



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estimação e Previsão em Processos Advindos da Solução da Equação de Langevin Generalizada com Ruído α -Estável

Tese de Doutorado

Josiane Stein

Porto Alegre, 2015.

Tese submetida por Josiane Stein* ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora:

Dra. Sílvia Regina Costa Lopes (PPGMAT - UFRGS)

Comissão Examinadora:

Professor Dr. Ary Vasconcelos Medino (UNB)

Professor Dr. Cleber Bisognin (UFRGS)

Professor Dr. Márcio Valk (UFRGS)

Dra. Taiane Schaedler Prass

Data de Apresentação: 15 de dezembro de 2015.

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino de qualidade e excelentes professores.

A todos professores que tive, devo a eles tudo que sei. Em especial, quero agradecer à minha orientadora Professora Sílvia R.C. Lopes, por ter acreditado na minha capacidade para realizar este trabalho. Além disso, pela orientação, compreensão, paciência e dedicação ao trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, pelas inúmeras horas de estudo em conjunto, companheirismo, atenção e amizade.

Aos amigos, que compreenderam minha ausência em muitos momentos, sempre me apoiaram, deram força para eu nunca desistir e estiveram sempre presente nas alegrias e tristezas.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado em todas as minhas decisões, pelo incentivo, compreensão, carinho, confiança, dedicação, enfim, por tudo.

RESUMO

Neste trabalho estudamos uma classe de processos a tempo contínuo advinda da solução da equação de Langevin generalizada. Consideramos para o ruído um processo de Lévy. Para fins de simulação, restringimos o ruído a um processo de Lévy α -estável. Apresentamos um estudo de algumas medidas de dependência que possam substituir a função de autocovariância, no caso α -estável. Consideramos três diferentes medidas de dependência: codiferença, covariância espectral e covariação e provamos diversos resultados relativos a elas. Além disso, apresentamos um estudo de simulações para exemplos de processos desta classe, mostrando sua geração, sua codiferença e covariância espectral teóricas e empíricas. Provamos propriedades teóricas para os processos em estudo, considerando ruídos do tipo movimento Browniano, α -estável e Lévy. Propomos procedimentos de estimação dos parâmetros baseados em mínimos quadrados, máxima verossimilhança e metodologia Bayesiana considerando o processo solução da equação de Langevin clássica, ou seja, o processo Ornstein-Uhlenbeck, e o chamado processo Cosseno. Para obter a previsão de processos α -estáveis estacionários, utilizamos dois preditores lineares: um baseado na dispersão e outro na covariação. Por fim, apresentamos aplicações a duas séries temporais: mortalidade cardiovascular na cidade de Los Angeles e preços das ações da companhia Apple.

ABSTRACT

In this work we present a class of continuous-time processes arising from the solution of the generalized Langevin equation. We consider Lévy process as the noise. We restrict it as α -stable Lévy motion for simulation purposes. We present a study of some dependence measures in order to replace the autocovariance function in the α -stable context. We consider three different dependence measures: codifference, spectral covariance and covariation and we prove some results related to them. We also present a simulation study for particular processes arising from this class showing the generation, the theoretical and empirical counterpart for both codifference and spectral covariance measures. We prove theoretical properties for the processes under study, considering the noise as the Brownian motion, α -stable and Lévy type. We propose parameter estimation procedures based on least squares, maximum likelihood and Bayesian methodology considering the process arising from the classical Langevin equation, i.e., the Ornstein-Uhlenbeck process, and the so-called Cosine process. For prediction in stationary α -stable processes, we consider two linear predictors, one based on the dispersion and the other based on the covariation. We present two application analyses based on the cardiovascular mortality in Los Angeles city and on the price of Apple company's stock market.

Índice

1	Introdução	1
2	Processo Tipo OU Generalizado	4
2.1	Preliminares	4
2.2	Medidas de Dependência	7
2.2.1	Codiferença	8
2.2.2	Covariância Espectral	15
2.2.3	Covariação	17
2.3	Definição e Propriedades do Processo Tipo OU Generalizado	18
2.3.1	Exemplos	24
3	Propriedades Teóricas	49
3.1	Diferentes Ruídos: Movimento Browniano, α -estável e Lévy	49
3.2	Processo Particular (Klebaner, 2005)	65
3.3	Processo Linear Fracionário Bem-Balanceado com Ruído α -estável	71
4	Estimação	76
4.1	Discretização Euler-Maruyama	76
4.2	Estimação de Máxima Verossimilhança	81
4.2.1	Processo OU	81
4.2.2	Processo Cosseno	82

4.3	Estimação de Mínimos Quadrados	82
4.3.1	Processo OU	82
4.3.2	Processo Cosseno	94
4.4	MLE Iterativo para o Processo Cosseno	97
4.5	Estimação para o Processo Linear Fracionário Bem-Balanceado com Ruído α -estável	99
4.6	Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Movimento Browniano	99
4.6.1	Processo OU	104
4.6.2	Processo Cosseno	105
4.7	Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Lévy α -Estável	106
4.7.1	Processo OU	108
4.7.2	Processo Cosseno	109
5	Previsão	111
5.1	Preditor Baseado na Dispersão	112
5.2	Preditor Baseado na Covariação	124
6	Simulações	142
6.1	Estimação de Máxima Verossimilhança	142
6.1.1	Processo OU	142
6.1.2	Processo Cosseno	143
6.2	Estimação de Mínimos Quadrados	146
6.2.1	Processo OU	146
6.2.2	Processo Cosseno	148
6.3	MLE Iterativo para o Processo Cosseno	156
6.4	Estimação para o Processo Linear Fracionário Bem-Balanceado com Ruído α -estável	160

6.5	Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Movimento Browniano	163
6.5.1	Processo OU	163
6.5.2	Processo Cosseno	165
6.6	Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Lévy α -Estável	167
6.6.1	Processo OU	167
6.6.2	Processo Cosseno	172
7	Aplicações	175
7.1	Mortalidade por Problema Cardiovascular na Cidade de Los Angeles .	175
7.2	Preços das Ações da Companhia Apple	180
8	Conclusões	185
	Referências Bibliográficas	188
	Apêndices	194
A	Lema que Generaliza o Exemplo 3.1	194
B	Figuras Adicionais do Processo com Longa Dependência	199
C	Estimação Robusta de Mínimos Quadrados para o Processo Cosseno	206
D	MLE Iterativo para o Processo Cosseno	211
E	Artigo Stein, Lopes e Medino (2015)	218

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudamos processos advindos da solução da equação de Langevin generalizada. A equação de Langevin generalizada é uma equação diferencial estocástica que pode ser utilizada em diversos tipos de aplicações. Na perspectiva de séries temporais, pode ser utilizada para modelar séries temporais financeiras (ver Barndorff-Nielsen e Shephard, 2002). Outras aplicações também foram estudadas, tais como o crescimento de alguns tumores (ver Mei et al., 2004), para modelar a permeação de íons através de canais iônicos biológicos (ver Gordon et al., 2009) e a velocidade relativa de duas partículas em fluido com turbulência homogênea e estacionária (ver Heppe, 1998).

A equação de Langevin clássica foi inicialmente introduzida por Langevin (1908), ao modelar o movimento irregular e imprevisível de uma partícula imersa em meio fluido, sujeita a choques aleatórios com as moléculas do fluido e com a parede do recipiente. O processo estocástico solução desta equação é o chamado processo Ornstein-Uhlenbeck, nome dado em homenagem aos físicos Leonard Ornstein e George Eugene Uhlenbeck.

Na tentativa de considerar situações mais gerais e realísticas, uma generalização do modelo proposto por Langevin surgiu com Mori (1965a,b) e com Kubo (1966). Esta generalização ficou conhecida como equação de Langevin generalizada. A principal diferença entre a equação de Langevin clássica e a generalizada, é que na generalizada considera-se uma função memória, capaz de captar de forma mais eficiente a evolução do movimento. Esta equação foi estudada por Kannan (1977) considerando o processo de flutuação ou ruído como sendo um martingal quadrado integrável. Neste caso, Kannan (1977) apresenta uma forma explícita, em média quadrática, para o processo solução da equação de Langevin generalizada. A tese

elaborada por Santos (2011) apresenta uma solução para esta equação considerando ruído determinado por um processo Lévy α -estável, quando $1 < \alpha \leq 2$.

A fim de estender a abordagem utilizada na equação de Langevin generalizada, propomos estudar processos advindos da sua solução. Consideramos o ruído dado por um processo de Lévy, restringindo-o a Lévy α -estável para fins de simulação e estimação. Os processos em estudo são apresentados na Definição 2.4 e chamados de processos tipo OU generalizados. Esta ideia estende o trabalho prévio de Medino et al. (2012). Outro objetivo é estudar a estrutura de dependência dos processos em questão, visto que a função de autocovariância não está bem definida no caso de processos com segundo momento infinito. Estudamos o uso da função codiferença como medida de dependência para processos α -estáveis. A função codiferença que utilizamos está relacionada com a definição introduzida pela primeira vez em Astrauskas (1983). Posteriormente, a função codiferença foi muito estudada, pelos autores Kokoszka e Taqqu (1994 e 1995), Rosadi e Deistler (2009) e Nowicka (1997), no contexto de processos lineares. Além disso, consideramos medidas de dependência alternativas. A função covariância espectral, introduzida por Paulauskas (1976) e revisitada posteriormente em Damarackas e Paulauskas (2014). Também utilizamos a função covariação, com sua definição dada em Mohammadi e Mohammadpour (2009).

A estimação dos parâmetros do processo também é abordada. Propomos a estimação para casos particulares dos processos estudados, o processo solução da equação de Langevin clássica, ou seja, o processo Ornstein-Uhlenbeck, e o chamado processo Cosseno. Consideramos a estimação baseada em mínimos quadrados, máxima verossimilhança e na metodologia Bayesiana. Desejamos também obter a previsão para processos α -estáveis estacionários, para isso, utilizamos dois preditores lineares. O preditor baseado na dispersão, proposto por Cline e Brockwell (1985), minimiza o erro de dispersão. O preditor proposto por Mohammadi e Mohammadpour (2009) baseia-se na covariação e pode ser obtido resolvendo um sistema linear.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 inicia apresentando preliminares do processo e definições básicas. Em seguida, definimos as medidas de dependências consideradas: codiferença, covariância espectral e covariação. Provamos a consistência da codiferença empírica para processos estacionários α -estáveis simétricos. Definimos o processo tipo OU generalizado e provamos proposições para as expressões teóricas das medidas de dependência dos processos em análise. Apresentamos um estudo de simulações para exemplos de processos desta

classe, mostrando sua geração, as respectivas funções de codiferença e covariância espectral teórica e empírica.

O Capítulo 3 trata de propriedades teóricas relativas à classe de processos descritos no Capítulo 2. Consideramos três diferentes tipos de processos para o ruído: Movimento Browniano, α -estável e Lévy. Provamos diversas proposições envolvendo esperança, variância, distribuição, autocovariância, estacionariedade e propriedade de Markov. Além disso, na Seção 3.2 propomos um processo com longa dependência, encontramos as expressões teóricas para suas medidas de dependência e uma forma discreta. Na Seção 3.3 apresentamos outro processo com longa dependência, proposto por Samorodnitsky e Taqqu (1994), denotado por WBLFS, e provamos algumas de suas propriedades e sua discretização.

O Capítulo 4 apresenta a estimação dos parâmetros do processo Ornstein-Uhlenbeck e Cosseno. Iniciamos o capítulo tratando da discretização Euler-Maruyama. Apresentamos a estimação de máxima verossimilhança. Consideramos a estimação de mínimos quadrados no processo Ornstein-Uhlenbeck e apresentamos a prova da consistência e a distribuição assintótica do estimador. Apresentamos a estimação de mínimos quadrados no processo Cosseno, considerando duas diferentes discretizações: a Euler-Maruyama e a discretização proposta na Proposição 2.6. Ainda propomos um algoritmo iterativo para a estimação de máxima verossimilhança do processo Cosseno. Também mostramos o procedimento de estimação para o processo WBLFS. Por fim, apresentamos a estimação utilizando a metodologia Bayesiana.

O Capítulo 5 trata da previsão para processos estacionários α -estáveis. Aplicamos essa metodologia ao processo Ornstein-Uhlenbeck, visto que os demais não são estacionários. Consideramos um preditor baseado na dispersão e outro na covariância.

O Capítulo 6 apresenta um estudo de simulações realizadas, utilizando os procedimentos de estimação dos parâmetros descrito no Capítulo 4.

O Capítulo 7 mostra duas aplicações a séries reais. Uma delas descreve a mortalidade cardiovascular na cidade de Los Angeles entre os anos de 1970 e 1979, observadas semanalmente. A outra série descreve os preços das ações da companhia Apple entre 2010 e 2014, observadas a cada minuto.

As conclusões finais são apresentadas no Capítulo 8.

Capítulo 2

Processo Tipo OU Generalizado

Neste capítulo apresentamos os processos advindos da solução da equação de Langevin generalizada, alvo de estudos deste trabalho. Na Seção 2.1 mostramos resultados conhecidos e preliminares, na Seção 2.2 apresentamos resultados novos relativos a medidas de dependência, que podem ser utilizadas em processo α -estáveis, e na Seção 2.3 apresentamos a generalização dos processos em questão e exemplos. Provamos diversos resultados novos em todas as seções deste capítulo. Sempre que não houver indicação de referência precedente ao resultado, estamos tratando de um resultado novo.

2.1 Preliminares

A equação de Langevin clássica define um processo estocástico contínuo e foi introduzida por Langevin (1908) para modelar a dinâmica do movimento de uma partícula imersa em meio fluido. Ela é dada por

$$\begin{cases} dV(t) = -\theta V(t)dt + dL(t) \\ V(0) = V_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\theta > 0$ é uma constante de atrito e $L(\cdot)$ uma força aleatória, representa um ruído e é dado por algum processo estocástico a tempo contínuo.

Se $L(\cdot)$ for o movimento Browniano, esta equação pode ser resolvida aplicando métodos de transformada de Laplace (ou fórmula de Itô). Sob esta perspectiva, a

solução de (2.1), para $t \geq 0$, é dada por

$$V(t) = V_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dL(s). \quad (2.2)$$

O processo estocástico solução $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, dado em (2.2), é chamado processo Ornstein-Uhlenbeck (OU). É muito utilizado para modelar séries temporais financeiras, tais como taxas de juros, taxas de câmbios, etc. Quando $L(\cdot) = B(\cdot)$, onde $B(\cdot)$ representa o movimento Browniano padrão, o processo OU foi estudado por diversos autores. Um resultado bem conhecido sobre o processo OU Gaussiano é a sua propriedade de estacionariedade quando $V_0 \sim \mathbb{N}(0, \sigma_0^2)$, onde $\sigma_0^2 = \frac{1}{2\theta}$, veja Karatzas e Shreve (1988).

Em 1965, surgiu uma generalização do modelo proposto por Langevin, com Hazime Mori, e em 1966, com Ryogo Kubo, que ficou conhecida como equação de Langevin generalizada (ELG). Tal equação é dada por

$$\begin{cases} dV(t) = - \int_0^t \gamma(t-s) V(s) ds dt + dL(t) \\ V(0) = V_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de ruído e V_0 é uma variável aleatória independente de $L(t)$.

Na equação (2.3), $\gamma(\cdot)$ é chamada de *função memória*. Considerando

$$\gamma(t-s) = \theta \delta(t-s) = \begin{cases} \theta, & \text{se } t = s \\ 0, & \text{se } t \neq s, \end{cases} \quad (2.4)$$

recaímos na equação (2.1).

A ELG foi estudada por Kannan (1977) considerando-se que o processo de ruído tenha segundo momento finito. Neste caso, toda solução em média quadrática, $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, tem a forma

$$V(t) = V_0 \rho(t) + \int_0^t \rho(t-s) dL(s), \quad (2.5)$$

onde V_0 é o processo definido em $t = 0$, ou seja, $V_0 \equiv V(0)$, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo de ruído e $\rho(\cdot)$ é uma função determinística satisfazendo a equação integro-diferencial

de Volterra, dada por

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \gamma(t-s)\rho(s) ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Neste trabalho iremos considerar o processo de ruído $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ dentro de classe dos processos de Lévy, que são descritos na Definição 2.1 a seguir.

Definição 2.1. Um processo estocástico $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é dito *processo de Lévy* se satisfazer as seguintes condições:

- $L(0) \equiv 0$ q.c.
- $L(\cdot)$ tem incrementos independentes e estacionários, ou seja, para todo $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, as variáveis aleatórias $L(t_0)$, $L(t_1) - L(t_0), \dots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ são independentes e $L(t+h) - L(t)$ tem a mesma distribuição que $L(h)$, para todo $h > 0$.
- $L(\cdot)$ é contínuo em probabilidade, ou seja, dado $t \geq 0$ e $\delta > 0$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|L(t+h) - L(t)| > \delta) = 0.$$

Sob as condições acima, a variável aleatória $L(1)$ tem distribuição infinitamente divisível e sua função característica é dada por

$$\varphi(x) = e^{-\psi(x)},$$

onde $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dito ser o expoente característico de $L(1)$.

Para fins de simulação e estimação iremos utilizar um caso particular de processo de Lévy, chamado processo de Lévy α -estável, definido a seguir.

Definição 2.2. Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é dito *Lévy α -estável* se $L(1) \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$, onde $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ é a notação utilizada para designar uma variável aleatória α -estável. Esta é unicamente determinada pela sua função característica, dada por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^\alpha |x|^\alpha \left(1 - i\beta \text{sign}(x) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) + i\mu x \right\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ -\sigma |x| \left(1 - i\beta \text{sign}(x) \frac{2}{\pi} \ln |x| \right) + i\mu x \right\}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases}$$

onde $\alpha \in (0, 2]$ é o índice de estabilidade; $\sigma \in (0, \infty)$ é o parâmetro de escala; $\beta \in [-1, 1]$ é o parâmetro de simetria e $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de deslocamento.

Observação 2.1. (a) Se $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy padrão α -estável ($\beta = 0$), então o expoente característico de $L(1)$ é dado por $\psi(x) = |x|^\alpha$;

(b) Pela Definição 2.2, obtemos a distribuição de $L(t)$, para todo $t > 0$. Seja $\Phi_t(\cdot)$ a função característica da variável aleatória $L(t)$, então pelo teorema 4.9 em Papapantoleon (2008),

$$\Phi_t(x) = (\Phi_1(x))^t = \begin{cases} \exp \left\{ -(t^{1/\alpha})^\alpha |x|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(x) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ -(t)|x| \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(x) \frac{2}{\pi} \ln |x| \right) \right\}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases}$$

logo $L(t) \sim S_\alpha(t^{1/\alpha}, \beta, 0)$. Pela propriedade de incrementos estacionários, obtemos que $L(t) - L(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$, para todo $0 \leq s < t < \infty$.

(c) Uma propriedade muito importante das variáveis α -estáveis é que elas não apresentam segundo momento finito, quando $0 < \alpha < 2$, e nem mesmo primeiro momento finito, quando $0 < \alpha \leq 1$. Essa característica torna inutilizável muitas técnicas válidas para o caso Gaussiano.

(d) Caso $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ seja um processo de Lévy padrão α -estável, com $1 < \alpha \leq 2$, Santos (2011) mostrou que a solução da equação diferencial estocástica (2.3) é também a expressão (2.5).

Lembre que dizemos que uma medida é *Delta de Dirac*, denotada por $\delta_x(B)$, se $\delta_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Logo, $\lambda \delta_1(B) = \lambda \mathbb{I}_B(1)$. Além disso, para toda função contínua $f(\cdot)$, vale que

$$\int f(y) \delta_1(dy) = f(1).$$

2.2 Medidas de Dependência

Nesta seção apresentamos três medidas de dependência. Elas podem ser utilizadas mesmo em processos que não possuem segundo momento finito e são chamadas de: *codiferença*, *covariância espectral* e *covariação*. A codiferença teórica e sua empírica são definidas na Subseção 2.2.1. Provamos a consistência da codiferença empírica para processos estacionários α -estáveis simétricos, que satisfaçam certa condição. A covariância espectral é definida na Subseção 2.2.2, em conjunto com sua estimação, baseada na estimação da medida espectral. A covariação é definida na Subseção 2.2.3.

2.2.1 Codiferença

Nesta seção definimos uma medida de dependência para quaisquer processos estocásticos. Primeiramente, definimos essa medida para duas variáveis aleatórias quaisquer. A *codiferença* de X_1 e X_2 é definida como

$$\tau(X_1, X_2) = \ln \left\{ \frac{\mathbb{E}[\exp(i(X_1 - X_2))]}{\mathbb{E}[\exp(i(X_1))] \mathbb{E}[\exp(-i(X_2))]} \right\}. \quad (2.7)$$

A codiferença, definida em (2.7), está relacionada com a função introduzida por Astrauskas (1983). Esta função foi usada novamente por Astrauskas et al. (1991).

Observação 2.2. (a) Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, então $\tau(X_1, X_2) = 0$.

(b) Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias Gaussianas, então $\tau(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, X_2)$.

(c) A função codiferença está bem definida mesmo que o processo não tenha primeiro momento finito. A codiferença foi amplamente estudada para processos lineares em Kokoszka e Taqqu (1994 e 1995).

Se $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico, então a *função codiferença* é dada por

$$\tau_X(k, t) = \tau(X(k), X(t)), \quad (2.8)$$

para $k, t \geq 0$.

Existe uma definição ainda mais geral para a codiferença, similar à definição proposta em Rosadi e Deistler (2009), dada por

$$\begin{aligned} \tau_X(s; k, t) = & \ln \{ \mathbb{E}[\exp(is(X(t+k) - X(t)))] \} - \ln \{ \mathbb{E}[\exp(is(X(t+k)))] \} \\ & - \ln \{ \mathbb{E}[\exp(-is(X(t)))] \}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e $k, t \geq 0$. Então quando $s = 1$, a expressão (2.9) se reduz à (2.8). Utiliza-se s como forma de parametrizar a função codiferença da expressão (2.8).

Observação 2.3. (a) Nesta seção vamos considerar processos estacionários, isto é, para todo $d \geq 0$, $t_1, t_2, \dots, t_d \geq 0$, as distribuições finito-dimensionais do vetor $(X(t_1 + \Delta), X(t_2 + \Delta), \dots, X(t_d + \Delta))$ não dependem de $\Delta \geq 0$. No restante do trabalho, quando não especificarmos outra definição, estaremos considerando este sentido de estacionariedade.

(b) Se $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estacionário, então a expressão (2.9) não depende de t . Nesta situação, a expressão (2.9) será denotada por $\tau_X(s; k)$.

Consideramos o estimador proposto por Rosadi e Deistler (2009) para processos ARMA α -estáveis. Provamos a consistência do estimador para processos estacionários com distribuições finito-dimensionais simétricas α -estáveis. Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estacionário e $\{X_i\}_{i=1}^N$ uma amostra de tamanho N deste processo. Como a função codiferença é definida a partir de funções características, a função codiferença empírica pode ser estimada utilizando funções características empíricas. O estimador da função codiferença no lag k , proposto por Rosadi e Deistler (2009), é dado por

$$\hat{\tau}_X(s; k) = \sqrt{\frac{N-k}{N}} \left[\ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{is(X_{t+k} - X_t)} \right) - \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_{t+k}} \right) - \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{-isX_t} \right) \right], \quad (2.10)$$

para todo $k \in \{0, \dots, N\}$.

A consistência do estimador é apresentada no Teorema 2.1. Precisamos considerar a seguinte condição para garantir a propriedade de consistência:

Condição A: $\tau_X(s; k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Note que a Condição A não é extremamente forte, pois pelo menos processos α -estáveis estacionários que apresentam a propriedade de *mixing* devem satisfazê-la (ver Gross, 1994). Além disso, todos os processos contínuos α -estáveis estacionários de médias móveis também satisfazem esta condição (ver Samorodnitsky e Taquq, 1994). Um exemplo de processo de médias móveis que satisfaz esta condição é o processo Ornstein-Uhlenbeck.

Definimos, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a k -ésima diferença do processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ da seguinte forma

$$W(t) = X(t+k) - X(t). \quad (2.11)$$

Teorema 2.1. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estacionário com distribuição α -estável simétrica, $0 < \alpha \leq 2$, satisfazendo a Condição A. Seja $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido em (2.11) e suponha que ele também satisfaça a Condição A, para todo k fixo. Para $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a função codiferença empírica $\hat{\tau}_X(s; k)$, definida na expressão*

(2.10), é um estimador consistente da função codiferença teórica $\tau_X(s; k)$, quando $N \rightarrow \infty$.

Para mostrar a consistência da codiferença empírica, definida em (2.10), precisamos provar os dois lemas a seguir.

Lema 2.1. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estacionário com distribuição α -estável simétrica, $0 < \alpha \leq 2$, satisfazendo a Condição A. Considere $\Phi_X(s) = \mathbb{E}(e^{isX(t)})$ a função característica de $X(t)$. Para $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$\ln(\hat{\phi}(s; k)) := \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_t} \right)$$

é um estimador consistente para $\ln(\Phi_X(s))$, quando $N \rightarrow \infty$.

Prova: Seja $Y_s(t) := e^{isX(t)}$. Note que o processo $\{Y_s(t)\}_{t \geq 0}$ também será estacionário, pois é função contínua do processo estacionário $\{X(t)\}_{t \geq 0}$. Por simplicidade, iremos mostrar a consistência para $\hat{\phi}^*(s) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{isX_t}$ em vez de $\hat{\phi}(s; k)$.

Temos que $\hat{\phi}^*(s)$ é um estimador não viciado para $\Phi_X(s) = \mathbb{E}(Y_s(t))$. Para mostrar a consistência fraca deste estimador, iremos provar que $Y_s(t)$ é um processo ergódico em média. O processo $Y_s(t)$ é dito ser *ergódico em média* se $\hat{\phi}^*(s) \rightarrow \Phi_X(s)$ em média quadrática. Brockwell e Davis (1991) mostram, no teorema 7.1.1 (p. 218), que uma condição suficiente para isto ocorrer é que sua função de autocovariância convirja para zero, quando $k \rightarrow \infty$. A função de autocovariância de $Y_s(t)$ no lag k pode ser escrita como

$$\begin{aligned} C_{Y_s}(k) &= \text{Cov}(Y_s(t+k), Y_s(t)) = \mathbb{E}(Y_s(t+k)\overline{Y_s(t)}) - \mathbb{E}(Y_s(t+k))\mathbb{E}(\overline{Y_s(t)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{isX(t+k)}e^{-isX(t)}) - |\Phi_X(s)|^2 = |\Phi_X(s)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Note que

$$\exp(\tau_X(s; k)) = \frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})}.$$

Então, temos

$$C_{Y_s}(k) = |\Phi_X(s)|^2 (\exp(\tau_X(s; k)) - 1).$$

Pela Condição A, $C_{Y_s}(k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Como convergência em média quadrática implica em convergência em probabilidade, temos que $\hat{\phi}^*(s) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi_X(s)$,

para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, $\Phi_X(\cdot)$ é uma função real positiva, pois estamos considerando processos estacionários α -estáveis simétricos. Então, podemos concluir que $\operatorname{Re}(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \operatorname{Re}(\Phi_X(s)) = \Phi_X(s)$ e $\operatorname{Im}(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \operatorname{Im}(\Phi_X(s)) = 0$, onde $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ são, respectivamente, as partes reais e imaginárias de $z \in \mathbb{C}$.

