UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DA MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ROSEANE NUNES GARCIA DE SOUZA

ABORDAGEM DE FRAÇÕES EQUIVALENTES: UMA EXPERIÊNCIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

PORTO ALEGRE
2019

ROSEANE NUNES GARCIA DE SOUZA

ABORDAGEM DE FRAÇÕES EQUIVALENTES: UMA EXPERIÊNCIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Cydara Cavedon Ripoll

PORTO ALEGRE/RS
2019

AGRADECIMENTOS

À professora Dra. Cydara Cavedon Ripoll, minha orientadora, por todos os ensinamentos, paciência, amizade, comprometimento, extrema competência e dedicação durante toda minha caminhada no curso de mestrado. Pessoa notável e incansável sempre disposta a dar um olhar cuidadoso ao meu trabalho. Agradeço pela sua orientação, por todos os nossos encontros, diálogos e pela rica convivência. Muito obrigada, Cydara.

Aos professores do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UFRGS, que acompanharam e enriqueceram minha caminhada durante esse período.

Aos colegas da turma de mestrado, pelo convívio, companheirismo e por todas as trocas de experiências que contribuíram ainda mais para a minha formação.

Aos colegas e amigos que são presentes que o mestrado me propiciou, Bernarda, Dani, Priscila, Carlos, Daiana, Diogo, Débora e Franciele, por toda amizade, horas de estudo, companhia em eventos pelo país e pelas trocas durante nossa caminhada. Vocês são demais!!!!!

À minha colega e amiga Daiana Fischer por todo apoio e ajuda na reta final desse trabalho. Obrigada Daiana.

À Prof. Kellen Vieceli, diretora da E.M.E.F. São Pedro, a gentileza de abrir espaço para o meu estágio supervisionado.

À Cássia Farias, professora titular da turma onde realizei minha implementação, mas antes disso, minha amiga e comadre querida. Obrigada por todo apoio, paciência e dedicação no desenvolvimento do meu estágio.

Aos alunos da turma B32 pela participação e recepção à minha proposta.

Aos meus colegas do Neeja Menino Deus, em especial ao Diretor Cesar Milheiro por toda compreensão e apoio ao longo dessa caminhada.

Aos meus pais e minha família que sempre me propiciaram suporte e acolhimento e souberam entender meus momentos de ausência, na busca por conhecimento. Obrigada Pai, mãe e família.

Ao Francis por seu apoio, incentivo e por me fazer perceber que esta conquista seria possível.

À minha filha Helena responsável por me dar força e energia para retomar os estudos após 19 anos graduada. Incrível como a maternidade nos torna mais forte. Te amo minha filha.

À minha filha Heloíse que me surpreendeu com sua chegada, pois descobri que estava grávida na primeira semana de aula do mestrado. Obrigada por ser esse anjo doce e tranquilo na minha vida. Te amo minha filha!

À minha funcionária e também amiga Ione, por sua dedicação, carinho e amor incondicional as minhas filhas. Sem teu apoio esse trabalho não se realizaria. Muito Obrigada Ione!

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma discussão sobre o ensino de frações baseado na ideia "elementar" na matemática de relação de equivalência. Apresenta uma construção dos números racionais pela ciência matemática e discute sua relação com a escola, chegando à questão de pesquisa que versa sobre a viabilidade de demonstrar-se com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental a proposição que aqui é referida como Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes e de aplicar a técnica utilizada nessa demonstração na comparação, na adição e na subtração de frações, buscando assim dar mais significado a estes conceitos. Para comprovar o diferencial da proposta, foi feita uma leitura crítica de livros didáticos que são ou foram adotados em escolas públicas, que é aqui relatada. A pesquisa inclui relato e análise de uma proposta de ensino de frações em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental focando na equivalência de frações, fundamentada na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, tanto para a elaboração como para a análise de sua implementação. Os registros da experimentação permitiram validar a viabilidade da demonstração do Teorema com ou por estudantes de um 6º ano.

Palavras chave: Frações. Frações equivalentes. Caracterização de frações equivalentes.

ABSTRACT

This work includes a discussion on the teaching of fractions based on the "elementary" idea of equivalence relation in mathematics. It includes also a construction of the rational numbers in Mathematics and discusses its relationship with the school, presenting a research question that deals with the viability of demonstrating with students in the 6th year of Elementary School the proposition that in this work is referred to as the Characterization Theorem of Equivalent Fractions and of applying the technique used in its proof on the comparison, addition and subtraction of fractions, thus seeking to give more meaning to those concepts. In order to confirm the relevance of this work, a critical reading of textbooks that are or have been adopted in public schools was made and is reported. The research includes the report and analysis of sequence of activities for teaching fractions in a sixth grade class of Elementary School focusing on the equivalence of fractions, based on Duval's Semiotic Representation Records Theory, both for the elaboration and analysis of its implementation. The experimentation records allowed to validate the viability of demonstrating the Theorem with or by 6th graders.

Keywords: *Fractions Equivalent fractions. Characterization of equivalent fractions.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Recorte de livro didático de 6º ano – Manual do Professor 32
Figura 2 – Recorte de livro didático de 5º ano 33
Figura 3 – Recorte de livro didático de 5º ano 34
Figura 4 – Recorte de livro didático de 6º ano 35
Figura 5 – Recorte de livro didático de 6º ano 35
Figura 6 – Recorte de livro didático de 6º ano 36
Figura 7 – Possibilidades de respostas para a questão da Figura 6 37
Figura 8 – Recorte de livro didático de 6º ano 38
Figura 9 – Recorte de livro didático de 6º ano 39
Figura 10 – Recorte de livro didático de 6º ano 39
Figura 11 – Recorte de livro didático de 6º ano 40
Figura 12 – Recorte de livro didático de 6º ano 41
Figura 13 – Detalhamento de 2 unidades dividida em três partes iguais 41
Figura 14 – Sugestão de “dobras” realizadas em uma folha para representar $\frac{2}{3}$ 42
Figura 15 – Recorte de livro didático de 6º ano 43
Figura 16 – Recorte de livro didático de 6º ano 44
Figura 17 – Recorte de livro didático de 6º ano 45
Figura 18 – Recorte de livro didático de 5º série/6º ano 46
Figura 19 – Recorte de livro didático de 6º ano 46
Figura 20 – Representações retangular e circular das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$: São essas frações equivalentes? 47
Figura 21 – Recorte de livro didático de 6º ano 47
Figura 22 – Recorte de livro didático de 6º ano 48
Figura 23 – Recorte de livro didático de 6º ano 49
Figura 24 – Recorte de livro didático de 6º ano 50
Figura 25 – Recorte de livro didático de 6º ano 50
Figura 26 – Recorte de livro didático de 6º ano 51
Figura 27 – Recorte de livro didático de 6º ano 51
Figura 28 – Recorte de livro didático de 5º ano 52
Figura 29 – Recorte de livro didático de 4º ano 53
Figura 30 – Recorte de livro didático de 5º ano 53
Figura 31 – Recorte de livro didático de 6º ano, comparando frações unitárias. 54

Figura 32 – Recorte de livro didático de 6º ano, comparando frações unitárias 55
Figura 33 – Recorte de livro didático de 6º ano, comparando frações (próprias e impróprias) com a unidade 55
Figura 34 – Recorte de livro didático de 6º ano, ilustrando equivalência para comparar frações 56
Figura 35 – Recorte de livro didático de 6º ano, envolvendo apreensão perceptiva para a realização 56
Figura 36 – Recorte de livro didático de 6º ano, envolvendo frações equivalentes 57
Figura 37 – Recorte de livro didático de 6º ano, envolvendo comparação de frações, onde as unidades são diferentes 57
Figura 38 – Recorte de livro didático de 6º ano enfatizando o mínimo múltiplo comum........ 59
Figura 39 – Recorte de livro didático de 6º ano justificando a impossibilidade de somar numeradores de frações de denominadores diferentes 60
Figura 40 – Recorte de livro didático de 6º ano com soma de frações de mesmo denominador, na reta numérica.. 60
Figura 41 – Recorte de livro didático de 6º ano com soma de frações de denominadores diferentes, na reta numérica 61
Figura 42 – Recorte de livro didático de 6º ano 62
Figura 43 – Representação pictórica para $\frac{3}{5}$ de bolo (a) e para $\frac{7}{5}$ de bolo (b).......................... 80
Figura 44 – Atividade proposta por Valio para trabalhar frações equivalentes 82
Figura 45 – Atividade aplicada por Valio para trabalhar frações equivalentes....................... 83
Figura 46 – Material disponível para os alunos para a realização da Atividade 1 98
Figura 47 – Exemplos de algumas das diferentes representações de $\frac{1}{4}$ do retângulo, propostas pelos alunos 99
Figura 48 – Material do estojo de frações e pizzas, ambos confeccionado em E.V.A............. 99
Figura 49 – Manipulando os discos de E.V.A. durante a Atividade 3 100
Figura 50 – Desenvolvimento da atividade 7 feita por um dos grupos 103
Figura 51 – Desenvolvimento da Atividade 8, feita por um aluno.. 104
Figura 52 – Desenvolvimento da Atividade 8, itens (b) e (c), feita por uma aluna................ 105
Figura 53 – Desenvolvimento da Atividade 8, feita por uma aluna 105
Figura 54 – Grupo desenvolvendo Atividade 9, itens (a) e (b). 106
Figura 55 – Proposta inicial da tabela, construída no quadro.. 107
Figura 56 – Aluno desenvolvendo Atividade 10, representando o total de pizza consumido

pelo Grupo 1, a saber, $\frac{7}{8}$ de pizza 111

Figura 57 – Representações feitas pelos alunos para a fração $\frac{7}{8}$ 111

Figura 58 – Alunos desenvolvendo possibilidade de equipartição em coração e em triângulos 112

Figura 59 – Desenvolvimento do item (d) que envolve fração imprópria 113

Figura 60 – Desenvolvimento do item (f) realizado no quadro utilizando representação pictórica 114

Figura 61 – Representação utilizando o método Modelo de Barras 114

Figura 62 – Representação utilizando o Modelo de Barras 115

Figura 63 – Representação feita no quadro, utilizando o modelo de barras para a representar a fração $\frac{12}{16}$ 115

Figura 64 – Relacionando os resultados das divisões aos termos da fração 116

Figura 65 – Resolução da Atividade 13 116

Figura 66 – Exemplo de resposta à Atividade 13 dada por uma aluna 117

Figura 67 – Desenvolvimento da Atividade 15, item *(c)*, feita em conjunto com a turma 118

Figura 68 – Desenvolvimento da Atividade 15, item *(c)*, conforme orientação de uma das alunas, sem utilizar representação pictórica 118

Figura 69 – Desenvolvimento da Atividade 15, item (a) 118

Figura 70 – Resolução dada por um estudante para a Atividade 16, item *(a)*. 119

Figura 71 – Desenvolvimento do tema (Atividade 16, item (a)) 120

Figura 72 – Desenvolvimento da Atividade 16, item (a) 121

Figura 73 – Desenvolvimento da Atividade 16, item (b) 121

Figura 74 – Desenvolvimento da Atividade 16, item (c) 122

Figura 75 – Desenvolvimento da atividade 16, item (d) 122

Figura 76 – Tentativa de desenvolver a Atividade 16, item (d), por uma aluna 123

Figura 77 – Fotos dos temas (Atividade 17) 124

Figura 78 – Desenvolvimento da Atividades 17, item (i) 124

Figura 79 – Desenvolvimento da Atividades 17, item (ii) 125

Figura 80 – Desenvolvimento da Atividade 19, utilizando representação pictórica 127

Figura 81 – Fechamento da Atividade 19 128

Figura 82 – Desenho feito no quadro pela “F”, referente ao item (c) da Atividade 21 129

Figura 83 – Desenvolvimento da Atividade 21, sobre a bandeira (D) 130

Figura 84 – Desenvolvimento da Atividade 22 131

Figura 85 – Divisão proposta por uma aluna, na resolução do item *(b)* da Atividade 23 133
Figura 86 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 1 133
Figura 87 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 2 133
Figura 88 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 3 134
Figura 89 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 4 134
Figura 90 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(a)* da Atividade 23 – parte 1 135
Figura 91 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(a)* da Atividade 23 – parte 2 135
Figura 92 – Registro feito no meu caderno de campo, semelhante ao realizado no quadro para desenvolver o item *(c)* da Atividade 23 – parte 1 136
Figura 93 – Registro feito no meu caderno de campo, semelhante ao realizado no quadro para desenvolver o item *(c)* da Atividade 23 – parte 2 136
Figura 94 – Registro feito no meu caderno de campo, semelhante ao realizado no quadro para desenvolver o item *(c)* da Atividade 23 – parte 3 136
Figura 95 – Exemplos de comparação de frações de mesmo denominador 138
Figura 96 – Desenvolvimento da Atividade 25, realizada no quadro 140
Figura 97 – Representando a resposta 141
Figura 98 – Representando a resposta 141
Figura 99 – As duas representações 142
Figura 100 – Desenvolvimento da Atividade 26, realizada no quadro 143
Figura 101 – Desenvolvimento da Atividade 26, realizada no quadro 143
Figura 102 – Desenvolvimento da Atividade 26, utilizando subdivisões na mesma direção 144
Figura 103 – Desenvolvimento da Atividade 26 utilização subdivisões na horizontal e na vertical 145
Figura 104 – Desenvolvimento da Atividade 28, feita como tema por uma aluna 147
Figura 105 – Resposta incompleta, apenas com a representação das frações no método pictórico de barras 147
Figura 106 – Resposta incorreta, com frações transformadas em mesmo denominador, no caso 54, mas com erro no numerador 148

Figura 107 – Desenvolvimento da Atividade 28, feita no quadro, em conjunto com a turma 149
Figura 108 – Comparando as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ (Desenvolvimento da atividade 28 entregue impressa aos alunos) 150
Figura 109 – Desenvolvimento da Atividade 29 152
Figura 110 – Planejamento, no meu caderno de campo, da demonstração usando notação genérica de fração - parte 1 154
Figura 111 – Registro no quadro da representação $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ mencionada pelos estudantes 155
Figura 112 – Desenvolvimento, feito no quadro, da comparação entre $\frac{13}{4}$ e $\frac{9}{4}$ 156
Figura 113 – Representação pictórica das frações $\frac{15}{2}$ e $\frac{15}{7}$ 157
Figura 114 – Desenvolvimento da Atividade 30, item *(c)*, feito no quadro 158
Figura 115 – Desenvolvimento da Atividade 30, itens *(d), (e)* e *(f)*, feita com uso da caracterização das frações equivalentes 159
Figura 116 – Desenvolvimento da Atividade 30, item *(g)* 159
Figura 117 – Desenvolvimento no quadro, da Atividade 32, item (a) 161
Figura 118 – Desenvolvimento no quadro, da Atividade 32, itens (b) e (c) 162
Figura 119 – Desenvolvimento da Atividade 32, item (d), feito no quadro 162
Figura 120 – Desenvolvimento da Atividade 32’ 163
Figura 121 – Desenvolvimento da Atividade 32’, utilizando representação pictórica 164
Figura 122 – Desenvolvimento no meu caderno de campo, de três resoluções diferentes da Atividade 32’. 165
Figura 123 – Desenvolvimento da Atividade 32’, resolvida de duas maneiras 165
Figura 124 – Desenvolvimento da Atividade 32’, de uma terceira forma 166
Figura 125 – Comparação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$, realizada no quadro 167
Figura 126 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(a)* 167
Figura 127 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(b)* 168
Figura 128 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(c)* 169
Figura 129 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(d)* 169
Figura 130 – Desenvolvimento da Atividade 34, item *(b)* 171
Figura 131 – Desenvolvimento da Atividade 34, itens *(c)* e *(d)* 171
Figura 132 – Imagens da simulação e do bolo sendo dividido em 25 pedaços 172

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Frequência dos estudantes durante a implementação 174

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Distribuição dos anos escolares por ciclos nos PCN 24
Quadro 2 – Pontos positivos observados na análise dos livros didáticos 64
Quadro 3 – Trabalhos selecionados para os estudos correlatos 82
Quadro 4 - Distinção entre tratamento e conversão 89
Quadro 5 - Exemplos de registros no âmbito de frações 90
Quadro 6 – Respostas dos alunos na Atividade 10 108
Quadro 7 – Desenvolvimento da Atividade 17, entregue impressa aos alunos 125
Quadro 8 – Desenvolvimento da Atividade 17, entregue impressa aos alunos 126
Quadro 9 – Desenvolvimento da Atividade 29 153
Quadro 10 – Números de horas-aula e alunos presentes em cada encontro 173
Quadro 11 – Distribuição das Atividades realizadas ao longo dos encontros 175

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
2 CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO RELATIVO AO CONTEÚDO DE FRAÇÕES 23
2.1 O que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o conteúdo de frações? 23
2.2 Considerações geradas a partir de uma leitura crítica de Livros Didáticos amparada nos PCN 29
2.3 A Construção Matemática dos Números Racionais 65
2.3.1 A definição de $\mathbb{Q}$ 66
2.3.2 A relação de ordem em $\mathbb{Q}$ 69
2.3.3 As operações em $\mathbb{Q}$ 72
2.3.4 Identificando $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$ 78
2.4 Comparação entre a fundamentação matemática e o conteúdo escolar 80
2.5 Estudos correlatos 81
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: O TRABALHO DE DUVAL E AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS 86
4 METODOLOGIA DE PESQUISA E DE AÇÃO DOCENTE 91
5 ATIVIDADES PROPOSTAS E SUA IMPLEMENTAÇÃO 95
5.1 Relato Das Atividades Da Parte I 97
5.2 Relato Das Atividades Da Parte II 126
5.3 Considerações finais da implementação 172
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 181
REFERÊNCIAS 184
APÊNDICE 188
APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO 189
APÊNDICE B - TERMO DE ASSENTIMENTO 190
ANEXO 191
ANEXO A - PRODUTO TÉCNICO DA DISSERTAÇÃO INTITULADA ABORDAGEM DE FRAÇÕES EQUIVALENTES: UMA EXPERIÊNCIA NO 6º ANO 192

1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 90, trabalho[1] na rede pública de ensino do Estado do Rio Grande do Sul. Nesse período, tive a oportunidade de atuar como professora de Matemática nos ensinos Fundamental e Médio. Essas experiências, no contexto da vida escolar, permitiram-me vivenciar questões relacionadas ao ambiente da sala de aula, em diferentes turmas e níveis. Durante minha atuação docente, percebi as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação à aprendizagem de determinados conteúdos de matemática. Observei como é difícil para eles entenderem determinadas noções matemáticas e como é difícil, para nós, professores, adaptarmos nossa prática docente, no intuito de auxiliar nossos alunos a superarem suas dificuldades.

Um dos conteúdos que sempre me chamou a atenção, pelas dificuldades e dúvidas levantadas pelos alunos, é frações. É comum escutarmos dos alunos (e até de professores) frases do tipo: "Fração é muito difícil!", "Por que não passa exercícios com números de verdade?" (sugerindo que frações não representam números de "verdade"), "Com fração eu não sei fazer...". De fato, muitos alunos, quando se deparam com exercícios envolvendo frações, simplesmente desistem de resolvê-los. Alunos que não têm dificuldades em matemática e que afirmam gostar do conteúdo, também relatam dificuldades com este tema, afirmando, por exemplo, não lembrar como são realizadas as operações com frações, ou ainda afirmando não saber o motivo de fazer as contas daquela forma.

Segundo o matemático Hassler Whitney, do *Institute for Advanced Study* (Princeton, USA): "A primeira crise na matemática ensinada na escola ocorre com o estudo de frações. O stress é causado particularmente pela tremenda confusão das ideias associadas[2]" (*apud* RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2006, p. 99).

De fato, em minha trajetória como professora de matemática, escutei, por diversas vezes, meus alunos explicitarem suas dúvidas com relação ao uso do mínimo múltiplo comum, que travavam as resoluções de questões envolvendo comparação ou operações com frações, tais como: "como resolvo isso, primeiro multiplico ou divido?", "posso somar o de cima e o de baixo?" (questionando a possibilidade de adicionar frações de denominadores diferentes, apenas somando numeradores e denominadores),

---

[1] Na introdução utilizo a primeira pessoa por se tratar da minha trajetória como professora.

[2] Em *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*. Cambridge Univ. Press, 1973.

"para somar é só fazer a receita de dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima" (explicação de aluno para colegas que não conseguem adicionar ou subtrair frações de denominadores diferentes). Colocações como estas sugerem não apenas quão complicado e sem sentido é trabalhar com frações para os estudantes, como ilustram o quanto o uso de mínimo múltiplo comum pode atrapalhar quando adotado como ingrediente da "receita" de comparar e operar com frações. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que "o importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos ("divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima", "inverte a segunda e multiplica") e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo" (BRASIL, 1998, p. 67). Kerslake (1986, *apud* NUNES, 1997), em um dos seus estudos sobre equivalência, menciona que, mesmo entre crianças que responderam corretamente sobre a soma $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, foi possível observar que nenhuma delas sabia explicar o porquê de transformar as frações iniciais em frações de denominador 12, concluindo que "[...] as crianças estavam apenas reproduzindo uma rotina que lhes foi ensinada" (LOPES, 2008, p. 09).

De acordo com Alves (2012, p. 1),

> [...] apesar de crianças terem demonstrado saber calcular frações equivalentes, elas não as utilizaram para realizar somas e subtrações, estendendo para os números fracionários os procedimentos utilizados com os números naturais, isto é, somando ou subtraindo diretamente numerador com numerador e denominador com denominador, indicando mais uma vez a não apropriação do número racional.

Sobre esse tipo de erro, Lopes (2008, p. 10), diz:

> Alunos de quase todas as culturas cometem erros padrão no cálculo de adição de frações, trata-se de um fenômeno conhecido como "sobregeneralização"[3]. Quem nunca viu crianças somarem numeradores e denominadores como fazem nas multiplicações? $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

Com relação à aprendizagem de frações, Behr e Vergnaud (1983) afirmam que:

[3] Sobregeneralização é uma generalização abusiva com base numa situação específica, que é percebida como suficiente para generalizar ao todo.

> A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. A começar pelo fato de que a palavra fração estar relacionada a muitas idéias e constructos (BEHR; VERGNAUD, 1983, *apud* LOPES, 2008, p. 07).

Além dos fatores apresentados por Lopes, acrescentamos a escrita vertical das frações como um dos possíveis obstáculos à aprendizagem desse tópico. Sobre este aspecto, Lopes (2008), diz que a notação das frações é um dos obstáculos à sua aprendizagem, pois não é nada trivial a "[...] associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho" (LOPES, 2008, p. 09).

No Brasil, até a promulgação da Base Nacional Comum Curricular a recomendação era de que o conteúdo de frações fosse trabalhado desde o 4º ano do ensino fundamental, sendo retomado e aprofundado no 6º ano, quando frações equivalentes são introduzidas. Nesse ano escolar, começariam as "regras" para trabalhar com frações, como por exemplo, encontrar frações equivalentes a uma fração dada (multiplicar ou dividir, numerador e denominador por um mesmo número), simplificar frações, comparar, adicionar e subtrair frações, estas últimas fazendo ainda uso do mínimo múltiplo comum, outro algoritmo em geral memorizado pelo estudante. Para um aluno de sexto ano, em média com 11 anos, aceitar e memorizar "regras prontas" que não fazem sentido para ele, é algo bastante complicado e pouco eficiente no que diz respeito ao real aprendizado de um conteúdo. A BNCC trouxe mudanças na proposta de abordagem do conteúdo frações que não vamos aqui comentar, uma vez que os livros didáticos por nós considerados são anteriores à sua promulgação.

Acreditamos que, por meio de uma sequência de atividades envolvendo experimentos, manipulação de materiais e observações, muitas das quais enfatizando a argumentação, o aluno possa construir e justificar as "regras" utilizadas com frações, facilitando assim sua compreensão e tornando o conteúdo significativo para ele.

Essa dissertação tem sua origem em uma reflexão ligada ao chamado *conhecimento matemático do professor para o ensino* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Cabe ressaltar que não estamos aqui discordando de que o conceito de fração seja introduzido evidenciando, desde o início, a ideia de quantidade, mas sim convidando o leitor a uma reflexão.

A noção de número racional, bem como toda a estrutura de corpo ordenado dos números racionais, e a noção da quantidade embutida em uma classe de equivalência (número racional), ampara-se no conhecimento sobre números inteiros, sua ordem e suas operações e em uma relação de equivalência construída em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Assim, a construção dos racionais aceita pela Matemática (como ciência dedutiva) evidencia que o conceito de equivalência é elementar. Jean d'Alembert (1717-1783) conceitua a ideia associada ao termo *elementar* na importante obra Encyclopédie: "Em geral, chamam-se elementos de um todo as partes primitivas e originais das quais se pode supor que o todo é formado" (Jean d'Alembert, Encyclopédie, 1751).

Refletindo sobre a construção dos números racionais feita pela Matemática, duas questões se apresentam, relativas à sua conexão com a escola, isto é, relativas ao conhecimento matemático para o ensino:

i) Qual ideia / conceito é elementar em tal construção?
ii) Existe alguma relação entre a construção matemática dos racionais e aquela feita na escola? Em caso afirmativo, qual?

A resposta à primeira questão deveria influenciar a prática docente, pois ela aponta para conceitos que não podem faltar na escola de modo algum; a segunda questão é justificada pelo fato de as duas construções poderem ser consideradas diferentes, pelo menos em um primeiro momento. De fato, a construção dos números racionais aceita pela Matemática é iniciada considerando-se uma relação de equivalência estabelecida sobre pares ordenados de inteiros (detalhada no capítulo 2 deste trabalho), sem que fique imediatamente evidente a noção de quantidade embutida na classe de equivalência que é chamada de número; por outro lado, na escola, o conceito de fração é introduzido de modo a já tornar explícita a quantidade que ela representa.

Nesse sentido, *elementarizar* significa reconstruir/reconhecer as partes nucleares que constituem os germes com base nos quais toda a ciência superior se sustenta (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p. IX).

Portanto, pode-se inferir que, na escola, o conceito de equivalência de frações deve ser construído com os estudantes de modo a promover a compreensão e deve incluir não apenas caracterizações parciais, tais como "multiplicando numerador e denominador de uma fração por um mesmo número natural, obtém-se uma fração equivalente à fração original", mas sim uma caracterização (completa) de frações equivalentes, por exemplo,

Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes **se e só se** $a \times d = b \times c,$ (*)

preferivelmente acompanhada de uma demonstração com potencial de promover a compreensão (HANNA, 1990). Cabe esclarecer que, na escola, a definição de frações equivalentes é "Duas frações são ditas equivalentes se representam a mesma quantidade de uma mesma unidade", coerente com a forma como é lá introduzida. Assim, na escola, a caracterização (*) passa a ser uma propriedade requerendo, portanto, uma demonstração. Por isso, neste texto, a afirmação (*) é denominada **Teorema de caracterização de frações equivalentes**. Esta percepção de ser um teorema na escola também é encontrada em Martinez, (2013, p. 289):

> [...] obtém-se a conhecida regra para verificar a igualdade de frações. Teorema: Considere as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com b e d diferentes de zero. Tem-se que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $a \times d = b \times c$. Reciprocamente, se $a \times d = b \times c$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (MARTINEZ, 2013, p. 289).

De todas as questões até aqui abordadas, surgiu a motivação para realizar o presente trabalho, que busca responder à questão:

É possível propor a alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental, o Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, desde a sua motivação até a sua demonstração?

Ao propor essa questão, sentimo-nos encorajadas pelos PCN, que reiteram que um dos objetivos do ensino de Matemática no Ensino Fundamental é o "desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e justificação, com vistas à formação do cidadão crítico" (BRASIL, 1997, p. 26).

Para responder à pergunta de pesquisa, esta dissertação teve por objetivos gerais, além de buscar amenizar a dificuldade de alunos da Escola Básica com os conceitos e aplicações envolvidos no tema frações:

1. Refletir sobre a construção matemática dos números racionais;
2. Proceder a uma leitura crítica de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) sobre a construção das frações, observando, em particular, como é tratada a equivalência de frações;
3. Comparar a construção matemática dos racionais e a construção apresentada na escola;

4. Planejar, para um 6º ano, uma sequência de atividades sobre frações que leve o estudante à demonstração do que aqui denominamos Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, apoiada na teoria de Duval, contribuindo assim com o debate sobre a inclusão de demonstrações e de pensamento genérico na escola.
5. Implementar e analisar a sequência didática planejada, refletindo sobre a ênfase dada à construção de número racional a partir da caracterização das frações equivalentes, buscando responder à questão norteadora da pesquisa, baseando também esta análise na teoria de Duval.

Dessa forma, neste trabalho, defende-se que a demonstração dessa propriedade é passível de ser construída com estudantes de 6º ano, mais do que isso, defende-se que ela ajuda na compreensão do conceito de equivalência. Damos assim um exemplo de situação que contempla as ideias da Hanna, na medida em que ela orienta que as demonstrações que devem entrar na sala de aula são aquelas que ajudam a promover a compreensão (HANNA, 1990). Segundo Garcez (2013, p. 60), “compreender frações equivalentes a uma fração dada, em alguns casos, é a chave para o sucesso na resolução de inúmeros problemas”.

Como referencial teórico, utilizamos a Teoria das Representações Semióticas, de Duval, no intuito de analisar como os estudantes percebem as diferentes representações das frações em atividades onde são exigidas as transformações de representação por meio de tratamento (representações dentro de um mesmo registro) e de conversões (representações que consistem em mudanças de tipos de registro, considerando o mesmo objeto). Os PCN ressaltam o fato de que “a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo” (BRASIL, 1998, p. 69).

No intuito de atender ao objetivo da pesquisa, foi realizada uma pesquisa de cunho qualitativo em uma turma de 6º ano de uma escola municipal da cidade de Porto Alegre. De acordo com Lüdke e André (1986), a pesquisa qualitativa subentende a obtenção de dados descritivos por meio do contato direto do pesquisador com a situação estudada. O trabalho é desenvolvido na direção de propor-se, ao final, uma demonstração para o *Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes* em linguagem adequada para estudantes do 6º ano. É importante salientar que, quando é mencionado o termo *demonstração*, não se está pressupondo o uso de simbologia matemática, mas sim significando uma argumentação completa o suficiente a ponto de ser aceita pela Matemática (como ciência dedutiva).

O Produto Técnico deste Mestrado Profissional é a sequência de atividades sobre frações desenvolvida e aplicada como parte dessa pesquisa, partindo do conceito de fração e direcionando a discussão para a equivalência de frações, encerrando-se com aplicações deste conceito em atividades sobre comparação, adição e subtração de frações. Cada atividade desse produto é acompanhada de objetivos e conversas com o professor, incluindo as reflexões geradas pela implementação. O produto técnico está dividido em duas partes, a primeira contendo os pré-requisitos trabalhados para uma adequada implementação das questões específicas sobre equivalência e suas aplicações, que constituem então a segunda parte do produto.

No capítulo 2 apresentamos os tópicos que identificamos como *Conhecimento Matemático para o Ensino relativo ao conteúdo de frações*. Na seção 2.1 é relatada a análise de 13 livros didáticos (de 4º ao 7º ano), buscando investigar como é feita a abordagem do conteúdo de frações, desde sua definição até adição e subtração de frações, com foco na equivalência de frações, passando pela comparação de frações. Na seção 2.2 apresentamos a fundamentação matemática da construção dos números racionais a partir dos números inteiros. Na seção 2.3 é feita uma comparação entre as construções apresentadas nos tópicos anteriores (2.1 e 2.2), buscando responder à questão *"Existe alguma relação entre* a *construção matemática dos racionais e aquela feita na escola? Em caso afirmativo, qual?"*. Na seção 2.4 trazemos um relato sobre a pesquisa realizada sobre trabalhos relacionados ao tema que aqui abordamos.

O capítulo 3 trata da fundamentação teórica; aí apresentamos a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, no intuito de, com base nela, analisar os dados coletados ao longo da pesquisa.

O capítulo 4 trata da Metodologia de Pesquisa e da Ação Docente. Nele descrevemos os pressupostos da pesquisa qualitativa, o planejamento geral do nosso trabalho, seu desenvolvimento, os sujeitos e as condições envolvidas na pesquisa.

No capítulo 5, intitulado Atividades Propostas e sua Implementação, é relatada a implementação em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental da sequência de atividades por nós elaborada, e é feita uma análise dos dados coletados durante essa implementação. O Produto Técnico resultante da reformulação da proposta didática após sua implementação e avaliação encontra-se no trabalho como um anexo.

No capítulo de Considerações Finais é feito um fechamento do trabalho, sendo incluídas reflexões sobre a implementação bem como seus resultados e conclusões frente à questão de pesquisa.

No apêndice A é apresentado o modelo do Termo de Consentimento Informado, assinado pelos responsáveis dos sujeitos de pesquisa, todos menores de idade e não emancipados.

Como apêndice B é incluído o modelo do Termo de Assentimento, assinado pelos estudantes participantes da prática de pesquisa em sala de aula.

No anexo A, está disponibilizado o Produto Técnico. Além de uma sequência de atividades adequada à BNCC para o 6º ano, ele inclui os objetivos das mesmas e bilhetes ao professor, na intenção de orientar o leitor interessado na sua utilização.

Encerramos esta Introdução esclarecendo ainda alguns pontos:

i) Para garantirmos o “bom andamento” do conceito de equivalência, estabeleceu-se originalmente um planejamento que iniciava com uma retomada de frações. Para nossa surpresa, apenas 2 dos 30 estudantes conheciam um pouco de frações. Então pode-se considerar que a proposta de atividades aqui apresentada pode ser considerada uma introdução ao ensino de frações, até comparação, adição e subtração.

ii) No que diz respeito aos significados de frações, a saber:

- Parte-todo: fração como parte de uma unidade e fração como parte de um conjunto;
- Quociente: fração como quociente da divisão de um inteiro por outro;
- Razão: fração como uma forma de comparação entre duas grandezas,

cabe esclarecer que abordou-se parte-todo e quociente (sem muita ênfase neste último), e não foi abordado o significado de razão. Consideramos mais adequada a abordagem do significado de razão por ocasião de uma retomada de frações, no caso, no sétimo ano. De fato, seguindo orientação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é no 7º ano, na unidade temática números, onde razão é mencionada.

iii) Sobre o uso de tecnologia digital, esclarecemos que as atividades propostas não fazem uso da mesma; no entanto, nada impede o encaixe de atividades ou itens às atividades propostas que explorem este recurso. Por exemplo, é salientado ao professor no Produto Técnico a adequabilidade de fazer uso deste recurso em uma das atividades propostas (Atividade 17). No entanto, ressaltamos que consideramos o material concreto *indispensável* em uma primeira abordagem das discussões encaminhadas com os estudantes em um momento como este, de introdução a frações. Sobre o uso de materiais concretos, a BNCC (2017), diz que recursos didáticos, tais como: malhas quadriculadas, ábacos, jogos, vídeos, livros, entre outros, são fundamentais para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

2 CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO RELATIVO AO CONTEÚDO DE FRAÇÕES

A construção dos racionais na escola imita a necessidade histórica de tratar quantidades não inteiras. Por outro lado, a construção matemática dos conjuntos numéricos, no caso dos números racionais, não parte da ideia de quantidade, como ficará claro adiante, e revela-se bastante abstrata. Por ser o presente trabalho um trabalho em ensino, optamos por apresentar inicialmente as considerações originadas da leitura crítica de livros didáticos levando em conta as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para depois refletir sobre a construção matemática dos racionais e então comparar estas duas abordagens.

Assim, iniciamos o capítulo com uma seção que apresenta as orientações encontradas nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) sobre o ensino de frações, mais especificamente, definição de frações, frações equivalentes, comparação, adição e subtração de frações. A seguir, são apresentadas nossas considerações originadas da leitura crítica de livros didáticos levando em conta as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Na terceira seção delineia-se uma construção matemática dos números racionais para só então confrontar-se a segunda e a terceira seções e explicitar as reflexões geradas por esta comparação.

2.1 O que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o conteúdo de frações?

Ressaltamos que o presente trabalho se concentra no conteúdo de frações trabalhado em um 6º ano do Ensino Fundamental, lembrando que, após a ampliação do Ensino Fundamental, a antiga 5º série, passou a corresponder ao 6º ano que, de acordo com os PCN, está dentro do 3º ciclo.

Apesar do avanço obtido com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e com o aumento na oferta de cursos de formação de professores, a iniciativa de realizar uma leitura crítica de livros didáticos e de incluir as considerações por ela originada neste trabalho, vai ao encontro dos PCN, que afirmam: “Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória” (PCN, 1998, p. 22).

De fato, até a promulgação da BNCC em 22 de dezembro de 2017, os PCN, serviam de única base de orientação curricular. Os PCN são organizados em dois documentos que orientam o Ensino Fundamental desde os anos iniciais. O documento referente ao 1º e 2º ciclo[4], refere-se às séries iniciais e o 3º e 4º ciclo[5] às séries finais. Maiores detalhes encontram-se no Quadro 1.

Quadro 1 - Distribuição dos anos escolares por ciclos nos PCN

Ciclo	Anos escolares correspondentes
1º	1ª e 2ª séries (hoje 2º e 3º anos)
2º	3ª e 4ª séries (hoje 4º e 5º anos)
3º	5ª e 6ª séries (hoje 6º e 7º anos)
4º	7ª e 8ª séries (hoje 8º e 9º anos)

Os documentos são organizados por blocos de conteúdos (Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, e Tratamento da Informação); o ensino do conteúdo de frações faz parte do bloco Números e Operações, devendo ser trabalhado desde o 2º ciclo, sendo sugerido que devem ser "apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal" (PCN, 1998, p. 57), com o objetivo principal de levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver alguns problemas.

Ainda no 2º ciclo, dentro dos conteúdos conceituais e procedimentais, são previstos, entre outros, a leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente; reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária; identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas; exploração dos diferentes significados das frações em situações-

[4] 1º ciclo remete a 1ª e 2ª séries, ou ainda, após ampliação do Ensino Fundamental, 2º e 3º anos e o 2º ciclo remete a 3ª e 4ª séries, ou ainda, após ampliação do Ensino Fundamental, 4º e 5º anos.
[5] 3º ciclo remete a 5ª e 6ª séries, ou ainda, após ampliação do Ensino Fundamental, 6º e 7º anos e o 4º ciclo remete a 7ª e 8ª séries, ou ainda, após ampliação do Ensino Fundamental, 8º e 9º anos.

problema: parte-todo, quociente e razão; observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária.

Dentro das orientações didáticas para esse ciclo, são mencionados vários obstáculos que os alunos acabam por enfrentar, ao raciocinar sobre os números racionais como se fossem naturais, entre eles:

- Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; como por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$ são diferentes representações de um mesmo número;
- A comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Além disso, o contato com números racionais em representações fracionárias é bem menos frequente do que a notação decimal. No cotidiano, o uso de frações limita-se a metades, terços, quartos e, principalmente, pela via da linguagem oral do que das representações (BRASIL, 1998). O significado mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre à relação parte-todo, como por exemplo: divisões de chocolates, ou de uma pizza, em partes iguais. Segundo os PCN, "a relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos)" (BRASIL, 1998, p. 68) e a relação existente entre um número de partes e o total de partes é indicada pela fração.

Neste ponto interrompemos o relato para explicitar uma crítica ao relatado no parágrafo anterior: se falarmos em "todo" referindo-nos à unidade, teremos dificuldades em convencer o estudante sobre a quantidade que representa uma fração imprópria (como podemos pegar mais do que o todo?). Na proposta alternativa que faz parte deste trabalho, foi evitado, propositalmente, o termo "todo", e enfatizado o termo "unidade".

Os PCN apresentam como significados para as frações, além da relação parte-todo, o de quociente, que se baseia na divisão de um natural por outro; e o de razão, onde a fração é usada como uma espécie de "índice comparativo" entre duas quantidades de uma mesma grandeza.

Ainda no 2º ciclo, é ressaltado o fato de que "a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo" (BRASIL, 1998, p. 69). Trata-se, portanto, de um trabalho que apenas será iniciado no 2º ciclo e aprofundado nos dois ciclos finais (3º e 4º ciclos).

O cálculo com números racionais é previsto no 2º ciclo apenas na forma decimal. Nenhuma menção à adição e subtração de frações é feita nesse ciclo.

A abordagem dos números racionais no 3º e 4º ciclos, dando continuidade ao que foi estudado nos ciclos anteriores, tem como objetivo que os alunos percebam que os números naturais são insuficientes para resolver alguns problemas, como por exemplo, os que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

É no 3º ciclo (6º e 7º anos) onde se concentra a maior parte do estudo dos números racionais. Nesse ciclo, no que diz respeito aos números e às operações, é fundamental que os alunos ampliem os significados que já foram estudados nos ciclos anteriores, buscando relações existentes entre eles, aprimorando a capacidade de análise e tomada de decisões. Além disso, o estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem atenção especial nesse ciclo, iniciando pela exploração agora de todos os seus significados (relação parte-todo, quociente, razão e operador). O significado de operador aparece em problemas de tipo, "que número devo multiplicar por 5 para obter 2?" (BRASIL, 1998, p. 103).

Os PCN alertam para o fato de não ser desejável tratar de forma isolada cada uma das interpretações dos números racionais (relação parte-todo, quociente, razão e operador), e acrescenta que "a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do 3º e 4º ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema" (BRASIL, 1998, p. 103).

Nesse 3º ciclo, os objetivos esperados, com relação aos números racionais, são:

> - ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivam sua construção;
> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não matemáticos. (BRASIL, 1998, p. 64).

Dentro dos conteúdos propostos para o 3º ciclo, é salientada a importância de superar a mera memorização de regras e de algoritmos, como por exemplo, "divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima", referindo-se à adição de frações de denominadores diferentes; assim como "os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo" (BRASIL, 1998, p. 67). Ainda sobre os racionais, é afirmado que, nesse ciclo, os alunos já têm condições de perceber que os números têm múltiplas representações, além de compreender melhor as relações entre as representações fracionárias e decimais, assim como as frações equivalentes.

Importante salientar que, mesmo sendo as representações fracionárias e decimais trabalhadas nos ciclos iniciais, o que se constata é que "[...] os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo [...]" (BRASIL, 1998, p. 100).

No 3º ciclo, aparece também a importância de argumentação na matemática na frase "a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la" (BRASIL, 1998, p. 70). Sendo assim, é esperado que no 3º ciclo, seja desenvolvida a argumentação, de maneira que os alunos não se contentem apenas com a produção de respostas e afirmações; mais do que isso, espera-se que os alunos tenham uma postura de sempre tentar justificar suas repostas. Acredita-se que, dessa forma, no 4º ciclo, o aluno perceba e reconheça a importância das demonstrações em Matemática, sendo capazes de compreender provas de alguns teoremas.

Interrompemos novamente o relato dos PCN para explicitar nossa discordância com a última frase relatada. Concordamos com Carvalho e Ripoll (2013) no que diz respeito à afirmação

> [...] tanto o pensamento genérico como a atividade de demonstrar, podem (e devem!) ser explorados e desenvolvidos na escola. Vamos além: tanto quanto possível, a exploração e o desenvolvimento de tais princípios matemáticos devem iniciar-se já nos primeiros anos de escolaridade." (CARVALHO, RIPOLL, 2013, p. 150).

No 4º ciclo, além da consolidação dos números e das operações já estudadas nos ciclos anteriores, os alunos devem ampliar os significados dos números pela identificação da existência de números não-racionais. Também é esperado que o professor desenvolva com seus alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, que utilizem números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, valorizando tanto as resoluções aritméticas quanto as algébricas.

Os objetivos no ensino de matemática, especificamente números racionais, desse ciclo, são:

> - Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
> - Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais. (BRASIL, 1998, p. 81).

Dando continuidade ao trabalho iniciado no 3º ciclo, a argumentação deve ser retomada, uma vez que sua prática é fundamental para a compreensão das demonstrações. De acordo com os PCN, "o refinamento das argumentações produzidas ocorre gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações" (BRASIL, 1998, p. 86).

No 4º ciclo, a interpretação da fração como relação parte-todo, supõe que "o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas" (BRASIL, 1998, p. 102). Aqui, novamente salientamos o fato de que o termo "todo" pode ocasionar confusão no estudante, principalmente ao trabalhar com frações impróprias.

O estudo de frações equivalentes, que é fortemente salientado no presente trabalho, é previsto no 4º ciclo pelos PCN. De fato, lá encontramos a frase "o conceito de equivalência, assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes, são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números" (BRASIL, 1998, p. 103). Concordamos com a afirmação, no entanto ela se revela inadequada para o 4º ciclo, uma vez que já é sugerido operar com frações no 3º ciclo de maneira a dar significado às operações para o estudante.

Com relação ao 4º ciclo também é ressaltado, no que diz respeito ao cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, que é possível utilizar as propriedades das frações equivalentes, para transformá-las em frações de mesmo denominador, não necessariamente o menor.

2.2 Considerações geradas a partir de uma leitura crítica de Livros Didáticos amparada nos PCN

Para situar o estudo de frações até o 6º ano, levando em conta o que orientam os PCN, foi realizada uma leitura crítica de 13 livros didáticos do ensino fundamental (entre 4º e 7º anos), sendo dois livros de 4ºano, dois livros de 5º ano, sete livros de 6º ano e dois livros de 7º ano. A análise teve como intenção observar e avaliar principalmente, como são introduzidas frações e como é tratada a equivalência de frações, buscando avaliar a ênfase dada à equivalência nos contextos da comparação e das operações de adição e de subtração entre frações. Entre os livros analisados, seis fazem parte do PNLD. Cabe ressaltar que os livros aqui analisados deveriam estar de acordo com os PCN, mas não necessariamente com a BNCC, pois esta ainda não estava vigente por ocasião da publicação dos mesmos.

A escolha dos 13 livros não foi propriamente uma escolha, e sim deveu-se à facilidade de acesso a eles, a saber, ou eram exemplares que já tínhamos em mãos ou disponíveis nas escolas públicas, tais como: ANDRINI e VASCONCELOS (2006), BIANCHINI (2015) e DANTE (2012), por exemplo.

Foram analisados, nesses livros, os seguintes aspectos, baseados no que foi considerado pela autora e sua orientadora fundamental no estudo das frações como pré-requisitos para a abordagem de equivalência de frações:

A) Como são introduzidas as frações?

B) A definição de fração é adequada?

C) Como são os primeiros exemplos de frações?

D) A equipartição é enfatizada?

E) Aparecem exemplos de equipartição da unidade em que as partes não têm todas o mesmo formato?

F) São tratadas inicialmente apenas frações unitárias?

G) É enfatizada a unidade no livro?

H) Como são introduzidas as frações impróprias?

I) Quais significados de fração são abordados?

E, relativos à abordagem de equivalência e suas aplicações:

J) Como é introduzida a Equivalência de frações?

K) São abordados todos os casos de comparação entre frações?

L) Como é abordada a adição e a subtração de frações quaisquer?

Fazemos a seguir um breve relato do que foi percebido nos livros didáticos sobre os itens A até o I, e detalhamos os itens J, K e L por serem estes os mais relacionados com o tema deste trabalho.

A) Como são introduzidas as frações?

Frações são introduzidas em todos os livros de 4º ano analisados, estando, portanto, de acordo com a orientação dos PCN de o estudo de frações ser iniciado no 2º ciclo. Em todos os 13 livros analisados, o conceito de fração é introduzido/retomado por meio da chamada *relação parte-todo*, ficando, portanto, já embutida aí a noção de quantidade, por exemplo, ao falamos em $\frac{3}{7}$ da unidade (Andrini e Vasconcellos, 2006) ao retomar frações no 7º ano na p. 7, aborda também a divisão

Alguns autores utilizam já na introdução às frações o termo “todo”; como já apontado na seção anterior, o consideramos inadequado, por dificultar o aprendizado das frações impróprias.

Concordamos que a retomada de fração seja iniciada com a relação parte-todo, como foi a escolha de todos os livros de 6º ano analisados que trataram da introdução de frações (ver Quadro 1). No entanto, achamos adequado que o significado de quociente já seja apontado para o estudante logo depois de introduzidas as frações unitárias. Por exemplo, logo depois de introduzir-se a quantidade um quinto, cabe, na nossa opinião, chamar-se a atenção para o estudante que então, afinal, um quinto é o resultado da divisão da unidade em cinco partes iguais.

B) A definição de fração é adequada?

Cinco dos sete livros de 6º ano analisados, não apresenta uma definição “formal” de fração.

Acreditamos que uma definição de fração deveria aparecer nos livros do 6º ano, já que é neste ano escolar que objetiva-se retomar e sistematizar o estudo sobre frações, e por isso relatamos este item só sobre livros deste nível. Dessa forma, estamos também concordando com os PCN, que afirmam: “Nos terceiro e quarto ciclos alguns conceitos serão consolidados, uma vez que eles já vêm sendo trabalhados desde os ciclos anteriores, como o conceito de número racional” (BRASIL, 1998, p. 49).

Em um dos livros de 6º ano analisados foi observada uma definição inadequada de fração ao informar que "o denominador, que não pode ser zero, indica em quantas partes o todo está dividido; o numerador indica quantas **dessas** partes devem ser consideradas" (CENTURIÓN E JAKUBOVIC, 2012, p. 142, grifo nosso), dificultando ao estudante o entendimento de fração imprópria. De fato, ao mencionar que "o numerador indica quantas dessas partes devem ser consideradas", fica implícito que o número máximo possível a ser considerado é igual ao denominador, portanto todas as frações seriam próprias. Cabe ressaltar que este mesmo autor, duas páginas adiante, trata de frações impróprias, tornando-se, portanto, incoerente consigo mesmo.

Por outro lado, esse mesmo autor ressalta a diferença do termo "fração" empregada na matemática e na linguagem do dia a dia, o que consideramos positivo:

> "Costuma-se usar a palavra **fração** com o significado de parte, pedaço. Mas, na matemática, a fração pode ser: parte do objeto, o objeto todo, o objeto todo mais parte dele, dois objetos, dois objetos mais parte dele, etc. Assim, a ideia de fração é **mais genérica** na matemática do que na linguagem comum" (CENTURIÓN, 2012, p.144).

Bianchini (2015) apresenta na p. 142 como definição de fração a frase "Todo número que pode ser representado na forma de fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números naturais com $b \neq 0$, é um número racional". Lançamos o seguinte questionamento sobre tal afirmação: se o aluno encontra-se em um momento de ampliar seu universo numérico, como pode ele saber da existência de outros números além dos naturais e ainda ser capaz de classificá-los em racionais e não racionais? Acreditamos também que a definição de fração não deve estar apoiada na simbologia matemática, devendo ser apresentada para os alunos do 6º ano um pouco mais adiante, devendo ser trabalha e construída, primeiramente, com diferentes atividades e contextos, para só então, a definição "formal" ser dada.

Um dos livros de 5º ano apresenta no Manual Pedagógico, orientações importantes para serem trabalhadas, como, por exemplo, o tópico Fração de um inteiro, sendo para nós, neste texto "unidade", onde a primeira orientação é "mostrar aos alunos que os números naturais são insuficientes para representar ou resolver determinador problemas" (GIOVANNI Jr., 2014, p. 368), seguindo orientação do PCN, para esse ciclo.

C) Como são os primeiros exemplos de frações?

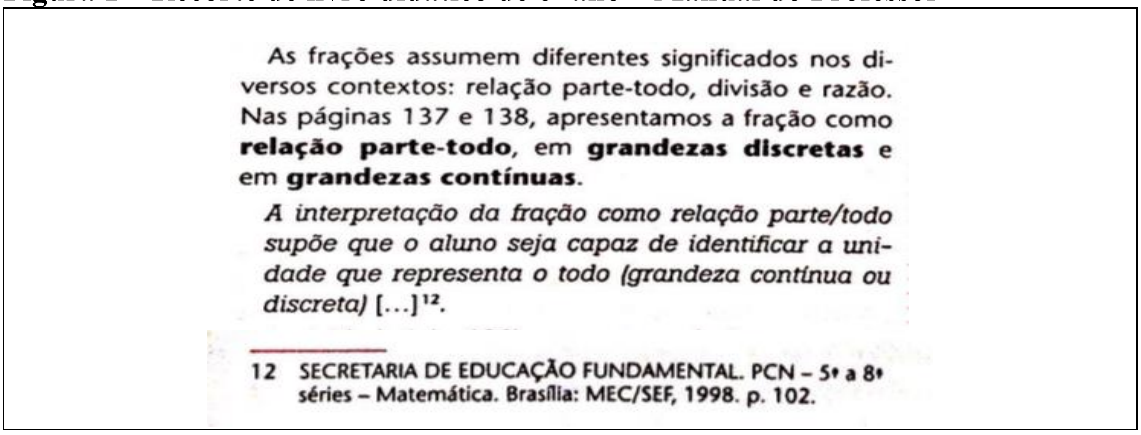
No geral, pode-se dizer que os primeiros exemplos abordados nos livros analisados são bastante variados e interessantes.

Nos livros de 4º e 5º ano analisados, os primeiros exemplos só envolvem grandezas contínuas, o que consideramos positivo.

E, dos 7 livros de 6ºano analisados, 5 tratam também de frações de grandezas discretas em seus exemplos (BIANCHINI, 2015, p. 143 é um exemplo), os outros dois abordam-nas apenas em exercícios. Assim, os livros de 6º ano estão de acordo, neste aspecto, com as orientações dos PCN, no entanto julgamos que fração de uma grandeza discreta deveria merecer uma discussão em sala de aula, e não apenas em exercícios.

Um dos autores de 6º ano explica, no Manual do Professor, por que trata de grandezas discretas e grandezas contínuas, paralelamente, amparado pelos PCN (Figura 1).

Figura 1 – Recorte de livro didático de 6º ano – Manual do Professor



As frações assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte-todo, divisão e razão. Nas páginas 137 e 138, apresentamos a fração como **relação parte-todo**, em **grandezas discretas** e em **grandezas contínuas**.

A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta) [...][12].

12 SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. PCN – 5ª a 8ª séries – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. p. 102.

Fonte: Centurión (2012, p. 34).

No entanto, em alguns livros, frações de grandezas discretas aparecem. Por exemplo, em um dos livros de 4º ano analisados (GIOVANNI Jr., 2014, p. 201), fração de grandezas discretas é trabalhada em um tópico intitulado “Determinando frações que representam partes de uma quantidade”, trazendo um exemplo bastante familiar a qualquer estudante, a meia dúzia e introduzindo fração com o significado de operador.

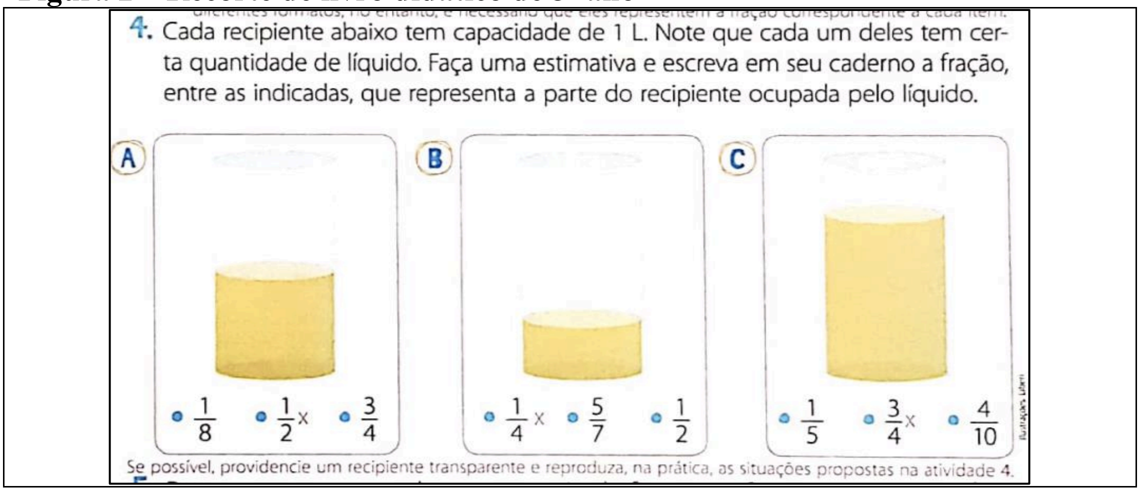
Nos dois livros de 5º ano analisados, fração de grandeza discreta aparece separadamente, aparecendo, por exemplo em Garcia (GARCIA, 2014, p. 139), em um tópico denominado, por exemplo, “Frações de uma quantidade”.

Dos autores de 6ºano analisados, dois abordam nos seus primeiros exemplos, apenas frações de grandezas contínuas, três abordam grandezas discretas e contínuas simultaneamente e dois apresentam os primeiros exemplos apenas envolvendo grandezas contínuas, mas já na primeira lista de atividades aparecem frações de grandezas discretas.

D) A equipartição é enfatizada?

A equipartição é mencionada em todos os livros, porém em geral é pouco ressaltada. Chamou nossa atenção um livro de 5º ano, no qual é apresentado um exercício que envolve estimativa e por meio do qual o professor pode verificar se a equipartição está subentendida para o estudante (Figura 2).

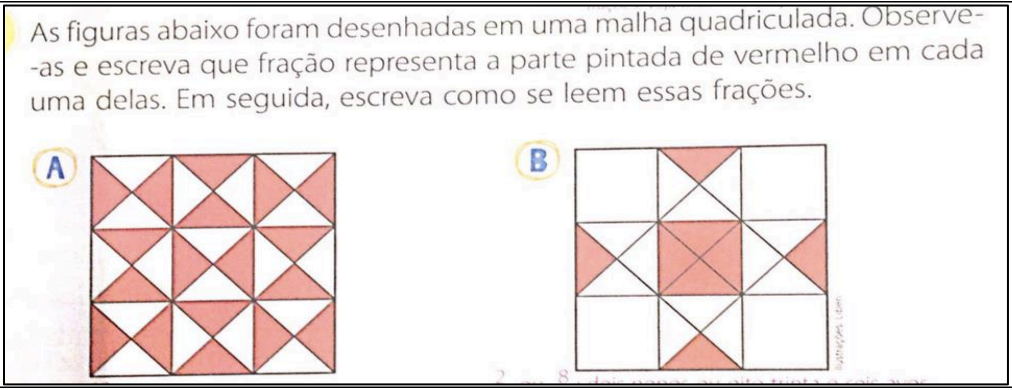
Figura 2 – Recorte de livro didático de 5º ano



Fonte: Garcia (2014, p. 135).

O mesmo autor continua ressaltando equipartição em atividades (Figura 15, principalmente o item B no qual cabe ao estudante prover a equipartição). Exercício semelhante aparece em outros livros (por exemplo em BIGODE, 2015, p. 175), o que para nós é um aspecto bastante positivo.

Figura 3 – Recorte de livro didático de 5º ano



Fonte: Garcia (2014, p. 137).

E) Aparecem exemplos de equipartição da unidade em que as partes não têm todas o mesmo formato?

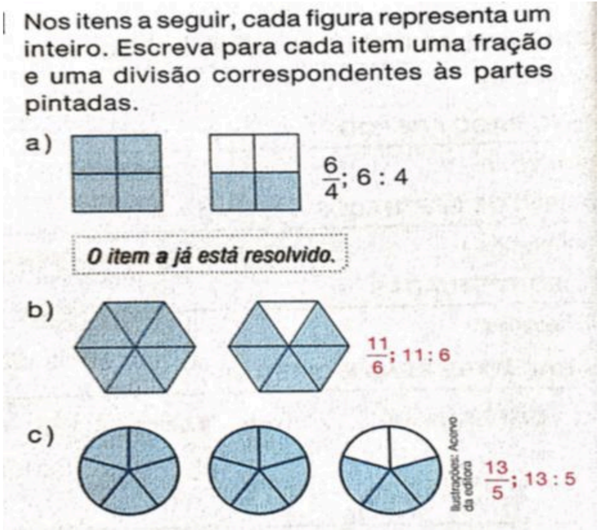
Sobre o formato das partes, muitos livros trazem, nos exercícios, partes com formatos variados, mas com exceção de dois autores (BIGODE, 2015, p. 175 e p.177; GARCIA, 2014, p. 137) (Figura 3), nenhum aborda formatos diferentes em uma mesma equipartição.

F) São tratadas inicialmente apenas frações unitárias?

Em geral, são tratadas inicialmente quase que em uma mesma página, frações unitárias e não unitárias, o que, no nosso ponto de vista, pode ser um tanto abrupto, pois a fração unitária é o primeiro passo para identificar fração com uma divisão.

Em geral, a unidade não é ressaltada nos livros, o que pode causar confusão entre os estudantes em alguns casos. De fato, não ficando clara a unidade para o estudante, a fração por ele identificada pode ser diferente, como no caso da Figura 4, onde, no item a, por exemplo, a resposta aparece como $\frac{6}{4}$, mas poderia ser também $\frac{6}{8}$, pois o aluno poderia considerar a unidade como sendo os dois quadrados, já que o termo "figura" permite esta interpretação.

Figura 4 – Recorte de livro didático de 6º ano



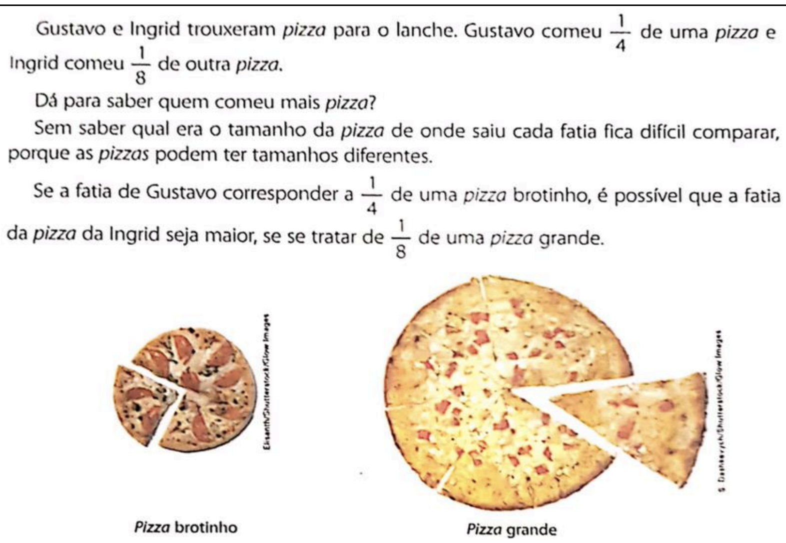
Fonte: Pataro e Souza (2012, p. 128).

No entanto, na revisão de fração, o mesmo autor traz um exercício bastante interessante, deixando muito claro a qual unidade se refere, aproveitando a ocasião para trazer uma situação em que a fração não é obtida por uma emenda de frações unitárias (Figura 3, item A, bem como, PATARO e SOUZA, 2012, p. 156)

G) É enfatizada a unidade no livro?

Um dos autores de 6º ano mostra preocupação com a unidade, ao trabalhar a comparação entre duas frações unitárias (Figura 5), salientando para o estudante a importância da unidade, por meio de figuras.

Figura 5 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Bigode (2015, p. 189).

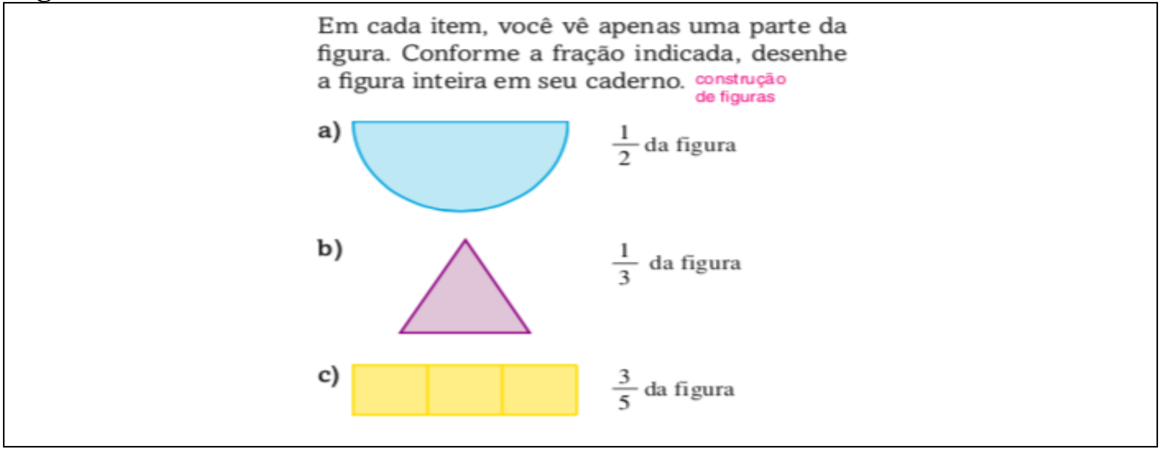
Outro autor de 6º ano, mostrou preocupação com a unidade em um bilhete ao professor, ao trabalhar comparação de frações: “Comente com os alunos que, para comparar duas frações, ambas devem estar relacionadas à mesma unidade” (GARCIA, 2014, p. 151).

Outro ponto que consideramos importante com relação ao reconhecimento da unidade é a recuperação da unidade, o que só foi encontrado em dois dos livros analisados (BIGODE, 2015, p. 177 e BIANCHINI, 2015, p. 146) (Figura 6). Cabe relembrar que, com a resolução de um exercício que pergunta sobre a recuperação da unidade, não apenas o estudante evidencia que consegue transitar entre o numérico e o figural como domina o processo inverso mencionado por Duval. De acordo com Duval (2003), trabalhar com resolução de problemas que vão da língua natural para o registro numérico é algo que os alunos mostram ter facilidade, portanto, para fazer o caminho inverso, revelam mais dificuldades (DUVAL, 2003 *apud* SOPPELSA, 2016, p.81).

A atividade da Figura 6 não tem resposta única, sendo aasim, acreditamos que no livro devem aparecer algumas possibilidades de respostas e que, ao trabalhar atividades como esta, o professor deve questionar as diferentes respostas que cada aluno deu, corroborando uma orientação dos PCN:

> O confronto entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa, principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e de validá-los (questionando, verificando, convencendo) (BRASIL, 1998, p.38).

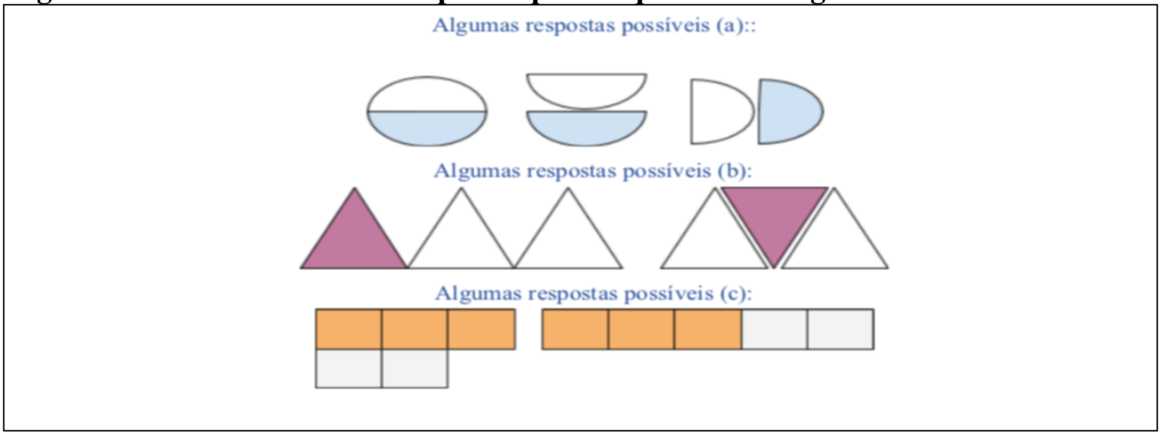
Figura 6 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Bianchini, 2015, p.146.

Na Figura 7, apresentamos algumas possibilidades de respostas para a questão da Figura 6.

Figura 7 – Possibilidades de respostas para a questão da Figura 6



Fonte: Construção da autora (2019).

H) Como são introduzidas as frações impróprias?

Um dos autores de 6º ano, menciona, no Manual do Professor, a preocupação em trabalhar com frações menores (próprias), iguais (aparente) ou maiores (impróprias) do que a unidade, de forma genérica, afirmando:

> Para os alunos, muitas vezes, interpretar frações maiores que a unidade ou que representam a própria unidade torna-se uma atividade complexa. Assim, trabalhar com a ideia mais genérica de fração, em que fração pode representar parte de um todo, o próprio todo ou mais que um todo, é tarefa importante, que deve ser revisitada em várias etapas do processo [...] (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012, p. 34).

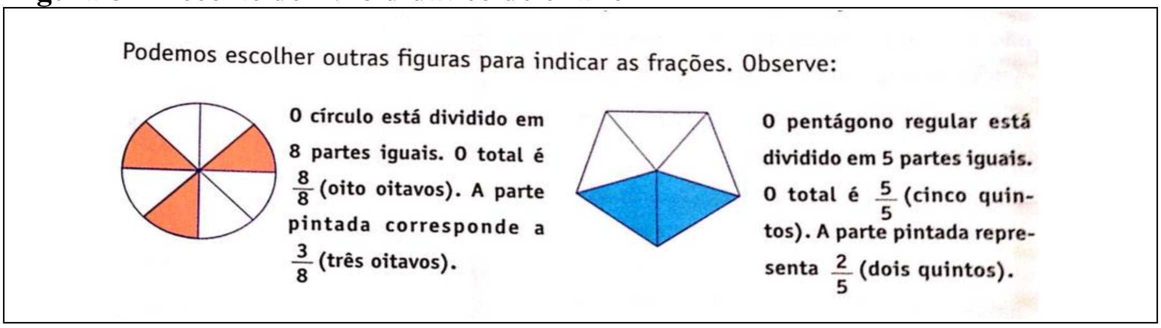
Neste trabalho, optamos por não utilizar a classificação de frações em própria, imprópria e aparente, por não sermos favoráveis à ênfase na nomenclatura e sim na ordem, salientando que frações aparentes são decorrência da compreensão do conceito de fração não unitária. Em Souza e Pataro (2012), p. 133, pode-se encontrar um exercício que lida com a comparação de frações, envolvendo frações impróprias sem apresentar essa nomenclatura, onde fica evidente a necessidade apenas da definição de fração não unitária para resolvê-lo.

Em Bigode (2015), p. 182, é possível encontrar um tópico denominado “Frações maiores do que 1”. O primeiro exemplo apresentado é de fração aparente, sem ressaltar tal nomenclatura, o que achamos positivo.

Na página seguinte são apresentados exemplos de frações impróprias incluindo essa nomenclatura e a notação de número misto. No entanto, existe aí um bilhete ao professor, onde o autor chama atenção para a nomenclatura das frações, reforçando nossa opinião de não dar enfoque as nomenclaturas própria, aparente e imprópria: “Não é necessário exagerar na exigência do domínio da nomenclatura de frações. Os alunos aprenderão os nomes naturalmente se encontrarem bons problemas pela frente e sentirem necessidade de se comunicar com clareza e precisão” (BIGODE, 2015, p. 183).

Nesta direção, consideramos uma boa abordagem de “frações aparentes” o recorte da Figura 8, apresentado em um dos livros de 6º ano analisados, onde além de representar parte da figura, por exemplo, $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{5}$, o autor também apresenta a fração que representa o total da unidade.

Figura 8 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Imenes, Lellis, 2002, p.100.

I) Quais significados de fração são abordados?

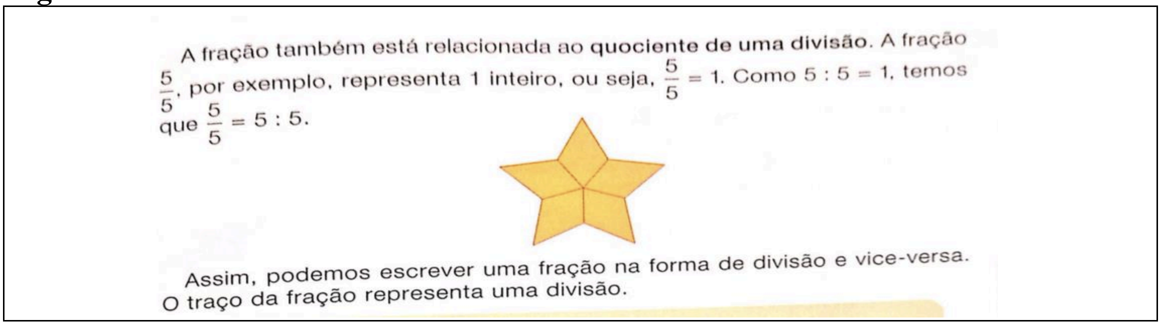
De acordo com os PCN, as frações devem ser trabalhadas, no segundo ciclo, envolvendo três significados: parte-todo, razão e quociente, e somente no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, introduzir o significado de operador multiplicativo. Os PCN alertam que os diferentes significados dos números racionais não devem ser trabalhados de maneira isolada uma da outra (BRASIL, 1998, p. 103).

Fração com o significado da relação parte-todo é contemplado em todos os 13 livros analisados.

É nosso ponto de vista que o significado de divisão seja introduzido ao trabalhar o conceito de fração, como faz um dos autores analisados, ao iniciar a seção “Explorando Frações no dia a dia”: “Nesta seção vamos iniciar a abordagem sobre frações. Como os alunos já estudaram divisão, a ideia de divisão pode ser aplicada na aquisição do conceito de fração. Para introduzir o assunto, pode-se perguntar “Como fazemos quando queremos repartir uma barra de chocolate em partes iguai entre duas pessoas? E se forem três pessoas? Como vocês fariam este tipo de divisão?’ É importante que os alunos associem a ideia de fração à de divisão” (GIOVANNI Jr., 2014, p. 184).

A fração com o significado de divisão é abordada em apenas quatro dos sete livros de 6º ano analisados, embora recomendado desde o 2º ciclo pelos PCN. Um dos livros apresenta fração com o significado de divisão logo no início da retomada de frações (Figura 9).

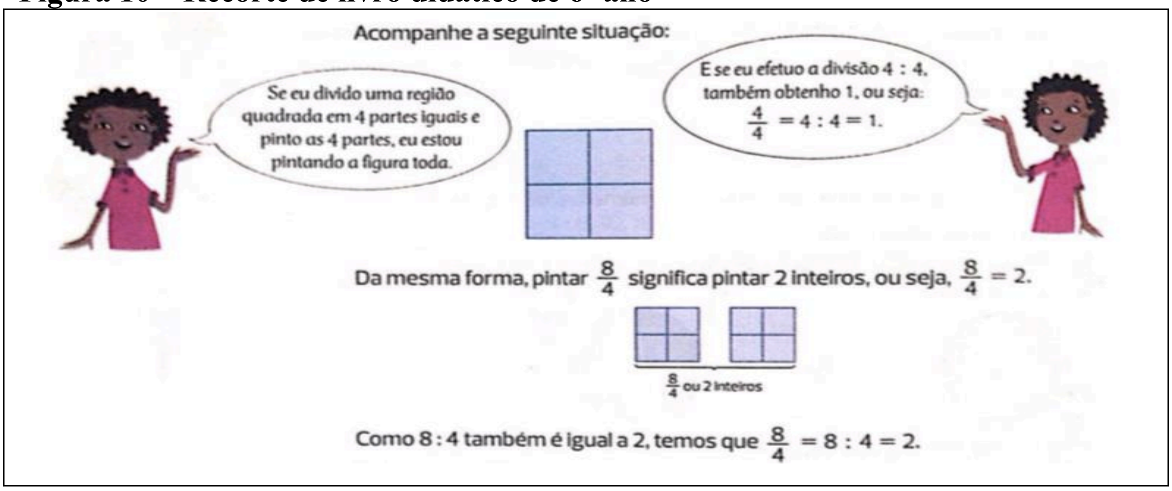
Figura 9 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Pataro e Souza (2012, p. 127).

Em um outro livro de 6º ano esse tópico está dentro de uma seção intitulada “Frações como quociente de dois números naturais” (Figura 10). Em ambos, no entanto, o encaminhamento dado não nos parece claro para o estudante.

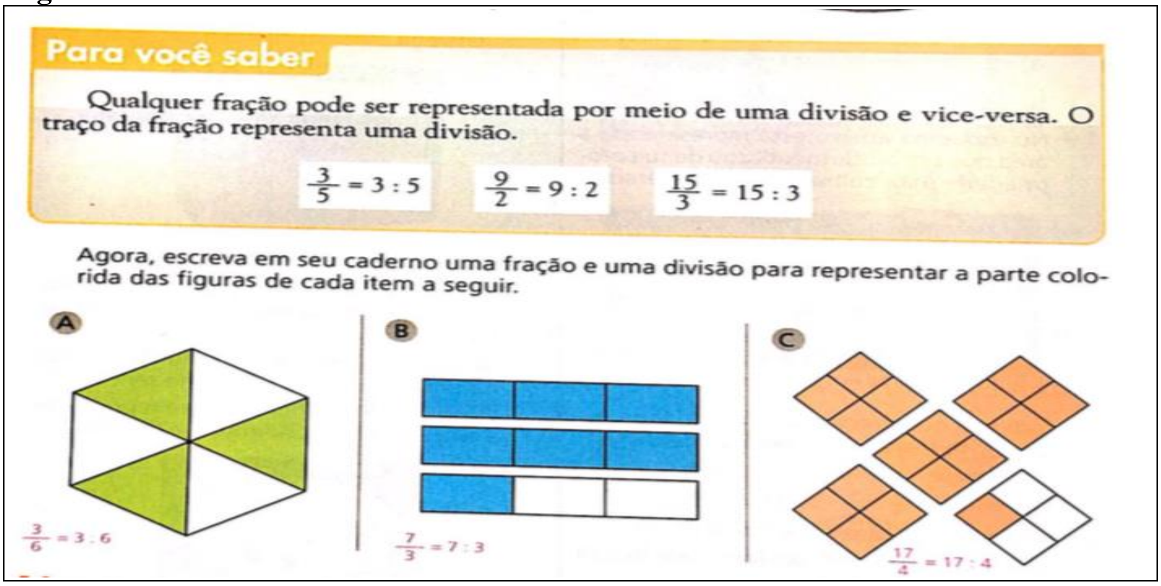
Figura 10 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Dante, 2012, p.158.

