noções básicas sobre polinômios, mais precisamente, do ponto de vista de funções.

Iniciamos com um exemplo de problema prático que pode ser modelado, em termos matemáticos, através de uma equação polinomial.



Digamos que um fabricante necessite construir uma embalagem em forma de uma caixa sem tampa, de base quadrada, de tal maneira que o volume seja 1 (uma unidade de volume, que pode ser centímetros cúbicos, metros cúbicos, etc). Para tal fim será utilizada uma superfície quadrada de papelão com lados de comprimento a: dele devemos retirar quatro quadrados iguais de lados de comprimento x, como mostra a figura. O valor desconhecido de x deve, então, satisfazer a equação $x(a-2x)^2 = 1$, que pode ser escrita na forma

$$4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1 = 0, \tag{2.1}$$

o que constitui um exemplo de uma equação *polinomial* de grau 3.

Será possível construir uma tal caixa? Caso afirmativo, haverá diferentes maneiras de fazê-lo? Ou seja, diferentes valores de x para os quais obtenhamos essa caixa com 1 unidade de volume? Em termos matemáticos, essas perguntas equivalem a questionar a existência e, respectivamente, a unicidade de soluções dessa equação polinomial (2.1).

Para entendermos melhor essas questões, e para resolvê-las, necessitamos de algumas definições e resultados.

Expressões do tipo

$$3x^2+6x+1, \qquad x^6, \qquad (x-2)^4, \qquad 4x^3-\frac{2}{3}\,x^2+\frac{7}{2}\,x+5,$$

$$\frac{x^5}{3}+\frac{4}{5}\,x^4+5x^2, \qquad x^3-\sqrt{3}x^2+\sqrt{5}x-7,$$

$$(x-3)(x-1)^3(x-5)^4 \qquad \text{e} \qquad 4x^6-2ix^4+(4-i)x-9$$

são exemplos de polinômios; todas podem ser reescritas na forma geral

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

onde x é uma variável e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números reais (ou até, na última expressão, números *complexos*), denominados *coeficientes* do polinômio.

Dizemos que dois polinômios são *iguais* se, e somente se, os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Neste texto, tratamos principalmente com polinômios reais, ou seja, com coeficientes em $\mathbb{R}$, dando maior ênfase aos polinômios com coeficientes racionais, de $\mathbb{Q}$ (ver Seção 1.1).

Podemos interpretar os polinômios como funções reais. Dado um polinômio $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, dizemos que

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

com $x\in\mathbb{R}$, define uma *função* polinomial $p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Por outro lado, $p(x)=0$ define uma *equação* polinomial.

Dizemos que um polinômio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ tem *grau* n se $a_n\neq 0$, o que denotamos por $\partial(p)=n$. Ao polinômio *nulo* $p(x)=0x^n+\cdots+0x+0$, com todos coeficientes iguais a zero, não atribuímos grau algum. Entretanto, observe que todos os demais polinômios constantes $p(x)=k$, com $k\neq 0$, têm grau 0.

O produto de um polinômio por um número não nulo é um polinômio de mesmo grau, isto é, se p é um polinômio e k é uma constante não nula, então

$$\partial(k\cdot p)=\partial(p).$$

A soma e o produto de polinômios são, ainda, polinômios e o grau da soma e do produto dependem dos graus de cada um dos polinômios envolvidos, da seguinte maneira. Se p, q são duas funções polinomiais, então

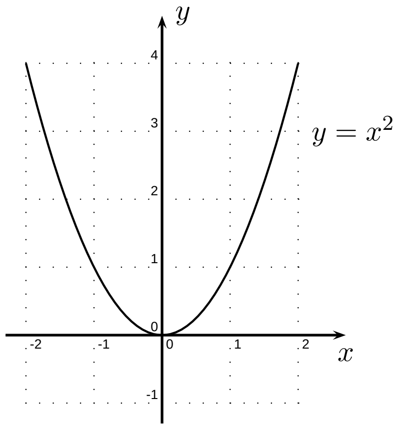
$$\partial(p+q)\leq\max\{\partial(p),\partial(q)\} \quad \text{e} \quad \partial(p\cdot q)=\partial(p)+\partial(q).$$

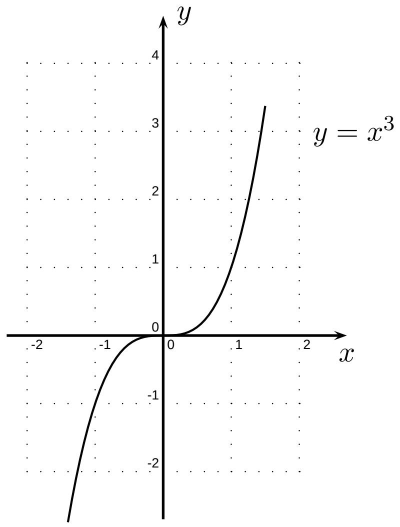
Uma outra noção importante sobre polinômios é a de raiz. Dizemos que um número α é uma *raiz* de um polinômio p se for uma solução da equação polinomial $p(x)=0$, ou seja, se $p(\alpha)=0$.

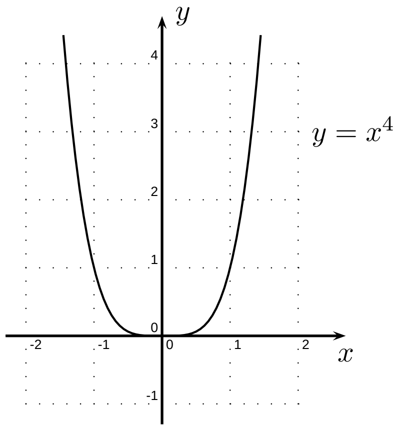
2.1 – A FAMÍLIA x^n

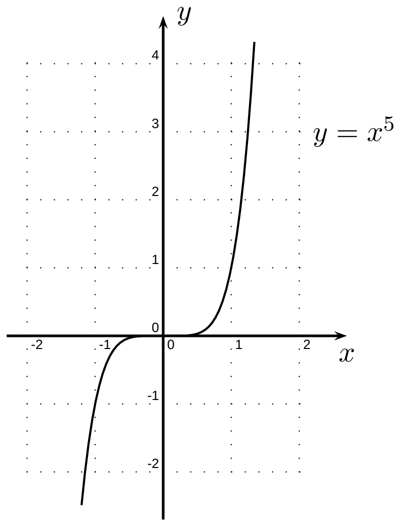
Iniciamos nosso estudo com polinômios bastante simples, as potências de x, que são polinômios do tipo $p(x) = x^n$, com $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

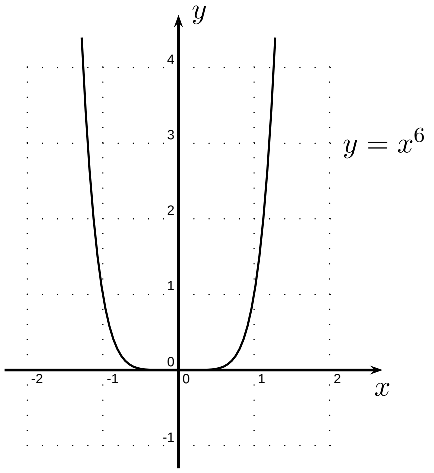
Vejamos os gráficos das funções $y = p(x) = x^n$, com n fixado, para $2 \leq n \leq 7$. Com a exceção de $n = 1$, ou seja, $y = x$, vemos que é possível classificar as potências de x em dois tipos: potência com n par e potência com n ímpar. Quando n for par, o gráfico de $y = x^n$ será “semelhante” ao gráfico da parábola $y = x^2$ e, quando n for ímpar, o gráfico de $y = x^n$ será “semelhante” ao gráfico da cúbica $y = x^3$.

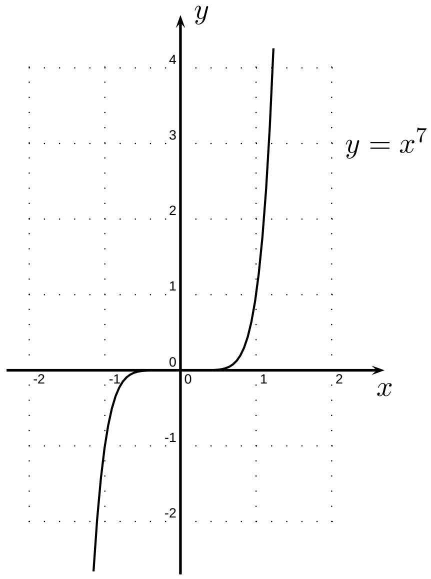




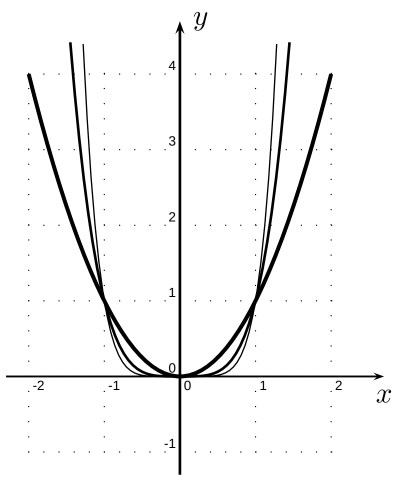


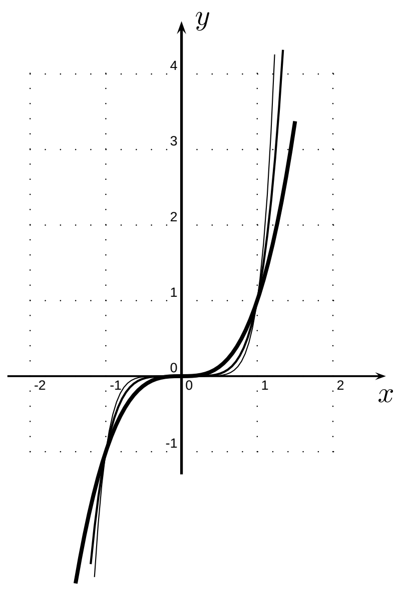




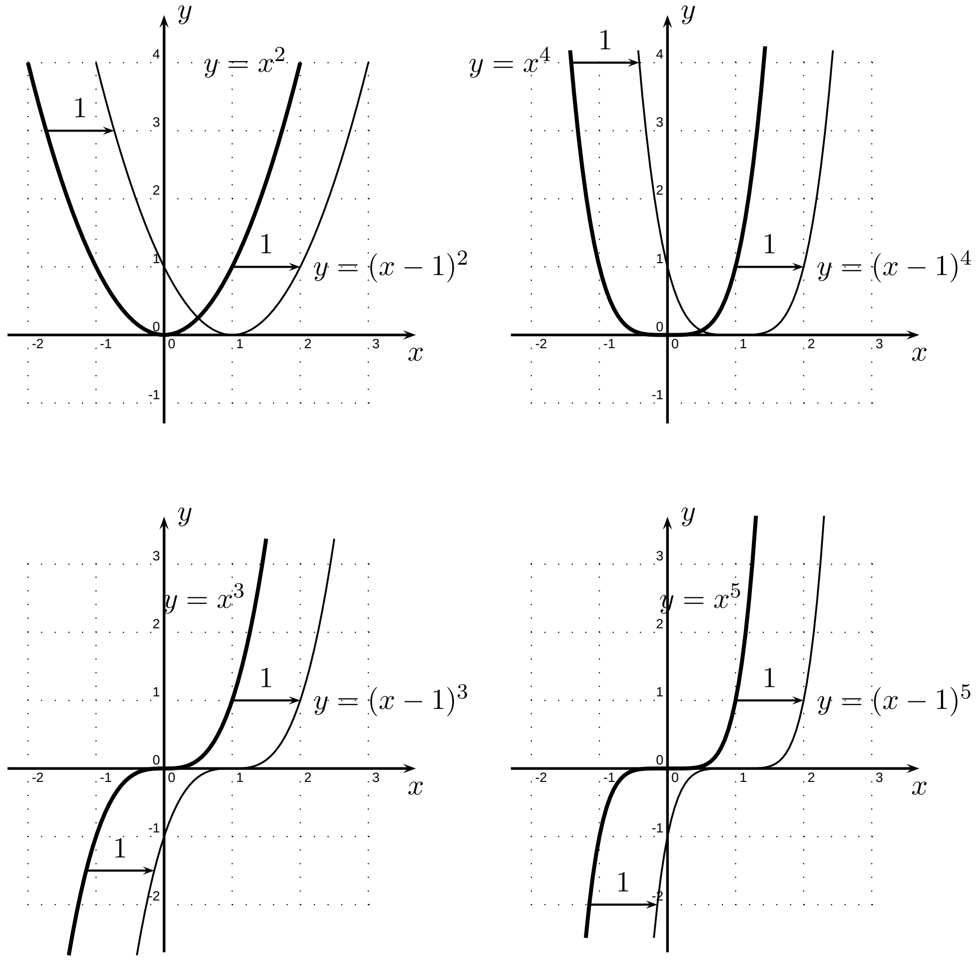


A seguir comparamos entre si os três gráficos das potências x^n, com n par, dados acima, esboçando-os no mesmo sistema de eixos, bem como os três com n ímpar. Identifique esses gráficos.



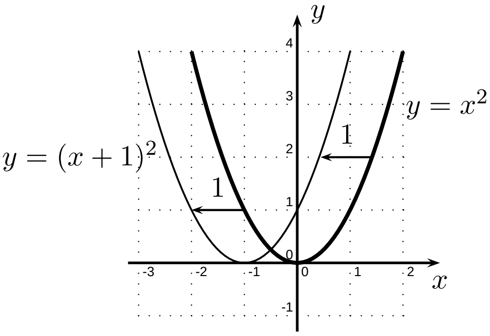


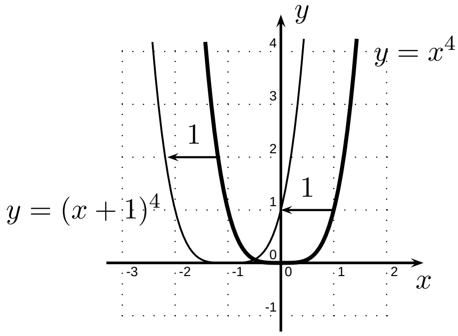
Os gráficos das potências de $(x - 1)$ podem ser esboçados utilizando os gráficos das potências de x, bastando transladar os respectivos gráficos de $y = x^n$ uma unidade para a direita, como podemos ver nas figuras seguintes.