Considere o valor principal da função $\ln(\cdot)$ no domínio complexo, esta função será contínua e bem definida em \mathbb{C} menos a reta real negativa. Veja que $\operatorname{Re}(\Phi_X(s)) = \Phi_X(s) > 0$, pois $\Phi_X(s)$ é função característica de uma variável aleatória α -estável simétrica. No enquanto, $\operatorname{Re}(\hat{\phi}^*(s))$ pode ser menor ou igual a zero. Sem perda de generalidade, restringimos a definição das partes real e imaginária de $\ln(\hat{\phi}^*(s))$ apenas na metade positiva do plano complexo, onde $\operatorname{Re}(\hat{\phi}^*(s))$ é maior do que zero, e igual a zero, caso contrário. Assim, dado que $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] &= \ln\{[\operatorname{Re}(\hat{\phi}^*(s))]^2 + [\operatorname{Im}(\hat{\phi}^*(s))]^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln\{[\operatorname{Re}(\hat{\phi}^*(s))]^2 + [\operatorname{Im}(\hat{\phi}^*(s))]^2\} \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{Im}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(\hat{\phi}^*(s))}{\operatorname{Re}(\hat{\phi}^*(s))} \right].$$

Pela continuidade da função logarítmica no domínio considerado, temos que $\operatorname{Re}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] \xrightarrow{\mathbb{P}} \operatorname{Re}[\ln(\Phi_X(s))] = \ln(\Phi_X(s))$ e $\operatorname{Im}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] = \arg(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, quando $N \rightarrow \infty$. Ou seja, $\ln(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \ln(\Phi_X(s))$. Para completar a prova, basta mostrar que $\hat{\phi}^*(s) - \hat{\phi}(s; k) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Veja que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\hat{\phi}^*(s) - \hat{\phi}(s; k)| &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{isX_t} - \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_t} \right| \\ &= \mathbb{E} \left| \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-k} \right) \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_t} + \frac{1}{N} \sum_{t=N-k+1}^N e^{isX_t} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{N} - \frac{1}{N-k} \right| \sum_{t=1}^{N-k} |e^{isX_t}| + \frac{1}{N} \sum_{t=N-k+1}^N |e^{isX_t}| \\ &= \left(\frac{1}{N-k} - \frac{1}{N} \right) (N-k) + \frac{k}{N} = \frac{2k}{N}. \end{aligned}$$

Portanto, quando $N \rightarrow \infty$, $\hat{\phi}^*(s) - \hat{\phi}(s; k) \rightarrow 0$ em média, logo, também converge em probabilidade. □

Observação 2.4. Se X é uma variável aleatória α -estável denotada por $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, então $Y = e^{isX}$ não é variável α -estável, para todo $s \in \mathbb{R}$ fixo. De fato, vamos calcular a variância de Y e ver que ela é finita. Primeiramente considere $\alpha \neq 1$ e note que a esperança de Y é dada por

$$\mathbb{E}(Y) = \exp \left\{ -\sigma^\alpha |s|^\alpha + i \left(\sigma^\alpha |s|^\alpha \beta \text{sign}(s) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) + \mu s \right) \right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))\overline{(Y - \mathbb{E}(Y))}] = \mathbb{E}[(e^{isX} - \mathbb{E}(e^{isX}))(e^{-isX} - \mathbb{E}(e^{-isX}))] \\ &= \mathbb{E}[1 - e^{isX}\mathbb{E}(e^{-isX}) - e^{-isX}\mathbb{E}(e^{isX}) + \mathbb{E}(e^{isX})\mathbb{E}(e^{-isX})] \\ &= 1 - \mathbb{E}(e^{isX})\mathbb{E}(e^{-isX}) - \mathbb{E}(e^{-isX})\mathbb{E}(e^{isX}) + \mathbb{E}(e^{isX})\mathbb{E}(e^{-isX}) \\ &= 1 - e^{-\sigma^\alpha |s|^\alpha + i(\sigma^\alpha |s|^\alpha \beta \text{sign}(s) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) + \mu s)} e^{-\sigma^\alpha |-s|^\alpha + i(\sigma^\alpha |-s|^\alpha \beta \text{sign}(-s) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) - \mu s)} \\ &= 1 - e^{-2\sigma^\alpha |s|^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

O caso $\alpha = 1$ é análogo. Portanto, a expressão (2.12) está bem definida.

No Corolário 2.1 provamos que vale a recíproca do que foi utilizado na prova do Lema 2.1, ou seja, se a função de autocovariância do processo $\{Y_s(t)\}_{t \geq 0}$ convergir a zero, então a função codiferença do processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ também converge a zero.

Corolário 2.1. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estacionário com distribuição α -estável simétrica, $0 < \alpha \leq 2$. Seja $Y_s(t) = e^{isX(t)}$. Suponha que a função de autocovariância do processo $\{Y_s(t)\}_{t \geq 0}$, denotada por $C_{Y_s}(\cdot)$, é tal que $C_{Y_s}(k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Então, a função codiferença $\tau_X(s; k)$, definida na expressão (2.9), é assintoticamente zero, quando $k \rightarrow \infty$.*

Prova: Note que, pela expressão (2.12), temos

$$C_{Y_s}(k) = |\Phi_X(s)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} - 1 \right) \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} - 1 \rightarrow 0 &\iff \frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} \rightarrow 1 \\ &\iff \ln \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} \right) \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Note que o termo do lado esquerdo de (2.13) é $\tau_X(s; k)$. Portanto, $\tau_X(s; k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$.

□

No Lema 2.2 provamos um resultado análogo ao provado no Lema 2.1, mas considerando o processo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$, definido em (2.11).

Lema 2.2. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estacionário com distribuição α -estável simétrica, $0 < \alpha \leq 2$, satisfazendo a Condição A. Seja $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido em (2.11) e suponha que ele também satisfaça a Condição A, para todo k fixo. Seja $\Phi_W(s; k) = \mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})$ a função característica de $W(t)$. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $s \in \mathbb{R}$*

$$\ln(\hat{\phi}(s; k)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \ln(\Phi_W(s; k)),$$

quando $N \rightarrow \infty$, onde $\hat{\phi}(s; k)$ é dado por

$$\hat{\phi}(s; k) := \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{is(X_{t+k}-X_t)}.$$

Prova: Para provar este lema, vamos proceder de forma similar ao Lema 2.1. Primeiramente, vamos mostrar a consistência de $\hat{\phi}^*(s; k) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{is(X_{t+k}-X_t)}$. Defina $Z(t) := Y_s(t+k)\overline{Y_s(t)} = e^{is(X(t+k)-X(t))}$, para k fixo. Como o processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é estacionário, $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ também é estacionário. Vamos mostrar que $Z(\cdot)$ é um processo ergódico em média. uma condição suficiente para isto ocorrer é que sua função de autocovariância convirja para zero. A função de autocovariância de $Z(\cdot)$ no lag l é dada por

$$\begin{aligned} C_Z(l) &= \text{Cov}(Z(t+l), Z(t)) = \mathbb{E}(Z(t+l)\overline{Z(t)}) - \mathbb{E}(Z(t+l))\mathbb{E}(\overline{Z(t)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l)-X(t+k)+X(t))}) - |\Phi_W(s; k)|^2 \\ &= \mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) - |\Phi_W(s; k)|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Então, precisamos mostrar que

$$\mathbb{E}(Z(t+l)\overline{Z(t)}) = \mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2, \quad (2.15)$$

quando $l \rightarrow \infty$. Note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z(t+l)\overline{Z(t)}) &= |\Phi_W(s; k)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{|\Phi_W(s; k)|^2} \right) \\
&= |\Phi_W(s; k)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})\mathbb{E}(e^{-is(X(t+k)-X(t))})} \right) \\
&= |\Phi_W(s; k)|^2 \exp(\tau_W(s; l)), \tag{2.16}
\end{aligned}$$

onde $\tau_W(s; l) = \ln \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})\mathbb{E}(e^{-is(X(t+k)-X(t))})} \right)$ é a função codiferença de $W(\cdot)$, para k e t fixos. Por hipótese, temos $\tau_W(s; l) \rightarrow 0$, quando $l \rightarrow \infty$. Logo, $\exp(\tau_W(s; l)) \rightarrow 1$. Ou seja, $\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2$, quando $l \rightarrow \infty$, então $\hat{\phi}^*(s; k)$ converge em média quadrática para $\Phi_W(s; k)$. Portanto, $\hat{\phi}^*(s; k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi_W(s; k)$. Para o restante da prova, procedemos de maneira similar à prova do Lema 2.1. □

No Corolário 2.2 provamos a recíproca do que foi utilizado na prova do Lema 2.2, ou seja, se a função de autocovariância do processo $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ convergir a zero, então a função codiferença do processo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$, definido em (2.11), também converge a zero.

Corolário 2.2. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estacionário com distribuição α -estável simétrica, $0 < \alpha \leq 2$. Seja $Z(t) := e^{is(X(t+k)-X(t))}$, para k fixo. Suponha que a função de autocovariância do processo $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$, denotada por $C_Z(\cdot)$, é tal que $C_Z(l) \rightarrow 0$, quando $l \rightarrow \infty$. Seja $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido em (2.11). Então, a função codiferença $\tau_W(s; l)$, definida na expressão (2.9), é assintoticamente zero, quando $l \rightarrow \infty$.*

Prova: Pela expressão (2.14), temos

$$C_Z(l) = \mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) - |\Phi_W(s; k)|^2 \rightarrow 0,$$

quando $l \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2.$$

Pela expressão (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} |\Phi_W(s; k)|^2 & \frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t)-X(t+k))})\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})} \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2 \\ \iff \ln & \left[\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t)-X(t+k))})\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})} \right] \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Note que o termo do lado esquerdo de (2.17) é $\tau_W(s; l)$, onde $W(\cdot)$ é definido em (2.11), para k fixo. Portanto, $\tau_W(s; l) \rightarrow 0$, quando $l \rightarrow \infty$. □

Prova do Teorema 2.1: Para k fixo e $N \rightarrow \infty$, temos que $\sqrt{\frac{N-k}{N}} \rightarrow 1$. Pelos Lemas 2.1 e 2.2, vale que

$$\hat{\tau}_X(s; k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \ln[\Phi_W(s; k)] - \ln[\Phi_X(s)] - \ln[\Phi_X(-s)] = \tau_X(s; k),$$

para $s \in \mathbb{R}$, quando $N \rightarrow \infty$. □

2.2.2 Covariância Espectral

Uma medida de dependência alternativa para variáveis aleatórias α -estáveis a ser considerada é a *covariância espectral*. Esta medida de dependência foi introduzida por Paulauskas (1976) e posteriormente foi estudada por Damarackas e Paulauskas (2014). Para definirmos a covariância espectral, precisamos primeiramente introduzir a noção de medida espectral de vetores α -estáveis. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$ um vetor α -estável em \mathbb{R}^d e considere

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_{\mathbf{X}}(\theta_1, \dots, \theta_d) = \mathbb{E}[\exp\{i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X})\}] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i \sum_{k=1}^d \theta_k X_k \right\} \right]$$

sua função característica. O teorema 2.3.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994) afirma que \mathbf{X} é um vetor α -estável ($0 < \alpha < 2$) se, e somente se, existe uma medida Γ na esfera unitária $S_d = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ e um vetor $\boldsymbol{\mu}^0$ em \mathbb{R}^d tal que

(a) Se $\alpha \neq 1$,

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \Gamma(d\mathbf{s}) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}^0) \right\}. \quad (2.18)$$

(b) Se $\alpha = 1$,

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})| \left(1 - i \frac{2}{\pi} \text{sign}((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})) \ln |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})| \right) \Gamma(d\mathbf{s}) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}^0) \right\}. \quad (2.19)$$

O par $(\Gamma, \boldsymbol{\mu}^0)$ é único.

A medida Γ nas expressões (2.18) e (2.19) é chamada *medida espectral* do vetor aleatório α -estável \mathbf{X} . O caso Gaussiano é excluído, pois não há unicidade da medida espectral neste caso. Assumimos que $\boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{0}$. Quando $\alpha = 1$, assumimos que a medida Γ é simétrica. A covariância espectral está definida a seguir.

Definição 2.3. Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ um vetor aleatório α -estável ($d = 2$), com medida espectral Γ em S_2 . Definimos a *covariância espectral* de \mathbf{X} como

$$\varrho(X_1, X_2) = \int_{S_2} s_1 s_2 \Gamma(d\mathbf{s}).$$

A vantagem em utilizar a covariância espectral é que sua definição é baseada apenas na medida espectral, não na função característica de \mathbf{X} . Damarackas e Paulauskas (2014) fizeram uma análise, baseada em exemplos, sobre a dependência do α na covariância espectral.

Considere um processo estocástico α -estável na sua forma integral, dada por

$$X(t) = \int_E f_t(s) dL(s),$$

onde $E \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo Lévy α -estável e $\{f_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ é função determinística tal que $\int_E |f_t(s)|^\alpha ds < \infty$. Neste caso, Damarackas e Paulauskas (2014) mostram que a covariância espectral pode ser escrita como

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \int_E f_t(s) f_{t+k}(s) \|\bar{f}(s)\|^{\alpha-2} ds, \quad (2.20)$$

onde $\|\bar{f}(s)\|^2 = f_t^2(s) + f_{t+k}^2(s)$.

A covariância espectral empírica é dada em função da estimação da medida espectral. Consideramos o estimador proposto em Kodia e Garel (2014), onde para $t \geq 0$ fixo, temos

$$\hat{\varrho}(X(t), X(t+k)) = \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{j,k} \cos \left(\frac{2\pi(j-1)}{m} \right) \text{sen} \left(\frac{2\pi(j-1)}{m} \right), \quad (2.21)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k = (\hat{\sigma}_{j,k})_{j=1}^m$ tal que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k = \min_{\boldsymbol{\sigma} \geq 0} \|\hat{I}_k - \hat{\Psi}\boldsymbol{\sigma}\|$. Para estimar os pesos $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k$ considere $\hat{\Psi}$ uma matriz $m \times m$ definida por $\hat{\Psi} = (\hat{\psi}_\alpha(\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{s}_l \rangle))_{j,l=1}^m$ tal que $\hat{\psi}_\alpha(\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{s}_l \rangle) = |t_{j1}s_{l1} + t_{j2}s_{l2}|^{\hat{\alpha}}$, onde $\hat{\alpha}$ é uma estimativa para α e $\mathbf{t}_j = \mathbf{s}_j = \left(\cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{m}\right), \sin\left(\frac{2\pi(j-1)}{m}\right) \right)$.

Neste trabalho, consideramos quatro estimadores para α : o de máxima verossimilhança (denotado por $\hat{\alpha}_{mle}$); o estimador baseado em uma regressão, proposto por Koutrouvelis (1980) (denotado por $\hat{\alpha}_{kou}$); o estimador baseado nos quantis, proposto por McCulloch (1986) (denotado por $\hat{\alpha}_{mc}$) e o estimador baseado em uma regressão, proposto por Press (1972) (denotado por $\hat{\alpha}_{pr}$). O estimador definido na expressão (2.21) necessita de uma amostra i.i.d. $\mathbf{X}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{X}_k^{(re)}$ de $(X(t), X(t+k))$, onde re é o número de replicações. Sejam $\hat{I}_k = (\hat{I}_{k,re}(\mathbf{t}_j))_{j=1}^m$ e $\hat{I}_{k,re}(\mathbf{t}_j) = -\ln(\hat{\phi}_{k,re}(\mathbf{t}_j))$, onde $\hat{\phi}_{k,re}(\mathbf{t}_j)$ é a função característica empírica dada por $\hat{\phi}_{k,re}(\mathbf{t}_j) = \frac{1}{re} \sum_{j=1}^{re} e^{i\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{X}_k^{(j)} \rangle}$. Para mais detalhes sobre o estimador da covariância espectral, referenciamos Kodia e Garel (2014).

2.2.3 Covariação

Nesta subseção, definimos mais uma medida de dependência para processos α -estáveis, esta é denominada *covariação*. Dado um processo $X(t) = \int_E f_t(x) dL(x)$, $t \in T$, onde $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo Lévy α -estável e $\{f_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ é tal que $\int_E |f_t(x)|^\alpha dx < \infty$, Mohammadi e Mohammadpour (2009) definem a covariação entre $X(t)$ e $X(s)$ por

$$sc(X(t), X(s)) = \int_E f_t(x) f_s(x) dx. \quad (2.22)$$

Neste sentido, um processo é dito fracamente estacionário se, para todos $t, s \in T$,

$$sc(X(t), X(s)) = sc(X(t+k), X(s+k)),$$

para todo $k \in T$. Assim, define-se a covariação para processos fracamente estacionários em apenas uma variável

$$sc(t) = sc(X(t), X(0)) = sc(X(s+t), X(s)).$$

Observação 2.5. A definição aqui apresentada para a covariação, baseada no artigo Mohammadi e Mohammadpour (2009), difere da definição para covariação apresen-

tada em Samorodnitsky e Taqqu (1994). Samorodnitsky e Taqqu (1994) definem a covariação entre duas variáveis aleatórias α -estáveis simétricas, X_1 e X_2 , com $\alpha > 1$, por

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{(\alpha-1)} \Gamma(ds),$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a medida espectral do vetor (X_1, X_2) e $a^{(p)} = |a|^p \text{sign}(a)$. Na proposição 3.5.2, Samorodnitsky e Taqqu (1994) mostram que a covariação para processos do tipo $X(t) = \int_E f_t(x) dL(x)$, $t \in T$, onde $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo Lévy α -estável, é dada por

$$[X(t), X(s)]_\alpha = \int_E f_t(x) f_s(x)^{(\alpha-1)} dx.$$

Neste trabalho, usamos a definição dada em (2.22).

2.3 Definição e Propriedades do Processo Tipo OU Generalizado

Nesta seção apresentamos um procedimento para generalizar os processos advindos da ELG. Chamamos esses processos de *processos tipo OU generalizados*. Consideramos casos especiais, onde o processo de ruído apresenta segundo momento infinito, mas também é possível analisar casos em que o primeiro momento é infinito.

O processo tipo OU generalizado é apresentado na Definição 2.4, onde consideramos processo de Lévy como ruído. Lembramos que o único processo de Lévy α -estável que apresenta segundo momento finito é o movimento Browniano padrão, também conhecido como processo de Wiener.

Definição 2.4. Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estocástico e $\rho = \{\rho(t)\}_{t \geq 0}$ uma função determinística. Dizemos que o par (V, ρ) representa uma solução da ELG se $V(\cdot)$ é dado por

$$V(t) = V_0 \rho(t) + \int_0^t \rho(t-s) dL(s) \quad (2.23)$$

e a função ρ satisfaz a seguinte equação integro-diferencial

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \rho(s) d\mu_t(s), \\ \rho(0) = 1, \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ é uma família de medidas com sinal, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy

e V_0 é independente de $\{L(t)\}_{t \geq 0}$. O processo estocástico $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado de *processo tipo OU generalizado*.

Sob as condições da Definição 2.4, a integral estocástica em (2.23) pode ser tomada no sentido de convergência em probabilidade, se $\rho(\cdot)$ é uma função contínua (Lukacs, 1975). De forma geral, pode-se considerar integração estocástica com respeito a semimartingais (Applebaum, 2009). Equações integro-diferenciais, como na expressão (2.24), são estudadas em Mingarelli (1983).

Na proposição a seguir provamos uma possível forma discreta para o processo dado em (2.23).

Proposição 2.1. *Sob as condições da Definição 2.4 e se $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo de Lévy padrão α -estável, o processo definido pela expressão (2.23) tem a seguinte forma discreta*

$$V(n+1) - V(n) \stackrel{d}{=} V_0 (\rho(n+1) - \rho(n)) + \xi_n, \quad (2.25)$$

onde $\stackrel{d}{=}$ significa igualdade em distribuição e $\xi_n \sim S_\alpha(\sigma_n, 0, 0)$, tal que σ_n é dado por

$$\sigma_n^\alpha = \int_0^n |\rho(n+1-s) - \rho(n-s)|^\alpha ds + \int_n^{n+1} |\rho(n+1-s)|^\alpha ds. \quad (2.26)$$

Prova: Pela expressão (2.23) obtemos

$$V(n+1) - V(n) = V_0 (\rho(n+1) - \rho(n)) + \xi_n,$$

onde $\xi_n = \int_0^{n+1} \rho(n+1-s) dL(s) - \int_0^n \rho(n-s) dL(s)$. Podemos reescrever ξ_n da seguinte forma

$$\xi_n = \int_0^n [\rho(n+1-s) - \rho(n-s)] dL(s) + \int_n^{n+1} \rho(n+1-s) dL(s) = A_n + B_n,$$

onde $A_n = \int_0^n [\rho(n+1-s) - \rho(n-s)] dL(s)$ e $B_n = \int_n^{n+1} \rho(n+1-s) dL(s)$, tal que A_n e B_n são independentes. Além disso, pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), $A_n \sim S_\alpha(\sigma_{A_n}, 0, 0)$ e $B_n \sim S_\alpha(\sigma_{B_n}, 0, 0)$, em que

$$\begin{aligned} \sigma_{A_n}^\alpha &= \int_0^n |\rho(n+1-s) - \rho(n-s)|^\alpha ds, \\ \sigma_{B_n}^\alpha &= \int_n^{n+1} |\rho(n+1-s)|^\alpha ds. \end{aligned}$$

Pela propriedade 1.2.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), temos que $\xi_n \sim S_\alpha(\sigma_n, 0, 0)$, onde σ_n é dado por (2.26).

□

Observe que se $\theta > 0$ e $\mu_t(E) = \theta \mathbb{I}_E(t)$, onde $\mathbb{I}_E(\cdot)$ é função indicadora do conjunto E , então $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ é a família de medidas Delta de Dirac com massa $\theta > 0$. Resolvendo a equação (2.24), obtemos $\rho(t) = e^{-\theta t}$, e o processo resultante é o conhecido Ornstein-Uhlenbeck. Na situação geral, $d\mu_t(s) = \gamma(t-s) ds$ dependerá de $t \geq 0$ e recuperamos a expressão (2.6).

Além disso, note que se $\mu_t = \mu$, para todo $t \geq 0$ na Definição 2.4 e μ medida absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue λ , ou seja, $d\mu_t(s) = d\mu(s) = f(s) ds$, para todos $t, s \geq 0$, onde

$$f(s) = \frac{d\mu}{d\lambda}(s)$$

é a derivada de Radon-Nikodym de μ com relação à λ . Neste caso, a expressão (2.24) é dada por

$$\rho'(t) = - \int_0^t \rho(s) f(s) ds \implies \begin{cases} \rho'(0) = 0 \\ \rho''(t) = -\rho(t) f(t). \end{cases} \quad (2.27)$$

Assim, de (2.27) temos

$$\begin{cases} \rho''(t) + \rho(t) f(t) = 0 \\ \rho(0) = 1 \text{ e } \rho'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Mudando a função $f(\cdot)$ na expressão (2.28) ou o processo de ruído $L(\cdot)$ em (2.23), resolvemos a equação (2.28) e encontramos a função $\rho(\cdot)$.

Se $\rho(t) = e^{-\theta t}$ ou $\rho(t) = 1, \forall t \geq 0$, então $V(\cdot)$ é o processo Ornstein-Uhlenbeck ou o processo de Lévy, respectivamente. Neste caso, claramente, obtemos processos de Markov. Queremos enfatizar que outros processos advindos da Definição 2.4 não são necessariamente Markovianos. Mas, esta característica não nos impede de estudá-los (veja Fleming et al., 2014).

Seja $\{I_\rho(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico dado por $I_\rho(t) = \int_0^t \rho(t-x) dL(x)$ e considere $\tau_{I_\rho}(s; k, t)$ sua função codiferença. A proposição A.1 em Medino et al. (2012)

afirma que as funções características de integrais estocásticas são obtidas a partir do integrando e do expoente característico de $L(1)$. Então, se considerarmos que $L(\cdot)$ é o processo de Lévy padrão α -estável, pela Observação 2.1(a), $\tau_{I_\rho}(s; k)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\tau_{I_\rho}(s; k) &= \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{is \int_0^t (\rho(t+k-x) - \rho(t-x)) dL(x)}) \mathbb{E}(e^{is \int_t^{t+k} \rho(t+k-x) dL(x)})}{\mathbb{E}(e^{is \int_0^{t+k} \rho(t+k-x) dL(x)}) \mathbb{E}(e^{-is \int_0^t \rho(t-x) dL(x)})} \right] \\ &= \ln \left[\frac{e^{-|s|^\alpha (\int_0^t |\rho(t+k-x) - \rho(t-x)|^\alpha dx + \int_t^{t+k} |\rho(t+k-x)|^\alpha dx)}}{e^{-|s|^\alpha (\int_0^{t+k} |\rho(t+k-x)|^\alpha dx + \int_0^t |\rho(t-x)|^\alpha dx)}} \right] \\ &= |s|^\alpha \int_0^t (|\rho(t+k-x)|^\alpha + |\rho(t-x)|^\alpha - |\rho(t+k-x) - \rho(t-x)|^\alpha) dx.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Na proposição a seguir provamos uma fórmula geral para a função codiferença do processo estocástico dado pela expressão (2.23).

Proposição 2.2. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico definido na expressão (2.23). Então, valem as seguintes afirmações.*

(i) *A função codiferença de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por*

$$\tau_V(s; k, t) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(t+k) - \rho(t)))}{\varphi_{V_0}(s\rho(t+k))\varphi_{V_0}(-s\rho(t))} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k, t),$$

onde $\varphi_{V_0}(\cdot)$ é a função característica da variável aleatória $V_0 \equiv V(0)$.

(ii) *Se $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é estacionário, então sua função codiferença se reduz a*

$$\tau_V(s; k) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(k) - 1))}{\varphi_{V_0}(s\rho(k))\varphi_{V_0}(-s)} \right],$$

onde $\varphi_{V_0}(\cdot)$ é a função característica da variável aleatória $V_0 \equiv V(0)$.