Em um outro livro de 6º ano, a fração aparece como quociente em um quadro (Figura 11), em meio aos exercícios, como uma "complementação", mas as imagens contidas no exercício não oportunizam a visualização da fração mencionada na resposta como resultado de uma divisão, além de aqui também não ser ressaltada a unidade.

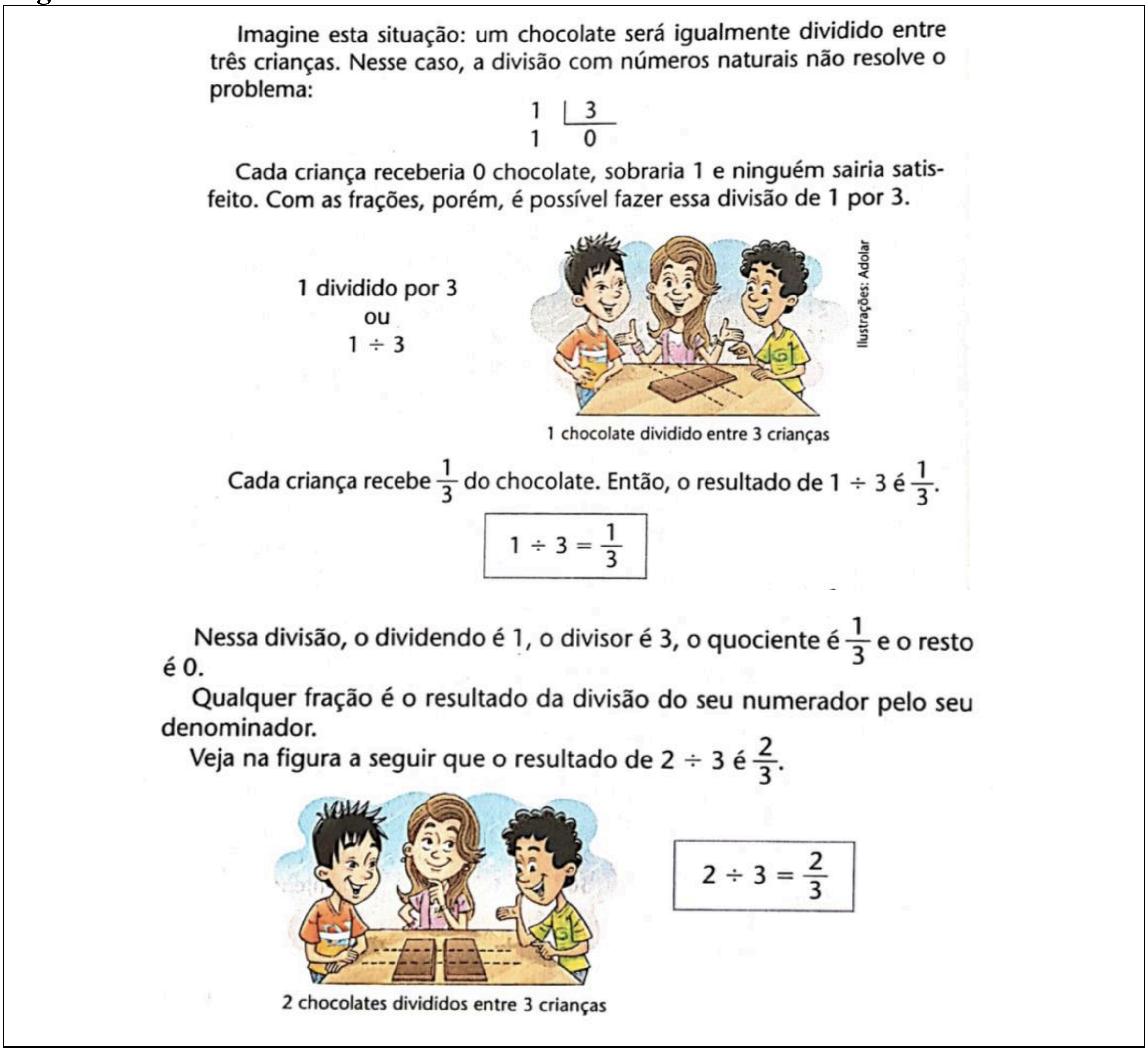
Figura 11 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Cavalcante, Sosso, Vieira e Poli (2006, p. 161).

Em um outro livro de 6º ano, o tópico "Números racionais", primeiro momento em que as frações são abordadas nesse livro, inicia com o significado de fração como divisão (Figura 12), utilizando também imagens para amparar e justificar as divisões, além de deixar implícito que agora novos números estão sendo criados e uma nova abordagem está sendo dada à divisão que até então era a divisão euclidiana (ou divisão com resto), o que consideramos positivo.

Figura 12 – Recorte de livro didático de 6º ano



Imagine esta situação: um chocolate será igualmente dividido entre três crianças. Nesse caso, a divisão com números naturais não resolve o problema:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

Cada criança receberia 0 chocolate, sobraria 1 e ninguém sairia satisfeito. Com as frações, porém, é possível fazer essa divisão de 1 por 3.

1 dividido por 3
ou
$1 \div 3$

Ilustrações: Adolar

1 chocolate dividido entre 3 crianças

Cada criança recebe $\frac{1}{3}$ do chocolate. Então, o resultado de $1 \div 3$ é $\frac{1}{3}$.

$$\boxed{1 \div 3 = \frac{1}{3}}$$

Nessa divisão, o dividendo é 1, o divisor é 3, o quociente é $\frac{1}{3}$ e o resto é 0.

Qualquer fração é o resultado da divisão do seu numerador pelo seu denominador.

Veja na figura a seguir que o resultado de $2 \div 3$ é $\frac{2}{3}$.

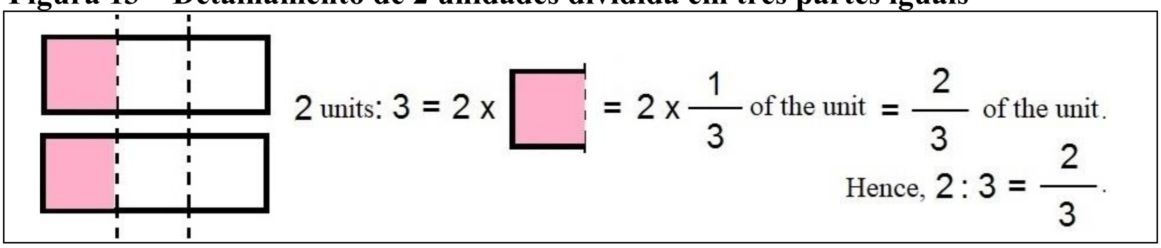
$$\boxed{2 \div 3 = \frac{2}{3}}$$

2 chocolates divididos entre 3 crianças

Fonte: Centurón e Jakubovic (2012, p. 154).

No entanto, talvez a última divisão mencionada (2 unidades divididas em três partes iguais) pudesse ter um maior detalhamento. Em Ripoll e Souza (2019) é apontado este detalhamento: duas unidades divididas em três partes cada uma, é igual a duas vezes cada parte dessa equipartição ($\frac{1}{3}\ da\ unidade$) que também é igual a $\frac{2}{3}\ da\ unidade$, consequentemente $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ (Figura 13).

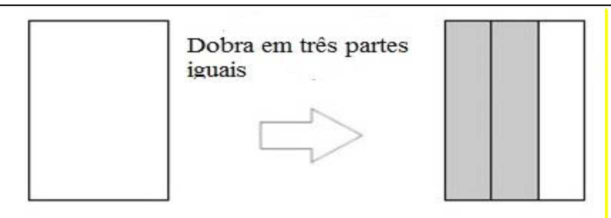
Figura 13 – Detalhamento de 2 unidades dividida em três partes iguais



Fonte: Ripoll e Souza (2019, p. 133).

Dos autores analisados, o que na nossa opinião melhor apresenta fração como divisão, lança um problema interessante e contextualizado: “Uma professora deu 5 folhas de papel sulfite a um grupo de 3 alunos para que construíssem pequenos blocos de anotações. Qual foi a quantidade de papel que cada aluno recebeu, sabendo que o papel foi distribuído igualmente entre eles?” (BIANCHINI, 2015, p.148). No entanto, num primeiro momento, o exercício poderia ter lidado em seu enunciado apenas com duas folhas, para só depois considerar 5 folhas, trabalhando então com $\frac{2}{3}$ como mostra a Figura 14. Além disso, foi proposta a divisão 2 : 3 e afinal trabalhou-se com 1 : 3 + 1 : 3. Questionamos: será que a equivalência entre estas duas expressões é tão evidente para o estudante a ponto de dispensar qualquer comentário?

Figura 14 – Sugestão de “dobras” realizadas em uma folha para representar $\frac{2}{3}$



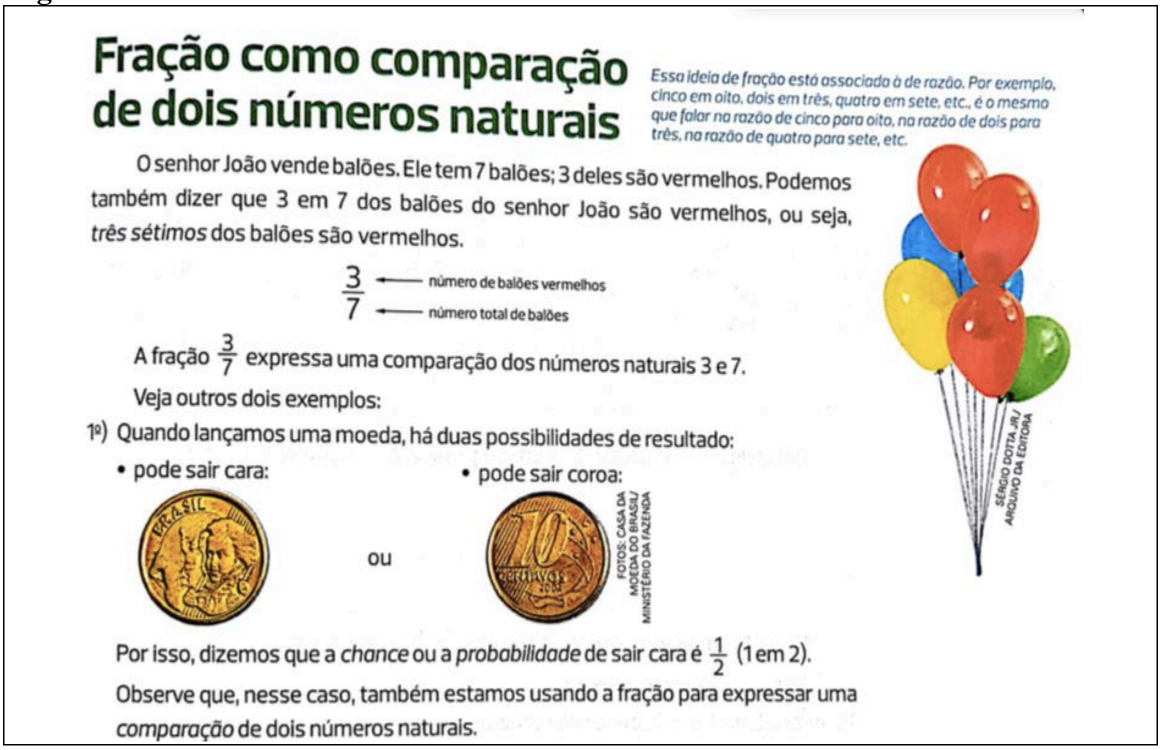
Fonte: Construção da autora (2019).

A fração com o significado de razão, na forma de *comparação* entre duas grandezas (ou quantidades, ou números) aparece em apenas dois dos 7 autores de 6º ano.

Um deles traz um exemplo, que consideramos bastante esclarecedor, com a afirmação “para cada 3 desodorantes de embalagem azul encontramos 10 desodorantes de embalagem vermelha; isto é, a quantidade de desodorantes de embalagem azul representa $\frac{3}{10}$ da quantidade de desodorantes de embalagem vermelha” (Bianchini, 2015, p. 152).

Outro autor de 6º ano que aborda fração como comparação utiliza a nomenclatura “razão”, apenas em bilhete ao professor (Figura 15), o que achamos adequado.

Figura 15 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fração como comparação de dois números naturais

Essa ideia de fração está associada à de razão. Por exemplo, cinco em oito, dois em três, quatro em sete, etc., é o mesmo que falar na razão de cinco para oito, na razão de dois para três, na razão de quatro para sete, etc.

O senhor João vende balões. Ele tem 7 balões; 3 deles são vermelhos. Podemos também dizer que 3 em 7 dos balões do senhor João são vermelhos, ou seja, *três sétimos* dos balões são vermelhos.

$\frac{3}{7}$ ← número de balões vermelhos / ← número total de balões

A fração $\frac{3}{7}$ expressa uma comparação dos números naturais 3 e 7.

Veja outros dois exemplos:

1º) Quando lançamos uma moeda, há duas possibilidades de resultado:

- pode sair cara:
- pode sair coroa:

ou

FOTOS: CASA DA MOEDA DO BRASIL/ MINISTÉRIO DA FAZENDA

SÉRGIO DOTTA JR./ ARQUIVO DA EDITORA

Por isso, dizemos que a *chance* ou a *probabilidade* de sair cara é $\frac{1}{2}$ (1 em 2).

Observe que, nesse caso, também estamos usando a fração para expressar uma *comparação* de dois números naturais.

Fonte: Dante (2015, p. 157).

Apesar de apenas dois dos sete autores de 6º ano mencionarem razão como comparação, concordamos com os PCN que é um assunto que não apenas pode ser tratado em um 6º ano como também ajuda na compreensão do conceito de fração.

Em um dos livros de 7º ano, em bilhete ao professor, aparece a informação de que fração como razão será abordado e aprofundado nos livros de 8º e 9º anos (BIGODE, 2015, p. 35), descumprindo, portanto, a recomendação dos PCN.

O significado de fração como operador está associado a um papel de transformação, isto é, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Esse significado aparece em atividades como, por exemplo: João tem 45 carrinhos em sua coleção, e emprestou $\frac{2}{3}$ para seu irmão brincar. Quantos carrinhos permaneceram guardados na coleção?

Todos os sete livros de 6º ano analisados contemplam o significado de número racional como operador.

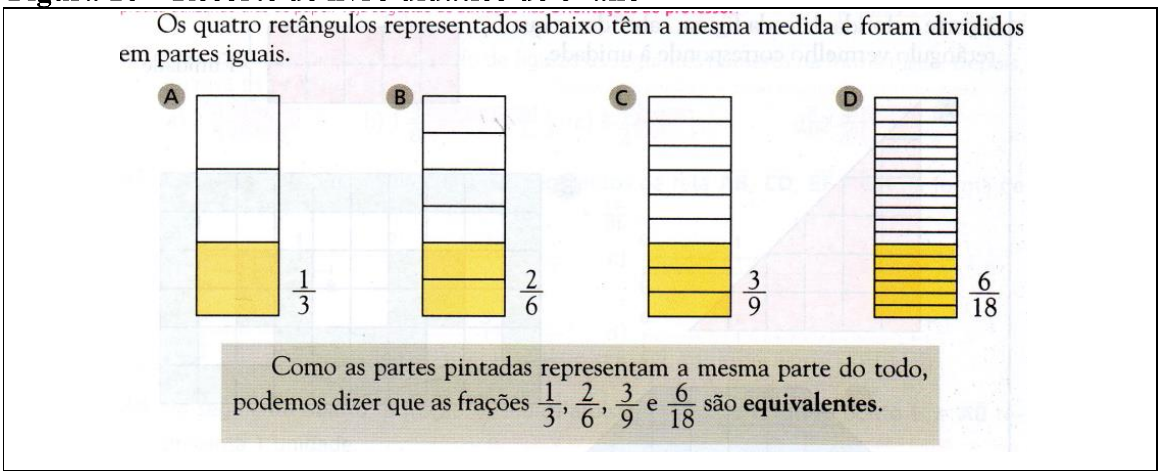
E, relativos à abordagem de equivalência e suas aplicações:

J) Como é introduzida a Equivalência de frações?

Em nenhum dos livros de 4º ano que foram analisados foi encontrado o conceito de equivalência ou qualquer menção a operações com frações, contrariando os PCN, onde encontra-se a orientação de que identificação e produção de frações equivalentes devem ser trabalhadas desde o 2º ciclo do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 59). Já nos livros de 5º ano, equivalência e operações com frações são trabalhadas.

Em todos os sete livros de 6º ano analisados, a equivalência de frações é introduzida com o significado de mesma quantidade (da unidade), no entanto, em quatro deles a equivalência é introduzida apenas apoiada em representações pictóricas e sugerindo ou evocando o que Duval chama de apreensão perceptiva, como sugere a Figura 16. Segundo Duval, a apreensão perceptiva permite identificar ou reconhecer imediatamente uma forma ou um objeto bidimensional ou tridimensional, de acordo com a lei básica da Gestalt[6] referente a percepção visual (Moreira, 2004, p.8). Catto (2000), afirma que "no contato do sujeito com uma figura em um contexto de uma atividade, geram-se duas reações contraditórias: uma imediata e automática (apreensão perceptiva de formas) e outra controlada pela interpretação dos elementos figurais" (Catto, 2000, p.39).

Figura 16 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Cavalcante; Sosso; Vieira e Poli (2006, p. 168).

Dos outros três livros de 6º ano analisados, um apresenta frações equivalentes por meio de uma atividade com dobras de papel, onde o aluno manipula o material e obtém diferentes frações equivalentes à fração dada (Figura 17), facilitando não só a

[6] A lei básica da Gestalt compreende um conceito de significação de formas, cores, texturas entre outras variáveis de maneira auto-organizada pelo cérebro, com o intuito de criar uma significação lógica para os conhecimentos do indivíduo. https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/psicologia/gestalt-definicao-e-as-sete-leis-basicas/48836

visualização, mas também a compreensão. Nos outros dois aparecem inicialmente representações que sugerem apenas a apreensão perceptiva, porém segue-se uma explicação sobre a geração das frações equivalentes a uma fração dada, ficando sugerido um critério apenas parcial de equivalência.

Figura 17 – Recorte de livro didático de 6º ano

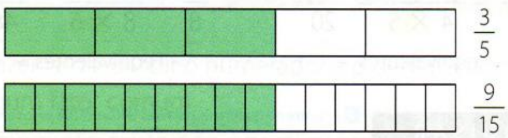
Frações equivalentes

Note que as dobras do papel determinam frações da folha inteira, assim as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representariam a mesma região da folha. Dizemos, então, que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **equivalentes**.

equi: igual
equivalente: de igual valor

Se dobrarmos uma tira de papel de modos diferentes, vamos encontrar outras frações equivalentes. Observe:

1º modo:



Primeiramente, a tira de papel foi dividida em 5 partes iguais, das quais 3 foram pintadas de verde.

Na segunda divisão, na tira de mesmo tamanho, cada quinta parte foi dividida em 3 partes iguais. Assim, tanto a quantidade de partes pintadas de verde como a quantidade total de partes foram multiplicadas por 3.

Utilizando outra representação, temos: $\frac{3}{5} \overset{\times 3}{=} \frac{9}{15}$ ($\times 3$)

Observe então que as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{15}$ são equivalentes, pois representam a mesma parte do todo.

Fonte: Bigode (2015, p. 185).

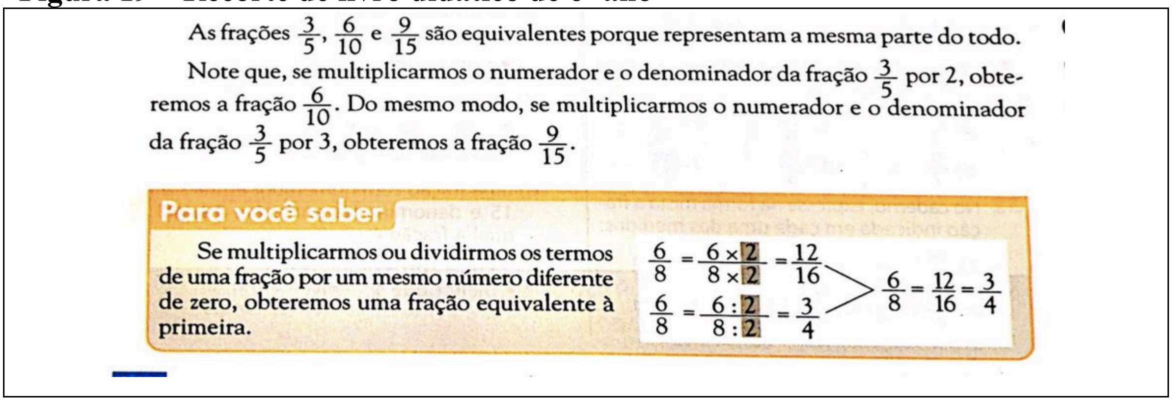
Chamamos atenção para um autor que traz no primeiro exemplo a frase "Dá tudo na mesma!" (Figura 18), alertando para o fato de que frações equivalentes representam a mesma quantidade da unidade. A equivalência de frações sendo introduzida com o significado de mesma quantidade (da unidade), como na Figura 17, deixa embutida a ideia de *número* racional, uma quantidade que pode ser representada por diferentes frações.

Figura 18 – Recorte de livro didático de 5º série/6º ano

Fonte: Imenes e Lellis (2002, p. 224).

Em seis dos sete livros de 6º ano analisados, a equivalência é abordada antes da comparação e das operações com frações, porém a maioria dos autores não ressalta a importância da mesma na discussão desses tópicos; assim, resumem-se a apresentar critérios parciais para gerar frações equivalentes, como o mencionado no recorte da Figura 19, fazendo às vezes também uso da expressão “redução ao mesmo denominador”.

Figura 19 – Recorte de livro didático de 6º ano



As frações $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$ e $\frac{9}{15}$ são equivalentes porque representam a mesma parte do todo.

Note que, se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração $\frac{3}{5}$ por 2, obteremos a fração $\frac{6}{10}$. Do mesmo modo, se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração $\frac{3}{5}$ por 3, obteremos a fração $\frac{9}{15}$.

Para você saber

Se multiplicarmos ou dividirmos os termos de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obteremos uma fração equivalente à primeira.

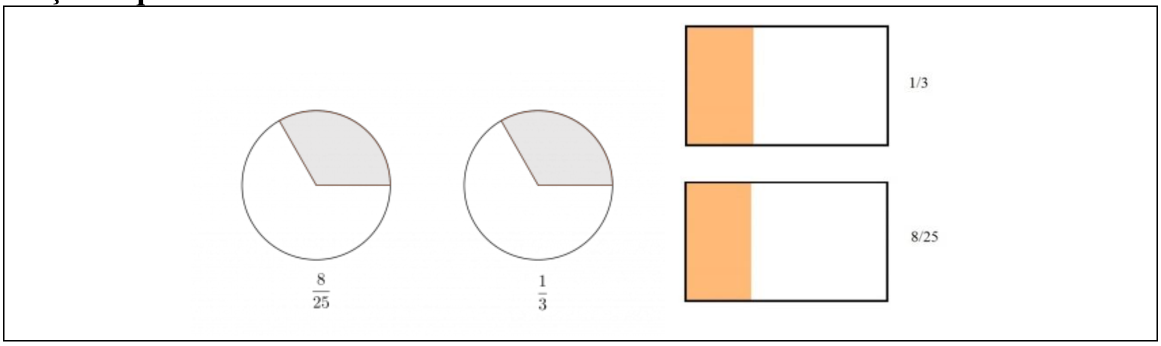
$$\frac{6}{8} = \frac{6 \times 2}{8 \times 2} = \frac{12}{16} \qquad \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4} \qquad \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Fonte: Cavalcante; Sosso; Vieira e Poli (2006, p. 168).

Cabe ressaltar que uma abordagem parcial como a mencionada na Figura 17 e sugerida na Figura 19, pode levar o estudante a tomar o critério parcial (se... então...)

como completo (se... e somente se...) e concluir: “as frações $\frac{10}{15}$ e $\frac{14}{21}$ não são equivalentes, porque 14 não é múltiplo de 10 nem 10 é múltiplo de 14”. De fato, sem um exercício problematizador que desencadeie uma discussão sobre esta questão de lógica, pode passar desapercebida ao estudante a necessidade de um critério completo para decidir se duas frações dadas são ou não equivalentes. Em nenhum dos livros de 6º ano analisados aparece um desafio aos estudantes do tipo “Como reconhecer que duas frações quaisquer são ou não equivalentes?” (Figura 20), motivado por uma situação que contempla um par de frações que aparentam representar a mesma quantidade, oportunizando, portanto, uma discussão que culmine em um critério (completo).

Figura 20 – Representações retangular e circular das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$: São essas frações equivalentes?



Fonte: Ripoll *et al.*(2017, p. 67).

Ao ser anunciado um critério para obter frações equivalentes, ainda que parcial, como o da Figura 45, poucos são os autores que ressaltam que, para gerar frações equivalentes, o fator pelo qual são multiplicados numerador e denominador não pode ser igual zero (Figura 21).

Figura 21 – Recorte de livro didático de 6º ano

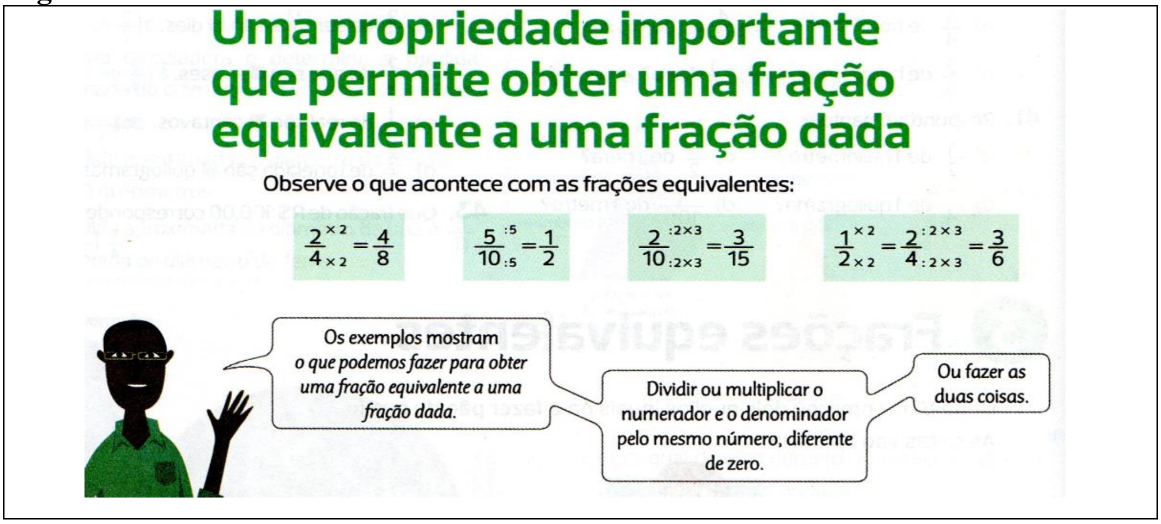
Para obtermos frações equivalentes a determinada fração podemos multiplicar seus dois termos por um mesmo número natural diferente de zero.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

Fonte: Bianchini, 2015, p.157.

Exceção para três autores dos livros de 6º ano analisados deve aqui ser mencionada no que diz respeito à abordagem de equivalência de frações. Um deles parece ter se preocupado com um critério completo para a equivalência de frações, a saber, “Duas frações são equivalentes se e só se, dividindo e/ou multiplicando numerador e denominador da primeira fração pelo mesmo número natural não nulo, obtém-se a segunda fração.” (Figura 22). No entanto, esse autor não o explicita (basta olhar o título da seção) nem o demonstra, e sequer propõe ao estudante o exercício de decidir se duas frações dadas, tais como $\frac{6}{9}$ e $\frac{14}{21}$, são ou não equivalentes.

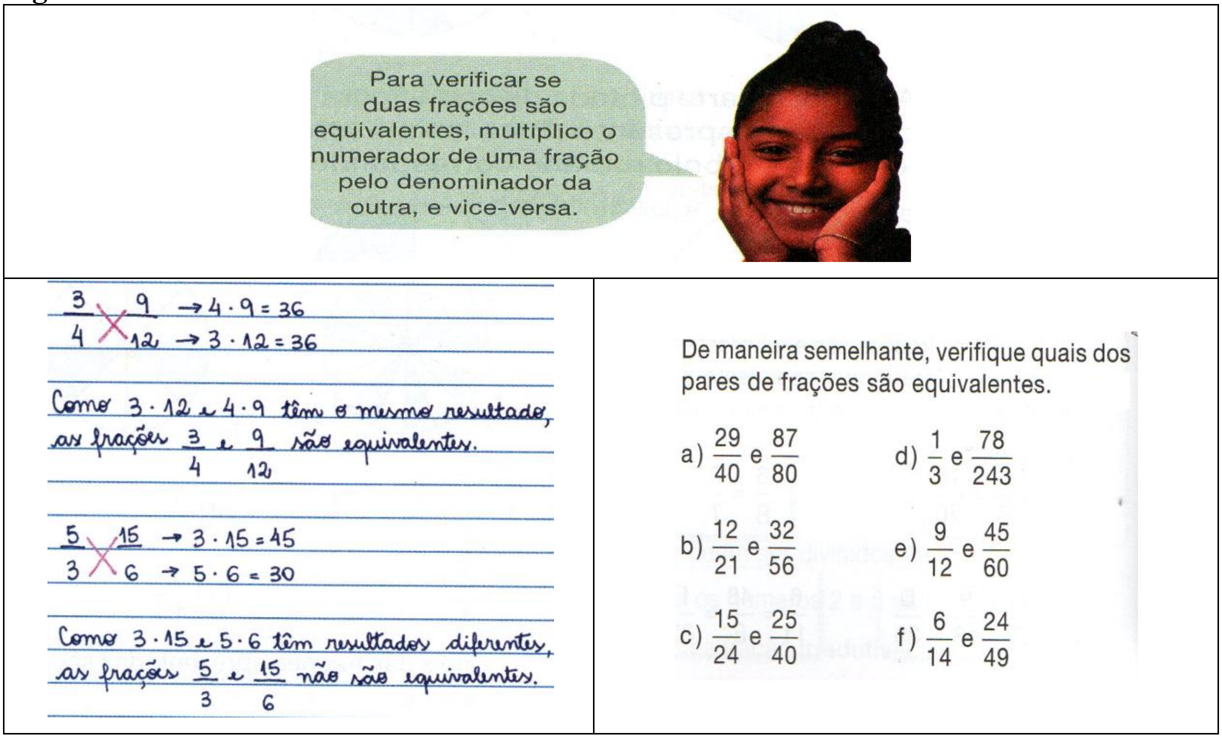
Figura 22 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Dante (2012, p. 166).

Os dois outros autores sugerem, na forma de exercício, o critério estabelecido no que chamamos neste trabalho de Teorema de caracterização de frações equivalentes, e, a seguir, é solicitado ao estudante decidir se determinados pares de frações são ou não equivalentes (Figura 23).

Figura 23 – Recorte de livro didático de 6º ano



$\frac{3}{4} \times \frac{9}{12}$ → $4 \cdot 9 = 36$ → $3 \cdot 12 = 36$

Como $3 \cdot 12$ e $4 \cdot 9$ têm o mesmo resultado, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ são equivalentes.

$\frac{5}{3} \times \frac{15}{6}$ → $3 \cdot 15 = 45$ → $5 \cdot 6 = 30$

Como $3 \cdot 15$ e $5 \cdot 6$ têm resultados diferentes, as frações $\frac{5}{3}$ e $\frac{15}{6}$ não são equivalentes.

De maneira semelhante, verifique quais dos pares de frações são equivalentes.

a) $\frac{29}{40}$ e $\frac{87}{80}$

b) $\frac{12}{21}$ e $\frac{32}{56}$

c) $\frac{15}{24}$ e $\frac{25}{40}$

d) $\frac{1}{3}$ e $\frac{78}{243}$

e) $\frac{9}{12}$ e $\frac{45}{60}$

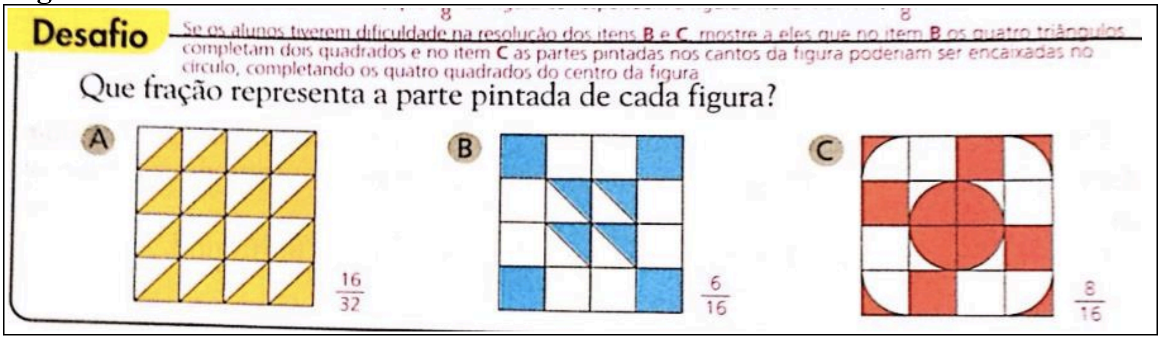
f) $\frac{6}{14}$ e $\frac{24}{49}$

Fonte: Souza e Pataro (2014, p. 136).

Em qualquer uma das exceções mencionadas, no entanto, o estudante não é convidado ao pensamento matemático, sendo-lhes apresentadas receitas prontas, logo de início.

Outro ponto importante a ser observado diz respeito aos exercícios que envolvem equivalência; estes apresentam resposta única (Figura 24), fato que pode restringir o professor em seus argumentos e confundir o estudante. Ao trabalhar, por exemplo, o item B da Figura 24, o aluno pode dar como resposta $\frac{6}{16}$ se considerar os quadrados como resultado da equipartição da unidade, mas também é viável e provável que o estudante considere uma equipartição em triângulos, caso em que daria como resposta $\frac{12}{32}$.

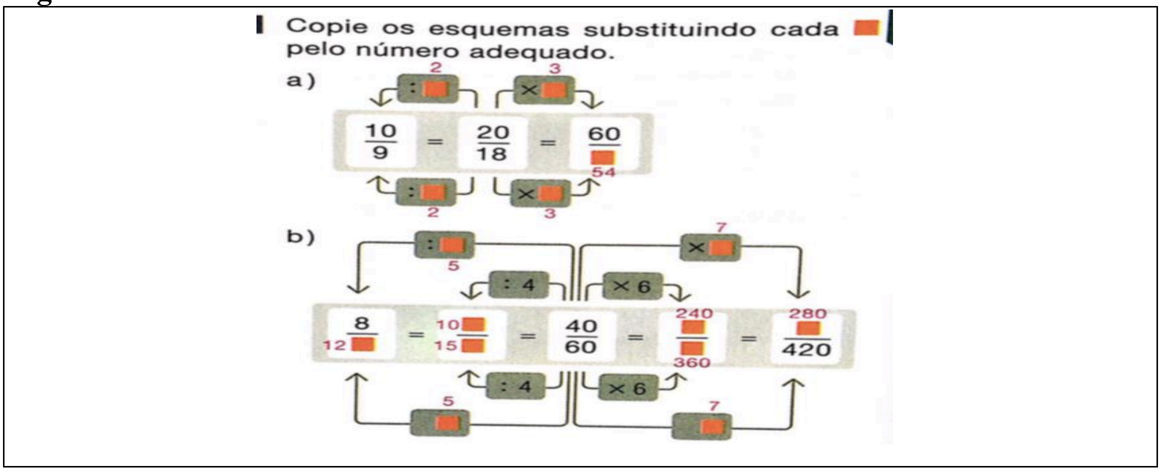
Figura 24 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Cavalcante; Sosso; Vieira e Poli (2006, p. 158).

Encontramos também exercícios sobre equivalência com uma certa poluição visual em seus enunciados, como os apresentados nas Figuras 25 e 26.

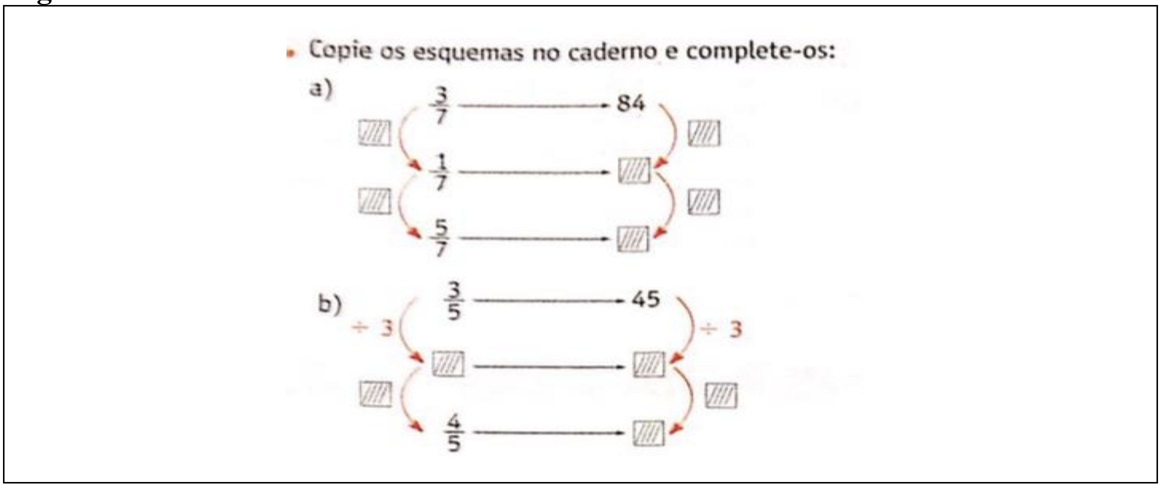
Figura 25 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Souza e Pataro (2014, p. 135).

No nosso ponto de vista, os “quadrinhos” e “setas” podem dificultar a compreensão para o estudante (Figuras 25 e 26).

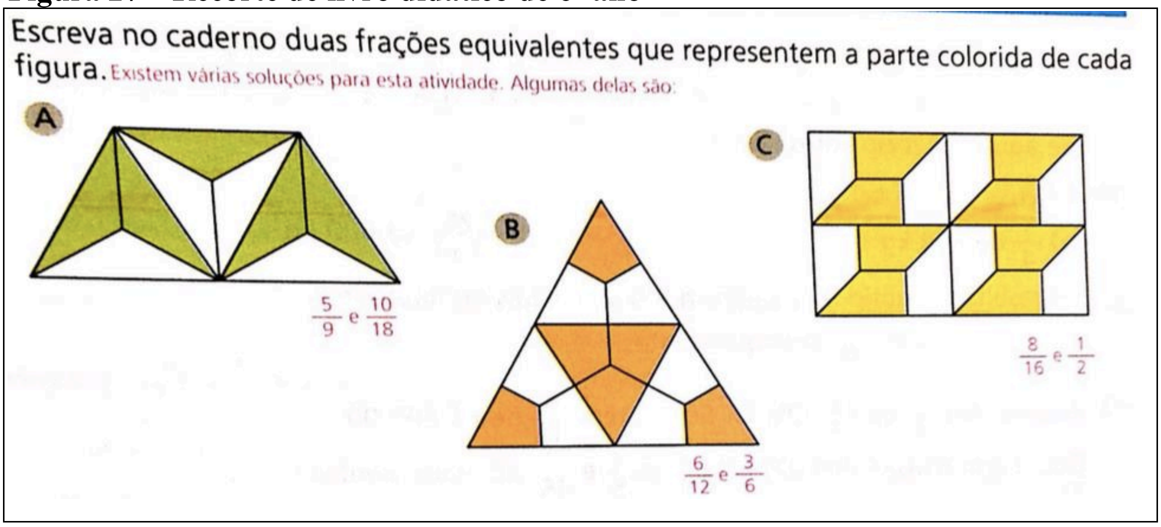
Figura 26 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Imenes e Lellis (2003, p. 106).

Exercícios cujas respostas nem sempre se apoiam no desenho também foram encontrados, por exemplo, no recorte da Figura 27 são dadas apenas duas respostas no lugar das infinitas possíveis, sendo ainda uma delas não sugerida pelo desenho, não ficando portanto, claro ao estudante porque esta resposta aparece.

Figura 27 – Recorte de livro didático de 6º ano



Fonte: Cavalcante; Sosso; Vieira e Poli (2006, p. 169).

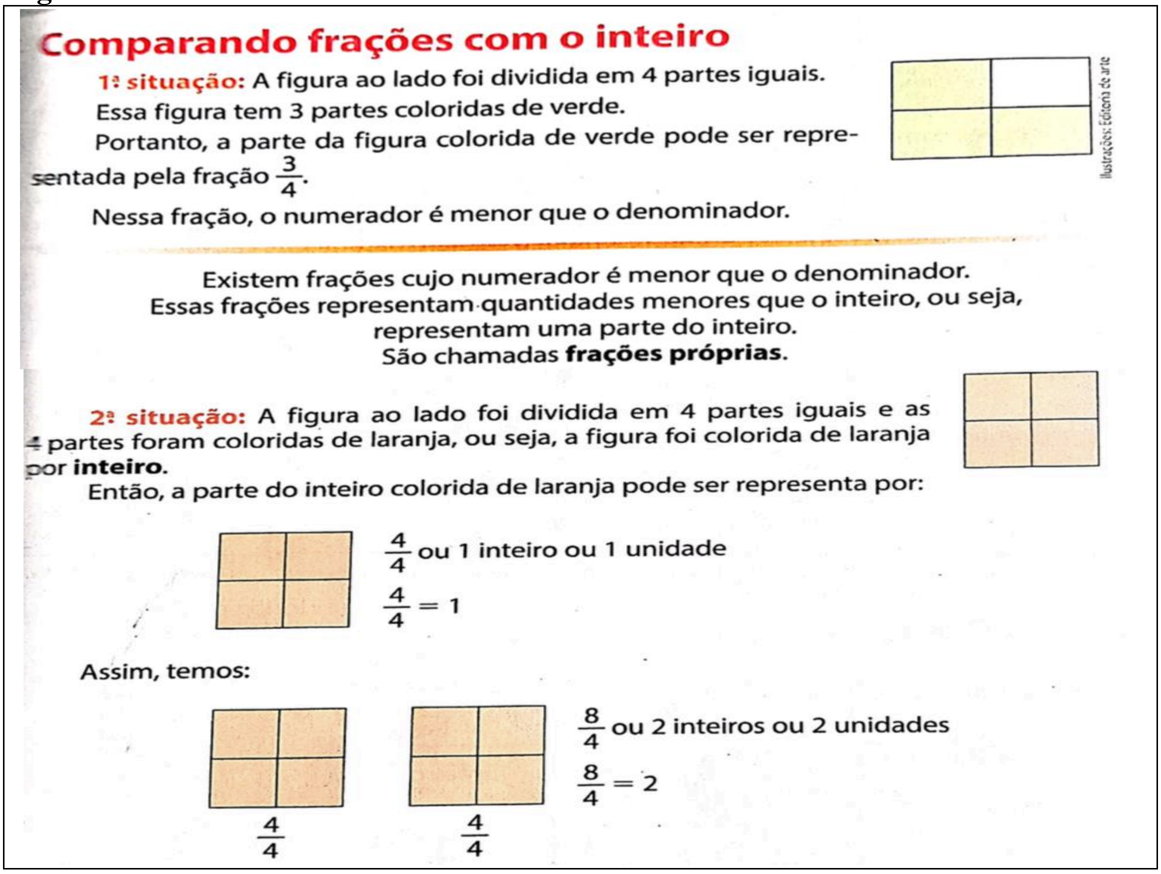
K) São abordados todos os casos de comparação entre frações?

Em todos os livros analisados, a comparação entre frações sempre é vista antes das operações.

Um dos livros de 5º ano, tem “Comparando frações com o inteiro” como título de uma seção, mas só fala em própria, imprópria e aparente, sugerindo a comparação com inteiros, no primeiro caso especificamente com o 1 (Figura 28). No livro de 4º ano do mesmo autor, tem-se a frase: “quando o numerador e o denominador são iguais, a fração corresponde ao inteiro (1)” (GIOVANNI JR., 2014, p. 207).

Consideramos a abordagem dada nos livros de 4º e 5º ano mencionados acima, adequada não no que diz respeito à nomenclatura, mas sim à comparação com a unidade, para então, ser aprofundado no 6º ano.

Figura 28 – Recorte de livro didático de 5º ano



Comparando frações com o inteiro

1ª situação: A figura ao lado foi dividida em 4 partes iguais.

Essa figura tem 3 partes coloridas de verde.

Portanto, a parte da figura colorida de verde pode ser representada pela fração $\frac{3}{4}$.

Nessa fração, o numerador é menor que o denominador.

Existem frações cujo numerador é menor que o denominador.
Essas frações representam quantidades menores que o inteiro, ou seja, representam uma parte do inteiro.
São chamadas **frações próprias**.

2ª situação: A figura ao lado foi dividida em 4 partes iguais e as 4 partes foram coloridas de laranja, ou seja, a figura foi colorida de laranja por **inteiro**.

Então, a parte do inteiro colorida de laranja pode ser representa por:

$\frac{4}{4}$ ou 1 inteiro ou 1 unidade

$\frac{4}{4} = 1$

Assim, temos:

$\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$

$\frac{8}{4}$ ou 2 inteiros ou 2 unidades

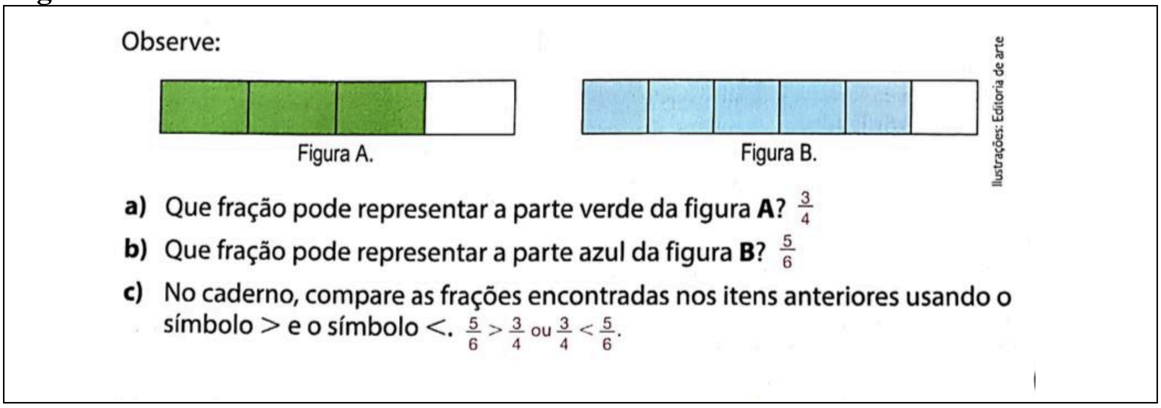
$\frac{8}{4} = 2$

Ilustrações: Editoria de arte

Fonte: Giovanni Jr. (2014, p. 153).

Apenas alguns livros de 5º ano apresentam a ideia comparação de frações, no entanto amparada apenas na visualização das mesmas, sendo sugerido ao estudante que apenas a apreensão perceptiva é suficiente (Figura 29), passando-se logo a seguir à “receita” e perdendo-se a oportunidade de fazer uso da definição de fração não unitária, ficando assim incompleta a argumentação matemática.

Figura 29 – Recorte de livro didático de 4º ano

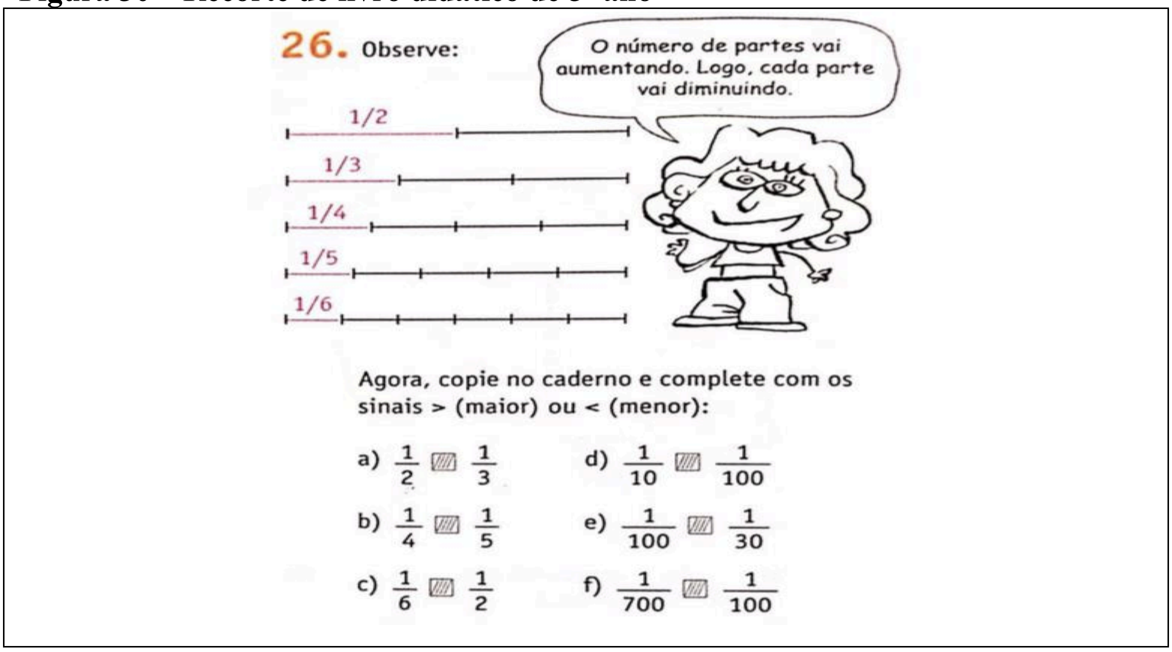


Fonte: Giovanni Jr. (2014, p. 199).

Cabe aqui mencionar que a BNCC, atualmente em vigor, apresenta na unidade temática números para o 5º ano o Objeto de Conhecimento: “Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência” (BNCC, p. 295).

Defendemos que a comparação entre frações não deve se basear exclusivamente na visualização ou apreensão perceptiva. Consideramos uma boa abordagem o recorte registrado na Figura 30, onde o exemplo começa com a visualização, mas não para por aí, tem uma argumentação matemática salientada pela menina.

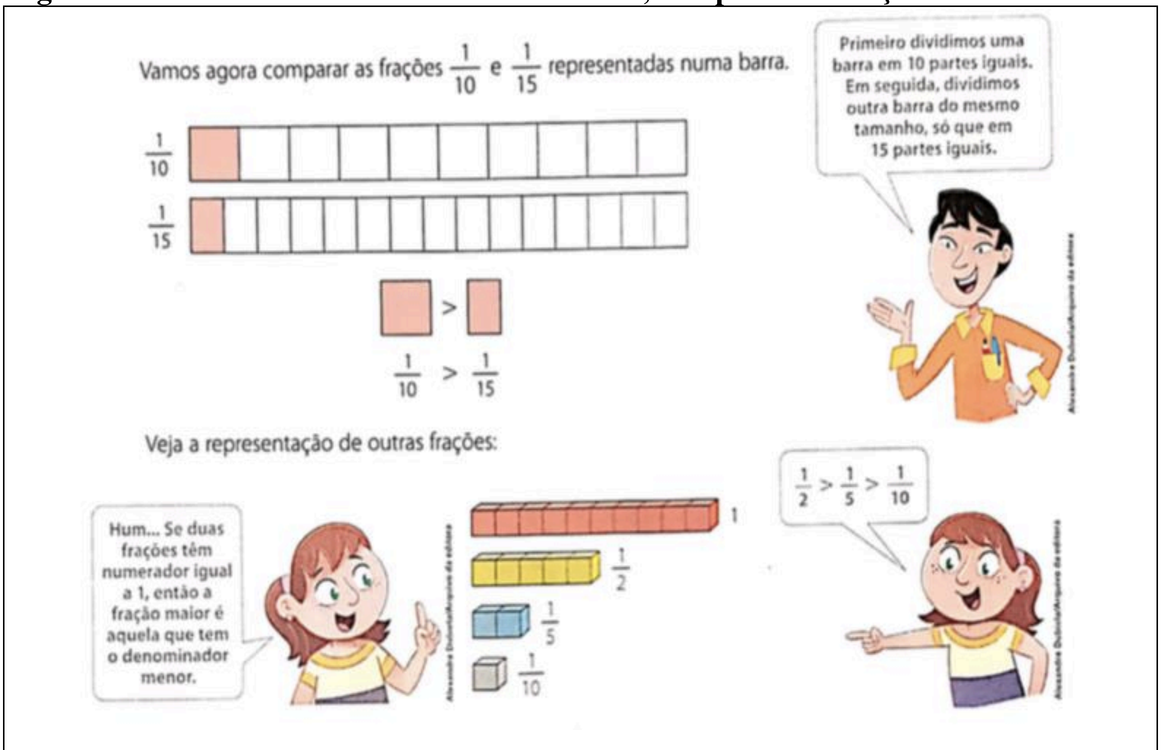
Figura 30 – Recorte de livro didático de 5º ano



Fonte: Imenes eLellis (2003, p. 106).

Com relação aos livros de 6º ano, um dos autores trabalha nos exemplos apenas comparação de frações unitárias (Figura 31), salientando a definição de fração para realizar a comparação, acompanhada de imagem, o que consideramos positivo. No entanto, a equivalência está apenas implícita na segunda ilustração, perdendo-se a oportunidade de evidenciar as igualdades $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. Além disso, neste livro, a comparação entre frações não unitárias aparece apenas nos exercícios, apesar de não ser simples para o estudante, por exemplo, decidir quem é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$.

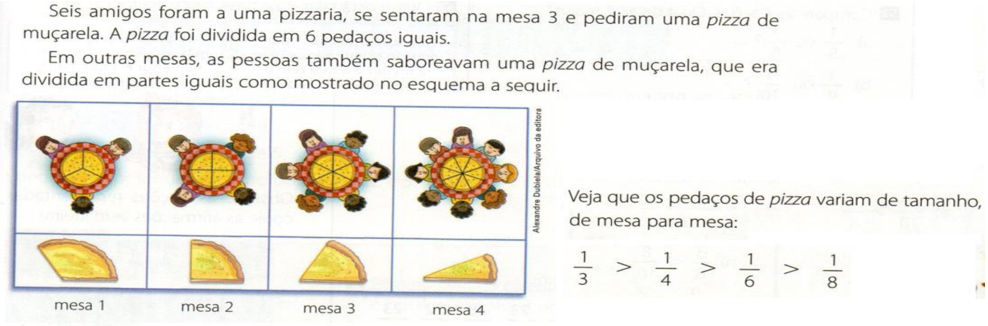
Figura 31 – Recorte de livro didático de 6º ano, comparando frações unitárias.



Fonte: Bigode, 2015, p.190.

Não se percebeu, em quatro dos sete livros de 6º ano analisados, qualquer aprofundamento sobre equivalência e comparação de frações no que diz respeito à argumentação matemática, continuando a resolução de situações de comparação baseada apenas na visualização e apreensão perceptiva, como na Figura 32.

Figura 32 – Recorte de livro didático de 6º ano, comparando frações unitárias


Seis amigos foram a uma pizzaria, se sentaram na mesa 3 e pediram uma *pizza* de muçarela. A *pizza* foi dividida em 6 pedaços iguais.

Em outras mesas, as pessoas também saboreavam uma *pizza* de muçarela, que era dividida em partes iguais como mostrado no esquema a seguir.

Veja que os pedaços de *pizza* variam de tamanho, de mesa para mesa:

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$

Fonte: Bigode (2015, p. 189).

Exceção cabe para um autor de 6º ano que trabalha comparação fazendo inicialmente uso apenas da definição de fração não unitária. Esse autor apresenta a comparação entre 1 inteiro e frações (próprias e impróprias), em um tópico chamado “Frações próprias e frações impróprias”, na lista de exercícios (Figura 33), antes de estudar comparação entre frações.

Figura 33 – Recorte de livro didático de 6º ano, comparando frações (próprias e impróprias) com a unidade

Copie os itens a seguir, substituindo cada ■ pelo símbolo > ou <.

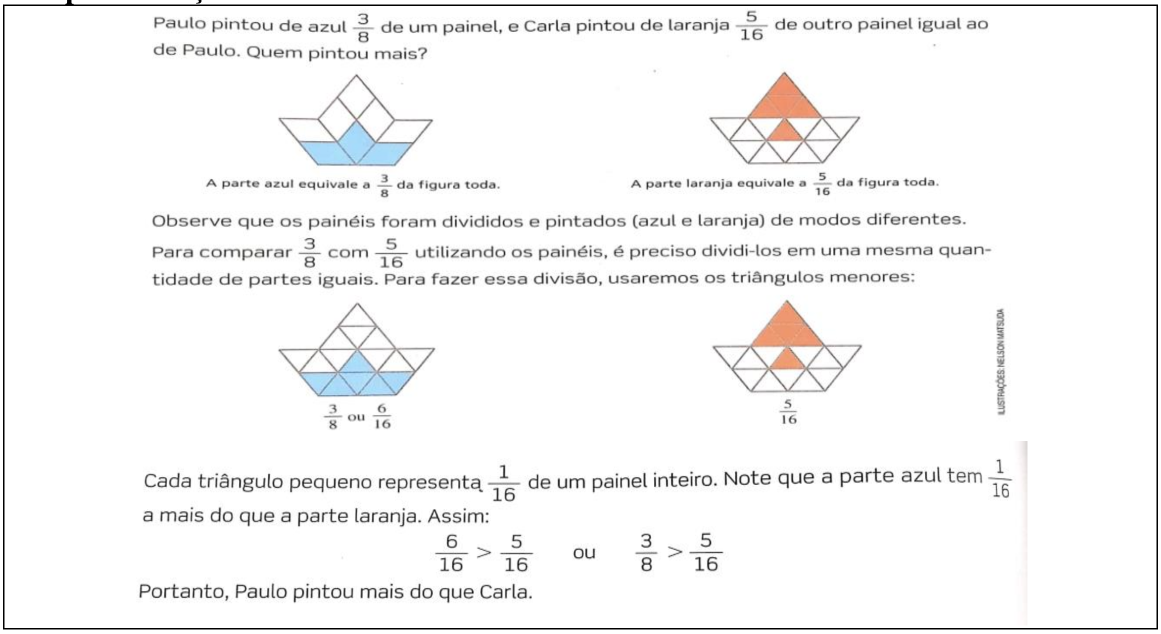
a) $\frac{3}{4}$ ■ 1 <
b) $\frac{9}{5}$ ■ 1 >
c) 1 ■ $\frac{7}{3}$ <
d) $\frac{5}{6}$ ■ 1 <
e) 1 ■ $\frac{3}{7}$ >
f) 1 ■ $\frac{1}{8}$ >

Fonte: Pataro e Souza (2012, p. 133).

Um dos autores trata de frações maiores do que a unidade em uma seção especial, no lugar de apenas considerar o conceito de fração unitária para entender o significado dessas frações.

Nos outros três livros de 6º ano analisados, a comparação ampara-se inicialmente apenas na apreensão perceptiva, mas, logo a seguir, é mencionado que também pode-se fazer uso de equivalência, sendo então apresentado um argumento (Figura 34).

Figura 34 – Recorte de livro didático de 6º ano, ilustrando equivalência para comparar frações


Paulo pintou de azul $\frac{3}{8}$ de um painel, e Carla pintou de laranja $\frac{5}{16}$ de outro painel igual ao de Paulo. Quem pintou mais?

A parte azul equivale a $\frac{3}{8}$ da figura toda.

A parte laranja equivale a $\frac{5}{16}$ da figura toda.

Observe que os painéis foram divididos e pintados (azul e laranja) de modos diferentes.

Para comparar $\frac{3}{8}$ com $\frac{5}{16}$ utilizando os painéis, é preciso dividi-los em uma mesma quantidade de partes iguais. Para fazer essa divisão, usaremos os triângulos menores:

$\frac{3}{8}$ ou $\frac{6}{16}$

$\frac{5}{16}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Cada triângulo pequeno representa $\frac{1}{16}$ de um painel inteiro. Note que a parte azul tem $\frac{1}{16}$ a mais do que a parte laranja. Assim:

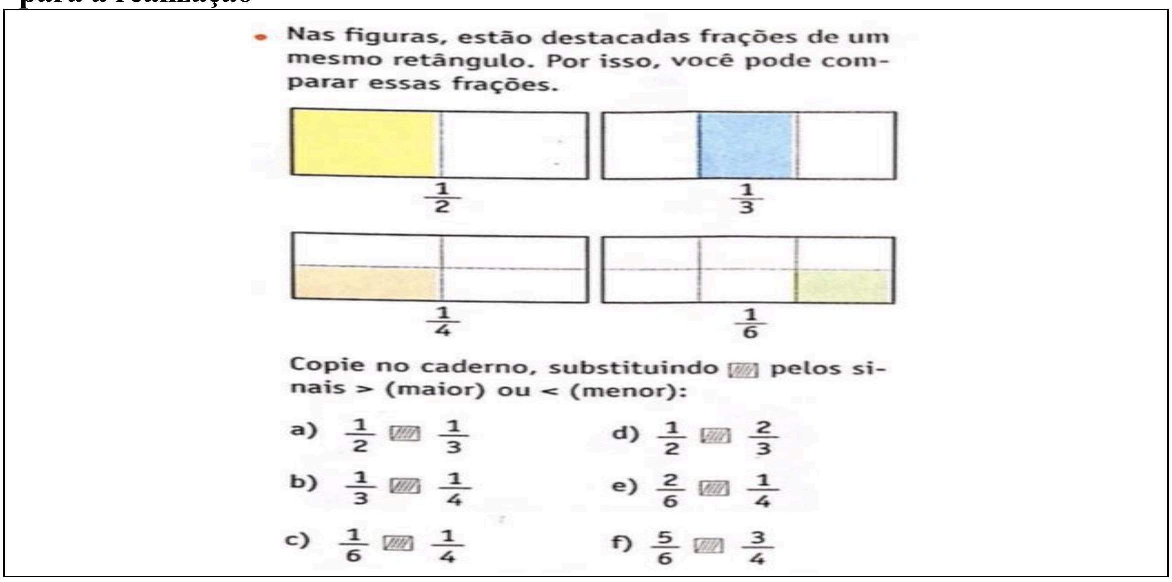
$$\frac{6}{16} > \frac{5}{16} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8} > \frac{5}{16}$$

Portanto, Paulo pintou mais do que Carla.

Fonte: Bianchini (2015, p. 163-164).

Um dos sete livros de 6º ano analisados não traz comparação de frações (trabalha apenas comparação de números racionais na forma decimal). Um entre os seis demais livros de 6º ano, trabalha o tema apenas nos exercícios (Figura 35), ficando sugerido ao aluno comparar apenas baseado nas representações dadas (apreensão perceptiva), apesar de aí estar sugerida a equivalência.

Figura 35 – Recorte de livro didático de 6º ano, envolvendo apreensão perceptiva para a realização


• Nas figuras, estão destacadas frações de um mesmo retângulo. Por isso, você pode comparar essas frações.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

Copie no caderno, substituindo ▨ pelos sinais > (maior) ou < (menor):

a) $\frac{1}{2}$ ▨ $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}$ ▨ $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{6}$ ▨ $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$ ▨ $\frac{2}{3}$

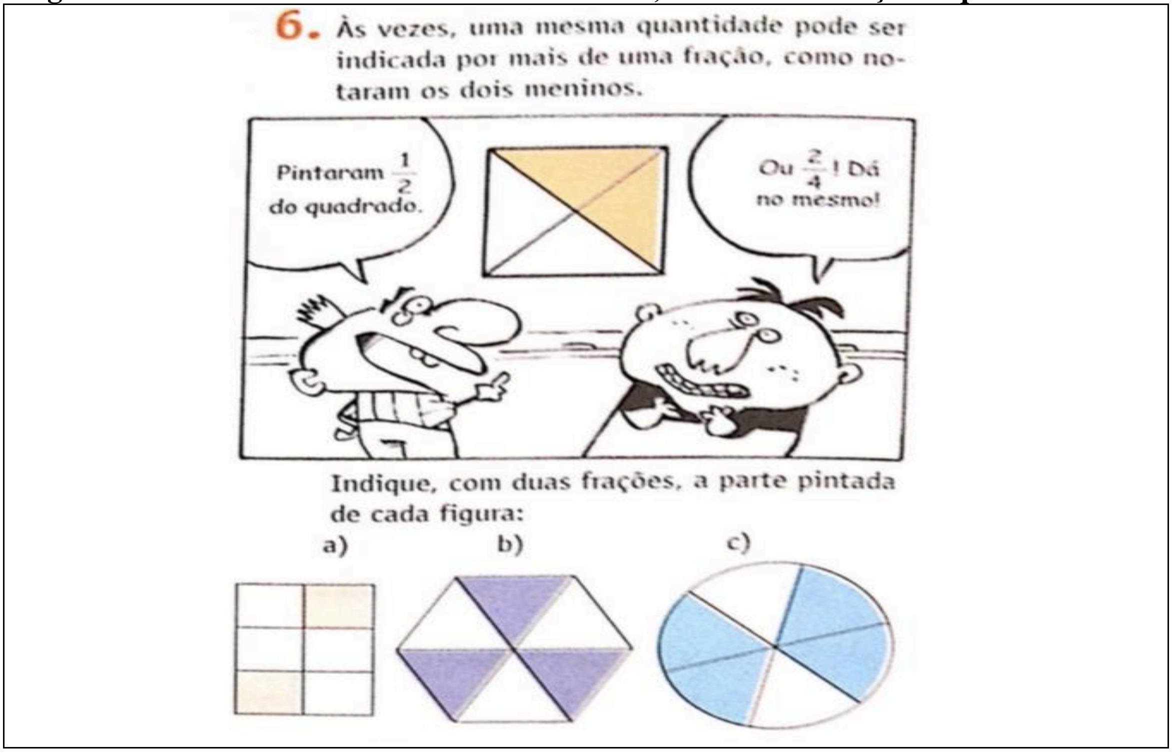
e) $\frac{2}{6}$ ▨ $\frac{1}{4}$

f) $\frac{5}{6}$ ▨ $\frac{3}{4}$

Fonte: Imenes e Lellis (2003, p. 102).

Esse mesmo autor traz, logo na sequência, uma atividade envolvendo frações equivalentes, sem utilizar tal nomenclatura (Figura 36), apresentando o conteúdo de frações equivalentes apenas ao trabalhar adição e subtração de frações.

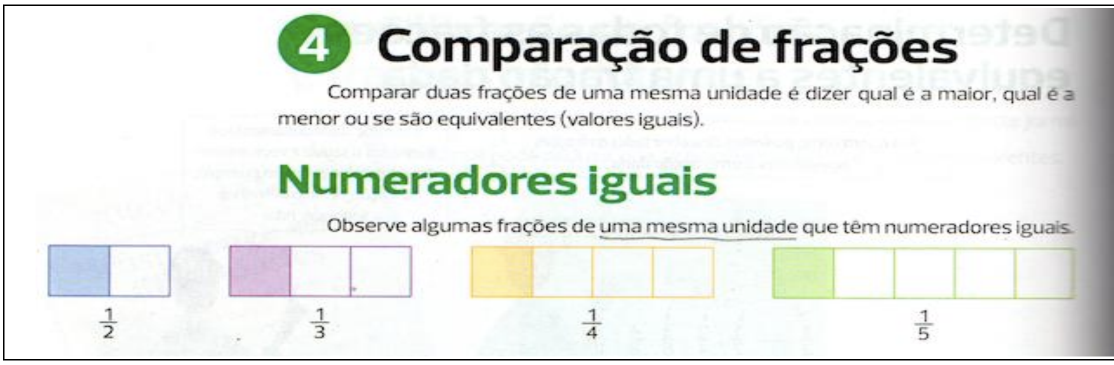
Figura 36 – Recorte de livro didático de 6º ano, envolvendo frações equivalentes



Fonte: Imenes e Lellis (2003, p. 102).

Em um dos livros de 6º ano, ao ser introduzida a comparação de frações, é ressaltada a necessidade de as frações serem de uma mesma unidade, mas a imagem que segue (Figura 37), compara frações unitárias de unidades diferentes, o que na verdade inviabiliza uma tal comparação.

Figura 37 – Recorte de livro didático de 6º ano, envolvendo comparação de frações, onde as unidades são diferentes



Fonte: Dante (2013, p. 170).

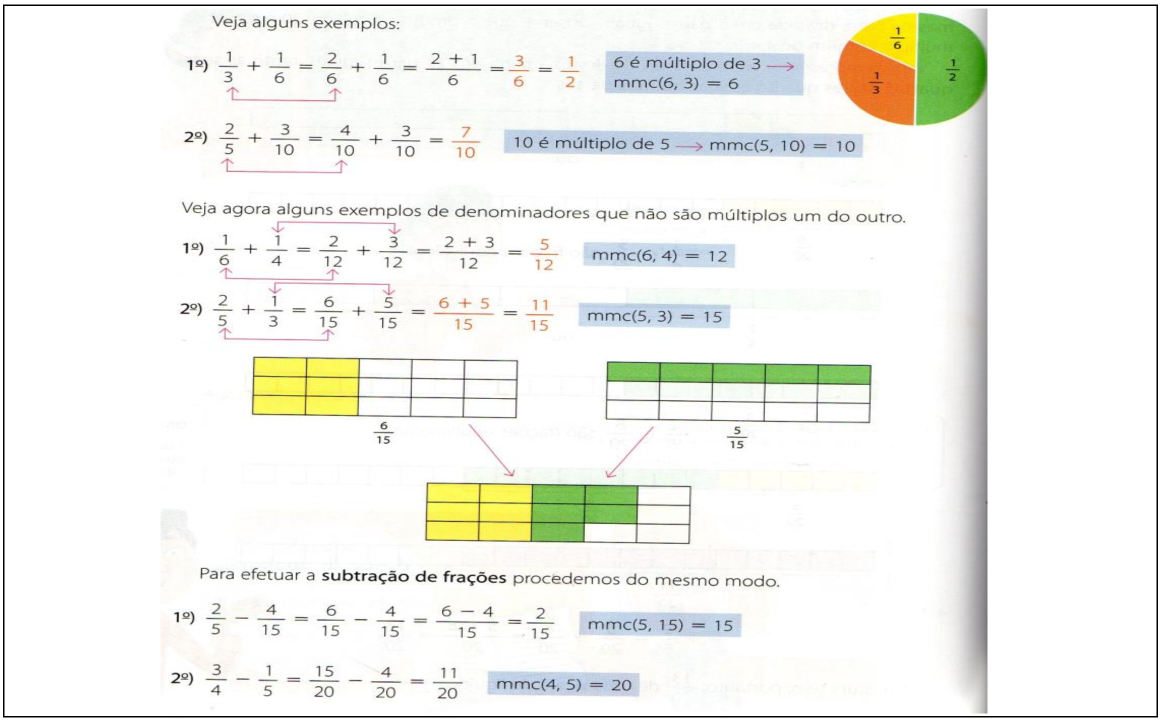
Nenhum dos livros analisados aborda equivalência como uma das possíveis conclusões da comparação entre duas frações quaisquer; trabalham inicialmente apenas com a equivalência para, só então, comparar duas frações não equivalentes. Cabe ressaltar que, ao simplesmente procurar-se responder/problematizar/motivar uma comparação com uma questão do tipo: “a primeira fração representa uma quantidade maior, menor ou igual à quantidade representada pela segunda fração?” já se estaria contemplando diretamente, a chamada lei da tricotomia, sendo a equivalência apenas uma das possíveis respostas à questão colocada.

L) Como é abordada a adição e a subtração de frações quaisquer?

Um dos autores de 4º ano trata da adição com frações de denominadores iguais, contrariando a recomendação dos PCN que orientam para esse ciclo, apenas “cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal...” (PCN, 1998, p.59). Esse mesmo autor, ainda no 4º ano, trabalha com frações decimais. No livro de 5º ano da mesma coleção, é abordada adição de frações com denominadores diferentes, por meio de frações equivalentes.

No que diz respeito às operações de adição e subtração com frações nos sete livros de 6º ano analisados, todos tratam dessas operações envolvendo frações de denominadores diferentes e, para tal, fazem uso de frações equivalentes; no entanto três deles, no lugar de fazerem uso de um múltiplo comum qualquer, enfatizam o uso do mínimo múltiplo comum dos denominadores, ficando implícito ao estudante que só é possível operar fazendo uso desse conceito, o que consideramos inadequado (Figura 38), indo contra portanto a orientação dos PCN de que é possível utilizar as propriedades das frações equivalentes, para transformá-las em frações de mesmo denominador, não necessariamente o menor.

Figura 38 – Recorte de livro didático de 6º ano enfatizando o mínimo múltiplo comum



Veja alguns exemplos:

1º) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 6 é múltiplo de 3 → mmc(6, 3) = 6

2º) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ 10 é múltiplo de 5 → mmc(5, 10) = 10

Veja agora alguns exemplos de denominadores que não são múltiplos um do outro.

1º) $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$ mmc(6, 4) = 12

2º) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$ mmc(5, 3) = 15

Para efetuar a **subtração de frações** procedemos do mesmo modo.

1º) $\frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{6}{15} - \frac{4}{15} = \frac{6-4}{15} = \frac{2}{15}$ mmc(5, 15) = 15

2º) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}$ mmc(4, 5) = 20

Fonte: Bigode (2015, p. 232).

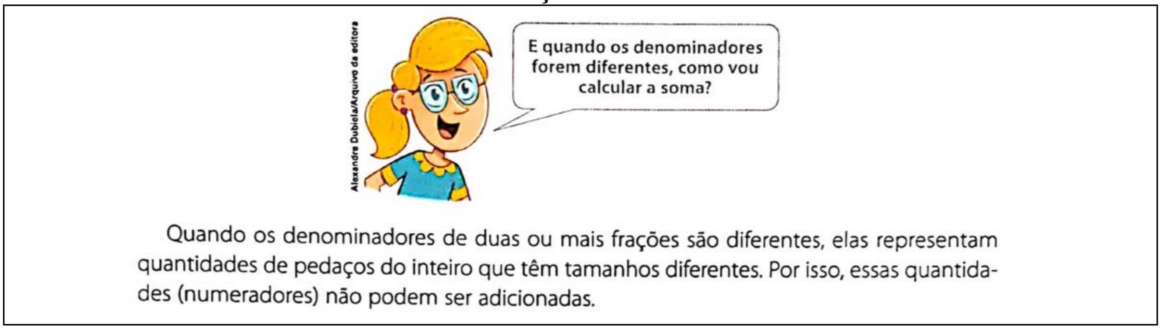
Nesse mesmo livro, tem-se um bilhete ao professor com o qual não concordamos:

> Não é recomendável orientar os alunos para multiplicar os denominadores, pois nem sempre o produto dos denominadores fornece o mmc, embora forneça o múltiplo comum. Os alunos têm que raciocinar sobre múltiplos comuns, e não simplesmente repetir um “truque” mecanicamente (BIGODE, 2015, p. 229).

Na sequência de atividades que implementamos, procuramos ressaltar as vantagens de considerar-se o produto dos denominadores tanto no reconhecimento de equivalência como na comparação, adição e subtração de frações. Por ora, questionamos: ao resolver adição e subtração de frações de denominadores diferentes fazendo uso do menor múltiplo comum (mmc), não estaríamos também, repetindo um “truque”/uma “receita” mecanicamente? De fato, na experiência profissional da autora deste trabalho, em vários momentos alunos questionaram sobre qual a “regra do mmc”, perguntando, por exemplo, durante a realização de uma adição, “o que eu faço primeiro professora, multiplico ou divido o mmc pelo denominador antigo?”

Nesse mesmo livro, o capítulo “Usando frações equivalentes”, inicia com uma justificativa para o motivo de não podermos adicionar frações de denominadores diferentes (Figura 39), algo que não foi encontrado em nenhum outro livro analisado e que muito bem serve de motivação para o aprofundamento, no 6º ano, dessa operação.

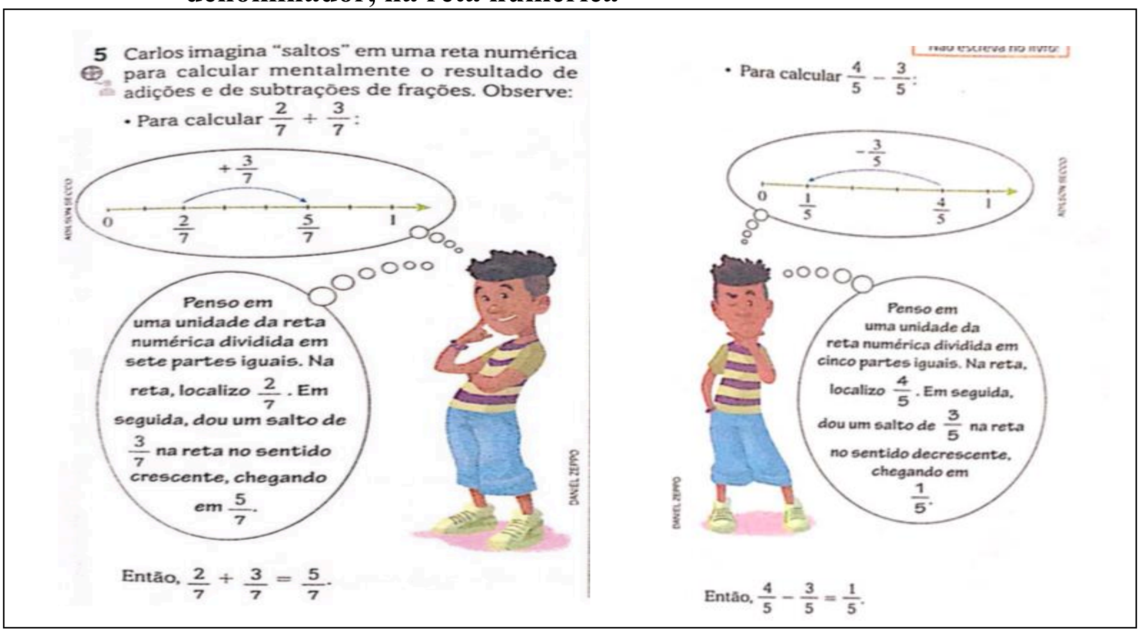
Figura 39 – Recorte de livro didático de 6º ano justificando a impossibilidade de somar numeradores de frações de denominadores diferentes



Fonte: Bigode, 2015, p.229.