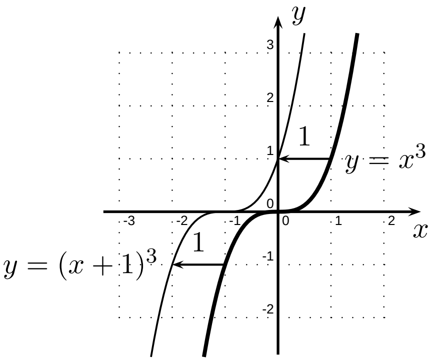


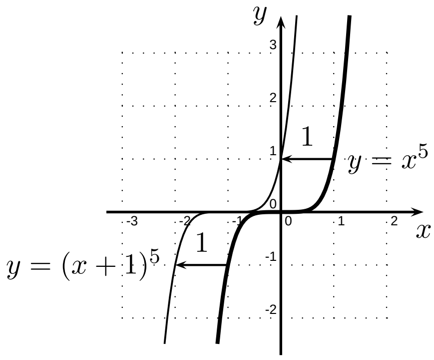
Esse procedimento é válido para um número real qualquer, ou seja, os gráficos das potências de $(x - a)$ são obtidos transladando, horizontalmente, os gráficos das potências de x para a direita ou esquerda, dependendo de a ser positivo ou negativo.

Vejamos os gráficos das potências de $(x + 1)$. Note que, aqui, a translação é para a esquerda, pois $a = -1$, já que $x + 1 = x - (-1)$.

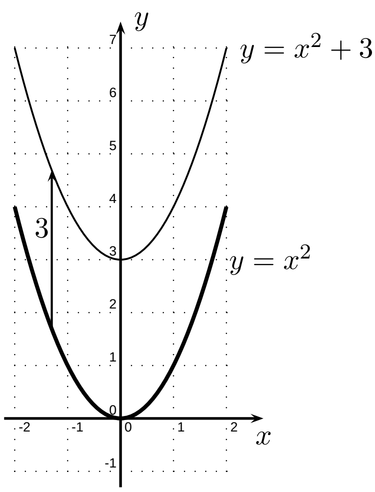


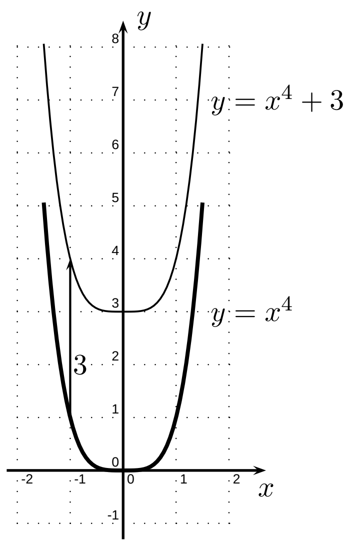


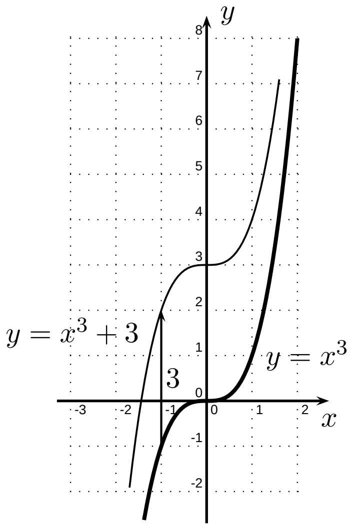


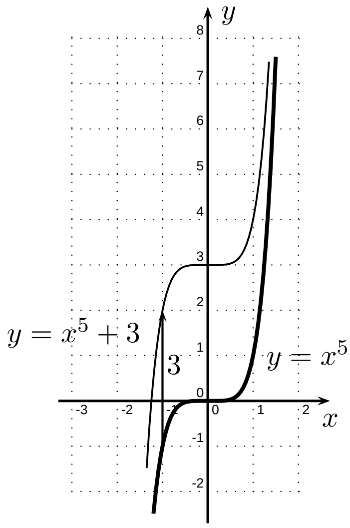


Também podemos fazer translações verticais dos gráficos das potências de x, caso em que a constante aparece fora da potência. Observe os exemplos seguintes.







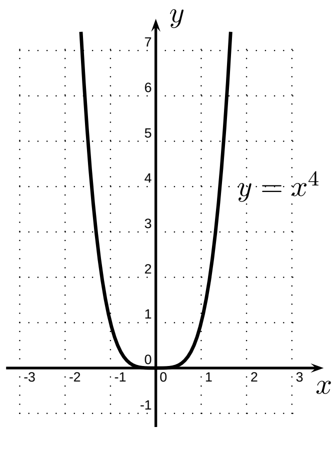


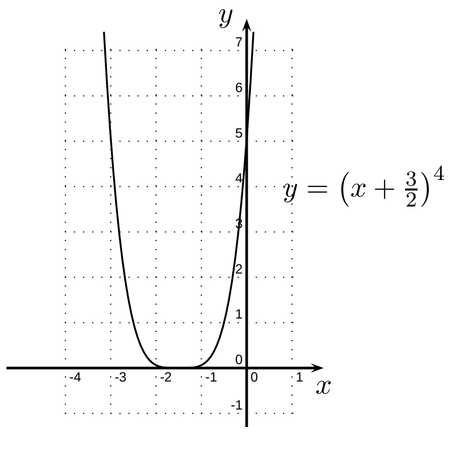
Assim, o gráfico da função polinomial $y = x^n + k$ é uma translação vertical por k unidades do gráfico de $y = x^n$, para cima ou para baixo, dependendo de k ser positivo ou negativo, respectivamente.

Exemplo 2.1. Esbocemos o gráfico do polinômio $p(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^4 - 16$, indicando os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

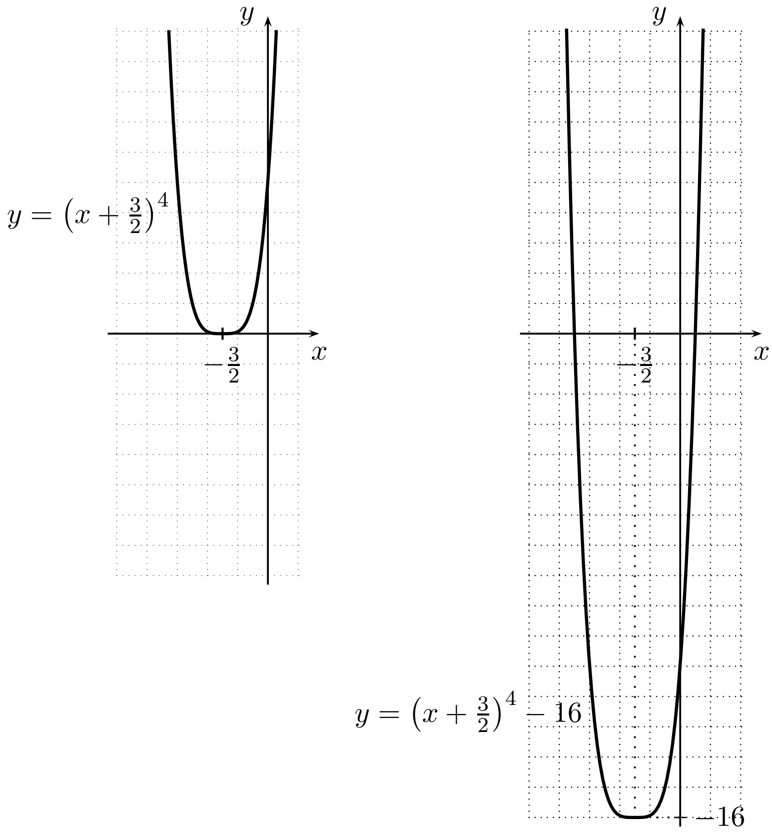
Combinando as duas técnicas, podemos ver que o gráfico desse polinômio $p(x)$ vem a ser uma translação horizontal, seguida de uma translação vertical, do gráfico de $y = x^4$.

Inicialmente, efetuamos uma translação para a esquerda de $\frac{3}{2}$ de unidade no gráfico de $y = x^4$, conforme figuras abaixo.





Em seguida, efetuamos uma translação vertical para baixo de 16 unidades no gráfico translado que acabamos de obter, ou seja, no de $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^4$.



Determinemos os pontos de interseção do gráfico de p com os eixos coordenados. O corte do gráfico com o eixo y ocorre exatamente com $x = 0$, ou seja, em

$$p(0) = \left(0 + \frac{3}{2}\right)^4 - 16 = \frac{81}{16} - 16 = \frac{81 - 256}{16} = -\frac{175}{16},$$

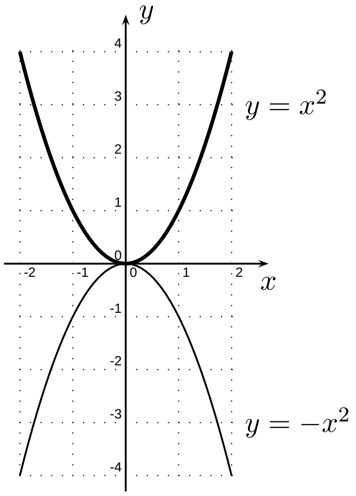
na proximidade de $y = -11$, como pode ser observado no último gráfico acima. Já os cortes do gráfico de p com o eixo x são as *raízes* de p, ou seja, as soluções da equação $p(x) = 0$ ou, equivalentemente, as raízes de $\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 - 16 = 0$. Como

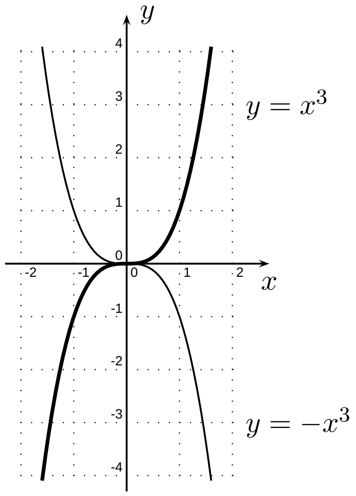
$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 - 16 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|x + \frac{3}{2}\right| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x + \frac{3}{2} = 2 \quad \text{ou} \quad x + \frac{3}{2} = -2, \end{aligned}$$

temos que as raízes de p são $x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ e $x = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$, o que também é coerente com o último gráfico acima.

2.3 – REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO x

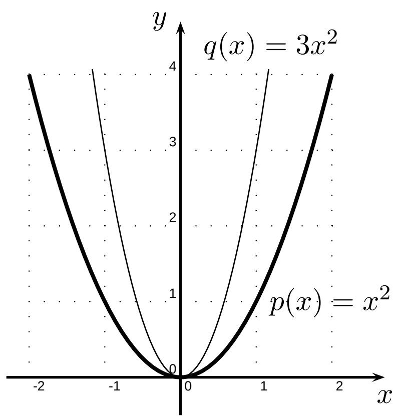
Vejamos o esboço do gráfico de $y = -x^2$. É fácil constatar que esse gráfico é o que chamamos de uma *reflexão* do gráfico de $y = x^2$ pelo eixo x, pois a função polinomial aplicada em cada ponto tem o mesmo valor, só que com o sinal oposto, ao de $y = x^2$. Isso vale também para as outras potências de x, como era de se esperar.

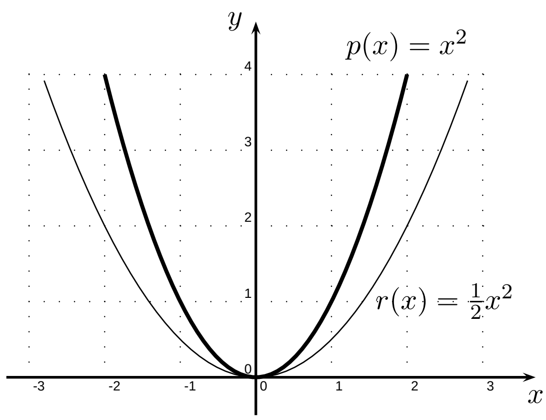




2.4 – ALONGAMENTO E COMPRESSÃO

A ideia, agora, é entender o que acontece quando multiplicamos o polinômio $p(x) = x^n$ por uma constante. Por exemplo, comparemos o gráfico de $p(x) = x^2$ com o dos polinômios $q(x) = 3x^2$ e $r(x) = \frac{1}{2}x^2$.





Como $p(x) = x^2 < 3x^2 = q(x)$ para cada x, verificamos que o gráfico de $y = 3x^2$ está sempre acima do de $y = x^2$, exceto na origem, onde ocorre uma interseção, já que

$$3x^2 = x^2 \iff 2x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Dizemos que o gráfico de $q(x) = 3x^2$ é um *alongamento* (vertical) do gráfico de $y = x^2$, conforme o gráfico da esquerda ao pé da página anterior.

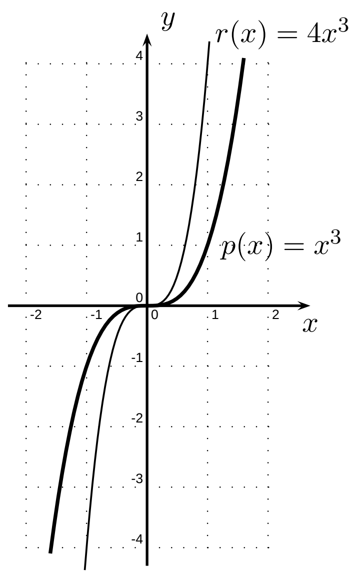
De maneira análoga podemos verificar que o gráfico de $r(x) = \frac{1}{2}x^2$ está sempre abaixo do gráfico de $p(x) = x^2$, pois a única interseção entre os dois gráficos ocorre em $x = 0$, já que

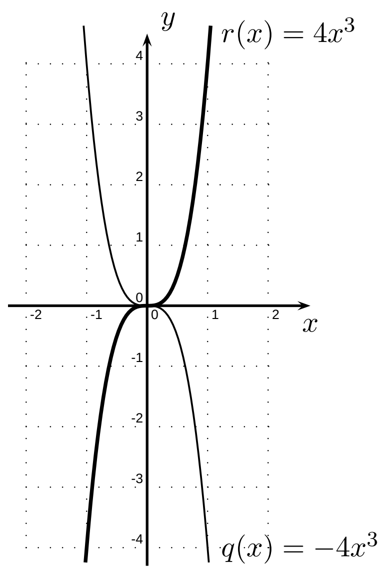
$$y = \frac{1}{2}x^2 = x^2 \iff -\frac{1}{2}x^2 = 0 \iff x = 0$$

e $p(1) = 1 > 0{,}5 = r(1)$. Dizemos, então, que o gráfico de $r(x) = \frac{1}{2}x^2$ é uma *compressão* (vertical) do gráfico de $y = x^2$, conforme o gráfico da direita ao pé da página anterior.

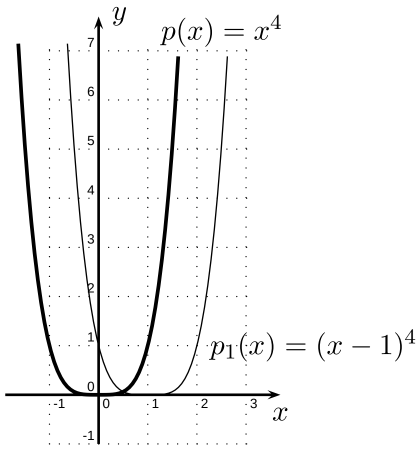
Em geral, o gráfico de $q(x) = k \cdot x^n$ é um alongamento ou uma compressão do gráfico de $p(x) = x^n$, dependendo do valor do módulo de k; se $|k| > 1$, é um alongamento e, se $0 < |k| < 1$, é uma compressão. Além disso, se k for negativo, então temos, ainda, uma reflexão em torno do eixo x.