(iii) *Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy padrão α -estável e $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Então, a função codiferença de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por*

$$\begin{aligned}\tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\rho(t+k)|^\alpha + |\rho(t)|^\alpha - |\rho(t+k) - \rho(t)|^\alpha] \\ &+ |s|^\alpha \int_0^t (|\rho(t+k-x)|^\alpha + |\rho(t-x)|^\alpha - |\rho(t+k-x) - \rho(t-x)|^\alpha) dx.\end{aligned}\tag{2.30}$$

(iv) Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy padrão α -estável e $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Se $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estacionário, então

$$\tau_V(s; k) = |s|^\alpha \sigma^\alpha [1 + |\rho(k)|^\alpha - |\rho(t+k) - \rho(t)|^\alpha].$$

Prova: (i) Pela expressão (2.9), temos que

$$\tau_V(s; k, t) = \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{is(V(t+k)-V(t))})}{\mathbb{E}(e^{isV(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isV(t)})} \right]. \quad (2.31)$$

Pela expressão (2.23) e pela independência entre $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ e V_0 , obtemos

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{isV_0(\rho(t+k)-\rho(t))})\mathbb{E}(e^{is(I_\rho(t+k)-I_\rho(t))})}{\mathbb{E}(e^{isV_0\rho(t+k)})\mathbb{E}(e^{isI_\rho(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isV_0\rho(t)})\mathbb{E}(e^{-isI_\rho(t)})} \right] \\ &= \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(t+k) - \rho(t)))}{\varphi_{V_0}(s\rho(t+k))\varphi_{V_0}(-s\rho(t))} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k, t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

e isto completa a prova.

(ii) Pela propriedade de estacionariedade, podemos considerar $t = 0$ na expressão do item (i), obtendo

$$\tau_V(s; k) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(k) - 1))}{\varphi_{V_0}(s\rho(k))\varphi_{V_0}(-s)} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k).$$

Note que

$$\tau_{I_\rho}(s; k) = \tau(I_\rho(k), I_\rho(0)) = \ln \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is \int_0^k \rho(t-x)dL(x)})}{\mathbb{E}(e^{is \int_0^t \rho(t-x)dL(x)})} \right) = 0,$$

completando a demonstração.

(iii) Pela função característica de $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ e pelo item (i), a expressão de $\tau_V(s; k, t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= \ln \left[\frac{e^{-\sigma^\alpha |s(\rho(t+k)-\rho(t))|^\alpha}}{e^{-\sigma^\alpha |s\rho(t+k)|^\alpha} e^{-\sigma^\alpha |-s\rho(t)|^\alpha}} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k) \\ &= |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\rho(t+k)|^\alpha + |\rho(t)|^\alpha - |\rho(t+k) - \rho(t)|^\alpha] + \tau_{I_\rho}(s; k). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Pelas expressões dadas em (2.29) e (2.33), obtemos a função codiferença dada em (2.30).

(iv) Pela propriedade de estacionariedade, podemos considerar $t = 0$ na expressão (2.30), obtendo

$$\tau_V(s; k) = |s|^\alpha \sigma^\alpha [1 + |\rho(k)|^\alpha - |\rho(k) - 1|^\alpha].$$

□

Se o processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, dado em (2.23), for estacionário, a função codiferença apenas depende da função característica do processo no tempo zero e da função memória $\rho(\cdot)$.

Na próxima proposição apresentamos a fórmula geral para a covariância espectral do processo estocástico definido em (2.23).

Proposição 2.3. *Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ o processo de Lévy padrão α -estável e $V_0 \equiv 0$. Então, a covariância espectral de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, definido na expressão (2.23), é dada por*

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+k-s) [\rho^2(t-s) + \rho^2(t+k-s)]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \quad (2.34)$$

Se o processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é estacionário, então a expressão (2.34) dependerá apenas de k , e t pode ser fixado.

Prova: Pela equação (2.23) com $V_0 \equiv 0$, temos

$$V(t) = \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)\rho(t-s) dL(s).$$

Então, pela expressão (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} \varrho(V(t), V(t+k)) &= \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)\rho(t-s)\mathbb{I}_{[0,t+k]}(s)\rho(t+k-s) [\mathbb{I}_{[0,t]}(s)^2\rho^2(t-s) \\ &\quad + \mathbb{I}_{[0,t+k]}(s)^2\rho^2(t+k-s)]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds \\ &= \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+k-s) [\rho^2(t-s) + \rho^2(t+k-s)]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \end{aligned}$$

□

Na próxima proposição apresentamos a fórmula geral para a covariância do processo estocástico definido em (2.23).

Proposição 2.4. *Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ o processo de Lévy padrão α -estável e $V_0 \equiv 0$. Então, a covariação de $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, definido na expressão (2.23), é dada por*

$$sc(V(t), V(t+k)) = \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+k-s) ds. \quad (2.35)$$

Se o processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é estacionário, então a expressão (2.35) dependerá apenas de k , e t pode ser fixado.

Prova: Pela expressão (2.22), considerando $V_0 \equiv 0$ na equação (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} sc(V(t), V(t+k)) &= \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)\rho(t-s)\mathbb{I}_{[0,t+k]}(s)\rho(t+k-s) ds \\ &= \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+k-s) ds. \end{aligned}$$

□

2.3.1 Exemplos

Nesta subseção apresentamos alguns exemplos de processos tipo OU generalizados. Resolvemos o problema de valor inicial dado em (2.27), para determinadas funções $f(\cdot)$, e realizamos algumas simulações para cada caso. Para todos os exemplos, consideramos que $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é processo de Lévy padrão α -estável.

Exemplo 2.1. Processo Ornstein-Uhlenbeck

O processo dado pela expressão (2.2) é chamado de Ornstein-Uhlenbeck (OU), onde temos $\rho(t) = e^{-\theta t}$, $\theta > 0$. Assumimos que o processo OU é observado em tempos discretos $\{t_k = kh; k = 0, 1, 2, \dots\}$, onde $h \in (0, \infty)$, o passo da discretização, é fixo. Zhang e Zhang (2013) propõem uma discretização para o processo OU, que é apresentada na Proposição 2.5 a seguir.

Proposição 2.5. *Assuma que o processo OU é observado nos tempos discretos $\{t_k = kh; k = 0, 1, 2, \dots\}$, onde $h \in (0, \infty)$, é o passo da discretização. O processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, dado pela expressão (2.2), no tempo kh é dado por*

$$V(kh) = e^{-\theta h}V((k-1)h) + Z_{k,h}, \quad (2.36)$$

onde $Z_{k,h} = \int_{(k-1)h}^{kh} e^{\theta(s-kh)} dL(s)$. Além disso,

$$Z_{k,h} \stackrel{d}{=} \left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{1/\alpha} S_0, \quad (2.37)$$

onde $\stackrel{d}{=}$ denota igualdade em distribuição e S_0 é uma variável aleatória α -estável simétrica com parâmetro de escala 1.

Prova: Considere o processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, no tempo kh , dado por

$$\begin{aligned} V(kh) &= e^{-\theta kh} V_0 + \int_0^{kh} e^{\theta(s-kh)} dL(s) \\ &= e^{-\theta kh} V_0 + \int_0^{(k-1)h} e^{\theta(s-kh)} dL(s) + \int_{(k-1)h}^{kh} e^{\theta(s-kh)} dL(s) \\ &= e^{-\theta h} \left[e^{-\theta(k-1)h} V_0 + \int_0^{(k-1)h} e^{\theta(s-(k-1)h)} dL(s) \right] + Z_{k,h} \\ &= e^{-\theta h} V((k-1)h) + Z_{k,h}, \end{aligned}$$

onde $Z_{k,h} = \int_{(k-1)h}^{kh} e^{\theta(s-kh)} dL(s)$.

A distribuição de $Z_{k,h}$ pode ser obtida utilizando a proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), assim $Z_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_Z, 0, 0)$, onde

$$\begin{aligned} \sigma_Z^\alpha &= \int_{(k-1)h}^{kh} e^{\theta\alpha(s-kh)} ds = e^{-\theta\alpha kh} \int_{(k-1)h}^{kh} e^{\theta\alpha s} ds = e^{-\theta\alpha kh} \frac{e^{\theta\alpha s}}{\theta\alpha} \Big|_{(k-1)h}^{kh} \\ &= e^{-\theta\alpha kh} \left(\frac{e^{\theta\alpha kh}}{\theta\alpha} - \frac{e^{\theta\alpha(k-1)h}}{\theta\alpha} \right) = \frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha}. \end{aligned}$$

Então, pela propriedade 1.2.3 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), obtemos (2.37). □

Para calcular a função codiferença, precisamos da distribuição de V_0 . Se $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo de Lévy padrão α -estável, então a distribuição de V_0 pode ser obtida. Applebaum (2009) mostra que a expressão (2.2) pode ser reescrita como

$$V(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\theta(t-s)} dL(s), \quad (2.38)$$

onde a integral é definida considerando que $\{L(t)\}_{t < 0}$ é uma cópia independente de $\{-L(t)\}_{t \geq 0}$. Pela expressão (2.38), segue que $V_0 = \int_{-\infty}^0 e^{\theta s} dL(s)$. Aplicando

novamente a proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), obtemos $V_0 \sim S_\alpha(\tilde{\sigma}, 0, 0)$, onde $\tilde{\sigma} = (\frac{1}{\theta\alpha})^{1/\alpha}$. Note que, com estes parâmetros para a distribuição de V_0 , o processo OU é estacionário; no entanto, não é estacionário quando V_0 é constante (Applebaum, 2009, p. 217-218). A função codiferença teórica do processo OU é dada pela expressão a seguir (ver exemplo 4.7.1 em Samorodnitsky e Taqqu, 1994).

$$\tau_V(s; k) = \frac{|s|^\alpha}{\theta\alpha} (1 + e^{-\theta\alpha k} - (1 - e^{-\theta k})^\alpha). \quad (2.39)$$

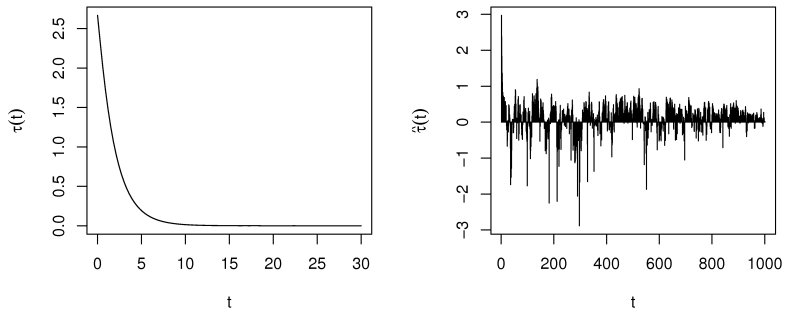
Nas Figuras 2.1 e 2.2 apresentamos resultados da codiferença teórica e empírica para $s \in \{1, s^*, 0.1, 0.01\}$, onde s^* é escolhido de forma a obtermos a mesma escala no eixo das ordenadas para os gráficos da codiferença teórica e da covariância espectral. Podemos perceber que os melhores resultados são para s^* e $s = 0.1$, nestes casos, a codiferença empírica se aproximou mais da teórica. O experimento com $s = 1$ produziu resultados com alta variabilidade, Rosadi e Deistler (2009) já haviam observado que valores menores para s aprimoravam a estimação da codiferença. Note que quando o valor de θ aumenta, a codiferença teórica decai a zero muito rapidamente. Além disso, quando $\theta = 1$, a função codiferença empírica se aproxima mais da sua respectiva codiferença teórica.

A covariância espectral do processo OU pode ser calculada utilizando a expressão (2.38). Ela é dada por (veja a proposição 2 em Damarackas e Paulauskas, 2014)

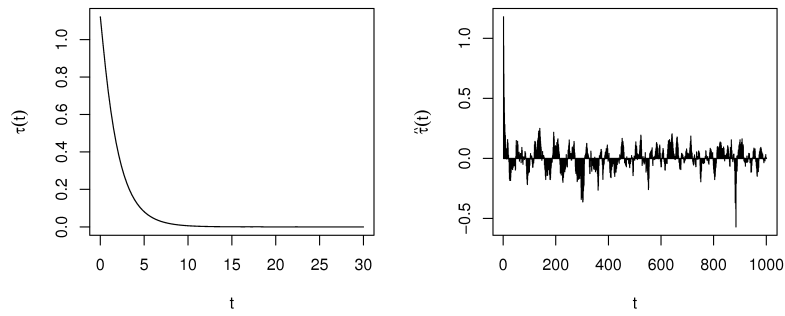
$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \frac{1}{\theta\alpha(1 + e^{-2\theta k})^{(2-\alpha)/2}} e^{-\theta k}, \quad k \geq 0. \quad (2.40)$$

A Figura 2.3 apresenta as covariâncias espectrais teórica e empírica para o processo OU. Os gráficos apresentam os resultados da covariância espectral empírica para os quatro estimadores de α , propostos na Subseção 2.2.2. Note que não há diferença significativa entre os resultados obtidos para a covariância espectral empírica quando mudamos o estimador de α . Isto ocorre devido ao fato de que todas as estimativas de α são muito precisas e com valores muito próximos, como podemos ver na Figura 2.3. Comparando as Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, vemos que as estimadores para a covariância espectral e para a codiferença (quando $s^* = 0.5612$) apresentam comportamento semelhante.

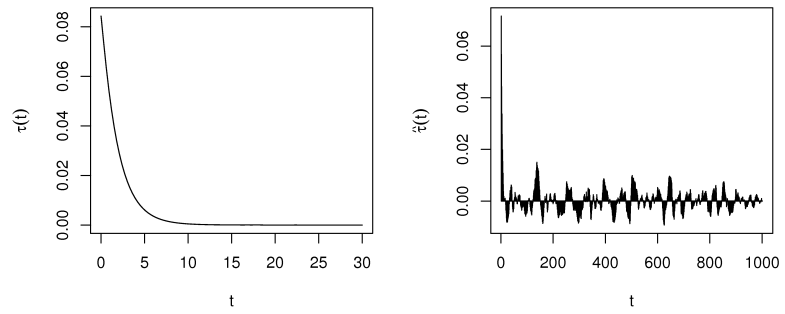
Provamos a covariação do processo OU no seguinte Corolário 2.3.



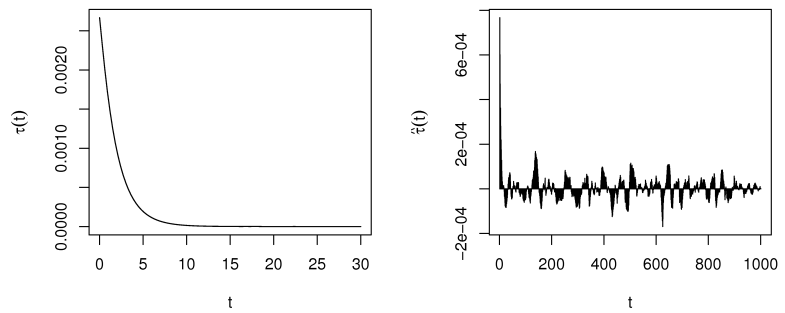
(a) $\theta = 0.5, s = 1$



(b) $\theta = 0.5, s^* = 0.5612$

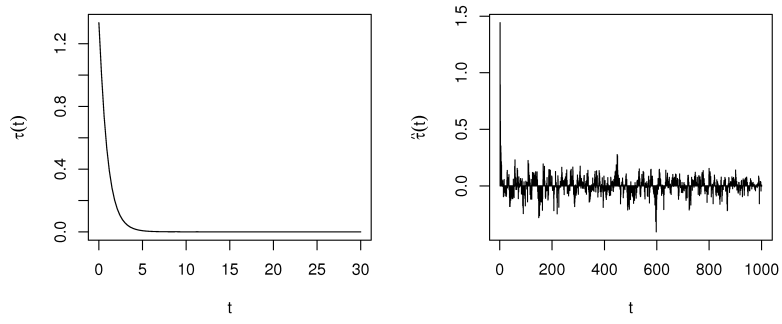


(c) $\theta = 0.5, s = 0.1$

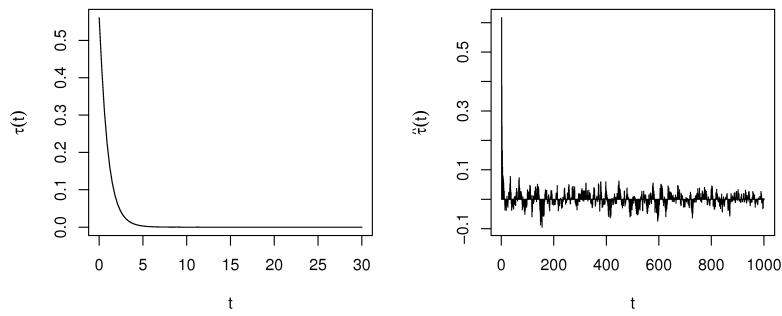


(d) $\theta = 0.5, s = 0.01$

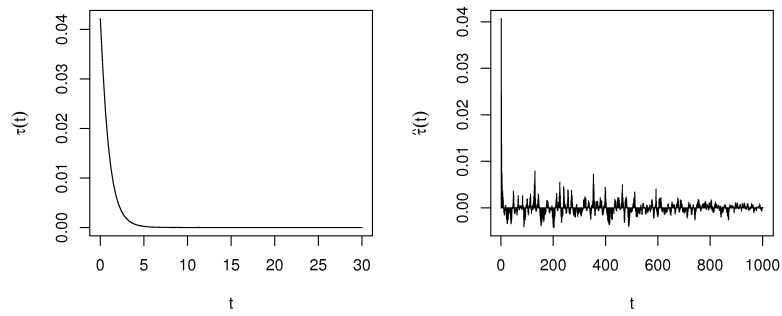
Figura 2.1: Função codiferença teórica e empírica do processo OU, quando $\alpha = 1.5$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $\theta = 0.5$, $\tilde{\sigma} = 1.5396$ e $s \in \{1, 0.5612, 0.1, 0.01\}$.



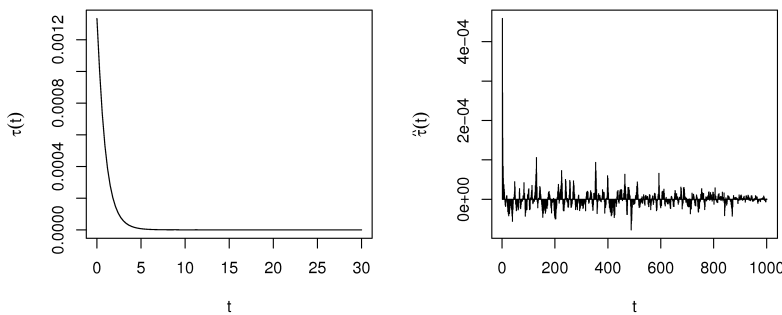
(a) $\theta = 1, s = 1$



(b) $\theta = 1, s^* = 0.5612$



(c) $\theta = 1, s = 0.1$



(d) $\theta = 1, s = 0.01$

Figura 2.2: Função codiferença teórica e empírica do processo OU, quando $\alpha = 1.5$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $\theta = 1$, $\tilde{\sigma} = 0.5443$ e $s \in \{1, 0.5612, 0.1, 0.01\}$.

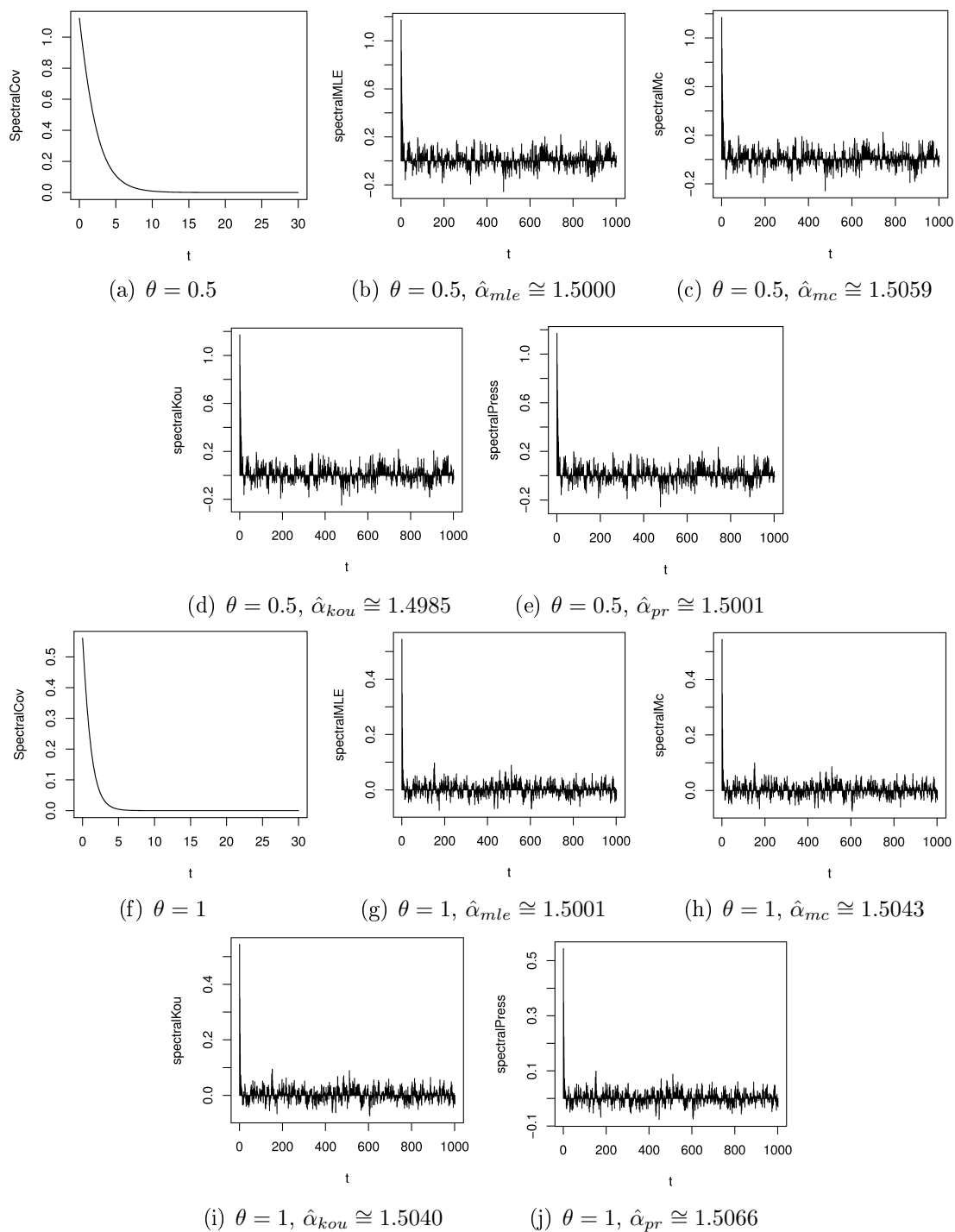


Figura 2.3: Covariância espectral teórica ((a) e (f)) e empírica do processo OU quando $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 1000$ e $re = 1000$. (a)-(e) $\theta = 0.5$; (f)-(j) $\theta = 1$.

Corolário 2.3. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo OU, dado em sua forma integral pela expressão (2.38). Então, $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é fracamente estacionário (no sentido apresentado*

na Seção 2.2.3) e sua covariação é dada por

$$sc(t) = \frac{e^{-\theta t}}{2\theta}.$$

Prova: Temos que

$$sc(t) = sc(X(t), X(0)) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta(t-x)} \mathbb{I}_{(-\infty, t]}(x) e^{\theta x} \mathbb{I}_{(-\infty, 0]}(x) dx,$$

logo,

$$sc(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-\theta t + 2\theta x} dx = e^{-\theta t} \int_{-\infty}^0 e^{2\theta x} dx = e^{-\theta t} \frac{e^{2\theta x}}{2\theta} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{e^{-\theta t}}{2\theta}.$$

Além disso, o processo OU é fracamente estacionário, pois

$$\begin{aligned} sc(X(t+s), X(t)) &= \int_{-\infty}^t e^{-\theta(t+s-x)} e^{-\theta(t-x)} dx = e^{-2\theta t - \theta s} \int_{-\infty}^t e^{2\theta x} dx \\ &= e^{-2\theta t - \theta s} \frac{e^{2\theta x}}{2\theta} \Big|_{-\infty}^t = \frac{e^{-\theta s}}{2\theta}. \end{aligned}$$

□

Observação 2.6. Note que a fórmula para a covariação do processo OU é muito semelhante à função de covariância do processo OU, no caso de $\alpha = 2$ ($\gamma(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\theta}$).

A Figura 2.4 apresenta a covariação para o processo OU, quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$. Note que, a medida que θ aumenta, a covariação decresce a zero mais rapidamente.

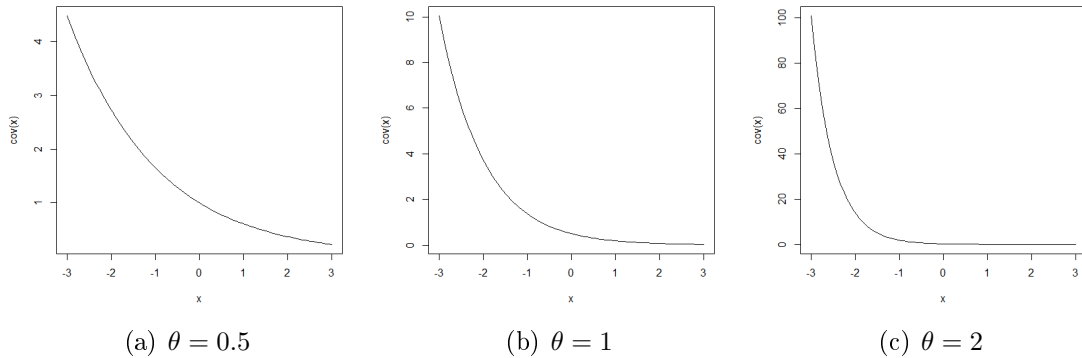


Figura 2.4: Covariação para o processo OU, quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$.

Exemplo 2.2. Processo Cosseno

Considere $f(t) = a^2$, para $a > 0$. Vamos resolver a equação diferencial dada em (2.27), para obter a função $\rho(\cdot)$. Assim, temos o seguinte problema de valor inicial para resolver.