Um outro livro de 6º ano é o único a apresentar a resolução para adição e subtração de frações de mesmo denominador na reta numérica (Figura 40), o que consideramos interessante, apesar de propormos um encaminhamento um pouco diferente: primeiro localizaríamos $\frac{1}{7}$ e então trabalharíamos com 2 saltos + 3 saltos de tamanho $\frac{1}{7}$, recorrendo ao fato que uma fração não unitária ser nada mais do que a adição de frações unitárias, por exemplo, $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.

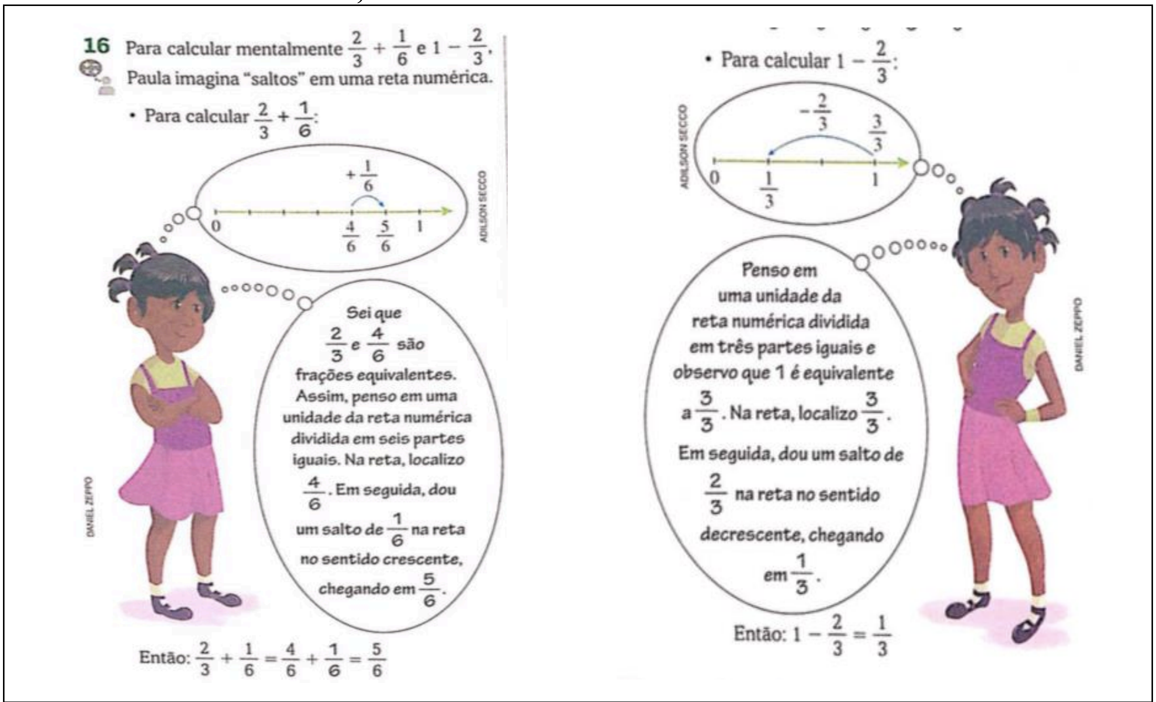
Figura 40 – Recorte de livro didático de 6º ano com soma de frações de mesmo denominador, na reta numérica



Fonte: Bianchini (2015, p. 173).

Já a adição de frações de denominadores diferentes (Figura 41) também abordada na reta numérica, apresentada pelo mesmo autor, recorre a frações equivalentes, o que consideramos positivo.

Figura 41 – Recorte de livro didático de 6º ano com soma de frações de denominadores diferentes, na reta numérica



Fonte: Bianchini (2015, p. 180).

Em um dos quatro outros livros de 6º ano é apresentado um "quadro resumo" com três maneiras diferentes de efetuar uma subtração (Figura 42), e o estudante é convidado a opinar sobre o mais prático deles, sugerindo-lhe uma liberdade de pensamento, o que consideramos muito positivo e de acordo com os PCN, quando estes afirmam "[...] por meio de trocas que estabelecem entre si, os alunos passam a deixar de ver seus próprios pontos de vista como verdades absolutas e a enxergar os pontos de vista dos outros, comparando-os aos seus. Isso lhes permite comparar e analisar diferentes estratégias de solução" (BRASIL, 1998, p. 55).

Figura 42 – Recorte de livro didático de 6º ano

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e vejam como três alunos calcularam a diferença: $\frac{11}{12} - \frac{5}{14}$

Cada um obteve frações de mesmo denominador, equivalentes às frações dadas, porém de maneiras diferentes.

Wiliam calculou o produto dos denominadores das frações dadas.

$$\frac{11}{12} - \frac{5}{14} = \frac{11 \cdot 14}{12 \cdot 14} - \frac{5 \cdot 12}{14 \cdot 12} = \frac{154}{168} - \frac{60}{168} = \frac{94}{168} = \frac{47}{84}$$

Juliana, por sua vez, multiplicou o numerador e o denominador de cada fração por 2, 3, 4, 5, ...

$$\left.\begin{aligned} &\frac{11}{12} = \frac{22}{24} = \frac{33}{36} = \frac{44}{48} = \frac{55}{60} = \frac{66}{72} = \frac{77}{84} \\ &\frac{5}{14} = \frac{10}{28} = \frac{15}{42} = \frac{20}{56} = \frac{25}{70} = \frac{30}{84} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{11}{12} - \frac{5}{14} = \frac{77}{84} - \frac{30}{84} = \frac{47}{84}$$

E, finalmente, Márcio calculou o mmc dos denominadores das frações dadas: mmc(12, 14) = 84

$$\frac{11}{12} - \frac{5}{14} = \frac{77}{84} - \frac{30}{84} = \frac{47}{84}$$

Agora, escrevam uma adição e uma subtração com frações de denominadores diferentes e peçam ao colega que efetue os cálculos aplicando os três modos. Em seguida, discutam qual desses procedimentos vocês acharam mais prático.

Fonte: Bianchini (2015, p. 181).

Complementamos as considerações sobre o uso do mínimo múltiplo comum com um alerta mencionado por Martinez *et al.* (2013, p. 312-313):

> Notemos que estes procedimentos diferem somente na forma em que se elege o denominador comum. Quando multiplicamos os denominadores, a obtenção do denominador comum é imediata, porém as operações envolvem números maiores que podem dificultar o cálculo. Quando buscamos o menor denominador comum, os números que se obtêm [para o cálculo de uma adição, por exemplo] são menores e o cálculo fica facilitado. No entanto, o cálculo do menor denominador comum requer o cálculo do mínimo múltiplo comum. Sempre se pode usar outro múltiplo comum, se não queremos ou não podemos calcular o menor denominador comum [...].

Reiteramos: o tratamento da comparação, adição e subtração de frações fazendo uso do mínimo múltiplo comum não apenas está envolvendo de maneira desnecessária um algoritmo que o estudante precisa relembrar, o que pode constituir uma eventual barreira para o estudante seguir adiante, como pode, afinal, estar sugerindo ao estudante que existe uma única forma de proceder (como sugerido no recorte da Figura 38), além de travar a independência do mesmo na busca por um denominador comum.

Em um dos livros de 6º ano analisados, frações equivalentes só são geradas por meio do critério parcial “multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo número natural não nulo obtemos uma fração equivalente”, e no livro de 7º ano desta mesma coleção frações equivalentes são retomadas para abordar multiplicação e divisão de frações. Porém, apesar desta retomada, equivalência de frações é abordada sem ser mencionada uma caracterização completa para a mesma.

Resumimos no Quadro 2 os aspectos analisados considerados positivos e registrando se os livros didáticos analisados os atendem ou não.

Quadro 2 – Pontos positivos observados na análise dos livros didáticos

	Anos Iniciais – 2º Ciclo				3º Ciclo								
Aspecto Analisado	Livro 1 Giovanni Jr. 4º ano	Livro 2 Garcia 4º ano	Livro 3 Giovanni Jr. 5º ano	Livro 4 Garcia 5º ano	Livro 5 Dante 6º ano	Livro 6 Bianchinni 6º ano	Livro 7 Pataro e Souza 6º ano	Livro 8 Centuriön 6º ano	Livro 9 Bigode 6º ano	Livro 10 Imene e Lellis 6º ano	Livro 11 Cavalcanti, Sosso, Vieira, Poli 6º ano	Livro 12 Andrini 7º ano	Livro 13 Bigode 7º ano
1. As frações são introduzidas pela relação parte-todo.		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Definição adequada de fração.		X											
3. Primeiros exemplos envolvem tanto discreto como contínuo.	X					X		X	X	X			X
4. A equipartição é enfatizada		X		X	X	X		X	X	X	X	X	
5. Aparecem exemplos em que as partes não têm todas o mesmo formato.						X		X	X		X		
6. São tratadas inicialmente apenas frações unitárias.	X												
7. É enfatizada a unidade.		X			X	X			X				
8. As frações impróprias são introduzidas junto com as frações próprias.												X	X
9. Significado parte-todo é contemplado.	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10. Significado de quociente é contemplado (pelo menos parcialmente).	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11. Significado de razão é contemplado.					X	X							
12. Equivalência é introduzida como caso particular de comparação.													
13. É apresentado algum critério (completo) para a equivalência de frações.													
14. Todos os casos de comparação são abordados	X			X	X					X			
15. É abordada a adição de frações quaisquer.				X	X	X	X	X	X	X	X	X	

Fonte: Construção da autora (2019)

Com a leitura crítica explicitada nesta seção é também possível constatar que a equivalência é apresentada sem a devida ênfase. Por exemplo, na maioria dos livros analisados, a comparação fica baseada exclusivamente na apreensão perceptiva, sem fazer-se uso da equivalência. Além disso, não é discutido nem apresentado um critério que a caracterize. Com relação às operações de adição e subtração, a equivalência é empregada, porém, em praticamente metade dos casos, faz-se uso exclusivamente do mínimo múltiplo comum.

Na próxima seção relembramos a construção do conjunto dos números racionais para depois confrontar as duas seções (2.2 e 2.3).

2. 3 A Construção Matemática dos Números Racionais

No contexto da Matemática como ciência dedutiva objetivando a construção dos conjuntos numéricos, os termos “fração” e “número racional” são definidos a partir do conjunto dos números inteiros, suas operações e relação de ordem. Optamos por apresentar neste trabalho a construção do conjunto dos números racionais a partir dos números inteiros por considerá-la, além de um conhecimento de matemática importante para o professor, na medida em que gera interessantes reflexões, como ficará claro na próxima seção. É dessas reflexões que se originou a questão de pesquisa deste trabalho.

Os números racionais têm sua concepção baseada no fato de que a divisão em $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ não é uma operação, isto é, não é possível dividir quaisquer dois números inteiros e encontrar um número inteiro como resultado. Ou seja, considerando $\mathbb{Z}$ como universo numérico, não é possível garantir que dados dois quaisquer inteiros *a, b* exista um inteiro *c* tal que $a = b \times c$. Surge então, a necessidade de construir um novo ente numérico: o número racional.

A construção matemática dos números racionais apresentada, por exemplo, em Ferreira (2013), é iniciada considerando-se uma relação de equivalência estabelecida sobre pares ordenados de inteiros, com segunda componente diferente de zero, portanto elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Os números racionais são então definidos como as classes de equivalência segundo esta relação. Em tal construção, não fica imediatamente evidente a noção de *quantidade* que justifique chamar uma classe de equivalência de *número.* Analisando-se essa construção, percebe-se que o conceito que nela é elementar é o de equivalência (de frações, que são aí escritas na forma de pares ordenados de inteiros). De fato, é a partir do conhecimento sobre números inteiros e sobre a relação de equivalência considerada em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ que se amparam a noção de número racional e toda a estrutura de corpo ordenado dos números racionais, bem como a noção da *quantidade* que uma classe de equivalência representa.

Dessa forma, cada número racional corresponde então a uma classe de divisões equivalentes, que são identificadas. Por exemplo, $6:8$ e $15:20$ são identificados como divisões equivalentes, ou seja, queremos que os pares de inteiros (6, 8) e (15, 20) estejam relacionados e, assim, identifiquem um mesmo número racional. No entanto, não é possível obter resultados inteiros para as divisões $6:8$ e $15:20$ (isto é, não existem inteiros a e b tais que $6 = 8 \times a$ e $15 = 20 \times b$) muito menos, afirmar que $6:8 = 15:20$. Assim, essas expressões não têm significado matemático em $\mathbb{Z}$, mas elas fazem sentido no conjunto $\mathbb{Q}$.

Portanto, para buscar inspiração para a construção a partir dos números inteiros, reescrevemos a ideia embutida na igualdade

$$6:8 = 15:20$$

buscando expressões que sejam legítimas no universo numérico $\mathbb{Z}$:

$$6:8 = 15:20 \leftrightarrow \frac{6}{8} = \frac{15}{20} \leftrightarrow \frac{6\times 20}{8\times 20} = \frac{15\times 6}{20\times 6} \leftrightarrow 6\times 20 = 15\times 8 \ (*)$$

A condição (*), equivalente à igualdade $6:8 = 15:20$, além de verdadeira, faz sentido no universo numérico $\mathbb{Z}$. Por isso, ao invés de falar-se em $6:8 = 15:20$, que não faz sentido em $\mathbb{Z}$, fala-se em $6 \times 20 = 15 \times 8$.

Concluímos, portanto, que a relação (*) é fundamental para a construção dos números racionais.

2.3.1 A definição de $\mathbb{Q}$

Generalizando (*): são tomados dois pares de números inteiros (a, b) e (c, d), com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ (pois esses pares serão associados a divisões) e dizemos que tais pares estão relacionados se e só se:

$$a \times d = b \times c.$$

Para chegarmos à definição de número racional, precisa-se do conceito de relação de equivalência. Por isso começamos relembrando essa definição e fixando a notação *aRb* para significar que o elemento *a* está relacionado com o elemento *b* por meio da relação *R*.

Definição 1: Uma relação binária R em um conjunto A (isto é, um subconjunto de A×A é uma *relação de equivalência* se possuir as seguintes propriedades:

i) $reflexiva,$ isto é, aRa para todo $a \in A$;
ii) $simétrica,$ isto é, se $a, b \in A$ são tais que aRb então bRa;
iii) $transitiva,$ isto é, se $a, b, c \in A$ são tais que aRb e $bRc,$ então $aRc.$

As propriedades básicas de uma relação de equivalência podem ser encontradas em Ferreira (2013), seção 1.2.

Definição 2: No conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) | a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*\}$ definimos a relação ~ da seguinte forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se e só se } a \times d = b \times c.$$

Teorema 1: A relação binária ∼ da definição 3 é uma relação de equivalência.

<u>Demonstração:</u>

A comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$ nos garante que $a \times b = b \times a,$ quaisquer que sejam os inteiros *a, b.* Assim, é claro que

$$(a, b) \sim (a, b),$$

de modo que ∼ é uma relação reflexiva.

Suponhamos que $(a, b) \sim (c, d)$ e mostremos que, então, $(c, d) \sim (a, b)$.

Pela definição de ∼,

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a \times d = b \times c;$$

mas pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$,

$$a \times d = b \times c \leftrightarrow d \times a = c \times b \leftrightarrow (c, d) \sim (a, b).$$

Assim, $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow (c, d) \sim (a, b),$ ou seja, ∼ é uma relação simétrica.

Suponhamos agora que $(a, b) \sim (c, d)\ e\ (c, d) \sim (e, f)$ isto é,

$$a \times d = b \times c \quad (1)$$

e

$$c \times f = d \times e. \quad (2)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade *(1)* por *f,* temos, pela associatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$:

$$a \times d \times f = b \times c \times f$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade *(2)* por *b,* temos, novamente pela associatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$:

$$c \times f \times b = d \times e \times b;$$

pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$,

$$b \times c \times f = c \times f \times b.$$

Portanto,

$$a \times d \times f = \ d \times e \times b$$

Pela lei do cancelamento da multiplicação em $\mathbb{Z}$, já que $d \neq 0$, concluímos

$$a \times f = e \times b,$$

ou seja, $(a,b) \sim (e,f)$. Provamos assim que se $(a,b) \sim (c,d)$ *e* $(c,d) \sim (e,f)$ então $(a,b) \sim (e,f)$, ou seja, , $\sim$ é também uma relação transitiva. ■

Definição 3: Denotamos por $\mathbb{Q}$ o conjunto quociente (isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$$

e o denominamos *conjunto dos números racionais*.

As classes de equivalência determinadas pela relação $\sim$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ recebem uma notação especial neste contexto, no lugar da usual notação [*(a,b)*] para a classe de equivalência do elemento *(a,b)* de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, como especifica a definição a seguir.

Definição 4: Dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ a classe de equivalência do par (a,b) pela relação $\sim$ (ver Definição 3) e o denominamos *número racional,* enquanto o representante (*a,b*) é chamado uma *fração representando o número racional* $\frac{a}{b}$. Assim*,*

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ |(x,y) \sim (a,b)\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*.$$

Com essa notação, tem-se a Propriedade fundamental dos números racionais:

Se $(a,b)\ e\ (c,d)$ são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então vale a igualdade dos números racionais

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se, e somente se, } a \times d = b \times c.$$

De fato, duas classes de equivalência são iguais se e só se seus representantes estão relacionados. Daí, usando a definição de $\sim$, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \times d = b \times c.$$

2.3.2 A relação de ordem em $\mathbb{Q}$

O objetivo desta seção é estender a definição da relação de ordem definida entre os inteiros para os números racionais.

Lema 1: Quaisquer que sejam $m \in \mathbb{Z}^*$ e $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, tem-se

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{m \times a}{m \times b} \overset{def.de\ igualdade\ de\ classe}{\Leftrightarrow}$$

$$(a,b) \sim (m \times a, m \times b) \overset{def.de\ \sim}{\Leftrightarrow}$$

$$a \times (m \times b) = b \times (m \times a) \overset{m \in \mathbb{Z}^*}{\Leftrightarrow}$$

$$a \times b = b \times a,$$

igualdade verdadeira que se justifica pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$. ∎

Proposição 1: Todo número racional pode ser expresso por uma fração de denominador positivo.

Demonstração:

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, se $b > 0$ nada precisamos fazer; se $b < 0$, então $-b>0$. Como a multiplicação em $\mathbb{Z}$ satisfaz a igualdade

$$a \times (-b) = (-a) \times b,$$

temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

Assim, se $b < 0$, vemos que $\frac{-a}{-b}$ tem denominador positivo e também representa o número racional $\frac{a}{b}$. ∎

Definição 5: Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, com $b, d > 0$, definimos

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d \leq b \times c.$$

Teorema 2: A relação $\leq$ está bem definida e é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

<u>Demonstração</u>:

Para mostrar que a relação $\leq$ está bem definida, suponhamos $\frac{a}{b}, \frac{a\prime}{b\prime}, \frac{c}{d}, \frac{c\prime}{d\prime} \in \mathbb{Q}$ são tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{a\prime}{b\prime} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{c\prime}{d\prime}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a \times b' = b \times a' \qquad (1)$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow c \times d' = d \times c' \qquad (2)$$

Com $b, b', d, d' > 0$, sem perda de generalidade, como garante a Proposição 1.

Para mostrar que a relação está bem-feita, precisamos mostrar que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} \leq \frac{c\prime}{d\prime},$$

ou seja, que

$$a \times d \leq b \times c \Leftrightarrow a' \times d' \leq b' \times c'.$$

Partindo de $a \times d \leq b \times c$ e multiplicando ambos os lados da desigualdade por $b' \times d' > 0$, temos

$$a \times d \leq b \times c \overset{\textit{compatibilidade de ordem com a multiplicação em } \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

$$a \times d \times b' \times d' \leq b \times c \times b' \times d' \overset{\textit{comutatividade e associatividade da mult.em } \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

$$(a \times b') \times d \times d' \leq b \times b' \times (c \times d') \overset{\textit{por } (1) \textit{ e } (2)}{\Leftrightarrow}$$

$$(b \times a') \times d \times d' \leq b \times b' \times (d \times c') \overset{\textit{comutatividade e associatividade da mult.em } \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

$$b \times d \times a' \times d' \leq b \times d \times b' \times c' \overset{\textit{compatibilidade da ordem com a mult. em } \mathbb{Z} \textit{ e } b\times d>0}{\Leftrightarrow}$$

$$a' \times d' \leq b' \times c'$$

Portanto, a relação $\leq$ está bem definida.

Para mostrar que a relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$, precisamos mostrar que é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$; pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, $a \times b = b \times a.$ Assim,$a \times b \leq b \times a$, portanto, pela definição de $\leq$ em $\mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, ou seja, $\leq$ é uma relação reflexiva.

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, tais que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}.$$

Queremos mostrar que necessariamente $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De fato:

- como $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ então, pela definição de $\leq$, $a \times d \leq b \times c$; (1)

- como $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ então, pela definição de $\leq$, $c \times b \leq d \times a$. (2).

Pela propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$ aplicada em (2), temos que

$$b \times c \leq a \times d \quad (3).$$

Pela propriedade antissimétrica de $\leq$ em $\mathbb{Z}$, (1) e (3) implicam que

$$a \times d = b \times c,$$

ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Portanto, $\leq$ é uma relação antissimétrica em $\mathbb{Q}$.

Suponhamos agora que $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ são tais que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}.$$

Queremos mostrar que $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \overset{Lema\ 1}{=} \frac{f \times c}{f \times d} \overset{def.\ de \leq}{\Leftrightarrow} \quad a \times (f \times d) \leq b \times (f \times c) \quad (1)$$

$$\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \overset{Lema\ 1}{=} \frac{b \times e}{b \times f} \overset{def.\ de \leq}{\Leftrightarrow} \quad c \times (b \times f) \leq d \times (b \times e) \quad (2)$$

Pelas propriedades associativa e comutativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$ aplicadas em (1), temos que

$$a \times f \times d \leq c \times b \times f \quad (3).$$

Pela propriedade transitiva de $\leq$ em $\mathbb{Z}$, temos que (2) e (3) implicam

$$a \times f \times d \leq d \times b \times e \quad (4).$$

Pelas propriedades associativa e comutativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$ aplicadas em (4), temos que

$$a \times (d \times f) \leq b \times (d \times e),$$

portanto, pela definição de $\leq$ em $\mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \leq \frac{d \times e}{d \times f} \overset{Lema\ 1}{=} \frac{e}{f}.$$

Assim, $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$, portanto $\leq$ é uma relação transitiva. ∎

Teorema 3: (Lei da tricotomia em $\mathbb{Q}$) Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, uma, e apenas uma, das situações seguintes ocorre:

$$\text{ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ou } \frac{c}{d} < \frac{a}{b},$$

onde por “<” significamos " $\leq$ mas não igual”.

Demonstração:

Comparemos os inteiros $a \times d$ e $b \times c$. Pela Lei da Tricotomia em $\mathbb{Z}$, temos:

ou $a \times d = b \times c$, caso em que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ou $a \times d < b \times c$, caso em que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

ou $b \times c < a \times d$, em cujo caso ocorre $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$. ∎

2.3.3 As operações em $\mathbb{Q}$

No conjunto $\mathbb{Q}$ é possível definir operações elementares, entre os números racionais e mostrar que a adição, a subtração e a multiplicação são ampliações das operações em $\mathbb{Z}$.

Definição 6: Dados dois números racionais $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, definimos a adição em $\mathbb{Q}$, como:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$$

Definição 7: Dados dois números racionais $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, definimos a multiplicação em $\mathbb{Q}$, como:

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Nas duas últimas definições, os sinais de operações $\oplus$ e $\otimes$ nos seus primeiros membros referem-se às operações em $\mathbb{Q}$, enquanto, que nos seus segundos membros, as operações são aquelas já supostamente conhecidas de $\mathbb{Z}$.

Teorema 4: As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas, ou seja, o valor da soma e do produto independem dos representantes escolhidos para representar os racionais dados.

Demonstração:

Suponhamos que $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d}, \frac{c'}{d'} \in \mathbb{Q}$ são tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

Então, pela Definição 3:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow (a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a \times b' = b \times a' \quad (1)$$

e

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow (c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow c \times d' = d \times c' \quad (2)$$

Para mostrar que a adição está bem definida, queremos provar que

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'},$$

ou seja, que

$$(a \times d + b \times c, b \times d) \sim (a' \times d' + b' \times c', b' \times d'),$$

ou ainda, que

$$(a \times d + b \times c) \times (b' \times d') = (a' \times d' + b' \times c') \times (b \times d).$$

Fazendo uso das propriedades das operações em $\mathbb{Z}$, podemos escrever

$$(a \times d + b \times c) \times (b' \times d') = (a \times b') \times (d \times d') + (b \times b') \times (c \times d') \overset{por\ (1)}{=}$$

$$(a' \times b) \times (d \times d') + (b \times b') \times (c' \times d) \overset{\substack{comutatividade\ da\ multiplicação \\ em\ \mathbb{Z}}}{=}$$

$$a \times d \times b' \times d' + b \times c \times b' \times d' = a' \times d' \times b \times d + b' \times c' \times b \times d \overset{distributividade\ em\ \mathbb{Z}}{=}$$

$$(a \times d + b \times c) \times b' \times d' = (a' \times d' + b' \times c') \times b \times d.$$

Assim,

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d} = \frac{a' \times d' + b' \times c'}{b' \times d'} = \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}.$$

Para mostrar que a multiplicação está bem definida, queremos provar que

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \otimes \frac{c'}{d'} \ ,$$

ou seja, que

$$(a \times c, b \times d) \sim (a' \times c', b' \times d')$$

ou ainda, que

$$(a \times c) \times (b' \times d') = (a' \times c') \times (b \times d)$$

Fazendo uso das propriedades das operações em $\mathbb{Z}$ e de (1) e (2) podemos escrever

$$(a \times c) \times (b' \times d') \overset{comutatividade\ da\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=} (a \times b') \times (c \times d') \overset{por\ (1)}{=}$$

$$= (b \times a') \times (c \times d') \overset{por\ (2)}{=}$$

$$= (b \times a') \times (d \times c') \overset{comutatividade\ da\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=} (a' \times c') \times (b \times d).$$

Assim, a multiplicação em $\mathbb{Q}$ está bem definida. ■

O teorema a seguir evidencia uma das diferenças cruciais entre as estruturas de $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Q}$.

Teorema 5: O conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações de adição e de multiplicação, tem a estrutura algébrica de corpo ordenado, sendo o elemento neutro aditivo $\frac{0}{1}$ e o neutro multiplicativo $\frac{1}{1}$. Além disso, o inverso multiplicativo de um racional $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, pode ser representado por *(b,a)*, isto é: $\frac{a}{b} \otimes \frac{b}{a} = \frac{1}{1}$.

<u>Demonstração:</u>

Devemos mostrar que valem as seguintes propriedades:

i) A adição é comutativa, associativa, admite elemento neutro e admite inversos;

ii) A multiplicação é comutativa, associativa, admite elemento neutro, é distributiva em relação à adição e todo elemento diferente do neutro aditivo admite inverso;

iii) A ordem é compatível com a adição e, com relação à multiplicação, satisfaz a seguinte propriedade: se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ então, *qualquer que seja o recional* $\frac{e}{f}$*, satisfazendo* $\frac{0}{1} \leq \frac{e}{f}$,

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \otimes \frac{e}{f}.$$

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$. Então:

- $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \overset{def.\ de\ \oplus}{=} \frac{a\times d+b\times c}{b\times d} \overset{comutatividade\ da\ adição\ e\ da\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=}$

$$= \frac{c \times b + d \times a}{d \times b} \overset{def.\ de\ \oplus}{=} \frac{c}{d} \oplus \frac{a}{b}\ ,$$

o que comprova que $\oplus$ é comutativa;

- $\left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right) \oplus \frac{e}{f} \overset{def.\ de\ \oplus}{=} \frac{a\times d+b\times c}{b\times d} \oplus \frac{e}{f} \overset{def.\ de\ \oplus}{=}$

$$\frac{(a \times d + b \times c) \times f + (b \times d) \times e}{(b \times d) \times f} \overset{distributividade\ e\ associatividade\ da\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=}$$

$$\frac{a \times d \times f + b \times c \times f + b \times d \times e}{b \times d \times f} \overset{distributividade\ e\ associatividade\ da\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=}$$

$$= \frac{a \times (d \times f) + b \times (c \times f + d \times e)}{b \times (d \times f)} \overset{def.\ de\ \oplus}{=}$$

$$= \frac{a}{b} \oplus \frac{c\times f+d\times e}{d\times f} \overset{def.\ de\ \oplus}{=} \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c}{d} \oplus \frac{e}{f}\right),$$

o que comprova que $\oplus$ é associativa;

- Para provar que $\oplus$ admite elemento neutro, a saber, o número racional $\frac{0}{1}$, inicialmente observamos que, pelo Lema 1, $\frac{0}{1} = \frac{0}{m}$, qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}^*$. Daí, qualquer que seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{0}{m} \oplus \frac{a}{b} \overset{def.\ de\ \oplus}{=} \frac{0 \times b + m \times a}{m \times b} = \frac{m \times a}{m \times b} \overset{\text{Lema 1}}{=} \frac{a}{b}$$

Logo, a adição em $\mathbb{Q}$ admite como elemento neutro o racional $\frac{0}{m}$, qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}^*$.

- Afirmamos que $\oplus$ admite inversos, mais precisamente, que qualquer que seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, existe $\frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{0}{1}$$

De fato, afirmamos que $\frac{a'}{b'} = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ tem essa propriedade. De fato,

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{-a}{b} \overset{def.\ de\ \oplus}{=} \frac{a \times b + b \times (-a)}{b \times b} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{1}$$

- Para comprovar a comutatividade da multiplicação basta observar que

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} \overset{def.\ de\ \otimes}{=} \frac{a\times c}{b\times d} \overset{comutatividade\ da\ multiplicação\ em\ \mathbb{Z}}{=} \frac{c\times a}{d\times b} \overset{def.\ de\ \otimes}{=} \frac{c}{d} \otimes \frac{a}{b};$$

- Para comprovar a associatividade da multiplicação, observamos que

$$\left(\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}\right)\otimes\frac{e}{f}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{a\times c}{b\times d}\otimes\frac{e}{f}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{(a\times c)\times e}{(b\times d)\times f}\overset{associatividade\ da\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=}$$

$$\frac{a\times(c\times e)}{b\times(d\times f)}\overset{def.\ de\otimes}{=}=\frac{a}{b}\otimes\frac{c\times e}{d\times f}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{a}{b}\otimes\left(\frac{c}{d}\otimes\frac{e}{f}\right).$$

- Afirmamos que $\otimes$ admite elemento neutro, a saber, o número racional $\frac{1}{1}=\frac{m}{m}$, qualquer que seja $m\in\mathbb{Z}^*$. De fato, qualquer que seja $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b}\otimes\frac{m}{m}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{a\times m}{b\times m}\overset{Lema\ 1}{=}\frac{a}{b}.$$

- Cada número racional $\frac{a}{b}$ diferente do neutro aditivo $\frac{0}{1}$ admite um inverso multiplicativo, ou seja, existe $\frac{a'}{b'}$ tal que

$$\frac{a}{b}\otimes\frac{a'}{b'}=\frac{1}{1}.$$

De fato, inicialmente ressaltamos que afirmar que $\frac{a}{b}$ é diferente do neutro aditivo $\frac{0}{1}$ significa, pela definição de $\sim$, que

$$a\times 1\neq b\times 0\,,$$

ou seja, que $a\neq 0$. Afirmamos então que, dado um número racional $\frac{a}{b}$ com $a\neq 0$, o número racional $\frac{b}{a}$ é um inverso multiplicativo para $\frac{a}{b}$. De fato,

$$\frac{a}{b}\otimes\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}\overset{comutatividade\ da\ mult.}{=}\frac{a\times b}{a\times b}\overset{Lema\ 1}{=}\frac{1}{1}.$$

- $\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}\oplus\frac{a}{b}\otimes\frac{e}{f}=\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{a\times c}{b\times d}\oplus\frac{a\times e}{b\times f}\overset{def.\ de\oplus}{=}$

$$=\frac{(a\times c)\times(b\times f)+(b\times d)\times(a\times e)}{(b\times d)\times(b\times f)}\overset{comut.,assoc.e\ distributividade\ em\ \mathbb{Z}}{=}$$

$$=\frac{b\times(a\times c\times f+d\times a\times e)}{b\times(d\times b\times f)}\overset{lema\ 1\ (eliminando\ b\neq 0)}{=}$$

$$=\frac{a\times c\times f+d\times a\times e}{d\times b\times f}\overset{distributividade\ da\ mult.\ em\ relação\ à\ adição\ em\ \mathbb{Z}}{=}$$

$$=\frac{a\times(c\times f+d\times e)}{b\times(d\times f)}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{a}{b}\otimes\frac{c\times f+d\times e}{d\times f}\overset{def.\ de\oplus}{=}\frac{a}{b}\otimes\left(\frac{c}{d}\oplus\frac{e}{f}\right),$$

o que comprova que $\otimes$ é distributiva em relação à operação $\oplus$.

- Supondo agora, sem perda de generalidade, que $b,d,f>0$ e que $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$; então

$$\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\overset{def.\ de\leq}{\Longleftrightarrow}a\times d\leq b\times c\overset{compatibilidade\ da\ mult.\ com\ a\ ordem\ em\ \mathbb{Z}\ (f>0)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow a\times d\times f\leq b\times c\times f.\ \ (*)$$

Daí

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{e}{f}\overset{def.\ de\oplus}{=}\frac{a\times f+b\times e}{b\times f}\overset{Lema\ 1}{=}\frac{a\times f\times d+b\times e\times d}{b\times f\times d}\overset{(*)}{\leq}\frac{b\times c\times f+b\times e\times d}{b\times f\times d}\overset{Lema\ 1}{=}$$

$$=\frac{c\times f+d\times e}{d\times f}\overset{def.\ de\oplus}{=}\frac{c}{d}\oplus\frac{e}{f}.$$

Assim, se $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ então, qualquer que seja o racional $\frac{e}{f}$, $\frac{a}{b}\oplus\frac{e}{f}\leq\frac{c}{d}\oplus\frac{e}{f}$, o que comprova a compatibilidade da ordem $\leq$ com $\oplus$.

- Supondo ainda, sem perda de generalidade, que $b, d, f > 0$ e que $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ e também que o número racional $\frac{e}{f}$, satisfaz $\frac{0}{1}\leq\frac{e}{f}$, isto é , que também *e>0,* tem-se

$$\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\overset{def.\ de\leq}{\Leftrightarrow}a\times d\leq b\times c\overset{\substack{compatibilidade\ da\ ordem\\ com\ a\ mult.em\ \mathbb{Z}\ (e>0)}}{\Longrightarrow}a\times d\times e\leq b\times c\times e\ (**)$$

e então

$$\frac{a}{b}\otimes\frac{e}{f}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{a\times e}{b\times f}\overset{Lema\ 1}{=}\frac{a\times d\times e}{b\times d\times f}\overset{(**)}{\leq}\frac{b\times c\ \times e}{b\times d\times f}\overset{Lema\ 1}{=}\frac{c\ \times e}{d\times f}\overset{def.\ de\otimes}{=}\frac{c}{d}\otimes\frac{e}{f}$$

Assim, se $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ então, qualquer que seja o racional $\frac{e}{f}$ satisfazendo $\frac{0}{1}\leq\frac{e}{f}$ tem-se ,

$\frac{a}{b}\otimes\frac{e}{f}\leq\frac{c}{d}\otimes\frac{e}{f}$, o que comprova a compatibilidade da ordem $\leq$ com $\otimes$. ∎

O conjunto dos números racionais também está munido de outras duas operações, a *subtração* e a *divisão*, simbolizadas por $"-"$ e $":"$, respectivamente, e que são mera consequência da estrutura de corpo comprovada no teorema anterior: dados $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$, define-se

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-b\times c}{b\times d}$$

e, se $\frac{c}{d}$ não é o neutro aditivo $\frac{0}{1}$ então define-se

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}$$

Encerramos esta seção fazendo, a seguir, três comentários e reflexões que se mostram relevantes para seguirmos adiante sobre a conexão entre a construção matemática dos racionais aqui apresentada e as definições de fração e de número racional utilizadas na Escola:

1 – Foram apresentadas tantas demonstrações nesta seção para viabilizar a comprovação de que, para falar-se de número racional, de comparação e de operações entre

números racionais, basta apenas definir uma relação de equivalência entre pares de números inteiros;

2 - Na construção apresentada nesta seção, fica clara a distinção entre número racional, por exemplo $\frac{a}{b}$ (classe de equivalência) e o representante de um número racional, por exemplo, (a, b). Já na escola, o representante da classe de equivalência e a classe propriamente dita são escritos da mesma forma, a saber, $\frac{a}{b}$, o que acaba oportunizando confusão nos alunos. Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ significa que as classes (números) são iguais e não os seus representantes (frações).

3 – Em que momento, afinal, na construção até aqui apresentada justifica-se a nomenclatura "número" para tais classes de equivalência?" Para responder a esta questão, começamos por entender a "inclusão" de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

2.3.4 Identificando $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$

No Ensino Fundamental aprendemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. É claro que, do ponto de vista da construção apresentada na subseção anterior, isso não faz sentido, pois os elementos de $\mathbb{Q}$ são classes de equivalência de pares de inteiros, logo de natureza diferente da dos números inteiros. No entanto, veremos que existe uma função injetora de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ que "preserva" as operações aritméticas e, dessa forma, permite que a imagem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ por essa função seja uma *cópia algébrica* de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$. Assim, do ponto de vista da álgebra, poderemos considerar $\mathbb{Z}$ como um subconjunto de $\mathbb{Q}$.

De fato, a função $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$f(n) = \frac{n}{1},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ é a função que "imerge" $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

Teorema 6: A função $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, acima definida, é injetora. Além disso, ela preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ no seguinte sentido:

1) $f(m + n) = f(m) \oplus f(n)$
2) $f(m \times n) = f(m) \otimes f(n)$
3) se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$

<u>Demonstração</u>:

De fato, se $m, n \in \mathbb{Z}$ são tais que $f(m) = f(n)$, então

$$f(n) = f(m) \Leftrightarrow \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \overset{def.\ de \sim}{=}$$

$$= n \times 1 = 1 \times m \overset{elemento\ neutro\ multiplic.\ em\ \mathbb{Z}}{=} n = m$$

Logo, f é injetora (ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{Z}$ e os elementos de $Im(f)$); assim, cada classe $\frac{m}{1}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$ pode ser (e é) identificada com o inteiro $m \in \mathbb{Z}$.

Além disso,

1) $f(n) \oplus f(m) = \frac{n}{1} \oplus \frac{m}{1} \overset{def. de \oplus}{=} \frac{n \times 1 + 1 \times m}{1 \times 1} \overset{neutro\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{=} \frac{n+m}{1} \overset{def.\ de\ f}{=} f(n+m)$

2) $f(n) \otimes f(m) = \frac{n}{1} \otimes \frac{m}{1} \overset{def. de \otimes}{=} \frac{n \times m}{1 \times 1} = \frac{n \times m}{1} \overset{def.\ de\ f}{=} f(n \times m)$

$m \leq n \overset{neutro\ mult.\ em\ \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} 1 \times m \leq n \times 1 \overset{nedef.\ de \leq}{\Longrightarrow} \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1}$. ■

Assim, o conjunto $f(\mathbb{Z}) = \left\{\frac{n}{1} | n \in \mathbb{Z}\right\}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$. Essa imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ também mostra que $\mathbb{Q}$ é infinito, já que $\mathbb{Q}$ contém uma cópia de $\mathbb{Z}$ que, por sua vez, contém uma cópia de $\mathbb{N}$.

A função f considerada no Teorema 6 permite também reconhecer que a ordem e as operações em $\mathbb{Q}$ são uma ampliação, de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$, da ordem e das operações com inteiros. Em particular, essa identificação permite traduzir a igualdade

$$\frac{1}{1} : \frac{n}{1} = \frac{1}{n} \quad (**)$$

entre números racionais para uma divisão na qual dividendo e divisor são inteiros. De fato, por meio da função f, o número racional $\frac{1}{1}$ está identificado com o inteiro 1 e o número racional $\frac{n}{1}$ está identificado com o inteiro n, de modo que a igualdade (**) pode ser reescrita na forma: *No conjunto $\mathbb{Q}$, o inteiro 1, quando dividido em n partes iguais, resulta em* $\frac{1}{n}$.

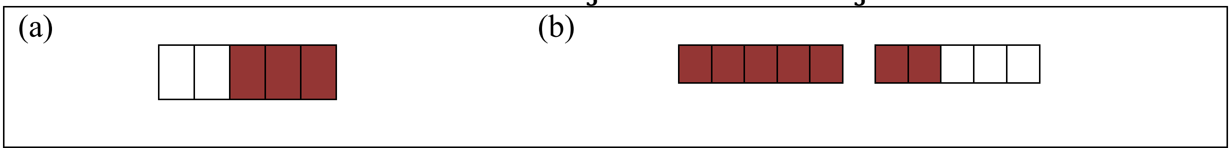
É nesse momento que, nessa construção dos números racionais, fica estabelecido um significado numérico para a classe de equivalência $\frac{1}{n}$. Daí também o significado numérico da classe $\frac{m}{n}$, a partir da adição de *m* parcelas iguais a $\frac{1}{n}$ e fazendo uso da adição em $\mathbb{Q}$ apresentada na definição 7, se dá naturalmente.

2.4 Comparação entre a fundamentação matemática e o conteúdo escolar

A leitura crítica apresentada na seção 2.2 torna possível uma comparação entre a construção dos números racionais descrita na seção 2.3 e a apresentada na Escola. De fato, as duas construções apresentadas em 2.2 e 2.3, podem, em um primeiro momento, ser consideradas diferentes, pois

i) a construção matemática dos racionais (seção 2.3) é iniciada considerando-se uma relação de equivalência estabelecida sobre pares ordenados de inteiros, sem que fique imediatamente evidente a noção de *quantidade* embutida na classe de equivalência que é, afinal, chamada de *número*; por outro lado, na escola, o conceito de fração é introduzido (pela chamada relação parte-todo) de modo a já tornar explícita a quantidade que ela representa daquilo que se considera a unidade. Por exemplo, comer $\frac{3}{5}$ de bolo significa dividir um bolo em 5 partes de mesmo tamanho (quantidade) e comer 3 partes, chamadas, cada uma, de quinta parte do bolo; já comer $\frac{7}{5}$ de bolo significa comer 7 pedaços iguais a uma quinta parte de bolo (Figura 43).

Figura 43 – Representação pictórica para $\frac{3}{5}$ de bolo (a) e para $\frac{7}{5}$ de bolo (b)



Fonte: Construção da autora (2019).

Então, já com esta "distinção" entre a ciência dedutiva e a escola, justifica-se a questão.

Existe afinal alguma relação entre a construção matemática dos racionais e a construção feita na escola? Em caso afirmativo, qual? (*)

Esta questão é reforçada ainda pelos seguintes aspectos:

ii) na seção 2.3, duas frações (representantes das classes de equivalência chamadas de números racionais) (a, b) e (c, d) são equivalentes (isto é, estão na mesma classe de equivalência) se e só se $a \times d = b \times c$; na escola duas frações são equivalentes se e só se representam a mesma quantidade;

iii) a adição de frações é definida em 2.3 sem fazer-se uso do mínimo múltiplo comum (mmc), enquanto na maioria dos livros didáticos analisados o mmc se faz presente na maioria das adições.

Além disso, do item (ii) deduz-se que, se queremos discutir sob que condições sobre os valores *a, b, c* e *d* as frações $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes então estaremos discutindo sobre a existência de um eventual <u>teorema</u>, enquanto que, na ciência, esta condição faz parte da <u>definição</u> da relação $\sim$.

Todas estas reflexões serão retomadas ao longo deste trabalho. Por mais surpreendente que possa parecer para alguns, pretendemos evidenciar que, afinal, as duas abordagens não estão tão distantes uma da outra.

2.5 Estudos correlatos

Apresentamos a seguir um levantamento de trabalhos correlatos ao trabalho que desenvolvemos no intuito de buscar quais semelhanças e diferenças são encontradas na pesquisa que realizamos.

Para realizar esse levantamento, buscamos junto aos bancos de dados da Plataforma Sucupira, trabalhos que mencionam como palavras-chave: Equivalência de Frações; Frações Equivalentes. A partir da leitura dos títulos e resumos disponíveis *online* fez-se um levantamento de trabalhos relacionados ao nosso tema de interesse (ensino de frações, mais especificamente frações equivalentes), entre dissertações e teses. Foram então selecionadas cinco pesquisas que têm relação com a que desenvolvemos e que acreditamos terem potencial para contribuir com o presente trabalho.

A partir da análise de seus objetivos, metodologia, fundamentação teórica, bem como da comparação de seus resultados e conclusões com nossa proposta, os trabalhos foram organizados no Quadro 3, que inclui o autor(a) e o ano de produção, o título do trabalho, o tipo (dissertação ou tese) e a Universidade de origem, aparecendo na ordem com que são posteriormente comentados.

Quadro 3 – Trabalhos selecionados para os estudos correlatos

Autor(a)/Ano	Título do Trabalho	Tipo de Produção	Programa/ Universidade
Denise Teresa de Camargo Valio 2014	Frações: estratégias lúdicas no ensino de Matemática	Dissertação	PROFMat/ UFSCar
Hélia Margarida Gaspar Lopes Ventura 2013	A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência no 2º ciclo do Ensino básico	Tese	Doutorado em Educação/ Universidade de Lisboa
Wagner Rohr Garcez 2013	Tópicos sobre o ensino de frações: Equivalência	Dissertação	Profmat / UFRJ
Adegundes Maciel da Silva 2006	Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio	Dissertação	Mestrado em Ensino das Ciências/ UFRP
Amanda Botega Masson de Jesus 2013	Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento	Dissertação	Pós-graduação Profissional em Matemática/ UFLA

Fonte: Construção da autora (2019).

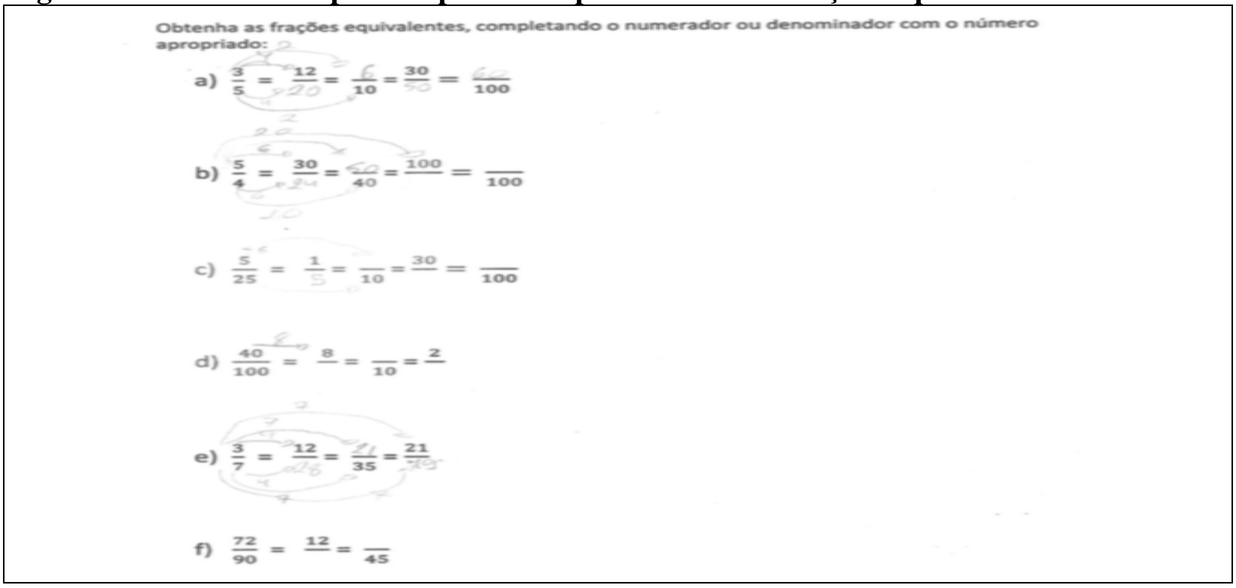
O primeiro trabalho é a Dissertação de Valio (2014) cujo objetivo é o Ensino da Matemática bem como as práticas didático-pedagógicas acerca do tema "números racionais", em particular, frações. O trabalho foi desenvolvido por meio de uma aplicação de exercícios práticos e lúdicos envolvendo alunos de duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Segundo a autora, as atividades e experimentações didáticas são a marca e o propulsor do desenvolvimento deste projeto dissertativo, pois ao empregar materiais manipuláveis (garrafas PET graduadas, funis e água), garantiu originalidade para a relação ensino/aprendizagem da Matemática. Na sequência didática executada foram trabalhados conceitos como a equivalência de frações, comparação de frações e ainda as operações de adição e subtração. Para trabalhar frações equivalentes foi realizada atividade durante uma aula de 50 minutos. Na atividade proposta os alunos deveriam escrever as frações que representavam a parte hachurada de retângulos (Figura 44).

Figura 44 – Atividade proposta por Valio para trabalhar frações equivalentes

Fonte: Valio (2014, p. 46).

No intuito de complementar o estudo das frações equivalentes, foi realizada uma tarefa com seis exercícios (Figura 45).

Figura 45 – Atividade aplicada por Valio para trabalhar frações equivalentes



Fonte: Valio (2014, p. 47).

No exercício acima, a autora afirma que o grau de dificuldade é maior do que o exercício anterior e que em geral, os alunos da turma A, não conseguiram resolver de forma correta. Já os alunos da turma D tiveram um desempenho melhor no desenvolvimento da atividade. Segundo a autora, as maiores dificuldades enfrentadas ocorreram nas operações de multiplicação e de divisão, pois os alunos apresentaram desconhecimento da “tabuada”.

O segundo trabalho é a tese de doutorado da portuguesa Ventura (2013) que busca compreender a evolução dos alunos, de uma turma de 5º ano, na aprendizagem do conceito de número racional, tendo por base uma experiência de ensino, que procurou criar um contexto favorável ao estabelecimento de conexões entre as várias representações dos números racionais, por meio de uma sequência de tarefas matemáticas que promoveu o uso da barra numérica (em nosso trabalho chamada de modelo pictórico de barras). Como enquadramento teórico, este trabalho se concentra em duas vertentes: os números racionais e a aprendizagem dos números racionais. A autora concluiu que os alunos evoluíram na aprendizagem do conceito de número racional, conseguindo, em sua maioria, resolver com sucesso os problemas propostos, para os significados de parte-todo, quociente, operador e medida, e evidenciam capacidade para trabalhar com o valor de posição dos números, com as múltiplas representações dos números racionais e suas conexões, assim como flexibilidade com as unidades de referência. No que diz respeito especificamente a equivalência de frações, a autora defende que é uma noção fundamental para que os alunos consigam adicionar e subtrair frações. Afirma que: “Quando as frações não têm numeradores nem denominadores iguais, os alunos podem operar com frações (se optarem pela representação fracionária) de modo a determinarem frações equivalentes” (VENTURA, 2013, p. 30). Mas, apesar de terem aparentemente compreendido a noção de equivalência de frações, a autora relata que não foi observada a utilização desta na resolução das tarefas (os alunos basicamente usaram números decimais e porcentagem).

O terceiro trabalho é a dissertação de Garcez (2013) que tem como foco o ensino de frações, mais especificamente equivalência. As atividades propostas são voltadas para atender turmas de 5º, 6º e 7º ano, assim como outros níveis em que o conceito de fração equivalente seja abordado. Garcez afirma que, na intenção de facilitar o entendimento dos alunos, os professores limitam-se ao ensino dos racionais à memorização de regras, o que compromete a compreensão do assunto. Segundo o autor, “ao tratar o tópico de comparação de frações, por exemplo, muitos professores e livros didáticos tratam o assunto apenas como uma sequência mecânica, reduzindo as frações envolvidas a um denominador comum, sem explicar que, para tal procedimento, está sendo utilizado o conceito de frações equivalentes” (Garcez, 2013, p. 09).

O quarto trabalho é a dissertação de Silva (2006), que tem como objetivo identificar a concepção de frações e de equivalência de frações em turmas das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, por meio de um teste diagnóstico com 630 alunos de duas escolas públicas, uma Estadual da região metropolitana, e outra Municipal do centro do Recife. De acordo com Silva, os melhores desempenhos estiveram nas séries centrais (6º e 7º séries) e a partir do 2º ano do Ensino Médio. Com sua pesquisa, Silva constatou que o bom desempenho nas frações equivalentes só acontece a partir da 7º série e de forma crescente com a escolaridade; constatou também que a presença de figuras nas questões envolvendo quantidades contínuas promoveu aumento do rendimento na maioria dos itens do instrumento.

O quinto trabalho é a dissertação de Jesus (2013) que tem o intuito de propor para o professor uma sequência de aulas diferenciada dos livros didáticos, pautada na experimentação do aluno e coerente com a etapa do desenvolvimento cognitivo dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Segundo a autora, para evitar que fórmulas e regras sejam decoradas sem a devida compreensão, são apresentadas atividades onde o aluno tenha participação direta no processo de construção das técnicas operacionais envolvidas na equivalência e nas operações de adição e subtração de frações. Em seu trabalho, Jesus salienta que, ao trabalhar frações, o ponto “culminante” do ensino-aprendizagem, são as frações equivalentes, devendo então, a partir delas, trabalhar as operações de adição e subtração de frações. No entanto não é apresentada nesse trabalho uma caracterização completa para frações equivalentes, sendo apenas mencionado que o esperado é que o aluno conclua que se uma fração tem seus termos multiplicados por um mesmo número natural, a nova representação fracionária representa a mesma quantidade da unidade, ou seja, é tratada apenas uma implicação sobre equivalência, e não uma caracterização.

O levantamento bibliográfico realizado contribuiu para nossa reflexão sobre o tema e para reiterar o diferencial de nossa proposta. De fato, ao comparar os trabalhos mencionados com nossa proposta, aproximamo-nos do trabalho de Jesus no que diz respeito a ter como foco a equivalência; no entanto, em nenhum dos trabalhos que ressaltam frações equivalentes, é mencionada qualquer caracterização de frações equivalentes, sendo este o principal diferencial de nossa proposta.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: O TRABALHO DE DUVAL E AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Raymond Duval é filósofo, psicólogo de formação e professor emérito da Université du Litoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. É responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e por importantes estudos em psicologia cognitiva. Em sua extensa produção de pesquisa, Duval aborda principalmente o funcionamento cognitivo, mais especificamente na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem. Desenvolveu trabalhos sobre a utilização específica da língua materna nos procedimentos matemáticos, e sobre a compreensão de textos de matemática, assim como a aprendizagem de diferentes formas de raciocínio e de argumentação. É responsável, também, por estudos relacionados às diversas representações mobilizadas pela visualização matemática. Duval desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, bem como da mudança de registros de representação semiótica, na importante e reconhecida obra *Sémiosis et pensée humaine* (MACHADO, 2010).

De acordo com Machado (2010), a teoria dos registros de representação de Raymond Duval é um instrumento importante para pesquisas relacionadas ao estudo da complexidade da aprendizagem em matemática. De fato, as aulas de matemática, desde os anos iniciais, estão repletas de desenhos, figuras, tabelas, gráficos, esquemas, etc. Com o auxílio de variadas representações, o professor pode abordar muitas ideias, relações, propriedades e conceitos existentes na Matemática.

Em qualquer estudo relacionado à aquisição de conhecimento, é importante utilizar alguma representação. Segundo a Teoria das representações semióticas de Duval, "não há como um sujeito mobilizar qualquer conhecimento sem realizar uma atividade de representação" (ALMEIDA; PATRÍCIO, 2011).

As representações são utilizadas como um instrumento para evocar ou tornar um objeto presente. Esse é exatamente o caso, quando se trata da matemática, visto que os objetos matemáticos não são observáveis sem a utilização de um registro de representação, conforme descrito por Duval:

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e a diversificação de registros de representação (DUVAL, 2003, *apud* PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p. 03).

A construção do pensamento matemático e até mesmo o desenvolvimento da própria matemática estão inteiramente relacionados às representações. O papel das representações vai além de exteriorizar as representações mentais para fins de comunicação. De fato, as representações são fundamentais para os registros das ideias construídas. Em sua teoria, Duval destaca a importância dos registros de representação para a matemática, afirmando que: "o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (DUVAL, 2003, *apud* PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p.03).

Duval salienta a importância de nunca se confundir um objeto e sua representação (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008). Sendo assim, é fundamental saber que nenhum dos registros de representação "é" o objeto matemático, mas sim uma representação "dele". Dessa forma, $7,\ sete,\ \frac{21}{3}\ e\ (10 \times 0{,}7)$ são diferentes representações que se referem a um mesmo objeto matemático, o *número* sete.

Nas atividades matemáticas, um objeto pode ser representado por meio de vários registros de representação e a conversão entre tais representações é que conduz ao aprendizado dos objetos estudados.

Duval afirma que: "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação." (DUVAL *apud* COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p.45).

Dessa forma, quanto mais variadas forem as representações de um objeto, maior é a compreensão a seu respeito. Por exemplo, a fração $\frac{6}{9}$ pode ser também representada pela classe de equivalência do par ordenado (6, 9), por uma representação pictórica (uma pizza ou uma barra, por exemplo) ou ainda por uma outra fração equivalente a ela. O registro de diferentes formas ou a transformação de uma representação para outra é que determina a compreensão sobre o objeto estudado. Utilizando as palavras de Duval, queremos dizer que "a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro" (DUVAL, 2003, *apud* PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p.04).

Em sua teoria, Duval (2003) explica que

> [...] os registros de representações são maneiras típicas de representar um *objeto* matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático, denomina-se sistema ou *registro semiótico*. Os *registros semióticos* são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado (PANTOJA, CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p. 02).

As representações semióticas, de acordo com Patrício e Almeida (2011), se diferem por serem produzidas por um sistema particular de signos[7], como, por exemplo, a língua, a linguagem algébrica, gráficos cartesianos, e na possibilidade de serem convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico.

Na teoria de Duval, representar, tratar e converter registros são argumentos fundamentais. Para Duval só é possível conhecer, compreender e aprender matemática por meio da utilização das diferentes representações semióticas do objeto matemático (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008).

Segundo a Teoria dos Registros de Representação semiótica, ao estudar os objetos matemáticos, devemos dar ênfase a duas transformações de representação semiótica que são bastante diferentes: os tratamentos e as conversões. Duval apresenta as noções de tratamento e de conversão como operações cognitivas, que estão diretamente envolvidas no processo de construção dos conceitos matemáticos. Ele descreve as transformações de tratamento e a conversão, como:

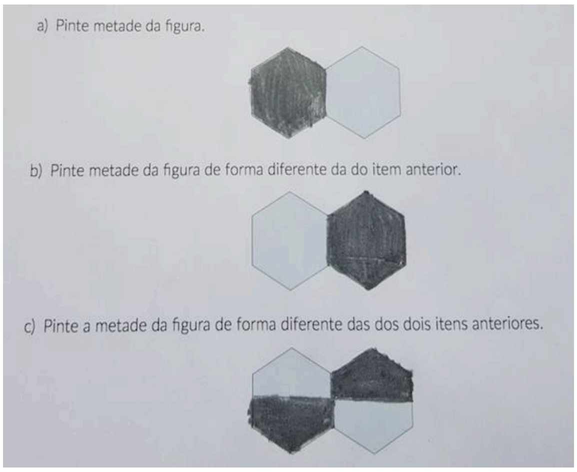
> - Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação.
> - As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica (DUVAL, 2003, *apud* PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p. 05).

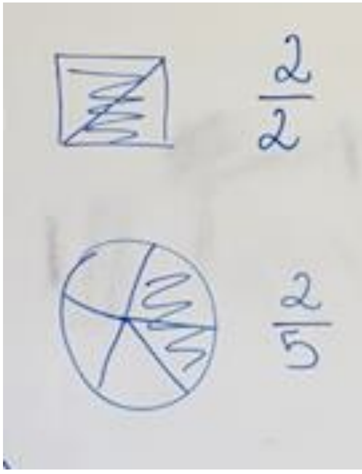
O quadro 4 apresenta características que distinguem as duas formas de transformações descritas anteriormente, segundo Duval, com exemplos. É importante lembrar que, segundo Duval, é na variedade e no "trânsito" entre diversos registros de representação que se evidencia a "porta" para a aprendizagem em matemática. Mais do que isso, "[...] escolher o registro mais apropriado para aplicar os tratamentos implica uma desenvoltura do raciocínio e, conseqüentemente, leva à resolução dos problemas matemáticos e, por fim, à aprendizagem" (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 46).

---

[7] "Um signo, ou *representâmen*, é aquilo que sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém" (PEIRCE, 2005, *apud* ALMEIDA; PATRÍCIO, 2011, p. 03).

Quadro 4 - Distinção entre tratamento e conversão

<table>
<tr><td colspan="2">Transformações de uma representação semiótica</td></tr>
<tr><td>TRATAMENTO</td><td>CONVERSÃO</td></tr>
<tr><td>Permanece no mesmo sistema de registro.</td><td>Muda de sistema de registro, mas conserva a referência aos mesmos objetos.</td></tr>
<tr><td>Quase sempre, é este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado objetivando uma melhor compreensão dos estudantes (PANTOJA, CAMPOS, SALCEDO, 2013, p. 4).
<u>Exemplo 1:</u>


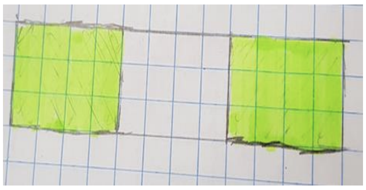
<u>Exemplo 2:</u>
Quando resolvemos uma equação de primeiro grau para determinar o valor numérico de sua incógnita x:
$$3x + 1 = 4 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1 \quad (*)$$
estamos realizando um tratamento.</td>
<td>Em geral, os alunos não reconhecem que se trata de um mesmo objeto em duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação dos registros mobilizados (PANTOJA, CAMPOS, SALCEDO, 2013, p.4).
<u>Exemplo 1:</u>


<u>Exemplo 2:</u>
Agora, quando descrevemos $3x + 1 = 4$ com a frase “o triplo de um número adicionado a um resulta quatro”, estamos realizando uma conversão do registro, inicialmente dado na linguagem algébrica, para o registro na língua natural.</td></tr>
</table>

Fonte: Construção da autora (2019).

No ensino fundamental, as frações são introduzidas com três tipos de representação apontados por Duval: registro simbólico – numérico (fracionário) ou algébrico; no figural (representação de partes de grandezas discretas ou contínuas); e evidentemente no registro da língua natural (IGLIORI; MARANHÃO, 2010). O Quadro 5 apresenta exemplos desses registros no âmbito de frações.

Quadro 5 - Exemplos de registros no âmbito de frações

<table>
<tr><td colspan="4">Registros de Representação e Frações</td></tr>
<tr><td>Registro Figural</td><td colspan="2">Registro simbólico</td><td>Registro na língua natural</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Continuo


Discreto
</td><td rowspan="3">Numérico
$\frac{2}{3}$
$\frac{7}{8}$
$\frac{6}{18}$</td><td>Algébrica</td><td>Dois terços
Sete oitavos
Seis dezoito avos</td></tr>
<tr><td>$\frac{a}{b}$, $b \neq 0$,
$a, b \in \mathbb{Z}$</td><td>Todo número racional pode ser representado por infinitas frações.</td></tr>
<tr><td>$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow$
$a \times d = b \times c$</td><td>Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se e só se $a \times d = b \times c$.</td></tr>
</table>

Fonte: Construção da autora (2019).

Sendo assim, é buscando amparo na Teoria de Duval que desenvolvemos o trabalho com os estudantes, pois, na nossa opinião, este é especialmente o caso quando se pretende abordar o conceito matemático (abstrato) de número.

Por exemplo, buscamos definir equivalência e demonstrar o que aqui chamamos de teorema de caracterização de frações equivalentes, motivando-os (definição e teorema) inicialmente com representação pictórica para só depois enunciá-los fazendo uso da representação $\frac{a}{b}$ (sendo *a, b* números naturais com *b≠0*), envolvendo nesse momento a conversão de representações.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA E DE AÇÃO DOCENTE

A primeira etapa da pesquisa consiste no levantamento bibliográfico dos aspectos teóricos e didáticos dos conceitos do conteúdo em questão, incluindo o que dizem os documentos oficiais (PCN e BNCC do Ensino Fundamental) e sobre as dificuldades de aprendizagem relacionadas a esse tema.

A primeira questão desta pesquisa vem da própria construção matemática dos números racionais:

O que há de elementar na construção dos números racionais a partir do conjunto dos números inteiros?

Cabe esclarecer que, neste trabalho, o termo *elementar* refere-se às "partes nucleares que constituem os germes com base nos quais se sustenta toda a ciência superior. [...] Desta forma, os *elementos* que as constituem vão sendo identificados e, em consequência, a capacidade de esclarecer e difundir seus conceitos aumenta" (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p. IX).

No intuito de responder essa questão, relembramos no Capítulo 2, Seção 2.3 a construção dos números racionais, que pode ser encontrada no livro "A Construção dos Números", Ferreira (2013). A partir dessa construção, surgiu outra questão, não ressaltada pelo autor, porém imprescindível para a construção dos números racionais como uma ideia de expressar quantidades:

Em que momento aparece, nesta construção, o significado numérico do novo objeto matemático construído, justificando então a nomenclatura "número" racional?

Responder a estas questões revelou-se um conhecimento de conteúdo do professor para o ensino (na terminologia utilizada em Ball, Thames, Phelps (2008)), conhecimento esse imprescindível para o encaminhamento da dissertação e para o planejamento da Proposta alternativa de atividades. De fato, uma vez respondidas estas questões, surgiram naturalmente duas novas, tornando-se a segunda delas a questão de pesquisa propriamente dita. A primeira delas é

Como os livros didáticos lidam com a equivalência de frações?

Uma leitura crítica do conteúdo de frações em livros didáticos de 4º, 5º, 6º e 7º anos foi então realizada, buscando avaliar se o que reconhecemos como elementar para o ensino desse tópico, a saber, o conceito de equivalência e uma caracterização de frações equivalentes, está contemplado nos livros analisados de maneira satisfatória, principalmente nos de 6º ano. Assim, essa análise esteve particularmente voltada para a presença do pensamento matemático nas obras analisadas. O que se pode perceber é que muitos dos livros didáticos analisados, ao definir e explorar frações equivalentes, recorrem exclusivamente à apreensão perceptiva, apoiando-se em imagens, deixando de contemplar o pensamento matemático em sua plenitude. Nossa opinião é de que muito mais poderia ser explorado sobre tal conceito ao nível de um 6º ano, surgindo daí então a questão de pesquisa propriamente dita:

É possível propor a alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental um Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, desde a sua motivação até a sua demonstração?

Encontra-se respaldo sobre a relevância dessas questões e sobre a viabilidade de trabalhar-se com argumentação matemática em uma das orientações da BNCC para o Ensino Fundamental que recomenda ser preciso, nos anos finais do ensino fundamental, destacar-se a importância da comunicação, da representação e da argumentação (BRASIL, 2017); além disso, o documento ressalta também a importância do desenvolvimento da capacidade de abstrair o contexto, aprendendo relações e significados, para que possam ser aplicados em outros contextos (BRASIL, 2017).

A continuidade do trabalho de dissertação foi feita por meio de uma pesquisa de cunho qualitativo, na intenção de responder à questão norteadora da pesquisa.

A pesquisa qualitativa busca entender um fenômeno específico em profundidade, trabalhando com observações, descrições, comparações e interpretações. Entre as características da pesquisa qualitativa, está o fato de ela ocorrer em um ambiente natural, devendo o pesquisador estar presente no momento em que ela está sendo realizada, permitindo assim, uma melhor visão e envolvimento do pesquisador com os participantes. Segundo Bogdan e Biklen (1994), o pesquisador frequenta o local de estudo porque se preocupa com o contexto, entendendo que as ações podem ser mais bem compreendidas quando observadas no ambiente habitual onde ocorrem.

Os participantes da pesquisa foram alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino da cidade de Porto Alegre, RS.

Ao dar início à implementação, a ideia inicial foi verificar, por meio de conversas em sala de aula, o que os alunos entendiam por fração, qual sua aplicação e possíveis exemplos de sua utilização, disponibilizando para eles materiais concretos que poderiam auxiliar na comunicação de suas ideias. Aqui, apresentamos, como proposta de material concreto, o trabalho desenvolvido por Baldin, Martins e Silva, intitulado “Estojo de Frações”. Segundo as autoras, o estojo de frações é um material que pode ser utilizado para introduzir o conceito de frações como parte/todo, frações equivalentes, comparação de frações e operações básicas com frações. O material é composto de estojo que contém uma base para encaixe de peças retangulares coloridas e manipuláveis e de transparências que podem ser sobrepostas às peças retangulares encaixadas na moldura, para se certificar sobre as frações que estão sendo trabalhadas, comparar diferentes frações, etc. (BALDIN; MARTINS; SILVA, 2017). De acordo com as autoras, o trabalho com esse material mostrou-se conveniente pelo envolvimento dos alunos nas atividades propostas, incluindo aqueles que não dominavam o assunto adequadamente e também pelos resultados nas avaliações realizadas posteriormente com o grupo de alunos.

A próxima etapa foi iniciar a elaboração das atividades a serem utilizadas na implementação e que, em sua grande maioria, fazem parte do Produto Técnico dessa dissertação (Anexo A).

Dessa forma, nossa ação docente desenvolveu-se em uma sala de aula de 6º ano, onde inicialmente realizamos observação, para posteriormente aplicar os instrumentos para coleta de dados.

Para que este se torne um instrumento realmente válido e fiel para a investigação, são necessários um planejamento cuidadoso do trabalho e uma rigorosa preparação do observador. É importante que o observador faça registros descritivos, anotações organizadas, identifique detalhes relevantes que vão além dos triviais, e utilize métodos rigorosos para validar suas observações (PATTON, 1980, *apud* LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Segundo Creswell (2007), a pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa, ou seja, depende da interpretação dos dados coletados pelo pesquisador (CRESWELL, 2007, *apud* ARMONY, 2010). Assim, neste trabalho, a coleta de dados deu-se por meio da aplicação de uma sequência de atividades sobre frações, previamente elaborada. Tal aplicação incluiu atividades impressas, respostas orais e escritas dadas pelos alunos, anotações em um diário de campo, vídeos e fotos.

Buscando apoio em Duval para refletir sobre os resultados obtidos, a análise dos dados coletados foi posterior ao término da implementação e teve como foco as relações entre os significados produzidos pelos alunos, na intenção de compreender suas escolhas e relevância da escolha das representações utilizadas.

Uma pesquisa desenvolvida em um ambiente escolar tem, como objetivo maior, entender como se dá o processo de aprendizagem e como esse pode modificar todos os envolvidos, incluindo o próprio pesquisador. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), o interesse dos investigadores qualitativos é muito maior no processo do que nos resultados obtidos. Em particular, nessa pesquisa, buscou-se identificar como os alunos se apropriaram das frações e da caracterização das frações equivalentes, a fim de relacionar tal caracterização com atividades que envolviam comparação, adição e subtração de frações.

Como finalização da pesquisa tem-se o produto técnico, que é um aprimoramento da sequência de atividades planejadas e posterior implementação que oportunizou novas reflexões. Este inclui objetivos de cada atividade bem como conversas com o professor em anotações denominadas “Momento com o professor”.

5 ATIVIDADES PROPOSTAS E SUA IMPLEMENTAÇÃO

A sequência de atividades que integra esta pesquisa foi planejada previamente, já incluindo objetivos bem como todas as atividades que fazem parte dos pré-requisitos para a equivalência, comparação e operações de adição e subtração de frações, e que são, aqui compiladas como PARTE I da implementação, deixando para PARTE II basicamente aquelas que dizem respeito ao tema discutido neste trabalho.

As atividades envolveram uma variedade de material concreto, bem como exploração de várias representações, seguindo de perto a orientação de Duval. Entre os materiais selecionados, estão o Tangran, folhas de papel e pizzas de E.V.A., bem como o material desenvolvido por Baldin, Martins e Silva, intitulado “Estojo de Frações” que, segundo as autoras, pode ser utilizado para introduzir o conceito de frações como parte/todo, frações equivalentes, comparação de frações e operações básicas com frações (BALDIN; MARTINS; SILVA, 2017).

Todas as atividades planejadas e implementadas integram com exceção de uma, o Produto Técnico dessa dissertação, com a diferença de que, no produto, algumas delas foram aprimoradas após a implementação. Cabe ressaltar que a separação das atividades em PARTE I e PARTE II foi mantida no Produto Técnico, e este é ainda enriquecido com “Momento do Professor”, com a intenção de que venha a ser o mais útil possível ao professor leitor.

A sequência de atividades é direcionada ao 6º ano e pretende focar na equivalência de frações e na sua caracterização, o que a diferencia em muito dos livros didáticos analisados. Além disso, procurou-se também, contemplar tanto os PCN como a BNCC.

De acordo com os PCN, o ensino do conteúdo de frações faz parte do Bloco “Números e Operações”, devendo ser trabalhado desde o 2º ciclo. Nesse ciclo, devem ser

> apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal (BRASIL, 1998), p. 57),

com o objetivo principal de levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver alguns problemas. Em nosso trabalho, para retomar a insuficiência do $\mathbb{N}$, fazemos uso de situações do dia a dia do estudante.

De acordo com a BNCC, o conteúdo de frações é abordado a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, sendo retomado e aprofundado nos anos seguintes. Já os conteúdos relativos a frações e números racionais prescritos para o 6º ano do Ensino Fundamental, encontram-se na unidade temática Números, sendo os Objetos de Conhecimento:

> - Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.
> - Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais (BRASIL, 2017, p. 298).

Conforme orientação da BNCC, as habilidades relacionadas ao conteúdo de frações em um 6º ano, são:

> - (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> - (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária (BRASIL, 2017, p. 299).

A BNCC destaca que nos anos finais do Ensino Fundamental deve ocorrer um aprofundamento, em relação aos números racionais, do que se espera que os alunos aprendam. Também está previsto que o trabalho com números racionais, como algumas definições e conceitos, se concentre nos 6º e 7º anos, sendo aprofundados a partir do 8º ano.

Para garantir os pré-requisitos necessários para trabalhar equivalência, as atividades planejadas começaram por retomar o conceito de fração (unitária e não unitária), o que tornou a implementação um tanto longa, porém com a concordância da professora titular da turma em que as atividades foram implementadas. A implementação deu-se em uma turma B30 (nomenclatura utilizada no ensino por ciclo) equivalente a um 6º ano, de uma escola do município de Porto Alegre, realizado durante 20 encontros que totalizaram 30 horas-aula.

Por não ser a professora titular, realizei uma observação da turma durante duas horas/aula, a fim de conhecer um pouco das características dos alunos. A turma possui 30 alunos matriculados, mas alguns com baixa frequência. Um dos alunos é considerado de inclusão e realiza atividades diferenciadas, contando com o acompanhamento de uma professora auxiliar. Em conversa com a Professora Cássia, titular da turma, decidimos que o aluno em questão, realizaria as mesmas atividades por mim propostas, juntamente com a turma, no tempo dele, e com auxílio da própria professora titular. Na aula por mim observada estiveram presentes 21 alunos no período anterior ao recreio e 22 após o recreio de um total de 30 alunos matriculados. Nessa aula, a professora realizou a correção da lista de exercícios, com revisão dos conteúdos de potenciação, radiciação, múltiplos, divisores, decomposição em fatores primos e mínimo múltiplo comum (mmc), que seriam cobrados na Prova a ser realizada na próxima aula. Durante essa revisão, chamou-me atenção o trabalho com mínimo múltiplo comum, que envolve múltiplos, pré-requisito para o trabalho com frações e que faz parte do nosso planejamento.

A implementação da sequência de atividades por nós planejada aconteceu em um período de greve de alguns dos professores da escola. A Professora titular esclareceu-me que, por esse motivo, a frequência dos alunos, também não estava “normal”.

A seguir fazemos o relato da implementação, também em duas partes; com relação às atividades da PARTE I, que correspondem às primeiras 16 horas-aula, tentamos ser breves (com exceção das Atividades 10 e 17, que consideramos ricas em termos de aprendizagem dos estudantes), reservando um detalhamento maior às atividades que compõem a PARTE II e correspondem às 14 horas-aula finais, por serem estas aquelas que tratam da pesquisa propriamente dita. Todas as atividades, com exceção de uma, compõem o Anexo A.