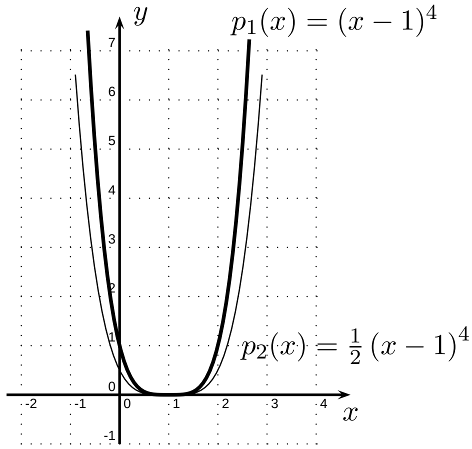
Por exemplo, observe os gráficos de $p(x) = x^3$, $q(x) = -4x^3$ e de $r(x) = 4x^3$ a seguir.



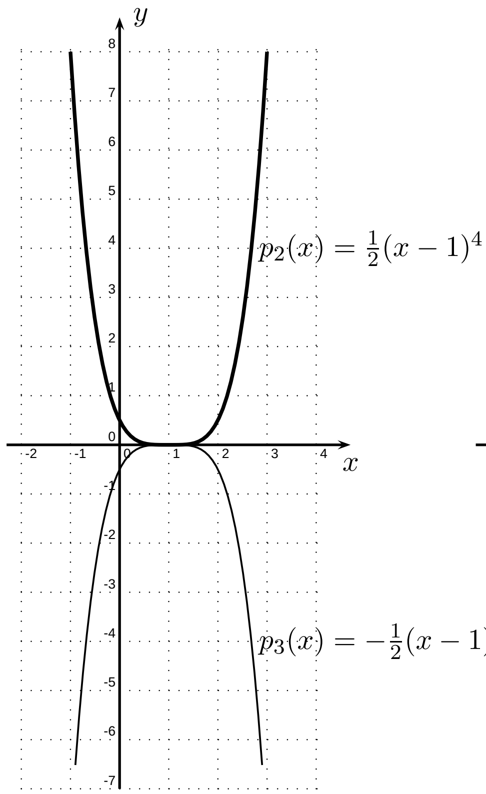


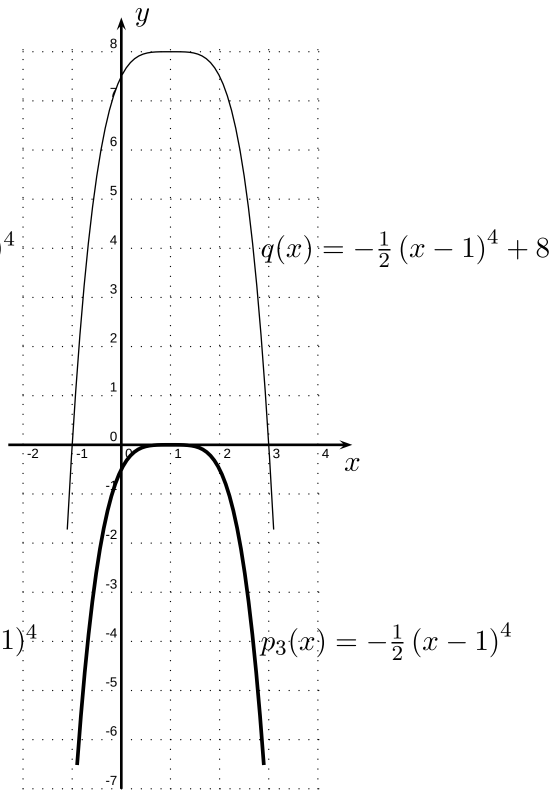
Exemplo 2.2. Esbocemos o gráfico de $q(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^4 + 8$, indicando os pontos de interseção com os eixos coordenados.





Combinando todas as técnicas desenvolvidas até aqui, partimos do gráfico de $p(x) = x^4$ e obtemos, com uma translação horizontal de 1 unidade para a direita, o gráfico de $p_1(x) = (x-1)^4$, como pode ser visto na figura acima, à esquerda. Em seguida, multiplicamos essa última função por $\frac{1}{2}$, obtendo o gráfico da compressão $p_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)^4$ de $p_1(x)$, como pode ser visto na figura acima, à direita.





Agora efetuamos uma reflexão desse gráfico em torno do eixo x, obtendo o gráfico de $p_3(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^4$ e, finalmente, transladamos esse último gráfico verticalmente 8 unidades para cima, chegando ao gráfico de $q(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^4 + 8$, conforme a última figura, na página precedente.

Determinemos os cortes do gráfico de q com os eixos coordenados. O corte do gráfico de q com o eixo y ocorre com $x = 0$, ou seja, o gráfico cruza o eixo y em

$$q(0) = -\frac{1}{2}(0-1)^4 + 8 = -\frac{1}{2} + 8 = \frac{-1+16}{2} = \frac{15}{2},$$

o que é coerente com a figura dada. Já os cortes do gráfico de q com o eixo x são as raízes de q, ou seja, as soluções de $q(x) = 0$ ou, então, de $-\dfrac{1}{2}(x-1)^4 + 8 = 0$. Como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x-1)^4 + 8 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(x-1)^4 = -8 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-1)^4 = (-8)(-2) = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x-1 = 2 \quad \text{ou} \quad x-1 = -2 \end{aligned}$$

temos que as raízes de q são $x = 2+1 = 3$ e $x = -2+1 = -1$, o que também pode ser conferido no gráfico esboçado acima.

Observe que podemos expandir a expressão polinomial $q(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^4 + 8$ do exemplo precedente usando a fórmula do binômio, como segue[1].

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{1}{2}(x-1)^4 + 8 \\ &= -\frac{1}{2}\Big(x^4 + 4\,(-1)\,x^3 + 6\,(-1)^2\,x^2 + 4\,(-1)^3\,x + (-1)^4\Big) + 8 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1\right) + 8 = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{15}{2}\,. \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que no último exemplo obtivemos o gráfico do polinômio

$$q(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{15}{2}$$

através de uma translação horizontal do gráfico de $y = x^4$, seguida de uma compressão, seguida de uma reflexão em torno do eixo x, seguida de uma translação vertical.

[1]Com a fórmula do binômio calculamos as potências de um binômio, a saber,

$$(a+b)^n = a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \tbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

onde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ é a combinação de n elementos, tomados k a k, com $k < n$.

Entretanto, devemos ressaltar que só foi possível obter, com relativa facilidade, o gráfico de $q(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{15}{2}$ a partir do gráfico de $y = x^4$ porque foi possível expressar $q(x)$ na forma $q(x) = k\,(x-c)^4 + d$ (que foi, aliás, a expressão da qual partimos).

Será que todo polinômio $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau 4 pode ser reescrito na forma

$$p(x) = k\,(x-c)^4 + d,$$

para certas constantes reais k, c, d? Ocorre que, em geral, isso não é possível, pois os polinômios desse tipo terão, no máximo, duas raízes reais, já que são translações verticais do polinômio x^4. Por exemplo, o polinômio $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ é um polinômio de grau 4 com quatro raízes distintas que não pode ser expresso na forma $k\,(x-c)^4 + d$.

Além disso, mesmo para polinômios que podem ser assim reescritos, em geral não há um método que nos forneça tal expressão. A exceção são os polinômios de grau 2. O *método do completamento de quadrados*, que já vimos na Seção 1.6, sempre nos permite expressar qualquer polinômio de grau 2 na forma $k\,(x-c)^2 + d$.

2.5 – POLINÔMIOS DE GRAU 2

As funções polinomiais de grau 2, ou *funções quadráticas* a 1 variável, são funções do tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Já sabemos esboçar o gráfico de várias funções polinomiais de grau 2, usando translações, reflexões, alongamentos e compressões do gráfico do polinômio de grau 2 básico, a saber, $y = x^2$.

Vimos na seção anterior que se soubermos escrever um polinômio de grau 2 na forma

$$p(x) = k(x-c)^2 + d, \tag{2.2}$$

então saberemos esboçar seu gráfico, usando translações, reflexões, alongamentos ou compressões do gráfico de $y = x^2$. Será que sempre é possível escrever um polinômio de grau 2 na forma (2.2)? Vejamos um exemplo.

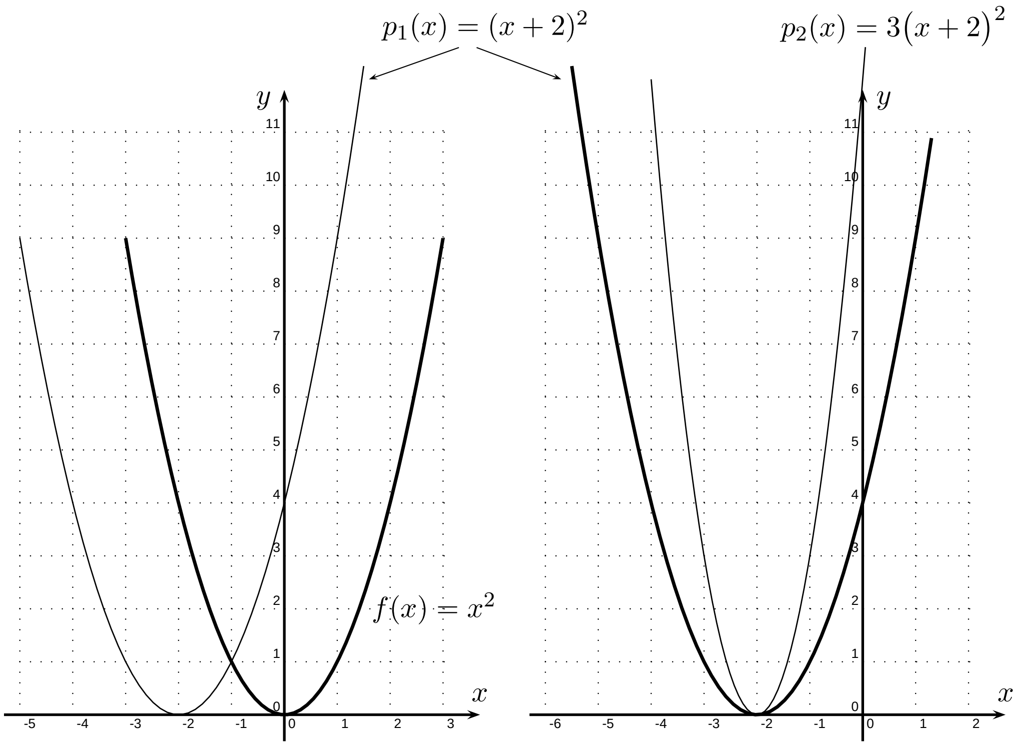
Exemplo 2.3. Esbocemos o gráfico do polinômio $p(x) = 3x^2 + 12x + 7$.

Primeiramente evidenciamos o 3 para obter um alongamento.

$$p(x) = 3x^2 + 12x + 7 = 3\left(x^2 + 4x + \frac{7}{3}\right).$$

Agora, para obter uma translação horizontal, completamos quadrados em $x^2 + 4x$ e a translação vertical aparecerá naturalmente. O coeficiente do termo em x é 4, logo devemos olhar para o quadrado de $x+2$. Como $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, temos que $x^2+4x = (x+2)^2-4$, portanto, substituindo essa igualdade em $p(x)$, resulta

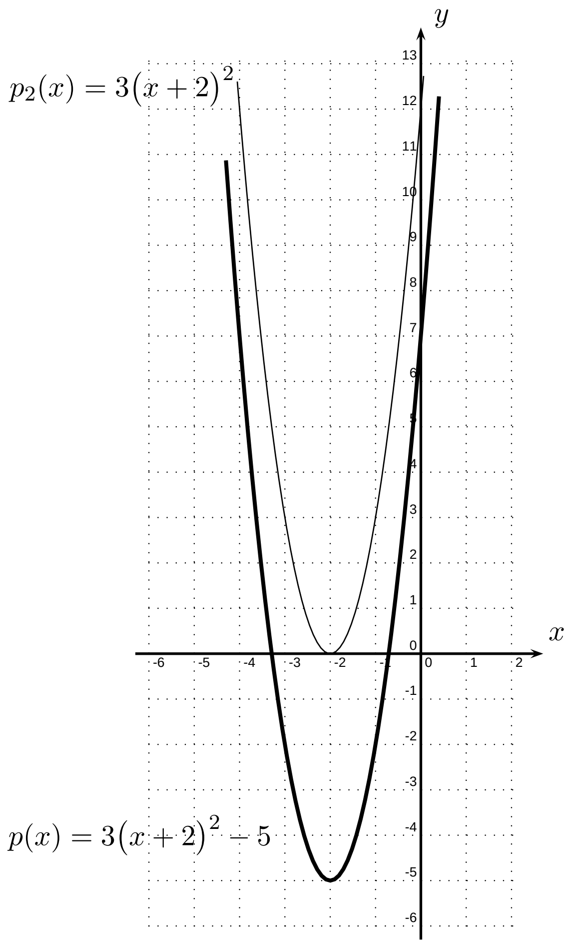
$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2+12x+7 = 3\left[\left(x^2+4x\right)+\frac{7}{3}\right] = 3\left[\left((x+2)^2-4\right)+\frac{7}{3}\right] \\ &= 3\left[(x+2)^2+\left(-4+\frac{7}{3}\right)\right] = 3(x+2)^2+3\left(-4+\frac{7}{3}\right) \\ &= 3(x+2)^2+\cancel{3}\left(-\frac{5}{\cancel{3}}\right) = 3(x+2)^2-5. \end{aligned}$$



Assim, o gráfico de $p(x) = 3x^2+12x+7 = 3(x+2)^2-5$ é dado por uma translação horizontal de 2 unidades para a esquerda do gráfico de $f(x) = x^2$, resultando $p_1(x) = (x+2)^2$, seguido de um alongamento de 3 unidades, resultando $p_2(x) = 3(x+2)^2$, conforme gráficos acima. Finalmente, efetuamos uma translação vertical de 5 unidades para baixo, obtemos o gráfico de $p(x)$, como na figura da página seguinte.

Note que o vértice na origem da parábola inicial $f(x) = x^2$ foi transladado para o vértice de $p(x)$, de coordenadas $(-2,-5)$. As raízes de p, agora, também são fáceis de calcular. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
p(x) = 3(x+2)^2 - 5 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3(x+2)^2 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^2 = \frac{5}{3} \\
\Longleftrightarrow \quad |(x+2)| = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad &\Longleftrightarrow \quad (x+2) = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{ou} \quad (x+2) = -\sqrt{\frac{5}{3}} \\
\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{5}{3}} - 2 \quad &\text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{5}{3}} - 2.
\end{aligned}
$$



Dado um polinômio quadrático qualquer $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, vamos seguir um raciocínio similar ao do exemplo anterior para responder afirmativamente a questão associada a (2.2).