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t a^2 \rho(s) ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases} \quad (2.41)$$

Esta equação pode ser resolvida utilizando o método iterativo de Picard (ver Zill e Cullen, 2001). A forma integral da equação (2.41) é dada por

$$\rho(t) = 1 + \int_0^t \left(\int_0^u -a^2 \rho(s) ds \right) du.$$

Defina $f(u, \rho) = \int_0^u -a^2 \rho(s) ds$. Pelo método iterativo de Picard encontramos uma seqüência de funções $\rho_n(t)$, tal que $\rho(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t)$. Considere $\rho_0(t) = 1$, pelo método $\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_n(t)$ são dadas por

$$\rho_n(t) = 1 + \int_0^t f(u, \rho_{n-1}) du.$$

Calculamos estas funções, obtendo

$$\begin{aligned} f(u, \rho_0) &= \int_0^u -a^2 ds = -a^2 u, \\ \rho_1(t) &= 1 + \int_0^t -a^2 u du = 1 - \frac{a^2 t^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u, \rho_1) &= \int_0^u -a^2 \left(1 - \frac{a^2 t^2}{2} \right) ds = -a^2 u + \frac{a^4 u^3}{3!}, \\ \rho_2(t) &= 1 + \int_0^t \left(-a^2 u + \frac{a^4 u^3}{3!} \right) du = 1 - \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^4 t^4}{4!}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(u, \rho_2) &= \int_0^u -a^2 \left(1 - \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^4 t^4}{4!} \right) ds = -a^2 u + \frac{a^4 u^3}{6} - \frac{a^6 u^5}{5!}, \\ \rho_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(-a^2 u + \frac{a^4 u^3}{6} - \frac{a^6 u^5}{5!} \right) du = 1 - \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^4 t^4}{4!} - \frac{a^6 t^6}{6!}. \end{aligned}$$

Indutivamente, obtemos

$$\rho_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(at)^{2k} (-1)^k}{(2k)!}.$$

Tomando limite, quando $n \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\rho(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(at)^{2k} (-1)^k}{(2k)!} = \cos(at).$$

Logo, a solução de (2.41) é $\rho(t) = \cos(at)$ e o processo resultante é dado por

$$V(t) = V_0 \cos(at) + \int_0^t \cos(a(t-s)) dL(s). \quad (2.42)$$

Chamamos o processo, dado pela expressão (2.42), de *Processo Cosseno*.

Na Proposição 2.6 a seguir, provamos uma forma discreta para este processo.

Proposição 2.6. *Uma forma discreta para o processo Cosseno é dada por*

$$V((k+1)h) \stackrel{d}{=} 2 \cos(ah) V(kh) - V((k-1)h) + \varepsilon_{k,h}, \quad (2.43)$$

onde h é o passo da discretização. Além disso, a distribuição das variáveis aleatórias $\varepsilon_{k,h}$ é $S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, 0)$, onde

$$\sigma_\varepsilon^\alpha = 2 \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds. \quad (2.44)$$

Prova: Pela expressão do processo, dada em (2.42), temos que

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= V_0 \cos(a(k+1)h) + \int_0^{(k+1)h} \cos[a((k+1)h-s)] dL(s) \\ &= V_0 \cos(akh + ah) + \int_0^{(k+1)h} \cos[a(kh-s) + ah] dL(s) \\ &= V_0 [\cos(akh) \cos(ah) - \text{sen}(akh) \text{sen}(ah)] \\ &\quad + \int_0^{(k+1)h} \cos(a(kh-s)) \cos(ah) - \text{sen}(a(kh-s)) \text{sen}(ah) dL(s) \\ &= V_0 [\cos(akh) \cos(ah) - \text{sen}(akh) \text{sen}(ah)] \\ &\quad + \int_0^{kh} \cos(a(kh-s)) \cos(ah) - \text{sen}(a(kh-s)) \text{sen}(ah) dL(s) \\ &\quad + \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh-s)) \cos(ah) - \text{sen}(a(kh-s)) \text{sen}(ah) dL(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(ah)[V_0 \cos(akh) + \int_0^{kh} \cos(a(kh - s)) dL(s)] \\
&\quad - V_0 \operatorname{sen}(akh) \operatorname{sen}(ah) - \operatorname{sen}(ah) \int_0^{kh} \operatorname{sen}(a(kh - s)) dL(s) \\
&\quad + \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s) - \operatorname{sen}(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \operatorname{sen}(a(kh - s)) dL(s) \\
&= \cos(ah)V(kh) - V_0 \operatorname{sen}(akh) \operatorname{sen}(ah) - \operatorname{sen}(ah) \int_0^{(k+1)h} \operatorname{sen}(a(kh - s)) dL(s) \\
&\quad + \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s).
\end{aligned}$$

Usando propriedades trigonométricas da função cosseno, obtemos

$$\begin{aligned}
V((k+1)h) &= \cos(ah)V(kh) - \frac{1}{2} \cos(a(k-1)h)V_0 + \frac{1}{2} \cos(a(k+1)h)V_0 \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{(k+1)h} \cos(a(-(k-1)h + s)) dL(s) + \frac{1}{2} \int_0^{(k+1)h} \cos(a((k+1)h - s)) dL(s) \\
&\quad + \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V((k+1)h) &= \cos(ah)V(kh) - \frac{1}{2} \cos(a(k-1)h)V_0 + \frac{1}{2} V((k+1)h) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{(k+1)h} \cos(a(-(k-1)h + s)) dL(s) + \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s). \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Multiplicando a expressão (2.45) por dois, segue que

$$\begin{aligned}
V((k+1)h) &= 2 \cos(ah)V(kh) - \cos(a(k-1)h)V_0 - \int_0^{(k+1)h} \cos(a(-(k-1)h + s)) dL(s) \\
&\quad + 2 \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s) \\
&= 2 \cos(ah)V(kh) - \cos(a(k-1)h)V_0 - \int_0^{(k-1)h} \cos(a((k-1)h - s)) dL(s) \\
&\quad - \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \cos(a((k-1)h - s)) dL(s) + 2 \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s) \\
&= 2 \cos(ah)V(kh) - V((k-1)h) + \tilde{\varepsilon}_{k,h},
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \tilde{\varepsilon}_{k,h} = - \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \cos(a((k-1)h - s)) dL(s) + 2 \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh - s)) dL(s)$$

s)) $dL(s)$. Podemos reescrever $\tilde{\varepsilon}_{k,h}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{k,h} &= - \int_{(k-1)h}^{kh} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s) \\ &\quad + \int_{kh}^{(k+1)h} [2 \cos(ah) \cos(a(kh-s)) - \cos(a((k-1)h-s))] dL(s) = A + B,\end{aligned}$$

onde $A = - \int_{(k-1)h}^{kh} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s)$ e $B = \int_{kh}^{(k+1)h} [2 \cos(ah) \cos(a(kh-s)) - \cos(a((k-1)h-s))] dL(s)$. Note que A e B são variáveis aleatórias independentes, tais que $A \sim S_\alpha(\sigma_A, 0, 0)$, onde $\sigma_A^\alpha = \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds$, e $B \sim S_\alpha(\sigma_B, 0, 0)$, onde $\sigma_B^\alpha = \int_0^h |2 \cos(ah) \cos(as) - \cos(a(s+h))|^\alpha ds$.

Usando, novamente, propriedades trigonométricas, temos que $\sigma_B^\alpha = \int_0^h |\cos(a(s-h))|^\alpha ds = \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds$. Então, $A \stackrel{d}{=} B$. Logo, seja $\varepsilon_{k,h} = 2^{1/\alpha} \int_{(k-1)h}^{kh} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s)$, segue que $\tilde{\varepsilon}_{k,h} \stackrel{d}{=} \varepsilon_{k,h}$. Note que $\varepsilon_{k,h}$ são independentes, pois os intervalos de integração, para cada k , são disjuntos.

Além disso, temos que $\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, 0)$, tal que

$$\sigma_\varepsilon^\alpha = 2 \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds.$$

□

Para calcular a função codiferença, consideramos que V_0 é uma variável aleatória com distribuição α -estável simétrica, denotada por $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. O processo Cosseno é não-estacionário, pois possui pelo menos uma raiz unitária na sua forma discreta, dada pela Proposição 2.6. Então, podemos utilizar a Proposição 2.2(iii) para calcular sua função codiferença teórica, que é dada no Corolário 2.4 a seguir.

Corolário 2.4. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado pela expressão (2.42). Então, sua função codiferença teórica é*

$$\begin{aligned}\tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\cos(a(t+k))|^\alpha + |\cos(at)|^\alpha - |\cos(a(t+k)) - \cos(at)|^\alpha] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t (|\cos(a(t+k-x))|^\alpha + |\cos(a(t-x))|^\alpha \\ &\quad - |\cos(a(t+k-x)) - \cos(a(t-x))|^\alpha) dx.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Prova: Pela Proposição 2.2(iii), como $\rho(t) = \cos(at)$, obtemos a expressão (2.46). □

Observação 2.7. (a) A função codiferença do processo Cosseno, dada na expressão

(2.46), depende de k e t . As Figuras 2.5 e 2.6 apresentam os resultados quando fixamos $t = h$ na expressão (2.46). Além disso, consideramos $V_0 = 0$ com o intuito de comparar a função codiferença e a covariância espectral. Nestas condições, temos que

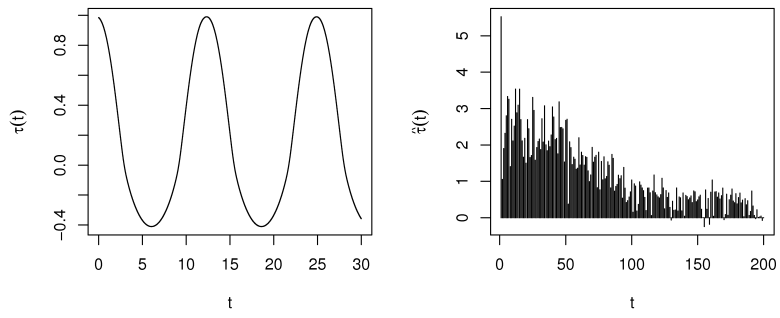
$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, h) = |s|^\alpha \int_0^h & (|\cos(a(h+k-x))|^\alpha + |\cos(a(h-x))|^\alpha \\ & - |\cos(a(h+k-x)) - \cos(a(h-x))|^\alpha) dx. \end{aligned} \quad (2.47)$$

(b) Utilizamos a codiferença empírica proposta por Rosadi e Deistler (2009) para processos estacionários, mesmo que o processo não seja estacionário. Para trabalhos futuros, vamos estudar nova definição para codiferença empírica para processos não estacionários.

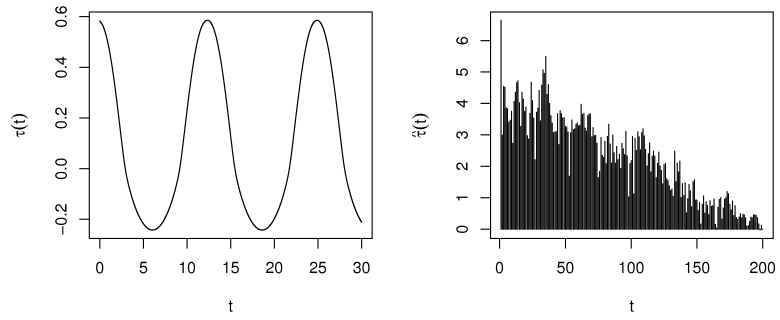
Nas Figuras 2.5 e 2.6 apresentamos resultados da codiferença teórica e empírica, para $s \in \{1, s^*, 0.1, 0.01\}$, onde s^* é escolhido de forma a obtermos a mesma escala no eixo das ordenadas para os gráficos da codiferença teórica e da covariância espectral. Vemos que a codiferença empírica não se aproxima de forma satisfatória da sua teórica. Quando $s = 0.01$, a função codiferença empírica apresenta comportamento mais semelhante à teórica, mas ainda assim o intervalo do eixo das ordenadas de ambas é diferente. Note que, quando o valor de a aumenta, a função codiferença teórica apresenta grande variabilidade. A função codiferença empírica converge a zero muito lentamente, o que já era esperado, visto que a codiferença teórica não converge a zero.

Observação 2.8. Note que a função codiferença teórica do processo Cosseno é assimétrica em relação ao eixo das abscissas. De fato, podemos calcular numericamente os extremos da função (2.47) para os casos apresentados nas Figuras 2.5 e 2.6. Os valores máximo e mínimo são dados por 0.9897 e -0.4101 , respectivamente, para a Figura 2.5(a). Além disso, os valores máximo e mínimo são dados por 0.9577 e -0.3982 , respectivamente, para a Figura 2.6(a). Então, a função codiferença teórica do processo Cosseno, nestes casos, é assimétrica em relação ao eixo das abscissas.

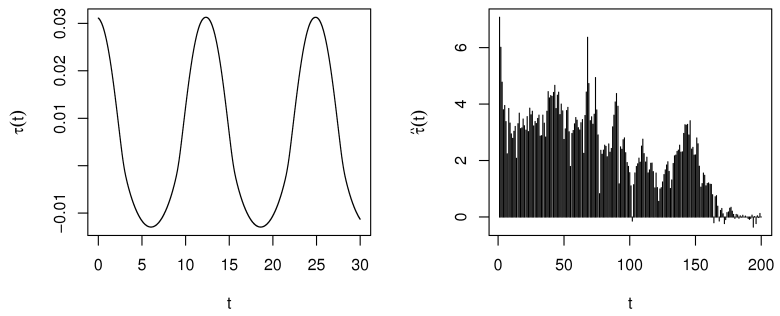
No Corolário 2.5 obtemos a covariância espectral do processo Cosseno.



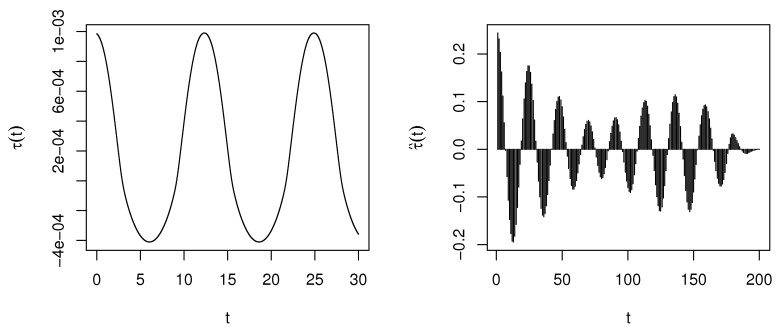
(a) $a = 0.5, s = 1$



(b) $a = 0.5, s^* = 0.7045$

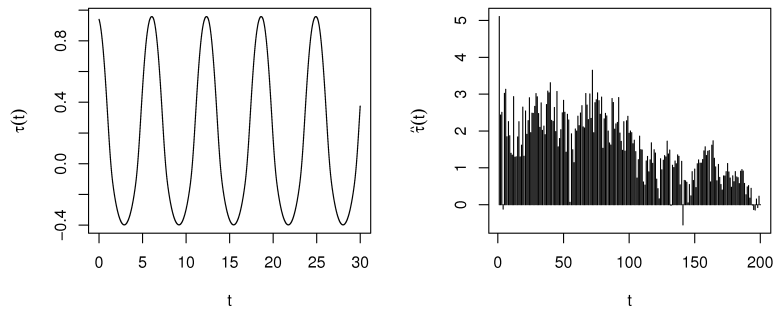


(c) $a = 0.5, s = 0.1$

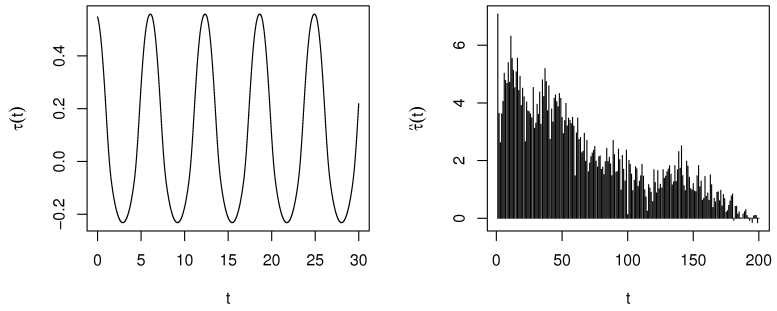


(d) $a = 0.5, s = 0.01$

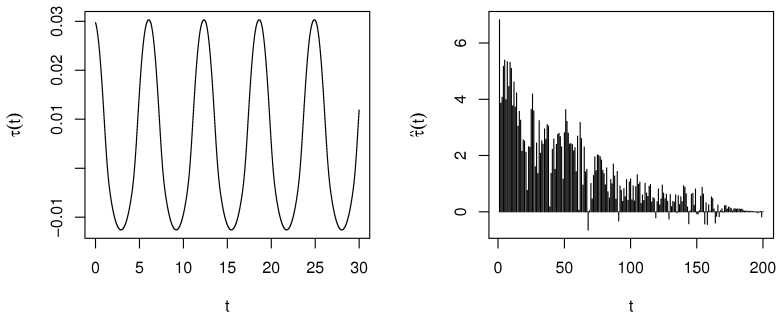
Figura 2.5: Função codiferença teórica e empírica do processo Cosseno, quando $\alpha = 1.5, \sigma = 1, h = 0.5, n = 200, a = 0.5$ e $s \in \{1, 0.7045, 0.1, 0.01\}$.



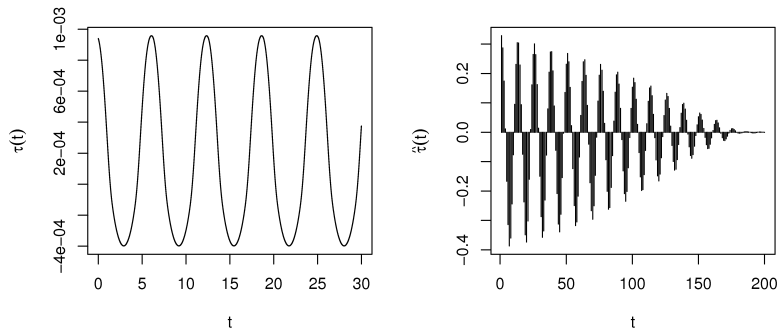
(a) $a = 1, s = 1$



(b) $a = 1, s^* = 0.6976$



(c) $a = 1, s = 0.1$



(d) $a = 1, s = 0.01$

Figura 2.6: Função codiferença teórica e empírica do processo Cosseno, quando $\alpha = 1.5, \sigma = 1, h = 0.5, n = 200, a = 1$ e $s \in \{1, 0.6976, 0.1, 0.01\}$.

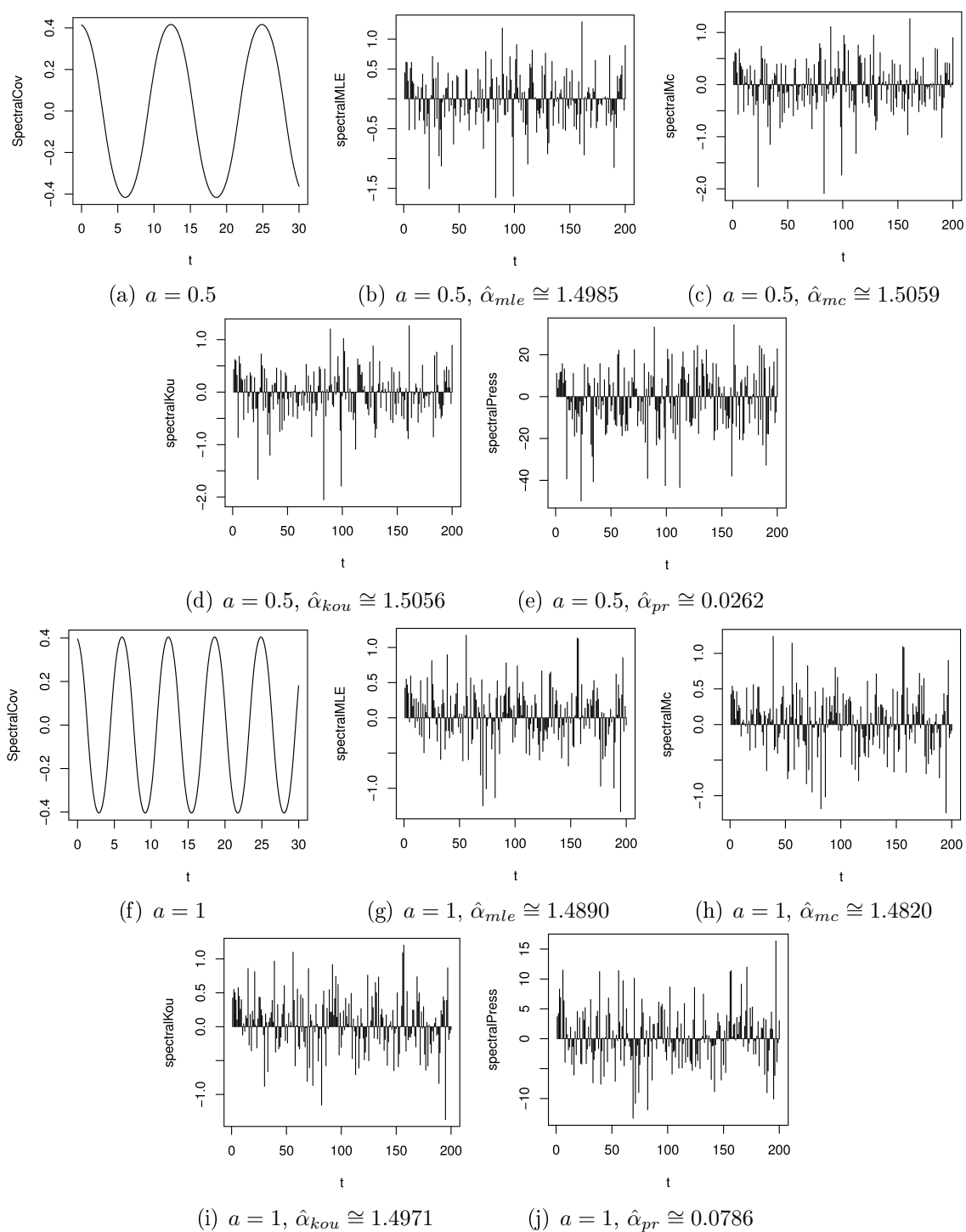


Figura 2.7: Covariância espectral teórica ((a) e (f)) e empírica do processo Cosseno, quando $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $re = 1000$. (a)-(e) $a = 0.5$; (f)-(j) $a = 1$.

Corolário 2.5. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado pela expressão (2.42), com $V_0 = 0$.*

Então, sua covariância espectral é dada por

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t \cos(a(t-s)) \cos(a(t+k-s)) [\cos^2(a(t-s)) + \cos^2(a(t+k-s))]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \quad (2.48)$$

Prova: Pela Proposição 2.3, como $\rho(t) = \cos(at)$, obtemos a expressão (2.48). □

A Figura 2.7 apresenta as covariâncias espectrais teórica e empírica para o processo Cosseno. Note que a expressão (2.48) depende de k e t ; fixamos $t = h$ como na codiferença. Os gráficos apresentam os resultados da covariância espectral empírica para os quatro estimadores de α , propostos na Subseção 2.2.2. Note que existem diferenças nos resultados obtidos para a covariância espectral empírica quando mudamos o estimador de α . Isto ocorre devido ao fato de que os estimadores de α apresentaram diferentes valores, especialmente o estimador proposto por Press (1972). Neste exemplo, $\hat{\alpha}_{pr}$ apresenta o maior vício. Comparando as Figuras 2.5, 2.6 e 2.7, vemos que os estimadores para a covariância espectral aproximam melhor a sua teórica.

No Corolário 2.6 a seguir provamos a expressão da covariação do processo Cosseno.

Corolário 2.6. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado pela expressão (2.42), com $V_0 = 0$. Então, sua covariação é dada por*

$$sc(V(t), V(t+k)) = \frac{at \cos(ak) + \text{sen}(a(2t+k)) - \text{sen}(ak)}{4a}. \quad (2.49)$$

Prova: Pela Proposição 2.4, como $\rho(t) = \cos(at)$, obtemos

$$\begin{aligned} sc(V(t), V(t+k)) &= \int_0^t \cos(a(t-s)) \cos(a(t+k-s)) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(-ak) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2a(t-s) + ak) ds \\ &= \frac{t}{2} \cos(ak) + \frac{1}{2} \int_{ak}^{2at+ak} \frac{\cos(u)}{2a} du = \frac{t}{2} \cos(ak) + \frac{1}{4a} [\text{sen}(a(2t+k)) - \text{sen}(ak)] \\ &= \frac{at \cos(ak) + \text{sen}(a(2t+k)) - \text{sen}(ak)}{4a}. \end{aligned}$$

□

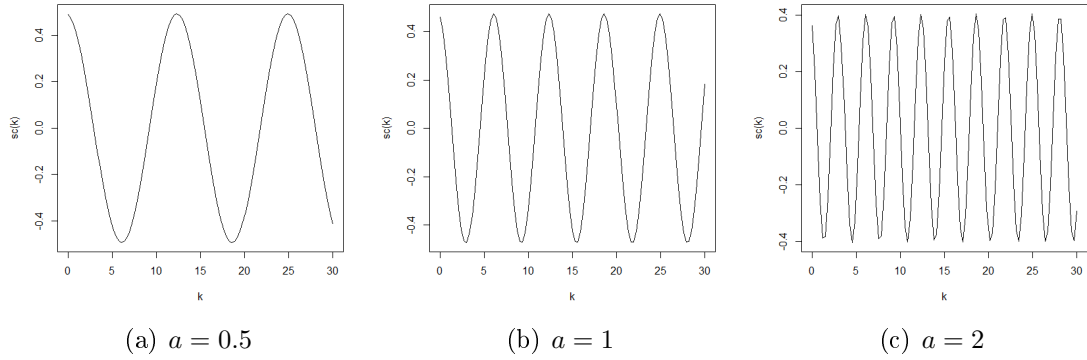


Figura 2.8: Covariação para o processo Cosseno, quando $a \in \{0.5, 1, 2\}$.

A Figura 2.8 apresenta a covariação para o processo Cosseno, quando $a \in \{0.5, 1, 2\}$. Observe que a expressão (2.49) também depende de k e t ; fixamos $t = h$ como nas demais medidas de dependência aqui apresentadas. Note que, a medida que a aumenta, a oscilação da função covariação aumenta. O comportamento das três medidas de dependência aqui apresentadas são muito semelhantes, como podemos observar, comparando as Figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8. A maior diferença é com relação à codiferença teórica, que é assimétrica em relação ao eixo das abscissas, enquanto as demais são simétricas.