5.1 Relato Das Atividades Da Parte I

Conforme planejado, o material para a Atividade 1 foi arrumado previamente sobre uma mesa perto da mesa do professor (Figura 46). Utilizando os materiais concretos (estojo de frações, pizzas de E.V.A, tangram, lápis colorido e papel) que foram dispostos sobre uma mesa, os alunos deveriam, como primeira atividade, mostrar o que entendiam por fração.

Para minha surpresa, a resposta à Atividade 1 foi que os alunos nada conheciam sobre frações (com duas exceções – uma menina e um menino). Nenhum aluno dirigiu-se aos materiais concretos dispostos sobre a mesa, nem mesmo os dois que relataram já conhecer frações.

Figura 46 – Material disponível para os alunos para a realização da Atividade 1

Fonte: Acervo da autora (2019).

A menina que disse conhecer frações, segundo relato da professora titular da turma, estuda muito sozinha e fora da escola. O menino que afirmou conhecer frações é “mantido” (termo usado para repetente no ensino por ciclos).

Conversei com a professora que deu aula para a turma no ano passado (5º ano), e ela me relatou não ter abordado frações com os alunos no 5º ano.

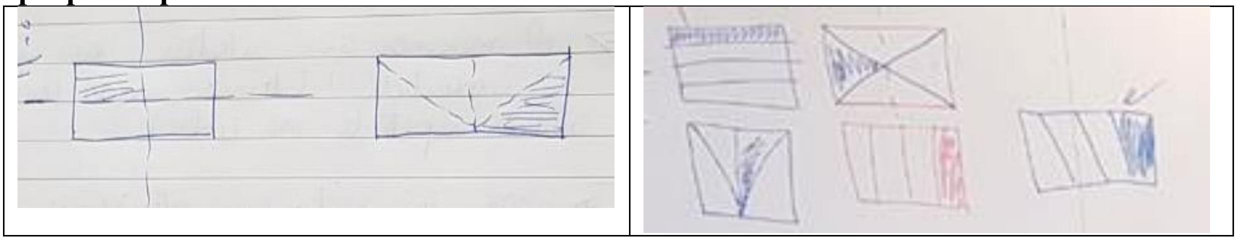
A partir da realidade de que o assunto era novidade para a grande maioria dos estudantes, a Atividade 2, previamente planejada, foi desconsiderada por perder sua finalidade nesta turma.

Para introduzir o assunto, falei (utilizei como exemplo) uma receita de bolo. Perguntei quem já tinha visto a mãe ou outra pessoa, fazendo bolo, daí um aluno respondeu: “já sei, quando manda colocar uma xícara e meia de farinha”.

Utilizei o disco de frações para trabalhar a ideia de fração com toda a turma.

Os alunos foram convidados e adoraram ir ao quadro fazer diferentes divisões de um retângulo, representando “um de quatro” (Figura 47). Nesse momento foi possível chamar atenção da equipartição, pois alguns alunos repartiram o retângulo em 4 pedaços, sem que todos fossem do mesmo tamanho

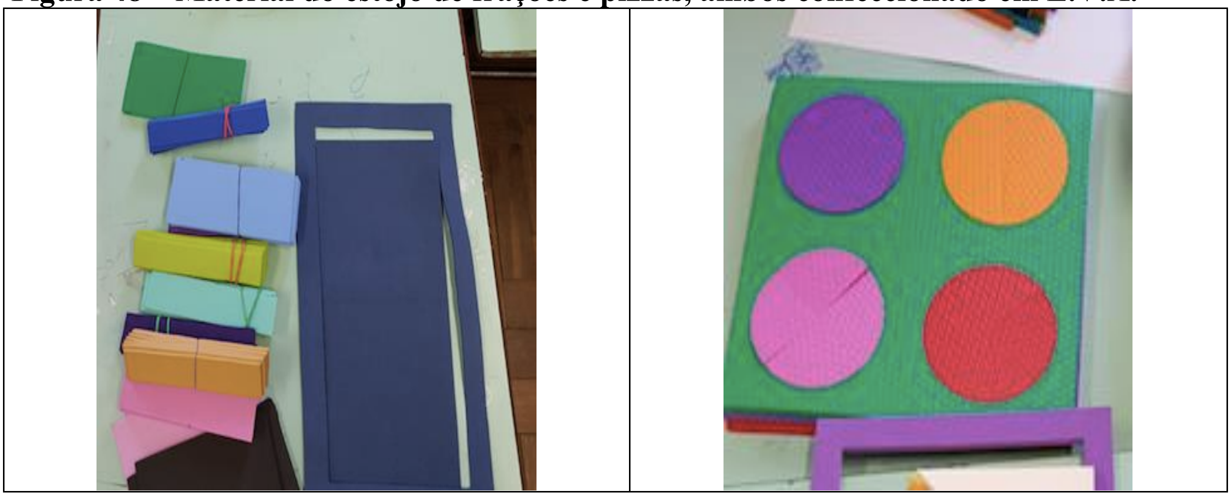
Figura 47 – Exemplos de algumas das diferentes representações de $\frac{1}{4}$ do retângulo, propostas pelos alunos



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma consequência dessa adaptação inesperada foi que o objetivo da Atividade 3, a saber, nomear frações unitárias a partir do "Estojo de Frações" ou as pizzas de E.V.A. (Figura 48), passou a ser um objetivo importante, pois não se estava fazendo uma revisão e sim considerando-se uma introdução ao tema frações.

Figura 48 – Material do estojo de frações e pizzas, ambos confeccionado em E.V.A.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Ao desenvolver a Atividade 3, os alunos perguntaram se poderiam utilizar pedacinhos de diferentes cores para preencher o retângulo do estojo de frações ou as pizzas, o que oportunizou enfatizar-se a equipartição: pedaços de cores diferentes não são iguais, portanto não conseguiríamos utilizar a linguagem de frações para identificar cada um deles. Assim, os alunos perceberam que é preciso agrupar os pedaços de mesma cor para obter a unidade (retângulo ou círculo) se queremos determinar que fração da unidade cada um deles representa, pois só elas são de mesmo tamanho (Figura 49).

Figura 49 – Manipulando os discos de E.V.A. durante a Atividade 3

Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma aluna perguntou se $\frac{1}{11}$ seria “um décimo primeiro”, evidenciando que estava refletindo sobre o assunto e dando-se conta que muitos dos nomes coincidem com os ordinais.

Cabe ressaltar que algumas nomenclaturas tais como *metade, um meio, um terço, uma em quatro* partiram dos próprios alunos. Saliento que o uso da linguagem "uma em quatro", mais associada à ideia de razão, talvez venha a dificultar o entendimento de frações impróprias. Por exemplo, o que seria pegar 5 em 4? Assim, decidi aceitar do aluno esta linguagem, mas sempre repetindo o que ele disse usando a linguagem usual de frações.

O fechamento da Atividade 3, com apoio no estojo de frações e nas pizzas, foi dado com a pergunta “Com o estojo de frações e com as pizzas, as conclusões foram as mesmas – por quê?”. Os alunos responderam que a diferença entre $\frac{1}{2}$ da pizza e $\frac{1}{2}$ do estojo muda só a figura. Aproveitei então a oportunidade para introduzir a nomenclatura “unidade”. Registrei também no quadro a nomenclatura das frações unitárias, bem como a notação utilizada para representar fração (por ora só as unitárias). Não percebi, por parte dos alunos, qualquer dificuldade com a notação que foi introduzida neste momento.

Os alunos adoraram a Atividade 4, participando muito da mesma. Ela foi iniciada com a divisão de uma barra de chocolate em 3 partes diferentes, no intuito de trabalhar a importância da equipartição. Na sequência lancei algumas perguntas, que os alunos responderam oralmente:

1) Os pedaços obtidos são iguais? Eles têm o mesmo tamanho?
   Alunos: “Não”
2) Se eu der um pedaço para as alunas A, B e C (3 meninas que se sentavam bem nas primeiras classes) elas vão receber a mesma quantidade de chocolate?
   Alunos: “Não, o da A é maior”.
3) Cada pedaço pode ser chamado de um “terço”?
   A resposta da turma foi dada “em coro”, argumentando que os pedaços não poderiam ser chamados de um terço, pois não eram do mesmo tamanho.
4) Se os três pedaços fossem do mesmo tamanho, qual o “nome”, utilizando fração, de cada um?
   Alunos: “um terço”.
5) Se eu decidisse cortar a barra de forma a dar um pedaço para cada uma das três meninas e mais os alunos D e E, de quantos pedaços iríamos precisar?
   Alunos: “de cinco”.
6) Se todos os cinco pedaços fossem iguais, qual nome receberia cada pedaço?
   Alunos: “um quinto”.
7) O pedaço que as meninas receberiam nesse novo grupo de 5 alunos, é maior ou menor do que o pedaço que receberam no grupo de 3 alunas?
   Alunos: “menor”.

Foi também interessante observar que, nesta atividade que trabalha com o concreto, os estudantes perceberam muito claramente a relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte em uma equipartição. No entanto nem sempre essa relação inversa ficou evidente nas atividades subsequentes, e muitas vezes foi necessário relembrar a situação da Atividade 4 (“atividade do chocolate” como ficou conhecida) para que os alunos se convencessem da relação inversa. Confirmou-se assim, nesta turma, a dificuldade apontada por Monteiro e Pinto (2007, p. 12): “Na comparação dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ os alunos referem que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, precisamente porque 4 é maior que 3. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fraccionária ainda não está compreendida”.

Para a Atividade 5 os alunos foram organizados em grupos de 3 ou 4. Ela foi realizada com entusiasmo, porém alguns grupos tiveram dificuldade em resolvê-la.

Por exemplo, o grupo que recebeu 8 caveiras recorreu à medida da fita, fazendo então a divisão (por 8) que, afinal, revelou-se com resposta errada, pois faltou fita para o oitavo pedaço e o sétimo pedaço ficou mais curto que os demais. A questão foi retomada com o grande grupo, e juntos montamos uma estratégia para dividir em 8 partes iguais, sem recorrer à medida. Peguei uma nova fita, do mesmo tamanho daquela que foi entregue a todos os grupos e, seguindo orientação da turma, dobrei-a ao meio. Perguntei então que fração da fita corresponderia a cada pedaço dessa fita e os alunos me responderam “um meio”; ainda com orientação dos alunos, dobrei cada metade ao meio, obtendo, segundo eles, 4 pedaços iguais; na sequência, dobrei mais uma vez ao meio cada uma destas partes, chegando, então, a 8 pedaços iguais.

Com o grupo que errou a divisão por 8, retomei a divisão, não sem antes perguntar a seus integrantes o que eles achavam que tinha dado errado. Deram-se conta que foi na operação de divisão que erraram.

Já o grupo de 4 alunos que recebeu 6 caveiras teve apenas um aluno dedicado à tarefa. Este foi dobrando a fita ao meio e ao meio novamente, e mais uma vez, reconhecendo que não tinha atingido seu objetivo, pois havia conseguido 8 pedaços congruentes e não 6. Precisou da ajuda de uma colega de outro grupo para completar a tarefa, dobrando a fita ao meio e depois cada metade em 3 partes iguais. Fiquei satisfeita porque, afinal, a tarefa foi realizada pelos próprios estudantes, sem a interferência do professor.

Foram comparadas as alturas dos enfeites de cada grupo, trabalhando a comparação e concluindo que as caveiras mais compridas foram dos grupos que receberam menor quantidade de caveiras.

A Atividade 6 foi distribuída impressa aos estudantes e precisou ser explicada mais de uma vez. Precisei resolver o item (a) em conjunto com a turma. Após explicação, os alunos realizaram os demais itens sem maiores dificuldades.

Ao item (b), alguns estudantes responderam que a parte vermelha correspondia a dois quartos da figura, precisamos então retomar e comentar o fato de não haver equipartição em quatro partes na figura, pelo fato de ser um retângulo e não um quadrado. No entanto, no item (i) os alunos justificaram o fato de a parte vermelha não ser $\frac{1}{3}$ da figura, pois “os pedaços não são iguais”'

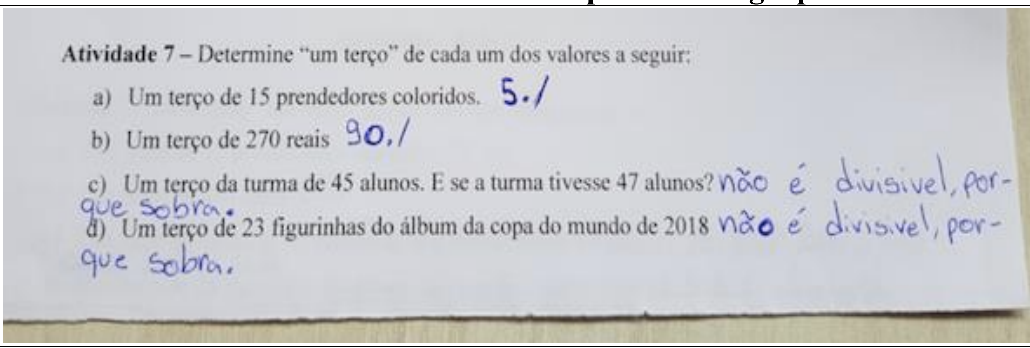
O item (*e*) foi percebido por todos como uma figura tridimensional, bem como o item (*f*).

Na Atividade 7 a maioria dos alunos teve dificuldade, em um primeiro momento, de entender frações de grandezas discretas, mesmo utilizando material concreto (no caso, os prendedores).

O item *(a)* foi resolvido com menos dúvidas que os demais, acredito que por terem em mãos o material concreto. Em alguns grupos precisei simular uma repartição de 1 em 1 entre o grupo de 3 alunos, até que todos os 15 prendedores tivessem sido usados. Daí perguntei: quantos prendedores cada um de vocês recebeu? “5 prendedores” respondeu o grupo. Formulei em conjunto com os alunos, a frase: “Então são 3 grupos de 5 prendedores, onde cada grupo de 5 prendedores representa $\frac{1}{3}$ dos prendedores.” A partir daí, lancei a pergunta: “o que é calcular $\frac{1}{3}$ de alguma coisa?” e os alunos responderam: “dividir em três partes iguais e pintar uma”. Acrescentei, “e quanto são 15 prendedores divididos em três partes iguais?”, obtendo como resposta dos alunos, 5 prendedores.

Após o desenvolvimento do item (a), a maioria dos grupos, realizou os demais itens com alguma dificuldade, demonstrando que a divisão euclidiana é ainda pouco dominada por vários alunos. Poucos alunos resolveram a atividade sem maiores dificuldades, incluindo os itens que não envolviam mais material concreto, percebendo inclusive que nem sempre é possível determinar “um terço” da unidade considerada (por exemplo, $\frac{1}{3}$ de 47 alunos ou de 23 figurinhas) (Figura 50), como por exemplo, a aluna “D” que fez o comentário: “47 alunos (divididos em 3 grupos) dá 15 em cada grupo e sobram 2, então não dá, né professora?”. Essa aluna evidenciou dominar a divisão euclidiana (ou divisão com resto), sendo inclusive capaz de explicar aos colegas (Figura 50).

Figura 50 – Desenvolvimento da atividade 7 feita por um dos grupos



Fonte: Acervo da autora (2019).

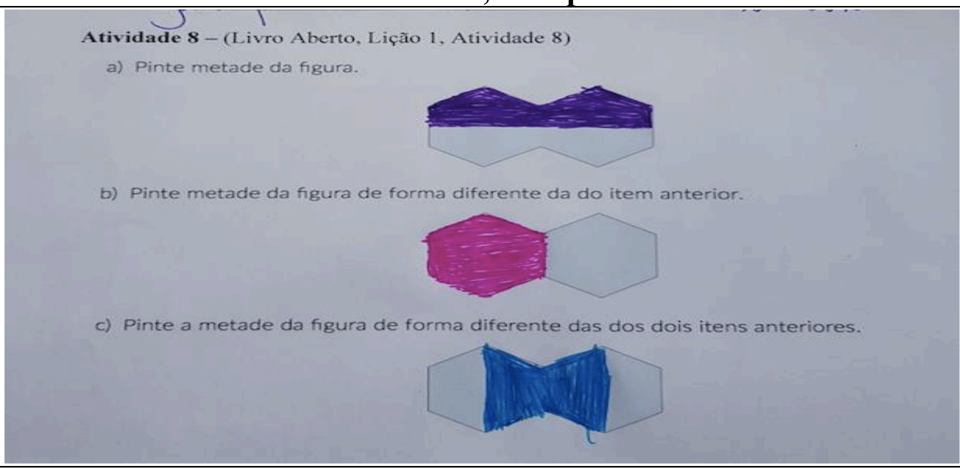
A Professora titular da turma confirmou a grande dificuldade que os alunos têm em trabalhar com a divisão euclidiana. Comentou que essa dificuldade existe mesmo com números pequenos, como por exemplo 9 ÷ 3. Acrescentou ainda que essa dificuldade é, na sua opinião, uma das razões para os alunos terem desenvolvido melhor as atividades com grandezas contínuas. Concordamos com ela no aspecto de ser um agravante para o trabalho com frações envolvendo grandezas discretas, porém reiteramos nossa convicção de que o tema não deve ser adiado nem evitado, revelando-se este uma boa oportunidade de revisar e aprofundar a divisão euclidiana.

Consideramos que os objetivos de identificar uma mesma fração unitária (no caso, a terça parte da unidade) de uma grandeza discreta e reconhecer que nem sempre é possível determinar "um terço" da unidade considerada, foram atingidos.

As expectativas da atividade foram confirmadas: houve alguma estranheza, por parte dos alunos, em considerar como unidade "um conjunto de unidades", bem como a percepção dos alunos de que nem sempre é possível determinar a terça parte de uma grandeza discreta. Constatou-se uma dificuldade com a divisão euclidiana. Por outro lado, acreditamos que um passo na direção da abstração foi atingido (o que significa determinar a terça parte de *qualquer* coisa), mesmo que com dificuldades, precisando ainda ser retomado.

Os alunos pareceram entender a Atividade 8, porém foi difícil para cada aluno encontrar uma terceira forma de representar $\frac{1}{2}$ da figura. Estimulei então a troca de ideias entre eles obtendo-se bons resultados (Figuras 51).

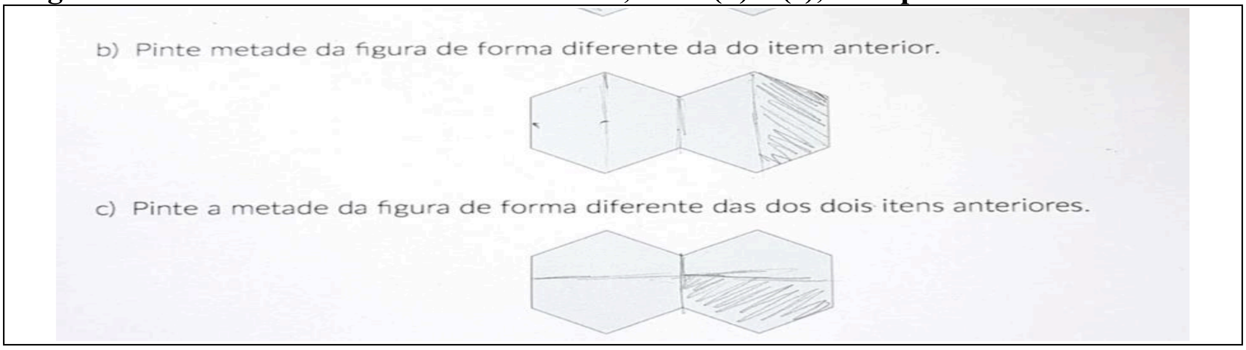
Figura 51 – Desenvolvimento da Atividade 8, feita por um aluno



Fonte: Acervo da autora (2019).

Dos 18 alunos que realizaram a atividade, apenas 5 (27% dos alunos que realizaram a atividade 8) não conseguiram representar a fração $\frac{1}{2}$ de três formas diferentes. Por exemplo, na Figura 52, percebemos que a equipartição foi obedecida, mas o denominador considerado foi 4 e não 2; já a quantidade de partes pintadas (numerador) foi 1. Ou seja, a aluna acabou representando $\frac{1}{4}$ e não $\frac{1}{2}$ como pedia o enunciado.

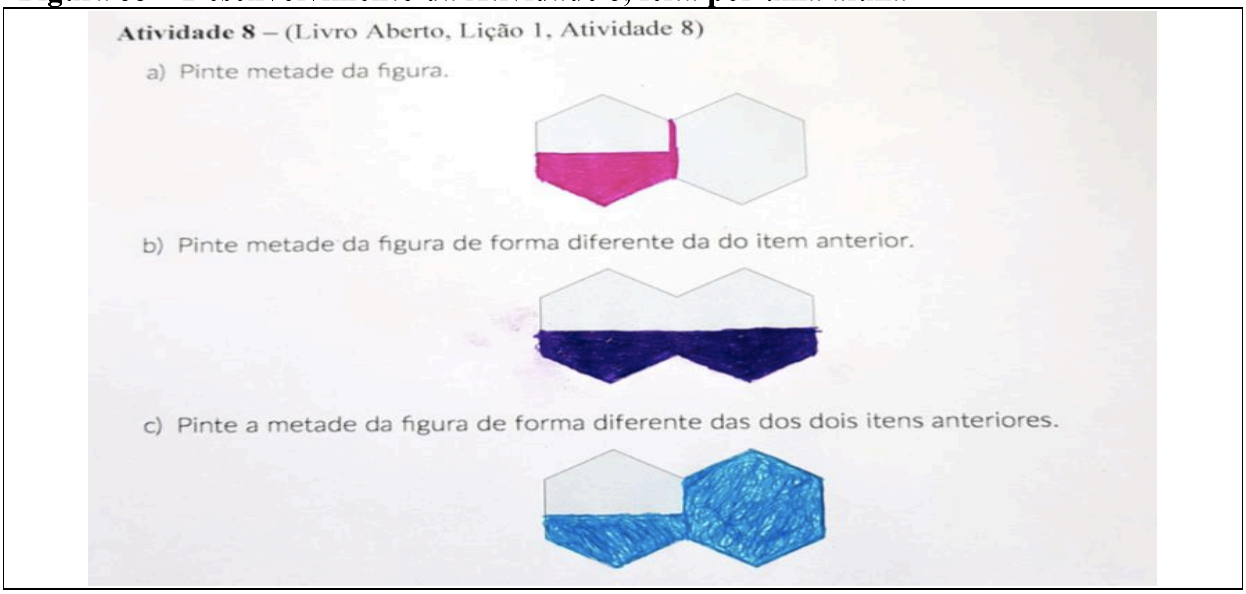
Figura 52 – Desenvolvimento da Atividade 8, itens (b) e (c), feita por uma aluna



Fonte: Acervo da autora (2019).

Na Figura 53, resposta dada pela aluna "V", percebemos três representações de 3 frações diferentes. No item (a) aparece a representação da fração $\frac{1}{4}$, no item (c) $\frac{3}{4}$ e apenas no item (b) ela conseguiu representar a fração $\frac{1}{2}$, pedida no enunciado. Nota-se que a aluna realizou a equipartição, mas não atentou à fração estabelecida no enunciado.

Figura 53 – Desenvolvimento da Atividade 8, feita por uma aluna



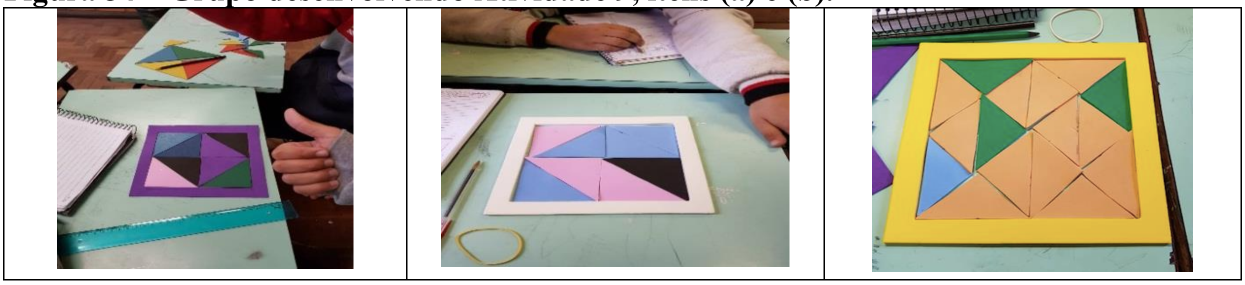
Fonte: Acervo da autora (2019).

A Atividade 9 trouxe de volta o Tangram que havia sido disponibilizado aos estudantes no primeiro dia da implementação sem, no entanto, ter sido utilizado.

Para a realização da atividade, os alunos foram organizados em grupo de 4 alunos, onde cada grupo recebeu um Trangran. Na sequência, lancei a pergunta: "O Tangram é formado por 7 peças. Posso dizer, então, que o triângulo pequeninho é um sétimo do quadrado? Os alunos logo responderam que "não", justificando que as peças não tinham o mesmo tamanho, evidenciando novamente estarem atentos à equipartição como pré-requisito para falar-se em frações.

A turma resolveu os itens (*a*) e (*b*) sem dificuldades (Figura 54), precisando um único grupo ainda ser alertado sobre a importância da equipartição (este grupo iniciou a Atividade 9, utilizando triângulos de diferentes tamanhos para compor o quadrado). A turma precisou do meu auxílio no preenchimento (ou interpretação?) da tabela do item (a). Escreveu-se uma frase completa em cada célula da tabela, por exemplo: "São necessários 4 triângulos grandes para cobrir o quadrado maior, portanto o triângulo grande representa $\frac{1}{4}$ do quadrado maior".

Figura 54 – Grupo desenvolvendo Atividade 9, itens (a) e (b).



Fonte: Acervo da autora (2019).

No item (*c*), alguns alunos tiveram dificuldades em comparar as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$. Precisei, nesse momento, relacionar com a Atividade 4 (da barra de chocolate), para eles então refazerem a imagem mental e se convencerem de que quanto maior é o número de partes da equipartição, menor é o tamanho da parte.

Foi explorada a conexão do item *(c)* com a operação de divisão, precisando ser relembrada novamente a atividade do chocolate, na qual os estudantes haviam respondido prontamente à relação entre as grandezas número de partes e tamanho da parte, pois agora nem todos responderam corretamente sobre a relação inversa.

Considero que os objetivos específicos da atividade foram parcialmente atingidos: no desenvolvimento do item (a), mesmo com uma certa hesitação inicial, os alunos encontraram estratégias para responder; porém no item (c) nenhum grupo apresentou o raciocínio de que se um triângulo pequeno é $\frac{1}{4}$ do triângulo grande, então o triângulo grande é o quádruplo do pequeno, por exemplo.

Para a Atividade 10 cada grupo decidiu a quantidade de fatias em que seriam divididas as pizzas no seu grupo, recebendo uma tal pizza em E.V.A. para trabalhar.

Foram escolhidas as equipartições em 4, 7, 8 (dois grupos), 9 e 10 (dois grupos) partes.

Muitos grupos ficaram preocupados em preencher as molduras, reconstruindo a pizza, antes de iniciar a atividade. Foi então que nos demos conta de que não precisávamos ter entregue as armações das pizzas, mas sim só as fatias, imitando o contexto de uma pizzaria rodízio. Por isso no Produto Técnico foi feita uma sugestão diferente ao professor.

Enquanto terminavam a atividade, foi construída uma tabela na lousa a fim de organizar os dados obtidos em cada grupo. Anotou-se inicialmente os integrantes de cada grupo (Figura 55).

Figura 55 – Proposta inicial da tabela, construída no quadro

Fonte: Acervo da autora (2019).

A seguir, fomos preenchendo, em cada coluna, as respostas dadas pelos grupos aos itens da atividade.

A tabela no quadro ficou poluída e os estudantes ficaram preocupados em copiar no lugar de prestar atenção no raciocínio. Orientei que não copiassem mais e apenas prestassem atenção, informando-lhes que, para a próxima aula, esta tabela com todos os registros, seria trazida impressa para os estudantes. A tabela foi então fotografada e posteriormente digitada para ser entregue aos estudantes no encontro seguinte (Quadro 5). Cabe ressaltar que as diferentes escolhas dos grupos oportunizaram a retomada de frações impróprias, adição e subtração (última coluna), revelando-se esta atividade muito rica para a aprendizagem de frações.

Quadro 6 – Respostas dos alunos na Atividade 10

Respostas	Grupo 1 1 pizza = 8 fatias	Grupo 2 1 pizza = 10 fatias	Grupo 3 1 pizza = 8 fatias	Grupo 4 1 pizza = 9 fatias	Grupo 5 1 pizza = 10 fatias	Grupo 6 1 pizza = 3 fatias	Grupo 7 1 pizza = 4 fatias	Grupo 8 1 pizza = 7 fatias
a e b	Jennifer → 3 fatias = $\frac{3}{8}$ de pizza Thaí → 2 fatias = $\frac{2}{8}$ de pizza Mélani → 2 fatias = $\frac{2}{8}$ de pizza	Pedro → 5 fatias = $\frac{5}{10}$ de pizza Riquelme →5 fatias = $\frac{5}{10}$ de pizza	Luíza → 3 fatias = $\frac{3}{8}$ de pizza Samara → 2 fatias = $\frac{2}{8}$ de pizza Milena→ 3 fatias = $\frac{3}{8}$ de pizza	Ana Luíza → 3 fatias = $\frac{3}{9}$ de pizza Brenda → 3 fatias = $\frac{3}{9}$ de pizza Mariana → 3 fatias = $\frac{3}{9}$ de pizza	André → 5 fatias = $\frac{5}{10}$ de pizza Fernanda → 6 fatias = $\frac{6}{10}$ de pizza Evelyn → 7 fatias = $\frac{7}{10}$ de pizza	Weslei → 6 fatias = $\frac{6}{3}$ de pizza Roger →8 fatias = $\frac{8}{3}$ de pizza	Erick→ 3 fatias = $\frac{3}{4}$ de pizza Gustavo → 5 fatias = $\frac{5}{4}$ de pizza	Raphaela → 3 fatias = $\frac{3}{7}$ de pizza
c	$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$ porque $3+2+2=$ $7\ fatias=\frac{7}{8}$ de pizza Representação gráfica	$\frac{5}{10}+\frac{5}{10}=\frac{10}{10}$ porque $5+5=$ $10\ fatias=\frac{10}{10}$ de pizza = 1 pizza. Ou seja: os dois juntos comeram uma pizza inteira e não sobrou nada. Representação gráfica	$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{8}{8}$ porque $3+2+3=$ $8\ fatias=\frac{8}{8}$ de pizza = 1 pizza inteira Representação gráfica	$\frac{3}{9}+\frac{3}{9}+\frac{3}{9}=\frac{9}{9}$ porque $3+3+3=$ $9\ fatias=\frac{9}{9}$ de pizza = 1 pizza Representação gráfica	$\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}=\frac{18}{10}$ porque $5+6+7=$ $18\ fatias=\frac{18}{10}$ de pizza $\frac{18}{10}$ de pizza = 1 pizza e $\frac{8}{10}$ de pizza Representação gráfica	$\frac{6}{3}+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$ porque $6+8=$ $14\ fatias=\frac{14}{3}$ de pizza = 4 pizzas e $\frac{2}{3}$ de pizza Representação gráfica	$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}$ porque $3+5=$ $8\ fatias=\frac{8}{4}$ de pizza = 2 pizzas Representação gráfica	Raphaela comeu menos de uma pizza. Representação gráfica
d	$\frac{3}{8}$ é *maior que* $\frac{2}{8}$ ou ainda $\frac{3}{8}>\frac{2}{8}$ Jennifer foi quem comeu mais pizza, e Thaí e Mélani comeram a mesma quantidade.	$\frac{5}{10}$ é *igual a* $\frac{5}{10}$ ou ainda $\frac{5}{10}=\frac{5}{10}$ Pedro e Riquelme comeram a mesma quantidade de pizza.	$\frac{3}{8}$ é *maior que* $\frac{2}{8}$ ou ainda $\frac{3}{8}>\frac{2}{8}$ Luísa e Milena comeram mais do que Samara.	$\frac{3}{9}$ é *igual a* $\frac{3}{9}$ ou ainda $\frac{3}{9}=\frac{3}{9}$ Ana Luíza, Brenda e Mariana comeram a mesma quantidade de pizza.	$\frac{5}{10}$ é *menor que* $\frac{6}{10}$ $\frac{6}{10}$ é *menor que* $\frac{7}{10}$ ou ainda $\frac{5}{10}<\frac{6}{10}<\frac{7}{10}$ Evelyn comeu mais do que Fernanda e Fernanda comeu mais do que André.	$\frac{6}{3}$ é *menor que* $\frac{8}{3}$ ou ainda $\frac{6}{3}<\frac{8}{3}$ Roger comeu mais do que Weslei.	$\frac{3}{4}$ é *menor que* $\frac{5}{4}$ ou ainda $\frac{3}{4}<\frac{5}{4}$ Gustavo comeu mais do que Erick.	Quanto sobrou da pizza? $\frac{4}{7}\ de\ pizza$ Porque $1\ pizza - \frac{3}{7}\ de\ pizza = \frac{7}{7}-\frac{3}{7} = \frac{4}{7}\ de\ pizza$

Fonte: Construção da autora (2019).

De fato, uma vez digitada e entregue aos estudantes, tal tabela pode ser aproveitada em uma atividade futura de comparação de frações de denominadores diferentes, bem como na adição e subtração de frações, tendo em vista as variadas equipartições escolhidas. Além disso, ao lançar-se futuramente a pergunta "Como decidir quem da sala comeu mais pizza?", será também estimulada, além da comparação entre frações de numeradores distintos, oportunizar-se-á a discussão e a conclusão de que "fatia" não é aceitável como "unidade" para a comparação porque, entre os grupos, o tamanho da fatia mudou.

Cabe ressaltar também que o contexto de pizzas é muito propício a substituir na argumentação "frações" por "fatias", resumindo-se a atividade à contagem, e não a frações. Isto aconteceu com os estudantes nesta atividade. Por exemplo, alguns grupos resolveram o item (d) desta atividade argumentando apenas, pois "5 < 7". Foi necessário reforçar o uso de frações, ressaltando que a informação "5 (fatias)" é incompleta (por exemplo, e se as fatias forem de tamanhos diferentes?).

Ao ser registrada no quadro a fração $\frac{5}{10}$ na coluna do Grupo 2, uma aluna comentou "isto é metade da pizza"; foi então aproveitada a oportunidade para perguntar ao Grupo 2 se eles concordavam com a observação da colega.

A resposta ao item (c) do Grupo 5 também foi explorada: $\frac{18}{10} = 18$ pedaços de tamanho $\frac{1}{10}$ de pizza. Logo, $\frac{18}{10}$ de pizza é maior do que uma pizza porque nesta pizzaria cada pizza é dividida em 10 partes iguais. Uma aluna comentou "$\frac{18}{10}$ é mais do que uma pizza e é menos do que 2 pizzas"; a partir daí os estudantes não tiveram dificuldades em concluir

$$\frac{18}{10} \text{ de pizza} = 1 \text{ pizza e } \frac{8}{10} \text{ de pizza.}$$

Ao serem questionados sobre o número de pizzas que o Grupo 6 afinal comeu, os alunos tiveram alguma dificuldade em transformar a informação $\frac{14}{3}$ de pizza. Cabe ressaltar que os estudantes não fizeram uso da divisão, mas sim foram estimando por meio da multiplicação (1 pizza tem 3 fatias, duas pizzas têm 6 fatias, etc.); um estudante argumentou "4 pizzas divididas em 3 fatias = 12 fatias, logo eles comeram mais do que 4 pizzas" foi dada continuidade a este raciocínio porque, afinal, ele também resolve o problema.

Antes de responder o item (c) relativo ao Grupo 7, um aluno falou "Comeu a fatia que sobrou do outro", referindo-se às frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$ consumidas pelos componentes desse grupo.

O desenvolvimento do Grupo 8 oportunizou a exploração da subtração: "Quanto sobrou de pizza?", tendo os alunos respondido $\frac{4}{7}$ (de pizza). Também foi aproveitada aqui a oportunidade para a comparação: “Raphaela comeu mais ou menos do que a metade da pizza?” Os estudantes responderam “menos”, “Não tem como comer a metade, porque 7 não dá para dividir por 2”.

Na aula seguinte foi retomada a Atividade 10, agora tendo os estudantes a tabela digitada e impressa em mãos (Quadro 5), devendo, posteriormente, colá-la em seus cadernos. Na tabela foi deixado um espaço para os estudantes completarem a representação gráfica da situação final (total de pizza consumida) de cada grupo, praticando nessa ocasião o que Duval chama de *conversão de representações,* no caso a passagem das frações na forma simbólica para o *registro figural*.

Ao reler a tabela em conjunto com os estudantes, foram ressaltados os seguintes pontos:

- a organização da tabela (muitos estudantes acompanharam a retomada da professora, completando as suas frases, fazendo cálculos mentalmente, como a soma $\frac{18}{10}$);
- a introdução da adição, bem como da sua notação usual, agora envolvendo frações como parcelas. Cabe ressaltar que a notação foi aceita com tranquilidade pelos estudantes. A mesma reação pode ser observada em relação a questões envolvendo a subtração;
- a representação pictórica da situação de cada grupo a ser completada pelos alunos neste momento;
- o aparecimento de frações impróprias (sem usar essa nomenclatura), comentando sempre quantas pizzas o grupo consumiu e o que sobrou.

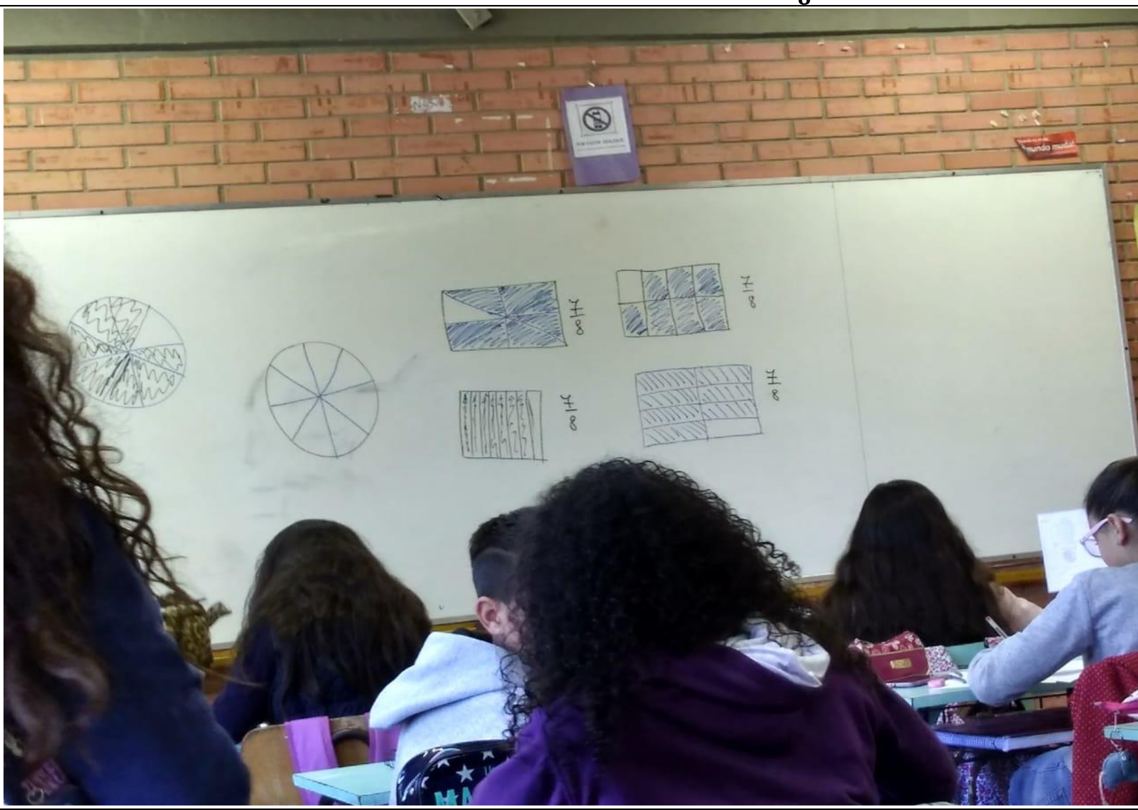
Com relação à representação pictórica da pizza consumida, a professora titular alertou-me de que talvez os alunos não tivessem entendido o termo “representar”, e então fizemos, em conjunto, a representação da quantidade de pizza consumida pelo grupo 1, a saber, $\frac{7}{8}$ de pizza. Um estudante foi ao quadro e em um primeiro momento sua divisão do círculo não foi aceita como uma equipartição. Então, incentivei-o a refletir e o aluno decidiu realizar uma nova representação. Ao ser questionada sobre outra estratégia, a turma respondeu algo do tipo “metade, depois metade e novamente metade” (Figura 56).

Figura 56 – Aluno desenvolvendo Atividade 10, representando o total de pizza consumido pelo Grupo 1, a saber, $\frac{7}{8}$ de pizza

Fonte: Acervo da autora (2019).

Aproveitei a oportunidade para mudar o formato da pizza (preciso fazer todas as minhas pizzas redondas?), convidando uma aluna para ir ao quadro. Muitos outros alunos quiseram ir ao quadro registrar uma outra possibilidade de equipartição de um retângulo e pintar 7 das 8 partes (Figura 57). Foi um momento de muita espontaneidade e participação dos estudantes.

Figura 57 – Representações feitas pelos alunos para a fração $\frac{7}{8}$



Fonte: Acervo da autora (2019).

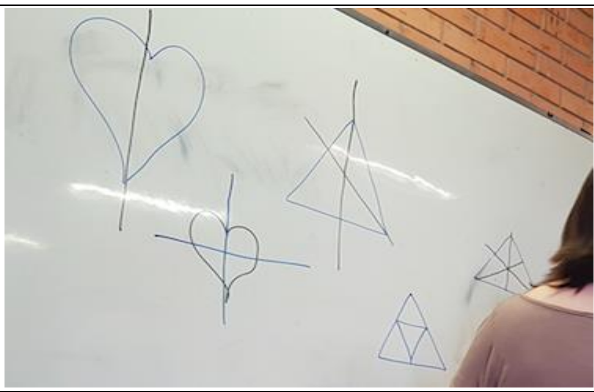
Dois alunos perguntaram: “Não dá para fazer uma pizza em forma de triângulo?”. Ressaltei que era preciso haver equipartição. Um deles começou a desenhar na classe, tentando resolver o seu desafio, mas logo desistiu do mesmo.

Uma aluna perguntou se a pizza poderia ter formato de coração.

Com a representação do total de pizza consumida pelo grupo 1, no quadro, os alunos iniciaram as demais representações, sem maiores dificuldades.

A aula seguinte foi iniciada com a retomada dos questionamentos dos alunos sobre a possibilidade de equiparticionar-se uma pizza que tenha a forma de triângulo ou de um coração. Os alunos foram ao quadro (Figura 58), realizando possibilidades de equipartição em um coração e em um triângulo.

Figura 58 – Alunos desenvolvendo possibilidade de equipartição em coração e em triângulos



Fonte: Acervo da autora (2019).

Por meio de conversa e questionamentos, os alunos perceberam que o coração só poderia ser equiparticionado em dois pedaços iguais. Nesse momento aproveitamos para comentar que nem sempre é possível (como na Atividade 7, item (d)) ou fácil, equiparticionar uma unidade.

A Atividade 11 foi resolvida em conjunto à medida que íamos lendo cada item. A primeira resposta que apareceu ao item (a) foi “dois sextos”. Precisei interferir, reiterando o enunciado “cada parte é que fração <u>da barra</u>?”. Uma aluna então respondeu “$\frac{1}{3}$ de uma barra”.

A resposta aos itens *(b)* e *(c)* foram unânimes “sim, porque todas as quantidades são iguais”.

Como nomearia? (item *(d)*) “Dois terços” foi a resposta.

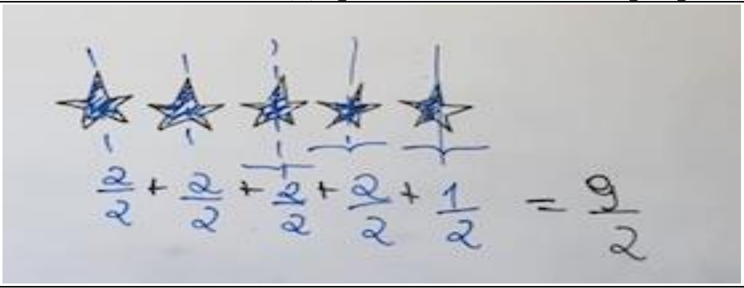
Quanto ao item *(e)* surgiram como respostas “Um e ela ia ficar sem!” Outro respondeu “Um terço”, e outros repetiram.

Quanto ao item *(f)*, “$\frac{2}{3}$” foi a primeira resposta, mas um colega corrigiu “três terços”

Quanto ao item *(g)*, dois estudantes responderam “quatro terços”, antes de a professora terminar de ler a pergunta!!

Na Atividade 12 vários alunos solicitaram ajuda para resolver o item *(d)*, e a maioria dos alunos deu como primeira resposta $\frac{5}{2}$. Ele foi desenvolvido em conjunto no quadro (Figura 59).

Figura 59 – Desenvolvimento do item (d) que envolve fração imprópria



Fonte: Acervo da autora (2019).

No item *(e)* os alunos também mostraram alguma dificuldade, desta vez, com o reconhecimento da unidade.

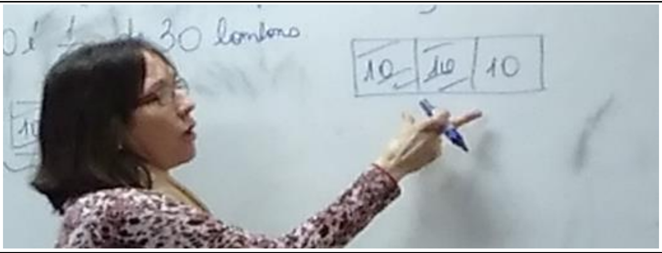
Os itens *(f)* e *(g)*, diziam respeito a frações de quantidades discretas, e a maioria dos alunos ainda apresentou dificuldades, precisando da minha interferência. Por exemplo, algumas das respostas dadas ao item *(f)* foram “metade”, “dois terços”, “3 de 2”.

Utilizei a representação pictórica para desenvolver a atividade, realizando, a transformação de uma representação semiótica (passagem do registro da língua natural para o registro figural), pois, segundo Duval a compreensão em matemática acontece quando o aluno é capaz de realizar a mudança de registro. Antes de trabalhar com 20 de 30, mencionei e coloquei no quadro o que seriam 10 em 30. Cabe ressaltar que introduzi como representação a “barrinha” (Modelo de Barras, método criado em Singapura para trabalhar a pré-álgebra[8]) para a abordagem nesta questão que trata de grandeza discreta, sem chamar a atenção dos

[8] A representação pictórica dos dados de situações de um problema, visando promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos, é uma característica marcante da Matemática de Singapura, que utiliza um método chamado Modelo de Barras. O Modelo de Barras é uma representação geométrica com desenho de barras para quantidades numéricas. Segundo Dotti (2016), “através do uso contínuo do Modelo de Barras, os alunos de Singapura aprendem conceitos e adquirem habilidades de identificar os dados e os solicitados de um problema, de forma que a representação pictórica auxilia na elaboração da estratégia para solução do problema, com a escolha de operações corretas para a situação” (DOTTI, 2016, p. 11).

estudantes, que aparentemente aceitaram e acompanharam o raciocínio apoiado nesta representação, explicando no quadro o que seriam 10 em 30 (Figura 60).

Figura 60 – Desenvolvimento do item (f) realizado no quadro utilizando representação pictórica



Fonte: Acervo da autora (2019).

Juntamente com a turma, formulamos a frase: “dividiu a caixa em 3 partes iguais e cada pedaço ficou com 10 bombons”. Assim, os estudantes puderam concluir que 10 bombons é $\frac{1}{3}$ dos 30 bombons.

Segui desafiando os estudantes: “Mas a pergunta é quanto são 20 bombons...”

A primeira aluna a responder, afirmando que 10 em 30 seria $\frac{1}{3}$, até detalhou seu raciocínio, dizendo: “10 é 1, 20 é 2 e 30 é 3.” Outra aluna então complementou “dois terços”.

Para a resolução do item *(g)* sugeri: “comecemos com números menores, 24 e 32”.

Uma aluna ponderou: “24 e 32 não dá para fazer uma fração [...]”; imagino que ela queria imitar o raciocínio do item anterior, procurando por divisores comuns. Depois da interferência da professora, a 1º divisão do 32 foi proposta por uma aluna (“F”), que foi ao quadro e fez a representação pictórica apresentada na Figura 61, comprovando sua aceitação e incorporação do modelo de barras também para representar grandezas discretas.

Figura 61 – Representação utilizando o método Modelo de Barras

Fonte: Acervo da autora (2019).

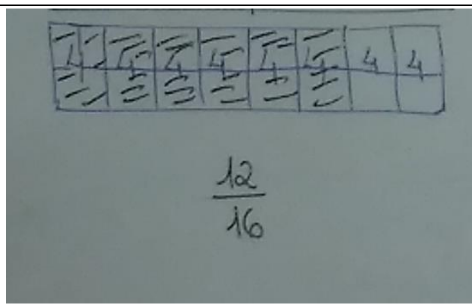
Outros alunos sugeriram outros divisores comuns e também fizeram uso do mesmo modelo de barras. Uma menina sugeriu “4 é um divisor comum [...]”, e fez, no quadro, a representação (Figuras 62).

Figura 62 – Representação utilizando o Modelo de Barras

Fonte: Construção da autora (2019).

Os alunos começaram então a procurar por outros divisores comuns a 32 e 24. Frente à sua dificuldade, sugeri que recorressem à tabuada, já que, por ora, os números envolvidos eram pequenos. Tentaram o divisor comum 2, quando desafiei-os perguntando se não poderia ser aproveitada a equipartição que resultou nas partes de tamanho 4 (Figura 63), chegando à fração $\frac{12}{16}$ das 32 páginas:

Figura 63 – Representação feita no quadro, utilizando o modelo de barras para a representar a fração $\frac{12}{16}$



Fonte: Acervo da autora (2019).

A mesma estudante que propôs a subdivisão de quatro em quatro veio até mim, falando bem baixo: “para o 2, eu poderia dividir o 8 ao meio e depois ao meio de novo, né!?”

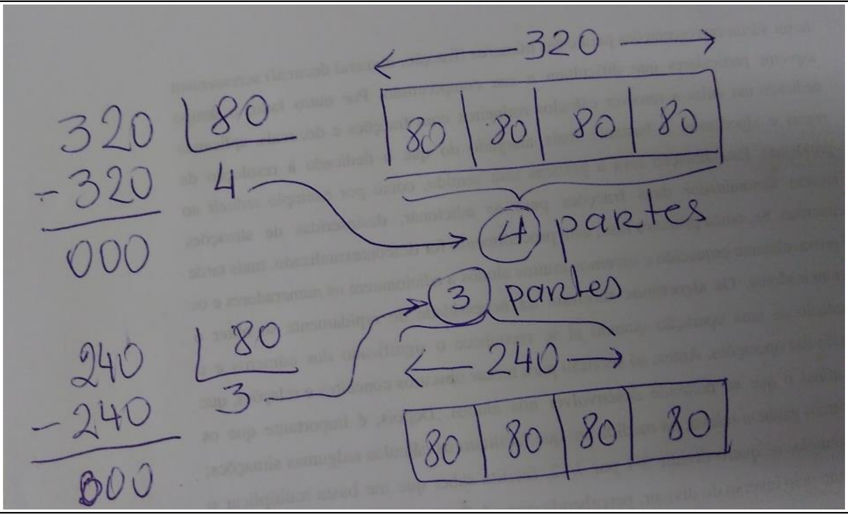
Aproveitei então para escrever: “24 páginas são $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$ de 32 páginas”, afirmando que todas estas frações representam a mesma quantidade das 32 páginas.

A partir desses comentários (divisores comuns para 24 e 32) iniciei o desenvolvimento para os números 240 e 320, propostos no item *(g)*. Uma aluna colocou a resposta, $\frac{3}{4}$, fazendo o uso do divisor comum 80.

Outro estudante realizou a divisão de 320 por 80, sem dificuldades.

Neste momento fiz o fechamento da atividade, introduzindo os termos “numerador” e “denominador”, relacionando-os com os quocientes encontrados, como mostra a Figura 64. Mas isto foi feito de modo um tanto rápido, e imagino que os alunos não entenderam por que podem ser escritos dessa forma.

Figura 64 – Relacionando os resultados das divisões aos termos da fração



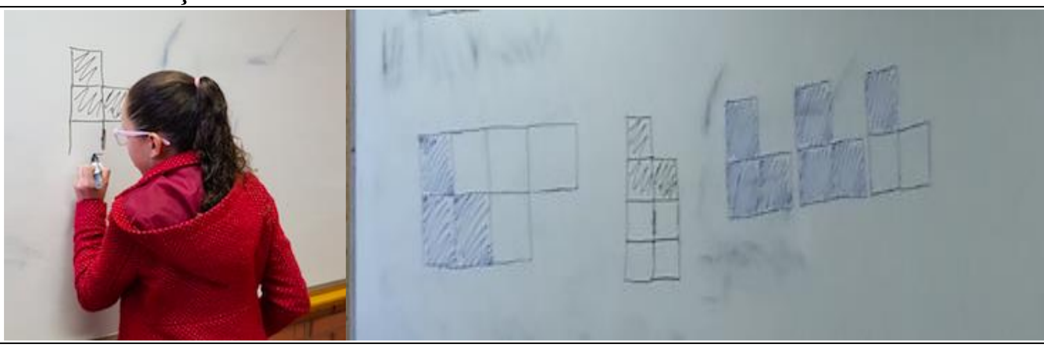
Fonte: Acervo da autora (2019).

A Atividade 13 foi planejada durante a implementação para reforçar frações impróprias, porque percebemos que a forma de falar em fração não unitária (por exemplo, três das cinco partes, ao falar-se na fração $\frac{3}{5}$) não vinha, na nossa opinião, facilitando a compreensão e a representação de uma fração imprópria.

Uma aluna questionou "Profa., não tem como fazer 7 (seu desenho tinha só 6 quadradinhos". O aluno ao seu lado disse "Tem! É só fazer mais um bloco!"

Os alunos foram ao quadro colocar suas diferentes respostas à Atividade 13 (Figura 65).

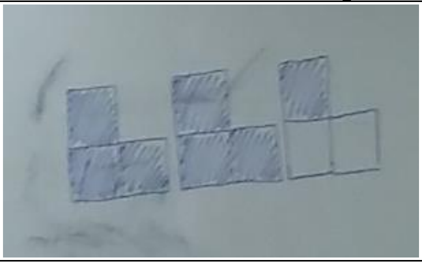
Figura 65 – Resolução da Atividade 13



Fonte: Acervo da autora (2019).

Aproveitei uma das respostas para dar o fechamento à atividade: "Cada quadrinho representa um terço, então, para chegar em $\frac{7}{3}$ precisamos de 7 quadradinhos. Olhem a resolução da colega (Figura 66), ela está correta? Os alunos disseram que sim.

Figura 66 – Exemplo de resposta à Atividade 13 dada por uma aluna



Fonte: Acervo da autora (2019).

Nossa avaliação e conclusão sobre esta atividade envolvendo frações impróprias é de que essas, são realmente mais complicadas para os alunos. **Na nossa opinião, esta dificuldade pode ser amenizada se o professor, desde o início, reforçar que tomar $\frac{a}{b}$ da unidade significa tomar a vezes a quantidade $\frac{1}{b}$ que corresponde a uma das partes obtidas na equipartição da unidade em b partes, seja esta fração própria ou imprópria.**

Para a resolução da Atividade 14 foi distribuída uma folha quadriculada aos estudantes e foi-lhes solicitado que cada um desenhasse um retângulo na folha, do tamanho que quisesse, repartindo-o em três partes iguais, pintando duas delas.

Após a construção do retângulo, alguns alunos ainda precisaram ser alertados pela professora para a importância da equipartição na resolução da atividade, que foi então realizada sem maiores dificuldades.

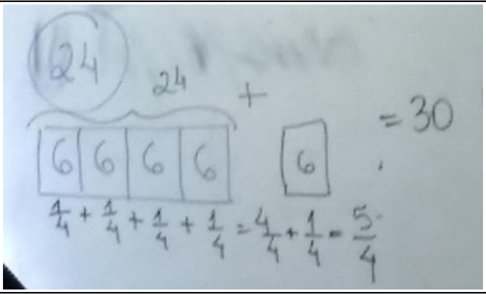
A resposta ao item *(a)* foi dada de forma rápida. Como a atividade foi, afinal, realizada em conjunto, o item *(b)* tornou-se redundante.

Como fechamento, os alunos completaram o quadro, juntamente com a professora, atentando para o fato de que a fração era a mesma ($\frac{2}{3}$ ou dois terços do retângulo), mas a quantidade de quadrinhos era diferente, pois os retângulos (unidade) tinham tamanhos diferentes: "os retângulos **(unidades)** foram diferentes, mas os dois foram divididos em três partes iguais e foram pintadas duas partes, por isso foram pintados dois terços do retângulo (unidade) para ambos os itens, *(a)* e *(b)*."

Os itens *(d)* e *(e)* foram respondidos em coro, sem dificuldades.

Durante a correção da Atividade 15 fui direto para o item *(c)*, pois havia aí muita dúvida por parte dos estudantes. A resolução foi feita então em conjunto (Figura 67), recorrendo-se ao conceito de " $\frac{5}{4}$ de".

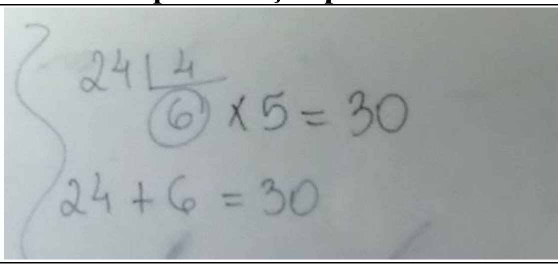
Figura 67 – Desenvolvimento da Atividade 15, item *(c)*, feita em conjunto com a turma



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma das estudantes mais participativas da turma disse que não precisava do desenho, que bastava efetuar uma divisão, que foi então registrada no quadro (Figura 68).

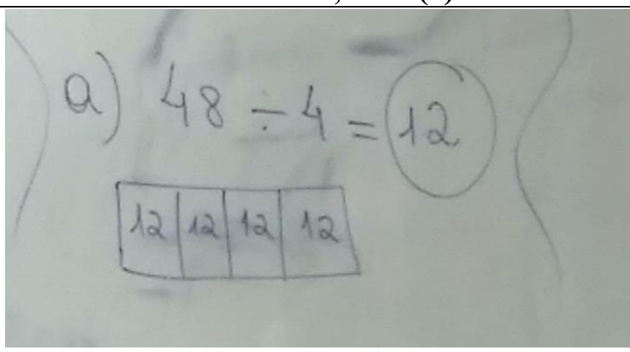
Figura 68 – Desenvolvimento da Atividade 15, item *(c)*, conforme orientação de uma das alunas, sem utilizar representação pictórica



Fonte: Acervo da autora (2019).

Com relação ao item *(a)* (a determinação da quarta parte de 48 reais), após o registro também da representação pictórica, uma estudante sugeriu “Professora, é só fazer 48 : 4” (Figura 69). Neste momento, vários alunos levantaram e foram olhar a “tabuada da multiplicação” que está presa na parede da sala, sugerindo que reconheciam que alguma coisa relacionada à multiplicação existe no problema proposto.

Figura 69 – Desenvolvimento da Atividade 15, item (a)



Fonte: Acervo da autora (2019).

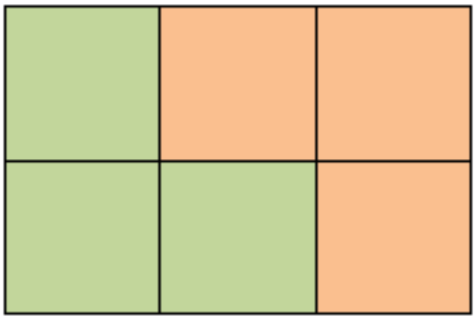
Aproveitei a oportunidade para desafiá-los: “E se quiséssemos a quarta parte de 26 carrinhos?”

“Profa, 26 não tem na tabuada!”, comentou um estudante. “[...] sobram 2 carrinhos [...]” comentou outro. Continuei a estimulá-los: “Consigo então calcular $\frac{1}{4}$ de 26 carrinhos?” Concluíram que não é possível.

Com relação ao item *(b)*, foi-se direto à divisão: 24 : 4 = 6 carrinhos

O item *(a)* da Atividade 16 foi deixada como tema de casa para o encontro seguinte. Porém o mesmo foi resolvido imediatamente por um aluno, que explicou oralmente sua ideia, dizendo que bastaria “desenhar ao contrário”, e mostrou à professora uma imagem semelhante à da Figura 70.

Figura 70 – Resolução dada por um estudante para a Atividade 16, item *(a)*.

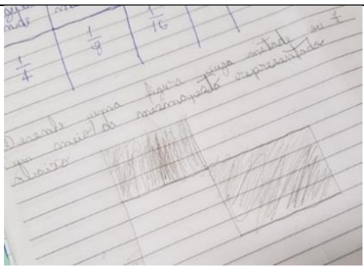


Fonte: Acervo da autora (2019).

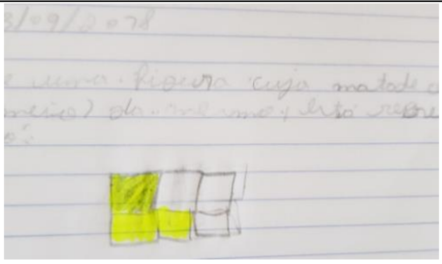
Já outros estudantes disseram que bastava acrescentar um quadradinho. Aproveitei a oportunidade e acrescentei mais um quadradinho à imagem do quadro, e depois perguntei: “Mas será mesmo que o que havia então era a metade desta figura?”, o que bastou para que os alunos percebessem o erro cometido.

Mesmo com a discussão feita em aula, constatei no encontro seguinte que apenas onze alunos fizeram o tema de casa, fotografados e reproduzidos na Figura 71.

Figura 71 – Desenvolvimento do tema (Atividade 16, item (a))

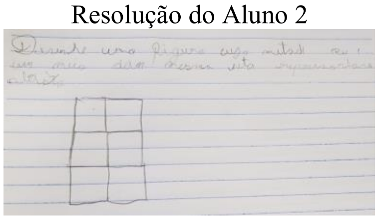


Resolução do Aluno 1

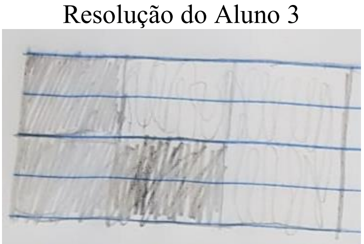


Resolução do Aluno 2

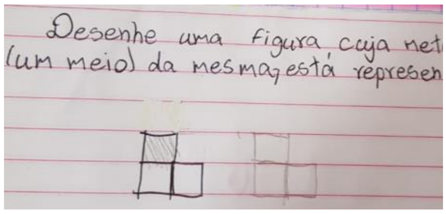
Resolução do Aluno 3



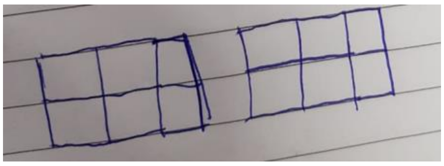
Resolução do Aluno 4



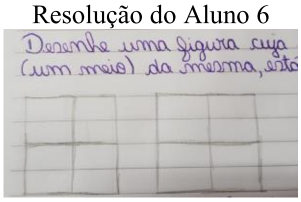
Resolução do Aluno 5



Resolução do Aluno 6

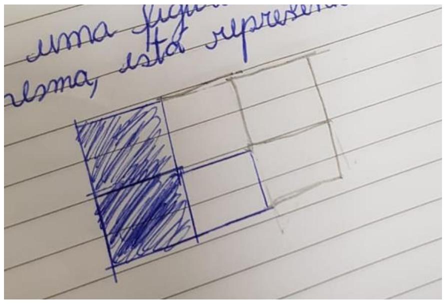


Resolução do Aluno 7

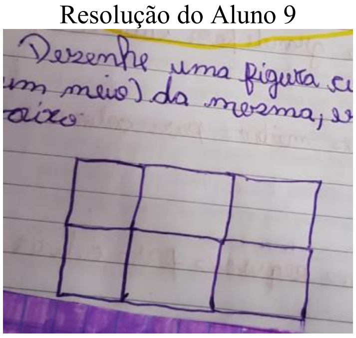


Resolução do Aluno 8

Resolução do Aluno 9



Resolução do Aluno 10



Resolução do Aluno 11

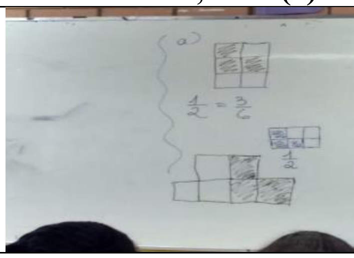
Fonte: Acervo da autora (2019).

Das onze resoluções, pode-se constatar que apenas erraram os Alunos 1, 7 e 8. Não está claro por que o Aluno 10 pintou duas partes.

Vários alunos queriam ir ao quadro apresentar a sua resolução do tema de casa. A Figura 72 mostra duas das resoluções dadas.

Uma aluna falou em “três sextos”; aproveitei a oportunidade para escrever $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ (figura 72) realizando nesse momento a transformação que Duval chama de tratamento, onde as representações permanecem em um mesmo sistema.

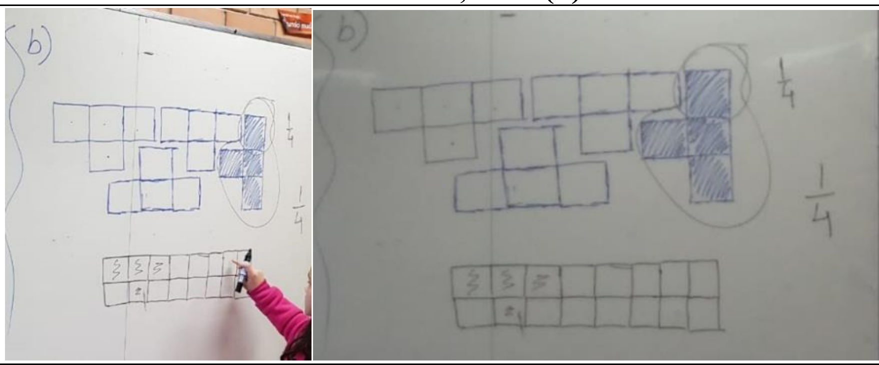
Figura 72 – Desenvolvimento da Atividade 16, item (a)



Fonte: Acervo da autora (2019).

Para o item *(b)* da Atividade 16, os estudantes também foram convidados a irem ao quadro, com o objetivo de serem socializadas todas as diferentes representações pictóricas produzidas. Reiterei que a figura poderia ser representada de forma separada (desmembrando em mais de uma) ou não (Figura 73). Foram registradas também as diferentes representações apresentadas pelos alunos, pondo em prática o que Duval chama de “tratamento”, ou seja, transformação de uma representação semiótica, dentro do mesmo sistema de registro.

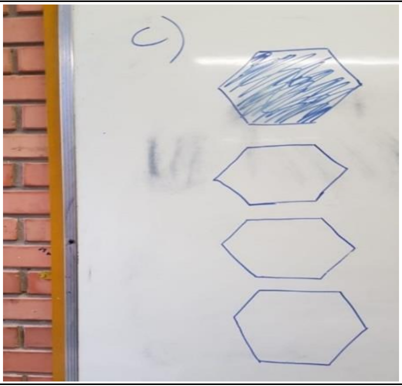
Figura 73 – Desenvolvimento da Atividade 16, item (b)



Fonte: Acervo da autora (2019).

Os itens *(c)* e *(d)* revelaram-se mais complexos para os alunos. O item *(c)*, após alguns comentários, foi resolvido no quadro (Figura 74), pelos alunos, que fizeram uso de figuras separadas:

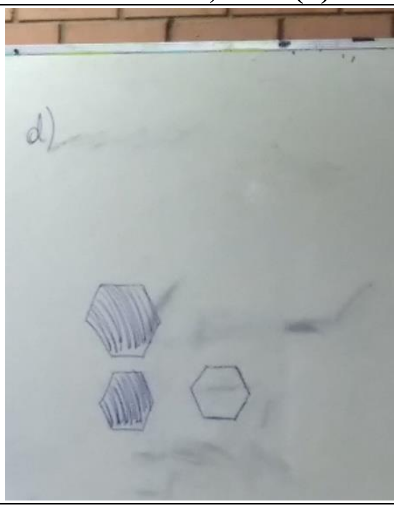
Figura 74 – Desenvolvimento da Atividade 16, item (c)



Fonte: Acervo da autora (2019).

Com relação ao item *(d)*, a primeira aluna que foi ao quadro desenhou inicialmente 3 hexágonos, pintando dois deles (Figura 75).

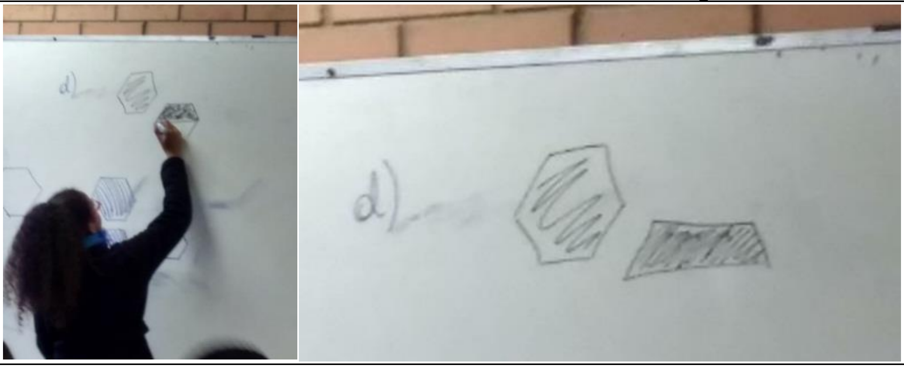
Figura 75 – Desenvolvimento da atividade 16, item (d)



Fonte: Acervo da autora (2019).

Depois, a mesma aluna deu-se conta que a resolução tinha a ver com metade da figura, mas não conseguiu dar a resposta correta: gerou metades, organizou-as, mas acabou pintando todas elas (Figura 76).

Figura 76 – Tentativa de desenvolver a Atividade 16, item (d), por uma aluna



Fonte: Acervo da autora (2019).

Mesmo após minhas intervenções, foi necessário resolver este item em conjunto no quadro, pois a maioria dos alunos evidenciou dificuldade.

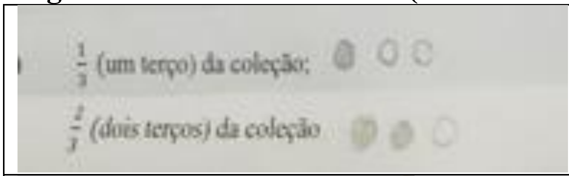
Confirmou-se com a Atividade 16 nossa expectativa relativa a uma certa hesitação por parte dos estudantes nesta atividade, por não ser comum o desafio de praticar o processo inverso, no caso a recuperação da unidade a partir do conhecimento de uma fração da mesma. De acordo com Duval, “[...] a aprendizagem está associada ao fato de reconhecer um mesmo objeto em diferentes representações e que, quanto mais rápido for esse reconhecimento, mais o aluno estará mobilizando conceitos matemáticos em diferentes situações” (apud SOPPELSA, 2016, p. 81).

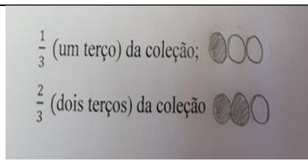
No entanto, a dificuldade apresentada pelos estudantes não me estimulou a dar o fechamento previamente planejado, sobre uma mesma quantidade poder ser tanto $\frac{1}{4}$ como $\frac{2}{3}$ da unidade, dependendo da unidade.

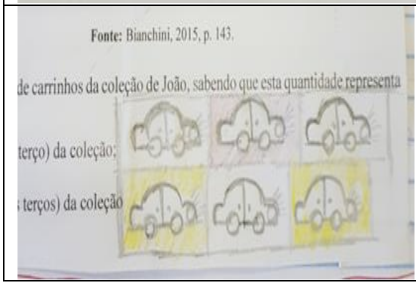
A Atividade 17 foi entregue como tema de casa aos alunos. Apenas quatro do total de 20 alunos presentes no último encontro, realizam o tema.

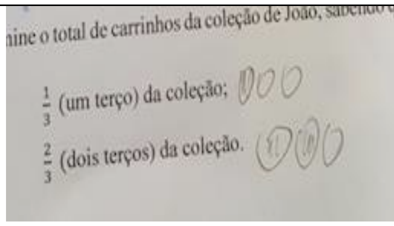
Percebe-se que nenhum dos quatro alunos que realizaram o tema acertou a atividade (Figura 77).

Figura 77 – Fotos dos temas (Atividade 17)





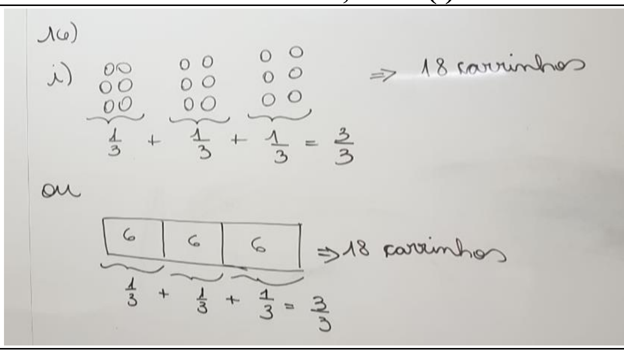




Fonte: Acervo da autora (2019).

Foi então resolvida a atividade no quadro, em conjunto. O item *(i)* foi resolvido sem dificuldades, com vários alunos sinalizando a resposta (Figuras 78).

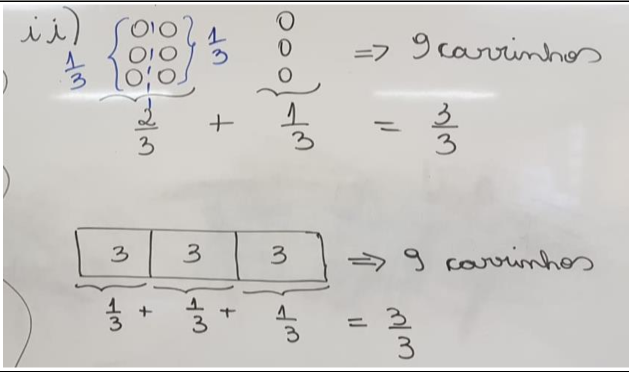
Figura 78 – Desenvolvimento da Atividades 17, item (i)



Fonte: Acervo da autora (2019).

O item *(ii)*, por sua vez, revelou-se mais complicado para os estudantes, o que já era esperado por nós. A resposta “dividir o grupo de carrinhos ao meio” para determinar $\frac{1}{3}$ dos carrinhos, foi dada por uma aluna. Neste item, apenas uma aluna disse que tinha que somar 3 carrinhos (Figuras 79).

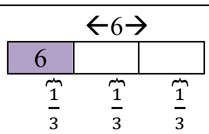
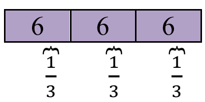
Figura 79 – Desenvolvimento da Atividades 17, item (ii)



Fonte: Acervo da autora (2019).

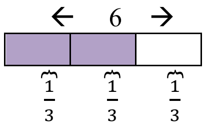
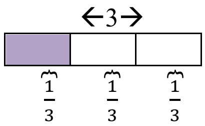
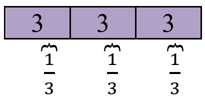
Uma vez finalizada a correção, foi distribuída uma tabela (Quadros 7 e 8) para ser colada no caderno. Nesse quadro, as respostas à Atividade 17 foram registradas com três tipos diferentes de representação; são eles, segundo a terminologia de Duval: Registro simbólico – numérico (por exemplo, $\frac{1}{3}$), Registro Figural – desenho dos carrinhos ou representação por barrinhas, Registro na língua natural - escrevendo por extenso, como se lêem as frações. Com a leitura em conjunto desta tabela, foi feito o fechamento da Atividade 17, registrando nela as várias representações, já que uma estudante durante a resolução da Atividade 15 disse que o "desenho poderia ser dispensado". Oportunizou-se assim, a conversão entre diferentes representações de um mesmo objeto, como orienta Duval. Foi reiterado aos estudantes que qualquer uma das formas apresentadas na tabela, pode ser utilizada na resolução da atividade.

Quadro 7 – Desenvolvimento da Atividade 17, entregue impressa aos alunos

Item	Com os carrinhos	A representação em barrinhas	Em palavras	Com simbologia
(i)			$\frac{1}{3}$ da unidade (coleção) corresponde a 6 carrinhos	$\frac{1}{3}$ da unidade (coleção) = 6 carrinhos
			Coleção corresponde a $\frac{3}{3}$ da coleção corresponde a $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção = 6 carrinhos + 6 carrinhos + 6 carrinhos = 18 carrinhos	Coleção = $\frac{3}{3}$ da coleção = $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção = 6 carrinhos + 6 carrinhos + 6 carrinhos = 18 carrinhos

Fonte: Construção da autora (2019).