Como $a \neq 0$, podemos evidenciar a, obtendo

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Agora, como no exemplo acima, completamos o quadrado de $\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$; como o coeficiente do termo em x é $\frac{b}{a}$, devemos olhar para o quadrado de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$. Como $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$, resulta

$$\left(x^2+\frac{b}{a}x\right) = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\,.$$

Substituindo essa igualdade em $p(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
p(x) = ax^2+bx+c &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left(-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\cancel{a}\left(-\frac{b^2-4ac}{4a^{\cancel{2}}}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right).
\end{aligned}$$

Assim, o gráfico de $p(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ é dado por uma translação horizontal do gráfico de $y=x^2$ de $-\frac{b}{2a}$ unidades para a esquerda ou a direita, dependendo de $-\frac{b}{2a}$ ser positivo ou negativo, seguido de um alongamento ou compressão desse gráfico de a unidades (com reflexão se $a<0$), seguido de uma translação vertical de $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ unidades para cima ou para baixo, dependendo do sinal de $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Note que o vértice de p tem coordenadas $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Antes de proceder ao esboço do gráfico, vejamos como se comportam as raízes do polinômio quadrático p. Temos

$$\begin{aligned}
p(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right) &= 0\\
\iff \quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\\
\iff \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).
\end{aligned}$$

O lado esquerdo da igualdade na última equação acima, por ser um quadrado, é sempre positivo ou nulo e, portanto, o mesmo deve ocorrer com o lado direito, se quisermos que $p(x) = 0$ tenha solução. Como $4a^2 > 0$, estabelecemos que $p(x) = 0$ se, e somente se, $b^2 - 4ac \geq 0$ e valer a última igualdade acima.

Assim, se $b^2 - 4ac \geq 0$, nossa equação tem solução e, para obtê-la, extraímos a raiz quadrada dos dois lados da última equação acima,

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} = \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right|$$

ou seja,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e, portanto,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a conhecida *fórmula de Bhaskara* do Ensino Médio.

Para facilitar a escrita, denotemos $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos três casos.

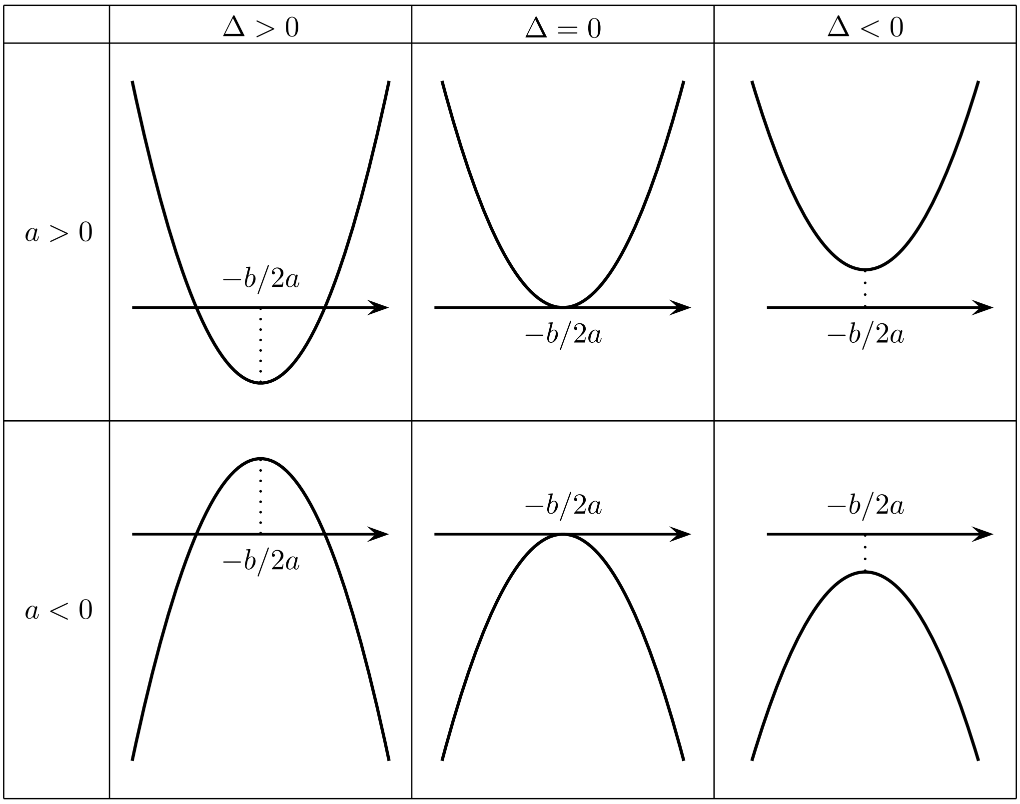
Se $\Delta < 0$, então $p(x) = 0$ não tem solução real, ou seja, p não tem raízes reais. Como $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a translação vertical será para cima ou para baixo, dependendo somente do sinal de a, que também indicará se há uma reflexão pelo eixo x, ou não.

Se $\Delta = 0$, então $p(x) = 0$ tem uma única solução, ou seja, p só tem a única raiz $-\frac{b}{2a}$ e sua equação é da forma $p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, não havendo a translação vertical, de modo que o gráfico de p tangencia o eixo x em $-\frac{b}{2a}$ e haverá, ou não, uma reflexão pelo eixo x, dependendo do sinal de a.

Se $\Delta > 0$, então $p(x) = 0$ tem duas soluções distintas (explicitadas acima) e, nessas raízes, o gráfico de p não tangenciará o eixo x mas sim atravessará esse eixo. Note que, nesse caso, p tomará tanto valores positivos quanto negativos (o que não ocorre nos demais casos). Como $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a translação vertical será para cima ou para baixo, dependendo somente do sinal de a, que também indicará se há uma reflexão pelo eixo x, ou não.

Resumimos os resultados com uma tabela contendo todos os possíveis gráficos de

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \Big(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\Big) .$$



Note que, nessa tabela, não traçamos o eixo y, já que não analisamos o sinal de $-\dfrac{b}{2a}$. Vemos, assim, que sempre podemos esboçar o gráfico de um polinômio de grau 2, usando apenas translações, reflexões e alongamentos ou compressões do gráfico de $y = x^2$. Além disso, quando houver raízes reais (caso $\Delta \geq 0$), essas poderão ser computadas pela fórmula de Bhaskara, demonstrada acima. Isso tudo porque sempre podemos escrever

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \Big(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\Big).$$

Para polinômios de grau 3 já não teremos tanta sorte: não será possível representá-los apenas através de translações, reflexões e alongamentos ou compressões do gráfico de $y = x^3$ e tampouco teremos suas raízes expressas de uma maneira simples em termos dos coeficientes do polinômio.

Nas próximas seções, apresentaremos um resultado fundamental no estudo de polinômios, que nos permitirá entender melhor os polinômios de grau maior do que ou igual a 3, a saber, o algoritmo da divisão, bem como algumas de suas consequências.

2.6 – O ALGORITMO DA DIVISÃO

O algoritmo da divisão polinomial é muito semelhante ao algoritmo da divisão de números naturais. Ao dividirmos dois números naturais, por exemplo, quando dividimos 3275 por 15, encontramos um quociente, que nesse caso é 218, e um resto, que exigimos ser menor que 15 (caso contrário, ainda poderíamos continuar a divisão) e que, nesse caso é 5. Escreve-se, então,

$$3275 = 15 \cdot 218 + 5. \tag{2.3}$$

Com polinômios com coeficientes reais (ou complexos, ou racionais) acontece o mesmo. O exemplo abaixo mostra como efetuar a divisão do polinômio de grau 5 $4x^5 + 6x^4 + (2\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x - 1$ pelo quadrático $2x^2 + 2x - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & +6x^4 & +0x^3 & +(2\sqrt{2}-1)x^2 & +2x & -1 & 2x^2+2x-1 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & -4x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3+x^2+\sqrt{2} \\ \cline{1-3}
 & +2x^4 & +2x^3 & +(2\sqrt{2}-1)x^2 & & & \\
 & -2x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & +2\sqrt{2}x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & -2\sqrt{2}x^2 & -2\sqrt{2}x & +\sqrt{2} & \\ \cline{4-6}
 & & & & (2-2\sqrt{2})x & +(\sqrt{2}-1) &
\end{array}$$

Portanto, o quociente da divisão é $2x^3 + x^2 + \sqrt{2}$ e o resto é $(2 - 2\sqrt{2})x + (\sqrt{2} - 1)$. Analogamente a (2.3), podemos escrever

$$\begin{aligned}
&4x^5 + 6x^4 + (2\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x - 1 \\
&\qquad = (2x^2 + 2x - 1)(2x^3 + x^2 + \sqrt{2}) + \Big[\left(2 - 2\sqrt{2}\right)x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\Big].
\end{aligned}$$

Confira! Essa divisão sempre pode ser feita, segundo o *algoritmo da divisão de polinômios*, que podemos enunciar da seguinte forma.

Teorema 2.1 (Divisão de Polinômios). *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois polinômios com coeficientes reais, sendo $g(x) \neq 0$. Existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ com coeficientes reais tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $r(x) = 0$ ou $\partial r < \partial g$. Além disso, esses polinômios são únicos.*

Note que, quando $g(x)$ tem grau 1 então, ou o resto da divisão é nulo ou é um polinômio de grau zero. Logo, se o divisor $g(x)$ tem grau 1, então o resto é um polinômio constante. Observamos, também, que o teorema é válido para polinômios $f(x)$ e $g(x)$ com coeficientes complexos, caso em que o quociente e o resto terão coeficientes reais ou complexos.

Exemplo 2.4. Determinemos o quociente e o resto da divisão de

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6$$

por a) $(x-1)$ e b) $(x-3)$.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - x - 6)$, pois o quociente é $x^3 - x - 6$ e o resto é zero, já que

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & -x^2 & -5x & +6 & x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3 - x - 6 \\ \cline{1-2}
& 0x^3 & -x^2 & -5x & & \\
& & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
& & & -6x & +6 & \\
& & & +6x & -6 & \\ \cline{4-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, obtivemos

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - x - 6) \tag{2.4}$$

Observe que se calcularmos o valor de $f(x)$ quando $x = 1$ em (2.4), teremos

$$f(1) = (1-1)(1^3 - 1 - 6) = 0.$$

Logo, 1 é raiz de $f(x)$.

b) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x-3)\cdot(x^3 + 2x^2 + 5x + 10) + 36$, pois o quociente é $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ e o resto é 36, já que

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & -x^2 & -5x & +6 & x-3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +3x^3 & & & & x^3 + 2x^2 + 5x + 10 \\ \cline{1-2}
& +2x^3 & -x^2 & & & \\
& -2x^3 & +6x^2 & & & \\ \cline{2-3}
& & +5x^2 & -5x & & \\
& & -5x^2 & +15x & & \\ \cline{3-4}
& & & +10x & +6 & \\
& & & -10x & +30 & \\ \cline{4-5}
& & & & 36 &
\end{array}$$

Assim, obtivemos

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \cdot (x^3 + 2x^2 + 5x + 10) + 36 \qquad (2.5)$$

Observe que se calcularmos o valor de $f(x)$ quando $x = 3$ em (2.5), teremos

$$f(3) = (3 - 3)(3^3 + 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 10) + 36 = 36,$$

portanto, $f(3) = 36 \neq 0$, e 3 não é raiz de $f(x)$.

O que acabamos de ver nesse exemplo vale de maneira geral.

Proposição 2.2. *Sejam $f(x)$ um polinômio de grau n e α um número qualquer (que pode até ser complexo). O resto da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$ é $f(\alpha)$.*

É fácil justificar essa afirmação, pois quando dividimos $f(x)$ por $(x - \alpha)$, obtemos um quociente $q(x)$ e um resto r, que sabemos ser constante (pelo que vimos acima). Escrevemos, então, $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r$ e segue que

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, q(\alpha) + r = 0 + r = r$$

é o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$.

Em particular, decorre daí que α é raiz de $f(x)$ se, e somente se, $r = 0$. Assim, temos o seguinte resultado importantíssimo sobre polinômios.

Proposição 2.3. *Sejam $p(x)$ um polinômio de grau n e α um número qualquer (que pode ser complexo). Então, α é uma raiz de $p(x)$ se, e somente se, existe um polinômio $q(x)$, de grau $n - 1$, tal que $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$.*

Decorre dessa proposição que se $p(x)$ é um polinômio de grau n e α é uma raiz de $p(x)$, então existe um polinômio $q_1(x)$, de grau $n - 1$, tal que $p(x) = q_1(x) \cdot (x - \alpha)$. Se α também é raiz de $q_1(x)$, existe um outro polinômio $q_2(x)$, de grau $n - 2$, tal que $q_1(x) = q_2(x) \cdot (x - \alpha)$ e, consequentemente, $p(x) = q_2(x) \cdot (x - \alpha)^2$. Se α também é raiz de $q_2(x)$, existe um outro polinômio $q_3(x)$, de grau $n - 3$, tal que $q_2(x) = q_3(x) \cdot (x - \alpha)$ e, consequentemente, $p(x) = q_3(x) \cdot (x - \alpha)^3$. Prosseguindo dessa maneira, acabamos encontrando um polinômio $q_k(x)$ de grau $n - k$ que **não** tem α como raiz e satisfaz $p(x) = q_k(x) \cdot (x - \alpha)^k$. Nesse caso, dizemos que k é a multiplicidade da raiz α.

Assim, dizemos que uma raiz α de um polinômio $p(x)$ de grau n é uma raiz de *multiplicidade* $k \geq 1$ se existir um polinômio $q(x)$ de grau $n - k$ tal que $q(\alpha) \neq 0$ e

$$p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)^k.$$

Exemplo 2.5. Fatoremos o polinômio $p(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$.

Uma raiz desse polinômio é 1 pois $p(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 - 1^3 + 11 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 4 = 0$. Procedemos à divisão.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -3x^4 & -x^3 & +11x^2 & -12x & +4 & x-1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & & & & & x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 \\ \cline{1-2}
 & -2x^4 & -x^3 & & & & \\
 & +2x^4 & -2x^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x^3 & +11x^2 & & & \\
 & & +3x^3 & -3x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 8x^2 & -12x & & \\
 & & & -8x^2 & +8x & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -4x & +4 & \\
 & & & & +4x & -4 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, $p(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4 = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4)$. Também é fácil ver que 1 é raiz de $q(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$, pois $q(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 0$. Procedemos, agora, à divisão de $q(x)$ por $(x-1)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -3x^2 & +8x & -4 & x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \cline{1-2}
 & -x^3 & -3x^2 & & & \\
 & +x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -4x^2 & +8x & & \\
 & & +4x^2 & -4x & & \\ \cline{3-4}
 & & & +4x & -4 & \\
 & & & -4x & +4 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Desse modo, $q(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ e, portanto, $p(x) = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) = (x-1)^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$. Só que 1 também é raiz de $t(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, já que $q(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$. Agora,

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -4x & +4 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 - 4 \\ \cline{1-2}
 & 0 & -4x & +4 & \\
 & & +4x & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

de modo que $t(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$ e, portanto, $p(x) = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4) = (x-1)^2(x^3 - x^2 - 4x + 4) = (x-1)^3(x^2-4)$. Mas o polinômio (x^2-4) é uma diferença de quadrados e podemos fatorá-lo como o produto da soma pela diferença, $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$.