Exemplo 2.3. Considere $f(t) = 2a(1 - 2at^2)$, para qualquer $a > 0$. Resolvemos a equação diferencial dada pela expressão (2.28), utilizando séries de potências. A seguir, apresentamos o procedimento que utilizamos para obter a sua solução. Para maiores detalhes sobre resolução de equações diferenciais via séries de potências, ver Zill e Cullen (2001). Considere $\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Logo,

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \\ \rho''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\rho''(t) + \rho(t)f(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n 2a(1 - 2at^2) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + 2a \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - 4a^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\rho''(t) + \rho(t)f(t) &= 2c_2 + 2ac_0 + (6c_3 + 2ac_1)t \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} [c_{n+2}(n+2)(n+1) + 2ac_n - 4a^2c_{n-2}] t^n = 0.\end{aligned}$$

Utilizando as condições de contorno da expressão (2.28), obtemos $\rho(0) = c_0 = 1$ e $\rho'(0) = c_1 = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}2c_2 + 2ac_0 &= 0 \Rightarrow c_2 = -a \\ 6c_3 + 2ac_1 &= 0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ c_{n+2}(n+2)(n+1) + 2ac_n - 4a^2c_{n-2} &= 0, \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Obtemos $c_{2n-1} = 0$, para todo $n \geq 1$, e $c_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} a^n$. De fato, utilizando indução matemática forte, suponha válidas as expressões para $n \leq k_0$. Então, para $k_0 + 1$, temos que

$$\begin{aligned}c_{2(k_0+1)-1}(2k_0 - 1 + 2)(2k_0 - 1 + 1) + 2ac_{2k_0-1} - 4a^2c_{2k_0-1-2} &= 0 \\ c_{2(k_0+1)-1} &= 0,\end{aligned}$$

pois, $c_{2k_0-1} = c_{2k_0-3} = 0$, pela hipótese de indução.

Além disso,

$$\begin{aligned}c_{2(k_0+1)}(2k_0 + 2)(2k_0 + 1) + 2ac_{2k_0} - 4a^2c_{2k_0-2} &= 0 \\ c_{2(k_0+1)}(2k_0 + 2)(2k_0 + 1) + 2a\frac{(-1)^{k_0}}{k_0!}a^{k_0} - 4a^2\frac{(-1)^{k_0-1}}{(k_0-1)!}a^{k_0-1} &= 0 \\ c_{2(k_0+1)}(k_0 + 1)(2k_0 + 1) &= (-1)^{k_0+1}a^{k_0+1} \left[\frac{1}{k_0!} + \frac{2}{(k_0-1)!} \right] \\ c_{2(k_0+1)}(k_0 + 1)(2k_0 + 1) &= (-1)^{k_0+1}a^{k_0+1} \left[\frac{(k_0-1)! + 2k_0!}{k_0!(k_0-1)!} \right] \\ c_{2(k_0+1)} &= (-1)^{k_0+1}a^{k_0+1} \left[\frac{(k_0-1)! + 2k_0!}{k_0!(k_0-1)!(k_0+1)(2k_0+1)} \right] \\ c_{2(k_0+1)} &= \frac{(-1)^{k_0+1}}{(k_0+1)!}a^{k_0+1} \left[\frac{(k_0-1)!}{(k_0-1)!(2k_0+1)} + \frac{2k_0(k_0-1)!}{(k_0-1)!(2k_0+1)} \right] \\ c_{2(k_0+1)} &= \frac{(-1)^{k_0+1}}{(k_0+1)!}a^{k_0+1},\end{aligned}$$

o que prova a passagem de indução. Portanto,

$$\rho(t) = 1 - at^2 + \frac{a^2}{2!}t^4 - \frac{a^3}{3!}t^6 + \frac{a^4}{4!}t^8 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-at^2)^n}{n!} = e^{-at^2}.$$

Assim, $\rho(t) = e^{-at^2}$, e o processo resultante é dado por

$$V(t) = V_0 e^{-at^2} + \int_0^t e^{-a(t-s)^2} dL(s). \quad (2.50)$$

Provamos uma forma discreta deste processo na Proposição 2.7 a seguir.

Proposição 2.7. *Considere o processo dado na expressão (2.50). Uma forma discreta deste processo é dada por*

$$V((k+1)h) = e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + W_{k,h}, \quad (2.51)$$

onde h é o passo da discretização e

$$W_{k,h} = \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1) dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} dL(s).$$

Além disso, $W_{k,h}$ é uma variável aleatória $S_\alpha(\sigma_W, 0, 0)$, onde

$$\sigma_W^\alpha = \int_0^{kh} e^{-\alpha a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1)^\alpha ds + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-\alpha a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} ds. \quad (2.52)$$

Prova: Pela expressão do processo dada em (2.50), temos que

$$V(kh) = V_0 e^{-a(kh)^2} + \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s).$$

Então,

$$V_0 e^{-a(kh)^2} = V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s). \quad (2.53)$$

Também, temos que

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= V_0 e^{-a((k+1)h)^2} + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((k+1)h-s)^2} dL(s) \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} \left[V_0 e^{-a(kh)^2} + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2)} dL(s) \right]. \end{aligned}$$

Então,

$$V_0 e^{-a(kh)^2} = e^{a(2k+1)h^2} V((k+1)h) - \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2)} dL(s). \quad (2.54)$$

Pelas expressão (2.53) e (2.54), obtemos

$$V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s) = e^{a(2k+1)h^2} V((k+1)h) - \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2)} dL(s)$$

$$e^{a(2k+1)h^2} V((k+1)h) = V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s) + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2)} dL(s)$$

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} dL(s) \\ &\quad + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2 + (2k+1)h^2)} dL(s) \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + W_{k,h}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W_{k,h} &= \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} dL(s) - \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} dL(s) \\ &= \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1) dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} dL(s). \end{aligned}$$

Usando as proposições 1.2.1 e 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), a distribuição de $W_{k,h}$ é $S_\alpha(\sigma_W, 0, 0)$, onde

$$\sigma_W^\alpha = \int_0^{kh} e^{-\alpha a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1)^\alpha ds + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-\alpha a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} ds.$$

□

Para calcular a função codiferença, iremos considerar que V_0 é uma variável aleatória com distribuição α -estável simétrica, denotada por $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Provamos a função codiferença teórica deste processo no Corolário 2.7 a seguir.

Corolário 2.7. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado pela expressão (2.50). Então, sua*

função codiferença teórica é dada por

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) = & |s|^\alpha \sigma^\alpha \left[e^{-a\alpha(t+k)^2} + e^{-a\alpha t^2} - (e^{-at^2} - e^{-a(t+k)^2})^\alpha \right] \\ & + |s|^\alpha \int_0^t (e^{-a\alpha(t+k-x)^2} + e^{-a\alpha(t-x)^2} - (e^{-a(t-x)^2} - e^{-a(t+k-x)^2})^\alpha) dx. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Prova: Pela Proposição 2.2(iii), como $\rho(t) = e^{-at^2}$, obtemos a expressão (2.55). □

Observação 2.9. (a) A função codiferença, dada pela expressão (2.55), depende de k e t . As Figuras 2.9 e 2.10 mostram os resultados obtidos quando fixamos $t = h$, na expressão (2.55). Além disso, consideramos $V_0 = 0$ para comparar as funções codiferença e a covariância espectral. Nestas condições, obtemos

$$\tau_V(s; k, h) = |s|^\alpha \int_0^h (e^{-a\alpha(h+k-x)^2} + e^{-a\alpha(h-x)^2} - (e^{-a(h-x)^2} - e^{-a(h+k-x)^2})^\alpha) dx.$$

(b) Utilizamos a codiferença empírica proposta por Rosadi e Deistler (2009) para processos estacionários, mesmo que o processo não seja estacionário. Para trabalhos futuros, vamos estudar nova definição para codiferença empírica para processos não estacionários.

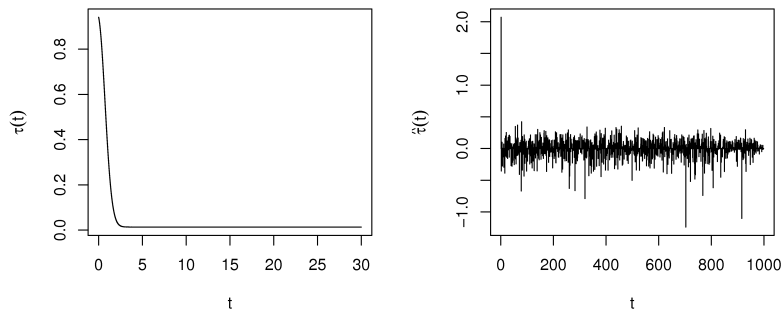
As Figuras 2.9 e 2.10 apresentam os resultados da codiferença empírica para $s \in \{1, s^*, 0.1, 0.01\}$, onde s^* é escolhido de forma a obtermos a mesma escala no eixo das ordenadas para os gráficos da codiferença teórica e da covariância espectral. Observamos que ao diminuir o valor de s , diminuimos a variabilidade do estimador. Note que, quando o valor de a aumenta, a função codiferença teórica converge mais rapidamente a zero. Os resultados são semelhantes aos obtidos no Exemplo 2.1.

A covariância espectral do processo definido em (2.50) é dada no Corolário 2.8 a seguir.

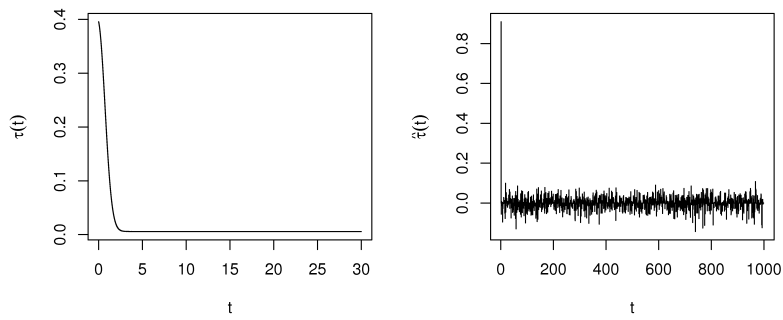
Corolário 2.8. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão (2.50). Então, a covariância espectral é dada por*

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t e^{-a(t-s)^2} e^{-a(t+k-s)^2} \left(e^{-2a(t-s)^2} + e^{-2a(t+k-s)^2} \right)^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \quad (2.56)$$

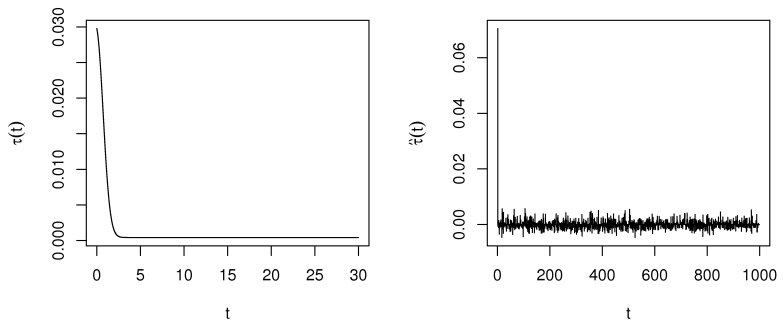
Prova: Pela Proposição 2.3, como $\rho(t) = e^{-at^2}$, obtemos a expressão (2.56). □



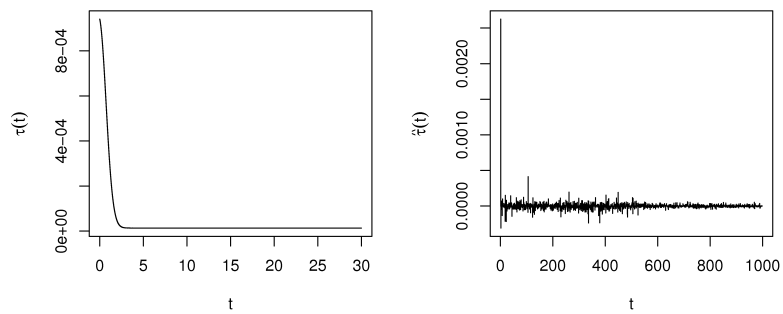
(a) $a = 0.5, s = 1$



(b) $a = 0.5, s^* = 0.5612$

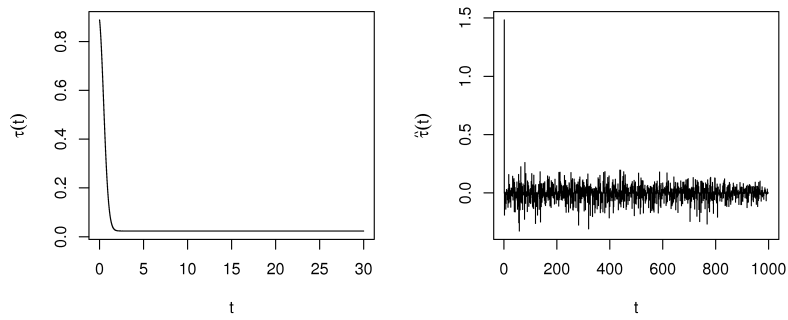


(c) $a = 0.5, s = 0.1$

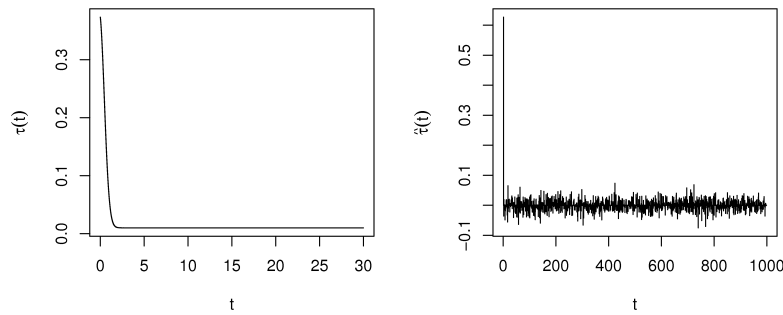


(d) $a = 0.5, s = 0.01$

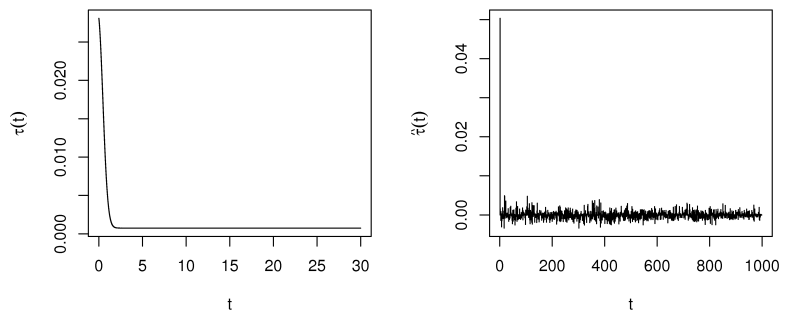
Figura 2.9: Função codiferença teórica e empírica do processo dado pela expressão (2.50), quando $\alpha = 1.5, \sigma = 1, h = 0.5, n = 1000, a = 0.5$ e $s \in \{1, 0.5612, 0.1, 0.01\}$.



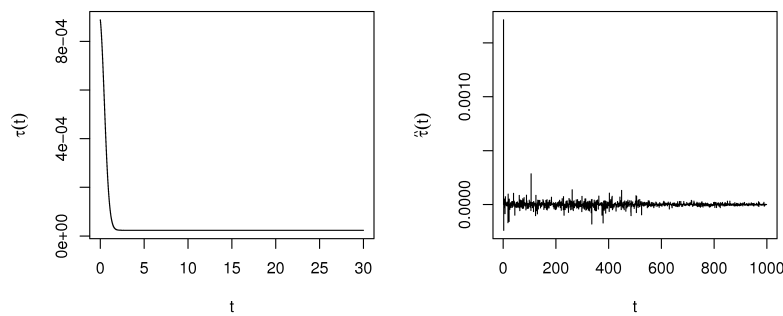
(a) $a = 1, s = 1$



(b) $a = 1, s^* = 0.5612$



(c) $a = 1, s = 0.1$



(d) $a = 1, s = 0.01$

Figura 2.10: Função codiferença teórica e empírica do processo dado pela expressão (2.50), quando $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $a = 1$ e $s \in \{1, 0.5612, 0.1, 0.01\}$.

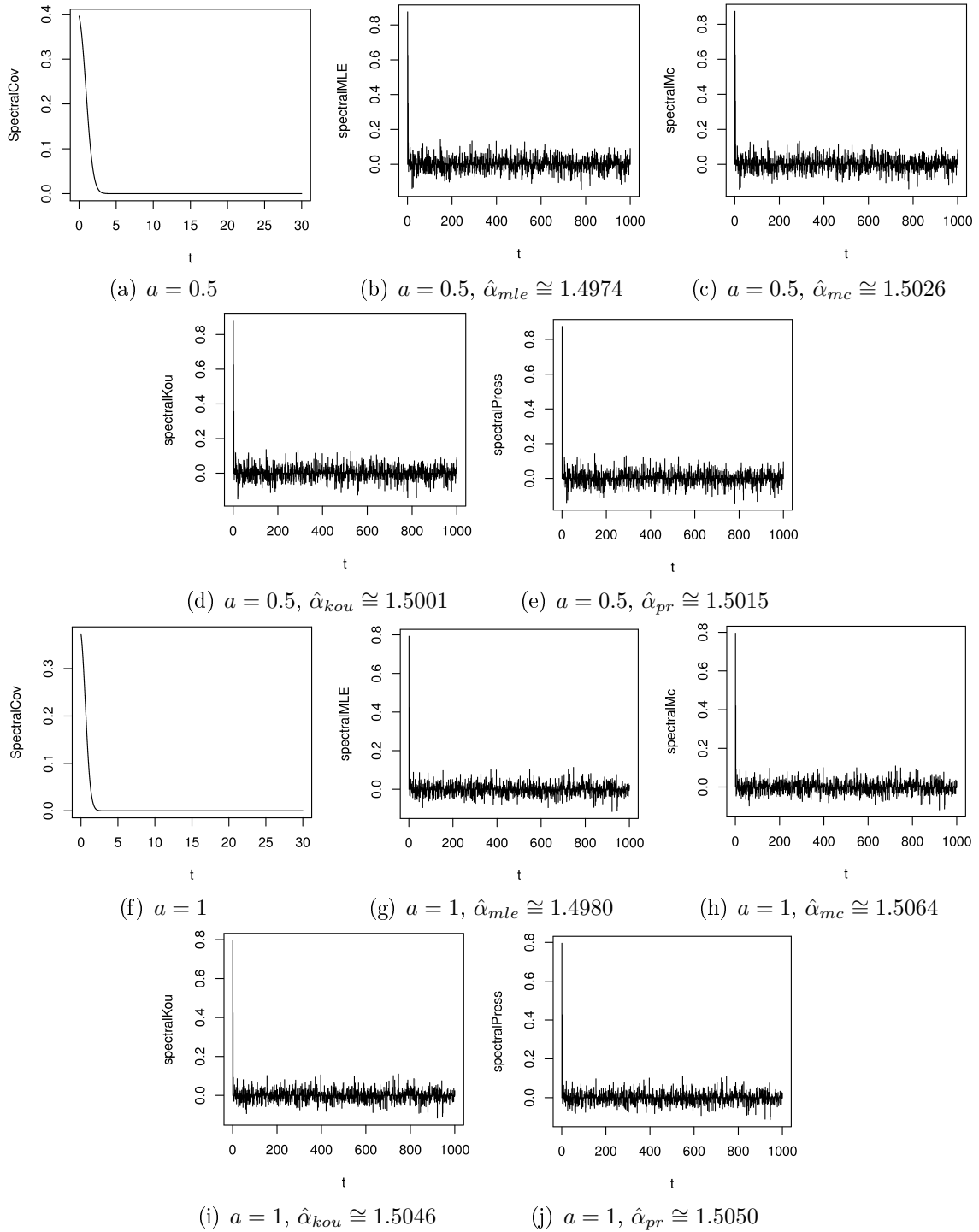


Figura 2.11: Covariância espectral teórica ((a) e (f)) e empírica do processo dado em (2.50), quando $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $re = 1000$. (a)-(e) $a = 0.5$; (f)-(j) $a = 1$.

A Figura 2.11 apresenta as covariâncias espectrais teóricas e empíricas para o processo dado pela expressão (2.50). Note que a expressão (2.56) depende de k

e t ; fixamos $t = h$ como na codiferença. Os gráficos apresentam os resultados da covariância espectral empírica para os quatro estimadores de α , propostos na Subseção 2.2.2. Observe que não há diferença significativa entre os resultados obtidos para a covariância espectral empírica quando mudamos o estimador de α . Isto ocorre devido ao fato de que todas as estimativas de α são muito precisas e com valores muito próximos, como podemos ver na Figura 2.11. Comparando as Figuras 2.9, 2.10 e 2.11, vemos que os estimadores da covariância espectral e da função codiferença (quando $s^* = 0.5612$) apresentam comportamento semelhante.

A covariação do processo dado pela expressão (2.50) é apresentada no Corolário 2.9 a seguir.

Corolário 2.9. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado pela expressão (2.50), com $V_0 = 0$. Então, sua covariação é dada por*

$$sc(V(t), V(t+k)) = \int_0^t e^{-a(2(t-s)^2 + 2(t-s)k + k^2)} ds. \quad (2.57)$$

Prova: Pela Proposição 2.4, como $\rho(t) = e^{-at^2}$, obtemos

$$sc(V(t), V(t+k)) = \int_0^t e^{-a(t-s)^2} e^{-a(t+k-s)^2} ds = \int_0^t e^{-a(2(t-s)^2 + 2(t-s)k + k^2)} ds.$$

□

A Figura 2.12 apresenta a covariação para o processo dado pela expressão (2.50), quando $a \in \{0.5, 1, 2\}$. Observe que a expressão (2.57) também depende de k e t ; fixamos $t = h$ como nas demais medidas de dependência aqui apresentadas. Note que, a medida que a aumenta, a covariação decresce a zero mais rapidamente.

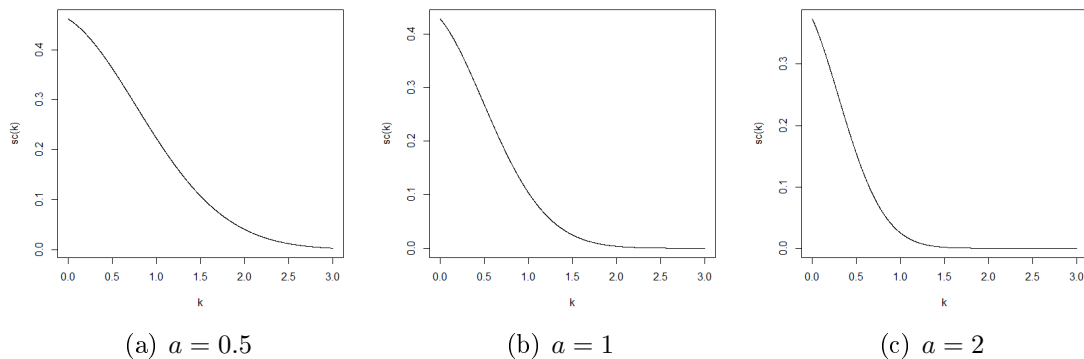


Figura 2.12: Covariação para o processo dado pela expressão (2.50), quando $a \in \{0.5, 1, 2\}$.

Capítulo 3

Propriedades Teóricas

Neste capítulo apresentamos propriedades teóricas relativas à classe de processos descritos no Capítulo 2. Na Seção 3.1 provamos diversas propriedades para o processo tipo OU generalizado, considerando três diferentes tipos de processos para o ruído: Movimento Browniano, α -estável e Lévy. Na Seção 3.2 consideramos uma adaptação de um processo proposto por Klebaner (2005), apresentamos algumas de suas propriedades e sua discretização. Além disso, mostramos as expressões para as medidas de dependência apresentadas no Capítulo 2. Na Seção 3.3 apresentamos um processo com longa dependência, proposto por Samorodnitsky e Taqqu (1994), provamos algumas de suas propriedades e sua discretização. Neste capítulo provamos diversos resultados teóricos novos. Sempre que não houver indicação de referência precedente ao resultado, estamos tratando de um resultado novo.

3.1 Diferentes Ruídos: Movimento Browniano, α -estável e Lévy

Ruído Movimento Browniano

Seja o processo dado por

$$V(t) = V_0\rho(t) + \int_0^t \rho(t-s)dB(s), \quad (3.1)$$

onde $B(\cdot)$ é o movimento Browniano e $\rho(\cdot)$ deve satisfazer o problema de valor inicial (2.28), ou seja, $\rho(0) = 1$ e $\rho'(0) = 0$.

Considere V_0 e $B(\cdot)$ independentes. Além disso, $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$. Seja $I(t) = \int_0^t \rho(t-s)dB(s)$, pelo Teorema 4.11 em Klebaner (2005), temos que $I(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{I(t)}^2)$, onde $\sigma_{I(t)}^2 = \int_0^t [\rho(t-s)]^2 ds$. Na proposição a seguir apresentamos propriedades teóricas do processo dado em (3.1).

Proposição 3.1. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido em (3.1), então*

(i) $\mathbb{E}[V(t)] = 0$, para todo $t \geq 0$.

(ii) $\text{Var}[V(t)] = \rho(t)^2 \sigma_0^2 + \int_0^t [\rho(t-s)]^2 ds$.

(iii) $V(t) \sim \mathcal{N}(0, \rho(t)^2 \sigma_0^2 + \int_0^t [\rho(t-s)]^2 ds)$.

(iv) *Considere $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ tais que $t_1 < t_2$. Então a função de autocovariância é dada por*

$$\gamma_V(t_1, t_2) = \rho(t_1)\rho(t_2)\sigma_0^2 + \int_0^{t_1} \rho(t_1-s)\rho(t_2-s)ds.$$

(v) *Considere $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ tais que $t_1 < t_2$. Então a função de correlação é dada por*

$$R_V(t_1, t_2) = \frac{\gamma_V(t_1, t_2)}{\sqrt{[\rho(t_1)^2 \sigma_0^2 + \int_0^{t_1} [\rho(t_1-s)]^2 ds][\rho(t_2)^2 \sigma_0^2 + \int_0^{t_2} [\rho(t_2-s)]^2 ds]}}.$$

Prova:

(i) Pela expressão (3.6), para todo $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(t)] &= \mathbb{E}[V_0 \rho(t) + \int_0^t \rho(t-s)dB(s)] \\ &= \mathbb{E}[V_0 \rho(t)] + \mathbb{E}[I(t)] = 0, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é obtida pela independência entre V_0 e $B(\cdot)$. Por fim, utilizamos o fato de que $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ e $I(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{I(t)}^2)$.