Quadro 8 – Desenvolvimento da Atividade 17, entregue impressa aos alunos

Item	Com os carrinhos	Com o pictórico	Em palavras	Com simbologia
(ii)			$\frac{2}{3}$ da unidade (coleção) correspondem a 6 carrinhos	$\frac{2}{3}$ da unidade (coleção) = 6 carrinhos
			$\frac{1}{3}$ da unidade (coleção) = metade de $\frac{2}{3}$ da unidade, então $\frac{1}{3}$ da unidade (coleção) corresponde a 3 carrinhos	$\frac{1}{3}$ da unidade (coleção) = metade de $\frac{2}{3}$ da unidade; 6 carrinhos : 2 = 3 carrinhos
			Coleção = $\frac{3}{3}$ da coleção corresponde a $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção = 3 carrinhos + 3 carrinhos + 3 carrinhos = 9 carrinhos	Coleção= $\frac{3}{3}$ da coleção = $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção + $\frac{1}{3}$ da coleção= 3 carrinhos + 3 carrinhos + 3 carrinhos = 9 carrinhos

Fonte: Construção da autora (2019).

5.2 Relato Das Atividades Da Parte II

A Atividade 18 foi distribuída impressa aos alunos para ser realizada em duplas.

Uma dupla desenhou no verso da folha recebida, em cada peça de $\frac{1}{3}$, a subdivisão em 4 pedaços iguais, vindo então solicitar um disco E.V.A. com a equipartição em 12 partes. Só uma outra dupla fez a mesma solicitação, depois de orientada a “colocar um bolo em cima do outro”, e não ao lado, para que a comparação pudesse ter mais significado do que a apreensão perceptiva. Só estas duas duplas solicitaram um disco com a equipartição em 12 partes. A atividade foi então realizada em conjunto.

Os alunos não tiveram dificuldade em responder as perguntas por mim levantadas, como por exemplo: “Que fração do bolo representa uma parte na nova divisão?”, respondendo $\frac{1}{12}$ do bolo.

Os alunos não mostraram dificuldades para responder os itens *(a)* e *(b)*, apoiando-se na representação pictórica feita no quadro, confirmando-se que o registro figural pode ser um forte aliado no estudo de frações.

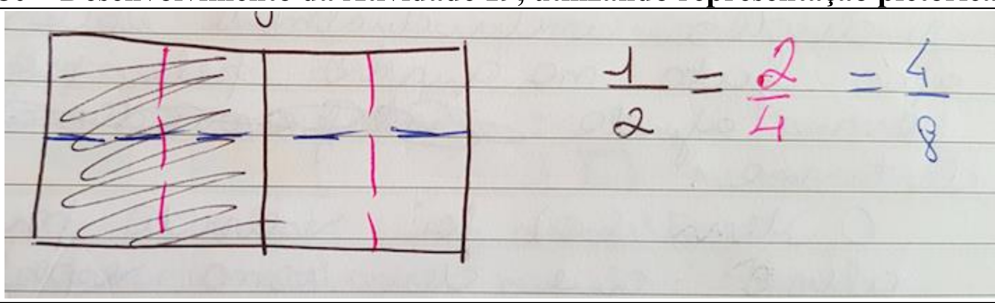
Os itens *(c)* e *(d)* revelaram-se mais complexos para os estudantes. Na resolução do item *(c)* foi aproveitada a oportunidade de explorar "a mesma quantidade". A conclusão $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ foi explicada por uma aluna de forma natural. No entanto, mesmo com este argumento, outros estudantes demonstraram dificuldades em realizar as comparações. Precisei reiterar o argumento da aluna.

No item *(d)*, um estudante completou a frase da professora com relação ao argumento "João comeu menos bolo" (do que um terço). Aqui, uma das alunas que evidenciou dificuldades no item anterior explicitou sua dificuldade: "eu entendo que o pedaço de bolo é menor, mas 2 é maior que 1, então é mais bolo". Precisei repetir a explicação, recorrendo às representações registradas no quadro, para que ela então entendesse o resultado. Cabe ressaltar que esta aluna não só é bem participativa como dá, em geral, respostas corretas, por isso imagno que essa confusão que ela manifestou neste item deve ser bem comum entre os estudantes e deve ser "rastreada" e identificada.

A Atividade 19 foi realizada com bastante entusiasmo e interesse. Antes de entregar a folha impressa com a atividade aos estudantes, orientei-os oralmente. Foi com isso possível constatar que, melhor do que lerem instruções, muitas vezes seguir instruções orais dadas pela professora dá maior agilidade à tarefa.

Os alunos não tiveram dificuldade em perceber que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ a partir da representação que foi sendo construída no quadro (Figura 80).

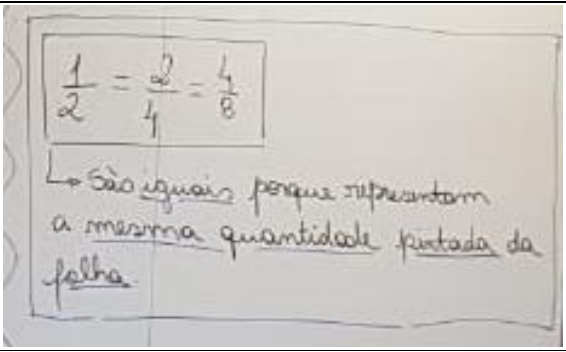
Figura 80 – Desenvolvimento da Atividade 19, utilizando representação pictórica



Fonte: Acervo da autora (2019).

O fechamento da atividade foi dado ao completar-se o quadro ao final da Atividade 19, sendo então registrado: “São iguais porque representam a mesma quantidade pintada da folha” (Figura 81).

Figura 81 – Fechamento da Atividade 19



Fonte: Acervo da autora (2019).

Considerei atingido o objetivo desta atividade.

A Ativividade 20 não foi aplicada por ser em parte semelhante as atividades anteriores e também pela exiguidade do tempo, tendo em vista a quantidade de ítens. No entanto decidimos por mantê-la no produto técnico para o caso de um professor dispor de um tempo maior para desenvolver o tema.

A Atividade 21 foi entregue impressa aos estudantes.

O preenchimento do item *(i)* relativo às bandeiras (A) e (B) foi realizado em conjunto com a turma, que não demonstrou dificuldades em responder e preencher a tabela. Resposta direta de um aluno para a bandeira (A): “4 de 8”, ao que reiterei: “$\frac{4}{8}$ da bandeira”. “E o outro é $\frac{4}{8}$ também!” disse logo um outro aluno.

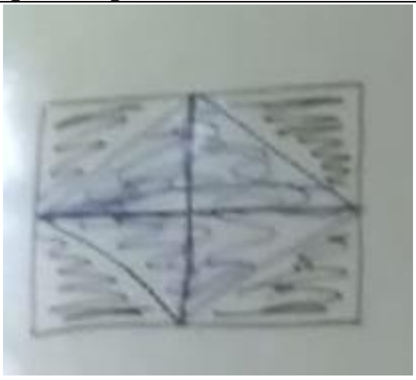
A bandeira (B) teve também uma resposta direta: houve quem respondesse “4 de 9”, mas outros responderam “quatro nonos!” Um estudante acrescentou o comentário “agora a parte maior é a verde!”

Foi dado a seguir um tempo para os estudantes pensarem individualmente nas bandeiras (C) e (D) para o preenchimento da tabela em *(i)*. Percorrendo as classes para ver a resolução dos estudantes, percebi que alguns alunos estavam respondendo $\frac{1}{5}$ (amarelo) e $\frac{4}{5}$ (verde) para a bandeira (C). Por acreditar que essas frações foram dadas como resposta porque os alunos não estavam observando a equipartição, resolvi interferir, alertando a todos: “Não esqueçam que todas as partes devem ser do mesmo tamanho!”

Daí alguns alunos começaram, por iniciativa própria, a subdividir a parte amarela da bandeira (C).

Uma estudante foi então ao quadro sugerir a equipartição apresentada na Figura 82.

Figura 82 – Desenho feito no quadro pela "F", referente ao item (c) da Atividade 21



Fonte: Acervo da autora (2019).

Durante a resolução em conjunto, relembrei a Atividade 4 perguntando se podíamos, lá na distribuição inicial do chocolate, chamar cada pedaço de $\frac{1}{3}$. Um aluno disse que não e ressaltou que a divisão na bandeira (C) "não está igual!" Outro estudante completou: "Não serve a divisão em 5 pedaços iguais".

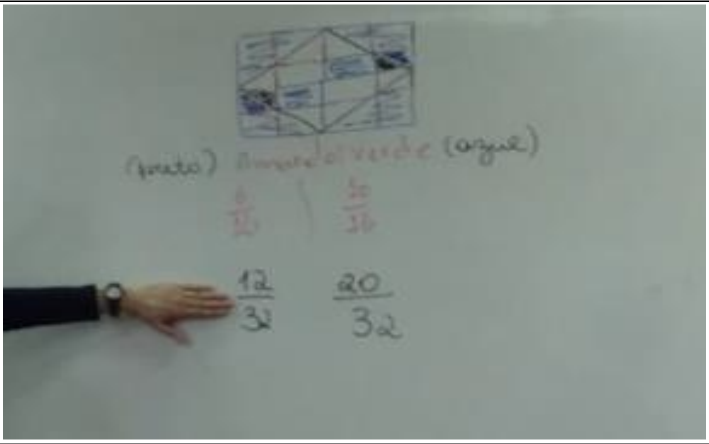
Ao construírem uma equipartição, vários estudantes corrigiram: 4 oitavos e 4 oitavos. Após o encontro, percebi que poderia ter aproveitado o momento para estimular, de forma natural, a subtração com frações: "se a parte amarela é quatro oitavos, quanto sobra para a parte verde?"

A bandeira (D) foi, como já esperado, a mais difícil para os estudantes, segundo comentário de alguns alunos. Creditamos ao fato de aparecerem, nesta bandeira, triângulos, losango e retângulos. Alguns relataram não ter conseguido fazer.

Uma aluna foi ao quadro propor uma equipartição. Subdividiu, no entanto, a figura em retângulos, argumentando que "retângulos que possuem metades de cores diferentes poderiam ser compensados com dois triângulos de cores diferentes" (Figura 83). Anotamos no quadro, por sugestão desta aluna:

Amarelo: $\frac{6}{16}$; Verde: $\frac{10}{16}$

Figura 83 – Desenvolvimento da Atividade 21, sobre a bandeira (D)



Fonte: Acervo da autora (2019).

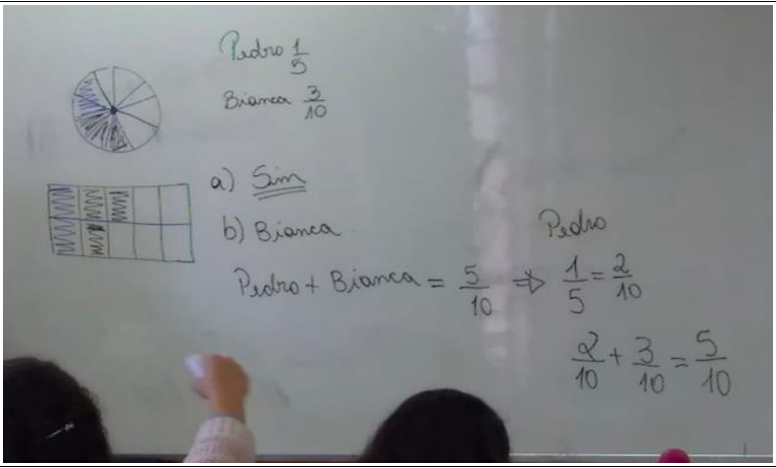
A fim de produzir uma resolução mais simples (e mais adequada com o que vínhamos estudando sobre equipartição), sugeri que cada retângulo poderia ser subdividido em dois triângulos, e então esta mesma estudante acrescentou: “então é só multiplicar 16 x 2”, dando como resposta, $\frac{12}{32}$ e $\frac{20}{32}$. Com esta resposta, esta estudante evidenciou ter clareza do que estava fazendo desde o início de sua resolução.

A equipartição em triângulos não foi apresentada no quadro – deveria, dei-me conta depois, ficando registradas apenas as quantidades de amarelo e de verde.

Minha avaliação até o momento sobre a equipartição é de que os alunos entenderam sua necessidade, mas em alguns momentos esquecem dela e precisam então, ser relembrados.

A Atividade 22 foi inicialmente planejada e implementada com as quantidades $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$. Ficará claro ao longo deste relato porque as quantidades foram alteradas para $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$. Durante a resolução da Atividade 22, aproveitei para fazer uso de duas representações: uma circular e outra retangular, usando cores diferentes para Pedro e Bianca. Em ambas foi explorada a ideia de subdividir cada quinto para obter a equipartição em décimos e, assim, comparar com mais facilidade as quantidades. Os próprios alunos sugeriram o traço horizontal para a equipartição em 10 partes do bolo retangular e a subdivisão de cada fatia ao meio para o circular. Depois disso, a atividade foi resolvida sem maiores questionamentos (Figura 84).

Figura 84 – Desenvolvimento da Atividade 22



Fonte: Acervo da autora (2019).

Para o item *(i)*, os alunos responderam "Sim, é suficiente", mas estes não foram questionados por mim nem "Por que?" nem "Em que situação não seria suficiente?". Também no item *(ii)* os alunos responderam "Bianca", mas não foram questionados "Por que?". Dei-me conta depois, quando fiquei em dúvida se eles realmente utilizaram as frações de mesmo denominador ou se usaram $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$, comparando direto os numeradores 1 e 3. Por isso no produto técnico (anexo A) o enunciado foi alterado para $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$.

Ao longo do desenvolvimento dessa atividade, lancei perguntas, como:

a) Juntos Pedro e Bianca comeram quanto?, e os alunos responderam, "$\frac{5}{10}$" (Figura 84).
b) A quantidade que comeram juntos ($\frac{5}{10}$) é mais ou menos da metade do bolo?, e os alunos responderam "Exatamente a metade! Igual!".

Aproveitei ainda a oportunidade para explorar a quantidade comida por Pedro, levando os estudantes a concluírem: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. Por isso considero que os objetivos da Atividade 22 foram atingidos.

A Atividade 23 foi entregue impressa, para ser feita como tema de casa e ser retomada no próximo encontro. Ao recebê-la, uma aluna reclamou que a Professora faz perguntas muito difíceis. De fato, ao longo desses 12 encontros realizados até o momento, percebi que os alunos têm certa dificuldade em interpretar os enunciados das atividades. Normalmente me chamam para que eu explique o que deve ser feito na atividade, por mais curto e simples que seja seu enunciado.

No encontro seguinte verifiquei que apenas 7 alunos realizaram o tema. Inicialmente, lancei no quadro uma representação pictórica das 15 balas na forma de arranjo retangular.

Mesmo tendo feito uso de um layout bem sugestivo (5 linhas), os estudantes não me orientaram sobre o que deveria então fazer com as 15 bolinhas para calcular quantas balas João pegaria. Pelo contrário, alguns alunos (poucos, 2 ou 3, no máximo), responderam “1 bala”. Decidi dar a dica que ali tínhamos 5 linhas, perguntando então o que seria $\frac{1}{5}$ desta quantidade. Daí concluiram que João consegue pegar $\frac{1}{5}$ das balas, que dá 3 balas.

Para decidir sobre a situação de Paulo, alguns estudantes disseram que seria necessário dividir em 10 partes iguais, o que está correto, porém disseram que isto era possível nesta situação, e até foram ao quadro para tentar desenhar tal divisão.

Nesse momento foi possível perceber que alguns alunos estavam enxergando $\frac{3}{10}$ como 3 balas em 10 balas (“de 10 balas pego 3 e pronto, pois tenho 15 balas. Ainda sobra bala”). Esse comentário, sugere que os alunos não utilizaram as 15 balas como unidade. Esse pode ser, a meu ver, um dos possíveis motivos de os alunos apresentarem dificuldades em trabalhar com grandezas discretas.

Houve também quem pensasse que deveria-se calcular $\frac{3}{10}$ do restante das balas, ou seja, de 12 balas, tentando então dividir 12 balas em dez grupos iguais. Precisei insistir nos $\frac{3}{10}$ de 15 balas.

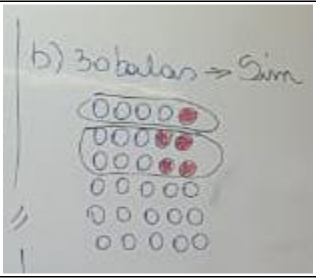
Houve quem ainda viesse ao quadro, tentando dividir cada bala ao meio e também cada bala em 10 pedaços. Precisei alertar que as balas não deveriam ser cortadas. Só depois de termos desenhado as balas no quadro e retomarmos a equipartição é que muitos alunos responderam que não é possível. Ao serem perguntados “por que?” um deles respondeu: “Não consigo dividir porque um é par e o outro é ímpar” – daí aproveitei para responder falando em múltiplos e divisores, lembrando que 5 é divisor de 15, mas 10 não é.

Ao serem questionados sobre a resposta ao item *(a)*, uma estudante respondeu rapidamente, “Conseguirão sim, porque 5 + 10 é 15 e de 15 posso pegar 1 e depois 3”, fazendo este raciocínio para referir-se à adição $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$. Parece que a coincidência dos valores fizera-a pensar em somar denominadores e somar numeradores: $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{4}{15}$.

O item *(a)* foi encerrado sem fazermos uso de outra forma de representação, por exemplo, da representação em Modelo de Barras e sem que eu me convencesse de que os alunos tinham, de fato, entendido a problemática.

Ao abordarmos o item *(b)*, novamente desenhei 30 bolinhas no quadro (agora o layout 6×5 já não foi tão sugestivo para a resolução como o do item *(a)*. A mesma estudante que tentou dividir balas ao meio veio novamente ao quadro, tentando dividir as balas (Figura 85). Cabe ressaltar a não obediência a "partes iguais".

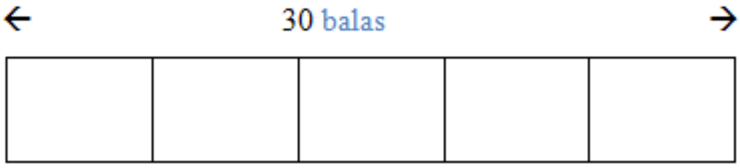
Figura 85 – Divisão proposta por uma aluna, na resolução do item *(b)* da Atividade 23



Fonte: Acervo da autora (2019).

Nesse momento recorri à representação pictórica modelo de barras, desenhando ao lado das bolinhas uma barra como a da Figura 86, tentando mostrar o desenvolvimento da atividade com outra representação, em concordância com o que defende Duval no sentido de o entendimento ser consolidado depois de o estudante ter sido exposto a várias representações.

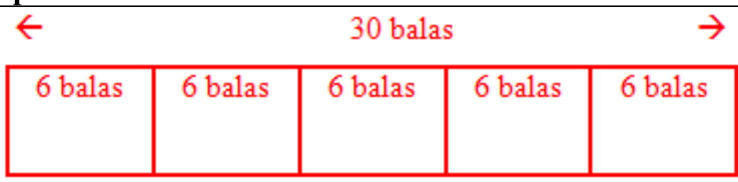
Figura 86 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 1



Fonte: Construção da autora (2019).

Desenvolveu-se o seguinte diálogo, apoiado pela representação no quadro:
Professora: "quero dividir 30 balas em 5 grupos iguais. Quantas balas ficam em cada grupo?"
Alunos (sem mostrarem dificuldade): "6 balas" (Figura 87).

Figura 87 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 2



Fonte: Construção da autora (2019).

Professora: “Quantos grupos João imagina pegar?”

Alunos: “Um”

Professora: “Quantas balas têm em 1 grupo?”

Alunos: “6 balas”

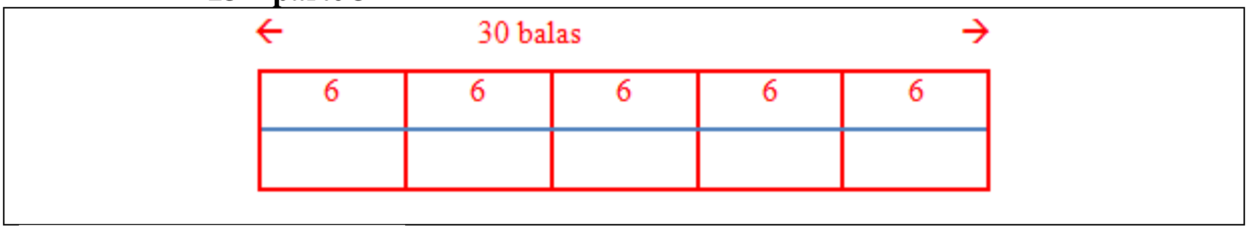
Professora: “Vamos, agora, fazer o mesmo raciocínio para Paulo. Paulo deseja pegar $\frac{3}{10}$. Em quantos grupos preciso dividir as balas?”

Alunos: “Em 10 grupos”

Professora: “Posso aproveitar o mesmo desenho? Como faria?”

Alunos: “Divide ao meio cada parte” (Figura 88).

Figura 88 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 3



Fonte: Construção da autora (2019).

Professora: “Agora, quantas balas tem em cada grupo? “

Aluno 1: “Duas balas”

Aluno 2: “Não! Três balas”

Aluno 3: “Três, porque 6 divididos por 2 é igual a 3” (Figura 89).

Figura 89 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(b)* da Atividade 23 – parte 4

Fonte: Construção da autora (2019).

Professora: “Quantas balas Paulo pode então pegar?”

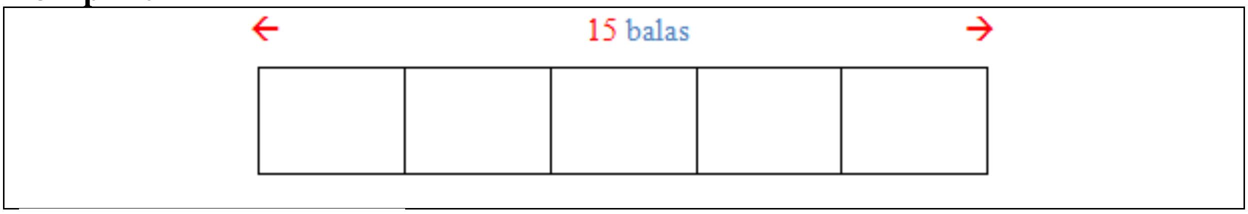
Alunos: “3+3+3=9 balas”.

Percebi que a resposta ao item *(b)* veio mais imediata do que no item *(a)*. Credito este fato ao uso da representação pictórica modelo de barras. Por esse motivo, retomei o item *(a)* e o fiz com o modelo de barras:

Professora: “Para pegar $\frac{1}{5}$ eu preciso dividir em quantos pedaços iguais”?

Alunos: “em cinco pedaços” (Figura 90).

Figura 90 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(a)* da Atividade 23 – parte 1

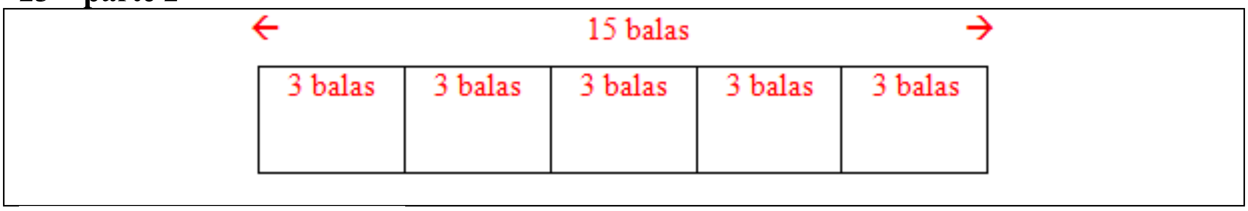


Fonte: Construção da autora (2019).

Professora: “15 balas em 5 grupos iguais, dá quantas balas em cada grupo?”

Alunos: “3 balas” (Figura 91)

Figura 91 – Segunda representação utilizada para desenvolver o item *(a)* da Atividade 23 – parte 2



Fonte: Construção da autora (2019).

Professora: “então, $\frac{1}{5}$ de 15 balas = 3 balas, certo?”

Professora: “E como divido essa mesma barra, em 10 pedaços? Quantas balas em cada pedaço?”

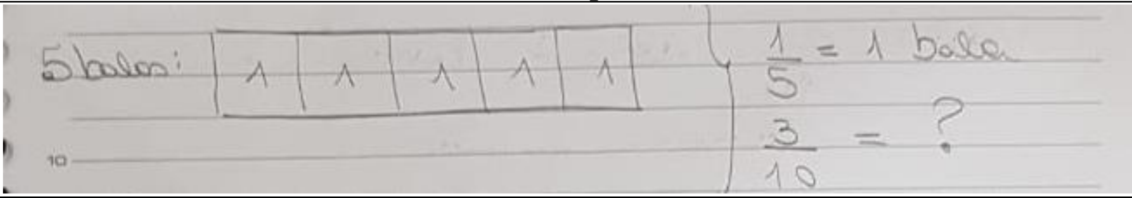
Alunos: “uma bala e um pedaço. Ah, então não dá!”.

Professora: “De fato, aqui, dividir cada quinto com 3 unidades ao meio não é possível, porque em cada parte não ficaria um número inteiro de balas.”

Tive a impressão de que apenas nesse momento os alunos pareceram realmente entender que não é possível equiparticionar 15 balas em 10 partes. Por esse motivo, pareceu-me que, ao menos nessa atividade, o modelo de barras mostrou-se muito adequado. Cabe ressaltar que, neste momento, ninguém sugeriu considerar $\frac{3}{10}$ “do restante”.

Quanto ao item *(c)*, os estudantes começaram a "listar" valores: "seis", "cinco". Aproveitei a resposta "cinco" e coloquei a representação pictórica no quadro (Figura 92).

Figura 92 – Registro feito no meu caderno de campo, semelhante ao realizado no quadro para desenvolver o item *(c)* da Atividade 23 – parte 1

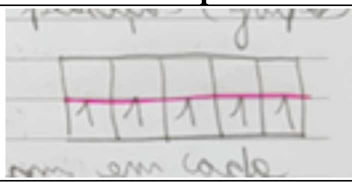


Fonte: Acervo da autora (2019).

Professora: Posso dividir ao meio, cada grupo, como no item *(b)*, para conseguir 10 pedaços (grupos) iguais?

Alunos: "sim" (Figura 93).

Figura 93 – Registro feito no meu caderno de campo, semelhante ao realizado no quadro para desenvolver o item *(c)* da Atividade 23 – parte 2



Fonte: Acervo da autora (2019).

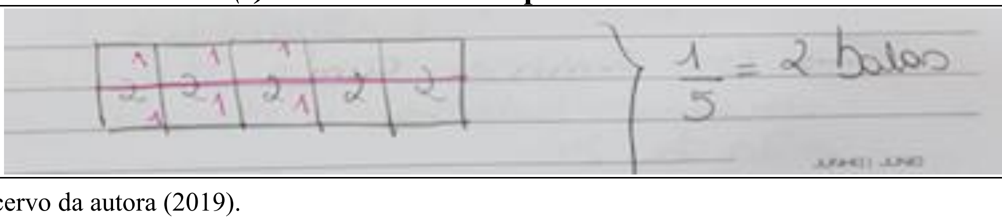
Professora: "Mas, nesse caso, quantas balas ficam em cada grupo? Posso dividir uma bala ao meio?"

Alunos: "Não dá, não tem como dividir com uma bala para cada".

Professora: "Então me digam outra quantidade de balas, que seja possível".

Só depois da discussão encaminhada mostrando a impossibilidade de 5 balas, é que surgiu a resposta "dez balas" (Figura 94).

Figura 94 – Registro feito no meu caderno de campo, semelhante ao realizado no quadro para desenvolver o item *(c)* da Atividade 23 – parte 3



Fonte: Acervo da autora (2019).

Alunos: “Agora divide ao meio professora”.

Professora: “Quantas balas em cada grupo, agora que dividimos em 10?”

Alunos: “1 bala”

Professora: “então é possível João pegar $\frac{1}{5}$ e Paulo $\frac{3}{10}$ de 10 balas?”

Alunos: “sim”

Professora: “Então qual o número mínimo de balas?”

Alunos: “10 balas”

Professora: “10 é múltiplo de 5 e de 10, e ao dividirmos 10 por 10 temos 1 como resultado”.

Concluiu-se assim a discussão sobre o número mínimo de balas sem recorrer-se ao conceito de mínimo múltiplo comum entre 5 e 10.

Ao abordar a Atividade 24 que havia ficado como tema de casa, ouvi novamente o comentário: “Nem comecei, as perguntas são muito difíceis!”

Decidi ler e comentar cada um dos pontos da atividade com a turma, pois talvez alguns termos não fizessem parte de seu dia a dia (como “sem entrada”, por exemplo).

No item *(a)*, a resposta $\frac{1}{5}$ não foi imediata. Precisei insistir, utilizando como representação pictórica o modelo de barras, quando então os alunos perceberam essa resposta.

No item *(b)*, ao serem questionados “de onde saiu o 600,00?” um estudante explicou “Por que é 3000 dividido por 5”.

No item *(c)*, repeti a representação pictórica e a resposta saiu imediatamente. Os alunos afirmaram que $\frac{1}{5}$ do valor da moto é R\$ 600,00 e, portanto, $\frac{2}{5}$ é $\text{R\$ }600{,}00 + \text{R\$ }600{,}00 = \text{R\$ }1200{,}00$.

No item *(d)*, a resposta apareceu imediatamente, então perguntei: “Por que 300,00?” Apareceram as respostas “Por que é R\$ 3000,00 dividido por 10, “bem como “É só dividir 600 por 2”. Aproveitei a última resposta e detalhei este raciocínio reforçando a equivalência: “Daí pode-se concluir que $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. São iguais porque representam o mesmo valor”.

No item *(e)*, a maioria da turma respondeu corretamente, afirmando que $\frac{1}{10} = 300$, e que $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$, portanto $300 + 300 = 600$.

No item *(f)*, a primeira comparação (entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$) foi amparada na representação do modelo de barras, mas depois estimulei oralmente o raciocínio que relaciona fração com a operação de divisão: "dividir por 5 comparado a dividir por 10, qual será o maior pedaço?". A comparação entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{10}$ foi em coro: "$\frac{2}{5}$ é maior do que $\frac{1}{10}$. A próxima comparação (entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{10}$) foi imediata e sem problemas. Sobre a última comparação (entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{10}$), um aluno respondeu imediatamente "igual", e outro explicou algo como "porque dividiu $\frac{1}{5}$ em duas partes".

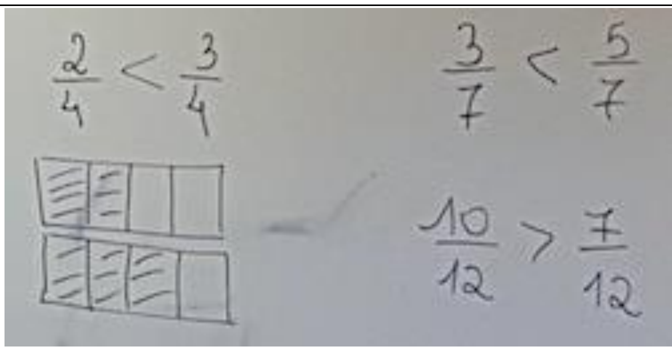
Considero que o desenvolvimento da Atividade 24 foi tranquilo e os alunos responderam às questões de maneira satisfatória.

Houve interesse na realização da Atividade 25, e os alunos mostraram-se bastante engajados, porém a parte lúdica (dobrar e pintar) tomou meia hora da aula porque muitos deles esmeraram-se na pintura.

Alguns alunos tiveram dificuldades em dobrar a folha em 3 partes iguais (dobraram iniciamente em quatro partes); outros pediram ajuda a colegas que tinham conseguido dobrar em três partes iguais.

Para motivar a busca por frações de mesmo denominador, lancei alguns comentários: "Não quero comparar só olhando porque só olhando nem sempre funciona!", "Comparar frações de mesmo denominador é fácil", e dei alguns exemplos, concluindo com os estudantes: "Então quando eu tenho o mesmo denominador, nem preciso de desenho", registrando no quadro alguns exemplos (Figura 95).

Figura 95 – Exemplos de comparação de frações de mesmo denominador



Fonte: Acervo da autora (2019).

A seguir lancei o desafio colocado no enunciado da atividade: como dobrar novamente cada uma das folhas para gerar o mesmo número de partes em ambas? Uma estudante disse que se dobrasse ao meio cada quarto chegaríamos em 8 partes iguais, e não seria atingido o objetivo, ou seja, não obtemos o mesmo número de partes (mesmo denominador) em ambas as folhas.

Recorri à Atividade 23, relembrando que lá usamos (necessariamente) um múltiplo comum dos denominadores 5 e 10 para determinar o número mínimo de balas.

Mas uma aluna ponderou: “Mas 3 e 4 não têm múltiplo comum.”

Professora: “Todos concordam com a colega? Não tem?”

Aluna: “Ah, têm sim, o 12!”

Aproveitei para reforçar que 12 é um múltiplo comum entre 3 e 4. Então desafiei-os: “Então vamos tentar dobrar nossas folhas em 12 partes iguais. Alguma sugestão?”

A mesma aluna que mencionou o múltiplo comum 12 sugeriu “Dobrar uma em três e a outra em 4!”

Dobrei, junto com a turma, cada $\frac{1}{3}$ em 4 partes iguais e cada $\frac{1}{4}$ em 3 partes iguais.

Os alunos contaram (no lugar de fazer uso da multiplicação) e responderam que a nova equipartição tinha 12 pedaços iguais, em ambas as folhas.

Fomos então registrando no quadro as frações equivalentes obtidas, fazendo uso da igualdade à medida que o diálogo com eles ia se desenvolvendo:

Professora: “Na folha onde cada $\frac{1}{3}$ foi dobrado em 4 partes, quantas partes estão pintadas?”

Alunos: “8 partes”.

Professora: “E na folha onde cada $\frac{1}{4}$ foi dobrado em 3 partes, quantas partes estão pintadas?”

Alunos: “9 partes”.

Professora: “Como represento em fração essas novas quantidades?”

Alunos: “$\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$”.

Registrei todas as quatro frações no quadro:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{8}{12} \qquad\qquad \frac{3}{4} \quad \frac{9}{12}$$

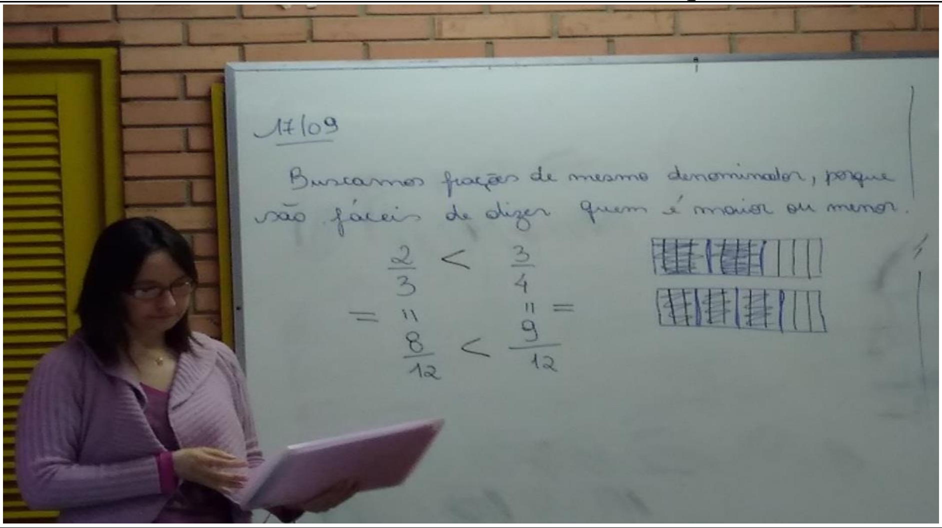
Na sequência, perguntei: “Posso dizer que esses pares de frações são iguais?”

Alunos: “sim”.

Foi então reiterada a estratégia realizada e anotada no quadro a conclusão: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ e $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ porque representam a mesma quantidade.

Anotei no quadro uma ideia importante que deveria ser copiada no caderno pelos estudantes: “Buscamos frações de mesmo denominador porque são fáceis de dizer quem é maior ou menor” (Figura 96).

Figura 96 – Desenvolvimento da Atividade 25, realizada no quadro



Fonte: Acervo da autora (2019).

Após esta Atividade, foram introduzidos e registrados no quadro os termos de uma fração (numerador e denominador), pois considerei útil essa nomenclatura para a realização das próximas atividades.

A Atividade 26 foi distribuída e lida em conjunto com os estudantes. Logo depois de finalizada a leitura do enunciado, um aluno respondeu “Mais branco!”, corrigindo logo a seguir para azul. “É fácil assim decidir?” perguntei-lhe. Ao final da resolução da atividade voltei a questioná-lo.

A Atividade 26 foi resolvida em conjunto com a turma, utilizando como representação o modelo de barras. Inicialmente cabe ressaltar que as frações originalmente propostas foram $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{8}$, e só, durante a realização da atividade, percebi que não foi didático escolher duas frações envolvendo ambas o número cinco, pois a comunicação e clareza do raciocínio poderiam prejudicar a compreensão. Por isso no produto técnico as frações foram alteradas para $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$.

Durante a resolução da atividade, desenvolveu-se o seguinte diálogo:

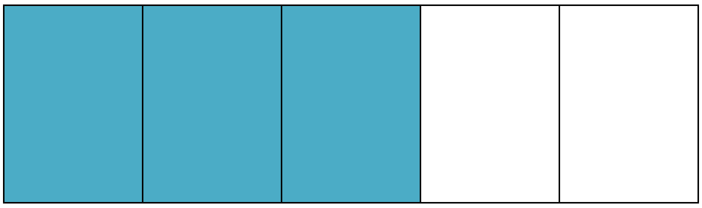
Professora: “Para representar $\frac{3}{5}$ desse retângulo que representa um galão de tinta, preciso dividir esse retângulo em quantos pedaços iguais?”

Alunos: “cinco”.

Professora: “E preciso pintar 3, certo?”

Alunos: “sim”. (Figura 97)

Figura 97 – Representando a resposta



Fonte: Acervo da autora (2019).

Professora: “E para representar $\frac{5}{8}$ desse outro retângulo, de mesmo tamanho do primeiro (representando também um galão de tinta), preciso dividir em quantos pedaços?”

Alunos: “oito”.

Professora: “Vou dividir no sentido horizontal agora, pode ser?”

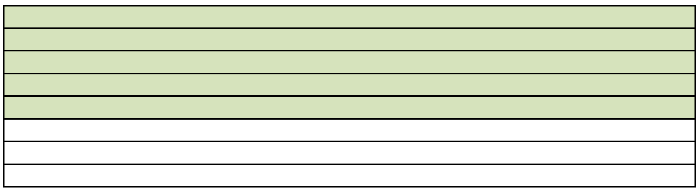
Professora: “Por que estou desenhando os dois retângulos do mesmo tamanho?”

Aluno: “Porque é a mesma unidade. Porque cabe a mesma quantidade.”

Professora: “Isso, porque os galões de tinta têm o mesmo tamanho, ou seja, cabe a mesma quantidade de tinta nos dois. E quantos pedaços tenho que pintar?”

Alunos: “cinco” (Figura 98)

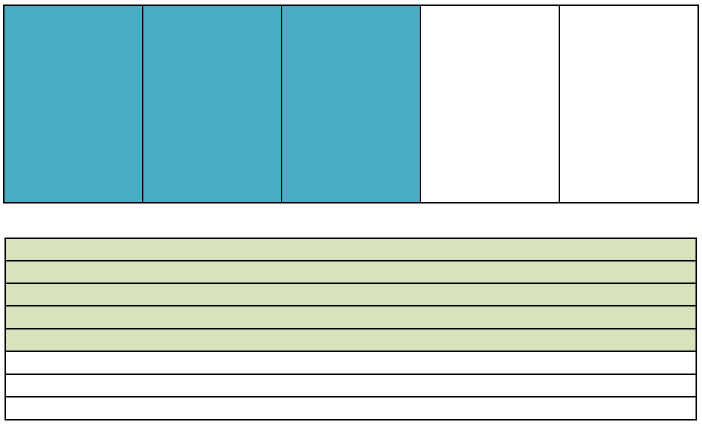
Figura 98 – Representando a resposta



Fonte: Acervo da autora (2019).

Professora: “Olhando essas duas representações, consigo dizer quem é maior, só olhando?” (Figura 99).

Figura 99 – As duas representações



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma aluna respondeu que era o azul. Novamente retomei a ideia de comparar frações com mesmo denominador e os alunos concordaram que uma boa estratégia seria obter frações de denominadores iguais representando estas quantidades.

Professora: “Se precisamos de um mesmo denominador, vamos pensar em uma maneira de deixar os dois retângulos divididos em um mesmo número de pedaços, certo? Um está dividido em cinco e o outro em oito. Alguma ideia?”

Os alunos precisaram de uma retomada da Atividade 25, que ainda estava registrada no quadro. Nesse momento, refiz verbalmente, “a técnica” de subdividir cada pedacinho dos retângulos, desenvolvendo-se o diálogo que segue:

Professora: “Aqui, eu tinha o retângulo dividido em 4 partes $(\frac{3}{4})$ e dividi cada $\frac{1}{4}$ em quantos pedaços?

Alunos: “em três”.

Professora: “Porque eu dividi em 3?”

Alunos: “porque 3 era o denominador da outra fração”

Professora: “E o outro retângulo que está dividido em três pedaços iguais, eu peguei cada pedaço e subdividi em quantas partes?”

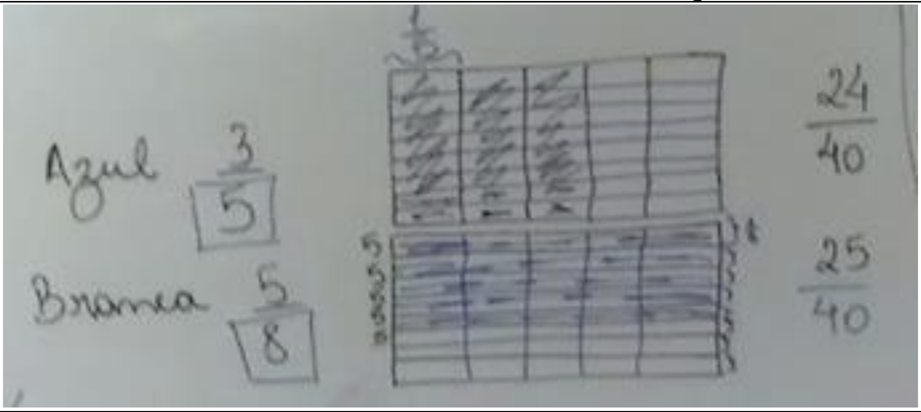
Alunos: “em quatro”

Aqui, reforcei a ideia de que dividimos cada pedacinho dos retângulos pelo denominador da outra fração, ou seja, foi reiterada a estratégia realizada no desenvolvimento Atividade 18.

Perguntei a todos: “o que vou fazer com a segunda unidade?” Uma estudante orientou: “Vai dividir cada pedacinho em 5 partes”.

Dessa forma, prosseguindo o diálogo, os alunos me orientaram a então subdividir cada $\frac{1}{5}$ em 8 partes iguais e cada $\frac{1}{8}$ em 5 partes iguais (Figura 100), obtendo em ambos os retângulos 40 partes iguais com uma equipartição com mesmo *layout* e em $8 \times 5 = 40 = 5 \times 8$ partes.

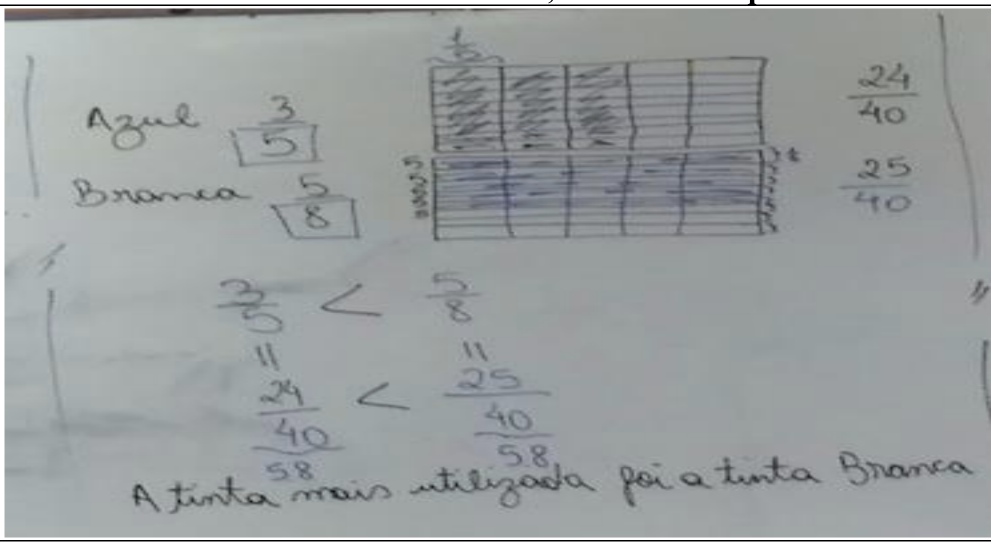
Figura 100 – Desenvolvimento da Atividade 26, realizada no quadro



Fonte: Acervo da autora (2019).

Rescrevendo ambas as frações com o novo denominador 40, foi possível comparar as frações e concluir que a tinta mais utilizada foi a tinta branca (Figura 101).

Figura 101 – Desenvolvimento da Atividade 26, realizada no quadro



Fonte: Acervo da autora (2019).

Após encerrada a resolução no quadro, distribui impressa, com desenhos coloridos, o desenvolvimento da Atividade 26, com os comentários e as principais ideias, para que os alunos tivessem registro do que foi feito e construído (Figuras 102 e 103).

Figura 102 – Desenvolvimento da Atividade 26, utilizando subdivisões na mesma direção

Desenvolvimento da Atividade 26

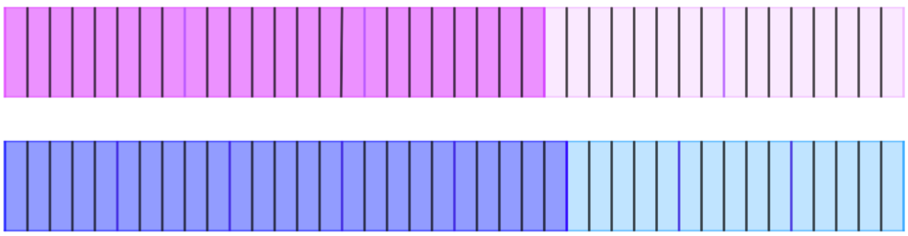
Para comparar as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{8}$ identificando qual representa a mesma quantidade ou se ambas representam a mesma quantidade, podemos buscar frações de mesmo denominador que representem essas quantidades, pois com frações de mesmo denominador não temos dúvidas quanto à comparação.

<u>Uma primeira maneira de representar tais quantidades:</u>

$\frac{3}{5}$ *da unidade*

$\frac{5}{8}$ *da unidade*

Buscamos então subdividir cada quinta parte $(\frac{1}{5})$ em 8 partes e cada oitava parte $(\frac{1}{8})$ em 5 partes, obtendo uma nova equipartição que tem agora 5 x 8 = 40 partes.



$\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$

$\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$

Sendo assim, essa nova equipartição produz um número de partes que é múltiplo do número de partes da equipartição original.

A equipartição em 5 x 8 = 40 partes, gera frações iguais às frações dadas, mas agora elas têm denominadores iguais:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} = \frac{24}{40} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 5}{8 \times 5} = \frac{25}{40}.$$

Agora, é possível comparar sem dúvidas: $\frac{24}{40} < \frac{25}{40}$

Portanto:

$$\text{tinta azul} = \frac{3}{5} = \frac{24}{40} < \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = \text{tinta branca}$$

Conclusão: foi utilizada mais tinta branca do que tinta azul.

Fonte: Acervo da autora (2019).

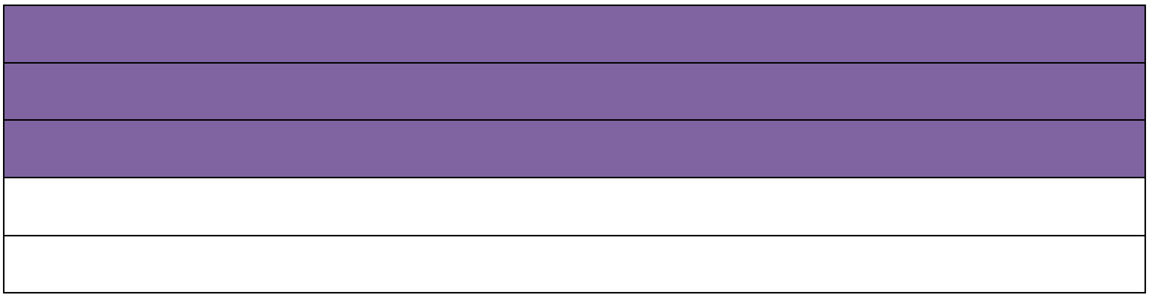
Foi salientado aos estudantes a maior dificuldade de representação que se oferece na primeira maneira apresentada (Figura 102) ao utilizarmos subdivisões todas na mesma direção, apesar de possível, por isso trabalhamos subdivisões na horizontal e na vertical (Figura 103).

Figura 103 – Desenvolvimento da Atividade 26 utilização subdivisões na horizontal e na vertical

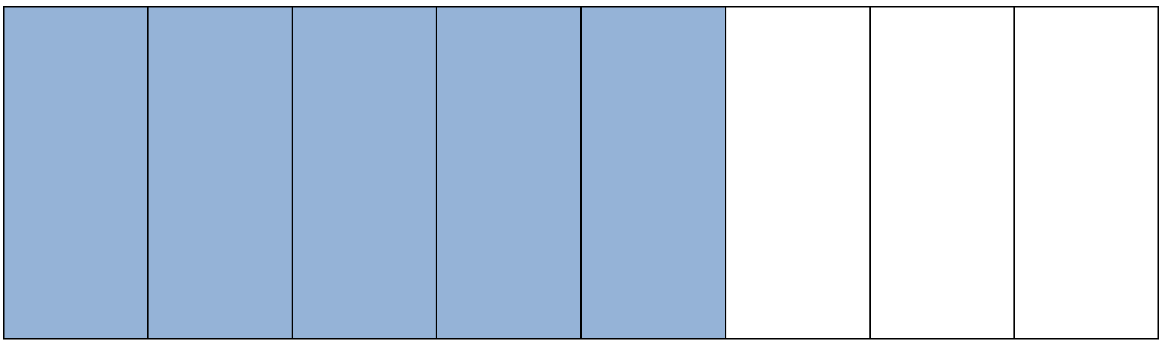
<u>Uma segunda maneira de representar e comparar tais quantidades:</u>

Queremos comparar as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{8}$ com relação a uma mesma unidade, que vamos representar por um retângulo:

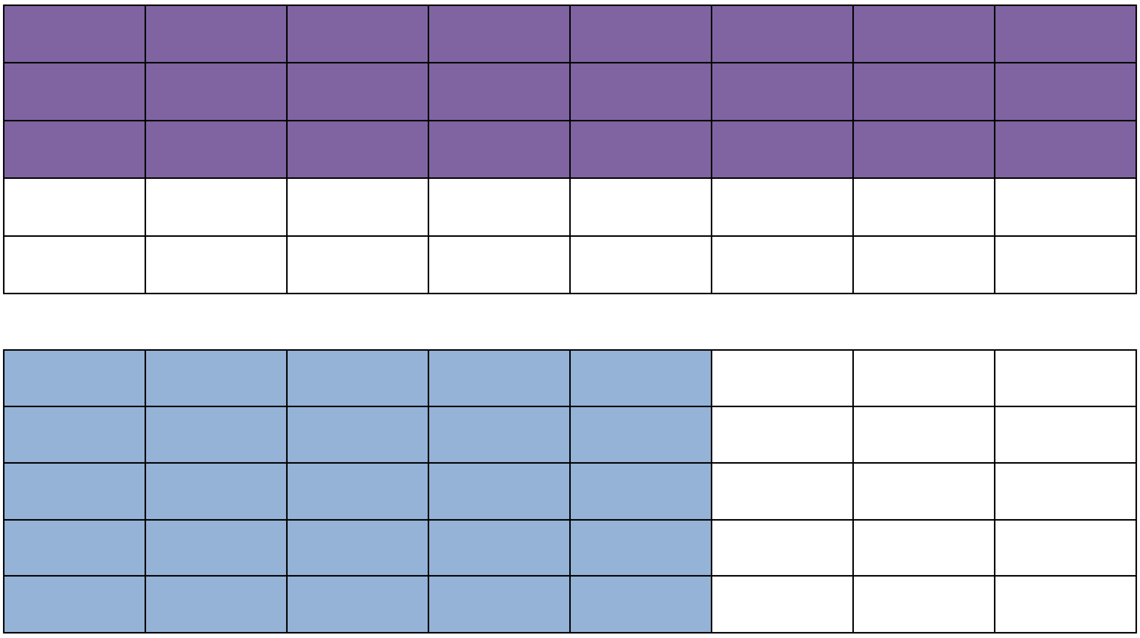
$\frac{3}{5}$ $da\ unidade$:



$\frac{5}{8}$ $da\ unidade$:



Buscamos então subdividir cada quinta parte ($\frac{1}{5}$) em 8 partes e cada oitava parte ($\frac{1}{8}$) em 5 partes, obtendo uma nova equipartição que tem agora 5 x 8 = 40 partes.



Sendo assim, essa nova equipartição produz um número de partes que é múltiplo do número de partes da equipartição original.

A equipartição em 5 x 8 = 40 partes, gera frações iguais às frações dadas, mas agora elas têm denominadores iguais:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} = \frac{24}{40} \quad \text{e} \quad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 5}{8 \times 5} = \frac{25}{40}.$$

Agora, é possível comparar sem dúvidas: $\frac{24}{40} < \frac{25}{40}$

Portanto:

$$\text{tinta azul} = \frac{3}{5} = \frac{24}{40} < \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = \text{tinta branca}$$

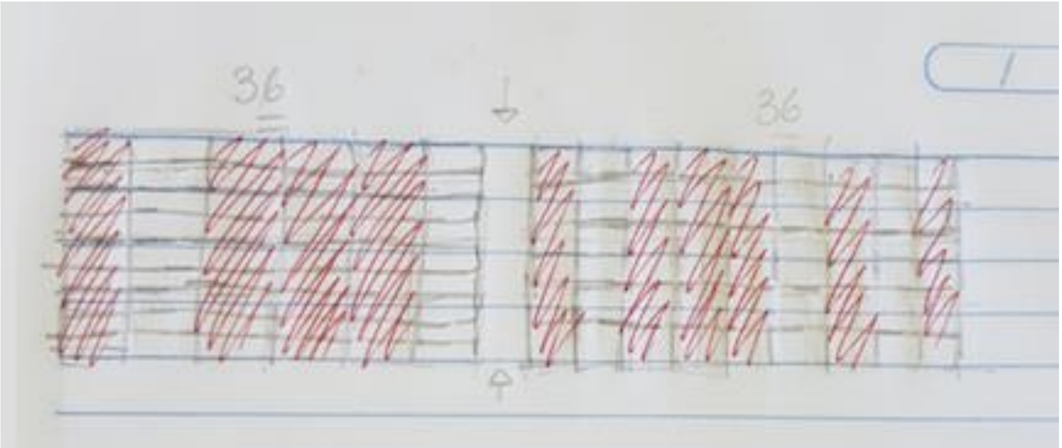
Conclusão: foi utilizada mais tinta branca do que tinta azul.

Fonte: Acervo da autora (2019).

As Atividades 27 e 28 ficaram como tema de casa.

Iniciamos o encontro com a Atividade 28 (A Atividade 27 não foi corrigida nesse encontro). Apenas três alunos realizaram o tema. Desses três alunos, apenas um estava fez corretamente (Figura 104).

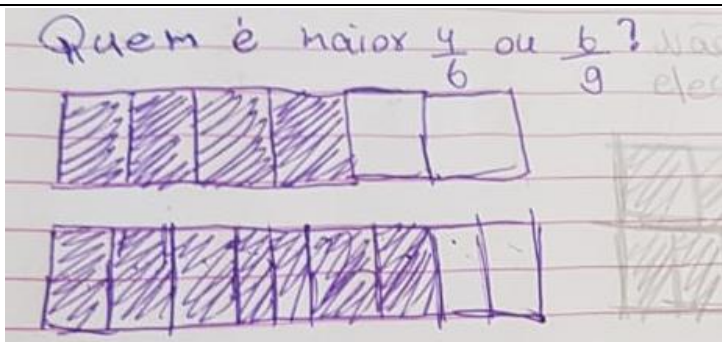
Figura 104 – Desenvolvimento da Atividade 28, feita como tema por uma aluna



Fonte: Acervo da autora (2019).

Um, dos outros dois temas, foi apresentado de forma incompleta, aparecendo apenas o modelo de barras (Figura 105), sem qualquer conclusão e sem fazer uso de linhas verticais para a segunda fração.

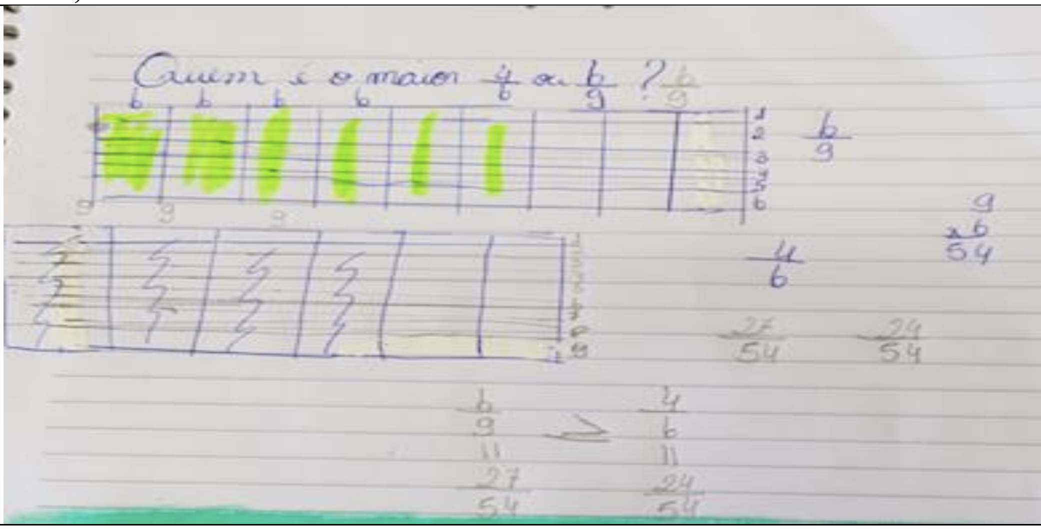
Figura 105 – Resposta incompleta, apenas com a representação das frações no método pictórico de barras



Fonte: Acervo da autora (2019).

O outro estudante fez a subdivisão no número de 54 partes, transformando as frações em mesmo denominador, mas não conseguiu obter o numerador correto, talvez por ter cometido erro na multiplicação (Figura 106).

Figura 106 – Resposta incorreta, com frações transformadas em mesmo denominador, no caso 54, mas com erro no numerador

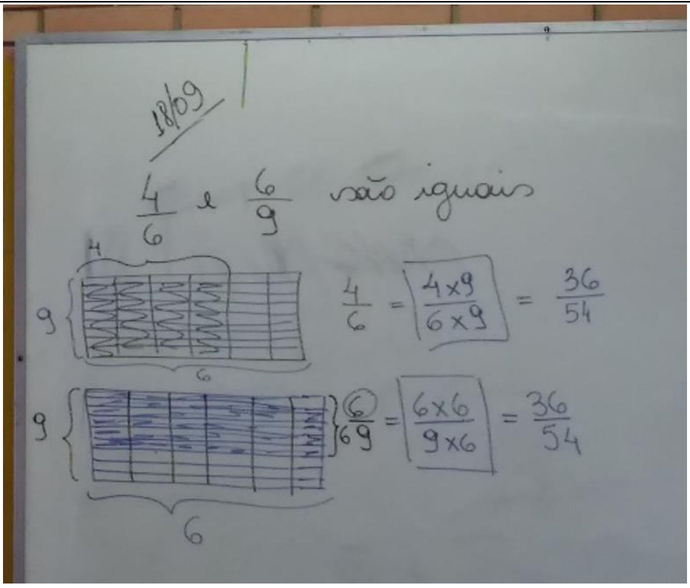


Fonte: Acervo da autora (2019).

Procedemos então à correção dessa atividade, sendo os estudantes questionados "Quem fez? Como pensou?", perguntei.

"Fiz o desenho", disse a aluna que mostrou o tema correto, orientando a professora sobre o registro a ser feito no quadro. No entanto, ela nada falou sobre a divisão "horizontal" e "vertical"; apesar disso, fiz uso de divisões horizontais na primeira unidade e de divisões verticais na segunda unidade, pois o objetivo da atividade era imitar a estratégia utilizada em atividades anteriores e para poder aproveitar o significado de arranjo retangular da multiplicação para determinar, afinal, o número de partes em cada nova equipartição (Figura 107). Também aproveitei para fazer uso da nomenclatura "numerador" e "denominador" introduzida em aula anterior. Após encerrada a atividade, dei-me conta que deveria ter solicitado a algum outro aluno para fazer as equipartições no quadro, para verificar se mais estudantes já fazem uso das linhas horizontais e verticais.

Figura 107 – Desenvolvimento da Atividade 28, feita no quadro, em conjunto com a turma



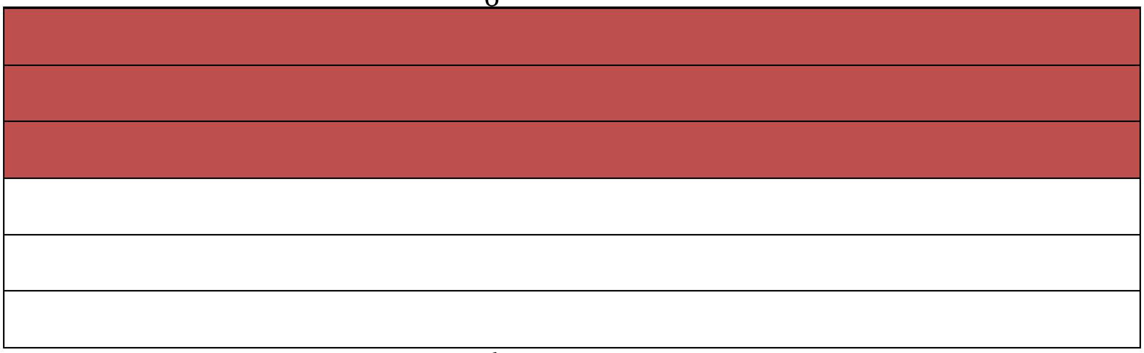
Fonte: Acervo da autora (2019).

Após chegarmos à conclusão de que as frações originais são, afinal, equivalentes (ou iguais, na linguagem dos estudantes), a estudante que havia feito corretamente o tema (“C”) vibrou: “Acertei! Eu tinha dito que não tinha maior, que são iguais!”

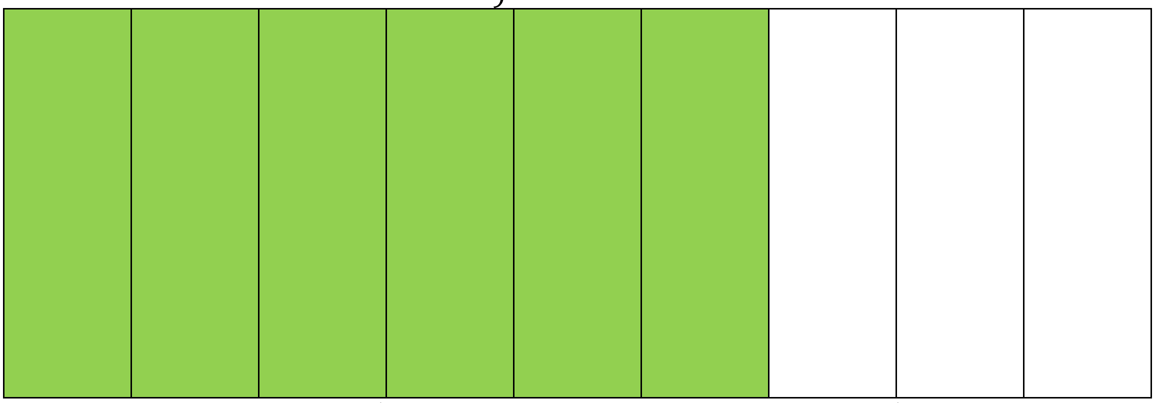
Após encerrada a resolução no quadro, foi distribuída uma folha com a resolução da Atividade 28 para ser colada no caderno (Figura 108), já que a subdivisão em 54 partes iguais certamente ficaria imprecisa e provavelmente poluída em um desenho feito pelos alunos.

Figura 108 – Comparando as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ (Desenvolvimento da atividade 28 entregue impressa aos alunos)

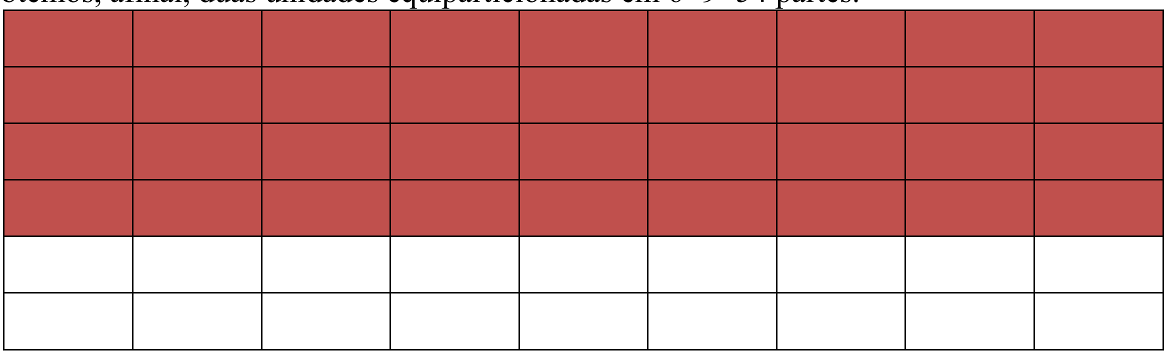
$\frac{4}{6}$ *da unidade*

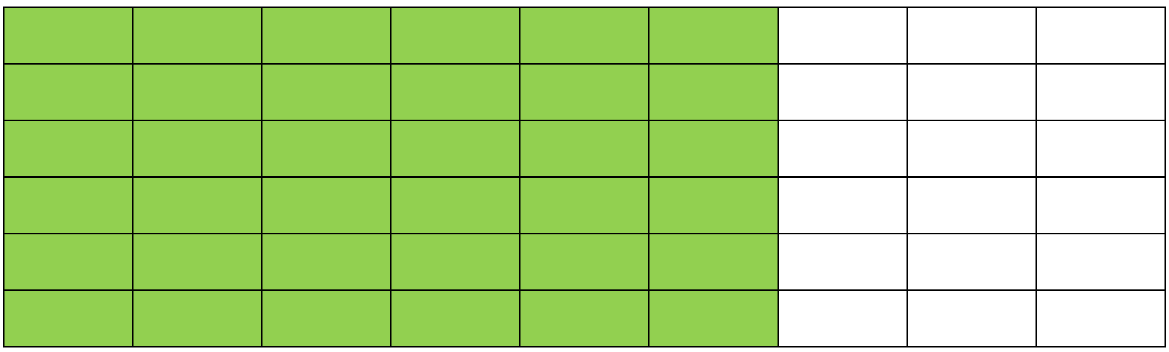


$\frac{6}{9}$ *da unidade*



Subdividindo cada um sexto ($\frac{1}{6}$) em 9 partes iguais e cada um nono ($\frac{1}{9}$) em 6 partes iguais, obtemos, afinal, duas unidades equiparticionadas em 6×9=54 partes.





Portanto, $\frac{4}{6}$ e $\frac{36}{54}$ são iguais, bem como $\frac{6}{9}$ e $\frac{36}{54}$.

Concluímos que as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ ambas representam a mesma quantidade da unidade. Logo, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são iguais.

Fonte: Acervo da autora (2019).

A Atividade 29 sugere, por meio de uma ilustração, que as frações $\frac{8}{25}$ e $\frac{1}{3}$ representam a mesma quantidade tanto de um retângulo como de um círculo, objetivando ressaltar aos estudantes que a apreensão perceptiva não é suficiente em matemática.

E, de fato, tão logo a atividade foi proposta, uma aluna observou: “Tá muito difícil de ver qual é maior, os desenhos estão muito parecidos!”, mostrando que a atividade cumpria um de seus objetivos. Daí, esta mesma aluna raciocinou oralmente:

$$“\frac{8}{25} = \frac{8 \times 3}{25 \times 3}”$$

e acrescentou “25 é múltiplo de 5 então pode dividir o desenho em 5 partes e depois cada parte em 5 também”. Só então fiz a representação retangular no quadro.

Estimulei o raciocínio mental da estudante, para ver até onde ela conseguiria ir. Ela sentiu necessidade de apoiar-se na representação para o raciocínio relativo a $\frac{1}{3}$, e quando representei $\frac{1}{3}$ no quadro ela já se deu conta que o próximo passo era a subdivisão de cada terço em 25 partes iguais (Figura 109).

“O que podemos fazer então para comparar as frações?”, perguntei.

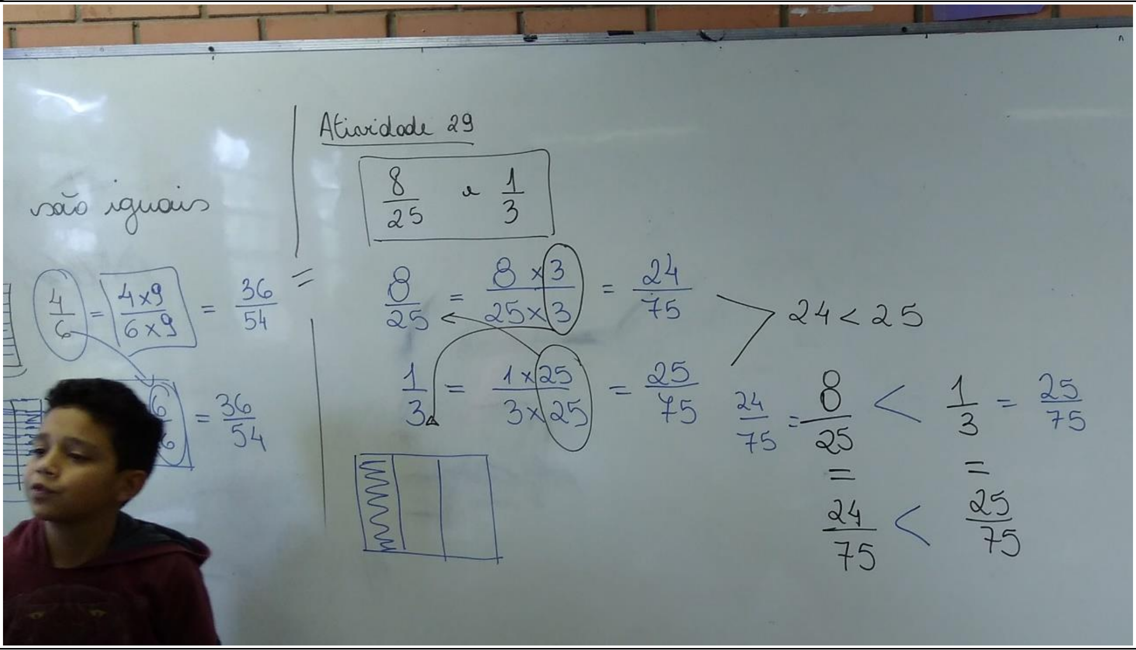
Um aluno respondeu: “Mesmo denominador”.

Professora: “E por que buscamos um mesmo denominador? “

O mesmo aluno respondeu “Porque fica mais fácil dizer quem é maior.”

Neste momento pude constatar que a maioria da turma não teve dificuldade em fazer a representação pictórica da nova equipartiação, utilizando linhas horizontais e verticais.

Figura 109 – Desenvolvimento da Atividade 29



Fonte: Acervo da autora (2019).

Depois do encontro dei-me conta que talvez o registro no quadro tenha ficado incompreensível para alguns: melhor do que escrever

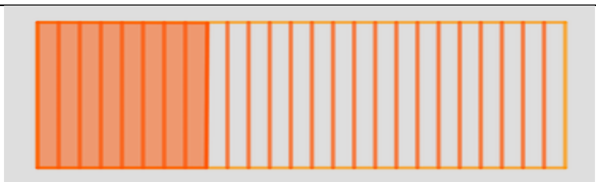
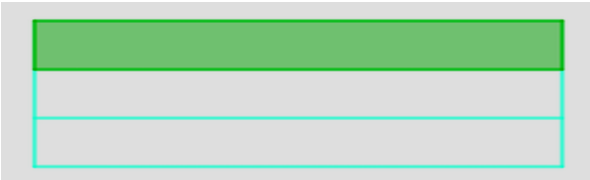
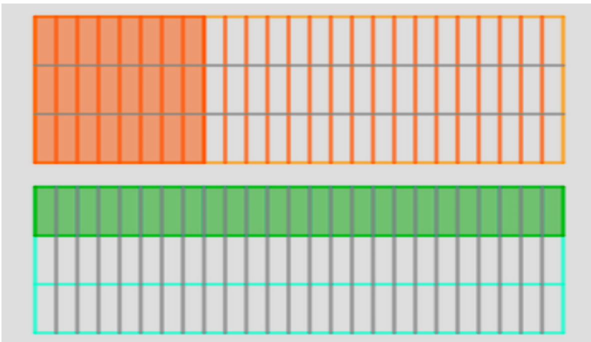
$$\frac{24}{75} = \frac{8}{25} < \frac{1}{3} = \frac{25}{75}$$

é escrever

$$\frac{8}{25} = \frac{24}{75} < \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

Esta nova ordem na escrita foi apresentada na retomada da atividade na aula seguinte, quando foi explorada oralmente a generalização (demonstração do teorema de comparação entre duas frções), seguida da distribuição de uma folha contendo o exemplo e a generalização (Quadro 9); no entanto, não foi possível ler a folha em conjunto com a turma, por falta de tempo.

Quadro 9 – Desenvolvimento da Atividade 29

<table>
<tr><th>Comparando as frações $\frac{8}{25}$ e $\frac{1}{3}$</th><th>Generalização</th></tr>
<tr><td>
$\frac{8}{25}$ da unidade

$\frac{1}{3}$ da unidade</td><td>Supondo que queiramos comparar as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ de uma mesma unidade.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Podemos comparar as duas frações que não têm o mesmo denominador por meio de frações iguais a elas que tenham mesmo denominador.</td></tr>
<tr><td>Subdividindo cada vinte cinco avos em 3 partes iguais e cada terço em 25 partes iguais, obtemos, afinal, duas unidades equiparticionadas em 25 × 3 = 75= 3×25 partes.

Temos, então, $\frac{8}{25}$ e $\frac{8\times3}{25\times3}=\frac{24}{75}$ são iguais, bem como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1\times25}{3\times25}=\frac{25}{75}$.</td><td>Se subdividirmos cada b-ésima parte em d partes iguais e cada d-ésima parte em b partes iguais, obtemos, afinal, duas unidades equiparticionadas em bd partes.

Temos então que $\frac{a}{b}$ e $\frac{a\times d}{b\times d}$ são frações iguais, bem como $\frac{c}{d}$ e $\frac{b\times c}{b\times d}$.</td></tr>
<tr><td>Ora, $\frac{24}{75}$ e $\frac{25}{75}$ são frações de mesmo denominador.

Logo, a comparação das frações pode ser feita a partir da comparação dos numeradores dessas frações.

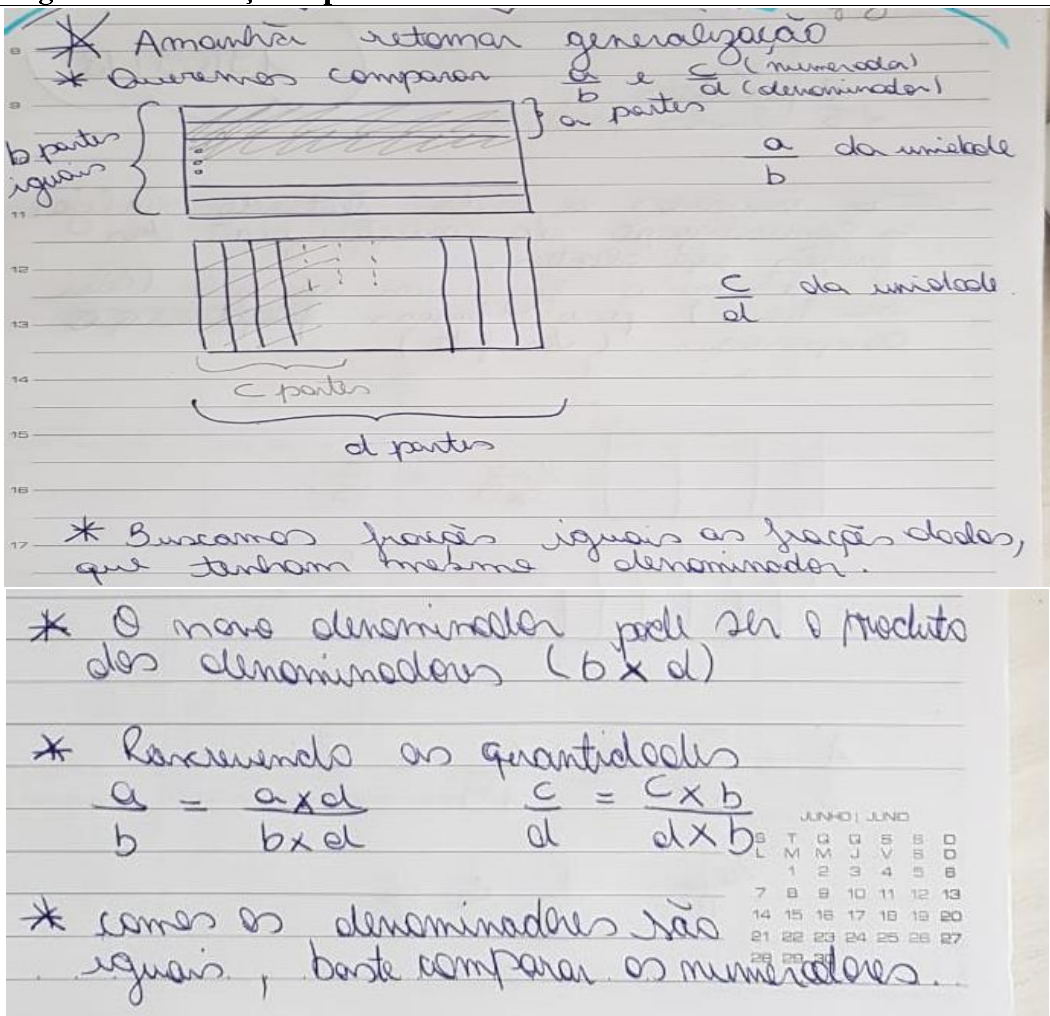
Como 25 > 24, concluímos que</td><td>Ora, $\frac{a\times d}{b\times d}$ e $\frac{b\times c}{b\times d}$ são frações de mesmo denominador.
Logo, a comparação das frações pode ser feita a partir da comparação dos numeradores dessas frações ($a \times d$ e $b \times c$); em particular, as frações só serão iguais se seus numeradores</td></tr>
</table>

$\frac{1}{3}=\frac{25}{75}>\frac{24}{75}=\frac{8}{25}$ ou seja, $\frac{1}{3}>\frac{8}{25}$	forem iguais, ou seja, só se $a \times d = b \times c$. Ou seja: $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são frações iguais se e só se $a \times d = b \times c$.