Assim, concluímos que $p(x) = (x-1)^3(x-2)(x+2)$ tem três raízes distintas, a saber, 1, 2 e -2, sendo $\alpha_1 = 1$ uma raiz de multiplicidade 3 e $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = -2$ de multiplicidade 1.

Será que sempre é possível fatorar um polinômio totalmente, como no exemplo precedente?

Iniciamos com o caso mais simples possível, o de polinômios de grau 1. Tomando $p(x) = 4x + 3$, sua raiz é $-\frac{3}{4}$. Pela Proposição 2.3, existe um polinômio $q(x)$ de grau 0 (logo, uma constante) tal que $p(x) = \left(x + \frac{3}{4}\right) q(x)$. Podemos proceder com a divisão mostrada acima, só que nesse caso é mais fácil evidenciar o 4 em $p(x)$ para obter

$$p(x) = 4x + 3 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right).$$

Assim, com polinômios de grau 1, a multiplicidade da raiz é sempre 1. Se $p(x) = a\,x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $p(x) = a\,x + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$.

Agora, vejamos como funciona essa fatoração para polinômios de grau 2 e 3 tomando, inicialmente, exemplos.

Exemplo 2.6. Fatoremos $p(x) = 5x^2 - 6x + 1$.

É fácil ver que $\alpha = 1$ é raiz de $p(x)$, uma vez que $p(1) = 5 - 6 + 1 = 0$, de modo que $p(x)$ é divisível por $x - 1$. Procedemos à divisão.

$$\begin{array}{rrr|l}
5x^2 & -6x & +1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-5x^2 & +5x & & 5x-1 \\ \cline{1-2}
& -x & +1 & \\
& +x & -1 & \\ \cline{2-3}
& & 0 &
\end{array}$$

Desse modo, $q(x) = 5x - 1$ e escrevemos $p(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (x-1)(5x-1)$. Já sabemos como fatorar $q(x) = 5x - 1 = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)$, logo

$$p(x) = 5x^2 - 6x + 1 = (x-1)(5x-1) = 5\,(x-1)\left(x - \frac{1}{5}\right).$$

Se usarmos a fórmula de Bhaskara para determinar as raízes de $p(x)$, também encontraremos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \frac{1}{5}$. Logo, para obter a fatoração de $p(x)$ em termos de suas raízes, basta multiplicar os fatores $(x-1)$ e $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ pelo coeficiente do termo de maior grau que, no caso, é 5.

Assim, para fatorar um polinômio $p(x)$ de grau 2, determinamos suas raízes α_1 e α_2 e escrevemos $p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, onde a é o coeficiente de x^2. No caso em que $\Delta > 0$, cada raiz tem multiplicidade 1. Se $\Delta = 0$, temos $\alpha_1 = \alpha_2$ e $p(x) = a(x-\alpha_1)^2$, logo α_1 tem multiplicidade 2. Se $\Delta < 0$, esse tipo de fatoração não é possível nos reais.

Note que, no exemplo acima, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ que é o termo independente dividido pelo coeficiente do termo em x^2 (termo de maior grau). Também a soma, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ é o simétrico do coeficiente do termo em x dividido pelo coeficiente do termo em x^2. Esse é mais um resultado que vale em geral.

Proposição 2.4. *Sejam $p(x) = x^2 + bx + c$ um polinômio com $b, c \in \mathbb{R}$ e α e β suas raízes. Então $b = -(\alpha+\beta)$ e $c = \alpha \cdot \beta$.*

De fato, como α e β são raízes de $p(x)$, sabemos que, $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$; mas $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha \cdot \beta = x^2 - (\beta+\alpha)x + \alpha \cdot \beta$. Agora basta igualar os coeficientes de mesmo grau.

E se o coeficiente de x^2 do polinômio $p(x)$ for diferente de 1? Como no exemplo precedente, observe que $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ e, agora, $q(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ tem coeficiente de x^2 igual a 1.

Exemplo 2.7. Fatoremos o polinômio $p(x) = 15x^3 + 17x^2 + x - 1$.

É fácil ver que -1 é raiz, pois

$$p(-1) = 15(-1)^3 + 17(-1)^2 - 1 - 1 = -15 + 17 - 2 = 0$$

e, portanto, $p(x)$ é divisível por $x - (-1) = x + 1$. Efetuemos a divisão.

$$\begin{array}{rrrr|l}
15x^3 & +17x^2 & +x & -1 & x+1 \\ \cline{5-5}
-15x^3 & -15x^2 & & & 15x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +x & & \\
 & -2x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
 & & -x & -1 & \\
 & & +x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Assim, escrevemos $p(x) = 15x^3 + 17x^2 + x - 1 = (x+1) \cdot (15x^2 + 2x - 1)$. Será que $p(x)$ tem outras raízes? Se tiver, elas serão as raízes de $q(x) = 15x^2 + 2x - 1$. As raízes de $q(x)$ são fáceis de determinar, pela fórmula de Bhaskara; como $\Delta = 2^2 - 4(15)(-1) = 4(1+15) = 4 \cdot 16$, temos

$$\alpha_1 = \frac{-2+8}{2 \cdot 15} = \frac{6}{2 \cdot 15} = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{-2-8}{2 \cdot 15} = -\frac{10}{2 \cdot 15} = -\frac{1}{3}$$

Assim, pelo que vimos no exemplo precedente, tanto $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ quanto $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ são divisores de $q(x)$ e podemos escrever $q(x) = 15\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Voltando ao polinômio $p(x)$ original, obtivemos

$$p(x) = 15x^3 + 17x^2 + x - 1 = 15\,(x+1)\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Observe que, pensando da mesma maneira, podemos mostrar que um polinômio $p(x)$ de grau 3 qualquer tem, no máximo, três raízes e, se esse polinômio tiver as três raízes α_1, α_2 e α_3, podemos escrevê-lo como

$$p(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3),$$

onde k é o coeficiente de x^3 em $p(x)$. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, temos $p(x) = k(x - \alpha_1)^3$ e α_1 tem multiplicidade 3. Se $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$, temos $p(x) = k(x - \alpha_1)^2(x - \alpha_3)$ e α_1 tem multiplicidade 2 e α_3 tem multiplicidade 1. Se α_1, α_2 e α_3, são duas a duas distintas, temos $p(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ e todas as raízes têm multiplicidade 1.

Note que, também nesse caso, o termo independente é o simétrico do produto das raízes multiplicado por k (que é o coeficiente do termo de maior grau) e que, agora, a soma das raízes é o simétrico do coeficiente em x^2 dividido por k. Verifique!

Exemplo 2.8. Fatoremos o polinômio $p(x) = 2x^3 + 2$.

Esse polinômio admite -1 como raiz, pois $p(-1) = 2(-1)^3 + 2 = 0$ e, portanto, $p(x) = 2x^3 + 2$ é divisível por $(x - (-1))$. Efetuemos essa divisão.

$$\begin{array}{rrrrl}
2x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & \underline{|\; x+1 \qquad} \\
-2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 - 2x + 1 \\
\hline
 & -2x^2 & +0x & & \\
 & +2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & +2x & +2 & \\
 & & -2x & -2 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Podemos, então, escrever $p(x) = 2x^3 + 2 = (x+1)(2x^2 - 2x + 1)$. Como $q(x) = 2x^2 - 2x + 1$ não tem raízes reais, já que $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$, então $p(x) =$

$2x^3+2=(x+1)(2x^2-2x+1)$ não pode ser fatorado como produto de polinômios com coeficientes reais de grau 1. Resulta que esse polinômio tem apenas *uma* raiz real.

Esse resultado vale em geral.

Proposição 2.5. *Um polinômio $p(x)$ de grau n, com coeficientes reais, possui, no máximo, n raízes reais. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todas as raízes reais distintas de $p(x)$ e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ suas respectivas multiplicidades, então podemos escrever*

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2} \cdots (x-\alpha_k)^{n_k}\, t(x),$$

onde t é uma função polinomial de grau $n-(n_1+n_2+\cdots+n_k)$, desprovida de raízes reais. Se $p(x)$ possuir exatamente n raízes reais, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$p(x) = a\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

onde a é o coeficiente de x^n.

2.7 – RAÍZES RACIONAIS DE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES INTEIROS

Vimos na seção anterior que, se conhecermos as raízes de um polinômio não nulo, sua fatoração é facilmente determinada através do algoritmo da divisão. Uma pergunta que surge de maneira natural é a seguinte: dado um polinômio qualquer, será que existem raízes? Como determinar uma dessas raízes?

Para polinômios de grau 2, essa pergunta já foi respondida em seções anteriores. No entanto, é muito difícil respondê-la no caso geral, mesmo para polinômios de graus pequenos como 3 ou 4, por exemplo. Para polinômios de grau maior do que ou igual a 5 não existe uma fórmula que funcione sempre, como a fórmula de Bhaskara funciona para grau 2. Assim, vamos nos limitar a casos particulares.

Exemplo 2.9. Fatoremos o polinômio $p(x) = 9x^5 + 18x^4 + 8x^3 + 16x^2 - x - 2$.

Observe que todos os coeficientes de $p(x)$ estão em $\mathbb{Z}$, ou seja, são inteiros. Inicialmente vamos tentar determinar as possíveis raízes inteiras de $p(x)$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é uma raiz de $p(x)$, então

$$0 = p(\alpha) = 9\alpha^5 + 18\alpha^4 + 8\alpha^3 + 16\alpha^2 - \alpha - 2.$$

Podemos reescrever essa equação colocando todas as parcelas que têm α de um mesmo lado da igualdade, obtendo

$$\alpha(9\alpha^4 + 18\alpha^3 + 8\alpha^2 + 16\alpha - 1) = 9\alpha^5 + 18\alpha^4 + 8\alpha^3 + 16\alpha^2 - \alpha = 2.$$

Como $9\alpha^4 + 18\alpha^3 + 8\alpha^2 + 16\alpha - 1 \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que α é um divisor de 2, logo α é igual a $-1, 1, -2$ ou 2. Temos, assim, que apenas 4 números inteiros podem ser raízes de p. Testando, verificamos que

$$\begin{aligned}
p(-1) &= 9(-1)^5 + 18(-1)^4 + 8(-1)^3 + 16(-1)^2 - (-1) - 2 \\
&= -9 + 18 - 8 + 16 + 1 - 2 = 16 \neq 0, \\
p(1) &= 9(1)^5 + 18(1)^4 + 8(1)^3 + 16(1)^2 - (1) - 2 \\
&= 9 + 18 + 8 + 16 - 1 - 2 = 48 \neq 0, \\
p(2) &= 9(2)^5 + 18(2)^4 + 8(2)^3 + 16(2)^2 - (2) - 2 = 2^5(9 + 9 + 2 + 2) - 4 \\
&= 32 \cdot 22 - 4 = 740 + 74 - 4 = 810 \neq 0, \\
p(-2) &= 9(-2)^5 + 18(-2)^4 + 8(-2)^3 + 16(-2)^2 - (-2) - 2 \\
&= 2^5(-9 + 9 - 2 + 2) + 0 \\
&= 2^5 \cdot 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, -2 é a única raiz de $p(x)$ em $\mathbb{Z}$. Dividindo $p(x)$ por $(x - (-2)) = (x + 2)$, obtemos

$$p(x) = (x + 2) \cdot (9x^4 + 8x^2 - 1).$$

Agora, para obter as outras raízes de $p(x)$ é necessário (e também suficiente) obter as raízes do polinômio quociente $q(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1$. Note que $q(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1$ só possui potências pares de x. Assim, para obter suas raízes, ou seja, as soluções da equação $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$, podemos fazer uma mudança de variáveis, denotando x^2 por z e, com isso, essa equação fica equivalente a $9z^2 + 8z - 1 = 0$. Mas essa equação, por sua vez, é uma equação do segundo grau, que já sabemos resolver. Pela fórmula de Bhaskara, as soluções de $9z^2 + 8z - 1 = 0$ são

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-8 + \sqrt{64 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 + 10}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \quad \text{e} \\
z &= \frac{-8 - \sqrt{64 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 - 10}{18} = -\frac{18}{18} = -1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x^2 = z = \frac{1}{9} \qquad \text{ou} \quad x^2 = z = -1$$

e as soluções de $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$ são

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = -\frac{1}{3}, \quad x = i \quad \text{e} \quad x = -i.$$

Portanto, conhecemos as quatro raízes de $q(x)$ e obtemos

$$\begin{aligned}
q(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1 &= 9 \cdot \left[x^4 + \frac{8}{9}x^2 - \frac{1}{9}\right] \\
&= 9 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - i)(x + i).
\end{aligned}$$

Assim,

$$p(x) = (x+2)\cdot(9x^4+8x^2-1) = (x+2)\cdot 9\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-i)(x+i)$$

e obtivemos todas as raízes de $p(x)$. Note que o passo inicial foi descobrir se $p(x)$ tinha, ou não, raízes inteiras e, para isso, o que fizemos foi selecionar as possíveis raízes inteiras de $p(x)$.

O método utilizado vale no caso geral e temos o seguinte resultado.

Proposição 2.6. *Seja* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *um polinômio com coeficientes inteiros, ou seja* $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$*. Se* $p(x)$ *possui uma raiz* α *em* $\mathbb{Z}$ *então* α *deve ser um divisor de* a_0*.*

É fácil justificar essa proposição, mesmo no caso geral, bastando seguir os passos do exemplo. Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é uma raiz de $p(x)$, então

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Reescrevendo essa expressão, como no exemplo, resulta

$$\alpha\big(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + a_{n-2}\alpha^{n-3} + \cdots + a_2\alpha + a_1\big) = -a_0$$

e, como $a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + a_{n-2}\alpha^{n-3} + \cdots + a_2\alpha + a_1 \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que α é um divisor de $-a_0$, logo um divisor de a_0.

Exemplo 2.10. Determinemos, se existirem, as raízes inteiras do polinômio

$$p(x) = 3x^5 + 2x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 19x + 6.$$

Primeiramente, vemos que $a_0 = 6$ e que, então, as possibilidades para a(s) raiz(es) α inteira(s) de $p(x)$ são os divisores de 6, que são $-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -6$ e 6. Agora testamos esses valores em $p(x)$ (ou, então, podemos dividir $p(x)$ por $(x-\alpha)$), obtendo

$$p(1)\neq 0;\quad p(-1)\neq 0;\quad p(2)=0;\quad p(-2)\neq 0;$$
$$p(3)\neq 0;\quad p(-3)=0;\quad p(6)\neq 0;\quad p(-6)\neq 0.$$

Assim, vemos que as raízes inteiras de $p(x)$ são 2 e -3. Podemos tentar determinar, agora, se $p(x)$ possui raízes racionais. Seja $\dfrac{c}{d}$ um número racional com c e $d \neq 0$ números inteiros relativamente primos. Se $\dfrac{c}{d}$ for raiz de $p(x)$, teremos

$$p\left(\frac{c}{d}\right) = 3\cdot\frac{c^5}{d^5} + 2\cdot\frac{c^4}{d^4} - 16\cdot\frac{c^3}{d^3} + 8\cdot\frac{c^2}{d^2} - 19\cdot\frac{c}{d} + 6 = 0.$$

Multiplicando essa igualdade por d^5 obtemos

$$3c^5 + 2c^4d - 16c^3d^2 + 8c^2d^3 - 19cd^4 + 6d^5 = 0,$$

que tanto pode ser reescrito como

$$c\big(3c^4 + 2c^3d - 16c^2d^2 + 8cd^3 - 19d^4\big) = -6d^5 \tag{2.6}$$

quanto também como

$$\big(2c^4 - 16c^3d + 8c^2d^2 - 19cd^3 + 6d^4\big)d = -3c^5 \tag{2.7}$$

Como c e d são números inteiros relativamente primos, podemos concluir de (2.6) que c é divisor de 6 e, de (2.7), que d é divisor de -3. Logo, c pode ser $-1, -2, -3, -6, 1$, 2, 3 ou 6 e d pode ser $-1, -3, 1$ ou 3.