(ii) Pelo item (i), temos $\mathbb{E}[V(t)] = 0$, logo

$$\begin{aligned} \text{Var}[V(t)] &= \mathbb{E}[V(t)^2] = \mathbb{E}[(V_0 \rho(t) + I(t))(V_0 \rho(t) + I(t))] \\ &= \mathbb{E}[(V_0 \rho(t))^2] + \mathbb{E}[2\rho(t)V_0 I(t)] + \mathbb{E}[I(t)^2]. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}[I(t)] = 0$, segue que $\mathbb{E}[I(t)^2] = \text{Var}[I(t)]$, portanto

$$\begin{aligned}\text{Var}[V(t)] &= \rho(t)^2 \mathbb{E}[V_0^2] + 2\rho(t)\mathbb{E}[V_0]\mathbb{E}[I(t)] + \text{Var}[I(t)] \\ &= \rho(t)^2 \sigma_0^2 + \int_0^t [\rho(t-s)]^2 ds.\end{aligned}$$

(iii) Sabemos que $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ e $I(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{I(t)}^2)$ são independentes. Pela propriedade da soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, obtemos

$$V(t) = V_0\rho(t) + I(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2\rho(t)^2 + \sigma_{I(t)}^2).$$

Assim, obtemos $\sigma_0^2\rho(t)^2 + \sigma_{I(t)}^2 = \sigma_0^2\rho(t)^2 + \int_0^t [\rho(t-s)]^2 ds$ e segue o resultado.

(iv) Considere $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ tais que $t_1 < t_2$. Então a função de autocovariância é dada por

$$\begin{aligned}\gamma_V(t_1, t_2) &= \text{Cov}(V(t_1), V(t_2)) = \mathbb{E}[V(t_1)V(t_2)] - \mathbb{E}[V(t_1)]\mathbb{E}[V(t_2)] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(V_0\rho(t_1) + \int_0^{t_1} \rho(t_1-s)dB(s)\right)\left(V_0\rho(t_2) + \int_0^{t_2} \rho(t_2-s)dB(s)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[V_0^2\rho(t_1)\rho(t_2)] + \mathbb{E}\left[V_0\rho(t_1) \int_0^{t_2} \rho(t_2-s)dB(s)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[V_0\rho(t_2) \int_0^{t_1} \rho(t_1-s)dB(s)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_1} \rho(t_1-s)dB(s)\right)\left(\int_0^{t_2} \rho(t_2-s)dB(s)\right)\right] \\ &= \rho(t_1)\rho(t_2)\sigma_0^2 + 0 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_1} \rho(t_1-s)dB(s)\right)\right. \\ &\quad \left.\left(\int_0^{t_1} \rho(t_2-s)dB(s) + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t_2-s)dB(s)\right)\right] \\ &= \rho(t_1)\rho(t_2)\sigma_0^2 + \int_0^{t_1} \rho(t_1-s)\rho(t_2-s)ds \\ &\quad + \mathbb{E}[I(t_1)]\mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} \rho(t_2-s)dB(s)\right] \\ &= \rho(t_1)\rho(t_2)\sigma_0^2 + \int_0^{t_1} \rho(t_1-s)\rho(t_2-s)ds,\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde utilizamos, na penúltima igualdade da expressão (3.2), a propriedade de incrementos independentes do movimento Browniano e a seguinte propriedade da integral

de Itô,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t)dB(t) \int_0^T g(t)dB(t) \right] = \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Além disso, na última igualdade utilizamos o fato de que $\mathbb{E}[I(t)] = 0$, para todo $t \geq 0$.

(v) Considere $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ tais que $t_1 < t_2$. Então a função de autocorrelação é dada por

$$R_V(t_1, t_2) = \frac{\gamma_V(t_1, t_2)}{\sigma_{V(t_1)}\sigma_{V(t_2)}},$$

onde

$$\sigma_{V(t_i)}^2 = \rho(t_i)^2\sigma_0^2 + \int_0^{t_i} [\rho(t_i - s)]^2 ds, \quad i \in \{1, 2\}.$$

□

Na Proposição 3.2 apresentamos um resultado que será muito útil para as proposições subsequentes.

Proposição 3.2. *Para o processo dado em (3.6), temos*

$$\mathbb{E}[V(t)V(t+h)] = \sigma_0^2\rho(t)\rho(t+h) + \int_0^t \rho(u)\rho(u+h)du, \quad \forall h, t \geq 0.$$

Prova: Basta utilizar a Proposição 3.1(iv), com $t_1 = t$ e $t_2 = t+h$, então

$$\mathbb{E}[V(t)V(t+h)] = \sigma_0^2\rho(t)\rho(t+h) + \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+h-s)ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = t - s$, obtemos $du = -ds$ e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(t)V(t+h)] &= \sigma_0^2\rho(t)\rho(t+h) + \int_t^0 \rho(u)\rho(u+h)(-du) \\ &= \sigma_0^2\rho(t)\rho(t+h) + \int_0^t \rho(u)\rho(u+h)du. \end{aligned}$$

e isto completa a prova. □

Na proposição a seguir apresentamos uma condição para a estacionariedade do processo dado em (3.1).

Proposição 3.3. *O processo dado em (3.1), com $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$, é estacionário se, e somente se,*

$$\rho(t) = e^{-\theta t}, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \sigma_0^2 = \frac{1}{2\theta},$$

onde σ_0^2 é a variância de V_0 .

Prova: Já vimos no Capítulo 2 que se $\rho(t) = e^{-\theta t}$ e $\sigma_0^2 = \frac{1}{2\theta}$, então $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estacionário.

Por outro lado, suponha que $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é estacionário. Portanto,

$$\mathbb{E}[V(t)V(t+h)] = \sigma^2 \rho(t)\rho(t+h) + \int_0^t \rho(u)\rho(u+h)du$$

não depende de t . Seja $\psi(t, h) = \int_0^t \rho(u)\rho(u+h)du$. Então,

$$\mathbb{E}[V(t)V(t+h)] = \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, h) + \psi(t, h). \quad (3.3)$$

Tomando as derivadas com respeito a t nos dois lados da igualdade (3.3), obtemos que ψ deve satisfazer

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, h) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, h) = 0$$

com a condição de contorno $\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, h) = \rho(0)\rho(0+h) = \rho(h)$, $h \geq 0$, pois $\rho(0) = 1$. Resolvendo esta equação, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, h)e^{t/\sigma^2} + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, h)e^{t/\sigma^2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, h)e^{t/\sigma^2} \right] &= 0 \Rightarrow \sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, h)e^{t/\sigma^2} = g(h). \end{aligned}$$

Tomando $t = 0$ e utilizando a condição de contorno, temos

$$\sigma^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, h) = g(h) \Rightarrow \sigma^2 \rho(h) = g(h).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, h) &= \rho(h)e^{-t/\sigma^2} \Rightarrow \rho(t)\rho(t+h) = \rho(h)e^{-t/\sigma^2} \Rightarrow \\ \rho(t)\rho(t+0) &= \rho(0)e^{-t/\sigma^2} \Rightarrow \rho^2(t) = e^{-t/\sigma^2} \Rightarrow \rho(t) = e^{-t/2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Logo, seja $\theta = \frac{1}{2\sigma^2}$ e teremos o resultado desejado.

□

A próxima proposição é sobre a propriedade de Markov do processo dado em

(3.1).

Proposição 3.4. *Suponha que $\rho(t) \neq 0, \forall t \geq 0$. Então, o processo dado em (3.1) é de Markov se, e somente se, para algum $\theta > 0$,*

$$\rho(t) = e^{-\theta t} \text{ ou } \rho(t) = 1, \forall t \geq 0. \quad (3.4)$$

Prova: Já vimos no Capítulo 2 que se $\rho(t) = e^{-\theta t}$ ou $\rho(t) = 1$, então $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Markov.

Para provar a recíproca, é suficiente mostrar que a função $\rho(\cdot)$ satisfaz a seguinte equação (veja Kannappan, 2009, corolário 1.36.)

$$\rho(t+h) = \rho(t)\rho(h), \forall t, h \geq 0.$$

Lembre que um processo Gaussiano $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é Markov se, e somente se, (veja Kallenberg, 2002, proposição 13.7)

$$\mathbb{E}[X(s)X(u)] \mathbb{E}[X^2(t)] = \mathbb{E}[X(s)X(t)] \mathbb{E}[X(t)X(u)], \forall 0 \leq s \leq t \leq u.$$

Então, se $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Markov, temos

$$\mathbb{E}[V_0V(t+h)] \mathbb{E}[V^2(t)] = \mathbb{E}[V_0V(t)] \mathbb{E}[V(t)V(t+h)], \forall h, t \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \rho(0) \rho(t+h) \left[\sigma^2 \rho^2(t) + \int_0^t \rho^2(u) du \right] \\ &= \sigma^2 \rho(0) \rho(t) \left[\sigma^2 \rho(t) \rho(t+h) + \int_0^t \rho(u) \rho(u+h) du \right] \Rightarrow \\ & \rho(t+h) \left[\sigma^2 \rho^2(t) + \int_0^t \rho^2(u) du \right] = \rho(t) \left[\sigma^2 \rho(t) \rho(t+h) + \int_0^t \rho(u) \rho(u+h) du \right] \Rightarrow \\ & \sigma^2 \rho^2(t) \rho(t+h) + \rho(t+h) \int_0^t \rho^2(u) du \\ &= \sigma^2 \rho^2(t) \rho(t+h) + \rho(t) \int_0^t \rho(u) \rho(u+h) du \Rightarrow \\ & \rho(t+h) \int_0^t \rho^2(u) du = \rho(t) \int_0^t \rho(u) \rho(u+h) du \Rightarrow \frac{\rho(t+h)}{\rho(t)} = \frac{\int_0^t \rho(u) \rho(u+h) du}{\int_0^t \rho^2(u) du}. \end{aligned}$$

Ainda, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho(t+h)}{\rho(t)} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\int_0^t \rho(u)\rho(u+h)du}{\int_0^t \rho^2(u)du} \right] = \\ &= \frac{\rho(t)\rho(t+h) \int_0^t \rho^2(u)du - \rho^2(t) \int_0^t \rho(u)\rho(u+h)du}{\left(\int_0^t \rho^2(u)du \right)^2} = 0. \end{aligned}$$

Logo, a função $\frac{\rho(t+h)}{\rho(t)} = \psi(h)$ não depende de t e

$$\rho(t+h) = \rho(t)\psi(h), \quad \forall h, t \geq 0.$$

Tomando $t = 0$, temos $\psi(h) = \rho(h)$, $\forall h \geq 0$. Então,

$$\rho(t+h) = \rho(t)\rho(h), \quad \forall t, h \geq 0.$$

o que completa a prova. □

Ruído α -estável

Considere o processo dado por

$$V(t) = V_0\rho(t) + \int_0^t \rho(t-s)dL(s), \quad (3.5)$$

onde $L(\cdot)$ é processo α -estável simétrico com $1 < \alpha < 2$.

Considere V_0 e $L(\cdot)$ independentes. Além disso, $V_0 \sim S_\alpha(\sigma_0, 0, 0)$. Na Proposição 3.5 a seguir apresentamos propriedades teóricas do processo dado em (3.5).

Proposição 3.5. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido em (3.5), então*

(i) $\mathbb{E}[V(t)] = 0$, para todo $t \geq 0$.

(ii) $V(t) \sim S_\alpha(\sigma_{V(t)}, 0, 0)$, onde $\sigma_{V(t)}^\alpha = |\rho(t)|^\alpha \sigma_0^\alpha + \int_0^t |\rho(t-s)|^\alpha ds$.

Prova: Considere $I(t) = \int_0^t \rho(t-s)dL(s)$.

(i) Como estamos considerando $1 < \alpha < 2$, existe média para a distribuição α -estável, ver propriedade 1.2.16 em Samorodnitsky e Taqqu (1994) (a variância é

infinita). Como $V_0 \sim S(\sigma_0, 0, 0)$, temos que $\mathbb{E}[V_0\rho(t)] = \rho(t)\mathbb{E}[V_0] = 0$.

Além disso, temos que $I(t) \sim S_\alpha(\sigma_{I(t)}, 0, 0)$, onde $\sigma_{I(t)}^\alpha = \int_0^t |\rho(t-s)|^\alpha ds$ (proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu, 1994). Portanto, $\mathbb{E}[I(t)] = 0$.

Como V_0 e $L(\cdot)$ são independentes, segue que V_0 e $I(t)$ são independentes. Portanto,

$$\mathbb{E}[V(t)] = \mathbb{E}[V_0\rho(t)] + \mathbb{E}[I(t)] = 0.$$

(ii) Se $V_0 \sim S(\sigma_0, 0, 0)$, pela propriedade 1.2.3 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), temos que $V_0\rho(t) \sim S_\alpha(|\rho(t)|\sigma_0, 0, 0)$.

Além disso, $I(t) \sim S_\alpha(\sigma_{I(t)}, 0, 0)$. Pela independência entre V_0 e $I(t)$ e pela propriedade 1.2.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), temos

$$V(t) = V_0\rho(t) + I(t) \sim S_\alpha(\sigma_{V(t)}, 0, 0),$$

onde $\sigma_{V(t)}^\alpha = |\rho(t)|^\alpha\sigma_0^\alpha + \int_0^t |\rho(t-s)|^\alpha ds$. □

Ruído Lévy

Considere o processo dado por

$$V(t) = V_0\rho(t) + \int_0^t \rho(t-s)dL(s), \quad (3.6)$$

onde $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Lévy com tripla geradora (G, τ, β) . Ou seja, a função característica de $L(t)$ é dada por

$$\mathbb{E}(e^{izL(t)}) = e^{t\psi(z)}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

onde

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}z^2G + \int_{\mathbb{R}} [e^{izy} - 1 - izy \mathbb{I}_D(y)] \tau(dy) + i\beta z. \quad (3.8)$$

Queremos encontrar a distribuição da variável $V(t)$. Para exemplificar, vamos iniciar com um caso particular de processo de Lévy e de função $\rho(\cdot)$, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. Considere $\rho(t) = e^{-\theta t}$ em (3.6), ou seja, a expressão (3.6) define o processo OU, com ruído Lévy. Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy gerado pela tripla $(G, \lambda\delta_1, \beta)$, onde δ_1 é a medida Delta de Dirac no ponto 1. Suponha $\theta \geq 0$ e que $V_0 = v_0$ é determinístico. Então, $V(t)$ tem distribuição infinitamente divisível

com tripla geradora $(A_t, \nu_t, \gamma_{t, v_0})$ dada por

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{G}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}), \\ \nu_t(B) &= \lambda \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\theta s}) ds, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ \gamma_{t, v_0} &= e^{-\theta t} \left(v_0 - \frac{\beta}{\theta} \right) + \frac{\beta}{\theta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vamos mostrar que $V(t)$ é infinitamente divisível com tripla geradora dada em (3.9). Utilizando a seguinte propriedade de medida Delta de Dirac

$$\int g(y) \lambda \delta_1(dy) = \lambda g(1),$$

temos que o expoente característico do processo de Lévy é dado por

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -\frac{1}{2}z^2G + \int_{\mathbb{R}} [e^{izy} - 1 - izy \mathbb{I}_D(y)] \lambda \delta_1(dy) + i\beta z \\ &= -\frac{1}{2}z^2G + \lambda [e^{iz} - 1 - iz] + i\beta z, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $D = \{x : |x| \leq 1\}$ e $\psi(z) = \ln(\varphi_{L(1)}(z))$ ($\varphi_{L(1)}(\cdot)$ é a função característica de $L(1)$). Então $\psi(e^{-\theta s}z)$ é contínua em $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$. Seja $s_{n,j} = \frac{jt}{2^n}$, então

$$\int_0^t \psi(e^{-\theta s}z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \psi(e^{-\theta s_{n,j}}z).$$

Considere

$$Y_n = e^{-\theta t} v_0 + \sum_{j=1}^{2^n} e^{-\theta s_{n,j}} (L(s_{n,j}) - L(s_{n,j-1})).$$

A distribuição de Y_n é infinitamente divisível (pelo lema 7.4 em Sato, 1999) para cada n . Temos

$$\mathbb{E}[e^{izY_n}] = \exp \left[ie^{-\theta t} v_0 z + \frac{t}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \psi(e^{-\theta s_{n,j}}z) \right].$$

Como $\int_0^t \psi(e^{-\theta s}z) ds$ é contínua em z , temos

$$\mathbb{E}[e^{izY_n}] \longrightarrow \exp \left[ie^{-\theta t} v_0 z + \int_0^t \psi(e^{-\theta s}z) ds \right], \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Pela proposição 2.5(viii) em Sato (1999), o lado direito da expressão (3.11) é função característica de uma probabilidade. Pelo lema 7.8 em Sato (1999), esta probabilidade é infinitamente divisível.

Falta mostrar quem é a tripla geradora de $V(t)$, denotada por $(A_t, \nu_t, \gamma_{t, v_0})$. Utilizando a expressão (3.10), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \psi(e^{-\theta s} z) ds &= \\
&= \int_0^t \left[-\frac{1}{2} (e^{-\theta s} z)^2 G + \lambda \left[e^{ie^{-\theta s} z} - 1 - ie^{-\theta s} z \right] + i\beta e^{-\theta s} z \right] ds \\
&= -\frac{1}{2} G \int_0^t e^{-2\theta s} z^2 ds + i\beta z \int_0^t e^{-\theta s} ds + \tilde{I} \\
&= \frac{z^2}{2} \frac{G}{2\theta} (e^{-2\theta t} - 1) + iz \frac{\beta}{\theta} (1 - e^{-\theta t}) + \tilde{I}, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{I} = \int_0^t \lambda \left[e^{ie^{-\theta s} z} - 1 - ie^{-\theta s} z \right] ds$. Note que

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \lambda \int_0^t e^{ie^{-\theta s} z} ds - \lambda t - \lambda iz \int_0^t e^{-\theta s} ds = \lambda \int_0^t e^{ie^{-\theta s} z} ds - \lambda t - iz \frac{\lambda}{\theta} (1 - e^{-\theta t}) \\
&= \frac{\lambda}{\theta} \int_{e^{-\theta t}}^1 \frac{e^{ixz}}{x} dx - \lambda t - iz \frac{\lambda}{\theta} (1 - e^{-\theta t}), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

onde na última igualdade na expressão (3.13) fizemos a mudança de variáveis: $x = e^{-\theta s} \Rightarrow \frac{dx}{ds} = e^{-\theta s}(-\theta) \Rightarrow ds = -\frac{1}{\theta x} dx$. Considere

$$I = \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x)] \tilde{\nu}_t(dx), \tag{3.14}$$

onde

$$\tilde{\nu}_t(B) = \lambda \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\theta s}) ds, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{3.15}$$

Vamos definir $\tilde{\nu}_t(B)$ para qualquer intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, já que os intervalos são geradores de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Note que $|e^{-\theta s}| \leq 1$, então

$$\begin{aligned}
e^{-\theta s} \in [a, b], a, b > 0 &\Leftrightarrow a \leq e^{-\theta s} \leq b \Leftrightarrow \ln(a) \leq -\theta s \leq \ln(b) \\
&\Leftrightarrow s \in \left[-\frac{\ln(b)}{\theta}, -\frac{\ln(a)}{\theta} \right].
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\tilde{\nu}_t([a, b]) = \lambda \int_0^t \mathbb{I}_{[-\frac{\ln(b)}{\theta}, -\frac{\ln(a)}{\theta}]}(s) ds = \frac{\lambda}{\theta} (\ln(b) - \ln(a)), \quad \text{se } [a, b] \subseteq [e^{-\theta t}, 1].$$

Assim, temos

$$\tilde{\nu}_t([a, b]) = \int_a^b g(x) dx, \quad \text{onde } g(x) = \frac{\lambda}{\theta x} \mathbb{I}_{[e^{-\theta t}, 1]}(x). \quad (3.16)$$

Utilizando a expressão (3.16) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_{e^{-\theta t}}^1 \frac{\lambda}{\theta x} (e^{izx} - 1 - izx) dx = \frac{\lambda}{\theta} \int_{e^{-\theta t}}^1 \frac{e^{izx}}{x} dx - \frac{\lambda}{\theta} \int_{e^{-\theta t}}^1 \frac{1}{x} dx - iz \frac{\lambda}{\theta} \int_{e^{-\theta t}}^1 dx \\ &= \frac{\lambda}{\theta} \int_{e^{-\theta t}}^1 \frac{e^{izx}}{x} dx + \lambda t - iz \frac{\lambda}{\theta} (1 - e^{-\theta t}). \end{aligned}$$

Portanto, $I = \tilde{I}$. Assim, podemos reescrever (3.12) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(e^{-\theta s} z) ds &= -\frac{z^2}{2} \frac{G}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) + iz \frac{\beta}{\theta} (1 - e^{-\theta t}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x)] \tilde{\nu}_t(dx), \end{aligned} \quad (3.17)$$

Falta mostrar que $\tilde{\nu}$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \tilde{\nu}(dx) < \infty$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \tilde{\nu}(dx) = \int_{|x| \leq 1} x^2 \tilde{\nu}(dx) + \int_{|x| > 1} \tilde{\nu}(dx).$$

Logo, basta mostrar que $\int_{|x| \leq 1} x^2 \tilde{\nu}(dx) < \infty$ e $\int_{|x| > 1} \tilde{\nu}(dx) < \infty$.

Temos $\int_{|x| > 1} \tilde{\nu}(dx) = 0 < \infty$.

Por fim, temos

$$\int_{|x| \leq 1} x^2 \tilde{\nu}(dx) = \int_{e^{-\theta t}}^1 x^2 \frac{\lambda}{\theta x} dx = \frac{\lambda}{\theta} \int_{e^{-\theta t}}^1 x dx = \frac{\lambda}{\theta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{e^{-\theta t}}^1 = \frac{\lambda}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) < \infty.$$

Portanto, $\tilde{\nu}$ satisfaz as condições de medida de Lévy e podemos tomar $\nu = \tilde{\nu}$. Pela expressão (3.11) em conjunto com (3.17), obtemos a tripla geradora $(A_t, \nu_t, \gamma_{t, \nu_0})$ dada pela expressão (3.9).

□

No Lema A.1, presente no Apêndice A, mostramos uma generalização do resultado obtido no Exemplo 3.1.

No lema a seguir, provamos um resultado para o caso geral do processo dado em (3.6).

Lema 3.1. *Considere o processo dado em (3.6). Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy gerado pela tripla (G, τ, β) . Suponha que $\tau(\mathbb{R}) < \infty$, $V_0 = v_0$ seja determinístico e que a função $\rho(\cdot)$ seja contínua tal que $\rho(s) \neq 0$, para $0 \leq s \leq t$. Então, para $t > 0$ fixo, $V(t)$ é infinitamente divisível com tripla geradora $(A_t, \nu_t, \gamma_{t, v_0})$, dada por*

$$\begin{aligned} A_t &= G \int_0^t \rho^2(t-s) ds, \\ \nu_t(B) &= \int_{\mathbb{R}} \tau(dy) \int_0^t \mathbb{I}_B(y \rho(t-s)) ds, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ \gamma_{t, v_0} &= \rho(t)v_0 + \beta \int_0^t \rho(t-s) ds + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} y \rho(t-s) [\mathbb{I}_D(y \rho(t-s)) - \mathbb{I}_D(y)] \tau(dy), \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $D = \{x : |x| \leq 1\}$.

Prova: Seja $g(\cdot)$ uma função contínua em $[s, t]$ com $0 \leq s < t < \infty$, logo

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(iz \int_s^t g(u) dL(u) \right) \right] = \exp \left[\int_s^t \psi(z g(u)) du \right], \tag{3.19}$$

para $z \in \mathbb{R}$, onde $\psi(z) = \ln \varphi_{L(1)}(z)$ ($\varphi_{L(1)}(\cdot)$ é a função característica de $L(1)$). De fato, seja $\mathcal{P}_n(\xi)$ uma partição de $[s, t]$, tal que $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_n(\xi)\| = 0$, onde $\|\mathcal{P}_n(\xi)\| = \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1})$. Seja ξ_k um ponto de $[t_{k-1}, t_k]$, a soma de Stieltjes, S_n , é dada por

$$S_n(\mathcal{P}_n(\xi)) = \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(L(t_j) - L(t_{j-1})). \tag{3.20}$$

Então, a função característica de S_n é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(iz \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(L(t_j) - L(t_{j-1})) \right) \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(izg(\xi_j)(L(t_j) - L(t_{j-1})))] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(izg(\xi_j)(L(t_j - t_{j-1})))] \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^n \exp((t_j - t_{j-1})\psi(zg(\xi_j))) = \exp \left[\sum_{j=1}^n \psi(zg(\xi_j))(t_j - t_{j-1}) \right].$$

Como S_n converge em probabilidade para $\int_s^t g(u)dL(u)$, também converge em distribuição. Logo, pelo teorema da continuidade de Lévy, $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$, quando $n \rightarrow \infty$, onde $\varphi(z)$ é a função característica da integral estocástica. Portanto,

$$\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\sum_{j=1}^n \psi(zg(\xi_j))(t_j - t_{j-1}) \right] = \exp \left[\int_s^t \psi(zg(u))du \right],$$

onde a última igualdade vale pela continuidade de $\psi(\cdot)$, $g(\cdot)$ e da função exponencial.

Assim, segue que

$$\mathbb{E}[e^{izV(t)}] = \exp \left[iz\rho(t)v_0 + \int_0^t \psi(z\rho(t-s))ds \right],$$

onde

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}z^2G + \int_{\mathbb{R}} [e^{izy} - 1 - izy\mathbb{I}_D(y)] \tau(dy) + i\beta z. \quad (3.21)$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(z\rho(t-s))ds &= \int_0^t \left[-\frac{1}{2}(z\rho(t-s))^2G \right. \\ &+ \left. \int_{\mathbb{R}} [e^{iz\rho(t-s)y} - 1 - iz\rho(t-s)y\mathbb{I}_D(y)] \tau(dy) + i\beta z\rho(t-s) \right] ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t z^2G\rho^2(t-s)ds + i \int_0^t \beta z\rho(t-s)ds + \tilde{I}, \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{I} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [e^{iz\rho(t-s)y} - 1 - iz\rho(t-s)y\mathbb{I}_D(y)] \tau(dy)ds.$$

Queremos mostrar que este \tilde{I} pode ser escrito da seguinte forma

$$I = \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx\mathbb{I}_D(x)) \nu_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy\rho(t-s)(\mathbb{I}_D(y\rho(t-s)) - \mathbb{I}_D(y))\tau(dy), \quad (3.22)$$

onde

$$\nu_t(dx) = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_0^t \mathbb{I}_{\{y\rho(t-s)\}}(x) ds \tau(dy) \right) dx. \quad (3.23)$$

Vamos mostrar a igualdade $\tilde{I} = I$.