Fonte: Construção da autora (2019).

Para o início do próximo encontro, planejei introduzir a notação genérica de fração $\frac{a}{b}$ (Figuras 110) ao retomar a segunda coluna da folha entregue aos estudantes, e que trata precisamente da generalização do método de comparação de duas quaisquer frações (demonstração do teorema de comparação), com o objetivo de tentar avaliar a reação dos estudantes frente a ela.

Figura 110 – Planejamento, no meu caderno de campo, da demonstração usando notação genérica de fração - parte 1



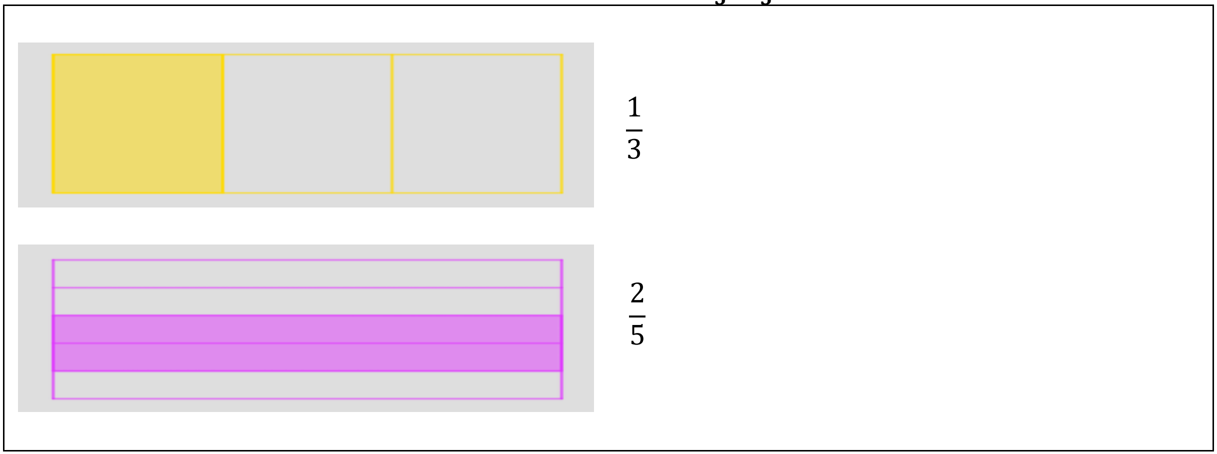
Logo: as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{e}{d}$ são iguaisse e só se $a \times d = b \times c$

Fonte: Acervo da autora (2019).

Comecei então, relembrando a problemática da comparação por meio de um exemplo (criado na hora), usando as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$.

"Como representar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$?", perguntei. Muitos estudantes responderam certo. Registramos no quadro a representação mencionada pelos estudantes (Figura 111).

Figura 111 – Registro no quadro da representação $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ mencionada pelos estudantes



Fonte: Acervo da autora (2019).

"E como fazer para obter frações de mesmo denominador?", perguntei.

Retomamos a ideia da aula passada de "multiplicar cada fração pelo denominador da outra".

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

Reiterei que fica mais fácil comparar frações quando elas têm mesmo denominador.

Registrei então no quadro:

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} < \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \text{ logo, } \frac{1}{3} < \frac{2}{5}.$$

Só após o exemplo, iniciamos a tentativa de generalizar, conforme o planejamento registrado ao final do relato do encontro anterior. No entanto, a experiência de tentar usar a notação genérica $\frac{a}{b}$ para frações revelou-se inadequada para esta turma. Muitos estudantes reagiram com muita surpresa ao verem uma fração escrita com letras no lugar dos números (isto é, na forma $\frac{a}{b}$). Agitaram-se e anunciaram mais de uma vez que não estavam "entendendo nada", pedindo para explicar novamente.

Assim, decidi parar de tentar registrar o argumento genérico (demonstração) no quadro e dei continuidade ao raciocínio apenas oralmente. Minha orientadora estava presente e sinalizou-me que estava de acordo com esta minha decisão.

Retomei a comparação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ e, com a ajuda dos alunos, fizemos a generalização oralmente. Eles mesmos comentaram: “Para deixar no mesmo denominador, multiplica pelo denominador da outra fração”.

Perguntei: “só multiplica o denominador?”

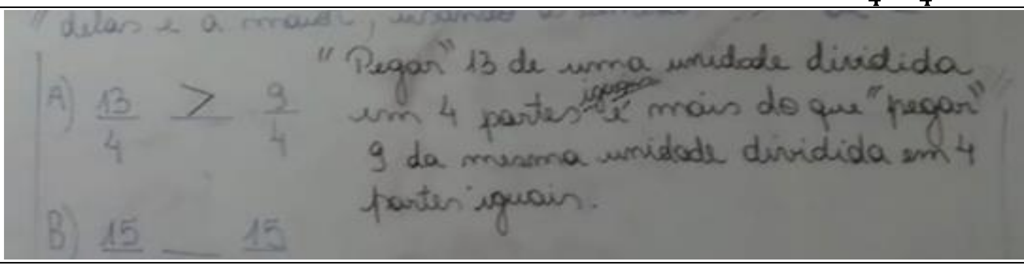
Alunos: “não, o de cima também.”

Mesmo não registrando por escrito a generalização para comparar frações equivalentes, com o objetivo de buscar frações equivalentes às frações dadas, considero que os alunos entenderam a caracterização, pois souberam utilizar no desenvolvimento das atividades seguintes.

Foi entregue aos estudantes uma folha com a Atividade 30 como tema de casa para ser recolhida no próximo encontro. No entanto, no início da aula seguinte perguntei quem havia feito o tema de casa e apenas 4 alunos se manifestaram. Recolhi os temas, mas não considerei como realizada a tarefa.

Na resolução da Atividade 30, não era esperado que os estudantes usassem exclusivamente a caracterização de frações equivalentes. E, de fato, no item *(a)* os alunos utilizaram a definição de fração não unitária respondendo que os denominadores já eram iguais e que podia-se então “comparar direto”, concluindo então que $\frac{13}{4} > \frac{9}{4}$ (Figura 112).

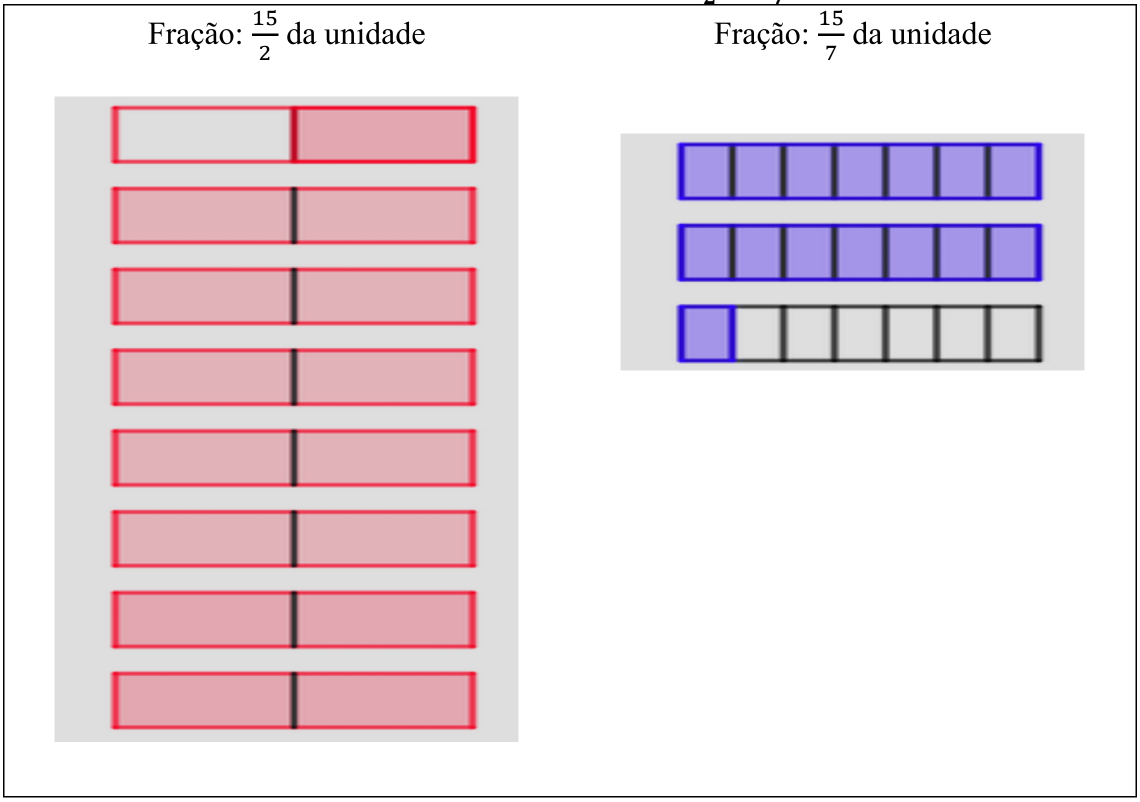
Figura 112 – Desenvolvimento, feito no quadro, da comparação entre $\frac{13}{4}$ e $\frac{9}{4}$



Fonte: Acervo da autora (2019).

No item *(b)*, uma aluna explicou corretamente, fazendo uso da relação inversa entre o número de partes e o tamanho da parte: “dividir em 2 partes obtém um pedaço maior do que dividir em 7 partes”. No entanto, alguns alunos responderam que $\frac{15}{7}$ era maior. Decidi então fazer um registro pictórico no quadro (Figura 113), mas antes perguntei se $\frac{15}{2}$ de uma barra de chocolate era mais ou menos do que uma barra e uma estudante respondeu: “muito mais!”.

Figura 113 – Representação pictórica das frações $\frac{15}{2}$ *e* $\frac{15}{7}$.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma vez concluída a representação no quadro, perguntei novamente, “quem é maior, $\frac{15}{2}$ ou $\frac{15}{7}$?”.

Alunos: “sim, $\frac{15}{2}$ é maior que $\frac{15}{7}$.”

No item *(c)* ainda houve quem respondesse “o maior é o $\frac{2}{14}$ porque 14 é maior!”

Mas uma estudante perguntou se as frações podiam ser iguais. Respondi que sim, mas que teríamos que justificar.

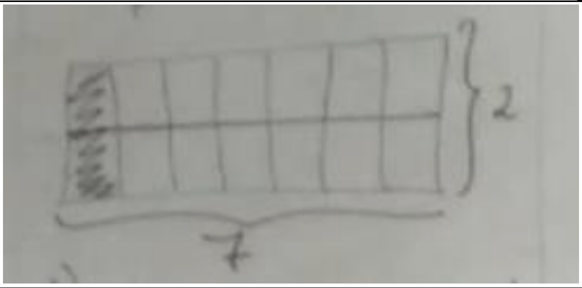
Coloquei então no quadro a representação pictórica pra $\frac{1}{7}$.

Daí perguntei: “quero dividir essa unidade em 14 partes iguais, o que posso fazer?”

Uma aluna respondeu: “dividir ao meio”, sinalizando com a mão, que a divisão poderia ser feita na horizontal.

Fiz então no quadro o registro sugerido (Figura 114).

Figura 114 – Desenvolvimento da Atividade 30, item *(c)*, feito no quadro



Fonte: Acervo da autora (2019).

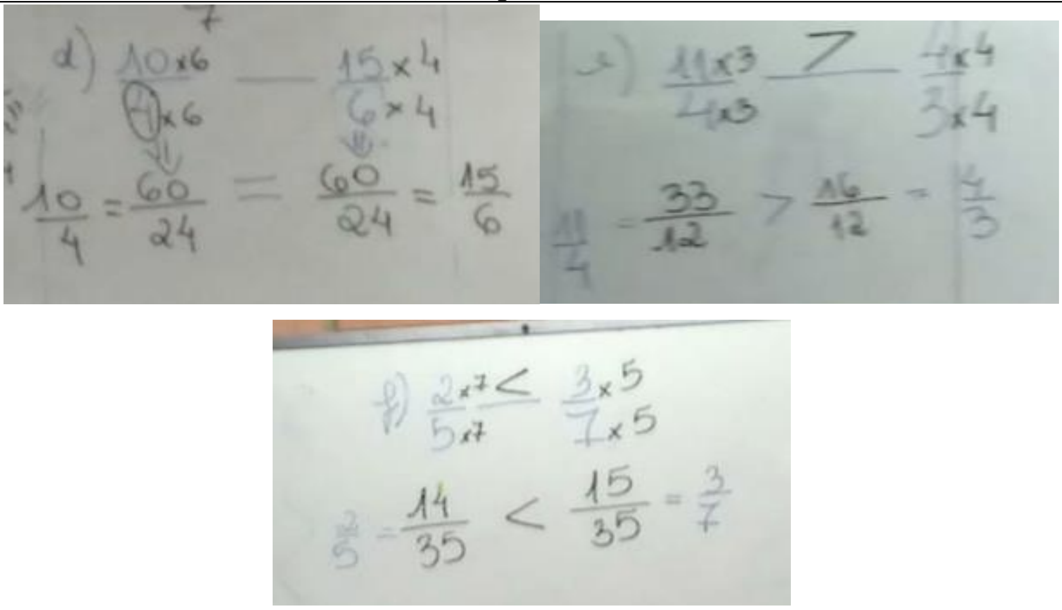
No momento que dividi ao meio, alguns alunos logo exclamaram: “são iguais”, “$\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{14}$ são iguais”.

Durante todo o trabalho realizado até aqui, percebi que a representação pictórica envolvendo o modelo de barras auxilia muito (tanto com grandezas discretas como grandezas contínuas), tornando a fração realmente significativa para os alunos.

Ressaltei aos estudantes que, quando os denominadores são pequenos, é mais simples fazer uma representação para as frações. No entanto já fica mais difícil representar por meio de figura, frações com denominadores grandes, e por isso saber transformar as frações dadas em frações de denominadores iguais, sem apoio em desenhos, é imprescindível para proceder a uma comparação.

Os demais itens da atividade foram resolvidos com a utilização de frações equivalentes e sem representação pictórica (Figura 115). Ao final da resolução do item (d) sem desenho, reiterei a observação feita, perguntando: “Precisei afinal fazer o desenho?” Os estudantes responderam que não.

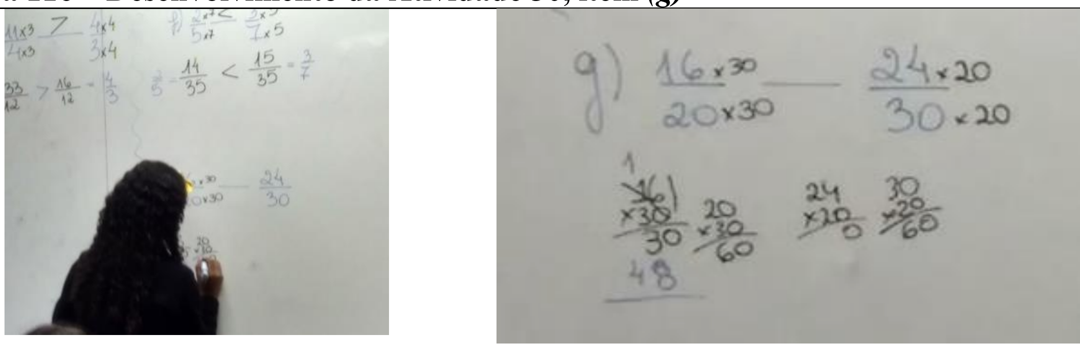
Figura 115 – Desenvolvimento da Atividade 30, itens *(d), (e)* e *(f)*, feita com uso da caracterização das frações equivalentes



Fonte: Acervo da autora (2019).

Uma aluna ficou feliz que entendeu o procedimento e pediu para ir ao quadro resolver o item *(g)*. Mas, ficou com dúvidas nas multiplicações e me pediu ajuda (Figura 116).

Figura 116 – Desenvolvimento da Atividade 30, item *(g)*



Fonte: Acervo da autora (2019).

Os demais itens foram resolvidos de maneira análoga, e observei que os estudantes não se preocuparam em resolver as multiplicações relativas aos denominadores, concentrando-se (corretamente) apenas nos numeradores, como no item *(g)* (Figura 116).

A Atividade 31, que trata da comparação entre três frações, foi distribuída impressa aos estudantes e não incluía o item *(c)*. Este foi acrescentado ao produto técnico após a implementação.

Alguns alunos declararam não saber o significado de "respectivamente" que aparece no enunciado. Após explicar o significado do termo, perguntei: "como comparar 3 frações?", ressaltando que até então só havíamos comparado duas frações.

Os alunos ficaram pensativos... Precisei responder: "comparamos de duas em duas, essa é uma das maneiras". Os alunos concordaram. Dei-me conta depois que poderia ter dado um exemplo com números naturais e perguntado como realizariam tal comparação.

Então começamos comparando $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{7}$. Perguntei: "como transformo em mesmo denominador?"

Duas alunas responderam ao mesmo tempo "multiplica a primeira fração por 7 e a segunda por 2". No quadro escrevi:

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{14} > \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Como a terceira fração já tem denominador 14, todas as frações agora já têm mesmo denominador 14,

$$\frac{7}{14}, \quad \frac{4}{14} \quad \text{e} \; \frac{1}{14},$$

portanto podemos compará-las com segurança.

Perguntei "Quem é menor?" Os alunos responderam "$\frac{1}{14}$", concluindo então que a resposta ao item (*a*) é Carlos.

Para calcular a quantidade de doce que restou no pacote (item *(b)*), os estudantes sugeriram somar todas as quantidades. Escrevi então no quadro:

$$\frac{7}{14} + \frac{4}{14} + \frac{1}{14} = \frac{12}{14} \text{ (quantidade total consumida)}$$

Perguntei então "o que restou?" E os alunos responderam "$\frac{2}{14}$", fazendo apenas cálculo mental.

Então desafiei-os com a pergunta: "Que operação preciso realizar para ter esta resposta? Qual fração representa o total de doces?"

As mesmas duas alunas que haviam falado em coro anteriormente disseram, novamente em coro: $\frac{14}{14}$. Escrevemos então no quadro:

$$\frac{14}{14} - \frac{12}{14} = \frac{2}{14}$$

Minha avaliação sobre esta atividade é que os alunos trabalharam bem nesta situação, sem fazer uso de qualquer representação pictórica. Ocorreu-nos, depois deste encontro, que um novo item poderia ser acrescentado ao final desta atividade, que informa a quantidade total de doces, fazendo os estudantes efetivamente trabalhar com grandezas discretas. A pergunta “afinal, qual a quantidade de doces que cada um comeu?” poderia então ser resolvida com o modelo de barras, reforçando assim a estratégia de resolução com as barrinhas bem como reiterando que grandezas discretas também podem ser representadas desta forma. Decidimos, assim, acrescentar este item no Produto Técnico.

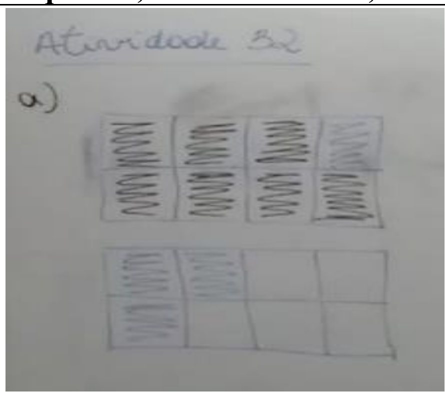
A Atividade 32 foi resolvida em conjunto com a turma.

Antes de registrar uma representação para a situação no quadro, perguntei aos alunos que formato de bolo usaríamos, e eles escolheram o formato retangular. Daí um estudante orientou-me na divisão em 8 partes iguais: “Divide no meio, depois no meio novamente e depois ‘corta’ no meio”, referindo-se ao risco horizontal.

Para a resolução dos itens *(a)* e *(b)*, os alunos completavam as minhas frases, evidenciando terem bem interpretado a tabela.

Já no desenvolvimento do item *(a)*, os alunos perceberam que seria necessário mais de um bolo. Desenhamos um bolo, dividimos como o colega havia sugerido e fomos pintando as quantidades vendidas em cada dia da semana. Assim, foi natural para os alunos a necessidade de desenhar um segundo bolo, também dividido em oito pedaços, para pintarmos nele as 3 fatias que faltaram, para completar para os $\frac{4}{8}$ vendidos na sexta, obtendo no total, $\frac{11}{8}$ (Figura 117).

Figura 117 – Desenvolvimento no quadro, da Atividade 32, item (a)

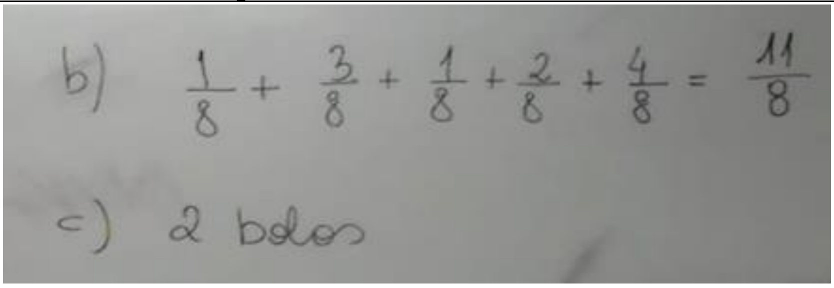


Fonte: Acervo da autora (2019)

A representação na forma de fração foi “ditada” pelos alunos e fui então, registrando no quadro (Figura 118).

O mesmo aluno que havia sugerido a equipartição em oito partes respondeu corretamente o item *(c)*: “Precisa de dois bolos para não faltar bolo para os clientes, mas vai sobrar bolo”.

Figura 118 – Desenvolvimento no quadro, da Atividade 32, itens (b) e (c)



Fonte: Acervo da autora (2019).

E continuou respondendo o item *(d)*: “5 de 8”.

Daí perguntei “Se não tivéssemos feito o desenho, como poderíamos encontrar a resposta ao item *(d)*? “16!”, sintetizou ele. Estimulando a resposta com frações, perguntei: “qual fração representa o total de pedaços da unidade bolo?”.

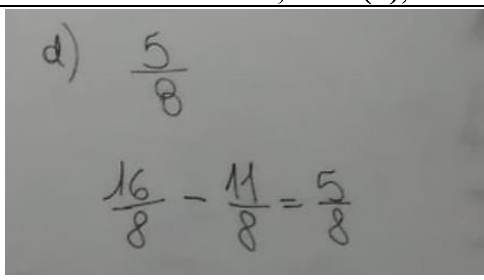
Aluno: “são 16 pedaços do bolo dividido em 8 pedaços”.

Eu: “como escrevo na forma de fração?”

Aluno: “$\frac{16}{8}$”

Registrei no quadro, com o auxílio dos demais, o desenvolvimento do item *(d)*, sem usar representação pictórica (Figura 119).

Figura 119 – Desenvolvimento da Atividade 32, item (d), feito no quadro



Fonte: Acervo da autora (2019).

Acredito que os alunos, com poucas exceções, acompanharam o desenvolvimento da atividade.

A próxima atividade foi planejada a partir do encontro anterior em substituição a outra que tínhamos achado estar retrocedendo no desenvolvimento do conteúdo. Mas não nos demos conta que, apesar de envolver subtração, afinal ela envolve também fração como operador, e esta complexidade gerou confusão entre os estudantes. Assim, esta atividade não foi considerada, e por isso está aqui sendo chamada de **Atividade 32’:**

Atividade 32’-

João passou pela sala de jantar e viu em cima da mesa uma barra de chocolate. Pegou $\frac{2}{5}$ dela e comeu. Maria chegou logo depois, e pegou $\frac{1}{3}$ do que sobrou do chocolate. Que fração da barra inteira restou em cima da mesa?

Iniciei a resolução em conjunto, perguntando “qual fração pode representar a barra inteira?”

Muitos alunos responderam juntos “$\frac{5}{5}$”. Ninguém repondeu $\frac{3}{3}$.

Ao resolver no quadro, fiz primeiro os cálculos (sem utilizar representação pictórica), seguindo orientação dos alunos.

$\frac{5}{5} - \frac{2}{5}$ (João comeu) = $\frac{3}{5}$ (sobrou em cima da mesa)

O primeiro registro no quadro foi então

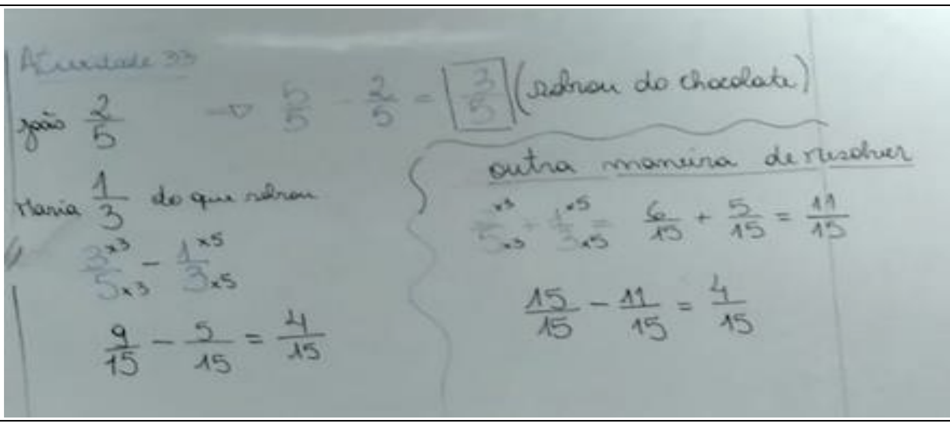
João comeu $\frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ (sobrou em cima da mesa)

Maria comeu $\frac{1}{3}$ do que sobrou.

E continuaram com a subtração: $\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$. Para a segunda subtração, “Buscamos mesmo denominador” disse a mesma menina, continuando seu raciocínio e chegando a

$\frac{3}{5}$ (sobrou do chocolate) – $\frac{1}{3}$ (Maria comeu) = $\frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$ (Figura 120).

Figura 120 – Desenvolvimento da Atividade 32’

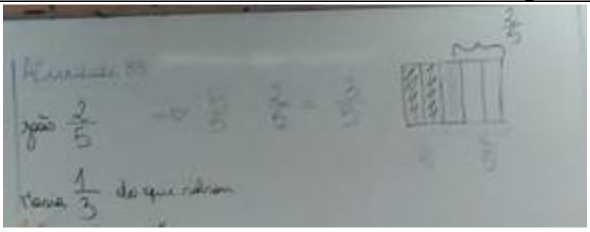


Fonte: Acervo da autora (2019).

Daí iniciou-se a discussão e desconfiança dos estudantes: “Como é que tinha 5 pedaços e agora sobraram 4?”, refletiu um deles, referindo-se à fração $\frac{4}{15}$.

Foi então que resolvemos recorrer à representação pictórica (Figura 121).

Figura 121 – Desenvolvimento da Atividade 32', utilizando representação pictórica



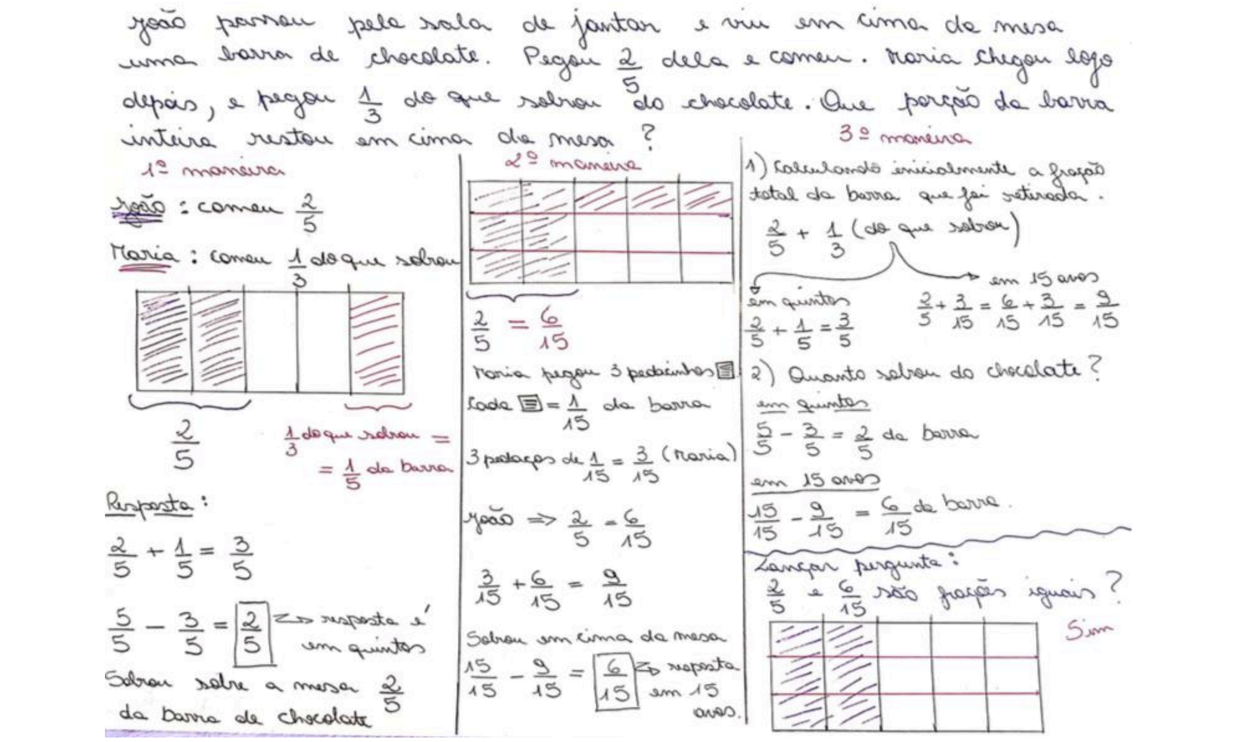
Fonte: Acervo da autora (2019).

Daí uma aluna apontou: "Ela pegou $\frac{1}{3}$, só que não é $\frac{1}{3}$!", evidenciando ter notado que "$\frac{1}{3}$ do que sobrou" não é sinônimo de "$\frac{1}{3}$ da barra".

Aproveitei a representação pictórica para mostrar que $\frac{1}{3}$ dos $\frac{3}{5}$ que sobraram seria $\frac{1}{5}$, e os estudantes concordaram então que $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{5}$ é apenas $\frac{1}{5}$. Daí concluíram que sobrou $\frac{2}{5}$ do chocolate sobre a mesa. Mas o resultado não batia com as contas realizadas antes da representação!!!

Dei tempo para os alunos pensarem e como a aula estava terminando, achei interessante que ficassem refletindo e avisei que retomaríamos a questão na próxima aula. E, para o próximo encontro, preparei três diferentes maneiras de resolver/registrar a resolução da Atividade 32' (Figura 122).

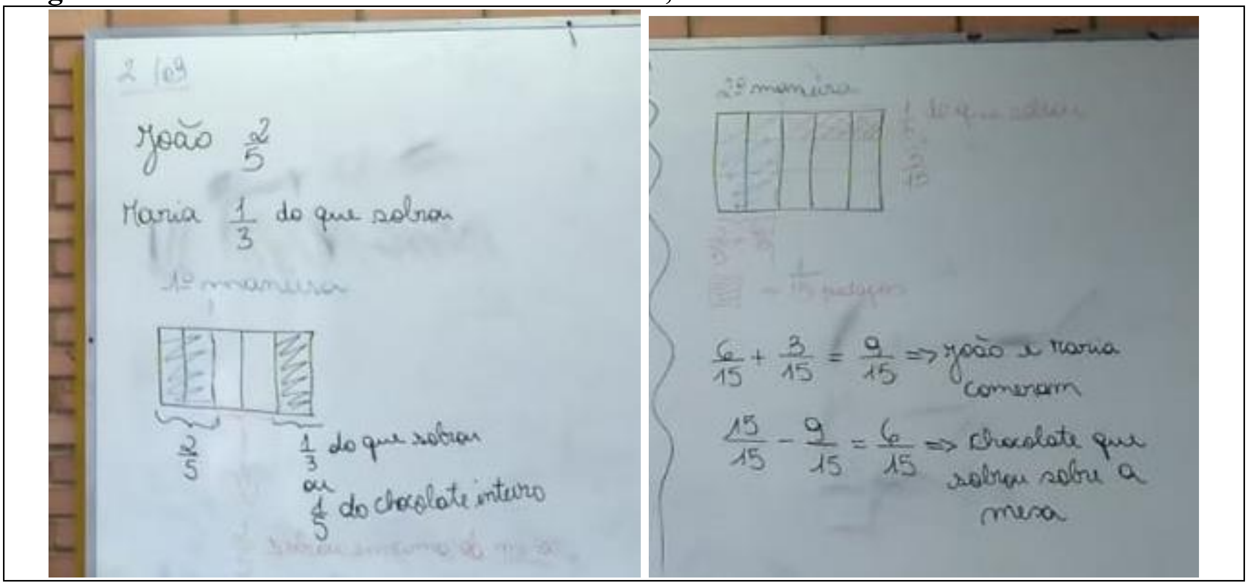
Figura 122 – Desenvolvimento no meu caderno de campo, de três resoluções diferentes da Atividade 32'.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Destas, duas foram aproveitadas no encontro seguinte, incialmente, sem comentarmos as resoluções do encontro anterior (Figura 123).

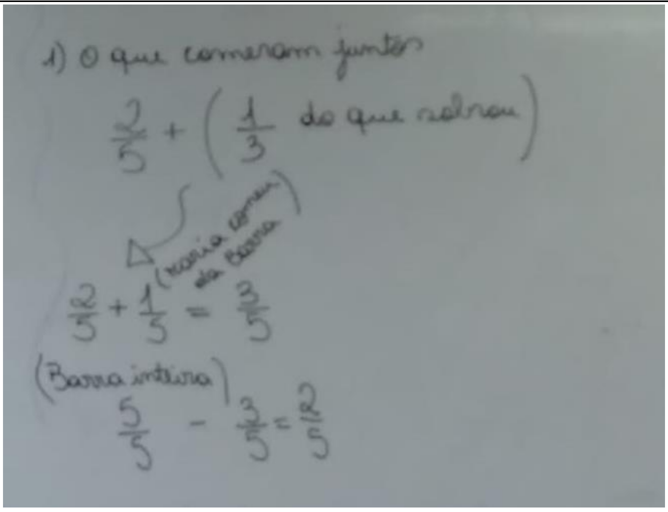
Figura 123 – Desenvolvimento da Atividade 32', resolvida de duas maneiras



Fonte: Acervo da autora (2019).

Os alunos acompanharam ambas as resoluções. Só então é que salientei a diferença entre a resposta encontrada nas duas aulas: "hoje trabalhamos de fato com $\frac{1}{3}$ do que **<u>sobrou</u>** da barra e ontem trabalhamos com $\frac{1}{3}$ da barra inteira." Foi reiterado então este fato, reescrevendo-se ainda uma terceira resolução (Figura 124).

Figura 124 – Desenvolvimento da Atividade 32', de uma terceira forma



Fonte: Acervo da autora (2019).

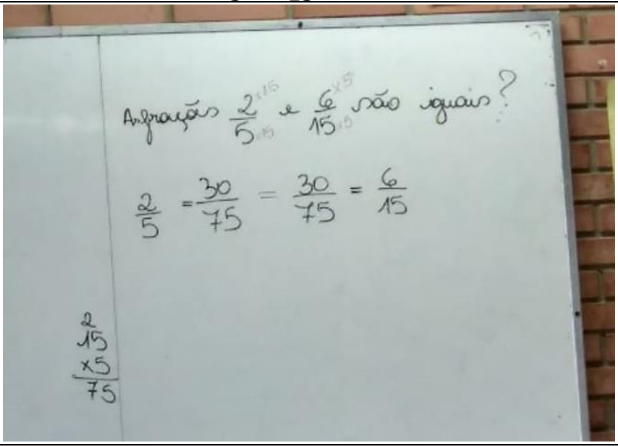
No entanto, alguns estudantes reclamaram desta 3º maneira, dizendo que não estavam entendendo e que era muita conta e "repeteco" da aula passada (portanto sem se darem conta que na aula passada tinham produzido uma resolução equivocada).

Após concluir o desenvolvimento da 3ª maneira, lancei a pergunta "As frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$ são iguais?"

As respostas variaram, mesmo ambas as representações pictóricas estando ainda registradas no quadro.

Uma aluna sugeriu que deveríamos multiplicar a primeira fração por 15 e a segunda por 5, evocando, portanto, o critério trabalhado para a comparação de frações. No entanto, para os demais tive que relembrar que é fácil comparar-se frações quando seus denominadores são iguais, e daí vários gritaram "São iguais!" e então detalhamos no quadro (Figura 125), amparados pelo método que vem sendo empregado (multiplicar numerador e denominador da fração pelo denominador da outra fração).

Figura 125 – Comparação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$, realizada no quadro



Fonte: Acervo da autora (2019).

Minha impressão deste encontro, que foi rico em diferentes resoluções, é que, infelizmente, poucos alunos apreciaram as diferentes resoluções e questionamentos sobre a igualdade entre as soluções encontradas nessas diferentes maneiras.

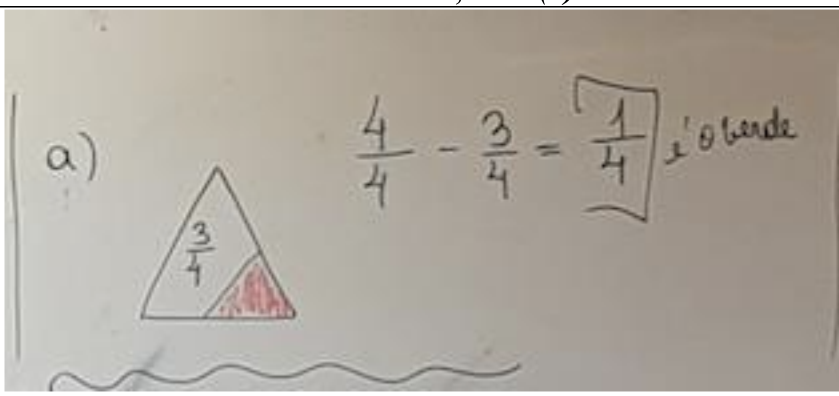
Após a implementação, decidimos que a Atividade 32’ caberia melhor na abordagem de multiplicação, por esse motivo, ela não aparece no Produto Técnico desse trabalho.

A Atividade 33, planejada para substituir a Atividade 32’, mantendo seus objetivos, foi então entregue impressa a ficando como tema de casa.

Perguntei no início da aula seguinte quem realizou a atividade em casa e nenhum aluno se manifestou. Decidi então resolvê-la no quadro, em conjunto com a turma.

O desenvolvimento do item *(a)*, foi tranquilo (Figura 126). Perguntei qual fração representa o triângulo todo e os alunos responderam “$\frac{4}{4}$”. Assim, a subtração surgiu naturalmente, para determinar o pedaço “verde”.

Figura 126 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(a)*

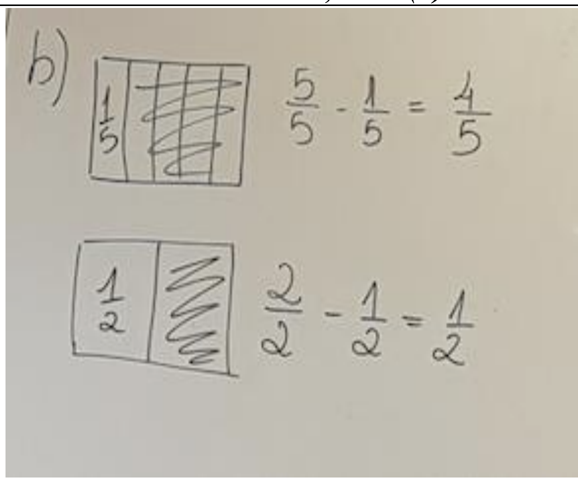


Fonte: Acervo da autora (2019).

Com relação ao item *(b)*, cabe ressaltar que o encunciado proposto à turma não tinha a frase “Considerando um retângulo como a unidade”. Os alunos então iniciaram determinando a parte verde de cada retângulo, como se cada retângulo fosse um item da atividade... precisei insistir no comentário “quero a parte verde dos dois retângulos juntos” até que percebessem que precisávamos somar a parte verde dos dois. Reconheço agora que o enunciado não era claro quanto a tal aspecto. Por isso, a questão foi reformulada no Produto Técnico.

No segundo retângulo do item *(b)*, uma aluna ditou “Cinco quintos menos um quinto” para calcular a parte verde do mesmo (Figura 127). O mesmo para o primeiro retângulo.

Figura 127 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(b)*



Fonte: Acervo da autora (2019).

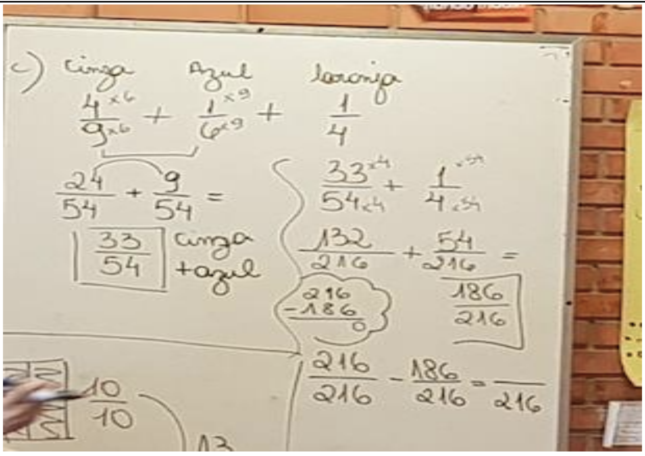
Depois de tornar claro que queríamos a quantidade total de verde tomando um retângulo como unidade, alguém disse “Cinco sétimos” (será que este valor foi obtido pela soma dos numeradores e dos denominadores de $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{5}$? Provavelmente [...]). Só depois de encerrado o encontro dei-me conta que poderia ter perguntado a este aluno como tinha chegado neste valor para ter certeza da minha conjectura.

Depois de realizar a adição com frações de mesmo denominador, chegamos aos $\frac{13}{10}$, e perguntei “Isto é mais ou menos do que um retângulo?”. Só então fomos fazer a representação desta fração.

As frações impróprias revelaram-se mais “complexas” para os alunos. Por esse motivo, busquei, nestes casos, sempre trabalhar a representação pictórica aliada à representação simbólica, contemplando as diferentes representações, como recomenda Duval.

No item *(c)* alguns estudantes usaram a apreensão perceptiva e simplesmente acharam que o tamanho da parte verde era o mesmo que o da parte azul, respondendo "$\frac{1}{6}$". Ressaltei: "Não basta achar. Quero dar esta resposta com certeza de que o valor está correto" disse. Então uma estudante disse para transformarmos todas as frações em frações de mesmo denominador. Foi necessário então trabalhar com três denominadores, o que fizemos de dois em dois, sendo necessários muitos cálculos (Figura 128). Alguns alunos reclamaram: "Muita conta professora", "Muito grande esse exercício".

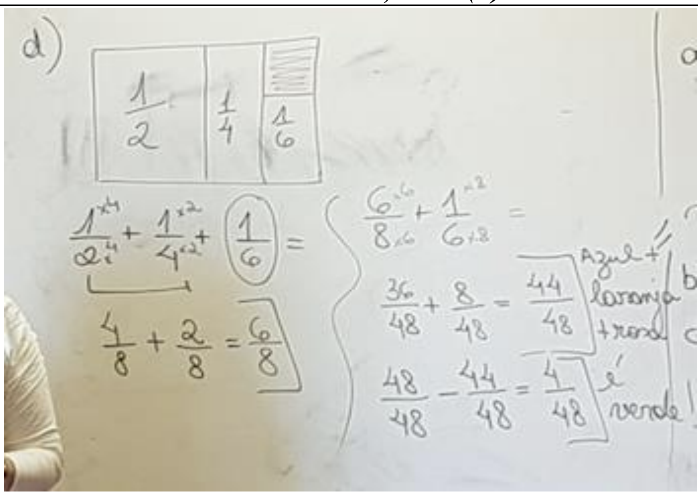
Figura 128 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(c)*



Fonte: Acervo da autora (2019).

No item *(d)* também é necessária uma adição de três parcelas, que também foi resolvida de duas em duas (Figura 129).

Figura 129 – Desenvolvimento da Atividade 33, item *(d)*



Fonte: Acervo da autora (2019).

Passamos então à resolução da Atividade 34, que também havia ficado como tema de casa.

No item *(a)*, os alunos não tiveram dificuldades em responder que Paulo e Clara não contribuíram com a mesma quantidade de figurinhas, argumentando por meio do conceito de fração unitária.

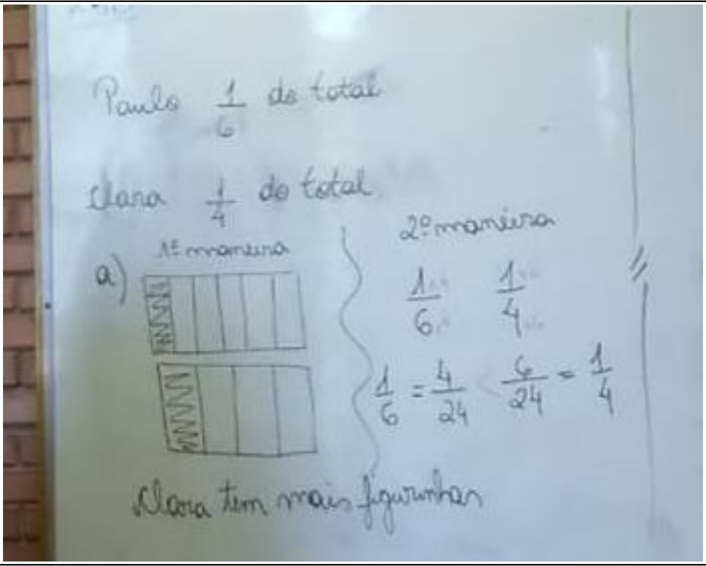
Sobre quem contribui com maior quantidade (item *(b)*), alguns responderam direto; outros (poucos) alunos ainda responderam que $\frac{1}{6}$ é maior que $\frac{1}{4}$.

Relembrei então a Atividade 4 para reiterar que, dividindo igualmente entre 6 pessoas resulta para cada pessoa um pedaço menor do que dividindo igualmente entre 4 pessoas; no quadro fiz uso também da representação envolvendo o modelo de barras, contemplando assim, as idéias de Duval e confirmando-se uma das *misconceptions* apontadas por Monteiro e Pinto (2007): "Na comparação dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ os alunos referem que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, precisamente porque 4 é maior que 3. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fraccionária ainda não está compreendida" (MONTEIRO, PINTO, 2007, p. 12).

Uma estudante transformou oralmente as frações $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$ em frações equivalentes de denominador $24 = 6 \times 4$ para responder ao item *(b).* A colega ao seu lado concordou com ela e repetiu o raciocínio. Cabe ressaltar que essas duas alunas têm resolvido as últimas atividades fazendo uso desse método de geração de frações equivalentes e de mesmo denominador, sendo capazes inclusive de expor seus raciocínios oralmente para os colegas.

Reiterei que esta era uma segunda maneira de decidir: gerando frações de mesmo denominador. Outros alunos ajudaram a registrar o desenvolvimento desta ideia no quadro (Figura 130), utilizando diferentes representações, no caso o registro figural e o registro simbólico numérico, envolvendo o que Duval chama de Conversão, ou seja, mudando o sistema de registro, mas conservando o mesmo objeto (as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$).

Figura 130 – Desenvolvimento da Atividade 34, item *(b)*



Fonte: Acervo da autora (2019).

A partir da discussão do item *(c)*, os estudantes não tiveram dificuldades em resolver os itens *(d)* e *(e)* (Figura 131).

Figura 131 – Desenvolvimento da Atividade 34, itens *(c)* e *(d)*

$$d)\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{6\times 4}+\frac{1\times 6}{4\times 6}=\frac{4}{24}+\frac{6}{24}=\frac{10}{24}$$

$$e)\ \frac{24}{24}-\frac{10}{24}=\frac{14}{24}$$

Fonte: Acervo da autora (2019).

Após responder o item *(d)*, na intenção de obter uma estimativa de resposta para o item *(e)*, lancei a pergunta: “Falta mais ou menos da metade para completar o álbum?”, e os alunos responderam (a maioria), “falta mais da metade”.

Para o encerramento da implementação, resolvemos fazer uma confraternização, levando um bolo de chocolate para ser dividido entre o número dos alunos presentes, não sem antes lançar o desafio: “Como cortá-lo neste número de partes iguais?” O número foi 25, e uma estudante logo lançou a ideia: “corta em 5 e depois cada pedaço, corta em 5 novamente.” Mesmo tendo o bolo formato de um toro, a mesma estudante foi ao quadro e “simulou” a divisão (Figura 132), que então foi posta em prática.

Figura 132 – Imagens da simulação e do bolo sendo dividido em 25 pedaços

Fonte: Acervo da autora (2019).

Apesar de considerada importante como fechamento, afinal a Atividade 27 que havia ficado de tema de casa não foi retomada.

5.3 Considerações finais da implementação

Para chegar-se à discussão sobre equivalência de frações, foi necessário garantir um certo entendimento prévio sobre o conceito de fração. Logo no primeiro encontro, revelou-se um fato que nos surpreendeu: apenas 2 dos 30 estudantes já tinham algum conhecimento sobre frações, de modo que a proposta aqui apresentada diz respeito a retomada/revisão desde à introdução de frações até as operações de adição e subtração, passando pela equivalência e comparação.

O número de encontros previamente elaborados foi de 12, mas logo no primeiro dia de implementação, ao constatarmos que as atividades elaboradas para este dia não foram todas desenvolvidas, percebemos a necessidade de aumentar esse número. Conversamos com a professora titular e ela não viu problemas em aumentarmos o número de encontros. Dessa forma, as atividades foram redistribuídas e a implementação foi realizada durante 20 encontros, totalizando 31 horas-aula (Quadro 10).

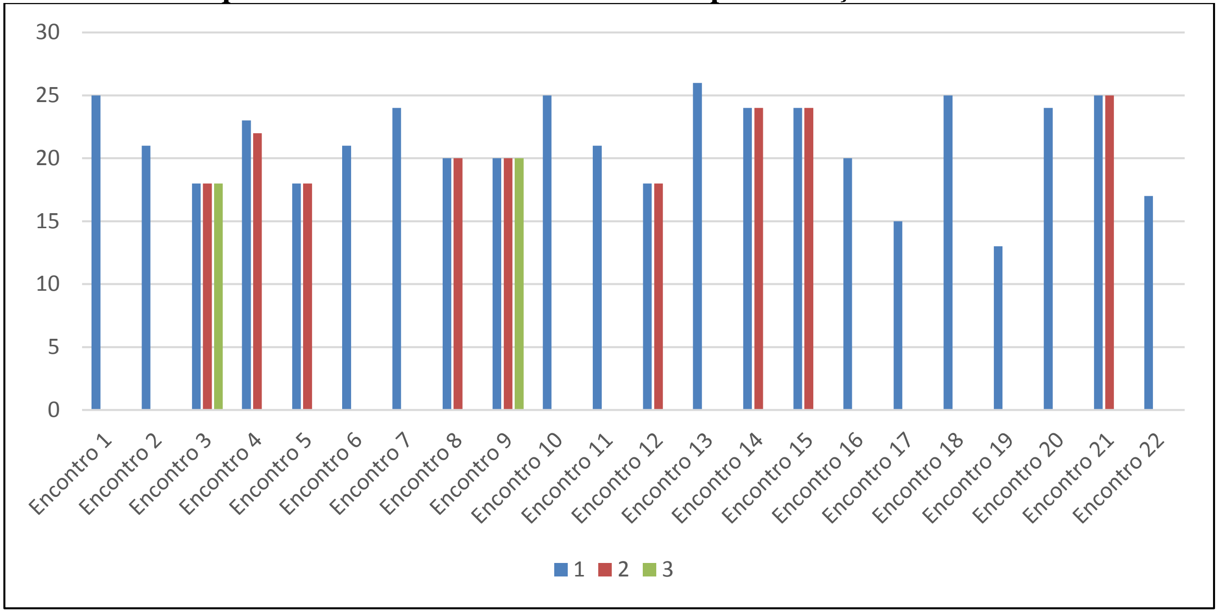
Quadro 10 – Números de horas-aula e alunos presentes em cada encontro

Encontro	Número de horas aula	Nº de alunos presentes
1	1	25
2	1	21
3	3	18
4	2	23-22
5	2	18
6	1	21
7	1	24
8	2	20
9	2,5	20
10	1	25*
11	1	21
12	2	18
13	1	26
14	2	24
15	1	20
16	1	15 a 25 **
17	2	25
18	1	13
19	1	24
20	2	25
(*) indica que este foi o primeiro encontro para um dos alunos. (**) indica que no início do encontro eram 15 estudantes e, ao longo do mesmo, foram chegando estudantes da biblioteca até completar-se o número de 25 estudantes.		

Fonte: Construção da autora (2019).

O gráfico de colunas (Gráfico 1) registrando a frequência dos estudantes já indica uma falta de assiduidade, o que certamente prejudicou o trabalho como um todo (por exemplo, em dois encontros a frequência foi de 50% ou menos) e o desenvolvimento da aprendizagem individual dos reiteradamente ausentes.

Gráfico 1 – Frequência dos estudantes durante a implementação



Fonte: Construção da autora (2019).

A turma mostrou-se, em geral, participativa. Em alguns encontros, o fechamento das atividades não foi realizado, em função da falta de tempo, ficando então, para o início da próxima aula, a retomada e comentários da aula anterior. As atividades em grupo revelaram-se prejudiciais em relação ao tempo, pois, além de oportunizarem maior agitação, em cada momento de correção de uma atividade, o *layout* das classes tinha que ser refeito. Assim, em um mesmo encontro (Encontro 4, por exemplo) fez-se e desfez-se grupos duas vezes.

Sobre os enunciados das atividades, escutamos, em alguns momentos, colocações como: “a professora faz perguntas muito difíceis”, “nem comecei, as perguntas são muito difíceis”. Comentários como esses, mostram a “falta de prática” dos alunos com relação a leitura e interpretação. Por sugestão da professora titular da turma após o quarto encontro, em geral, cada atividade foi lida em voz alta antes de ser iniciada sua resolução, na intenção de esclarecer possíveis dúvidas sobre o seu entendimento. A professora titular comentou que os alunos costumam não ler os enunciados e, mesmo sem ler, sinalizam com “não entendi nada”. Segundo ela, nas suas aulas o hábito de ler as atividades antes da realização melhorou o desempenho da turma quanto à realização das tarefas. Ao decorrer dos nossos encontros, tentamos modificar essa rotina, solicitando que os alunos realizassem a leitura individual do enunciado e então partissem para a resolução, infelizmente sem muito êxito. Percebi também que às vezes funcionava bem (a Atividade 18 é um exemplo) orientar os estudantes oralmente antes de entregar a atividade impressa aos estudantes. Ou seja, foi possível constatar que muitas vezes seguir instruções orais dadas pela professora proporcionou maior agilidade à tarefa.

A implementação foi centrada em proposta de atividades, com momentos de socialização das resoluções e fechamentos, e não constou de aulas do tipo expositivas. Nossa proposta foi desenvolver o conteúdo por meio de atividades, que ao final (na maioria dos encontros, no encontro seguinte) foi feito um fechamento, discutindo com a turma os pontos mais relevantes da atividade desenvolvida. Na maioria das Atividades preocupamo-nos em contemplar as ideias de Duval (seja através de transformações envolvendo tratamento ou envolvendo conversão).

As atividades propostas aos alunos foram elaboradas por nós (Eu e minha orientadora). Algumas delas são adaptadas de livros didáticos, outras são adaptações de atividades constantes do projeto "Livro Aberto de Matemática" (https://www.umlivroaberto.com/wp/) e ainda algumas criadas por nós. Procurou-se incluir atividades envolvendo tanto grandezas contínuas como grandezas discretas.

Durante os 20 encontros, foram propostas 32 atividades (Quadro 11). Atividades deixadas como tema de casa eram realizadas por um número pequeno de alunos, de modo que nunca baseamos o trabalho neste recurso.

Quadro 11 – Distribuição das Atividades realizadas ao longo dos encontros

Encontro	Atividades
1	1, 2 e 3
2	4
3	5, 6, 7, 8 e 9
4	9 e 10
5	10
6	10 e 11
7	12
8	12 e 13
9	13, 14 e 15
10	16 e 17
11	17 e 18
12	20 e 21
13	22
14	23 e 27
16	25
17	28 e 29
18	30 e 31
19	32 e 33
20	33
21	34 e 35

Fonte: Construção da autora (2019).

Especificamente na Atividade 3 (Encontro 1), optamos por trabalhar com estojo de frações e pizzas de E.V.A., pois acreditamos que as diferentes representações ajudariam a reiterar o papel da unidade. De fato, foi importante a conclusão dos estudantes de que as frações são as mesmas para todos os grupos porque todos se referem, por exemplo, a um terço *da unidade*, independente de qual unidade se considere, porque a unidade foi dividida em três partes iguais. Foi contemplada assim a ideia de Duval de que, para que um conceito abstrato seja bem compreendido, devem ser oportunizadas aos estudantes diferentes representações do mesmo. Acredito que a utilização de materiais variados foi fundamental para o entendimento da importância da unidade.

Pode-se dizer que a equipartição foi assimilada pelos alunos como uma condição necessária para se falar de frações. Em algumas (poucas) atividades a importância de dividir-se a unidade em partes iguais precisou ser retomada, mas era imediato o retorno da turma: “Ah, têm que ser pedaços iguais”.

Foram propostas atividades trabalhando frações de grandezas contínuas e grandezas discretas, diferentemente do Livro Aberto, que aborda apenas frações de grandezas contínuas. Sobre a opção de lá evitarem grandezas discretas, os autores do Ripoll *et al.* (2017) esclarecem:

> "A decisão por evitar modelos discretos em um momento inicial deve-se aos seguintes fatos: (i) modelos discretos já evidenciam uma unidade a priori; por exemplo, na determinação de um terço de 24 lápis, a unidade “lápis” não é nem a unidade nem a subunidade que precisam ser levadas em conta para a determinação da fração “um terço de 24 lápis” e (ii) como o conceito de fração subentende o de equipartição, contextos discretos podem desencadear discussões mais complexas, por exemplo, o que seria determinar 1/10 de uma caixa de 24 lápis?
> [...]
> Iniciar o estudo de frações a partir de modelos contínuos é uma decisão compartilhada por propostas que caracterizam livros japoneses e franceses Livro” Ripoll *et al.* (2017)[9].

Por se tratar de um 6º ano, ousamos incluir grandeza discreta no desenvolvimento. No entanto, os alunos mostraram ter mais dificuldades com relação a frações de grandezas discretas o: ao envolver-se frações no discreto, a turma tinha mais dúvidas e cometia mais “erros”. Uma das possíveis dificuldades que percebemos ao trabalhar com grandezas discretas foi o fato de os alunos não prestarem atenção na unidade, como por exemplo, na Atividade 23, onde a parte mais complicada para eles foi determinar $\frac{3}{10}$ de 15 balas. Aqui, foi possível perceber que alguns enxergaram $\frac{3}{10}$ como 3 balas em 10 (“de 10 balas pego 3 e pronto, pois

9 Aparecerá até a versão final, na nova versão do Livro Aberto.

tenho 15 balas. Ainda sobra bala"). Na minha avaliação, os alunos conseguiram trabalhar, com maior facilidade com grandeza discreta, fazendo uso do modelo de barras.

As frações impróprias revelaram-se mais "complexas" para os alunos, por esse motivo, buscamos, nestes casos, sempre trabalhar a representação pictórica aliada à representação simbólica, contemplando as diferentes representações, como postula Duval. A Atividade 10 revelou-se particularmente interessante para abordar frações impróprias e posteriormente a comparação de frações. No entanto, este último aspecto ficou apenas como tema de casa em um dos últimos encontros e não foi possível corrigi-lo em aula.

Foram propostas duas atividades de recuperação da unidade a partir do conhecimento de uma fração da mesma (Atividades 14 e 15). Com isso estamos de acordo com a orientação encontrada em Behr e Post (1992) e em Behr *et al.* (1985), onde é salientada a importância do desenvolvimento do conceito de reversibilidade, por meio de tarefas onde os alunos sejam tanto solicitados a encontrar uma fração de uma dada unidade como a encontrar a unidade da qual uma dada fração é parte. Estas são operações inversas e dizem respeito também ao que postula Duval, quando este afirma que:

> [...]numerosas observações nos permitem colocar em evidência que os fracassos ou bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida" (DUVAL, 2003 *apud* SOPPELSA, 2016, p.81).

Como Duval, reiteram que o conhecimento de apenas um dos referidos processos, não permite uma compreensão completa do conceito de fração.

Durante a implementação foi possível detectar a evolução por parte dos alunos ao trabalhar frações no modelo pictórico e na linguagem formal. Acreditamos que a representação pictórica, auxíliou no desenvolvimento de atividades, como por exemplo, a Atividade 23, que envolvia grandeza discreta. No desenvolvimento dessa atividade, o método pictórico de barras foi a forma de explicar em que os alunos demonstraram realmente entender. Conforme postula Duval, em atividades como essa, ficou claro a utilização da transformação de conversão, ao representar, por exemplo, $\frac{1}{5}$ das 15 balas utilizando o Modelo de Barras.

A fundamentação teórica de Duval foi comtemplada também em questões como a Atividade 12 que trata de conversão de registros. Nesta questão o objeto matemático é representado em um registro figural (itens *a, b, c, d* e *e*) ou em registro na língua natural (itens *e* e *f*), sendo que o estudante deve converter o objeto matemático para o registro simbólico numérico. Já na Atividade 8, os alunos deveriam trabalhar a representação dentro de um mesmo registro, o que Duval define como Tratamento, onde a fração $\frac{1}{2}$ deveria ser representada em forma figural, de três maneiras diferentes.

Com relação à comparação de frações, ainda no último encontro (poucos) alunos afirmaram que $\frac{1}{6}$ é maior que $\frac{1}{4}$, necessitando então, serem convidados a relembrar a atividade do chocolate (Atividade 4). Essa atividade revelou-se bastante significativa para o grupo. De fato, sempre que recorríamos a ela, os alunos rapidamente reviam suas respostas.

Ainda nas últimas atividades propostas havia quem somasse numeradores e denominadores achando que este seria o resultado de uma adição, misconception que só tende a ser agravada depois que se estudar a multiplicação de frações onde – daí sim – o procedimento de operar com os numeradores e operar com os denominadores procede. Por isso concordamos com Monteiro e Pinto (2007) quando apontam que "na adição de números representados por fracções os alunos adicionam os numeradores e denominadores, precisamente porque generalizam os algoritmos das operações com números inteiros" (MONTEIRO, PINTO, 2007, p. 12).

A adição de frações de mesmo denominador foi introduzida sem chamar-se grande atenção para ela, apoiando-se no significado da mesma, que continua sendo o mesmo da adição com números naturais: juntar. Isto foi aceito naturalmente pelos estudantes. Ainda, nossa proposta de evitar-se o mínimo múltiplo comum, buscou não só tentar diminuir o índice de erros em questões que envolvem frações na escola como também investigar que, afinal, a conexão entre a construção dos números racionais feita na escola não está tão distante da da construção matemática dos racionais (levando em conta a ciência dedutiva que é a Matemática). Ao propor atividades com o uso de material concreto, como por exemplo a Atividade 10, onde no item (c) foi necessário somar frações, estamos concordando com Toledo e Toledo (1997) que reforçam que, ao iniciar as operações com números fracionários, o docente deve utilizar material concreto para agilizar o processo de facilitação do aprendizado do aluno sem o uso das regras, na construção de cada algoritmo, iniciando pelos casos mais simples.

O fato de não calcar-se no mínimo múltiplo comum para comparar, adicionar e subtrair com frações pareceu-nos surtir muito mais efeito com relação à compreensão das operações de adição e de subtração com frações, indo assim ao encontro da orientação dos PCN:

> Os conceitos de equivalência assim como a construção de procedimentos para obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números (BRASIL, 1997, p. 103).

Cabe ressaltar que, no presente trabalho, vamos além desta orientação: enfatizamos que a equivalência é um conceito “elementar” no processo de construção do número racional, por isso fundamental.

Apesar de todos os aspectos aqui relatados, consideramos que a implementação realizada nessa turma foi relevante para a nossa pesquisa e positiva para os estudantes. Continuamos acreditando que a caracterização da equivalência de frações, ainda que ficando implícito, é possível, esclarecedora e facilitadora para as questões de comparação, adição e subtração de frações. Consideramos que esta proposta está de acordo com os PCN quando estes orientam: “o importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo de baixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo” (BRASIL, 1998, p. 67). Também consideramos contemplada a orientação da BNCC:

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio de articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade – precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática, conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2017, p. 265).

Com relação aos estudantes, mesmo não tendo-se registrando por escrito a generalização da ideia para comparar frações equivalentes por meio de frações equivalentes às frações dadas, consideramos que os alunos entenderam a caracterização e sua aplicação, pois souberam utilizar, por exemplo, no desenvolvimento da Atividade 30, baseados em imagens mentais que foram oportunizadas ao longo das atividades anteriormente propostas.

De fato, deixamos aqui registrado o relato da Professora titular da turma. Ela afirma que, ao retomar o conteúdo de frações, no ano seguinte (2019), com a turma de 7º ano, que conta com alunos que participaram da implementação em 2018 e outros que não participaram, ela decidiu inicialmente resolver as questões de adição e subtração de frações utilizando o mínimo múltiplo comum, já que os alunos que não participaram da pesquisa, tinham aprendido apenas dessa forma; a seguir, apresentou a resolução fazendo uso de frações equivalentes de denominador igual ao produto dos denominadores. Ao concluir sua explanação, os alunos que não participaram da pesquisa no 6º ano indagaram se realmente era possível desenvolver daquela forma, pois essa parecia “muito mais fácil” e, segundo comentário de um desses alunos, “tudo na matemática é difícil”. Um outro aluno ainda declarou que, após essa aula, ele jamais teria dificuldades para realizar tais operações.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As frações constituem um dos tópicos do ensino básico que mais tem repercussão no entendimento de assuntos importantes da matemática escolar. De acordo com Monteiro e Pinto, “atendendo à riqueza de relações que estes números implicam, eles são considerados importantes no desenvolvimento de estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual dos alunos” (MONTEIRO, PINTO, 2007, p. 15).

Ao trabalhar frações, é importante lembrar que “fração” e “número racional” não são sinônimos. Ao pensar em frações, devemos entendê-las como uma das possíveis representações dos números racionais. Ventura (2013) apresenta Números Racionais como “[...] elementos de um campo infinito de quocientes que consistem em classes de equivalência e os elementos dessas classes de equivalência são frações” (BEHR *et al.,* 1992 *apud* VENTURA, 2013, p. 40).

Esse trabalho consistiu na investigação da possibilidade de se propor a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, um Teorema da Caracterização de Frações Equivalentes, desde a sua motivação até a sua demonstração.

Começamos com o desejo de trabalhar com frações. Por sugestão da minha orientadora tomei conhecimento da construção matemática dos números racionais (abordada no capítulo 2, seção 2.2); a seguir, analisamos Livros Didáticos, refletimos e comparamos a formalização da construção dos números racionais feita pela Matemática e a construção feita na escola por meio dos livros didáticos. A reflexão provocada por esta comparação contribuiu muito para este trabalho, a começar pela questão de pesquisa:

É possível propor a alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental, o Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes, desde a sua motivação até a sua demonstração?

Procedemos então ao planejamento de uma proposta alternativa que contemplasse equivalência de frações com maior profundidade. Para tal, fundamentamo-nos na Teoria das Representações Semióticas de Duval.

Ao introduzir o conceito fomos surpreendidas com o fato de os alunos revelarem uma dificuldade em trabalhar com a divisão euclidiana, o que acreditamos ter interferido, principalmente, no desenvolvimento de atividades envolvendo grandezas discretas. Esse aspecto foi também apontado pela Professora titular da turma, que afirmou que talvez essa fosse uma das razões de um melhor desempenho da turma nas atividades envolvendo grandezas contínuas. Sobre isso, Silva (2006) constatou que a presença de figuras nas questões envolvendo quantidades contínuas promoveu aumento do rendimento na maioria dos itens do instrumento. Percebemos o mesmo quando introduzimos o Modelo de Barras para trabalhar também grandezas discretas.

Durante a implementação acompanhamos as descobertas e evolução dos alunos, permitindo dessa forma, avaliar a metodologia utilizada de maneira positiva. Na busca de responder nossa questão de pesquisa, percebemos que *sim, contribui positivamente oportunizar a alunos de 6º ano uma discussão que leve ao Teorema de Caracterização das Frações Equivalentes*, partindo de atividades motivadoras e cuja discussão levaram à demonstração, ainda que construída apenas oralmente (não estamos aqui considerando demonstração envolvendo simbologia matemática, mas sim argumentações matematicamente completas, em palavras).

Um dos aspectos positivos do nosso trabalho foi a percepção por parte dos alunos das diferentes representações envolvendo frações, como o caso da Atividade 3, onde foram utilizados o material do Estojo de Frações e as pizzas de E.V.A., permitindo que os alunos concluíssem que independente da unidade considerada, todos estavam trabalhando com $\frac{1}{3}$, ou seja, a unidade equiparticionada em 3 partes.

Durante a implementação foi também possível detectar a evolução por parte dos alunos ao trabalhar frações no modelo pictórico e na linguagem formal. Acreditamos que a representação pictórica, auxiliou no desenvolvimento de atividades, como por exemplo, a Atividade 23, que envolvia grandeza discreta. No desenvolvimento dessa atividade, foi utilizado também o Modelo de Barras, o que pareceu-nos ser de grande utilidade para a compreensão dos alunos.

De acordo com Ventura (2013), a noção de equivalência na matemática é uma das mais importantes e abstratas, sendo, portanto, muito complexa. Especificamente no conteúdo de frações, Ventura acrescenta que tal complexidade se deve ao fato de existirem inúmeras formas de representar um número racional e, além disso, às "regras" relacionadas a esses números são diferentes das dos números inteiros.

Mesmo assim, ousamos no presente trabalho focar em equivalência de Frações e a sua caracterização, pois acreditamos que, uma vez bem entendido este tópico pelo estudante, a comparação, assim como a adição e a subtração de frações passam a ter também mais significado para o aluno. Com isso, estaríamos tornando o ensino de frações mais interessante e menos relacionado ao uso de regras, como o uso do mínimo múltiplo comum na adição de frações.

A comprovação deste objetivo veio com o relato da professora titular da turma, que mostrou-se bastante satisfeita e convicta, de que ao trabalhar no ano seguinte (2019) com a turma de 7º ano, que contava com alguns estudantes que participaram da implementação, foi possível notar o melhor domínio dos mesmos com as operações de adição e subtração de frações. Sentimo-nos realmente acreditadas de que nosso trabalho foi positivo e de fato o uso das frações equivalentes pode sim facilitar o entendimento de frações para os estudantes.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. S. L.; PATRÍCIO, R. S. *O Papel das Representações Semióticas no Ensino de Matemática*. Comunicação Científica. II CNEM. 2011.

ALVES, V. S. *Uma proposta de ensino de adição e subtração de números racionais na representação fracionária*. Encontro Paraibano de Educação Matemática – EPBEM, Anais, v. 1, 2012. Disponível em: http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Relato_706.pdf. Acesso em: 25 de agosto 2019.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. *Coleção: Novo Praticando Matemática*, 7º ano. São Paulo: Editora do Brasil. 2006.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F.; MARTINS, A. C. C. *Estojo de Frações*. III Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. 2017.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. *Content knowledge for teaching: What makes it special?* Journal of Teacher Education*,* 59 (5). 2008. p.389-407.

BEHR, M., WACHSMUTH, I.; POST, T. Construct a sum: a measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1985. p. 120-131.

BEHR, M.; POST, T. Teaching rational number and decimal concepts. *In:* T. Post, 2. ed. *Teaching mathematics in grades K-8*: Research-based methods. Boston: Allyn and Bacon, 1992. p. 201-248.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini*, 6º ano. São Paulo: Moderna. 2015.

BIGODE, A. J. L. *Matemática do cotidiano*, 6º ano. São Paulo: Scipione. 2015.

______. *Matemática do cotidiano*, 7º ano. São Paulo: Scipione. 2015.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais:* primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. *Parâmetros curriculares nacionais:* terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. *Base Nacional Curricular comum*. Brasília: Ministério da Educação, 2017.

CATTO, G.G. Registros de Representação e o Número Racional. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC – SP. São Paulo. 2000.

CAVALCANTE, L. G.; SOSSO, J.; VIEIRA, F.; POLI, E. *Para saber Matemática*, 5º série/6º ano. São Paulo: Saraiva. 2006.

CEDILLO, T.; ISODA, M. Matemática para la Educación Normal. Tomo IV, Vol. 1. 2012.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. Matemática: Teoria e Contexto, 6º ano. São Paulo: Saraiva. 2012.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C.; MORETTI, M. T. Registros de Representação Semiótica nas Pesquisas Brasileiras em Educação Matemática: Pontuando Tendências. Campinas: Zetetiké. V.16, n.29. Jan/Jun 2008. p. 41-72.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano. São Paulo: Ática, 2012.

DOTTI, T.G.P. *Um estudo do Modelo de Barras nos livros didáticos da Matemática de Singapura*: Fundamentaçõa da álgebra no Ensino Fundamental I ciclo. TCC (Graduação em Matemática) – Universidade de São Carlos (UFSCAR). São Paulo. 2016. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/2304. Acesso em: 15 nov. 2019.

DUVAL, R. *Registros de Representação e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica. 7º ed. São Paulo: Papirus, 2010, p.11-33.

FERREIRA, J. *A Construção dos números*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GARCEZ, W. R. *Tópicos sobre o ensino de frações: Equivalência*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Rio de Janeiro. 2013. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/wagner_rohr_garcez.pdf. Acesso em: 15 ago. 2017.

GARCIA, J. *Coleção Aprender, Muito Prazer: Matemática*, 4º ano. Curitiba: Base Editorial. 2014.

______. *Coleção Aprender, Muito Prazer: Matemática*, 5º ano. Curitiba: Base Editorial. 2014.

GIOVANNI, J.R. Jr. A Conquista da Matemática, 4º ano. São Paulo: FTD. 2014.

______. A Conquista da Matemática, 5º ano. São Paulo: FTD. 2014.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. Interchange. v. 21, n. 1. Spring, 1990, p.6-13.

IEZZI, G.; DOCE, O.; MACHADO, A. Matemática e Realidade, 6º série. São Paulo: Atual. 1996.

IGLIORI, S.; MARANHÃO, M. C. S. Registros de Representação e Números Racionais. In:

MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica. 7º ed. São Paulo: Papirus, 2010, p.57-70.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. C. Matemática para todos, 5º série. São Paulo: Scipione. 2003.

JESUS, A.B. M. Uma Proposta de Ensino de Frações voltada para a Construção do Conhecimento. Tese (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de Lavras. 2013.

KAMPHORST, E. M.; NEHRING, C. M. Tratamento e Conversão entre registros de representação semiótica dos conceitos de limite. XII Jornada de Pesquisa. Unijuí. 2016.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. Boletim de Educação Matemática, v. 21, n. 31. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, 2008. p. 1-22.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas – São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus. 2010.

MARTÍNEZ, S. REFIP Matemática – Recursos para la Formación de Professores de Educación Básica. Santiago do Chile: Ediciones SM Chile S.A. 2013.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. Brochura: Desenvolvendo o sentido do número racional. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. 2007.

MOREIRA, D. T. Uma Investigação acerca de Apreensões Perceptivas e Operatórias de Representações Gráficas em Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. 2004.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças Fazendo Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C.; SALCEDOS, R. R. C. A Teoria dos Registros das Representações Semióticas e o Estudo de Sistemas de Equações Algebricas Lineares. Comunicação Científica. IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática. 2013.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. Números Racionais, Reais e Complexos. Porto Alegre; Editora da UFRGS. 1º ed. 2006.