Desse modo, as possibilidades para $\dfrac{c}{d}$ são

$$-1,\ -2,\ -3,\ -6,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{3},\ \frac{3}{3},\ -\frac{6}{3},\ \frac{6}{3}$$

e, retirando as duplicidades, restam apenas

$$-1,\ -2,\ -3,\ -6,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}.$$

Observe que $-1, -2, -3, -6, 1, 2, 3$ e 6 já haviam aparecido antes, como candidatos a raízes inteiras de $p(x)$. Como já conhecemos as raízes inteiras de $p(x)$, que são 2 e -3, podemos concluir que os únicos possíveis números racionais não inteiros que têm chances de ser raízes de $p(x)$ são

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}.$$

Aplicamos, agora, o polinômio $p(x)$ nesses pontos, obtendo

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0, \quad p\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad p\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0.$$

Logo, $\dfrac{1}{3}$ é a única raiz racional não inteira de $p(x)$.

Se repetirmos esse argumento para o caso geral teremos o seguinte resultado.

Proposição 2.7. *Seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros, isto é, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Se c e $d \neq 0$ são números inteiros relativamente primos tais que $\dfrac{c}{d}$ é uma raiz de $p(x)$, então c é um divisor de a_0 e d é um divisor de a_n.*

Exemplo 2.11. Determinemos, se existirem, as raízes racionais do polinômio

$$p(x) = 6x^3 + 17x^2 + 11x + 2.$$

Pela proposição acima, sabemos que se $\frac{c}{d}$ é uma raiz de $p(x)$, então c é um divisor de 2, de modo que pode ser $-2, -1, 1$ ou 2, e d é um divisor de 6, de modo que pode ser $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ ou 6. Assim, as possibilidades para $\frac{c}{d}$ são

$$-2,\ 2,\ -1,\ 1,\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{6},\ \frac{2}{6},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{2},\ \frac{2}{2}$$

e, retirando as duplicidades, restam apenas

$$-2,\ 2,\ -1,\ 1,\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\,.$$

Note que podemos reduzir essas possibilidades pela metade, pois como o polinômio possui todos os coeficientes positivos, suas raízes só podem ser negativas; desse modo, só restam as possibilidades

$$-2,\ -1,\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\,.$$

Aplicando esses valores no polinômio, obtemos

$$p(-2) = p\left(-\frac{1}{3}\right) = p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

e

$$p(-1) \neq 0, \quad p\left(-\frac{1}{6}\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad p\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0.$$

Assim, as raízes racionais de $p(x)$ são -2, $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{2}$. Observe que, como o polinômio $p(x)$ tem grau 3, essas são todas as raízes de $p(x)$, e, portanto, podemos escrever

$$p(x) = 6 \cdot (x+2)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

2.8 – O SINAL DE UM POLINÔMIO

Em Cálculo, para estudar o comportamento de um polinômio e esboçar seu gráfico, é muito importante analisar o sinal do polinômio. No caso de polinômios lineares $p(x) = ax + b$, já vimos que trocam de sinal em sua raiz, que é dada por $\alpha = -\frac{b}{a}$.

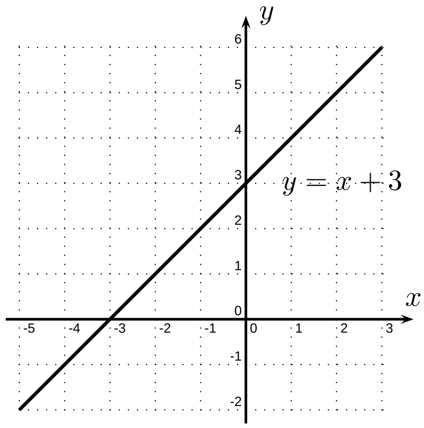
Exemplo 2.12. Determinar o sinal do polinômio $p(x) = x + 3$ de grau 1.

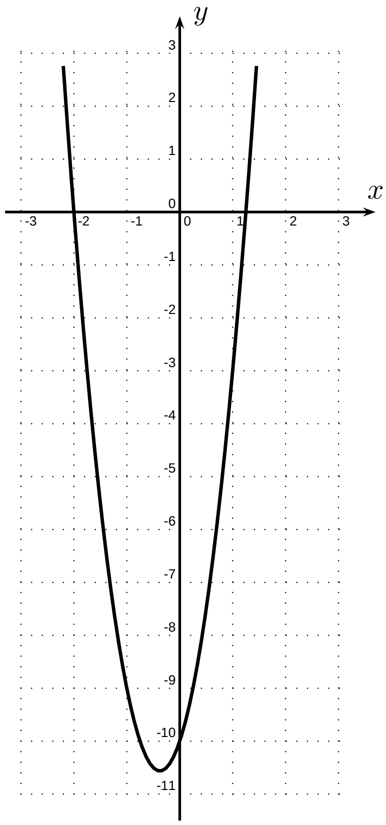
Se $p(x) = x + 3$, temos que $\alpha = -3$ é a raiz de $p(x)$ e sabemos que o sinal de $p(x)$ depende somente de $x > -3$ ou $x < -3$, conforme a figura dada. Nesse caso, é fácil resolver a desigualdade $x + 3 > 0$, que equivale a $x > -3$. Assim,

$$p\,(x) > 0 \text{ se } x \in (-3, +\infty)$$

e

$$p\,(x) < 0 \text{ se } x \in (-\infty, -3).$$





$p(x) = 4x^2 + 3x - 10$

Os polinômios de grau 2 também têm a mesma característica: quando trocam de sinal (embora isso nem sempre aconteça; confira na Seção 2.5), fazem isso em suas raízes.

Exemplo 2.13. Determinar o sinal do polinômio $p(x) = 4x^2 + 3x - 10$ de grau 2.

As raízes $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = \dfrac{5}{4}$ de $p(x)$ podem ser obtidas pela fórmula de Bhaskara. Como o coeficiente do termo em x^2 é $4 > 0$ sabemos, pela Seção 2.5, que o gráfico de $p(x)$ é como o dado na figura ao lado. Pelo gráfico, podemos concluir que $p\,(x) > 0$ se

$$x \in (-\infty, -2) \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

e $p\,(x) < 0$ se

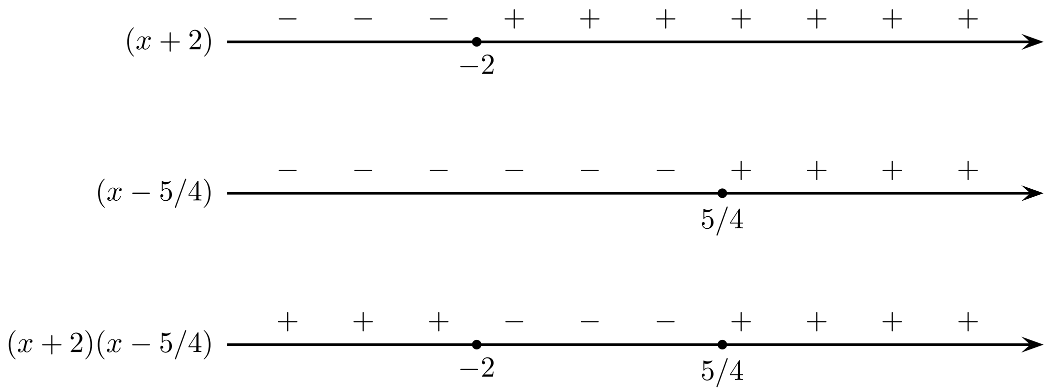
$$x \in \left(-2, \frac{5}{4}\right).$$

A diferença agora é que não podemos isolar o x na desigualdade $4x^2 + 3x - 10 > 0$, como o fizemos no exemplo precedente.

Uma outra maneira de determinar o sinal de $p(x)$ é utilizar a regra de sinais de um produto. Para isso, escrevemos $p(x)$ em termos de suas raízes, $p(x) = 4x^2 + 3x - 10 = 4\,(x+2)\big(x - \frac{5}{4}\big)$. Como $4 > 0$, temos que

$$p(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)\left(x - \frac{5}{4}\right) > 0.$$

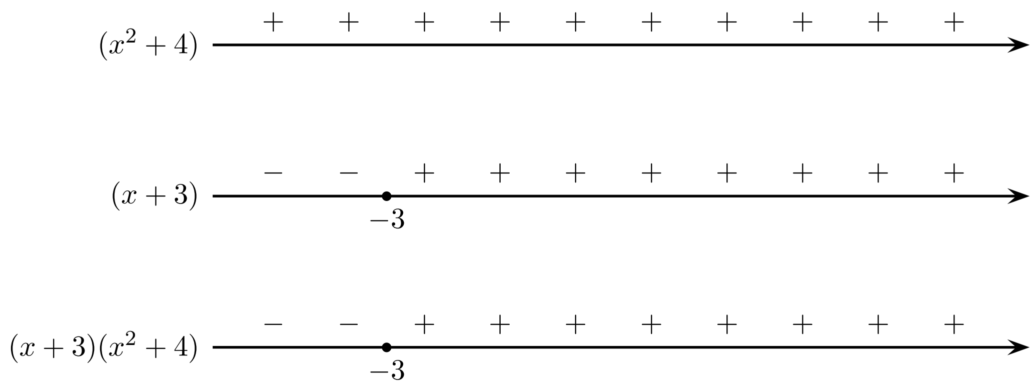
Agora, analisamos o sinal de cada fator linear separadamente e, depois, usamos a regra de sinais do produto, representada esquematicamente da seguinte maneira.



É claro que obtivemos o mesmo resultado que utilizando o gráfico, só que esse último procedimento pode ser generalizado, mesmo quando o polinômio tiver raízes complexas não reais, conforme veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.14. Determinar o sinal do polinômio de grau 3 dado por

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x+3)(x^2+4).$$



Desse modo, temos que

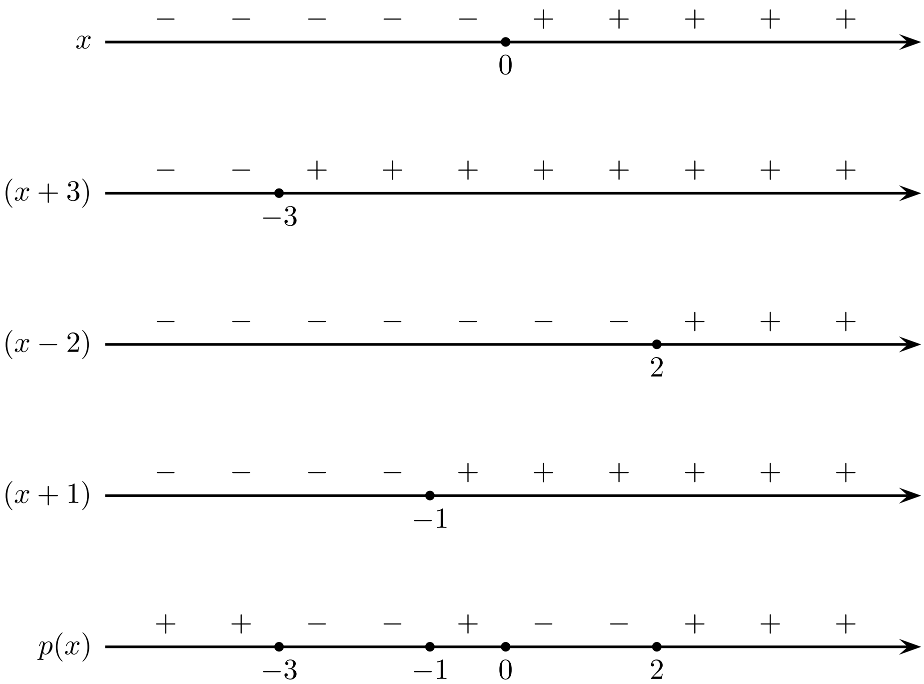
$$p(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -3) \quad \text{e} \quad p(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-3, +\infty)$$

Neste exemplo, $x^2 + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo, nesse caso, o sinal de $p(x)$ é o mesmo que o sinal de $x + 3$. Observe que um polinômio de grau 2 que não tem raízes reais não muda de sinal (ver Seção 2.5) e, portanto, é sempre ou positivo ou negativo.

Exemplo 2.15. Determinar o sinal do polinômio de grau 4 dado por

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x + 3)(x - 2)(x + 1).$$

Para determinar o sinal de $p(x)$ analisamos o sinal de cada fator linear e, depois, usamos a regra de sinais do produto, como no exemplo anterior.



Desse modo, temos que

$$p(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{e} \quad p(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-3, -1) \cup (0, 2).$$

Assim, para analisar o sinal de um polinômio, é fundamental conhecer sua fatoração.

Confira, agora, todos os exemplos de gráficos com translações que vimos anteriormente, e verifique se ocorrem trocas de sinais: observe que isso sempre ocorre nas raízes. Essa característica decorre do fato das funções polinomiais serem funções contínuas, ou seja, seus gráficos não tem saltos ou cortes (o conceito de continuidade será visto na disciplina de Cálculo). Podemos resumir nossas observações da maneira seguinte.

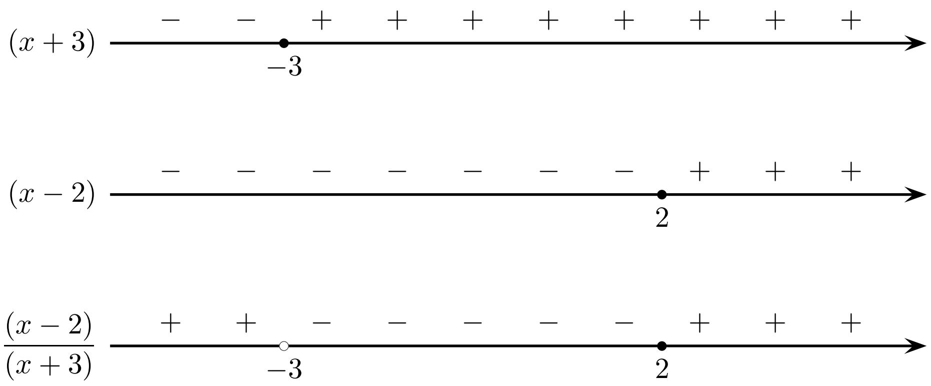
Proposição 2.8. *Uma função polinomial só pode trocar de sinal nas suas raízes.*

Entretanto, observe que uma função polinomial nem sempre troca de sinal numa raiz, por exemplo, $y = x^2$.