Note que se mostrarmos a igualdade a seguir,

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (e^{iz\rho(t-s)y} - 1)\tau(dy) &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x)] \tilde{\nu}_t(dx) \\ &\quad + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(e^{-cs}y)\tau(dy), \end{aligned} \quad (3.24)$$

obtemos $\tilde{I} = I$, pois basta subtrair o termo $i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y)\rho(dy)$ dos dois lados da igualdade (3.24) e teremos

$$\begin{aligned} &\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (e^{iz\rho(t-s)y} - 1)\tau(dy) - i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y)\tau(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x)] \tilde{\nu}_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y\rho(t-s))\tau(dy) \\ &\quad - i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y)\tau(dy) \Leftrightarrow \tilde{I} = I. \end{aligned}$$

Veja que, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \nu_t(B) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x) \nu_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{y\rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_B(x) \mathbb{I}_{\{y\rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Note que podemos aplicar o Teorema de Fubini em (3.25), pois a função do integrando é positiva. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \nu_t(B) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x) \mathbb{I}_{\{y\rho(t-s)\}}(x) dx \right) ds \tau(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \mathbb{I}_B(y\rho(t-s)) ds \tau(dy) = \int_{\mathbb{R}} \tau(dy) \int_0^t \mathbb{I}_B(y\rho(t-s)) ds. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Portanto, obtemos para o lado direito de (3.24)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x)] \nu_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y \rho(t-s)) \tau(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \nu_t(dx) - i \int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \nu_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y \rho(t-s)) \tau(dy) \\
&= A - iB + iC,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \nu_t(dx), & B &= \int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \nu_t(dx) \\
C &= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y \rho(t-s)) \tau(dy),
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t [e^{izx} - 1] \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [e^{izy \rho(t-s)} - 1] \tau(dy) ds.
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade aplicamos o Teorema de Fubini.

Ainda temos

$$\begin{aligned}
B &= \int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t zx \mathbb{I}_D(x) \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} zy \rho(t-s) \mathbb{I}_D(y \rho(t-s)) \tau(dy) ds,
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade novamente aplicamos o Teorema de Fubini.

Portanto, temos $B = C$, logo $-iB + iC = 0$ e A é igual ao lado esquerdo da expressão (3.24).

Falta mostrar que ν satisfaz $\int_{\mathbb{R}}(x^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}}(x^2 \wedge 1)\nu(dx) = \int_{|x| \leq 1} x^2 \nu(dx) + \int_{|x| > 1} \nu(dx),$$

logo, basta mostrar que $\int_{|x| \leq 1} x^2 \nu(dx) < \infty$ e $\int_{|x| > 1} \nu(dx) < \infty$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| > 1} \nu(dx) &= \int_{|x| > 1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x| > 1} \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|y| > \frac{1}{|\rho(t-s)|}\}} \tau(dy) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \mathbb{I}_{\{|y| > \frac{1}{|\rho(t-s)|}\}} ds \tau(dy) \leq t \int_{\mathbb{R}} \max_{0 \leq s \leq t} \left\{ \mathbb{I}_{\{|y| > \frac{1}{|\rho(t-s)|}\}} \right\} \tau(dy) \\ &= t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|y| > \frac{1}{|\rho(t-s_1)|}\}} \tau(dy), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vale, pois $\int_{|x| > 1} \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) dx \neq 0$, se $x = y \rho(t-s)$, logo $|x| = |\rho(t-s)||y| > 1 \Leftrightarrow |y| > \frac{1}{|\rho(t-s)|}$.

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 1} x^2 \nu(dx) &= \int_{|x| \leq 1} x^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\ &= \int_{|x| \leq 1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t x^2 \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x| \leq 1} x^2 \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|y| \leq \frac{1}{|\rho(t-s)|}\}} \rho^2(t-s) y^2 \tau(dy) ds = \int_{\mathbb{R}} y^2 \int_0^t \mathbb{I}_{\{|y| \leq \frac{1}{|\rho(t-s)|}\}} \rho^2(t-s) ds \tau(dy) \\ &\leq t \int_{\mathbb{R}} y^2 \max_{0 \leq s \leq t} \left\{ \mathbb{I}_{\{|y| \leq \frac{1}{|\rho(t-s)|}\}} \rho^2(t-s) \right\} \tau(dy) = t \rho^2(t-s_2) \int_{|y| \leq \frac{1}{|\rho(t-s_2)|}} y^2 \tau(dy), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vale, pois $\int_{|x| \leq 1} x^2 \mathbb{I}_{\{y \rho(t-s)\}}(x) dx \neq 0$, se $x = y \rho(t-s)$, assim $|x| = |\rho(t-s)||y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{|\rho(t-s)|}$.

Estas expressões devem ser finitas, pois τ deve satisfazer $\int_{\mathbb{R}}(x^2 \wedge 1)\tau(dx) < \infty$. Isto implica que $\tau(|x| \geq 1) < \infty$, além disso, $\tau(|x| \leq 1) < \infty$ ou $\tau(A) < \infty$, para todo conjunto boreliano A tal que 0 está no interior de A^c (ver Kyprianou, 2014).

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{izV(t)}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2}z^2 \int_0^t G\rho^2(t-s)ds + iz \left[\rho(t)v_0 + \beta \int_0^t \rho(t-s)ds \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} y \rho(t-s)(\mathbb{I}_D(y\rho(t-s)) - \mathbb{I}_D(y))\tau(dy) \right] \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx\mathbb{I}_D(x))\nu_t(dx) \right\}. \end{aligned}$$

Logo, $V(t)$ é infinitamente divisível com tripla geradora dada por (3.18). □

Note que, no Lema 3.1, provamos que cada variável aleatória $V(t)$ ($t > 0$ fixo) possui distribuição infinitamente divisível, onde a tripla geradora é dada em (3.18). Na seção seguinte consideramos uma adaptação de um processo proposto por Klebaner (2005).

3.2 Processo Particular (Klebaner, 2005)

Considere a função $\rho(t) = t^{-d}$, o processo dado pela expressão (2.23), resultante é dado por

$$V(t) = V_0 t^{-d} + \int_0^t (t-s)^{-d} dL(s), \quad (3.27)$$

onde $L(\cdot)$ é o processo de Lévy padrão α -estável. Note que a função $\rho(\cdot)$ não satisfaz o problema de valor inicial dado pela expressão (2.24), pois $\rho(0) \neq 1$. O processo definido em (3.27) foi inspirado em um exemplo de Klebaner (2005). A integral estocástica em (3.27) está bem definida se $\int_0^t |(t-s)^{-d}|^\alpha ds < \infty$. Temos que, para $0 < s < t < \infty$,

$$\int_0^t |(t-s)^{-d}|^\alpha ds = \int_0^t (t-s)^{-\alpha d} ds.$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis $u = t - s$, obtemos

$$\int_0^t |(t-s)^{-d}|^\alpha ds = \int_0^t u^{-\alpha d} du = \frac{u^{-\alpha d+1}}{-\alpha d+1} \Big|_0^t = \frac{1}{-\alpha d+1} \left[t^{-\alpha d+1} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha d+1} \right]. \quad (3.28)$$

A expressão (3.28) é finita se $-\alpha d + 1 > 0$, logo devemos impor a condição $d < \frac{1}{\alpha}$

para que a integral estocástica em (3.27) esteja bem definida.

No Corolário 3.1 a seguir, provamos as funções codiferença, covariância espectral e covariação teóricas, considerando que $V_0 = 0$.

Corolário 3.1. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão (3.27), com $V_0 = 0$. As suas funções codiferença, covariância espectral e covariação teóricas são dadas, respectivamente, por*

$$\tau_V(s; k, t) = |s|^\alpha \int_0^t (|u+k|^{-\alpha d} + |u|^{-\alpha d} - |(u+k)^{-d} - u^{-d}|^\alpha) du, \quad (3.29)$$

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t s^{-d}(s+k)^{-d} [s^{-2d} + (s+k)^{-2d}]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds, \quad (3.30)$$

$$sc(V(t), V(t+k)) = \int_0^t s^{-d}(s+k)^{-d} ds. \quad (3.31)$$

Prova: Pelas Proposições 2.2(iii), 2.3 e 2.4, como $\rho(t) = t^{-d}$, obtemos o resultado deste Corolário. □

Realizamos um estudo de simulação, apresentando a série simulada em conjunto com suas funções codiferença teórica e empírica, com o intuito de verificar o decaimento da função codiferença. Para a geração do processo, utilizamos a discretização dada na Proposição 3.6 a seguir.

Proposição 3.6. *Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo definido pela expressão (3.27). Uma forma discreta para este processo é dada por*

$$V(kh) = V_0 (kh)^{-d} + \varepsilon_{k,h},$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$, n é o tamanho amostral, h é tamanho da discretização e $\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, tal que $\sigma_{k,h}^\alpha = \frac{(kh)^{-\alpha d + 1}}{-\alpha d + 1}$.

Prova: Pela expressão (3.27), temos que

$$V(kh) = V_0 (kh)^{-d} + \varepsilon_{k,h},$$

onde $\varepsilon_{k,h} = \int_0^{kh} (kh-s)^{-d} dL(s)$. Pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taquq (1994), temos que $\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_{k,h}, 0, 0)$, onde

$$\sigma_{k,h}^\alpha = \int_0^{kh} |(kh-s)^{-d}|^\alpha = \int_0^{kh} u^{-\alpha d} du = \frac{(kh)^{-\alpha d + 1}}{-\alpha d + 1}. \quad \square$$

Observação 3.1. Note que a distribuição de $\varepsilon_{k,h}$ depende de k , assim como a distribuição de $V(kh)$. Mesmo considerando a primeira diferença do processo, não obtemos estacionariedade.

Consideramos os parâmetros variando nos seguintes conjuntos:

- $\alpha \in \{1.3, 1.8, 2\}$;
- $d \in \{0.2, 0.3, 0.4\}$;
- $T = 500$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$ e $n = \frac{T}{h}$;
- $s = 0.01$ (parâmetro da codiferença empírica).

As Figuras 3.1-3.3 apresentam a série temporal, a função codiferença teórica e a função codiferença empírica, quando $\alpha = 1.3$. Para os demais casos de α , veja o Apêndice B. Podemos observar que, na maior parte dos casos apresentados, a função codiferença teórica decai lentamente a zero, assim como a sua respectiva codiferença empírica.

Observação 3.2. (a) A função codiferença teórica deste processo, dada na expressão (3.29), depende de k e t . As Figuras 3.1-3.3 apresentam os resultados quando fixamos $t = h$ na expressão (3.29). Nestas condições, temos que

$$\tau_V(s; k) = |s|^\alpha \int_0^h (|u+k|^{-\alpha d} + |u|^{-\alpha d} - |(u+k)^{-d} - u^{-d}|^\alpha) du.$$

(b) Utilizamos a codiferença empírica proposta por Rosadi e Deistler (2009) para processos estacionários, mesmo que o processo não seja estacionário. Para trabalhos futuros, vamos estudar nova definição para codiferença empírica para processos não estacionários.

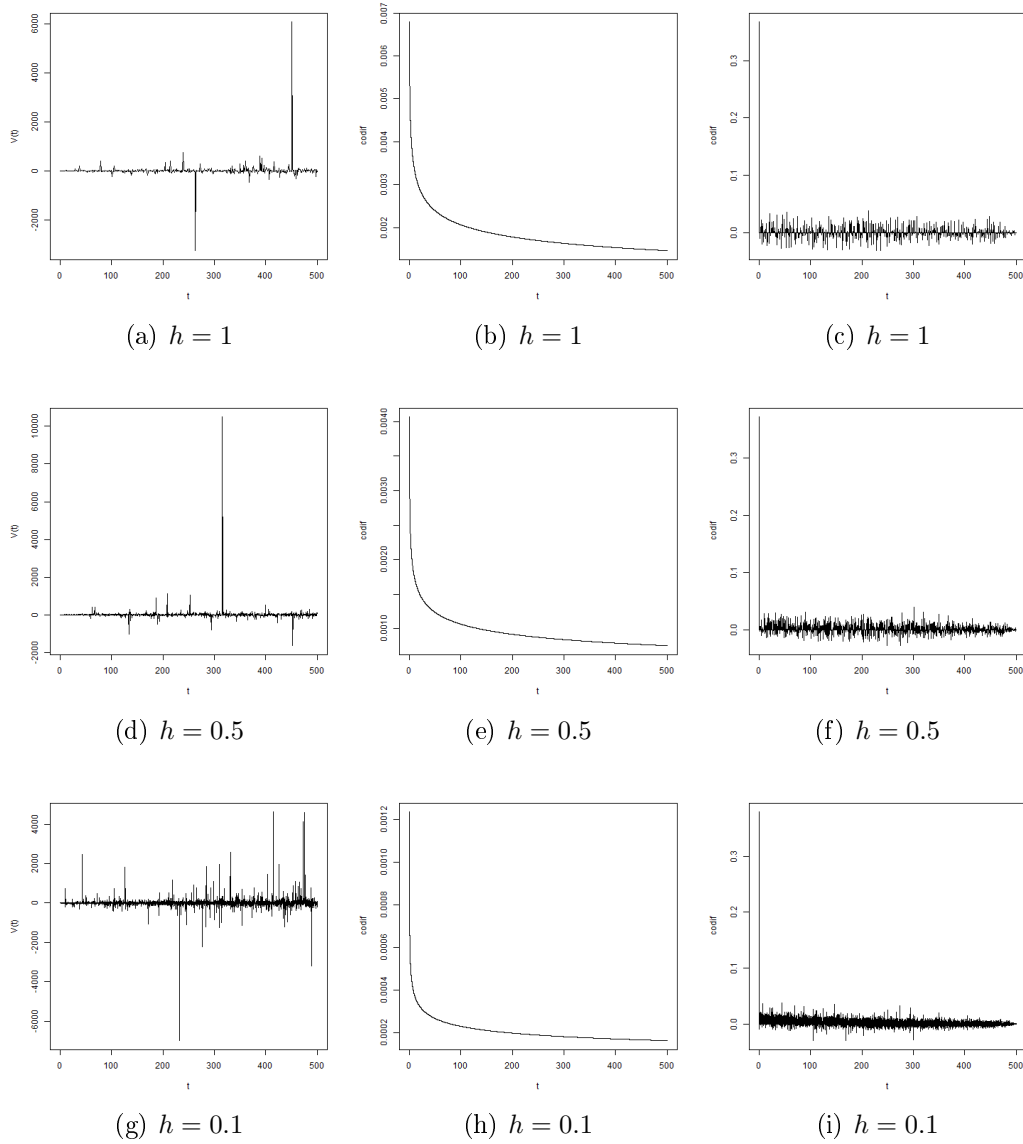


Figura 3.1: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 1.3$, $d = 0.2$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

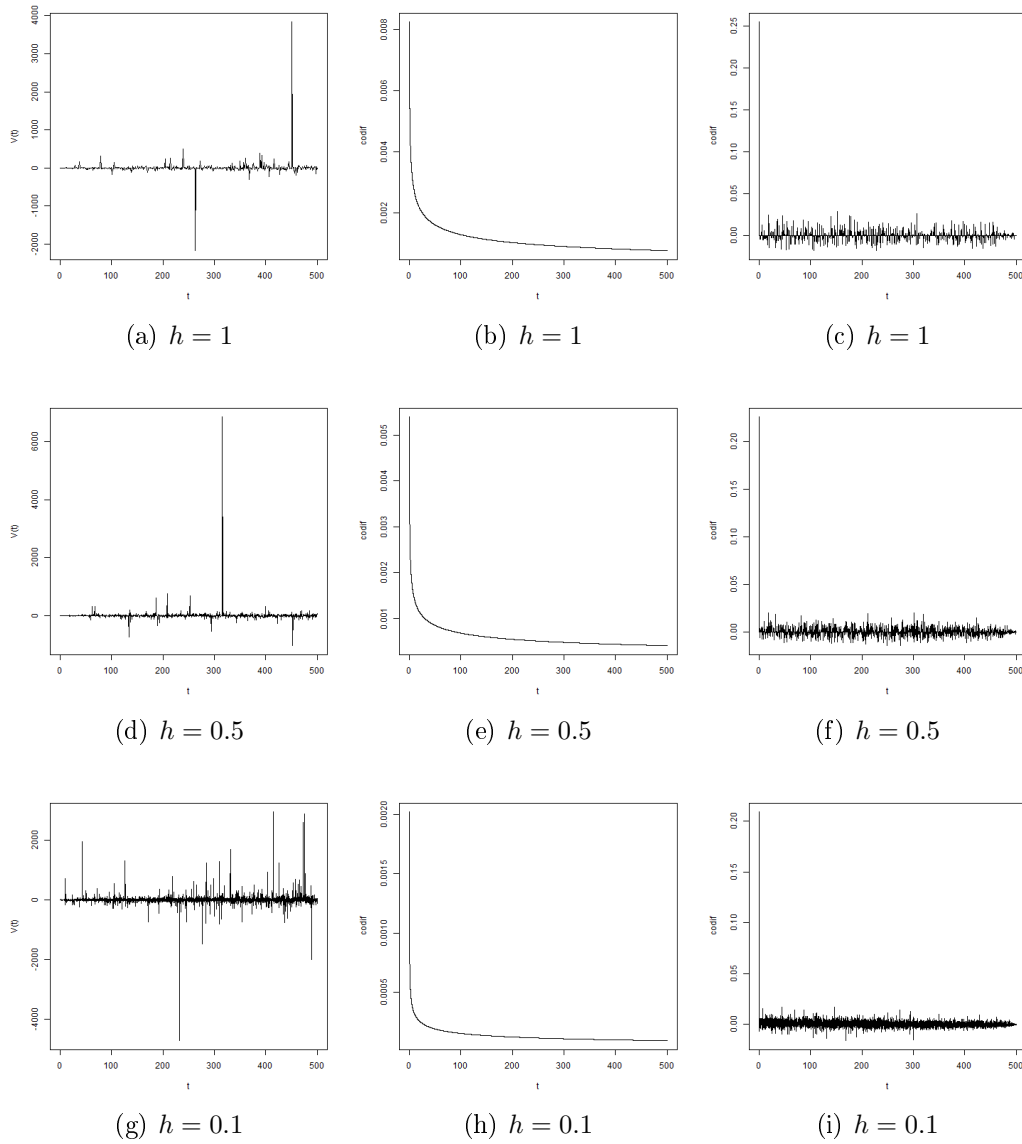


Figura 3.2: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 1.3$, $d = 0.3$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

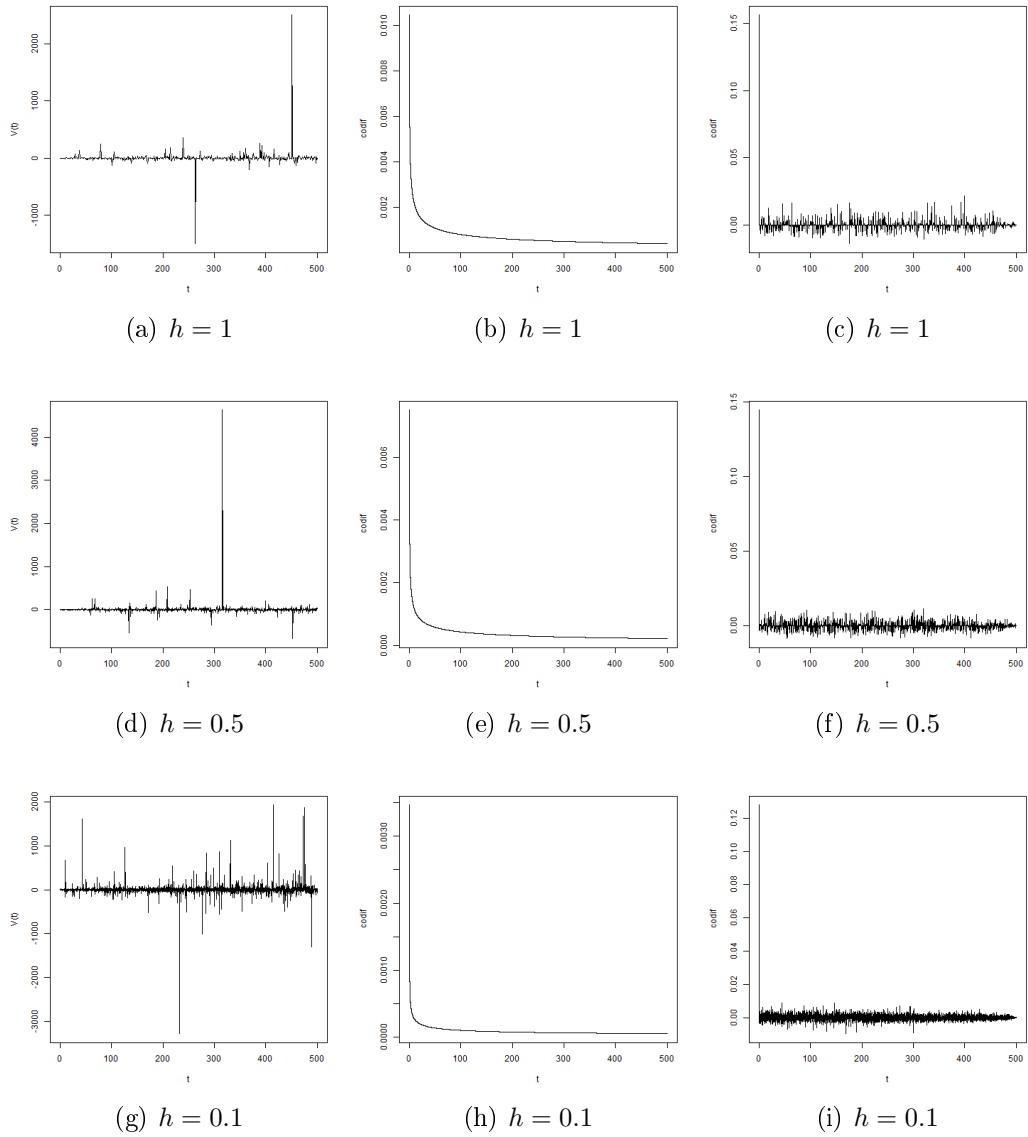


Figura 3.3: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 1.3$, $d = 0.4$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

3.3 Processo Linear Fracionário Bem-Balanceado com Ruído α -estável

Nesta seção consideramos um outro processo que apresenta longa dependência. Este processo foi definido em Samorodnitsky e Taqqu (1994) e é denominado *processo linear fracionário bem-balanceado com ruído α -estável* (denotado por WBLFS, do inglês *well-balanced linear fractional stable motion*). Definimos o WBLFS a seguir.

Definição 3.1. Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ o processo de Lévy padrão α -estável, $0 < \alpha \leq 2$. O processo WBLFS é definido como

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|t-s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}) dL(s), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (3.32)$$

onde $\frac{1}{\alpha} < H < 1$. Note que $X(0) = 0$.

A integral estocástica em (3.32) está bem definida, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||t-s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}|^\alpha ds < \infty.$$

De fato, seja $A > 0$ constante real, tal que $A > t$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-A} ||t-s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}|^\alpha ds &= \int_A^{\infty} ||t+u|^{H-1/\alpha} - |u|^{H-1/\alpha}|^\alpha du \\ &= \int_A^{\infty} ((t+u)^{H-1/\alpha} - (u)^{H-1/\alpha})^\alpha du. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{\alpha} < H < 1$, a função $f(x) = x^{H-1/\alpha}$ é contínua. Pelo teorema do valor médio, temos $(t+u)^{H-1/\alpha} - (u)^{H-1/\alpha} = f'(c_1)t$, onde $u < c_1 < u+t$. Logo, $f'(c_1) = (H-1/\alpha)c_1^{H-1/\alpha-1} \leq (H-1/\alpha)u^{H-1/\alpha-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-A} ||t-s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}|^\alpha ds &\leq \int_A^{\infty} ((H-1/\alpha)u^{H-1/\alpha-1}t)^\alpha du \\ &= (H-1/\alpha)^\alpha t^\alpha \frac{-A^{\alpha(H-1)}}{\alpha(H-1)} < \infty. \end{aligned}$$

A integral no intervalo $[-A, A]$ também é finita, pois o integrando é contínuo e

limitado nesse intervalo. Por fim, veja que

$$\begin{aligned} \int_A^\infty ||t - s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}|^\alpha ds &= \int_A^\infty |(s-t)^{H-1/\alpha} - s^{H-1/\alpha}|^\alpha ds \\ &= \int_A^\infty (s^{H-1/\alpha} - (s-t)^{H-1/\alpha})^\alpha du. \end{aligned}$$

Novamente, pelo teorema do valor médio, temos $s^{H-1/\alpha} - (s-t)^{H-1/\alpha} = f'(c_2)t$, onde $s-t < c_2 < s$. Logo, $f'(c_2) = (H-1/\alpha)c_2^{H-1/\alpha-1} \leq (H-1/\alpha)(s-t)^{H-1/\alpha-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_A^\infty ||t - s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}|^\alpha ds &\leq \int_A^\infty ((H-1/\alpha)(s-t)^{H-1/\alpha-1}t)^\alpha ds \\ &= (H-1/\alpha)^\alpha t^\alpha \frac{-(A-t)^{\alpha(H-1)}}{\alpha(H-1)} < \infty. \end{aligned}$$

O processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ tem duas características importantes: é *self-similar* com parâmetro H e tem incrementos estacionários. Dizemos que um processo tem *incrementos estacionários* se, para todo $u > 0$,

$$\{X(t) - X(0)\}_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} \{X(u+t) - X(u)\}_{t \geq 0}.$$

Dizemos que um processo X é *self-similar* com parâmetro H se, para todo $a > 0$, as distribuições finito-dimensionais de $\{X(at), t \geq 0\}$ são iguais as distribuições finito-dimensionais de $\{a^H X(t), t \geq 0\}$. Estas duas propriedades são apresentadas em Samorodnitsky e Taqqu (1994) e provamos elas a seguir.

Propriedade 3.1. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ processo WBLFS, dado por (3.32), então*

- (i) $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos estacionários.
- (ii) $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ é self-similar com parâmetro H .

Prova: (i) Utilizando a Definição 3.1, temos que

$$X(u+t) - X(u) = \int_{-\infty}^\infty (|u+t-s|^{H-1/\alpha} - |u-s|^{H-1/\alpha}) dL(s).$$

Então, pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), $X(u+t) - X(u) \sim S_\alpha(\sigma_1, 0, 0)$, onde

$$\sigma_1^\alpha = \int_{-\infty}^\infty ||u+t-s|^{H-1/\alpha} - |u-s|^{H-1/\alpha}|^\alpha ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = -(u - s)$, temos que

$$\sigma_1^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left| |t - y|^{H-1/\alpha} - |y|^{H-1/\alpha} \right|^\alpha ds.$$

Por outro lado, como $X(0) = 0$, temos que $X(t) - X(0) = X(t)$. Utilizando a expressão (3.1) e, novamente, a proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), temos que $X(t) \sim S_\alpha(\sigma_2, 0, 0)$, onde

$$\sigma_2^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left| |t - y|^{H-1/\alpha} - |y|^{H-1/\alpha} \right|^\alpha ds.$$

Logo, $\sigma_1 = \sigma_2$ e vale a igualdade em distribuição.