RIPOLL, C. C.; GIRALDO, V.; RANGEL, L. Livro do Professor de Matemática na Educação Básica: Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM. 1º ed. 2015.

_______. Livro do Professor de Matemática na Educação Básica:Números Inteiros. Rio de Janeiro: SBM. 1º ed. 2016.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.; BORTOLOSSI, H.; RANGEL, L.; GIRALDO, V.; REZENDE, W.; QUINTANEIRO, W. Frações no Ensino Fundamental. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: https://www.umlivroaberto.com/wp/?page_id=89. Acesso em: 06 de maio 2017.

RIPOLL, C. C.; SOUZA, R. N. G. Equivalence of Fractions in Grade Brazilian Textbooks. Third International conference on Mathematics Textbook Research and Development. 2019.

SILVA, A. M. Investigando a Concepção de Frações de Alunos nas Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado). Programa de Mestrado de Ensino de Ciências. Universidade Federal Rural de Pernambuco. 2006.

SOPPELSA, J. J. C. Divisão Euclidiana: Um olhar para o resto. Disseratação (Mestrado).

Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2016.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. Vontade de saber Matemática, 6º ano. São Paulo: FTD. (2012).

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. Didática de Matemática: Como dois e dois. A comunicação da Matemática. São Paulo: FTD. 1997.

VALIO, D. T. C. Frações Lúdicas no Ensino de Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de São Carlos. 2014. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5964?show=full. Acesso em: 27 ago 2019.

VENTURA, H. M. G. L. A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre as suas Representações: Uma Experiência de Ensino no 2º ciclo do Ensino Básico. Tese (Doutorado). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. 2013. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/10661/1/ulsd067673_td_Helia_Ventura.pdf Acesso em: 18 ago 2017.

APÊNDICE

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "O Ensino de Frações no Ensino Fundamental II: Uma Experiência no 6ºano" , desenvolvida pela pesquisadora Roseane Nunes Garcia de Souza. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Cydara Cavedon Ripoll, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 3308 - 6212 ou e-mail cydara.ripoll@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são implementar e avaliar uma sequência didática planejada, refletindo sobre a ênfase dada à construção de número racional a partir da caracterização das frações equivalentes.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário e atividades escrita, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre a Caracterização das Frações Equivalentes, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone (51) 98176-2219 /e-mail rosengs@gmail.com .

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:
Assinatura do(a) pesquisador(a):
Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE B - TERMO DE ASSENTIMENTO

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
IME-UFRGS

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "O Ensino de Frações no Ensino Fundamental II: uma experiência no 6º ano". Neste estudo pretendemos:

1. Desenvolver uma sequência didática sobre frações que se apoie no teorema de caracterização de frações equivalentes;
2. Implementar e avaliar a sequência didática planejada, refletindo sobre a ênfase dada à construção de número racional a partir da caracterização das frações equivalentes, buscando responder à questão norteadora da pesquisa, contribuindo assim com o debate sobre a inclusão de Demonstrações e de pensamento genérico na escola.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Este estudo apresenta risco mínimo, isto é, o mesmo risco existente em atividades rotineiras.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período mínimo de 5 anos.

Eu, ____, portador(a) do documento de Identidade ____________________ , fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo.

Porto Alegre, _____ de ______________ de 20____ .

_____________________________________ Assinatura do(a) menor

_____________________________________ Assinatura do(a) pesquisador(a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e e-mail: etica@propesq.ufrgs.br.

Pesquisadora Responsável: Roseane Nunes Garcia de Souza
Fone: (51) 981762219 / e-mail: rosengs@gmail.com

ANEXO

ANEXO A - PRODUTO TÉCNICO DA DISSERTAÇÃO INTITULADA ABORDAGEM DE FRAÇÕES EQUIVALENTES: UMA EXPERIÊNCIA NO 6º ANO

Este trabalho é fruto de uma reflexão sobre o chamado *conhecimento matemático do professor para o ensino* (Ball, Thames, Phelps (2008)). Diz respeito ao estudo de frações direcionado para a abordagem da equivalência e de uma caracterização da mesma em um 6º ano, conceito e propriedade que, no nosso ponto de vista, são essenciais para o bom entendimento de frações pelos estudantes, principalmente no que diz respeito a comparação, adição e subtração de frações, além do conceito de número racional. Assim, o objetivo desse trabalho é focar em equivalência de frações, principalmente em uma caracterização para ela, com aplicações da técnica utilizada como argumentação para provar essa caracteriazação na comparação, adição e subtração de frações.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ensino do conteúdo de frações faz parte do Bloco "Números e Operações", devendo ser trabalhado desde o 2º ciclo. Nesse ciclo, devem ser "apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal" (BRASIL, 1998, p. 57), com o objetivo principal de levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver alguns problemas.

Sobre os diferentes significados de frações, a saber,

- ✓ Parte – todo: é a fração como uma parte da unidade;
- ✓ Quociente: é a fração como o resultado de uma divisão entre dois números inteiros;
- ✓ Razão: é a fração como uma forma de comparar duas grandezas;
- ✓ Operador: é a fração sendo utilizada como multiplicador de uma quantidade,

os PCN orientam que não sejam trabalhados de forma isolada um do outro e que, no segundo ciclo do Ensino Fundamental, as frações devem ser trabalhadas com os significados de parte - todo, razão e quociente, ficando o significado de operador multiplicativo para o terceiro ciclo. (BRASIL, 1998, p. 103).

De acordo com a BNCC, os conteúdos relativos a números racionais prescritos para o 6º ano do Ensino Fundamental, encontram-se na unidade temática "Números". Nesse ano, é esperado que sejam trabalhados, dentro do conteúdo de frações: os significados parte/todo e quociente, equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações (BRASIL, 2017, p.298).

Também na BNCC a orientação é que os diferentes significados de frações sejam trabalhados a partir do segundo ciclo, especificando que no 6º ano sejam contemplados os significados parte-todo e quociente, e no 7º ano, além de retomados os significados de parte - todo e quociente, sejam acrescentados os significados de razão e de operador. De acordo com a BNCC, "Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas, ano a ano" (BRASIL, 2017, p. 274).

Sobre as "Habilidades" que devem ser desenvolvidas ao trabalhar o conteúdo de frações no 6º ano, as orientações da BNCC, são:

> - (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> - (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária (BRASIL, 2017, p.299).

Assim, no presente trabalho, deu-se maior ênfase aos significados de parte-todo e quociente, visto que os significados de razão e de operador devem ser trabalhados no 7º ano, segundo orientação dos PCN e da BNCC.

A sequência de atividades aqui apresentada é direcionada ao 6º ano e pretende focar na equivalência de frações e na sua caracterização, o que a diferencia em muito dos 13 livros didáticos analisados. Além disso, procurou-se com ela contemplar tanto os PCN como a BNCC por meio de atividades muitas vezes tiradas do dia a dia do estudante. Está organizada em duas partes chamadas PARTE I e PARTE II.

No intuito de garantir os pré-requisitos para trabalhar equivalência de frações e uma caracterização de frações equivalentes, as atividades que compõem a PARTE I buscam retomar o tema frações, visto que, de acordo com a BNCC o mesmo é abordado desde o segundo (2º) ciclo (mais especificamente, a partir do 3º ano). E, como pré-requisto para a PARTE I, ou seja, para o bom entendimento de frações, consideramos a multiplicação de números naturais, bem como a divisão euclidiana, incluindo os conceitos de múltiplo e de divisor. Assim, recomenda-se ao professor fazer uma retomada desses tópicos e reforçar a destreza com tais operações (cálculo mental, por exemplo) antes de iniciar a retomada de frações.

Na PARTE I é feita uma revisão de frações, envolvendo sua definição, frações unitárias e não unitárias, frações próprias, impróprias e aparentes (sem utilizar tais nomenclaturas), enfatizando-se a importância da equipartição e da identificação da unidade.

Na PARTE II incluem-se as atividades que dizem respeito mais especificamente ao foco do nosso trabalho que é a equivalência de frações e uma caracterização de frações equivalentes, e aplicações na comparação, adição e subtração de frações.

Tanto na PARTE I como na PARTE II, com a intenção de maximizar a utilidade deste texto ao professor leitor, cada atividade proposta é enriquecida com os objetivos para a mesma e com um “Momento do Professor”.

As atividades envolvem uma variedade de material concreto. Entre os materiais selecionados, estão o Tangran, folhas de papel e pizzas de E.V.A., bem como o material desenvolvido por Baldin, Martins e Silva, intitulado “Estojo de Frações”, material que, segundo as autoras, pode ser utilizado para introduzir o conceito de frações como parte/todo, frações equivalentes, comparação de frações e operações básicas com frações (BALDIN; MARTINS; SILVA, 2017).

Tanto nos enunciados como no desenvolvimento das atividades é sugerida a exploração de variados registros e representações para um mesmo objeto, seguindo de perto a orientação de Duval (2010). De acordo com a Teoria de Duval, a capacidade de transitar entre diferentes representações revela a compreensão sobre o objeto estudado.

Também a BNCC ressalta que, mesmo não sendo a ação de representar exclusiva da Matemática,

> “(...) é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade” (BRASIL, 2017, p. 529).

A seguir, esclarecemos alguns posicionamentos e escolhas nossas com relação à sequência de atividades que são aqui apresentadas. O leitor encontrará mais reflexões sobre o tema ao longo do trabalho, à medida que as atividades vão sendo propostas.

- Não exploramos neste trabalho a tecnologia digital; no entanto, tal recurso pode ser utilizado em muitas das atividades aqui propostas ou itens a elas podem ser acrescentados visando a utilização de tecnologia digital. No entanto, mesmo que o professor opte pelo uso de tecnologia digital, consideramos que o uso do material concreto é indispensável na introdução a frações, e deve servir de apoio para as argumentações encaminhadas pelos estudantes, indo ao encontro do que é sugerido na BNCC:

> “[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materias precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sitematização, para que se inicie um processo de formalização” (BRASIL, 2017, p. 274).

Especificamente, na PARTE I:

- Ao iniciar o estudo das frações, abordamos primeiramente as frações unitárias, e posteriormente as não unitárias.

- Concordamos que a introdução de fração seja iniciada com a relação parte-todo, ficando, portanto, já embutida aí a noção de quantidade, por exemplo, ao falamos em $\frac{1}{7}$ da unidade. No entanto, é nosso ponto de vista que o significado de divisão seja introduzido já ao trabalhar o conceito de fração unitária e, posteriormente, de fração não unitária. Por exemplo, logo depois de introduzir-se a quantidade um sétimo, cabe, na nossa opinião, chamar-se a atenção para o estudante que então, afinal, um sétimo é o resultado da divisão da unidade em sete partes iguais.

- A equipartição é fundamental ao falar-se de fração, por isso chama-se a atenção para a diferença da divisão da unidade em partes “quaisquer” da divisão da unidade em partes “iguais” (equipartição). A equipartição em diferentes formas, envolvendo grandezas contínuas, é apresentada em atividades onde espera-se que o aluno conclua que existem diferentes representações geométricas para uma dada fração de uma unidade fixada.

- A comparação entre frações unitárias é feita chamando-se a atenção para a relação inversa, no intuito de que o aluno perceba que quando se aumenta o denominador da fração unitária, obtemos uma parte menor da unidade. De acordo com Monteiro e Pinto (2007), “Na comparação dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ os alunos referem que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, precisamente porque 4 é maior que 3. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fraccionária ainda não está compreendida” (MONTEIRO, PINTO, 2007, p. 12).

- Optamos por não utilizar a classificação de frações em própria, imprópria e aparente, por não sermos favoráveis à ênfase na nomenclatura e sim na ordem, apresentando, por exemplo, frações aparentes como mera decorrência da compreensão do conceito de fração não unitária. Neste sentido, concordamos com Bigode, quando este coloca que “Não é necessário exagerar na exigência do domínio da nomenclatura de frações. Os alunos aprenderão os nomes naturalmente se encontrarem bons problemas pela frente e sentirem necessidade de se comunicar com clareza e precisão" (BIGODE, 2015, p. 183).

- A importância da unidade e a recuperação da unidade são aspectos pouco enfatizados nos livros didáticos. Cabe relembrar que, com a resolução de um exercício que pergunte sobre a recuperação da unidade, não apenas o estudante evidencia que consegue transitar entre o numérico e o figural como domina o processo inverso mencionado por Duval (2003): trabalhar com resolução de problemas que vão da língua natural para o registro numérico é algo que os alunos mostram ter facilidade, porém, para fazer o caminho inverso, revelam mais dificuldades (DUVAL, 2003 *apud* SOPPELSA, 2016, p.81).

Nas atividades aqui propostas é ressaltada a importância da identificação da unidade em vários tipos de grandezas (unidimensional, bidimensional, tridimensional, contínua e discreta). É também salientado que nem sempre é possível calcular uma fração de uma grandeza discreta.

E, especificamente na PARTE II:

- É escolha nossa tratar a equivalência de frações nos enunciados das atividades para os estudantes de 6º ano por "frações iguais", bem como a sua representação, na forma da igualdade $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. É uma sugestão nossa que a expressão "frações equivalentes" não seja utilizada com os estudantes pela estranheza que a escrita $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ pode causar. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ não são idênticas, porém representam a mesma parte de uma unidade fixada. Por isso recomendamos ao professor que, cada vez que escreva uma igualdade deste tipo, por exemplo, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, reitere aos estudantes "Escrevemos $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ porque $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma quantidade da unidade."

- Em muitos dos livros didáticos analisados, a equivalência é abordada antes da comparação e das operações com frações. Optamos por não introduzir a equivalência de frações separadamente da comparação, e sim apenas como um dos possíveis resultados de uma comparação entre frações, uma vez que, afinal, o que a equivalência expressa é que são iguais as quantidades representadas por cada uma das frações consideradas. Assim, neste trabalho a comparação é a motivação para a equivalência.

É na comparação de frações de numeradores e denominadores distintos que a equivalência tem papel importante, servindo como recurso para afinal comparar-se tais frações.

A estratégia aqui proposta para proceder a uma tal comparação dispensa o mínimo múltiplo comum, o que diferencia o presente trabalho de muitos dos livros didáticos analisados. Ao utilizar a técnica de multiplicar o numerador e o denominador de uma fração pelo denominador da outra, as frações dadas são transformadas em frações equivalentes de denominadores iguais ao produto dos denominadores das frações originalmente dadas. Assim, fica viabilizada a comparação das frações, e, na nossa opinião com duas vantagens sobre a técnica que faz uso do mínimo múltiplo comum: *i)* os alunos não precisam relembrar a "receita" de como se calcula o mínimo múltiplo comum entre dois números, discordando portanto de Bigode (2015), quando este afirma não ser recomendável orientar os alunos a multiplicar os denominadores, pois nesse caso, o produto dos denominadores nem sempre fornece o *mmc*, e dessa forma os alunos estariam repetindo um "truque" mecanicamente, deixando de raciocinar sobre múltiplos comuns; *ii)* o processo de comparação por meio do produto dos denominadores pode ser encaminhado visualmente, ajudando o estudante na compreensão do mesmo.

- A adição e a subtração são introduzidas de forma natural (sem definições explícitas) porque são mantidos, no universo dos números racionais, todos os significados dessas operações com números naturais.

PARTE I

Nesta primeira parte pretende-se sondar inicialmente o que os estudantes trazem dos anos iniciais sobre frações. Materiais concretos tais como estojo de frações, tangram e pizzas construídas de E.V.A., bem como papel e lápis de cor, serão disponibilizados aos alunos, na intenção de auxiliá-los na expressão oral, na visualização e na resolução das atividades propostas, deixando-os livres quanto a utilizar ou não o material bem como quanto à escolha de qual material utilizar. Na medida em que aparecerem as oportunidades, pretende-se, com as Atividades 1 e 2, revisar e eventualmente aprofundar os conceitos introdutórios de frações: relação parte-todo, equipartição, unidade, fração unitária, sem, no entanto, enfatizar essa terminologia. Na Atividade 3, pretende-se relembrar/introduzir a terminologia para identificar frações, bem como o conceito de "equipartição", chamando-se a atenção para a diferença entre dividir a unidade em partes "iguais" e repartir em partes "quaisquer". Ainda nessa atividade, o professor tem o desafio de introduzir a nomenclatura "unidade" ao trabalhar equipartição (nomenclatura provavelmente não utilizada pelos estudantes neste contexto) bem como enfatizar a equipartição e a recuperação da unidade a partir da justaposição de frações unitárias iguais. Não serão introduzidos ainda os termos numerador, denominador e equipartição. Importante ressaltar que as Atividades 1 e 2 são de retomada de frações, portanto, os alunos que não conhecem frações devem iniciar pela Atividade de número 3.

Atividade 1 – Contem o que vocês conhecem sobre frações. Se quiserem, podem usar os materiais que estão sobre as mesas.

Atividade 2 – O que mais chamou sua atenção nas respostas dadas na questão 1, pelos seus colegas? Alguma dessas anotações no quadro é novidade para você?

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar, reconhecer e nomear frações, com apoio em material concreto (estojo de frações, Tangram, pizzas de E.V.A., lápis e papel), usando a simbologia só se a mesma for proposta pelos estudantes;
- ✓ Perceber a equipartição como fundamental ao falar-se de fração e evidenciá-la, expressando-a oralmente ou não. Em outras palavras, saber diferenciar a divisão da unidade em partes “quaisquer” da divisão da unidade em partes “iguais” (equipartição).

<u>Momento do Professor</u>: Para a realização da Atividade 1, sugere-se que sejam disponibilizados aos estudantes (por exemplo, sobre uma mesa próxima à mesa do professor) o estojo de frações (agrupados em borrachinhas), tangram, pizzas de E.V.A., papel e lápis de cor. Sugere-se também ir-se listando no quadro, junto com a turma, as ideias que os estudantes trazem sobre frações e seus possíveis exemplos.

Sugere-se atenção especial ao Tangram: se os estudantes fizerem uso deste recurso sugere-se verificar se estão levando em conta a equipartição; se os estudantes não fizerem uso deste recurso pode-se questioná-los “Por que ninguém se dirigiu para o Tangram? Será que não é possível falar de frações fazendo uso deste material?”

As Atividades 1 e 2 visam uma sondagem do que os alunos trazem sobre frações e oportunizam ao professor um diagnóstico sobre o conhecimento anterior dos alunos sobre frações. Podem eventualmente ser aproveitadas também para aprofundar os conceitos introdutórios de frações: relação parte-todo, equipartição, unidade, fração unitária, sem, no entanto, enfatizar essa terminologia.

Optou-se por um enunciado aberto na Atividade 1, mesmo conscientes de que ele talvez cause uma certa hesitação por parte dos estudantes, para que estes possam começar sua explanação tanto pela explicação do significado de $\frac{2}{3}$, por exemplo, como pela escolha de uma barra equiparticionada do estojo de frações e reconheça, por exemplo: "aqui estou pegando $\frac{2}{3}$".

Atividade 3 –

Utilizando os materiais do "Estojo de Frações" ou "Pizzas de E.V.A., nomeie cada "pedacinho" encontrado no estojo ou nas pizzas.

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar frações unitárias;
- ✓ Nomear frações unitárias provenientes de equipartições até doze avos, a partir de modelos disponíveis no estojo de frações ou nas pizzas de E.V.A., utilizando expressões do tipo "um terço de" ou "a terça parte de" como formas de identificar uma das partes da equipartição da unidade em três partes, assim como as demais frações do estojo de frações ou das pizzas de E.V.A.;
- ✓ Diferenciar a divisão da unidade em partes "quaisquer" da divisão da unidade em partes "iguais" (equipartição).

Momento do Professor: Com a Atividade 3, pretende-se relembrar/introduzir a terminologia para identificar frações, bem como (aprofundar) o conceito de "equipartição", chamando-se a atenção para a diferença entre dividir a unidade em partes "iguais" e repartir em partes "quaisquer". Ainda nessa atividade, o professor tem o desafio de introduzir a nomenclatura "unidade" ao trabalhar equipartição (nomenclatura provavelmente não utilizada pelos estudantes neste contexto) bem como enfatizar a equipartição e a recuperação da unidade a partir da justaposição de frações unitárias iguais. Recomenda-se que não sejam introduzidos ainda os termos numerador, denominador e equipartição.

Sugere-se que esta atividade seja realizada em pequenos grupos, alguns deles recebendo o Estojo de Frações e outros as pizzas de E.V.A.. Considerou-se que trabalhar com estojo de frações e pizzas de E.V.A., por acreditar-se que as diferentes representações ajudarão a reiterar o papel da unidade. Por isso será importante o professor ressaltar que as conclusões são as mesmas para todos os grupos porque todos se referem, por exemplo, a um terço *da unidade*, independente de qual unidade se considere, porque a unidade foi dividida em três partes iguais. Além disso, estamos contemplando a tese de Duval de que, para que um conceito abstrato seja bem compreendido, devem ser oportunizadas aos estudantes diferentes representações do mesmo.

Após finalizado o trabalho dos grupos, sugere-se que os alunos sejam convidados a colocar suas respostas no quadro, momento em que o professor terá a oportunidade de reforçar a equipartição e lançar a nomenclatura “unidade”, bem como a questão: quantos pedacinhos iguais a este são necessários para compor a unidade?

Depois de encerrada a Atividade 3 com o estojo de frações e as pizzas de E.V.A., o professor pode lançar o questionamento: “vocês observam alguma diferença entre trabalhar com o estojo ou as pizzas?”, esperando que eles expliquem a analogia, em uma frase que enfatize a equipartição daquilo que se está considerando como unidade.

Um momento que consideramos bastante especial nessas três primeiras atividades é o da socialização, com registros no quadro, no qual se tem a oportunidade de retomar e reforçar frações, equipartição, a nomenclatura “unidade” e a recuperação da unidade a partir da justaposição de frações unitárias iguais. Não se recomenda que sejam introduzidos ainda os termos numerador, denominador e equipartição.

Ainda dentro do espírito de revisão e aprofundamento, pretende-se nas Atividades de 4 a 7 trabalhar fração unitária como resultado de uma divisão; pretende-se também abordar comparação entre frações unitárias, reforçando a importância da unidade e considerar frações de grandezas discretas. As Atividades 4 e 5 fazem uso de material concreto e a Atividade 6 é uma atividade de aplicação dos conceitos trabalhados (equipartição, unidade, fração unitária); a Atividade 7 volta a recorrer ao material concreto por abordar um novo contexto (grandezas discretas). A atividade 4 lida com o reconhecimento de equipartição, equipartição com diferentes formas e comparação entre frações unitárias (por meio da definição de fração). Na atividade 5 pretende-se: retomar a equipartição e passar a fazer uso de tal nomenclatura; introduzir a nomenclatura denominador e comparar frações unitárias; ainda nesta atividade é esperado que os alunos percebam que quanto maior for o denominador, menor é a fração (reconhecendo $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão de 1 por *n*). A atividade 6 solicita ao estudante o reconhecimento da fração um terço de diferentes unidades em diferentes dimensões.

Atividade 4 – (adaptada da Atividade 1, Lição 1 do Livro Aberto)

Observe a repartição da barra de chocolate realizada por sua professora e responda as questões a seguir:

a) Vocês concordam com a repartição que foi feita? Por que?

___

b) A divisão feita pela professora é justa, na sua opinião?

___

c) Podemos chamar cada um dos pedaços de “um terço”? Por que?

___

d) Se a professora der um pedaço desses para três de seus colegas, todos eles receberão a mesma quantidade de chocolate?

___

e) Se a repartição fosse feita em três partes iguais, como você nomearia a quantidade de chocolate que cada colega receberia?

___

f) Forme um grupo de trabalho com três colegas. Cada grupo receberá uma barra de chocolate. Usando a barra de chocolate, verifique se existe uma divisão que permita que os quatro colegas recebam quantidades iguais de chocolate sem que o formato de todas as partes seja o mesmo. Faça um desenho da divisão realizada pelo grupo.

g) Se no lugar de quatro integrantes os grupos tivessem 5 alunos, cada aluno receberia mais ou menos chocolate? Nesse caso, que fração da barra de chocolate receberia cada aluno do grupo de 5 componentes?

___

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Diferenciar a partição da unidade em partes “quaisquer” da partição da unidade em partes “iguais” ou equipartição. Em particular, diferenciar “a partição da unidade em três partes quaisquer” da “partição da unidade em três partes iguais”;
- ✓ Compreender as expressões “um terço de” e “terça parte de” como formas de identificar

uma das partes da equipartição da unidade em três partes;

- ✓ Reconhecer que quantidades iguais não necessariamente precisam ter a mesma forma;
- ✓ Reconhecer $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão (em partes iguais) de 1 por *n*;
- ✓ Reconhecer que, quando se aumenta o denominador da fração unitária, obtemos uma parte menor da unidade.

Momento do Professor**:** A repartição realizada pela professora não deve ser uma equipartição, mas sim semelhante à Figura 1. Sendo assim, é esperado que os alunos visualizem e diferenciem uma equipartição em uma divisão em partes quaisquer.

Figura 1 – Repartição da barra de chocolate, sem equipartição

Fonte: Acervo da autora (2019).

Após a discussão sobre a nomenclatura, os estudantes devem reconhecer $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão de 1 por *n* onde o "1" representa aquilo que se está considerando como unidade.

No item (g), recomenda-se que o argumento comece pela operação de divisão de números naturais com resto zero, enfatizando a propriedade que se mantemos inalterado o dividendo mas aumentamos o divisor, o quociente obtido é menor do que o original. Só depois de relembrada esta propriedade, sugere-se aplicá-la a frações unitárias. Os estudantes devem perceber que frações unitárias com denominadores maiores representam quantidades menores desde que se esteja considerando a mesma unidade.

Aqui também é esperado que os estudantes comparem as frações unitárias e percebam que frações unitárias com denominadores maiores representam quantidades menores desde que se esteja considerando a mesma unidade.

Atividade 5 – (Questão adaptada do Livro Aberto, Lição 1, Atividade 3)
Vamos decorar nossa sala utilizando os enfeites que cada grupo recebeu. Para isso, cada grupo receberá um pedaço de fita, todos eles de mesmo comprimento, para pendurar cada um dos enfeites que o grupo recebeu, cortando o pedaço que recebeu. Todos os enfeites de um mesmo grupo deverão ficar com mesma altura.

Agora, atente para o número de enfeites que seu grupo recebeu e... mãos a obra!

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar equipartição como divisão em partes iguais, e perceber que, neste caso, os enfeites do grupo que fez uso da equipartição terão todos a mesma altura;
- ✓ Perceber que a unidade utilizada (quantidade de fita mimosa) foi a mesma em todos os grupos;
- ✓ Perceber que a altura dos enfeites varia de acordo com a quantidade de enfeites que o grupo recebeu, mas que o comprimento de cada enfeite pode ser referido por uma fração unitária;
- ✓ Comparar frações unitárias;
- ✓ Reconhecer a quarta parte como a metade da metade e a oitava parte como a metade da quarta parte;
- ✓ Desenvolver estratégias para equiparticionar a unidade (quantidade de fita recebida);
- ✓ Reconhecer $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão (em partes iguais) de 1 por n.
- ✓ Passar a fazer uso do termo "equipartição".

Momento do Professor: Esta é uma atividade prática, a ser realizada em grupos que vão receber a mesma quantidade de fita mimosa, porém quantidades diferentes de enfeites, quantidades que devem variar entre 3, 4, 6, 8 (Figura 2).

Figura 2 – Enfeites distribuídos para os grupos

Fonte: Acervo da autora (2019).

Durante a realização da atividade o professor pode lançar a pergunta "Como os grupos garantiram que todos os enfeites ficaram na mesma altura?" Esta questão oportuniza a introdução do termo "equipartição" e das frações "um terço", "um quarto", "um sexto" e "um oitavo", assim como a exposição das estratégias utilizadas em cada grupo, para equiparticionar a unidade "fita recebida".

Após cada grupo organizar seus respectivos enfeites com os pedaços da fita equiparticionados no número de enfeites que o grupo recebeu, sugere-se ao professor que sejam feitos questionamentos do tipo:

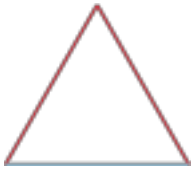
- Em quantos pedaços cada grupo repartiu o barbante?
- Quais estratégia(s) seu grupo utilizou para cortar o barbante recebido? (Caso os alunos não identifiquem a quarta parte como metade da metade e a oitava parte, como metade da quarta parte isso não aconteça, o professor deve comentar as estratégias realizadas pelos grupos e a seguir, discutir outras formas de equiparticionar em 4 e 8 partes.)
- O grupo que dividiu em 3 pedaços (4, 6 e 8, também) pode chamar cada pedaço de "um terço" (um quarto, um sexto ou um oitavo) da fita que recebeu?
- Comparando o comprimento de cada pedaço de fita do seu grupo com os dos demais grupos, responda: eles possuem mesmo comprimento?
- Por que os pedaços não têm o mesmo tamanho se todas as fitas distribuídas tinham o mesmo comprimento?
- Quais grupos cortaram em pedaços com o maior comprimento? E quais cortaram em pedaços com o menor comprimento? (Os alunos devem ser estimulados a dar uma resposta completa, revelando sua ligação com a pergunta anterior).

Nesse momento, o professor pode ressaltar que, assim como na divisão, à medida que aumentamos o divisor, o quociente fica menor e que o mesmo acontece com a fração, ou seja, tem-se que quanto maior é o denominador (neste momento torna-se útil introduzir a nomenclatura "denominador") da fração unitária, menor será essa fração (unitária). Importante nesse momento o professor trabalhar com a turma o fato do termo "divisão", por convenção, pressupor uma repartição em partes iguais. O professor deve certificar-se que cada aluno entendeu/reconheceu que a relação entre as grandezas número de partes e tamanho da parte é uma relação entre grandezas que variam em sentidos opostos. Também a relação entre a notação $\frac{1}{n}$ e a comparação entre tais frações é fundamental.

Atividade 6 – (Questão adaptada do Livro Aberto, Lição 1, Atividade 5)

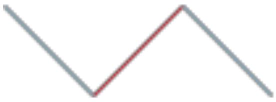
Em quais figuras a seguir a parte em vermelho é um terço da figura?

a)



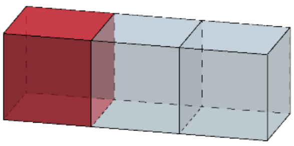
b)

c)



d)

e)



f)

g)

h)

i)

j)

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar uma mesma fração unitária (no caso, a terça parte da unidade) em representações de unidades não necessariamente congruentes ou de mesma espécie ou de mesma dimensão.

Momento do Professor: Nessa atividade, a visão que o aluno tem das figuras (unidimensional, bidimensional ou tridimensional) pode alterar sua resposta. É importante que o professor chame a atenção dos estudantes para o fato de que ora a figura é unidimensional, ora é bidimensional, ora é tridimensional (usando linguagem adequada a um 6º. Ano). Isto porque as figuras dos itens *(e)* e *(f)* não possuem resposta única, pois ela é influenciada pela forma como o aluno visualiza a imagem (bidimensional ou tridimensional). No item *(f)*, por exemplo, a imagem pode ser vista como um hexágono ou como um cubo. Cabe ao professor garantir a forma adequada de referir-se a cada uma delas: "um terço *da figura*".

Atividade 7 –
Determine "um terço" de cada um dos valores a seguir:
Um terço de 15 prendedores coloridos.
Um terço de 270 reais.
Um terço da turma de 45 alunos. E se a turma tivesse 47 alunos?
Um terço das 23 figurinhas que faltam álbum da copa do mundo de 2018.

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar uma mesma fração unitária (no caso, a terça parte da unidade) de uma grandeza discreta;
- ✓ Entender o significado de tomar-se um terço de *qualquer* coisa;
- ✓ Reconhecer que nem sempre é possível determinar "um terço" da unidade quando se trata de grandezas discretas.

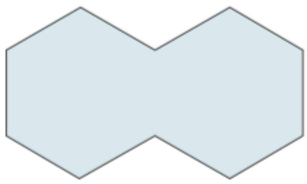
<u>Momento do Professor</u>: Esta é a primeira atividade que tenta resgatar a ideia de terça parte de uma grandeza discreta. Recomenda-se ao professor atentar para alguma estranheza inicial por parte dos estudantes em considerar como unidade "um conjunto de unidades", situação inerente a frações de grandezas discretas, bem como as eventuais dificuldades dos estudantes com a divisão euclidiana, porém reiteramos nossa convicção de que o tema frações de grandezas discretas não deve ser adiado nem evitado no 6º ano, revelando-se esta atividade uma boa oportunidade de revisar e aprofundar as ideias e processos da divisão euclidiana bem como a ideia de fração, motivando e estimulando o raciocínio, por exemplo, com questões do tipo "o que é meia dúzia de ovos"? ou "quando a mãe tem uma porção de balas e diz que vai distribuir igualmente entre os seus 3 filhos, o que isso significa?", esperando que os alunos respondam que a quantidade de balas deve ser dividida igualmente em três partes. Em um segundo momento, é esperado que o aluno seja capaz de determinar "um terço" das unidades consideradas das grandezas discretas e perceber que, no contexto de grandezas discretas, nem sempre lidamos com unidades das quais podemos determinar sua terça parte.

Para o item (a) recomenda-se representar os 15 prendedores com material concreto, buscando explorar a semelhança com o que vinha sendo discutido sobre frações até aqui, enfatizando o que agora é considerada unidade e estimulando os alunos a mostrarem no concreto sua estratégia para determinar um terço dos 15 predendores. O mesmo pode ser feito para a segunda pergunta do item (c). Todos os itens estão diretamente relacionados com a divisão euclidiana no conjunto dos números naturais. A segunda pergunta do item (c) bem como o item (d) tentam salientar que nem sempre a divisão em N tem resto zero. De fato, para cálculos de frações de grandezas discretas, assim como na divisão de números naturais, nem sempre obtemos resto zero, ou seja, nem sempre é possível equiparticionar a unidade considerada quando lidamos com grandezas discretas em determinados contextos. Assim, a resposta aos itens (c) e (d) é: "Neste contexto, é impossível tomar-se um terço do que aqui é considerado a unidade".

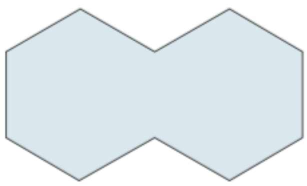
Como aprofundamento das ideias vistas até aqui, pretende-se, trabalhar: a equipartição em diferentes formas, apoiando-se na representação geométrica como protagonista de diferentes equipartições, gerando uma mesma fração da unidade fixada e reiterando a fração unitária como resultado da divisão da unidade em partes iguais (Atividade 8); o reconhecimento dos triângulos de um Tangram como frações do quadrado, a determinação das mesmas e a comparação entre frações unitárias (Atividade 9); frações não unitárias e frações impróprias (Atividade 10).

Atividade 8 – (Livro Aberto, Lição 1, Atividade 8)

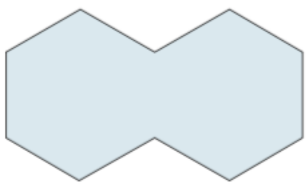
a) Pinte a metade da figura.



b) Pinte metade da figura de forma diferente da do item anterior.



c) Pinte a metade da figura de forma diferente das dos dois itens anteriores.



<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Representar de diferentes formas um meio ou metade de uma unidade fixada;
- ✓ Concluir que existem diferentes representações geométricas para uma fixada fração

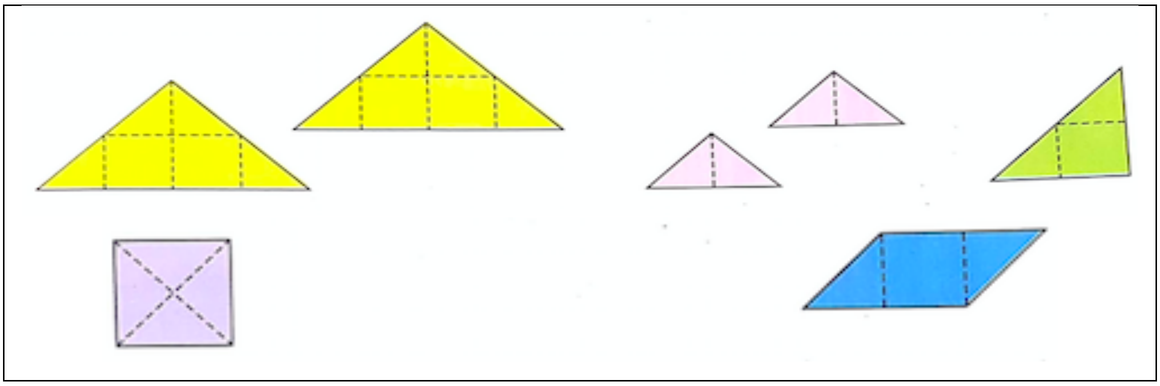
unitária de uma unidade também fixada;

✓ Reconhecer $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão de *1* por *n*.

<u>Momento do Professor:</u> Sugere-se que a Atividade 8 seja entregue impressa aos estudantes para ser realizada individualmente. Ela contempla a equipartição em diferentes formas, estimulando o aluno a utilizar diferentes representações geométricas para uma mesma fração de uma fixada unidade. Sugere-se ao professor solicitar aos alunos que representem no quadro todas as diferentes equipartições encontradas, desafiando-os ao final com os questionamentos: “Qual pedaço destas repartições é o maior? Por que?”. A partir das respostas dadas, poderá avaliar se o objetivo “Concluir que existem diferentes representações geométricas para uma fixada fração unitária de uma unidade também fixada” foi ou não alcançado.

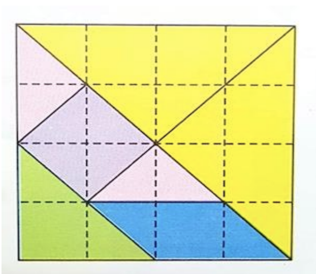
Atividade 9 –

O Tangram é um quebra-cabeça chinês formado por sete peças: um quadrado, um paralelogramo, dois triângulos isósceles congruentes maiores, dois triângulos menores também isósceles e congruentes e um triângulo isósceles médio:



Fonte: Iezzi (1996).

Com as sete peças é possível formar um quadrado, sem superposições e sem espaços vazios:



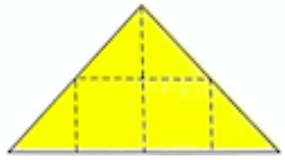
Fonte: Iezzi (1996).

Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Acima, temos duas imagens de tangram: à esquerda tem-se o quadrado construído a partir das peças apresentadas na figura 1; à direita, tem-se uma foto do Tangram que você recebeu.

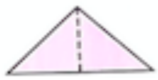
Utilizando as peças do Tangram que você recebeu, responda, juntamente com seus colegas de grupo, às questões a seguir:

a) É possível cobrir, sem sobrepor e sem deixar espaços vazios, o quadrado maior usando apenas:

 (Triângulos grandes)? Em caso afirmativo, de quantos deles precisaríamos? ____

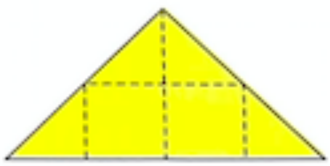
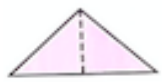
 (Triângulos médios)? Em caso afirmativo, de quantos deles precisaríamos?

____

 (Triângulos pequenos)? Em caso afirmativo, de quantos deles precisaríamos?

____

b) Que fração do quadrado representa cada uma dessas peças? Complete as informações na tabela a seguir.

	Triângulo Grande	Triângulo Médio	Triângulo Pequeno
			
Fração do quadrado			

c) Observando as peças triangulares do Tangram e as frações que elas representam do quadrado (no caso, a unidade), complete os espaços entre cada um dos pares de frações abaixo, com as expressões *é maior que* ou *é menor que*, justificando sua resposta:

- $\frac{1}{16}$ $(um\ dezesseis\ avos)\ do\ quadrado$ ______ $\frac{1}{4}$ $(um\ quarto)\ do\ quadrado$
- $\frac{1}{4}$ $(um\ quarto)\ do\ quadrado$ __________ $\frac{1}{8}$ $(um\ oitavo)\ do\ quadrado$

- $\frac{1}{8}$ $(um\ oitavo)\ do\ quadrado$ _______ $\frac{1}{16}(um\ dezesseis\ avos)\ do\ quadrado$

d) Por que o triângulo grande é $\frac{1}{4}$ $(um\ quarto)$ do quadrado?

____

____

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

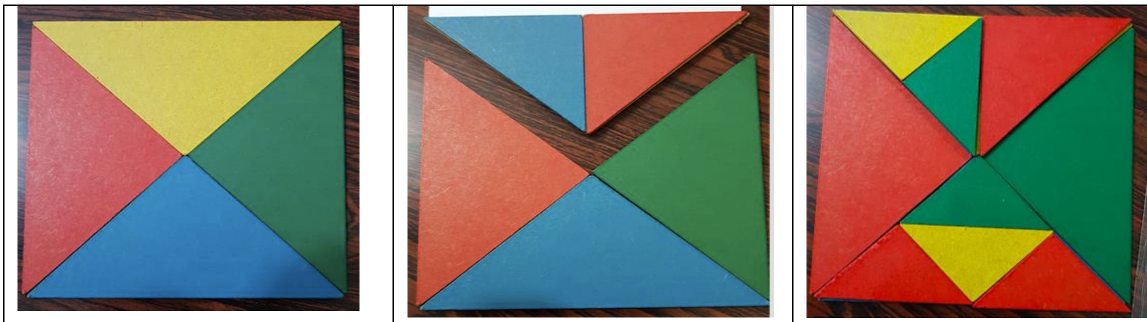
- ✓ Reconhecer que os triângulos de um Tangram são frações do quadrado e determiná-las;
- ✓ Identificar, a partir do material concreto Tangram, frações unitárias de denominadores 4, 8 e 16;
- ✓ Utilizar a linguagem verbal que caracteriza as frações unitárias de denominadores 4, 8 e 16, como por exemplo, “um quarto”, “quarta parte”, “um oitavo”, “um dezesseis avos”;
- ✓ Comparar frações unitárias com base na definição de fração unitária;
- ✓ Reconhecer $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão de *1* por *n;*
- ✓ Praticar a notação de fração;
- ✓ Reconhecer a relação de proporcionalidade inversa entre grandezas (se um triângulo pequeno é $\frac{1}{4}$ do triângulo grande, então é necessário o quádruplo da quantidade de triângulos grandes para cobrir o quadrado com triângulos pequenos).

Momento do Professor: Sugere-se que a Atividade 9 seja entregue impressa aos estudantes, juntamente com peças de um Tangram, para ser realizada em grupo. Ela desafia o estudante a buscar uma equipartição que não está evidente no Tangram, por isso consideramos proveitosa a discussão entre os colegas do grupo, na busca por estratégias para responder a primeira pergunta.

No item (a), todas as coberturas são possíveis. Consideramos importante o professor discutir com a turma e levar os estudantes a perceberem que cada triângulo médio pode ser construído com dois triângulos pequenos, ou seja, um triângulo pequeno representa $\frac{1}{2}$ do triângulo médio; e também, que cada triângulo grande pode ser construído com dois triângulos médios ou com quatro triângulos pequenos, ou seja, um triângulo pequeno representa $\frac{1}{4}$ do triângulo grande, ou ainda um triângulo médio representa $\frac{1}{2}$ do triângulo grande. Isto não só vai facilitar a ordenação solicitada no item (c) como também oportunizar o raciocínio sobre a relação entre grandezas que variam em sentidos opostos e proporcionalmente: “se um triângulo pequeno é $\frac{1}{4}$ do triângulo grande, então vou precisar do quádruplo da quantidade de triângulos grandes para cobrir o quadrado com triângulos pequenos, ou ainda, se um triângulo médio representa $\frac{1}{2}$ do triângulo grande, então vou precisar do dobro da quantidade de triângulos grandes para cobrir o quadrado com triângulos médios; da mesma forma, como um triângulo pequeno representa $\frac{1}{2}$ do triângulo médio, então vou precisar do dobro da quantidade de triângulos médios para cobrir o quadrado com triângulos pequenos”. No item (*b*) aparece, pela primeira vez, a notação para fração na forma $\frac{a}{b}$, sendo esperada alguma confusão ou dúvida sobre ela por parte dos estudantes. De fato, frações têm uma notação um tanto nova para o estudante (além de precisar de *duas* informações para registrá-las, elas envolvem uma notação *na vertical*), e talvez trabalhar com tal notação não tenha sido um objetivo do professor dos anos iniciais. Por isso sugere-se que o professor fique atento e certifique-se de que cada aluno entendeu tal notação. Sugere-se também que ele utilize o recurso das palavras ao lado da notação $\frac{a}{b}$, como fazemos no item (c) enquanto encontrar estudantes ainda inseguros com relação a ela. Como fechamento do item (c), o professor deve salientar a comparação de frações unitárias, utilizando a divisão, como foi feito na Atividade 4, (quando comparamos os resultados de uma divisão em 5 partes iguais e em 3 partes iguais), estimulando que o aluno não faça uso do material concreto e sim da ideia de que quanto maior for o meu denominador, menor será o resultado da minha divisão. No item (*d*) sugere-se que o professor atente para a resposta dos estudantes, Por exemplo, uma resposta como: “porque é possível dividir o quadrado em 4 partes iguais e obter o triângulo como cada uma dessas partes”, evidencia que o estudante reconhece $\frac{1}{n}$ como resultado da divisão de *1* por *n.*

Respostas da Atividade 9: São necessários 4 triângulos grandes para cobrir o quadrado maior; para cobrir cada triângulo grande, são necessários 2 triângulos médios ou 4 triângulos pequenos (Figura 3). Dessa forma, pode-se construir o quadrado grande com 4 triângulos grandes, ou 8 triângulos médios, ou ainda com 16 triângulos pequenos como resposta ao item (*a).*

Figura 3 – Quadrado construído com triângulos pequenos, médios e grandes



Fonte: Construção da autora (2019).

Atividade 10 –

Imagine você e seus colegas de grupo em uma pizzaria rodízio. Essa pizzaria serve todas as fatias de mesmo tamanho, logo todas as pizzas são do mesmo tamanho e divididas no mesmo número de fatias. Decida, com seus colegas de grupo, quantas fatias terá a pizza de vocês e informe o professor.

Explorando as fatias da pizza de E.V.A. que o seu grupo recebeu, desenvolva a atividade a seguir.

Converse com seus colegas e façam uma estimativa de quantas fatias de pizza cada um gostaria de comer. Agora, responda as perguntas abaixo:

a) Que fração de uma pizza representa uma fatia?
b) Anote quantas fatias cada integrante do grupo imagina comer.
c) Que fração de uma pizza representa a quantidade de pizza que cada integrante comeria?
d) Que fração de uma pizza representa o que todos os integrantes do grupo, juntos, comem? Essa fração é maior ou menor do que uma pizza?
e) Observando a quantidade de pizza que cada componente do grupo coeria, compare a quantidade que você comeu, com a quantidade que cada colega de grupo comeria, dizendo se a quantidade é *maior que, menor que* ou *igual*, justificando sua resposta e usando frações para justificar.

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Reconhecer e identificar frações não unitárias a partir da justaposição de frações unitárias de mesmo denominador;
- ✓ Familiarizar-se com frações impróprias;
- ✓ Identificar frações maiores que a unidade;

✓ Praticar a notação de fração.

Momento do Professor: A Atividade 10 deve ser realizada em grupo, com a utilização dos discos de E.V.A. representando pizzas. Esta é a primeira atividade a abordar frações não unitárias e frações impróprias. Ela objetiva levar o estudante a perceber uma fração não unitária como a junção de frações unitárias de mesmo denominador e a identificar frações maiores que a unidade.

Cabe ressaltar também que o contexto de pizzas é muito propício a substituir na argumentação “frações” por “fatias”, resumindo-se a atividade à contagem (de fatias), e não a frações. Por exemplo, na resolução do item (d) poderá aparecer como argumento apenas a frase “pois 5 < 7”. Sugere-se que o professor estimule os estudantes a fazerem uso de frações em suas respostas e argumentos, ressaltando que a informação “5 (fatias)” é incompleta (por exemplo, e se as fatias forem de tamanhos diferentes?).

Para iniciar a atividade, o professor deve distribuir a cada grupo várias peças soltas (sem as armações) que correspondem apenas à fração que o grupo escolheu, em quantidade suficiente para contemplar o “desejo” do grupo. Por exemplo: se um grupo decidiu que sua pizza será dividida em 6 fatias, entregar apenas pedaços relativos a $\frac{1}{6}$ do material concreto (pizza de E.V.A.), se possível mais do que seis desses pedaços.

Nessa atividade é esperado que apareçam naturalmente frações impróprias. Dependendo das respostas apresentadas, por exemplo no caso de algum grupo “não comer” mais do que uma pizza, sugere-se que o professor “traga para a cena” um aluno fictício, que adora pizza, fazendo assim, com que o número de fatias de pizza consumidas pelo grupo passe da unidade “uma pizza”, oportunizando o trabalho com frações maiores do que a unidade. O professor deve estimular os estudantes a fazerem uso da notação $\frac{a}{b}$ introduzida na atividade anterior, de maneira a reiterar o seu significado. Recomenda-se escrever em palavras, ao lado de cada fração, a quantidade que ela representa, até que os alunos tenham se apropriado de tal notação.

Sugere-se a construção de uma tabela para organizar os dados dos grupos, incluindo nela, a quantidade de fatias da pizza de cada grupo, a fração de pizza que representa uma fatia e o total de pizza consumida pelo grupo. Recomenda-se que essa tabela seja posteriormente digitada e entregue aos estudantes na aula seguinte. Ela será aproveitada em uma atividade futura (Atividade 27) de comparação de frações de denominadores diferentes, bem como em adição e subtração de frações, tendo em vista as variadas equipartições escolhidas. Na

Atividade 27 questiona-se “Como decidir quem da sala comeu mais pizza?”; além da comparação entre frações de denominadores diferentes, estamos também estimulando a discussão e a conclusão de que “fatia” não é aceitável como “unidade” para a comparação porque, entre os grupos, o tamanho da fatia provavelmente não será o mesmo.

O professor pode aproveitar a oportunidade no item (c) para fazer uso da adição no momento de registrar no quadro, escrevendo, por exemplo, o total de pizza consumida pelo grupo como $\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}=\frac{18}{10}$ de pizza, explorando a naturalidade da ideia de adicionar com o siginificado de juntar, uma vez que este é mantido no universo das frações. Importante aqui é conceituar fração não unitária como a junção de frações utitárias de uma mesma equipartição e apresentar a sua notação.

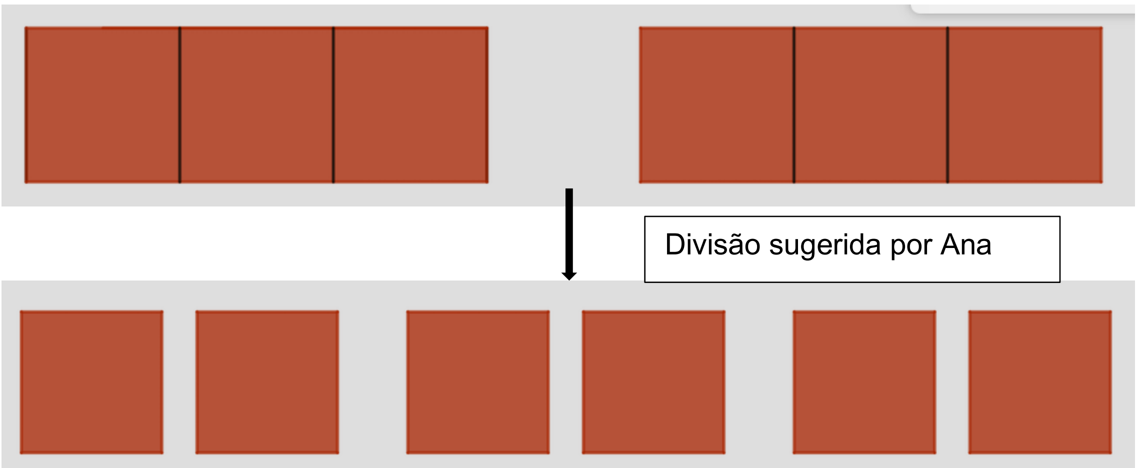
Nas próximas atividades pretende-se: dar continuidade ao trabalho com frações não unitárias, a fim de reiterar aos alunos, por exemplo, que a fração $\frac{2}{3}$ é a junção, bem como a soma, de duas quantidades iguais a $\frac{1}{3}$ da unidade; introduzir frações aparentes (levando os alunos a perceberem, por exemplo, que a fração $\frac{3}{3}$ da unidade é igual a uma unidade), sem no entanto fazer uso de tal nomenclatura; retomar frações próprias e impróprias (ainda sem introduzir também tais nomenclaturas), bem como a noção de metade de uma fração de numerador par; trabalhar com uma mesma fração em grandezas contínuas diferentes para ressaltar a importância da unidade, abordando *frações* x *quantidades*. Todas as atividades são individuais e serão entregues impressas aos alunos.

A Atividade 11 contempla o conceito de frações não unitárias e objetiva relacioná-la com a adição de frações de mesmo denominador, dando assim outro significado para frações não unitárias, a saber, de uma soma de frações unitárias. Objetiva também trabalhar com a determinação da metade de uma fração de numerador par. Esta atividade oportuniza ainda o aparecimento natural de frações impróprias e frações aparentes. A Atividade 12 também contempla frações não unitárias, tanto próprias como impróprias, tanto contínuas como discretas. A Atividade 13 aborda uma mesma fração de unidades contínuas diferentes, procurando ressaltar a importância da unidade ao trabalhar-se com frações.

Atividade 11- (Livro aberto - Lição 2, atividade 1)

O pai de Ana, Beatriz e Clara trouxe duas barras de chocolate para serem repartidas entre elas.

Ana propôs que cada barra fosse dividida em três partes iguais e que cada irmã ficasse com duas dessas partes.



a) Na divisão de cada uma das barras de chocolate em três partes iguais, cada parte é que fração de uma barra de chocolate?

b) Você concorda com a divisão que Ana sugeriu? Explique.

c) Com essa divisão, as três irmãs receberiam a mesma quantidade de chocolate?

d) Na divisão proposta por Ana, como você nomearia, usando fração de uma barra de chocolate, a quantidade de chocolate que cada irmã receberia?

e) Se Ana repartisse a sua parte entre suas irmãs, quanto cada irmã receberia de Ana?

f) Com a parte que Ana deu para cada uma das irmãs, qual a quantidade total de chocolate que Beatriz e Clara passariam a ter? Como você nomearia, usando frações, essas quantidades?

g) E se Ana desse toda a quantidade de chocolate que recebeu para Beatriz, que quantidade de chocolate Beatriz passaria a ter? Como você nomearia, usando frações, essa quantidade?

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Reconhecer a utilidade de uma terminologia que identifique a quantidade correspondente à junção de duas ou mais frações unitárias de mesmo denominador reconhecendo-a também como o resultado da adição de frações unitárias;
- ✓ Reconhecer e utilizar a nomenclatura "n meios", "n terços", ..., "n décimos" como forma de expressar uma quantidade equivalente a "n" cópias da fração unitária "$\frac{1}{m}$" (incluindo os casos em que $n \geq m$) em situações onde há uma indicação explícita da unidade;
- ✓ Praticar a notação $\frac{a}{b}$ com as frações consideradas;
- ✓ Expressar por meio de fração a metade de uma fração de numerador par;
- ✓ Expressar por meio de frações, quantidades não inteiras que correspondam a mais do que uma unidade;
- ✓ Expressar por meio de frações, quantidades "inteiras" que correspondam a uma ou mais vezes a unidade (frações aparentes).

Momento do Professor**:** No item *(e)* o professor deve ficar atento ao entendimento dos alunos sobre metade de uma quantidade (que, neste caso, não é inteira), no caso que cada uma das irmãs receberá metade do chocolate que Ana recebeu e que metade de dois terços é um terço, assim como metade de duas laranjas é uma laranja e metade de dois ovos é um ovo. Como fechamento do item *(e)* desta atividade, sugere-se que o Professor reitere que *n* quintos é a adição de *n* parcelas iguais a um quinto assim como 5 laranjas é igual à adição de 5 parcelas iguais a uma laranja. O item *(f)* já está contemplando adição de denominadores iguais e dando um outro significado para frações não unitárias, a saber, como uma soma de frações unitárias de mesmo denominador. É importante que o professor fique atento as estratégias utilizadas pelos alunos para realizar essa adição. Ainda no item *(f)* aparecem as frações aparentes, que representam partes inteiras da unidade, por exemplo: $\frac{3}{3}$ de uma barra de chocolate é uma barra inteira. No item *(g)* são contempladas frações impróprias, ou seja, frações que representam quantidades maiores do que a unidade, por exemplo: $\frac{4}{3}$ de uma barra de chocolate, representa uma barra ($\frac{3}{3}$) mais um terço da outra barra. É importante que o professor fique atento aos argumentos e estratégias que os alunos estão utilizando ao lidar com as frações impróprias e com as frações aparentes.

Atividade 12 – (Questão adaptada do Livro Aberto - Lição 2, atividade 4)

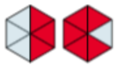
Complete as afirmações com uma das frações: “dois meios”, “dois terços”, “dois quintos”, “três quartos”, “oito sextos” e “nove meios”, para que sejam verdadeiras.

a) A parte pintada de vermelho em  é ___________ de .

b) A parte pintada de vermelho em  é _________ de .

c) A parte pintada de vermelho em  é _________ de .

d) A parte pintada de vermelho em  é ___________ de .

e) A parte pintada de vermelho em  é _________ de .

f) 20 bombons é _______________ de uma caixa de 30 bombons.

g) 240 páginas é _______________ de um livro de 320 páginas.

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

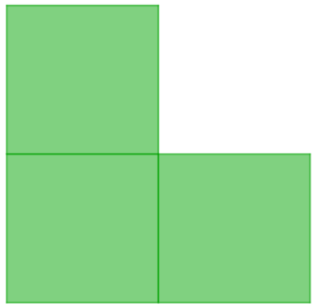
- ✓ Reconhecer frações com numerador diferente de 1, tanto próprias como impróprias;
- ✓ Identificar frações do tipo “*n* meios”, “*n* terços”, ..., “*n* décimos” em diferentes modelos visuais de frações em situações onde há uma indicação explícita da unidade;
- ✓ Identificar frações do tipo “*n* meios”, “*n* terços”, ..., “*n* décimos” em grandezas contínuas e discretas;
- ✓ Compreender frações do tipo *n* meios”, “*n* terços”, ..., “*n* décimos” como forma de identificar a quantidade equivalente a “*n*” cópias da fração unitária "$\frac{1}{n}$" (incluindo os casos em que $n \geq$ denominador da fração em situações onde há uma indicação explícita da unidade.

<u>Momento do Professor</u>**:** Sugere-se ao professor certificar-se no item *(d)* de que todos os alunos compreenderam esta nova situação, que trabalha com frações maiores do que a unidade ($\frac{9}{2}$ da unidade estrela). A afirmação de que “existem frações da unidade que são maiores do que a unidade” pode causar estranheza ao aluno, visto que na linguagem coloquial isto não acontece: por exemplo, “fração de um segundo” não tem a ver com equipartição nem é possível ser maior do que um segundo”. Aqui está, na nossa opinião, uma das complexidades embutidas em frações impróprias. Ao trabalhar os itens *(f)* e *(g)*, que envolvem

grandezas discretas, é importante que o professor fique atento aos procedimentos e estratégias que os alunos estão utilizando, a fim de avaliar como os alunos lidam com os dois tipos de grandezas.

Atividade 13 -

Desenhe uma figura que seja $\frac{7}{3}$ da figura abaixo.



Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Entender o conceito de fração não unitária;
- ✓ Entender o conceito de fração imprópria.

Momento do Professor**:** Nesta atividade é importante retomar-se o conceito de fração não unitária, reforçando a seguinte forma de falar: "divide-se a unidade em três partes iguais, cada parte sendo então chamada de *um terço*. **Tomar $\frac{7}{3}$ da unidade siginifica tomar 7 vezes um pedaço igual a um terço** (como se estivéssemos em uma pizzaria rodízio: todas as pizzas são divididas em três fatias, mas João comeu 7 fatias, assim, comeu sete terços de pizza).

Cabe ressaltar que quando se tem uma fração própria como $\frac{2}{3}$, não há problema de compreensão em dizer que divide-se a unidade em 3 partes iguais e toma-se duas *dessas* partes, porém esta forma de falar pode oportunizar a *misconception* de que toda fração da unidade é menor ou, no máximo, igual à unidade. Por isso a ênfase na frase acima explicando a fração $\frac{7}{3}$.

Com as próximas atividades pretende-se:

- enfatizar a importância da unidade, evidenciando que uma mesma fração da unidade pode representar quantidades diferentes, dependendo da unidade que se considere, abordando a questão tanto em grandezas contínuas (Atividade 14) como em grandezas discretas (Atividade 15);

- trabalhar com o problema recíproco, isto é: uma mesma quantidade pode ser tanto $\frac{1}{2}$ como $\frac{2}{3}$ da unidade, dependendo da unidade em questão, tanto em grandezas contínuas como discretas (Atividade 16);

- trabalhar com a recuperação da unidade, tanto em modelos contínuos como discretos (Atividade 16).

Atividade 14 (Atividade a ser realizada em duplas) –

Desenhe um retângulo na folha de papel quadriculado que você recebeu. A seguir, divida o retângulo em três partes iguais. Agora, pinte duas dessas partes.

Com base no seu desenho e no desenho do seu colega, complete as frases a seguir, fazendo uso de frações:

a) A parte pintada no meu retângulo corresponde a _____________ do meu retângulo.

b) A parte pintada no retângulo do meu colega corresponde a _____________ do retângulo por ele desenhado.

Agora responda:

c) A quantidade de quadradinhos pintados no seu retângulo é igual à quantidade de quadradinhos pintados no retângulo do seu colega?

Espaço destinado ao fechamento construído com a turma.

Responda, fazendo uso de frações:

d) Que fração do retângulo representa a parte que não foi pintada na figura?

e) Que fração da figura do retângulo representa o retângulo inteiro?

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Reconhecer que uma mesma fração da unidade pode representar quantidades diferentes, dependendo da unidade (contínua) que se considere;
- ✓ Reconhecer a importância da unidade ao trabalhar-se com frações.

Momento do Professor: Sugere-se ao professor que a folha com a Atividade 14 seja entregue impressa aos estudantes apenas depois de os alunos terem respondido a cada um dos itens de *(a)*, *(b)* e *(c)*, que podem ir sendo registrados no quadro. Após comparar com a turma os itens *(a)*, *(b)* e *(c)*, o quadro com a conclusão na folha impressa pode ser preenchido então em conjunto, com uma frase que explicite que uma mesma fração pode representar quantidades diferentes, dependendo da unidade considerada, ou seja, que as correspondentes quantidades vão variar, dependendo do tamanho do retângulo que desenharam.

A atividade 15 aborda uma mesma fração de unidades discretas diferentes, procurando reiterar a importância da unidade ao trabalhar-se com frações, agora com grandezas discretas. A atividade 16 propõe a recuperação da unidade, trabalhando-se com grandeza contínua, sendo dada uma figura geométrica e a fração da unidade que tal representação está associada. Busca também enfatizar que uma quantidade (contínua) pode ser tanto $\frac{1}{4}$ de uma unidade como $\frac{2}{3}$ de outra unidade, reiterando a importância da unidade evidenciada na Atividade 14. A atividade 17 contempla a recuperação da unidade em modelo discreto a partir do conhecimento de uma fração da unidade (unitária e não unitária, respectivamente).

Atividade 15 -

a) Determine a quarta parte de 48 reais.

b) Determine a quarta parte da coleção de 24 carrinhos dos irmãos João e Maria.

c) João tem 24 carrinhos, e Pedro tem $\frac{5}{4}$ desta quantidade. Quantos carrinhos tem Pedro?

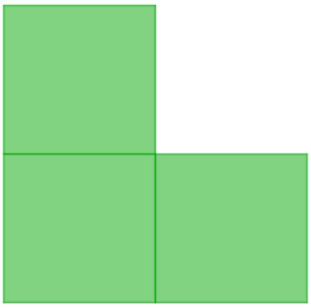
Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Reconhecer que uma mesma fração pode representar quantidades diferentes, dependendo da unidade (grandeza discreta) que se considere;
- ✓ Reconhecer a importância da unidade ao trabalhar-se com frações;
- ✓ Entender o conceito de fração imprópria.

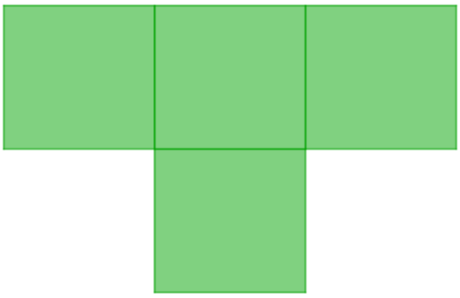
Momento do Professor**:** Sugere-se ao professor discutir com a turma os diferentes resultados e estratégias utilizados, convidando os alunos a apresentarem aos colegas o seu desenvolvimento da sua resolução. É importante também que os estudantes concluam que a fração “$\frac{1}{4}$ de” poder originar coisas e quantidades diferentes, dependendo da unidade (no caso grandeza discreta) que se tenha fixado.

Atividade 16 -

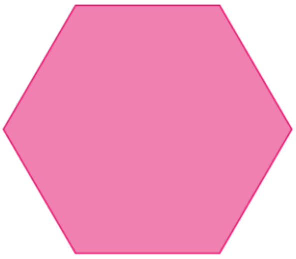
a) Desenhe uma figura cuja metade ou $\frac{1}{2}$ (um meio) da mesma - está representada abaixo



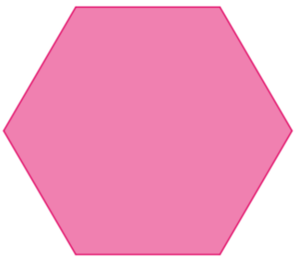
b) Desenhe uma figura cuja quarta parte ou $\frac{1}{4}$ (um quarto) da mesma - está representada abaixo:



c) Desenhe uma figura cuja quarta parte ou $\frac{1}{4}$ (um quarto) da mesma - está representada abaixo:



d) Desenhe uma figura sabendo que $\frac{2}{3}$ (dois terços) da mesma está representada abaixo:



<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Recompor a unidade a partir de uma dada fração da mesma, envolvendo grandeza contínua e utilizando representação geométrica;
- ✓ Perceber que uma mesma quantidade pode ser tanto $\frac{1}{4}$ como $\frac{2}{3}$ da unidade, dependendo da

unidade que se esteja considerando;

- ✓ Perceber a importância da unidade;

Momento do Professor: Esta atividade vem praticar o processo inverso, nem sempre comum nos livros didáticos, que é o de recuperação da unidade. É importante que o professor discuta com a turma os diferentes resultados e estratégias utilizados, convidando os alunos a apresentarem aos colegas o desenvolvimento de seu raciocínio.

Sugere-se também que o professor, com o objetivo de ressaltar a importância da unidade considerada, estimule a turma a refletir sobre questões do tipo "Por que uma mesma fração (no caso $\frac{1}{4}$) representa quantidades diferentes (itens *(b)* e *(c)*)?"; "Por que figuras/quantidades iguais originam unidades diferentes (itens *(c)* e *(d)*)?", em outras palavras, "Por que uma mesma quantidade pode ser tanto $\frac{1}{4}$ como $\frac{2}{3}$ da unidade?".

Atividade 17 – (Questão adaptada de Bianchini, 6º ano, p.143, 2015) - Eis alguns carrinhos da coleção de carrinhos dos irmãos Paulo e Maria.

Fonte: Bianchini (2015, p. 143).

Determine o total de carrinhos da coleção de João, sabendo que esta quantidade representa

i) $\frac{1}{3}$ (um terço) da coleção;

ii) $\frac{2}{3}$ (dois terços) da coleção.

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Recompor a unidade a partir da fração (não unitária) dada, envolvendo grandeza discreta.

Momento do Professor: Esta atividade, assim como a atividade anterior, vem praticar o processo inverso, nem sempre comum nos livros didáticos, que é o de recuperação da unidade, agora envolvendo grandeza discreta. É importante que o professor discuta com a turma os diferentes resultados e estratégias utilizados, convidando os alunos a apresentarem aos colegas o desenvolvimento de seu raciocínio. O item *(ii)* é um pouco mais complexo do que o item *(i)*, pois o aluno deve reconstruir a unidade, agora conhecendo uma fração não unitária da unidade. Sugere-se ao professor que este certifique-se que o aluno determina primeiro $\frac{1}{3}$ da coleção, para só então determinar a coleção inteira. O fechamento da atividade deverá ressaltar que uma mesma quantidade (no caso, 6 carrinhos da coleção de Paulo e Maria) pode representar diferentes frações da unidade, no caso ser $\frac{1}{3}$ (um terço) da coleção, como no item *(i)* bem como representar $\frac{2}{3}$ (dois terços) da coleção, como no item *(ii)*.

PARTE II

Na PARTE II estão as atividades que focam em frações equivalentes, e em uma caracterização de frações equivalentes, precisamente duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ são equivalentes se e só se $a \times d = b \times c,$

preferivelmente acompanhada de uma demonstração com potencial de promover a compreensão (HANNA, 1990).

A técnica empregada para comprovar a equivalência entre frações é aplicada na comparação, adição e subtração de frações.

Assim como na PARTE I, no intuito de um maior esclarecimento ao professor leitor sobre a proposta aqui apresentada, todas as atividades são acompanhadas dos seus objetivos e de "Momentos do Professor".

Tanto nos PCN como na BNCC o estudo de frações equivalentes está previsto para o 2º ciclo, constando nesse último documento, como Objeto de Conhecimento da Unidade Temática Números para o 5º ano: "comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência" (Brasil, 2017, p. 292), sendo recomendada como habilidade "Identificar frações equivalentes" (Brasil, 2017, p. 293).

Frações equivalentes (que nos enunciados das atividades serão sempre tratadas por "frações iguais") são introduzidas como frações que representam a mesma quantidade, motivadas pela necessidade de comparar duas frações dadas.

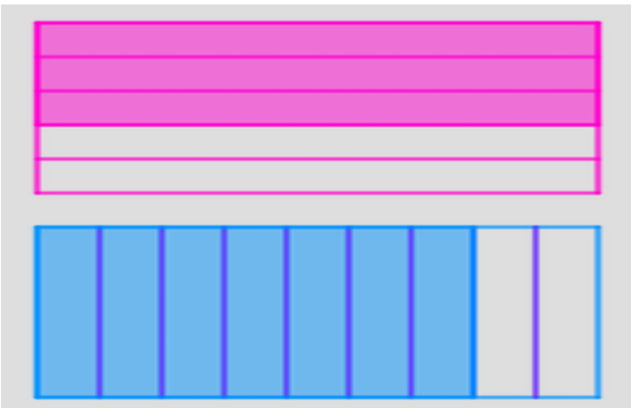
A discussão encaminhada nas atividades sobre como comparar frações de numeradores e denominadores distintos procura levar o estudante à demonstração de um teorema de caracterização de frações equivalentes, inicialmente por meio de representações pictóricas em casos particulares para depois generalizar e enunciar o teorema por meio de palavras (ou, conforme a maturidade da turma com relação a linguagem simbólica, por meio da representação simbólica $\frac{a}{b}$, fazendo uso nesse momento da conversão de representações, segundo a Teoria de Duval.)

A comparação de frações unitárias, bem como de frações de mesmo denominador e de frações de mesmo numerador podem dispensar a equivalência, apoiando-se apenas nas definições de fração unitária e não unirária, bem como na relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte. É na comparação de frações de numeradores e denominadores distintos que a equivalência tem papel importante, servindo como recurso para, afinal, comparar-se tais frações.

A estratégia aqui proposta para proceder a uma tal comparação dispensa o mínimo múltiplo comum, o que diferencia o presente trabalho de muitos dos livros didáticos analisados. Para comparar frações de denominadores diferentes utilizamos linhas verticais e horizontais equiparticionando um retângulo que representa a unidade. Por exemplo, ao comparar as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{9}$, é possível, com essa técnica, transformar as frações dadas em frações equivalentes e de mesmo denominador, ambas visualizadas em uma mesma configuração retangular, conforme ilustrado no Quadro 1.

Quadro 1 – Comparando as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{9}$ fazendo uso de linhas verticais e horizontais para gerar as equipartições.

Representamos separadamente as frações de uma mesma unidade representada por um retângulo, uma equiparticionada fazendo uso de linhas horizontais para gerar a primeira fração dada, enquanto a outra equipartição gera a segunda fração com linhas verticais:

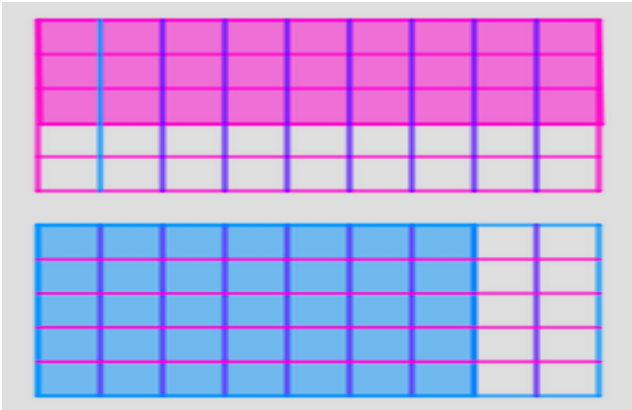


$\frac{3}{5}$

$\frac{7}{9}$

Marcando em cada unidade a equipartição utilizada para a outra unidade, obtemos dois retângulos equiparticionados da mesma forma, com linhas horizontais e verticais, totalizando um número de partes igual ao produto dos denominadores das frações originalmente dadas, no caso $5\times 9 =$

45 partes em ambos os retângulos.



$\frac{27}{45}$

$\frac{35}{45}$

A partir desta configuração, pode-se determinar frações equivalentes às frações dadas originalmente com denominadores iguais:

$\frac{3}{5}$ e $\frac{27}{45}$ representam a mesma quantidade da unidade e

$\frac{7}{9}$ e $\frac{35}{45}$ representam a mesma quantidade da unidade.

Logo, podemos afirmar que $\frac{27}{45} = \frac{3}{5}$ bem como $\frac{7}{9} = \frac{35}{45}$

Sendo assim, é possível comparar as frações dadas de maneira precisa:

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{45} < \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

Acreditamos que essa técnica facilita a comparação de frações e tem a vantagem sobre a técnica que faz uso do mínimo múltiplo comum no sentido que os alunos não precisam “decorar uma receita”, basta apenas multiplicar cada uma das frações pelo denominador da outra. Assim, discordamos de Bigode (2015) que afirma não ser recomendável orientar os alunos a multiplicar os denominadores, pois nesse caso, o produto dos denominadores nem sempre fornece o mmc, e dessa forma os alunos estariam repetindo um “truque” mecanicamente, deixando de raciocinar sobre múltiplos comuns. Aqui, na nossa opinião, tem-se a vantagem de a técnica ser compreendida a partir de uma visualização de fácil memorização, além de corroborar a orientação dos PCN: “quanto ao cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes” (BRASIL, 1998, p. 104).

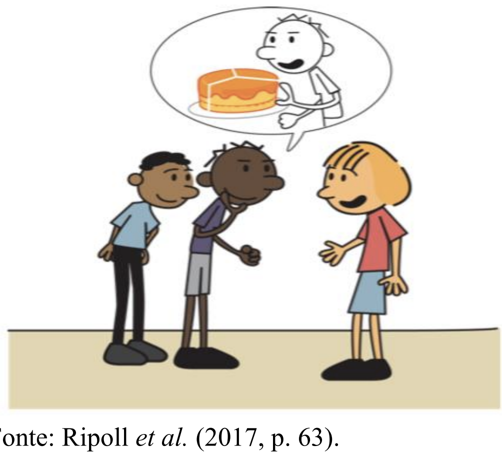
Nas atividades desenvolvidas nesta parte do trabalho, procurou-se salientar as vantagens de se trabalhar com o produto dos denominadores no lugar de usar especificamente o *mmc*, para gerar frações equivalentes de denominadores iguais.

Assim como na comparação, a adição e a subtração de frações de denominadores iguais pode ser abordada recorrendo apenas à definição de fração unitária e não unitária. Já na comparação e na adição de frações de denominadores distintos a equivalência tem papel importante.

Pretende-se motivar o conceito de equivalência com a Atividade 18, trabalhando com a subdivisão de cada terço da unidade (bolo) em quatro partes iguais, explorando a comparação de frações. As Atividades 19 e 20 contemplam a geração de frações equivalentes (iguais na linguagem dos alunos) e comparação ainda em modelos contínuos.

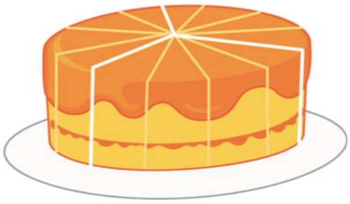
Atividade 18 – (Livro Aberto, Lição 4, atividade 4)

Rita convidou seus colegas de escola para virem à sua casa conhecer seu novo cãozinho. Sua mãe preparou um bolo para o lanche da tarde das crianças. Às 16h chegaram dois de seus colegas, João e Mário. Mário logo imaginou o bolo repartido em 3 pedaços e pensou que ele poderia então comer um terço do mesmo.



Fonte: Ripoll *et al.* (2017, p. 63).

A mãe de Rita começou a cortar o bolo, partindo-o, como Mário havia imaginado, em 3 partes iguais. No entanto, antes que começassem a comer, chegaram mais 4 colegas da escola. Então a mãe de Rita dividiu cada um dos 3 pedaços iniciais em 4 partes de igual tamanho.



Fonte: Ripoll *et al.* (2017, p. 63).

Na hora do lanche, João comeu 2 pedaços de bolo e Mário comeu 4.

a) Que fração do bolo Mário comeu?

b) Que fração do bolo João comeu?