A regra de sinais utilizada nos exemplos anteriores também é válida para o quociente de polinômios.

Exemplo 2.16. Analisemos o sinal da função $Q(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$.

Observe que $Q(x)$ não está definida em $x = -3$.



Desse modo, temos que

$$Q(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{e} \quad Q(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-3, 2).$$

Uma observação importante e, também, interessante é que essa regra de sinais que utilizamos vale não só para produtos e quocientes de polinômios, mas também para produtos e quocientes de funções quaisquer.

Uma função como a do último exemplo é denominada *função racional*, ou seja, uma função racional é o quociente de dois polinômios. Como o polinômio constante 1 pode ser um denominador de tal quociente, vemos que os próprios polinômios estão incluídos entre as funções racionais. São exemplos de funções racionais,

$$Q_1(x) = \frac{5}{x-2}, \quad Q_2(x) = \frac{x^3-7x}{x^2-2}, \quad Q_3(x) = x^5 - 7x, \quad Q_4(x) = \frac{5x^4-4x^3}{2x^5-2x+8}.$$

Uma função racional é dita *própria* se o grau de seu numerador é menor que o grau de seu denominador; caso contrário, essa função racional é dita *imprópria*. Sempre podemos expressar uma função racional imprópria como uma soma de um polinômio com uma função racional própria (preservando-se o denominador da função imprópria); ver Exercício 2.13. Por esse resultado, é suficiente estudar as funções racionais próprias.

No Ensino Médio, aprendemos como reduzir frações a um mesmo denominador. Por exemplo, é fácil ver que

$$\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} = \frac{3(x-2)+5(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}.$$

A ideia, agora, é inverter esse processo e escrever uma dada fração como uma soma de frações, cada uma das quais tendo um denominador mais simples. Esse procedimento é denominado *decomposição em frações parciais* e é um dos métodos mais importantes para calcular integrais de funções racionais que você verá em Cálculo.

Vejamos, por exemplo, como partir do lado direito da expressão dada acima e chegar no lado esquerdo.

Exemplo 2.17. Determinemos a decomposição em frações parciais de $\dfrac{8x-1}{(x+1)(x-2)}$.

O objetivo é encontrar constantes A e B tais que

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}. \tag{2.8}$$

Ora, já sabemos que $A = 3$ e $B = 5$ mas, para entendermos o método, calcularemos A e B como se não soubéssemos seus valores. Somando as frações de (2.8), obtemos

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Assim, temos duas frações iguais com o mesmo denominador; decorre que essas frações também têm necessariamente o mesmo numerador e, portanto, temos a seguinte igualdade de polinômios.

$$8x-1 = A(x-2) + B(x+1) = (A+B)x + (-2A+B).$$

Resolvendo a igualdade de polinômios, chegamos ao sistema seguinte,

$$\begin{aligned} A + B &= 8 \\ -2A + B &= -1, \end{aligned}$$

cuja solução não é difícil de encontrar, $A = 3$ e $B = 5$. Assim, obtivemos a decomposição em frações parciais da nossa função racional, isto é,

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2}\,.$$

Exemplo 2.18. Determinemos a decomposição em frações parciais de

$$\frac{6x^2-24x-18}{(x-1)(x+2)(x-4)}\,.$$

Considere

$$\begin{aligned} \frac{6x^2-24x-18}{(x-1)(x+2)(x-4)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4} \\ &= \frac{A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-4)} \end{aligned}$$

Novamente, temos duas frações iguais com o mesmo denominador, portanto ambas também têm o mesmo numerador, de modo que chegamos à seguinte igualdade de polinômios.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 24x - 18 &= A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2) \\ &= A(x^2-2x-8) + B(x^2-5x+4) + C(x^2+x-2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-2A-5B+C)x + (-8A+4B-2C), \end{aligned}$$

que nos leva ao sistema seguinte,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 6 \\ -2A - 5B + C &= -24 \\ -8A + 4B - 2C &= -18. \end{aligned}$$

Somando as três linhas acima obtemos $-9A = -36$ e, portanto, $A = 4$. Substituindo o valor de A e subtraindo a primeira linha da segunda, obtemos $6B = 18$, ou seja, $B = 3$. Substituindo o valor de A e B na primeira linha, resulta que $C = -1$. Assim,

$$\frac{6x^2-24x-18}{(x-1)(x+2)(x-4)} = \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{x-4}.$$

Esse método vale para um número qualquer de fatores lineares distintos. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reais distintos e consideremos o polinômio

$$q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

e um polinômio não nulo $p(x)$, de grau menor do que n. Então existem números $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

A demonstração dessa afirmação é semelhante à resolução dos exemplos precedentes.

A afirmação que acabamos de apresentar tem um requisito importante: os fatores devem ser *lineares distintos*. E se não forem? Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.19. Determinemos a decomposição em frações parciais de

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)}.$$

Procuramos constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}.$$

Daqui em diante, procedemos da mesma maneira que nos exemplos anteriores. A partir do desenvolvimento

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$$

podemos verificar que são iguais os numeradores

$$\begin{aligned}
-4x^3 &+ 10x^2 - 3x + 3 \\
&= A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3 \\
&= A(x+2) + B(x^2 + x - 2) + C(x^3 - 3x + 2) + D(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\
&= (C + D)x^3 + (B - 3D)x^2 + (A + B - 3C + 3D)x + (2A - 2B + 2C - D),
\end{aligned}$$

o que nos leva ao sistema seguinte,

$$\begin{aligned}
C + D &= -4 \\
B - 3D &= 10 \\
A + B - 3C + 3D &= -3 \\
2A - 2B + 2C - D &= 3.
\end{aligned}$$

Substituindo a primeira e a segunda linhas na terceira e na quarta linhas, obtemos

$$\begin{aligned} A + 9D &= -25 \\ 2A - 9D &= 31. \end{aligned}$$

Somando essas linhas, obtemos $3A = 6$, ou seja, $A = 2$ e, então, $D = -3, B = 1$ e $C = -1$. Assim,

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-3}{x+2}.$$

Tente entender a generalização desse procedimento.

E se o polinômio do denominador tiver raízes complexas não reais? Espere por Cálculo!

2.10 – RAÍZES COMPLEXAS (Leitura complementar)

A Proposição 2.5 do final da Seção 2.6 diz que um polinômio $p(x)$ de grau n, com coeficientes reais, possui, no máximo, n raízes reais. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são todas as raízes reais distintas de $p(x)$, e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ suas respectivas multiplicidades, então podemos escrever

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdot (x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k} \cdot t(x),$$

onde t é uma função polinomial de grau $n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$, desprovida de raízes reais.

Agora vamos investigar essa função polinomial $t(x)$.

Voltando ao polinômio $p(x) = 2x^3 + 2 = (x+1)(2x^2 - 2x + 1)$ do Exemplo 2.8 e usando a fórmula de Bhaskara para $t(x) = 2x^2 - 2x + 1$, vemos que

$$\alpha_1 = \frac{2 + \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 + 2i}{4} = \frac{1+i}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{2 - \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 - 2i}{4} = \frac{1-i}{2},$$

são as raízes de $t(x)$. Assim, escrevemos,

$$p(x) = 2x^3 + 2 = 2(x+1)\Big(x - \frac{1+i}{2}\Big)\Big(x - \frac{1-i}{2}\Big).$$

De fato, o que se mostrou nesse exemplo vale em geral, sendo uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, como segue.

Teorema 2.9. *Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais e de grau $n \geq 1$, então $p(x)$ possui exatamente n raízes em $\mathbb{C}$.*

Olhando mais uma vez para o polinômio $p(x) = 2x^3 + 2$, vemos que suas raízes são $-1, \frac{1}{2}(1+i)$ e $\frac{1}{2}(1-i)$. Observe que as duas raízes complexas são conjugadas. Isso ocorre em geral.

Proposição 2.10. *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio com todos coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ reais. Se o número complexo $\alpha = a + bi$ for uma raiz de $p(x)$, então o complexo conjugado $\overline{\alpha} = a - bi$ de α também é uma raiz de $p(x)$.*

Podemos justificar essa afirmação do seguinte modo. Como $\alpha = a + bi$ é raiz de $p(x)$, temos

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$

e, portanto,

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} = \overline{0}.$$

Usando que o conjugado da soma é a soma dos conjugados, obtemos

$$\overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \overline{a_{n-2}\alpha^{n-2}} + \cdots + \overline{a_2\alpha^2} + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

e usando que o conjugado do produto é o produto dos conjugados, resulta

$$\overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha}^{n-1} + \overline{a_{n-2}} \cdot \overline{\alpha}^{n-2} + \cdots + \overline{a_2} \cdot \overline{\alpha}^2 + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

Finalmente, usando que o conjugado de um número real é ele mesmo, concluímos que

$$a_n \cdot \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \cdot \overline{\alpha}^{n-1} + a_{n-2} \cdot \overline{\alpha}^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot \overline{\alpha}^2 + a_1 \cdot \overline{\alpha} + a_0 = 0.$$

Assim, $p(\overline{\alpha}) = 0$, ou seja, $\overline{\alpha}$ também é raiz de $p(x)$.

Como consequência, temos que, num polinômio com coeficientes reais, as raízes complexas que não são reais aparecem conjugadas, aos pares, de modo que o número total dessas raízes é, sempre, um número par. Em particular, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.11. *Todo polinômio com coeficientes reais de grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real.*

Exemplo 2.20. Sem efetuar qualquer cálculo, já podemos afirmar que o polinômio

$$p(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 7x + 1$$

possui, pelo menos, uma raiz real.

Continuando, se $\alpha = a + bi$ é um número complexo, com $a, b \in \mathbb{R}$, e $\overline{\alpha} = a - bi$, então o polinômio $f(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ tem coeficientes reais. De fato,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = \big(x-(a+bi)\big)\big(x-(a-bi)\big) \\ &= x^2 - x(a-bi) - x(a+bi) + (a+bi)(a-bi) \\ &= x^2 + (-a+bi-a-bi)x + (a^2 - abi + abi - b^2i^2) \\ &= x^2 - 2ax + (a^2+b^2). \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser utilizado para fatorar polinômios, pois, se $\alpha = a + bi$ é raiz de um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais, então $\overline{\alpha} = a - bi$ também é raiz e, portanto,

$$p(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\,g(x) = f(x)\,g(x),$$

onde $f(x)$ é o polinômio de grau 2 obtido acima.

Exemplo 2.21. As raízes do polinômio $p(x) = x^4 + 1$ satisfazem a equação $x^4 = -1$. Como todo número real elevado a uma potência par é sempre positivo, ou zero, temos que as quatro raízes de $p(x)$ são complexas, sendo duas a duas conjugadas. Pela observação acima, sabemos que $p(x) = f(x)\,g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios de grau 2. Como o coeficiente de x^4 em x^4+1 é 1, podemos escolher $f(x)$ e $g(x)$ com essa mesma propriedade, isto é, podemos supor que seus coeficiente de x^2 sejam iguais a 1. Nesse caso, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$x^4 + 1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

Como

$$\begin{aligned} &(x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \\ &\qquad = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd \\ &\qquad = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} x^4+1 &= (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \\ &= x^4 + (a+c)x^3 + (d+ac+b)x^2 + (ad+bc)x + bd. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau somos levados ao seguinte sistema.

$$\begin{aligned} a+c &= 0 && \text{coeficiente do termo } x^3 \\ ac+b+d &= 0 && \text{coeficiente do termo } x^2 \\ ad+bc &= 0 && \text{coeficiente do termo } x \\ bd &= 1 && \text{termo independente} \end{aligned}$$

Da primeira equação obtemos $a = -c$. Substituindo nas demais equações, resulta o sistema

$$-a^2 + b + d = 0 \tag{2.9}$$
$$ad - ab = 0 \tag{2.10}$$
$$bd = 1 \tag{2.11}$$

Como $ad - ab = a(d - b)$, vemos que (2.10) é equivalente a $a(d - b) = 0$ e, portanto, $a = 0$ ou $d = b$. Se $a = 0$, substituindo em (2.9) obtemos $d + b = 0$, ou seja, $b = -d$. Substituindo em (2.11), obtemos $b^2 = -1$, mas, como procuramos coeficientes reais, essa solução não serve.

Assim, $a \neq 0$ e, portanto, $b = d$. Substituindo em (2.10) e (2.11), obtemos $a^2 = 2b$ e $b^2 = 1$. Se $b = -1$, então $a^2 = -2$ e isso, novamente, não nos serve, por não possuir solução em $\mathbb{R}$. Desse modo, estabelecemos que $b = d = 1$ e, portanto, $a^2 = 2$. Logo, $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2},$.

Como $a = -c$, se $a = \sqrt{2}$, temos $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ e, se $a = -\sqrt{2}$, temos $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$. Vemos que, nos dois casos temos a mesma decomposição de $x^4 + 1$. Assim,

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

e, se você quiser determinar as raízes complexas desse polinômio, basta aplicar a fórmula de Bhaskara nos dois fatores encontrados.

Concluímos esta seção com uma proposição que descreve o polinômio $t(x)$ da Proposição 2.5, a saber, que $t(x)$ sempre pode ser fatorado em potências de fatores quadráticos.

Proposição 2.12. *Seja $p(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes reais. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ todas suas raízes reais distintas, com respectivas multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Então existem $s, m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ e $a, a_1, \ldots, a_s, b_1 \ldots, b_s, \in \mathbb{R}$ tais que*

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k}\, t(x),$$

com

$$t(x) = a(x^2 + a_1x + b_1)^{m_1}(x^2 + a_2x + b_2)^{m_2} \cdots (x^2 + a_sx + b_s)^{m_s}.$$

Exemplo 2.22. Temos

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x - 3 \\ &= 3(x-1)\,(x^4 + 2x^2 + 1) = 3(x-1)\,(x^2+1)^2. \end{aligned}$$

Observamos que, embora esses fatores tenham sua existência assegurada pela proposição, sua efetiva determinação para polinômios específicos dados ainda pode dar muito trabalho, sendo objeto de estudo até hoje.

Exercício 2.1. Faça o esboço do gráfico das funções polinomiais abaixo usando translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões, conforme necessário.

a) $f(x) = x^3 - 8$ b) $f(x) = (x+3)^4$

c) $f(x) = (x-1)^5 - 4$ d) $f(x) = 5(x-2)^6$

e) $f(x) = -3(x + \frac{1}{2})^3 + 5$

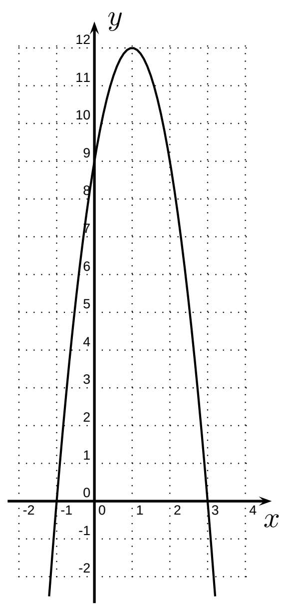
Exercício 2.2. Faça o esboço do gráfico das parábolas abaixo usando translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões, conforme necessário.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 3$

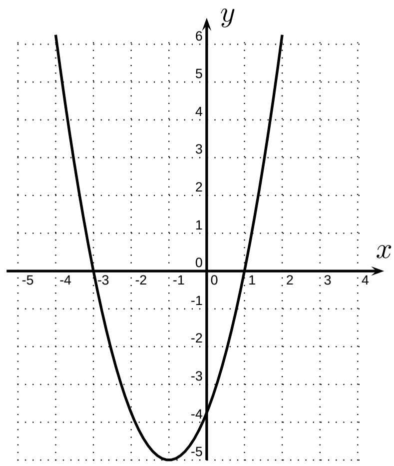
c) $f(x) = 5 - 6x - x^2$ d) $f(x) = 2x^2 + 8x + 10$

Exercício 2.3. Determine as expressões das parábolas cujos gráficos, dados ao lado e a seguir, foram obtidos através de translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões do gráfico de $y = x^2$.

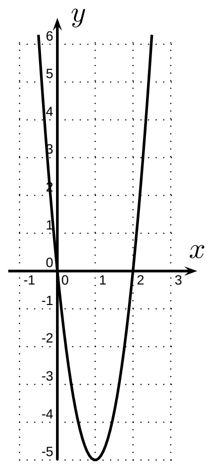
c)



a)

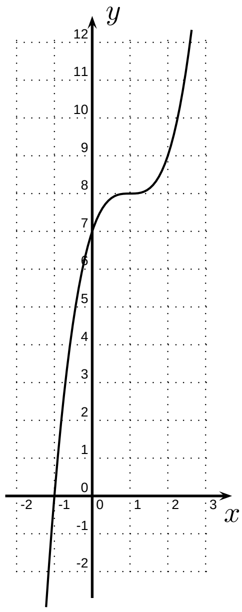


b)

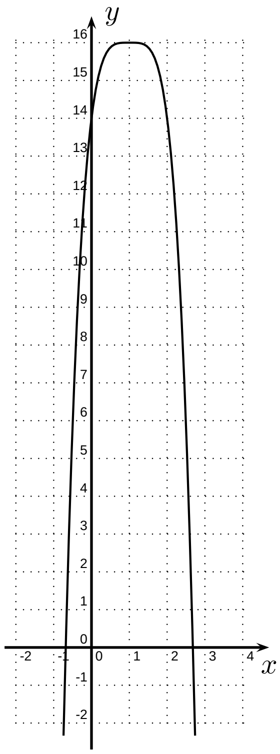


Exercício 2.4. Determine a expressão da função polinomial $p(x)$ cujo gráfico, dado a seguir, foi obtido através de translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões dos gráficos das funções $g(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$.

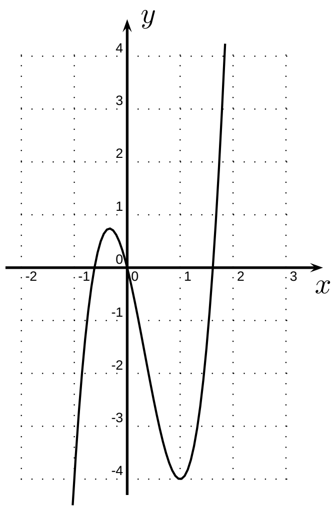
a)



b)



Exercício 2.5. O gráfico do polinômio $p(x) = 4x^3 - 4\ x^2 - 4x$ é dado ao lado. Faça um esboço do gráfico dos polinômios definidos a seguir.



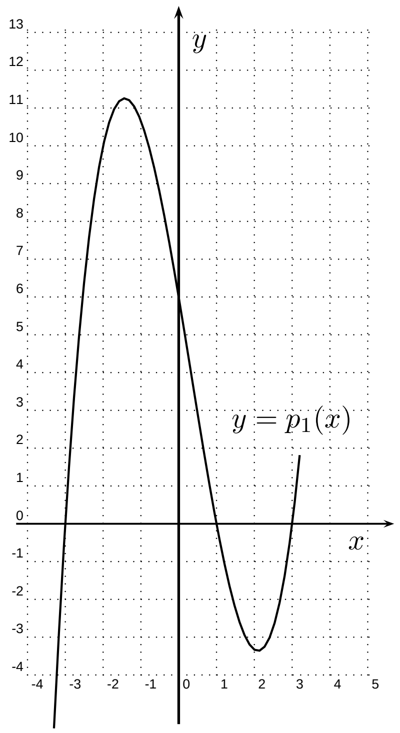
a) $p_1(x) = p(x) + 4$ e determine suas raízes.

b) $p_2(x) = p(x) + 6$. Quantas raízes reais $p_2(x)$ possui?

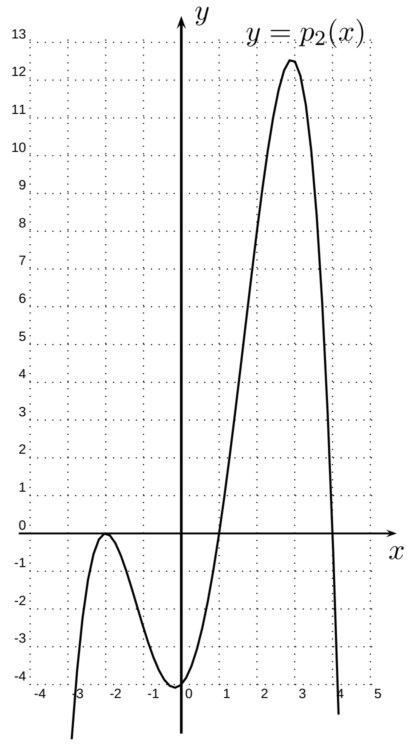
c) $p_3(x) = p(x) - 3$. Quantas raízes reais $p_3(x)$ possui?

Exercício 2.6. Determine a expressão do polinômio de grau mínimo cujo gráfico é dado na figura.

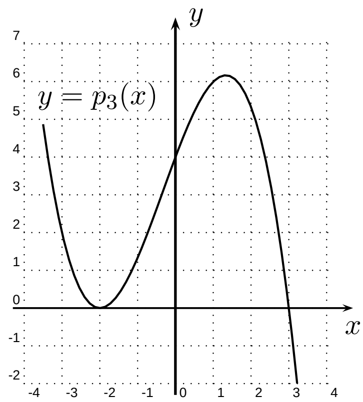
a)



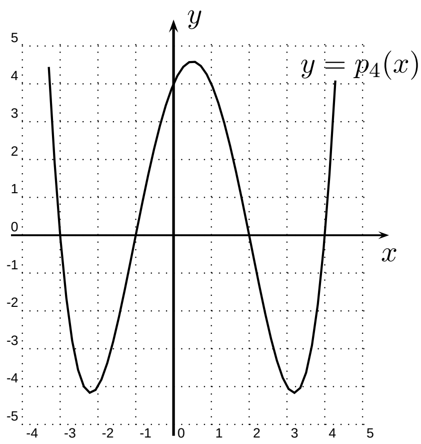
b)



c)



d)



Exercício 2.7. Determine o quociente e o resto na divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

a) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 20x + 4$ e $g(x) = x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = 10x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 8x^2$ e $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 17x - 6$

Exercício 2.8. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 20x^2 + 4$ e $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x$ e $g(x) = x - 3$

c) $f(x) = x^6 + 3x^4 + x^2$ e $g(x) = x - \sqrt{5}$

d) $f(x) = 3x^7 + 5x^5 + 2x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = x - i$

Exercício 2.9. Fatore completamente os polinômios dados a seguir.

a) $x^3 + x^2 - 17x + 15$

b) $3x^4 + 18x^3 - 27x^2 - 42x$

c) $10x^5 + 27x^4 - 10x^3 - 3x^2$

d) $3x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 2x^2 - 17x - 6$

e) $4x^4 + 3x^2 - 1$

f) $9x^5 - 51x^4 + 94x^3 - 74x^2 + 25x - 3$

Exercício 2.10. Determine todos os valores reais de x que satisfazem as desigualdades dadas.

a) $x^2 - 5 < 0$

b) $4 - x^2 > 0$

c) $x^2 - 5x + 6 > 0$

d) $4x^4 - 64 < 0$

e) $x^3 - 2x^2 + x < 0$

f) $x^3 - x^2 - 22x + 40 > 0$

g) $2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2 > 0$

h) $3x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2 < 0$

i) $(x^2 + 4)(-x^2 - x - 1) < 0$

j) $(2x^2 + x + 5)(x^2 + x + 1) < 0$

Exercício 2.11. Tente justificar a afirmação da Proposição 2.7.

Exercício 2.12. Estude o sinal das funções racionais seguintes.

a) $\dfrac{x - 2}{x^2 + 3}$

b) $\dfrac{2x - 5}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\dfrac{2x^2 - 10x + 12}{x^3 + 4x}$

d) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 + x^2}$

Exercício 2.13. Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ com $g(x) \neq 0$ e $\partial f > \partial g$, temos que a função racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (imprópria) pode ser reescrita como a soma de um polinômio com uma função racional *própria*, cujo grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Para determinar esses polinômios, fazemos a divisão de $f(x)$ por $g(x)$ e encontramos os polinômios $q(x) \neq 0$ e $r(x)$ tais que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $\partial r < \partial g$. Agora é só substituir na função racional,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot q(x) + r(x)}{g(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot q(x)}{\cancel{g(x)}} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Utilize esse procedimento para reescrever as funções racionais seguintes como somas de polinômios com funções racionais próprias.

a) $\dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 + 3}$

b) $\dfrac{3x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\dfrac{x^6 - 5x^4 + 2x^2}{x^3 + 4x}$

d) $\dfrac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 5}{x^3 + 2x^2 + x}$

Exercício 2.14. Faça a decomposição em frações parciais das seguintes funções racionais.

a) $\dfrac{8x + 4}{x^2 + 4x - 5}$

b) $-\dfrac{x^3 - 5x^2 + 22x + 18}{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8}$

c) $\dfrac{9x^2 - 4x + 3}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$

d) $\dfrac{x^3 + 5x^2 - x + 3}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Nos Exercícios 2.15 e 2.16 utilizamos o conceito de velocidade média, como segue.

Em Cinemática, um conceito importante é o de *velocidade* de uma partícula em movimento retilíneo. Se uma partícula tem sua posição no instante t dada por $p(t)$, a *velocidade média* $v_{\{t_1,t_2\}}$ entre um tempo inicial t_1 e um tempo final t_2, distinto de t_1, é definida por

$$v_{\{t_1,t_2\}} = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Com o conceito de derivada, que desenvolveremos na disciplina de Cálculo, poderemos definir também a *velocidade instantânea* da partícula, como um *limite* dessas velocidades médias quando $t_2 - t_1$ *tende* a 0.

Exercício 2.15. Uma partícula em movimento retilíneo tem sua posição, no instante t, dada por

$$p(t) = \frac{t^3 - 5t^2 + 6t}{t^2 + 1}, \qquad \text{para } t \geq 0.$$

Determine

a) os instantes em que $p(t) = 0$;

b) os intervalos de tempo nos quais a partícula encontra-se à direita de zero e aqueles nos quais encontra-se à esquerda de zero;

c) a velocidade média $v_{\{2,t\}}$ entre o tempo inicial 2 e o tempo final t;

d) os valores de $t \geq 0$ para os quais $v_{\{2,t\}} \leq 0$ e aqueles onde $v_{\{2,t\}} > 0$.

e) o que ocorre com $v_{\{2,t\}}$, à medida que t se aproxima de 2?

Exercício 2.16. As partículas A e B movimentam-se em linha reta; no instante t, a partícula A encontra-se na posição $p_A(t) = t^3 - t^2$ e a partícula B na posição $p_B(t) = t^3 - 2t$.

a) Encontre a posição de cada uma delas no instante $t = 1$.

b) Encontre a velocidade média de cada uma delas entre os tempos $t = 1$ e $t = x$, que denotaremos por $v_{A\{1,x\}}$ e $v_{B\{1,x\}}$, respectivamente.

c) Determine os valores de x para os quais $v_{A\{1,x\}} \geq v_{B\{1,x\}}$.

d) À medida que x se aproxima de 1, o que ocorre com as velocidades $v_{A\{1,x\}}$ e $v_{B\{1,x\}}$? Dê uma interpretação para os valores encontrados.

e) Resolva o mesmo problema substituindo $t = 1$ por $t = 3$.

Exercício 2.17. Após s minutos do início de uma reação química, a temperatura da mistura resultante é dada por $T(s) = s^4 - 4s^3 + 7s^2 - 16s + 12$, para $s \geq 0$.

a) Determine os valores de $s > 0$ para os quais $T(s) = 0$.

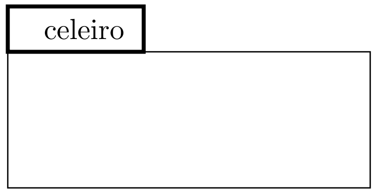
b) Determine quando a temperatura é negativa.

Exercício 2.18. Um campo será delimitado no formato de um retângulo. Determine as dimensões do campo de área máxima que poderá ser cercado utilizando 100 m lineares de cerca.

Exercício 2.19. Mostre que, dentre todos retângulos de perímetro p, o que possui maior área é o quadrado.

Observação: Este problema é um modelo matemático que generaliza o anterior e, uma vez resolvido, dá as soluções para todos os possíveis valores do perímetro.

Exercício 2.20. Um fazendeiro tem 500 m lineares de tela para cercar um terreno retangular. Um celeiro de 20 m de largura será usado como parte da cerca, conforme a figura ao lado. Determine as dimensões do terreno de área máxima que poderá ser cercado.



Exercício 2.21. Um terreno retangular deverá ser cercado de modo que dois lados opostos recebam uma cerca reforçada, que custa R\$ 5,00 por metro, enquanto que os outros dois lados receberão uma cerca padrão que custa R\$ 3,00 por metro. Determine as medidas dos lados do terreno de maior área com estas características, sabendo que custo total para cercá-lo será de R\$ 8.000,00.

2.11.1 – EXERCÍCIOS da SEÇÃO 2.10 (Leitura Complementar)

Exercício 2.22. Determine um polinômio com coeficientes reais de grau 3 que admita 2 e $2-i$ como raízes. Quantos polinômios desses existem?

Exercício 2.23. Construa um polinômio com coeficientes reais de grau 5 com

a) apenas uma raiz real;

b) apenas uma raiz real e que tenha multiplicidade 1;

c) apenas uma raiz real e que tenha multiplicidade 3.

É possível construir um polinômio com coeficientes reais de grau 5 que possui apenas uma raiz real e que tenha multiplicidade 2? Porquê?