Se os amigos atrasados não tivessem aparecido antes do lanche, a mãe de Rita não teria subdividido as 3 fatias iniciais. Assim, se fossem apenas Rita, Mário e João, cada um teria comido $\frac{1}{3}$ do bolo.

c) Nesse caso, Mário teria comido menos bolo, mais bolo ou a mesma quantidade de bolo que comeu?

d) E João, teria comido menos bolo, mais bolo ou a mesma quantidade de bolo que comeu?

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Comparar, em um modelo contínuo, frações de denominadores diferentes, porém sendo um deles múltiplo do outro;
- ✓ Reconhecer, a partir da observação das representações das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{12}$ que elas representam a mesma quantidade, e por isso escrevemos $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Momento do Professor: Essa atividade deve ser desenvolvida com a utilização dos discos de E.V.A., no intuito de torná-la mais concreta. A ação de subdividir cada uma das partes de uma equipartição, gerando uma nova equipartição da unidade (no caso, o bolo) é a ideia essencial que vai permitir chegar ao critério de equivalência entre duas frações, por isso é importante que cada estudante verbalize a compreensão dessa ideia, como resultado de uma comparação de frações de denominadores diferentes (porém ainda no caso em que um deles é múltiplo do outro).

Também acreditamos ser importante o estudante vivenciar com material concreto a subdivisão de cada terço em quatro partes iguais, atingindo maior êxito em seus objetivos, além de tornar a atividade mais interessante e lúdica. O material concreto pode ajudar na visualização e compreensão de uma eventual confusão que pode surgir na resolução dos itens *(c)* e *(d),* provocada pelo seguinte raciocínio: "eu entendo que o pedaço de bolo é menor, mas 2 é maior que 1, então é mais bolo". Sugere-se que o professor se certifique que todos os estudantes concordam com a resolução destes itens.

O material concreto também auxilia a comparação entre, por exemplo, as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{12}$ ou as frações $\frac{2}{12}$ e $\frac{1}{3}$ e a posterior generalização da ideia de produzir frações equivalentes. Sugere-se que o professor estimule a sobreposição da pizza equiparticionada em 12 partes sobre a pizza equiparticionada em 3 partes, imitando a ação da mãe de Rita, e que, assim, seja capaz de comparar essas frações. Recomenda-se ainda ao professor que reitere o fato de escrevermos $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ *porque as frações representam quantidades iguais de bolo.*

O raciocínio a ser aqui utilizado é passível de generalização para qualquer situação em que um denominador é múltiplo do outro, pelo menos em modelos contínuos, e por isso é recomendável que o professor faça este fechamento com os estudantes.

Atividade 19 –

Considere como unidade a folha de papel que lhe foi entregue. Agora, dobre a folha ao meio e pinte uma das partes.

a) Desdobre a folha e responda: a que fração da unidade corresponde a parte pintada?

b) Torne a dobrar a folha e então, dobre novamente ao meio. Agora desdobre a folha, recuperando a unidade, e responda: a que fração da unidade corresponde a parte pintada?

c) Repita o processo de dobrar ao meio por três vezes. A seguir, recupere a unidade e agora responda: que fração corresponde à parte pintada?

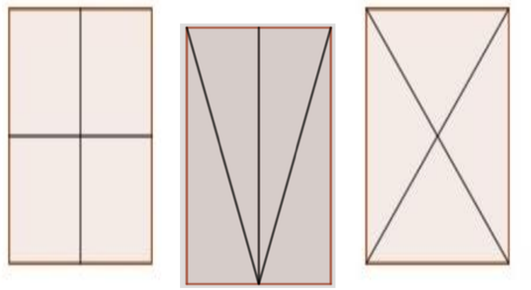
d) O que você percebe nas frações encontradas nos itens acima? Registre aqui sua conclusão:

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Reconhecer que existem frações que expressam a mesma quantidade de uma unidade fixada.

Momento do Professor: Os alunos devem receber, cada um, um pedaço retangular de papel (por exemplo, meia folha de ofício), todos de iguais dimensões. A ideia desta atividade é diversificar situações que oportunizem frações equivalentes. Ela reforça a ação de subdividir cada parte de uma equipartição em partes iguais, gerando uma nova equipartição da mesma unidade**.** Comparada à Atividade 18, aqui o estudante tem liberdade de subdividir a unidade, oportunizando o aparecimento de diferentes formas. Os alunos devem visualizar, na sua folha de papel, que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são iguais, pois representam a mesma quantidade pintada da folha (mesma quantidade da unidade). Ressaltamos que a parte pintada da folha, não necessariamente será a mesma, pois o aluno pode dobrar a folha de formas diferentes, mas representará a mesma fração.

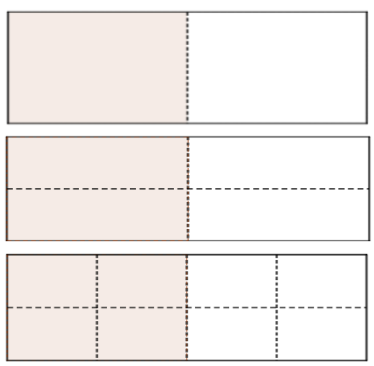
Figura 4 – Exemplos de diferentes formas de dobrar a folha de papel



Fonte: Construção da autora (2019)

É possível que um estudante responda, por exemplo, “metade da folha” para todos os itens, oportunizando/adiantando a discussão sobre quem está certo, quem está errado. O importante é os alunos reconhecerem que a resposta “a metade da folha” para todos os itens não está errada, mas que, neste caso, a unidade por ele considerada está variando. Abaixo apresentamos uma das possibilidades de dobra.

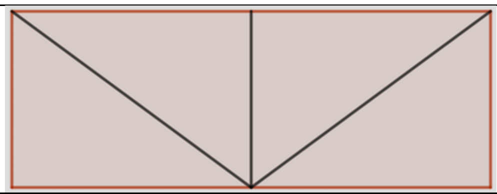
Figura 5 – possibilidades de dobra da folha



Fonte: Construção da autora (2019)

Consideramos importante o professor observar os tipos de dobras que os alunos estão fazendo, pois dependendo de como dobrar a metade e/ou a metade da metade, a terceira equipartição/dobra pode não ser possível (para o estudante), como o caso das imagens abaixo.

Figura 6 – exemplos de dobra feita na folha



Fonte: Construção da autora (2019)

Sugere-se que o registro no quadro do item *(d)* seja acompanhado, por exemplo, do argumento "As frações são todas iguais porque representam a mesma quantidade pintada da folha".

Atividade 20 –

Você recebeu duas folhas da sua professora. Agora, siga os passos abaixo:

a) Dobre uma das folhas ao meio, desdobre e pinte uma das partes.

b) Desdobre a folha e responda: a que fração da unidade corresponde a parte pintada?

c) Torne a dobrar a folha, mas agora em três pedaços iguais. A seguir, desdobre a folha e responda: a que fração da folha inteira representa a parte pintada nessa segunda etapa?

d) O que você percebe ao comparar a parte pintada dos itens (b) e (c)?

e) O que você percebe ao comparar as frações dos itens (b) e (c)?

f) Agora, pegue a segunda folha entregue pela sua professora e dobre-a em três partes iguais, desdobre e pinte duas dessas partes.

g) Desdobre a folha e responda: a que fração da folha, representa a parte pintada? Será que você pintou mais do que a metade da folha?

Para ter certeza da resposta correta, continue a trabalhar:

h) Torne a dobrar a segunda folha, agora ao meio. A seguir, desdobre a folha e responda: a que fração da folha corresponde a parte pintada?

i) O que você percebe ao comparar a parte pintada dos itens (g) e (h)?

j) O que você percebe ao comparar as frações de suas respostas aos itens (g) e (h)?

k) São iguais as frações dos itens (b) e (g)?

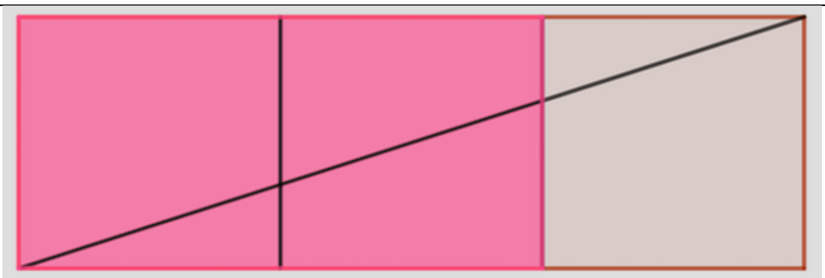
Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar frações equivalentes;
- ✓ Gerar frações equivalentes a uma fração dada, ainda em modelo contínuo.
- ✓ Comparar frações por meio de frações equivalentes de mesmo denominador.

Momento do Professor**:** A intenção desta atividade é oportunizar que os alunos visualizem, a partir da segunda dobra realizada na primeira e na segunda folhas, que em ambos os casos foram geradas equipartições em um mesmo número de partes, a saber, seis, justificada pela comutatividade da multiplicação: $2 \times 3 = 3 \times 2$. É importante que os alunos percebam que, na primeira folha, dividiu-se na metade (primeira dobra) e, a seguir, em três partes iguais, portanto a unidade agora está dividida em $3 \times 2 = 6$ partes iguais; já a segunda folha inicialmente foi divida em três partes iguais e após em duas partes, totalizando uma equipartição em $2 \times 3 = 6$ partes.

No item *(h)*, a segunda dobra deve ainda produzir uma equipartição da unidade. Se isto não acontecer, (por exemplo, como na Figura 302) o professor deve sugerir esta condição aos estudantes (caso contrário estes não poderão responder à pergunta aí colocada), fornecendo outra folha para realizarem novas dobras.

Figura 7 - Exemplo de repartição em 6 partes, sem equipartição



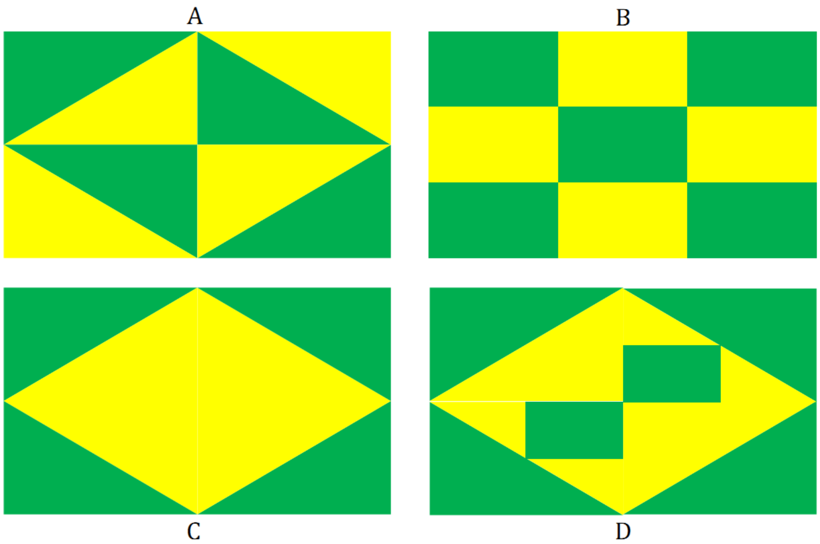
Fonte: Acervo da autora (2019)

No item *(k)* é esperado que os alunos consigam comparar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$, recorrendo às frações equivalentes de denominador 6 em seus argumentos ($\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$), para então, utilizando apenas a definição de fração não unitária, concluirem que pegar 4 partes iguais de uma unidade dividida em 6 partes iguais, é mais do que pegar 3 partes iguais dessa mesma unidade, divida em 6 partes iguais. Ainda sobre o item *(k),* sugere-se ao professor que só conclua a atividade, quando os estudantes disserem qual fração é maior, representando tal desigualdade no quadro. O fechamento da atividade deve ser feito com um registro no quadro na forma

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

comparando as frações encontradas e registrando as igualdades e desigualdades. O professor pode também solicitar aos estudantes acrescentarem outras frações equivalentes (iguais, para os estudantes) a estas frações, agora talvez sem necessidade de utilizar a folha, tentando generalizar raciocínios e contemplando o objetivo de gerar frações equivalentes a uma fração (genérica) dada.

Atividade 21 -



i) A que fração das bandeiras acima correspondem, respectivamente, a parte amarela e a parte verde? Responda completando a tabela abaixo.

Bandeira	Fração de amarelo da bandeira	Fração de verde da bandeira
A		
B		
C		
D		

ii) Compare as frações obtidas em cada item, fazendo uso dos símbolos =, < (menor do que) ou > (maior do que). Se quiser, construa uma quarta coluna na tabela acima para registrar tais comparações.

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar frações representadas em modelos contínuos;
- ✓ Saber adicionar frações unitárias de mesmo denominador;
- ✓ Comparar frações por meio de frações equivalentes.

<u>Momento do Professor</u>: Nesta atividade pretende-se dar continuidade à equivalência de frações, à notação na forma da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, possibilitando identificar e gerar frações equivalentes (para os estudantes, iguais) bem como comparar e reiterar a soma de frações unitárias de mesmo denominador (baseada na definição de fração não unitária) e oportunizar a comparação entre frações de uma mesma unidade, fazendo uso da igualdade (equivalência) bem como de desigualdades.

Esta atividade é bem mais complexa que as Atividades 18 e 19, pois no caso das bandeiras C e D é requerido que o estudante se dê conta que o primeiro passo é equiparticionar cada bandeira e, como segundo passo, identificar o número adequado de partes. A seguir, retoma a identificação de frações (em modelo contínuo). Contempla também a adição de frações unitárias de mesmo denominador e oportuniza a equivalência de frações no caso das bandeiras A e C e a não equivalência (comparação por desigualdade) no caso das bandeiras B e D. Também pode ser estimulada de forma natural a subtração com frações no preenchimento da tabela, por exemplo, questionando-se: “se a parte amarela é quatro oitavos, quanto sobra para a parte verde?” Tem-se aqui também uma possibilidade de avaliar o que foi tratado até o momento sobre frações de grandezas contínuas. Recomenda-se que no item (*ii*) argumente-se também geometricamente. O fechamento da atividade deve ser oportunizado com o registro no quadro de igualdades tais como $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ bem como de adições, tais como $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Atividade 22 – Dona Maria fez um bolo de chocolate para esperar a visita dos netos Pedro e Bianca. Antes de partir o bolo, vovó Maria perguntou quanto do bolo cada um gostaria de comer. Pedro respondeu que gostaria de comer $\frac{1}{5}$ do bolo e Bianca $\frac{3}{10}$.
Vovó Maria surpreendeu-se com a resposta em frações e perguntou aos netos “Será que um bolo é suficiente para servir vocês dois?” Responda para vovó Maria, justificando sua resposta.
Quem gostaria de comer mais bolo, Pedro ou Bianca?

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Comparar frações de denominadores diferentes, mas ainda sendo um deles múltiplo do outro;
- ✓ Adicionar frações de denominadores diferentes fazendo uso da equivalência;

✓ Comparar uma fração com a unidade.

<u>Momento do Professor</u>: Nesta atividade continua-se a explorar comparação e adição de frações com denominadores diferentes, mas ainda em modelo contínuo e sendo um dos denominadores, múltiplo do outro. O professor pode utilizar material concreto, como os discos de E.V.A., dando mais concretude à atividade. Inspirados pela atividade anterior (bandeiras C e D), pode partir dos estudantes a iniciativa de considerarem frações equivalentes para resolver o problema. Caso isso não aconteça, sugere-se ao professor retomar a atividade anterior e questionar os estudantes sobre a estratégia lá utilizada. Os alunos devem concluir que a quantidade de bolo consumida pelos irmãos Pedro e Bianca, é menor que a unidade, ou seja, que um bolo é suficiente para servir os dois netos.

Atividade 23 –

Analise a seguinte situação: João pergunta a sua mãe se pode pegar $\frac{1}{5}$ das balas do pote que está sobre a mesa e Paulo pergunta se pode pegar $\frac{3}{10}$ das balas do mesmo pote. A mãe lhes responde: “Ok, se conseguirem...”. Com base nessas informações, responda:

a) Se o pote tiver 15 balas, João e Paulo conseguirão realizar seus desejos?

b) E se o pote tiver 30 balas?

c) Quem pretende pegar mais balas do pote, João ou Paulo?

d) Qual o número mínimo de balas que deverá haver no pote para que os dois estudantes possam realizar seus desejos?

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

✓ Determinar a quantidade de balas que as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$ representam;

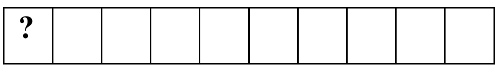
✓ Perceber a impossibilidade de se tomar quaisquer frações da unidade em um contexto de grandezas discretas;

✓ Comparar frações de denominadores diferentes, mas sendo um deles múltiplo do outro, agora em um contexto de grandezas discretas;

✓ Perceber que em algumas situações o mínimo múltiplo comum é essencial.

<u>Momento do Professor</u>: A Atividade 23 pode ser desenvolvida em grupo, e busca contemplar comparação de frações de grandeza discreta, por meio de frações equivalentes de mesmo denominador, além de explorar a impossibilidade de se tomar quaisquer frações da unidade

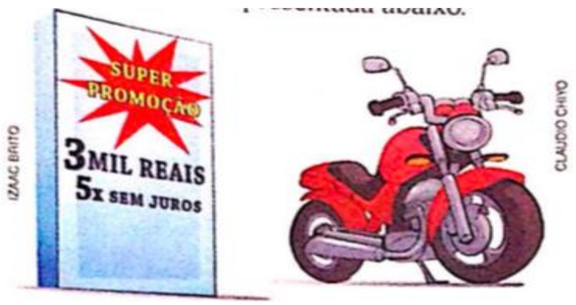
em um contexto envolvendo grandezas discretas. Por isso, seria interessante o professor questionar os estudantes: “por que será que a mãe deu esta resposta aos filhos?” antes de seguir na leitura e abordagem de cada um dos itens. Interessante se os alunos puderem desenvolver a atividade com uso de material concreto representando as balas, com os grupos recebendo 15 balas (ou algo equivalente), momento em que devem perceber que não é possível dividir 15 por 10 e após, ao receberem mais 15 balas, totalizando 30 balas, perceberem que 30 é múltiplo de 5 e de 10 e portanto torna-se possível repartir as balas. Após esse processo utilizando material concreto, sugere-se ao professor estimular uma resolução fazendo uso do modelo pictórico de barras, ainda que a grandeza em questão seja discreta. Cabe relembrar que Duval defende a ideia de que quanto mais representações variadas forem utilizadas, maior será a possibilidade de compreensão de um conceito matemático. A representação pictórica de barras pode ser considerada por algum estudante mais fácil de reproduzir e orientar seu raciocínio. Um possível desenvolvimento da resolução fazendo uso das barrinhas, por exemplo, para o item (*i*) é o seguinte

Representação pictórica	Argumentação com palavras
← 15 balas → 	O pote tem um total de 15 balas
← 15 balas →  ← 3 →	João quer pegar $\frac{1}{5}$ das balas: 15 balas: 5 = 3 balas João quer pegar 3 balas
← 15 balas → 	João quer pegar $\frac{3}{10}$ das balas, no entanto precisaríamos dividir 3 balas ao meio, o que é impossível

(No último raciocínio da coluna da direita está se pensando em subdividir cada quinto em duas partes iguais, no entanto isto equivaleria a dividir 3 balas em duas partes iguais.)

Para responder o item *(c),* os estudantes devem perceber a necessidade de procurar por múltiplos comuns dos denominadores 5 e 10 como únicas possíveis quantidades que comportam considerar-se quintos e décimos neste contexto de balas. Além disso, este múltiplo comum pode servir de denominador para as frações equivalentes às frações dadas para proceder a comparação. Cabe ressaltar que tal denominador das frações equivalentes não necessita especificamente ser o menor múltiplo comum (mmc) dos denominadores 5 e 10. O uso do mmc não deve ser enfatizado pelo professor, sob o risco de se oportunizar a *misconception* de que só por meio dele é possível comparar, adicionar e subtrair frações, como no item *(c).* Ao desvincular-se do mmc, facilita-se também a percepção da caracterização da equivalência de frações, como veremos adiante. No entanto, no item *(d)* procura-se sim pela menor quantidade possível. Como as únicas quantidades possíveis estão entre os denominadores comuns a 5 e 10, estamos - agora sim! – procurando pelo mínimo múltiplo comum desses denominadores.

Atividade 24 - (Atividade adaptada de Bianchini, 6º ano, p. 167, exercício 4) Ao passar por uma concessionária de motos, Cristina aproveitou a promoção e comprou uma moto igual à representada abaixo.



Fonte: Bianchini (2015, p. 167).

Considerando que a superpromoção era sem entrada, todas as 5 parcelas de mesmo valor e sem juros, responda:

a) Qual é a fração que representa o valor de cada prestação em relação ao preço da moto? Apresente uma figura que ilustre o valor total e o valor de cada prestação.

b) Qual o valor de cada prestação?

c) Em um mês Cristina ganhou um dinheiro de sua mãe e resolveu pagar duas prestações da moto. Que valor ela pagou? A qual fração do preço da moto corresponde o valor pago por ela neste mês?

d) Se a promoção fosse alterada para 10 vezes sem juros, qual seria o valor de cada prestação? Apresente uma figura que ilustre o valor total e o valor de cada prestação neste caso.

e) Nessa nova promoção, se Cristina resolver pagar duas prestações da moto em um só mês, que valor ela pagaria? A qual fração do preço da moto corresponde o valor pago por ela neste mês?

f) Complete os espaços “____” entre as frações, com “=”, “<” ou “>”, considerando todas as frações relacionadas a uma mesma unidade:

$\frac{1}{5}$ ___ $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{5}$ ___ $\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$ ___ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{5}$ ___ $\frac{2}{10}$

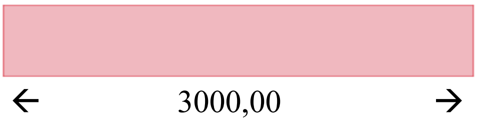
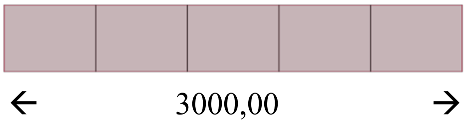
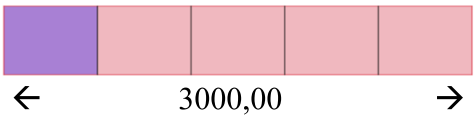
<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Representar frações utilizando modelos pictóricos.
- ✓ Adicionar frações unitárias de mesmo denominador;
- ✓ Aplicar o conceito de fração não unitária;
- ✓ Comparar frações de numeradores iguais e denominadores diferentes;

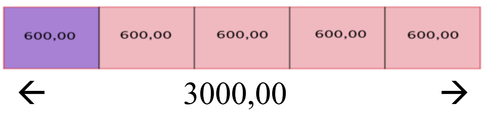
<u>Momento do Professor</u>**:** A Atividade 24 pretende dar continuidade à equivalência de frações e à sua notação $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e também à comparação entre frações em modelos discretos. Retoma a equipartição, reitera a adição de frações unitárias de mesmo denominador, baseada na definição de fração não unitária e oportuniza a comparação entre frações de numeradores iguais e denominadores diferentes, sendo ainda um denominador múltiplo do outro, fazendo ou não uso da equivalência (para os estudantes, igualdade) bem como de desigualdades. Pretende também introduzir para modelos discretos (ou reforçar, caso já tenha sido utilizado, por exemplo, na atividade anterior) a representação pictórica do modelo de barras.

Nessa atividade, os alunos têm a oportunidade de perceber como a representação pictórica pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio e que a unidade considerada mantém-se a mesma, ou seja, a figura escolhida para representar o valor total de prestações, deve ser mantida do mesmo tamanho, pois a unidade, 3000 reais, continua a mesma. Caso o aluno não escolha o modelo de barras como representação, sugere-se que o professor apresente-o também como estratégia. Além disso, consideramos bastante esclarecedora a construção conjunta com os estudantes de um quadro que ilustre cada passo do raciocínio, seja em palavras, seja pictoricamente, seja simbolicamente, como o Quadro 2 para o caso de 3000 reais, dividido em 5.

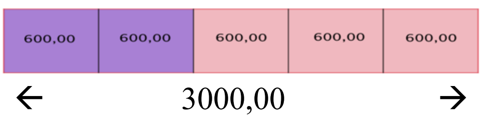
Quadro 2 – Desenvolvimento do item *(a)*

Representação pictórica	Argumentação com palavras	Argumentação com simbologia
	Unidade: 3000 reais	
	Unidade 3000 reais, divido em cinco partes iguais	$\frac{5}{5}$
	Cada parcela corresponde a um quinto da unidade	$\frac{1}{5}$

Para a resolução do item *(b)*, pode-se dar continuidade ao Quadro 27, acrescentando a linha:

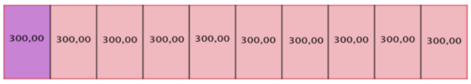
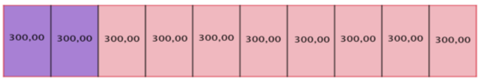
	Cada parcela corresponde a 600 reais	$\frac{1}{5}$ da unidade = R\$ 3000,00 ÷ 5 = R\$ 600,00

E, para a resolução do item *(c)*, pode-se incluir mais uma linha:

	Duas prestações = Dois quintos da unidade 3000 reais, que correspondem a 1200 reais	$\frac{2}{5}$ da unidade = $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ = R\$ 600,00 + R\$ 600,00 = R\$ 1200,00

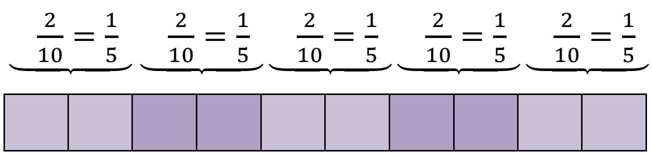
Para a resolução dos ítens *(d)* e *(e)* pode-se repetir o raciocínio, construindo-se o Quadro 3.

Quadro 3 – Desenvolvimento dos itens *(d)* e *(e)*

Representação pictórica	Argumentação com palavras	Argumentação com simbologia
 3000,00	Unidade: 3000 reais	
 3000,00	Um décimo da unidade corresponde a 3000 reais	$\frac{1}{10}$ da unidade = R\$ 3000,00 ÷ 10 = R\$ 300,00
 3000,00	Duas prestações = Dois décimos da unidade 3000 reais	$\frac{2}{10}$ da unidade = $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ = R\$ 300,00 + R\$ 300,00 = R\$ 600,00

O fechamento do item (*e*) deve ser dado na direção de, afinal, constatar-se que $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (de uma mesma unidade), seja por meio das respostas encontradas, mas também, e principalmente, pela representação pictórica (que independe do valor que corresponde a cada parte, como na Figura 8, que sugere que cada 2 décimos da unidade correspondem a 1 quinto da mesma.

Figura 8 – Unidade equiparticionada em 10 partes



Fonte: Acervo da autora (2019)

O item (*f*) tem o objetivo de estimular a abstração do estudante, desvinculando-se do contexto da compra da moto e pensando abstratamente em uma unidade, como no fechamento dado ao item (e). Ela pode ter também um caráter avaliativo para o professor. Sugere-se que o professor não se refira aos valores calculados, mas sim a argumentos genéricos, por exemplo: se duas frações têm mesmo numerador e denominadores diferentes, então a maior é aquela que tem menor denominador, pois a unidade foi dividida em um número menor de partes e então o tamanho da parte ficou maior, evocando assim o conceito de fração não unitária. Sugere-se também que o professor certifique-se que cada aluno percebeu que, ao aumentar o número de prestações para 10, na verdade estamos subdivindo cada $\frac{1}{5}$ em duas partes iguais, obtendo $\frac{2}{10}$, que é igual a $\frac{1}{5}$. Como fechamento, o professor pode chamar também a atenção dos alunos, para o fato de que, aumentando o número de prestações, o valor da prestação diminui, simplesmente porque $\frac{1}{10}$ de *qualquer* unidade $< \frac{2}{5}$ dessa mesma unidade.

Atividade 25: (Questão adaptada de Mosami; Cedillo, Tomo IV, vol.1, p. 25)
Quem é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ de uma unidade?
i) Para ajudar a responder esta pergunta, utilize as folhas entregues pela professora, para nelas representar, utilizando dobradura, as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, pintando, em cada folha, a parte correspondente a uma dessas frações.
ii) Será que, realizando novas dobras nas duas folhas recebidas, conseguimos expressar as duas partes pintadas das folhas como frações da folha com denominadores iguais?

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar uma estratégia para reconhecer se duas dadas frações de denominadores diferentes, sem que um seja múltiplo do outro, são ou não equivalentes, apoiando-se em material concreto.

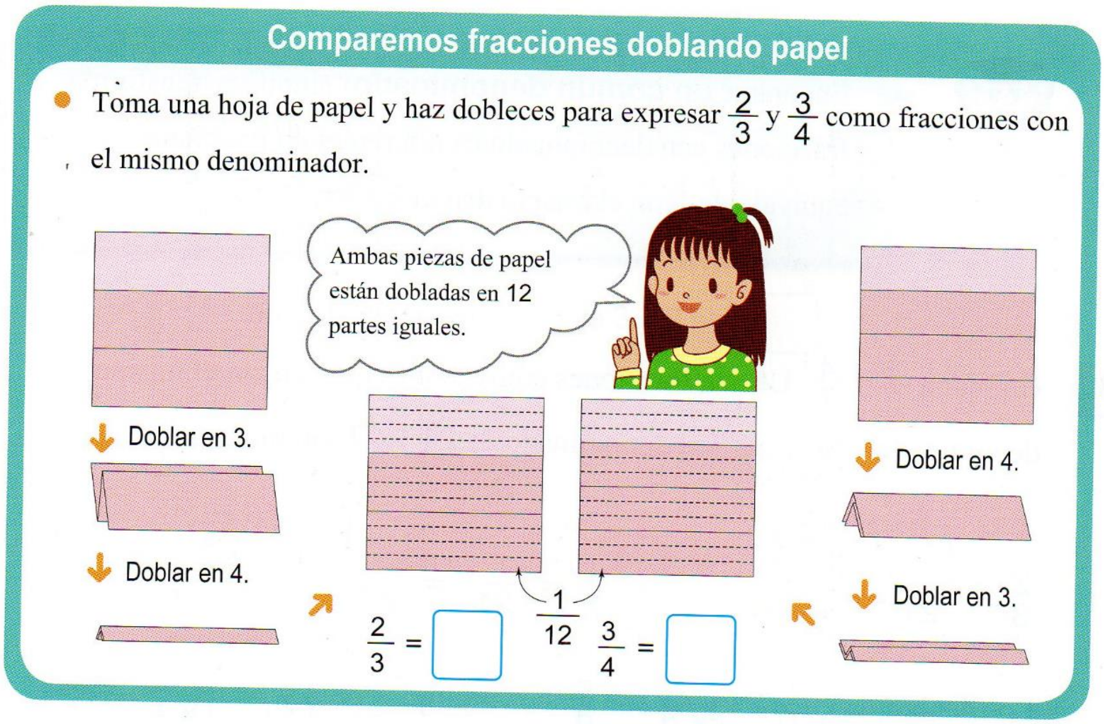
Momento do Professor: A Atividade 25 dá os primeiros passos na direção de uma busca pela caracterização de frações equivalentes, fazendo uso de material concreto, buscando construir com o estudante uma estratégia para gerar frações equivalentes de denominadores iguais para facilitar, no caso, uma comparação.

Pode ser que os alunos tenham dificuldades de dobrar em três partes iguais, e que, com várias tentativas, a folha acabe com vários vincos, antes de chegar-se à equipartição, o que pode dificultar a contagem final do número de partes da nova equipartição. Sugere-se ao professor que, antes de ser iniciada a dobradura, discuta como essa divisão pode ser feita (a dobra de carta é um relato histórico interessante!).

Nessa atividade, sugere-se que o professor deve relembrar a utilidade que se revelou em atividades anteriores ao se obter mesmo denominador para comparar frações (sugerindo que a certeza da resposta vem da comparação de frações de mesmo denominador porque daí pode-se usar a definição de fração não unitária), e que retome a questão de comparação de frações de denominadores iguais, ressaltando que comparar frações de mesmo denominador não é tão complicado, relembrando o conceito de fração não unitária e dando talvez alguns exemplos, concluindo com os estudantes que, neste caso, nem precisamos de desenhos. Daí a problemática colocada no enunciado pode ser ressaltada: agora queremos comparar duas frações que não têm nem numeradores nem denominadores iguais.

Como dica aos estudantes, caso não parta deles nenhuma ideia de argumentação, pode-se relembrar a Atividade 18: “O que fez a mãe de Rita? Subdividiu cada terça parte; e em quantas partes seria aqui interessante subdividir, se queremos encontrar frações de mesmo denominador?”, esperando que o conhecimento sobre múltiplos, já evocados na Atividade 23, auxilie no desenvolvimento da resolução da atividade. Por isso sugere-se ao professor relembrar a ideia de múltiplo e de múltiplo comum, relembrando a Atividade 23, se necessário (o número de balas tem que ser um múltiplo comum de 5 e 10), para oportunizar que eles percebam a necessidade de encontrar-se um múltiplo comum aos denominadores 3 e 4 para proceder a novas subdivisões. Supondo que tenham mencionado 12 como múltiplo comum, devem perceber que cada terço deve ser subdividido em 4 partes e cada quarto deve ser subdividido em 3 partes, obtendo em ambas as folhas, $4 \times 3 = 12 = 3 \times 4$ pedaços iguais, possibilitando então, visualizar que $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ e como $8 < 9$, conclui-se que a fração $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{2}{3}$. Na Figura 9 é apresentado o recorte do livro mencionado com o desenvolvimento da atividade.

Figura 9 – Recorte de livro didático onde foi encontrada a proposta da atividade

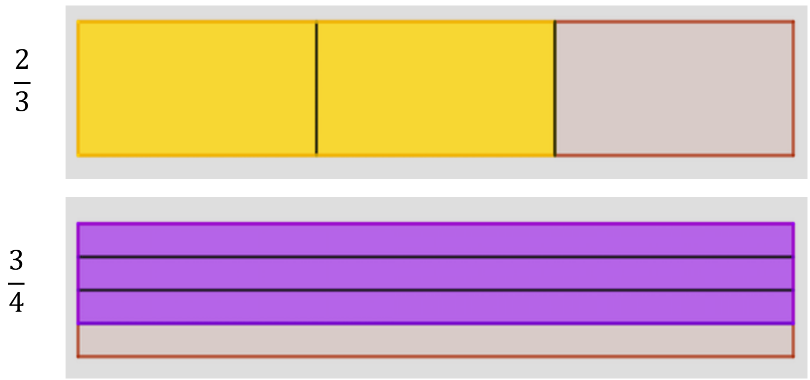


Fonte: Mosani e Cedillo (2012, p. 25).

No entanto, ressaltamos o diferencial de nossa proposta, que faz uso de dobras horizontais e verticais, com a vantagem de afinal produzir um mesmo layout para a equipartição em 12 partes, como segue.

Uma unidade folha pode ser equiparticionada com linhas verticais para representarmos aí uma das frações enquanto a outra unidade pode ser equiparticionada por linhas horizontais para aí representarmos a outra fração (Figura 10):

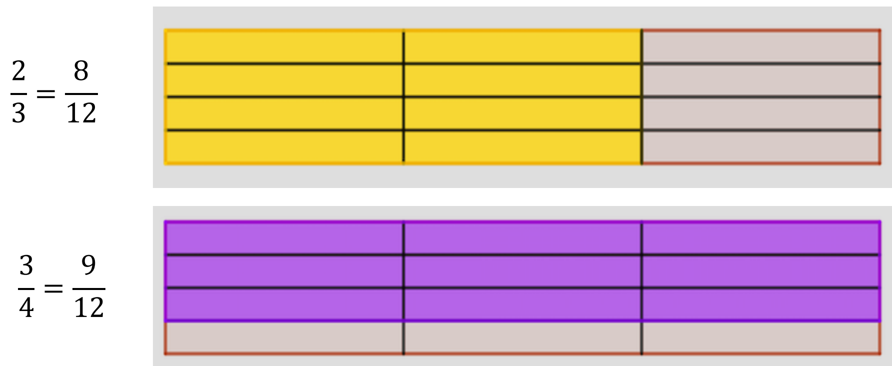
Figura 10 – Representação pictórica das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Chamando a atenção de que, ao subdividirmos cada $\frac{1}{3}$ em 4 partes e cada $\frac{1}{4}$ em 3 partes (Figura 11), estamos na verdade, obtendo uma nova equipartição de cada unidade em $4\times3 = 12 = 3\times4$ partes (visualizadas precisamente pelo significado de arranjo retangular da multiplicação).

Figura 11 – Representação pictórica das frações $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.



Fonte: Acervo da autora (2019).

Essa nova equipartição produz um número de partes (12) que é múltiplo do número de partes da equipartição original (em 3 partes e em 4 partes). Além disso, o uso de linhas horizontais e verticais fornece uma estratégia para produzir um mesmo layout para a unidade equiparticionada. Outras formas de equiparticionar são possíveis, no entanto é nossa opinião que esta que aqui utilizamos facilita muito a visualização e a memorização do argumetno utilizado: se queremos um mesmo denominador, buscamos um múltiplo comum, e um candidato imediato é o produto dos denominadores. Por isso discordamos da colocação

> Não é recomendável orientar os alunos para multiplicar os denominadores, pois nem sempre o produto dos denominadores fornece o mmc, embora forneça o múltiplo comum. Os alunos têm que raciocinar sobre múltiplos comuns, e não simplesmente repetir um "truque" mecanicamente (BIGODE, 2015, p. 229).

Com base na representação acima e no significado de arranjo retangular para a multiplicação, podem ser geradas as seguintes igualdades:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}.$$

Agora, é possível comparar sem dúvidas as frações de mesmo denominador: $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$.

Sugere-se ao professor avaliar a possibilidade de já introduzir a subtração por meio do seguinte argumento: quanto falta para $\frac{2}{3}$ para completar a unidade? E para $\frac{3}{4}$? Para quem falta menos? Então qual é a fração maior?

Atividade 26 - (Questão adaptada de Bianchini, 6ºano, p. 166, exercício 47)

Maria contratou um pintor para pintar as paredes da sua sala. Na pintura, foram misturados $\frac{2}{5}$ de um galão de tinta azul com $\frac{3}{8}$ de um galão de tinta branca. Para realizar a pintura, a mistura utilizada tinha mais tinta azul ou mais tinta branca?

Fonte**:** Bianchini (2015, p. 166).

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Gerar, por iniciativa própria, frações equivalentes a frações dadas;
- ✓ Comparar frações de numeradores diferentes bem como de denominadores diferentes.

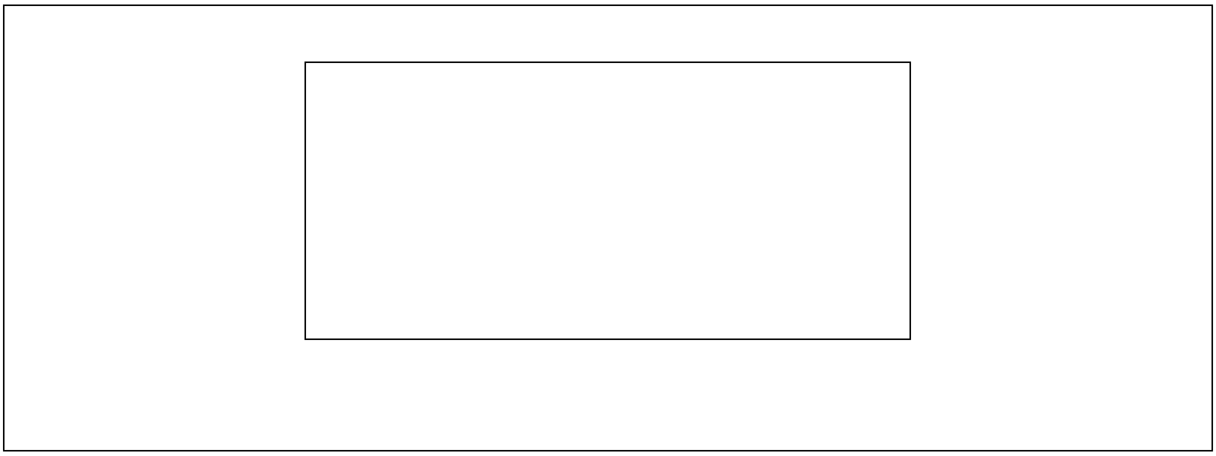
<u>Momento do Professor</u>**:**

A atividade 26 busca comparar frações que possuem numeradores diferentes e denominadores diferentes, sem que um deles seja múltiplo do outro. Desta forma, os alunos terão que recorrer à equivalência de frações como único recurso seguro para efetuar a comparação, diferentemente da atividade anterior, na qual situações de numeradores iguais oportunizaram outro argumento. Assim, aqui é importante que os alunos percebam que devem transformar as frações dadas em frações equivalentes de mesmo denominador, para então comparar os numeradores, concluindo então, que na mistura, foi utilizada mais tinta azul.

Inicia-se assim, com o desenvolvimento desta atividade, a introdução à caracterização das frações equivalentes.

Para ajudar na busca por um mesmo denominador, o professor pode sugerir, caso não ocorra aos estudantes, o modelo de barras como auxiliar na visualização: queremos comparar as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ com relação a uma mesma unidade, que vamos representar por um retângulo (Figura 12):

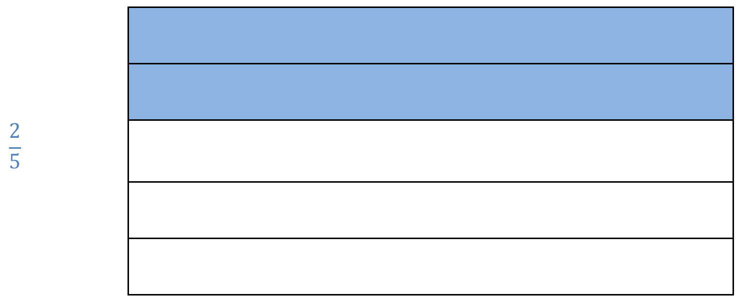
Figura 12 – Retângulo utilizado para representar a unidade considerada



Fonte: Acervo da autora (2019).

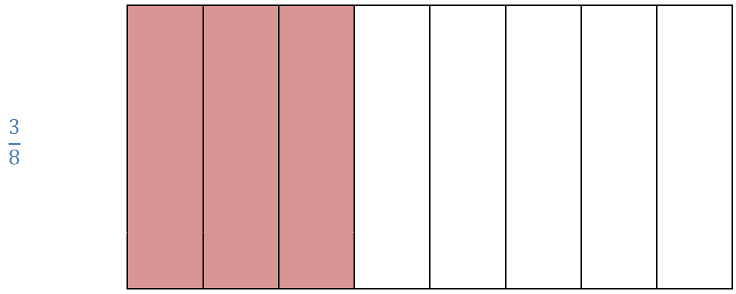
E como motivar a escolha desse mesmo denominador? Como na atividade anterior, apelando para o significado de arranjo retangular da multiplicação, cada unidade representando a lata de tinta pode ser equiparticionada com linhas horizontais para representarmos aí uma das frações e por linhas verticais para aí representarmos a outra fração (Figuras 13 e 14):

Figura 13 – Representação da fração $\frac{2}{5}$ no retângulo utilizado para representar a unidade considerada



Fonte: Acervo da autora (2019).

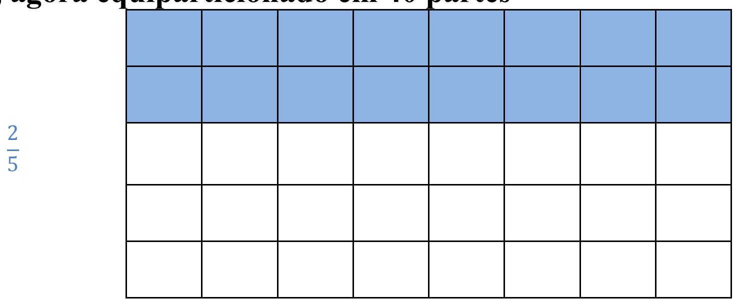
Figura 14 – Representação da fração $\frac{3}{8}$ no retângulo utilizado para representar a unidade considerada



Fonte: Acervo da autora (2019).

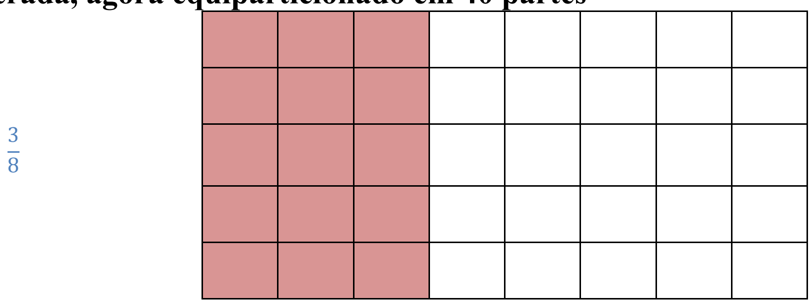
Chamando a atenção de que, ao subdividirmos cada $\frac{1}{5}$ em 8 partes e cada $\frac{1}{8}$ em 5 partes (Figuras 311 e 312), estamos na verdade, obtendo uma nova equipartição de cada unidade em $5 \times 8 = 40 = 8 \times 5$ partes (visualizadas precisamente pelo significado de arranjo retangular da multiplicação).

Figura 15 – Representação da fração $\frac{2}{5}$ no retângulo utilizado para representar a unidade considerada, agora equiparticionado em 40 partes



Fonte: Acervo da autora (2019).

Figura 16 – Representação da fração $\frac{3}{8}$ no retângulo utilizado para representar a unidade considerada, agora equiparticionado em 40 partes



Fonte: Acervo da autora (2019).

Essa nova equipartição produz um número de partes (40) que é múltiplo do número de partes da equipartição original (em 5 partes e em 8 partes). Além disso, o uso de linhas horizontais e verticais fornece uma estratégia para produzir um mesmo layout para a unidade equiparticionada, estratégia esta que é aproveitada adiante na demosntração do Teorema de Caraterização de Frações Equivalentes. Com base na representação acima e no significado de arranjo retangular para a multiplicação, podem ser geradas as seguintes igualdades:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 8}{5 \times 8} = \frac{16}{40} \quad \text{e} \quad \frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}.$$

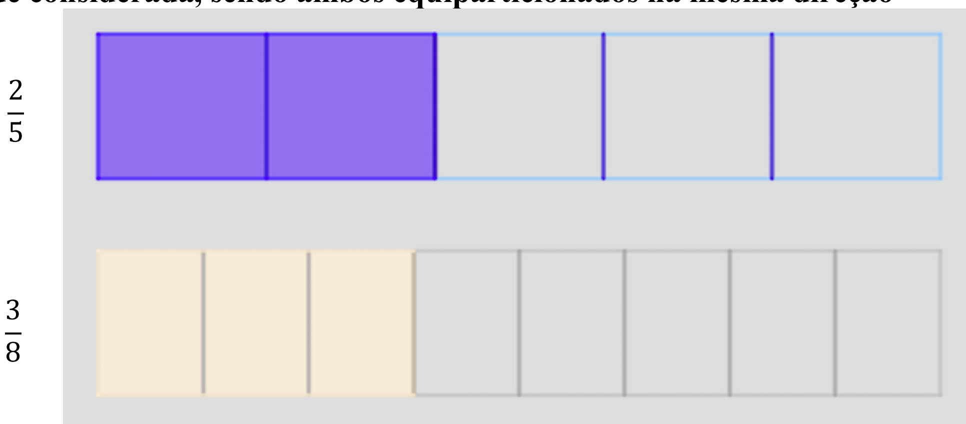
Agora, é possível comparar sem dúvidas as frações de mesmo denominador: $\frac{15}{40} < \frac{16}{40}$.

Portanto, como 16 > 15, conclui-se, fazendo uso da definição de fração não unitária, que foi utilizada mais tinta azul do que tinta branca:

$$\text{tinta azul} = \frac{2}{5} \text{ de uma lata} = \frac{16}{40} \text{ de uma lata} > \frac{15}{40} \text{ de uma lata} = \frac{3}{8} \text{ de uma lata} = \text{tinta branca}$$

Cabe ressaltar que outras formas de equiparticionar as unidades são possíveis (por exemplo, usando todas as subdivisões numa mesma direção); no entanto, é nossa opinião que esta que aqui utilizamos facilita muito a visualização e a memorização do argumetno utilizado e que será aproveitado adiante. Convidamos o professor a comparar a resolução aqui utilizada com a que segue (Figura 16).

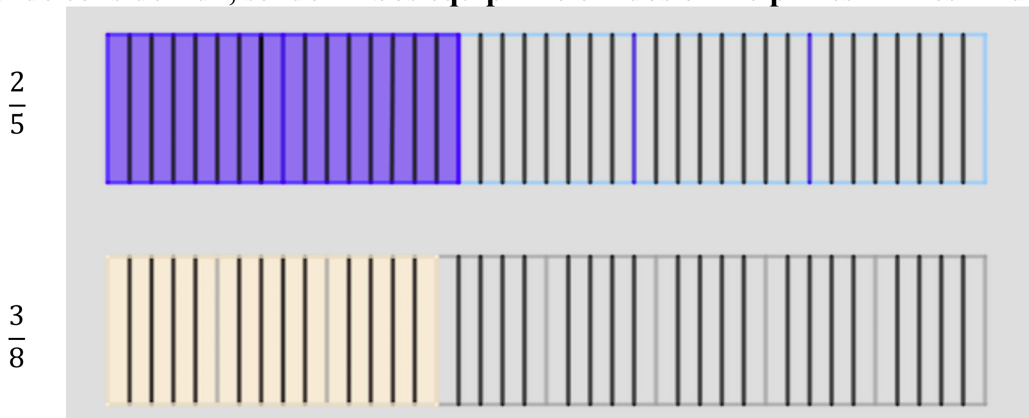
Figura 16 – Representação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ no retângulo utilizado para representar a unidade considerada, sendo ambos equiparticionados na mesma direção



Fonte: Acervo da autora (2019).

Buscamos então subdividir cada quinta parte $(\frac{1}{5})$ em 8 partes e cada oitava parte $(\frac{1}{8})$ em 5 partes, obtendo uma nova equipartição que tem agora 5 × 8 = 40 = 8×5 partes (Figura 17).

Figura 17 – Representação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ no retângulo utilizado para representar a unidade considerada, sendo ambos equiparticionados em 40 partes na mesma direção



Fonte: Acervo da autora (2019).

Agora não se tem mais a visualisação de arranjo retangular, além de ser uma representação mais difícil de ser feita a mão livre, mas ainda é possível perceber que essa nova equipartição produz um número de partes que é múltiplo do número de partes da equipartição original. A partir daqui o racícinio é igual ao da outra representação utilizada: a equipartição em 40 partes gera frações iguais às frações dadas, mas agora com denominadores iguais:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 8}{5 \times 8} = \frac{16}{40} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}.$$

Agora, é possível comparar sem dúvidas: $\frac{15}{40} < \frac{16}{40}$

Portanto:

$$\text{tinta azul} = \frac{2}{5} = \frac{16}{40} > \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = \text{tinta branca}$$

Conclusão: foi utilizada mais tinta azul do que tinta branca.

Outro aspecto a ressaltar na resolução desta atividade bem como da anterior é no fechamento dado pelo professor e que faz parte da introdução à caracterização de frações equivalentes: ao subdividirmos cada parte de uma equipartição em um mesmo número de partes iguais, encontramos afinal uma nova equipartição que produz um número de partes que é múltiplo do número de partes da equipartição original. Assim, se queremos um mesmo denominador para as duas quantidades a serem comparadas, buscamos frações com denominador que seja um múltiplo comum dos denominadores originais, e um candidato imediato a múltiplo comum dos dois números é o produto desses números. Cabe ressaltar que, apesar de existirem infinitos múltiplos comuns a dois números dados, o produto dos denominadores traz a vantagem de poder ser atrelado a uma visualização da unidade na forma de arranjo retangular que vai funcionar para *qualquer* par de denominadores, diferentemente do *menor* múltiplo comum.

Sugere-se que o professor coloque no quadro outras frações equivalentes a $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{8}$, apontando para as de mesmo denominador e reiterando que a comparação pode ser feita com qualquer par de frações de denominadores iguais.

Atividade 27 –

Utilizando os dados da Atividade 10, compare, utilizando os sinais

> (maior que), < (menor que) ou = (igual),

a quantidade total de pizza consumida pelos grupos:

grupo 1 e grupo 3 $\frac{7}{8}$ ——— $\frac{8}{8}$	grupo 1 e grupo 5 $\frac{7}{8}$ ——— $\frac{18}{10}$	grupo 2 e grupo 5 $\frac{8}{8}$ ——— $\frac{18}{10}$
grupo 1 e grupo 2 $\frac{7}{8}$ ——— $\frac{10}{10}$	grupo 2 e grupo 3 $\frac{10}{10}$ ——— $\frac{8}{8}$	grupo 6 e grupo 7 $\frac{14}{3}$ ——— $\frac{8}{4}$
grupo 7 e grupo 8 $\frac{8}{4}$ ——— $\frac{4}{7}$	grupo 1 e grupo 8 $\frac{7}{8}$ ——— $\frac{4}{7}$	grupo 1 e grupo 7 $\frac{7}{8}$ ——— $\frac{8}{4}$

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Comparar, agora sem apoio em material concreto, frações de denominadores iguais e de denominadores diferentes, fazendo uso tanto da definição de fração unitária, como da equivalência ou da relação que varia em sentido contrário entre o número de partes e o tamanho da parte (quanto maior o denominador, menor é a fração unitária).

Momento do Professor: A atividade 27 busca comparar todos os tipos de frações. Nos casos de frações de numeradores e denominadores distintos, sem que um denominador seja múltiplo do outro, dá-se continuidade à busca por uma caracterização de frações equivalentes.

As frações utilizadas na tabela do enunciado foram colocadas a título de exemplo; sugere-se que o professor as substitua pelos dados da tabela produzida pela turma na Atividade 10 (ver PARTE I). Sugere-se que, nesta atividade, os estudantes sejam estimulados a fazer uso de diferentes estratégias (por exemplo, para comparar frações de mesmo denominador, pela definição de fração não unitária basta comparar os numeradores), e assim perceberem que nem sempre é necessário recorrer-se a frações equivalentes para fazer uma comparação entre frações. O material concreto utilizado na Atividade 10 pode estar disponível sobre a mesa do professor, mas ser oferecido aos estudantes apenas no caso de o professor perceber que a imaginação/abstração de algum aluno não é suficienten para ele gerar frações equivalentes às frações dadas, sem recorrer a material concreto. O pensamento genérico oportunizado por esta atividade é preparatório para a discussão que se pretende encaminhar sobre a caracterização de frações equivalentes.

Nas próximas atividades, pretende-se aplicar a técnica sugerida a partir da Atividade 25 para chegar a uma caracterização das frações equivalentes, no caso:

Duas frações $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *são equivalentes (iguais, para os estudantes) se e só se ad=bc,*

bem como à sua demonstração. A relevância de se trabalhar essa demonstração com os estudantes está no fato de ela "promover maior compreensão" (HANNA, 1989, p.23), na nossa opinião. Além disso, a ideia embutida nesta demonstração (a mesma utilizada nas Atividades 25 e 26) será reutilizada na comparação e nas operações de adição e subtração, por isso estamos incluindo neste trabalho essas operações.

Atividade 28 - Quem será maior $\frac{4}{6}$ ou $\frac{6}{9}$?

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

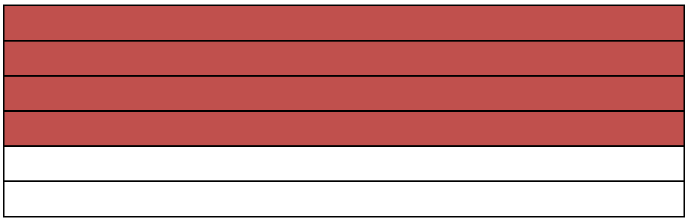
- ✓ Identificar uma estratégia para reconhecer se duas dadas frações são ou não equivalentes (iguais, na linguagem dos alunos), agora sem apoio de material concreto;
- ✓ Reconhecer a caracterização de frações equivalentes, agora sem o material concreto, envolvendo o pensamento genérico. Em outras palavras, perceber que duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes (iguais, para os estudantes) se e só se $a \times d = b \times c$.

Momento do Professor**:** A atividade 28 busca sistematizar a técnica para reconhecer se duas frações são ou não equivalentes (no caso, sim), sem a utilização de material concreto, além de reiterar que a certeza sobre a comparação das frações dadas, pode ser obtida por meio de frações equivalentes às dadas e com denominadores iguais.

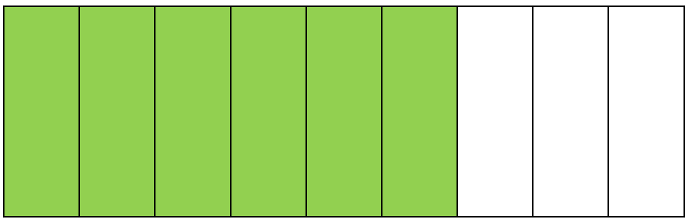
O professor deve orientar os alunos a relembrarem o que foi feito na atividade anterior, caso a iniciativa não venha deles, esperando que os estudantes atinem a fazer uso da técnica de subdividir cada $\frac{1}{6}$ em nove pedaços iguais e cada $\frac{1}{9}$ em seis pedaços iguais, obtendo uma equipartição da unidade em 54 partes em cada representação da unidade, como apresentamos no quadro 4:

Quadro 4 – Comparando as frações

comparando as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$

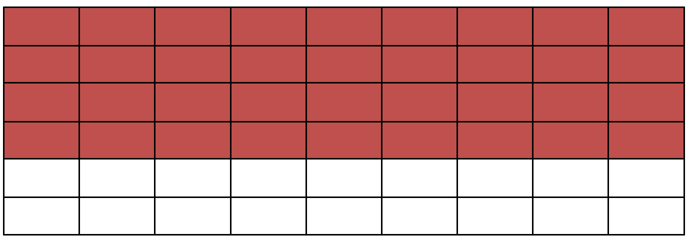


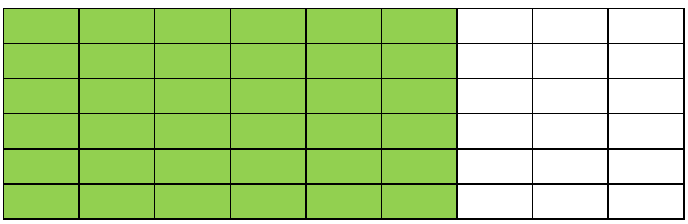
$\frac{4}{6}$ *da unidade*



$\frac{6}{9}$ *da unidade*

Subdividindo cada um sexto ($\frac{1}{6}$) em 9 partes iguais e cada um nono ($\frac{1}{9}$) em 6 partes iguais, obtemos, afin duas unidades equiparticionadas em 6×9=54 partes.





Portanto, $\frac{4}{6}$ e $\frac{36}{54}$ são iguais, bem como $\frac{6}{9}$ e $\frac{36}{54}$.

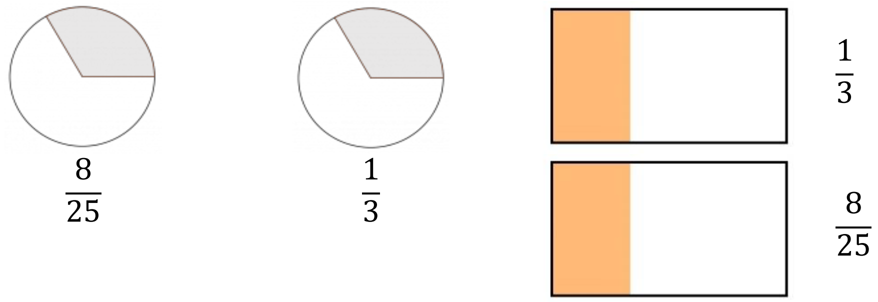
Concluímos que as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ ambas representam a mesma quantidade da unidade, portanto

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}.$$

Fonte: Acervo da autora (2019).

Atividade 29 (questão adaptada do Livro Aberto, Lição 4) –

As figuras abaixo, apresentam duas representações diferentes para as frações $\frac{8}{25}$ e $\frac{1}{3}$. Elas *parecem* representar a mesma quantidade da unidade círculo ou da unidade retângulo. Como podemos decidir se elas são ou não iguais?



Fonte: Ripoll *et al.* (2017, p. 54).

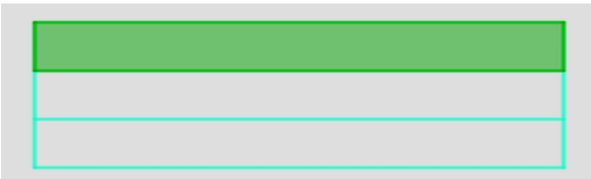
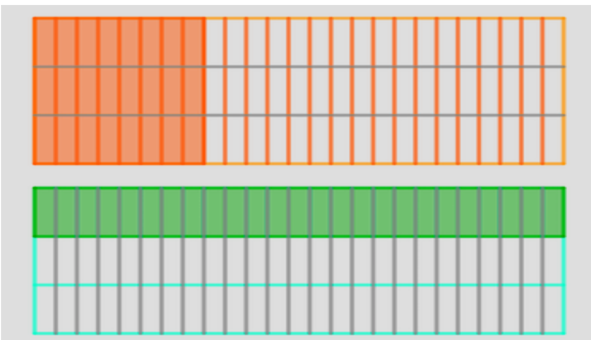
<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Identificar uma estratégia para reconhecer se duas dadas frações são ou não equivalentes, agora não mais apoiando-se em material concreto;
- ✓ Reconhecer a caracterização de frações equivalentes, agora sem o material concreto, mas ainda envolvendo um exemplo;
- ✓ Reconhecer a necessidade de se ter uma caracterização de frações equivalentes, percebendo que duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes (iguais, para os estudantes) se e só se $a \times d = b \times c$.

<u>Momento do Professor</u>**:**

Nessa atividade, as figuras mostram bastante semelhança entre as frações, dando aos alunos a falsa ideia de que as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$ são equivalentes (para os estudantes, iguais). Continua-se aqui trabalhando frações equivalentes e a "técnica" sugerida com as atividades anteriores para trabalhar com a caracterização das frações equivalentes. Porém é com esta atividade que pretende-se convencer o estudante que nem sempre modelos visuais podem enganar por não serem precisos o suficiente. De fato, torna-se natural aqui ressaltar a importância da utilização de uma "estratégia" para certificar-se sobre a comparação das frações, salientando que a comparação não pode ser feita apenas através do "observe e veja o que acontece"(apreensão perceptiva), porque, além de nem sempre ser fácil construir uma representação para uma fração (como nesta atividade bem como na anterior, por exemplo), devemos ter certeza sobre o que afirmamos em matemática. Como fechamento da atividade, sugere-se que o professor lance a pergunta: "Afinal, então, o que podemos fazer quando quisermos comparar duas frações quaisquer?”, estimulando assim o pensamento genérico dos estudantes, obtendo uma demonstração, ainda que somente oral, de uma caracterização para a comparação entre frações, em particular uma caracterização para frações equivalentes. A seguir, se a turma aceitar uma notação simbólica para frações na forma $\frac{a}{b}$, esta demonstração pode ser registrada em palavras no quadro, apoiada por um exemplo, como no quadro 5.

Quadro 5 – Comparação entre as frações $\frac{8}{25}$ e $\frac{1}{3}$

<table>
<tr><th>Comparando as frações $\frac{8}{25}$ e $\frac{1}{3}$</th><th>Generalização</th></tr>
<tr><td>
$\frac{8}{25}$ da unidade

$\frac{1}{3}$ da unidade</td><td>Supondo que queiramos comparar as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ de uma mesma unidade.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Podemos comparar as duas frações que não têm o mesmo denominador por meio de frações iguais a elas que tenham mesmo denominador.</td></tr>
<tr><td>Subdividindo cada vinte cinco avos em 3 partes iguais e cada terço em 25 partes iguais, obtemos, afinal, duas unidades equiparticionadas em 25 × 3 = 75= 3×25 partes.

Temos, então, $\frac{8}{25}$ e $\frac{8\times3}{25\times3}=\frac{24}{75}$ são iguais, bem como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1\times25}{3\times25}=\frac{25}{75}$.</td><td>Se subdividirmos cada b-ésima parte em d partes iguais e cada d-ésima parte em b partes iguais, obtemos, afinal, duas unidades equiparticionadas em bd partes.

Temos então que $\frac{a}{b}$ e $\frac{a\times d}{b\times d}$ são frações iguais, bem como $\frac{c}{d}$ e $\frac{b\times c}{b\times d}$.</td></tr>
</table>

Ora, $\frac{24}{75}$ e $\frac{25}{75}$ são frações de mesmo denominador. Logo, a comparação das frações pode ser feita a partir da comparação dos numeradores dessas frações Como 25 > 24, concluímos que $$\frac{1}{3} = \frac{25}{75} > \frac{24}{75} = \frac{8}{25},$$ ou seja, $$\frac{1}{3} > \frac{8}{25}$$	Ora, $\frac{a\times d}{b\times d}$ e $\frac{b\times c}{b\times d}$ são frações de mesmo denominador. Logo, a comparação das frações pode ser feita a partir da comparação dos numeradores dessas frações ($a \times d$ e $b \times c$); em particular, as frações só serão iguais se seus numeradores forem iguais, ou seja, só se $a \times d = b \times c$. Ou seja: $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são frações iguais se e só se $a \times d = b \times c$.

No que segue, pretende-se sedimentar a equivalência, aplicando-a inicialmente em comparação (Atividade 30) e, na sequência, em adição e subtração de frações, primeiramente considerando resultados menores do que a unidade (Atividade 31), e, a seguir, motivando o estudante a fazer uso de representação pictórica para resolver as questões de adição e subtração de frações cujos resultados são maiores do que a unidade.

Atividade 30 –

Dados os pares de frações abaixo, verifique se são ou não iguais, justificando sua resposta; no caso das frações que não iguais, decidir qual delas é a maior.

Complete os espaços "____" entre as frações, usando os símbolos "=", "<" ou ">".

$a)\ \frac{13}{4}\ \_\_\ \frac{9}{4}$ $\quad b)\ \frac{15}{2}\ \_\_\ \frac{15}{7}$ $\quad c)\ \frac{1}{7}\ \_\_\ \frac{2}{14}$ $\quad d)\ \frac{10}{4}\ \_\_\ \frac{15}{6}$

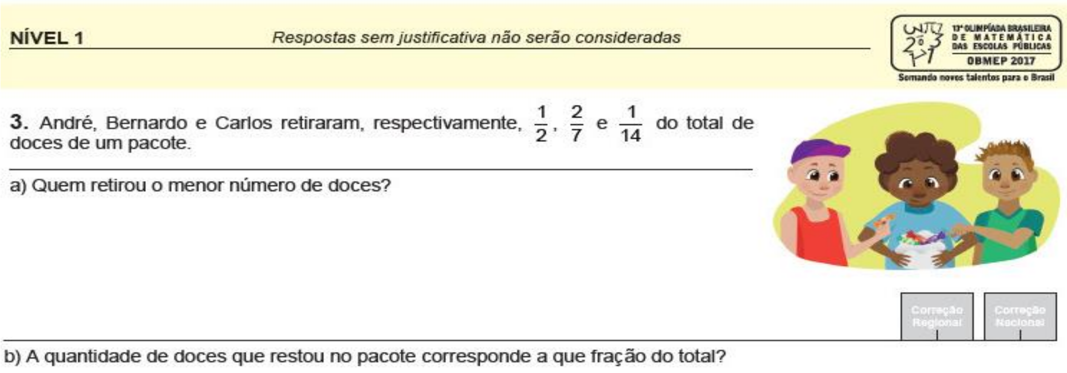
$e)\ \frac{11}{4}\ \_\_\ \frac{4}{3}$ $\quad f)\ \frac{2}{5}\ \_\_\ \frac{3}{7}$ $\quad g)\ \frac{16}{20}\ \_\_\ \frac{24}{30}$ $\quad h)\ \frac{65}{91}\ \_\_\ \frac{5}{7}$

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Aplicar a caracterização de frações equivalentes (iguais, para os estudantes):
- ✓ duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes (iguais, para os estudantes) se e só se $a\times d=b\times c$;
- ✓ Perceber que se $a\times d \neq b\times c$, para duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, então estas frações não são equivalentes (iguais, para os estudantes);
- ✓ Saber decidir, entre duas frações não equivalentes (não iguais, para os estudantes) qual delas é a maior.

<u>Momento do Professor</u>**:** A ideia nessa atividade é estimular o raciocínio e argumentos dos alunos e não a regra. Por isso, sugere-se que o professor fique atento para as estratégias utilizadas pelos estudantes, registrando no quadro os procedimentos que eles utilizaram e as diferentes argumentações que apareceram para cada item, bem como a resposta (conclusão) encontrada. Cabe salientar que a caracterização trabalhada na atividade anterior não é essencial em todos os itens (por exemplo, nos três primeiros).

Atividade 31- (Questão adaptada da OBMEP, 2017, nível 1)


NÍVEL 1 — *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

3. André, Bernardo e Carlos retiraram, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{14}$ do total de doces de um pacote.

a) Quem retirou o menor número de doces?

b) A quantidade de doces que restou no pacote corresponde a que fração do total?

c) Se afinal havia 70 doces no pacote, quanto doces retirou cada menino?

<u>Objetivos específicos</u> - Levar o aluno a:

- ✓ Comparar frações utilizando a caracterização das frações equivalentes;
- ✓ Entender as operações de adição e de subtração com frações como de mesmos significados das respectivas operações com números naturais (a saber juntar ou acrescentar para a adição e retirar, completar ou comparar para a subtração) e, a partir do resgate dessas interpretações, realizar tais operações;
- ✓ Utilizar frações equivalentes para resolver adição e subtração de frações.

<u>Momento do Professor</u>**:** Esta atividade, além de tratar da comparação entre três frações, estimula a representação pictórica de barras, uma vez que não é dado o total de doces, portanto a representação no discreto fica mais complexa.

O item (*a*) pode envolver a aplicação da técnica utilizada na demonstração do Teorema de Caracterização de Frações Equivalentes. O item (*b*) deve ser um pouco mais desafiador, por envolver adição com três frações e, na sequência, uma subtração. O item (*c*) pode ser proposto só depois de resolvidos os itens (*a*) e (*b*) para que o estudante seja estimulado a resolver os primeiros itens com uma unidade abstrata.

Atividade 32 – Na cafeteria em que Lúcia trabalha é vendido bolo de cenoura, de segunda a sexta-feira. Lúcia anotou a quantidade de bolo de cenoura vendida em certa semana.

Dia da semana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
Parte de bolo vendida	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$

Com base nos valores da tabela:

a) Faça uma representação da quantidade total de bolo de cenoura vendida de segunda a sexta.
b) Registre na forma de adição de frações e calcule a quantidade total de bolo vendida.
c) Para a semana seguinte, supondo que as vendas permaneçam semelhantes, quantos bolos deverão ser preparados? Explique sua resposta.
d) Ao final da semana, Lúcia levou o que restou de bolo de cenoura para casa. Que fração de bolo ela levou?

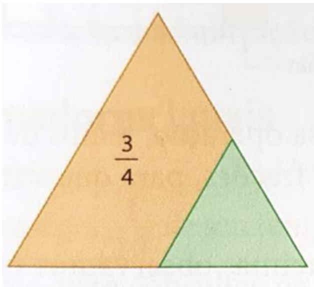
Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Utilizar representação pictórica para trabalhar com adição de frações de mesmo denominador que são maiores do que uma unidade;
- ✓ Entender as operações de adição e de subtração com frações como de mesmos significados das respectivas operações com números naturais (a saber juntar ou acrescentar para a adição e retirar, completar ou comparar para a subtração) e, a partir do resgate dessas interpretações, realizar tais operações.
- ✓ Trabalhar com frações maiores do que a unidade considerada e compará-las com a unidade.

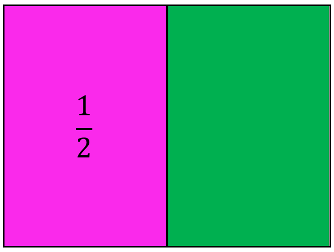
Momento do Professor**:** Até aqui a adição e a subtração de frações de mesmo denominador foram introduzidas sem chamar-se grande atenção para elas. Valemo-nos para isso do fato de as interpretações dessas operações continuarem sendo as mesmas da adição e da subtração com números naturais (juntar e acrescentar para a adição e retirar, comparar e completar para a subtração). A Atividade 32 trabalha com frações de mesmo denominador, porém maiores do que a unidade.

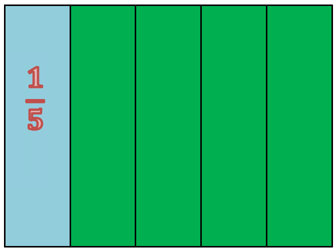
Atividade 33 - (Questão adaptada do livro texto da turma – Projeto Araribá, 6ºano, pg.158,

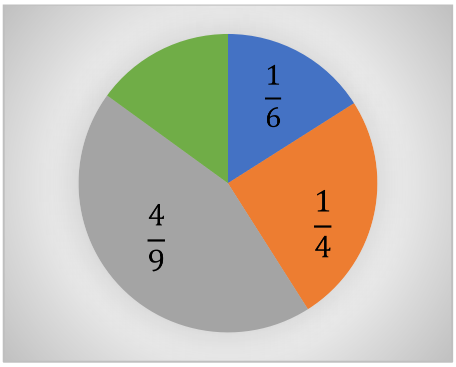
atividade 6)
Que fração da figura representa a parte pintada de verde em cada item?

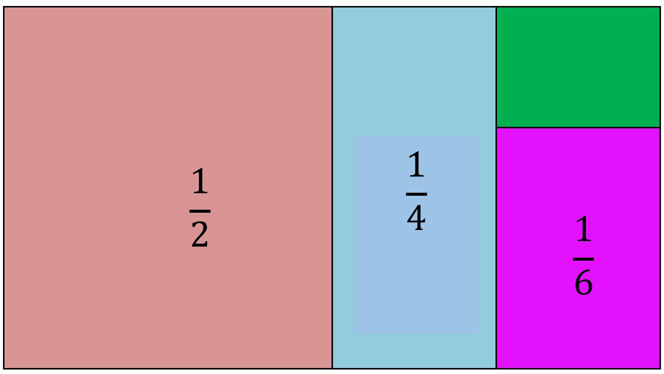
a) 

b) Considerando um retângulo como a unidade,





c) 

d) 

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Efetuar adição e subtração de frações de denominadores diferentes;
- ✓ Efetuar adição que tem para resultado uma fração maior do que a unidade.

Momento do Professor**:** Sugere-se que, já que, com exceção do item (a), a resolução de cada item envolve duas etapas de pensamento (uma adição e uma subtração), o raciocínio seja organizado antes de proceder-se aos cálculos, tentando assim evitar que o estudante se perca com tantas contas. Por exemplo, para os itens *(c)* e *(d)*, como primeira etapa deve-se resolver $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$, para depois subtrair-se da unidade esta quantidade, que será então a resposta ao problema; só então sugere-se passar-se a fazer os cálculos. Ressaltamos que, no item *(b)*, aparecem frações maiores que um inteiro, quando os estudantes procedem à quantidade total de verde dos dois retângulos juntos.

Atividade 34 – (Questão adaptada do livro texto da turma – Projeto Araribá, 6ºano, p. 157)

Paulo e Clara decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Paulo já contribuiu com $\frac{1}{6}$ do total de figurinhas e Clara já contribuiu com $\frac{1}{4}$ do total de figurinhas.

a) Eles contribuíram com a mesma quantidade de figurinhas? Explique a sua resposta.

b) Quem contribuiu com a maior quantidade de figurinhas até o momento?

c) Que fração do total de figurinhas representa a diferença entre a quantidade de figurinhas de Paulo e Clara?

d) Que fração do total de figurinhas Paulo e Clara juntaram?

e) Que fração do total de figurinhas falta a Paulo e Clara para completar o álbum?

Objetivos específicos - Levar o aluno a:

- ✓ Comparar frações unitárias de denominadores diferentes;
- ✓ Efetuar a adição e subtração de frações de denominadores diferentes, com ou sem o uso de representação pictórica, sem necessariamente aplicar a técnica explicitada na demonstração do Teorema de Caracterização das Frações Equivalentes, envolvendo grandeza discreta.

<u>Momento do Professor</u>: Esta é uma atividade de fechamento, que explora o conceito de fração unitária e não unitária, comparação, adição esubtração entre frações, bem como equivalência em uma situação do dia a dia dos estudantes.

Sugere-se ao professor atentar para as estratégias de desenvolvimento utilizada pelos alunos, pois nem sempre é necessário ou mais rápido apelar-se para a equivalência de frações, bem como observar se já é natural para o aluno, neste momento, buscar por um denominador comum entre duas frações dadas e de usar esse denominador para resolver a adição e a subtração envolvidas nesta atividade. Por exemplo, nos itens *(a) e (b),* a relação entre o número de partes da equipartição e o tamanho de cada parte é um raciocínio mais rápido e elementar do que a equivalência. Sugere-se ao professor estimular os estudantes a fazerem uso da notação simbólica, por exemplo, registrar $\frac{1}{6} + \frac{1}{4}$ na resolução do item *(d)*. No item *(c)*, sugere-se ao professor atentar se os estudantes estão fazendo uso da subtração para comparar as duas quantidades. O desenvolvimento pode ser realizado por representação pictórica, mas recomenda-se que o professor incentive o uso da técnica explicitada na demonstração do Teorema de Caracterização das Frações Equivalentes.