(ii) Precisamos mostrar que, para todo $c > 0$ e $t_1, t_2, \dots, t_d > 0$, $(X(ct_1), X(ct_2), \dots, X(ct_d)) \stackrel{d}{=} (c^H X(t_1), c^H X(t_2), \dots, c^H X(t_d))$. Para isso, vamos mostrar a igualdade das funções características. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{X(ct_1), \dots, X(ct_d)}(\theta_1, \dots, \theta_d) &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^d \theta_j (|ct_j - s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}) \right|^\alpha ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^d \theta_j c^{H-1/\alpha} (|t_j - x|^{H-1/\alpha} - |x|^{H-1/\alpha}) \right|^\alpha c dx \right\} \\ &= \exp \left\{ -c^{\alpha H} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^d \theta_j (|t_j - x|^{H-1/\alpha} - |x|^{H-1/\alpha}) \right|^\alpha dx \right\}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde, na segunda igualdade, fizemos a seguinte mudança de variáveis $s = cx$.

Por outro lado, segue que

$$\begin{aligned} \varphi_{c^H X(t_1), \dots, c^H X(t_d)}(\theta_1, \dots, \theta_d) &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^d \theta_j c^H (|t_j - s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}) \right|^\alpha ds \right\} \\ &= \exp \left\{ -c^{\alpha H} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^d \theta_j (|t_j - s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}) \right|^\alpha ds \right\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Portanto, como as funções características, dadas em (3.33) e (3.34), são iguais, vale a igualdade em distribuição requerida. \square

Lembrando que um movimento Browniano fracionário com parâmetro de Hurst H apresenta longa dependência quando $1/2 < H < 1$, ou seja, se $d = H - 1/2$, quando $0 < d < 1/2$. Por analogia, o WBLFS apresenta longa dependência quando $1/\alpha < H < 1$, ou seja, se $d = H - 1/\alpha$, quando $0 < d < (1 - 1/\alpha)$.

Para simulações, precisamos de uma discretização do processo. Na Proposição 3.7 a seguir provamos uma discretização do processo dado em (3.32).

Proposição 3.7. *Seja $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ o processo estocástico dado pela definição 3.1. Uma forma discreta para este processo é*

$$X((k+1)h) = X(kh) + Y_{k,h},$$

onde $Y_{k,h} = \int_{-\infty}^{\infty} (|(k+1)h - s|^{H-1/\alpha} - |kh - s|^{H-1/\alpha}) dL(s)$. Além disso, $Y_{k,h} \sim S_{\alpha}(\sigma_Y, 0, 0)$, onde

$$\sigma_Y^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| |y|^{H-1/\alpha} - |y-h|^{H-1/\alpha} \right|^{\alpha} dy.$$

Prova: Pela expressão (3.32), temos que

$$X((k+1)h) = \int_{-\infty}^{\infty} |(k+1)h - s|^{H-1/\alpha} dL(s) - \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{H-1/\alpha} dL(s).$$

Logo,

$$X((k+1)h) - \int_{-\infty}^{\infty} |((k+1)h) - s|^{H-1/\alpha} dL(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{H-1/\alpha} dL(s).$$

Por outro lado, temos que

$$X(kh) - \int_{-\infty}^{\infty} |kh - s|^{H-1/\alpha} dL(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} |s|^{H-1/\alpha} dL(s).$$

Assim, segue que

$$X((k+1)h) - \int_{-\infty}^{\infty} |((k+1)h) - s|^{H-1/\alpha} dL(s) = X(kh) - \int_{-\infty}^{\infty} |kh - s|^{H-1/\alpha} dL(s).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} X((k+1)h) &= X(kh) + \int_{-\infty}^{\infty} |((k+1)h) - s|^{H-1/\alpha} dL(s) - \int_{-\infty}^{\infty} |kh - s|^{H-1/\alpha} dL(s) \\ &= X(kh) + \int_{-\infty}^{\infty} (|((k+1)h) - s|^{H-1/\alpha} - |kh - s|^{H-1/\alpha}) dL(s). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Note que a expressão que envolve a integral em (3.35) determina um novo processo, chamado *ruído fracionário estável* (do inglês *fractional stable noise*). Vamos denotá-lo por $\{Y_{k,h}\}_{k=1}^n$, onde n é o tamanho amostral. Logo,

$$X((k+1)h) = X(kh) + Y_{k,h},$$

Para calcular a distribuição de $Y_{k,h}$, utilizamos a proposição 3.4.1 de Samorodnitsky e Taqqu (1994), obtendo que Y_n tem distribuição $S_\alpha(\sigma_Y, 0, 0)$, onde

$$\begin{aligned} \sigma_Y^\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| |(k+1)h - s|^{H-1/\alpha} - |kh - s|^{H-1/\alpha} \right|^\alpha ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| |y|^{H-1/\alpha} - |y - h|^{H-1/\alpha} \right|^\alpha dy. \end{aligned} \quad (3.36)$$

□

Note que a integral em (3.36) não tem solução analítica. Logo, utilizamos métodos numéricos para a sua resolução.

Neste capítulo provamos diversas propriedades teóricas com respeito a classe de processos descritos na Definição 2.4. Além disso, introduzimos um novo processo inspirado em um exemplo dado por Klebaner (2005). Ainda estudamos o processo WBLFS, que apresenta longa dependência quando $1/\alpha < H < 1$.

Capítulo 4

Estimação

Neste capítulo, apresentamos os métodos de estimação utilizados nos processos estudados neste trabalho. Iniciamos o capítulo apresentando o método de discretização Euler-Maruyama na Seção 4.1, que será utilizado para implementar a estimação de mínimos quadrados para o processo Cosseno. A Seção 4.2 apresenta a estimação de máxima verossimilhança para os processos OU e Cosseno. A Seção 4.3 apresenta o método de estimação dos mínimos quadrados para os processos OU e Cosseno. A Seção 4.4 apresenta um algoritmo iterativo para a estimação de máxima verossimilhança no processo Cosseno. Na Seção 4.5 mostramos o procedimento de estimação dos parâmetros do processo WBLFS. A Seção 4.6 apresenta a estimação dos parâmetros dos processos OU e Cosseno, com ruído movimento Browniano, utilizando a metodologia Bayesiana. Por fim, a Seção 4.7 apresenta a estimação pela metodologia Bayesiana, quando o ruído é um processo de Lévy α -estável.

4.1 Discretização Euler-Maruyama

Queremos utilizar uma discretização para o Processo Cosseno baseada na Equação Diferencial Estocástica (EDE) ao invés de utilizar o processo solução, como foi feito na Proposição 2.6. Note que a equação diferencial estocástica que gera o processo Cosseno é dada por

$$V(t) = V_0 - \int_0^t \left(\int_0^u a^2 V(s) ds \right) du + L(t). \quad (4.1)$$

Um dos métodos mais utilizados para discretizar e aproximar soluções de EDE é o

Euler-Maruyama (ver Higham, 2001, Jacod et. al. 2005 e Kleppe, 2006). Considere a seguinte EDE

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dL(s), \quad (4.2)$$

onde $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções escalares e a condição inicial X_0 é uma variável aleatória.

Para aplicar um método numérico em (4.2) sobre o intervalo $[0, T]$, precisamos discretizar esse intervalo. Sejam $\Delta t = T/M$, onde M é um inteiro positivo, e $\tau_j = j\Delta t$. O método de Euler-Maruyama tem a forma

$$X(\tau_j) = X(\tau_{j-1}) + f(X(\tau_{j-1}))\Delta t + g(X(\tau_{j-1}))(L(\tau_j) - L(\tau_{j-1})),$$

para $j = 1, 2, \dots, M$.

Jacod et al. (2005) propõe substituir os incrementos de $L(\cdot)$ por uma sequência $\{\eta_j\}_{j=1}^M$ de variáveis aleatórias i.i.d., que sejam simples para uso na simulação. Assim, consideramos

$$X(\tau_j) = X(\tau_{j-1}) + f(X(\tau_{j-1}))\Delta t + g(X(\tau_{j-1}))\eta_j,$$

para $j = 1, 2, \dots, M$.

No caso do processo Cosseno, comparando as expressões (4.1) e (4.2), temos $f(V(t)) = -\int_0^t a^2 V(s)ds$ e $g(V(t)) = 1$. No Lema 4.1 a seguir provamos a distribuição das variáveis aleatórias η_j .

Lema 4.1. *Se $L(\cdot)$ é processo Lévy padrão α -estável, $\eta_j \sim S_\alpha((\Delta t)^{1/\alpha}, 0, 0)$, onde $\Delta t = \frac{T}{M}$, M é um inteiro positivo.*

Prova: Pela definição de processo Lévy padrão α -estável dada no Capítulo 2, temos que $L(\tau_j) - L(\tau_{j-1}) \sim S_\alpha((\tau_j - \tau_{j-1})^{1/\alpha}, 0, 0)$. Observe que $\tau_j - \tau_{j-1} = j\Delta t - (j-1)\Delta t = \Delta t$. Portanto, $\eta_j = L(\tau_j) - L(\tau_{j-1}) \sim S_\alpha((\Delta t)^{1/\alpha}, 0, 0)$. □

Vamos considerar $L(\cdot)$ processo Lévy α -estável. Logo, obtemos

$$V(\tau_j) = V(\tau_{j-1}) + f(V(\tau_{j-1}))\Delta t + \eta_j,$$

para $j = 1, 2, \dots, M$, onde $\eta_j \sim S_\alpha((\Delta t)^{1/\alpha}, 0, 0)$, pelo Lema 4.1. Note que podemos considerar $V(\tau_j)$ constante no intervalo $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Logo,

$$\begin{aligned}
f(V(\tau_{j-1})) &= - \int_0^{\tau_{j-1}} a^2 V(s) ds \\
&= -a^2 V_0 \Delta t - a^2 V(\tau_1) \Delta t - a^2 V(\tau_2) \Delta t - \dots - a^2 V(\tau_{j-1}) \Delta t \\
&= -a^2 \Delta t \sum_{i=0}^{j-1} V(\tau_i),
\end{aligned}$$

onde $\tau_0 = 0$.

Portanto, obtemos

$$V(\tau_j) = V(\tau_{j-1}) - a^2 (\Delta t)^2 \sum_{i=0}^{j-1} V(\tau_i) + \eta_j, \quad (4.3)$$

para $j = 1, 2, \dots, L$.

Queremos comparar os resultados obtidos utilizando a discretização pelo método de Euler-Maruyama com a discretização dada na Proposição 2.6, baseada na solução do processo. Além disso, vamos comparar com a solução da EDE.

Note que a solução da EDE é dada por

$$V(t) = V_0 \cos(at) + \int_0^t \cos(a(t-s)) dL(s). \quad (4.4)$$

Para simular a partir de (4.4), precisamos aproximar a integral por somas de Riemann, da seguinte forma

$$V(t) = V_0 \cos(at) + \sum_{j=0}^{M-1} \cos(a(t-s_j))(L(s_{j+1}) - L(s_j)), \quad (4.5)$$

onde $s_j = \frac{jt}{M}$, M inteiro positivo.

Observação 4.1. Note que o passo da discretização h em (2.43) faz o mesmo papel do Δt em (4.3). Iremos utilizar apenas a notação h .

As Figuras 4.1-4.2 apresentam os resultados das simulações do processo Cosseno com as três discretizações (Proposição 2.6 e expressões (4.3) e (4.5)). Nas figuras, a linha roxa é o resultado utilizando a solução da EDE, dado em (4.5). A linha vermelha é o resultado utilizando o método de Euler-Maruyama, dado em (4.3). A linha azul é o resultado utilizando a nossa discretização, dada em (2.43). Note

que as duas discretizações, a proposta na Proposição 2.6 e a de Euler-Maruyama, apresentam resultados semelhantes. Mas, em alguns casos, o método de Euler-Maruyama apresenta melhores resultados, captando melhor a variação do processo.

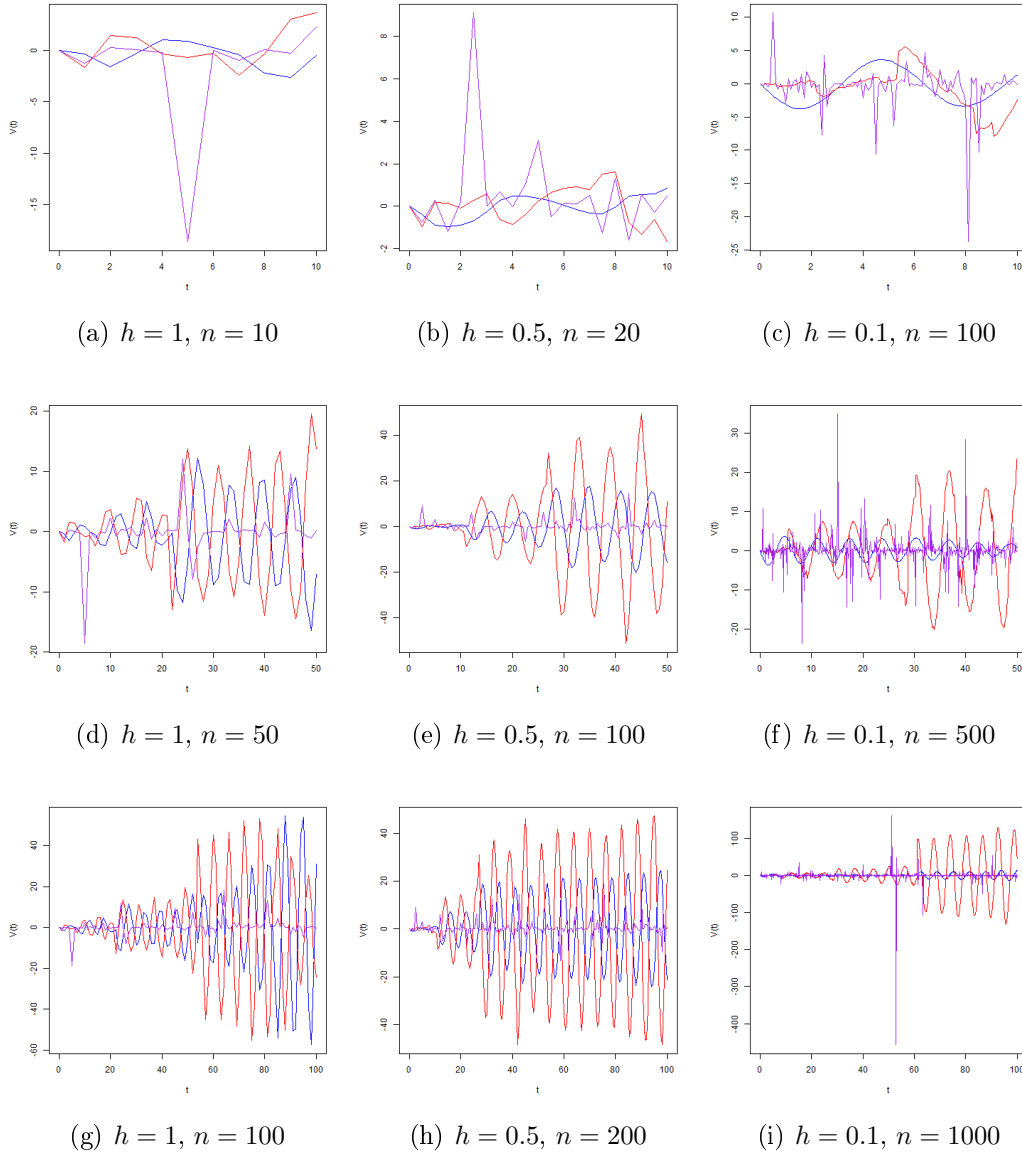


Figura 4.1: Simulação do Processo Cosseno quando $\alpha = 1.1$ e $a = 1$.

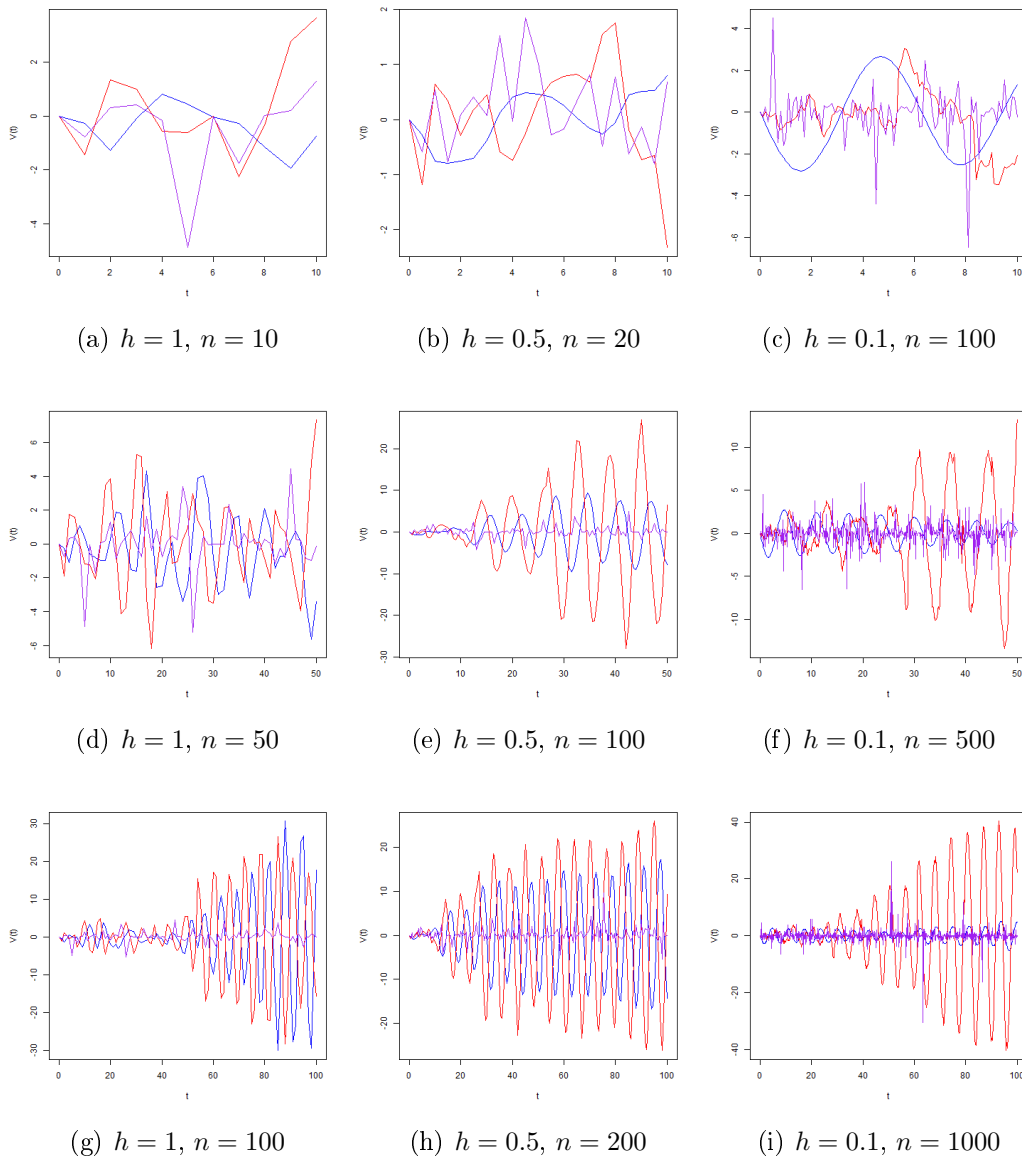


Figura 4.2: Simulação do Processo Cosseno quando $\alpha = 1.5$ e $a = 1$.

4.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

Nesta seção apresentamos a estimação de máxima verossimilhança para os processos OU e Cosseno.

4.2.1 Processo OU

Para cada função $\rho(\cdot)$ e cada processo de ruído $L(\cdot)$, o processo dado em (2.23) apresenta diferentes parâmetros a serem estimados. Nesta subseção, estimamos os parâmetros através do método de máxima verossimilhança no caso em que $\rho(t) = e^{-\theta t}$, ou seja, o processo OU.

Pela expressão (2.36), note que podemos considerar o processo OU como um processo AR(1). Seja $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma, \theta)'$ o vetor de parâmetros a ser estimado e seja $\{V_{kh}\}_{k=0}^{n-1}$ uma amostra de tamanho n do processo dado em (2.2). Temos que

$$Z_{k,h} = V_{kh} - e^{-\theta h} V_{(k-1)h}.$$

Note que, para h fixo, $\{Z_{k,h}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.. Então, a função de verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta} | Z_{1,h}, \dots, Z_{n-1,h}) = \prod_{k=1}^{n-1} f(Z_{k,h} | \boldsymbol{\eta}),$$

onde $f(\cdot | \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade da distribuição α -estável. Lembre que apenas para três casos de α existe fórmula fechada para a função densidade: $\alpha = 0.5$ (Lévy), $\alpha = 1$ (Cauchy) e $\alpha = 2$ (Gaussiano). A função de log-verossimilhança é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\eta} | Z_{1,h}, \dots, Z_{n-1,h}) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(f(Z_{k,h} | \boldsymbol{\eta})).$$

Por otimização numérica da função $\ell(\cdot)$, obtemos o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\sigma}, \hat{\theta})'$. Na Subseção 6.1.1 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando a metodologia aqui descrita.

4.2.2 Processo Cosseno

Nesta subseção, propomos a estimação pelo método da máxima verossimilhança dos parâmetros para o caso $\rho(t) = \cos(at)$, ou seja, o processo Cosseno. Pela expressão (2.43), note que podemos considerar o processo Cosseno como um processo AR(2) não-estacionário. Seja $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma_\varepsilon, a)'$ o vetor de parâmetros a ser estimado e seja $\{V_{kh}\}_{k=0}^{n-1}$ uma amostra de tamanho n do processo dado pela expressão (2.42). O procedimento para obter a função de verossimilhança é similar ao caso apresentado na Subseção 4.2.1. Na Subseção 6.1.2 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando a metodologia aqui descrita.

4.3 Estimação de Mínimos Quadrados

Nesta seção apresentamos a estimação de mínimos quadrados para os processos OU e Cosseno.

4.3.1 Processo OU

Consideramos o estimador de mínimos quadrados proposto por Zhang e Zhang (2013). O estimador $\hat{\theta}_n$, baseado na discretização proposta na Proposição 2.5, é o valor de θ que minimiza $\sum_{h=1}^n |V(kh) - e^{-\theta h}V((k-1)h)|^2$, onde n é o tamanho amostral. Então

$$\hat{\theta}_n = -\frac{1}{h} \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)V(kh)}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \right). \quad (4.6)$$

Considere θ_0 o valor verdadeiro do parâmetro. As propriedades assintóticas do estimador $\hat{\theta}_n$ são condicionadas às duas condições a seguir.

Condição 1: $n \rightarrow \infty$ e $h > 0$ fixo.

Condição 2: $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ e $nh \rightarrow \infty$.

Os teoremas relacionados à consistência e distribuição assintótica do estimador, dado em (4.6), são provados em Zhang e Zhang (2013). Apresentamos suas demonstrações, em detalhes, a seguir.

Teorema 4.1. *Sob as Condições 1 ou 2, temos que*

(a) *Se $1 \leq \alpha < 2$, então $\hat{\theta}_n \xrightarrow{a.s.} \theta_0$.*

(b) Se $0 < \alpha < 1$, então $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_0$.

Sejam $C_\alpha = (\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx)^{-1} = 2 \sin(\pi\alpha/2) \Gamma(\alpha) / \pi$ e $\sigma_1 = 2^\alpha C_{\alpha/2}^{-2/\alpha}$ e $\sigma_2 = C_\alpha^{-1/\alpha}$.

Teorema 4.2. *Seja $0 < \alpha < 2$. Sob a Condição 1, temos que*

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/\alpha} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \frac{e^{\theta_0 h} (1 - e^{-2\theta_0 h}) \tilde{Y}}{h(1 - e^{-\alpha\theta_0 h})^{1/\alpha} Y_0}, \quad (4.7)$$

onde Y_0 e \tilde{Y} são variáveis aleatórias independentes, tais que $Y_0 \stackrel{d}{=} S_{\alpha/2}(\sigma_1, 1, 0)$ e $\tilde{Y} \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma_2, 0, 0)$.

Na Subseção 6.2.1 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o estimador aqui proposto.

A seguir apresentamos as provas dos Teoremas 4.1 e 4.2. Para isso, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 4.2. *Seja $\delta > 0$ um número real positivo. Então, sob a Condição 1, se $0 < \alpha < 1$, temos que*

$$\frac{1}{n^{1+\delta}} (|V_0|^\alpha - |V(nh)|^\alpha) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Prova: Pela forma do processo OU, dada em (2.2), temos que

$$V(nh) = e^{-\theta nh} V_0 + \int_0^{nh} e^{-\theta(nh-s)} dL(s). \quad (4.8)$$

Pela proposição 3.4.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), a integral na equação (4.8) tem distribuição $S_\alpha \left(\left(\frac{1 - e^{-\theta nh \alpha}}{\theta \alpha} \right)^{1/\alpha}, 0, 0 \right)$.

Consideramos o caso estacionário do processo OU, ou seja, $V_0 \stackrel{d}{=} S_\alpha \left(\left(\frac{1}{\theta \alpha} \right)^{1/\alpha}, 0, 0 \right)$. Então, aplicando as proposições 1.2.3 e 1.2.1 em Samorodnitsky e Taqqu (1994), temos que

$$V(nh) \stackrel{d}{=} S_\alpha \left(\left(\frac{1}{\theta \alpha} \right)^{1/\alpha}, 0, 0 \right).$$

Logo,

$$V(nh) \xrightarrow{d} V_\infty \sim S_\alpha \left(\left(\frac{1}{\theta \alpha} \right)^{1/\alpha}, 0, 0 \right).$$

Então,

$$\frac{1}{n^{1+\delta}}(|V_0|^\alpha - |V(nh)|^\alpha) \xrightarrow{d} 0.$$

A convergência também vale em probabilidade, pois convergência em probabilidade e convergência em distribuição são equivalentes, quando o limite é uma constante. E isto prova o lema. □

Lema 4.3. *Seja $\delta > 0$ um número real positivo. Então, sob a Condição 1, se $0 < \alpha < 1$, temos que*

$$\frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Prova: Pela Proposição 2.5 e pela desigualdade C_r (ver Lin e Bai, 2010, p. 97-98), temos que

$$|V(kh)|^\alpha = |e^{-\theta h}V((k-1)h) + Z_{k,h}|^\alpha \leq e^{-\alpha\theta h}|V((k-1)h)|^\alpha + |Z_{k,h}|^\alpha. \quad (4.9)$$

Somando ambos os lados da equação (4.9) para k de 1 até n , obtemos

$$\sum_{k=1}^n |V(kh)|^\alpha \leq e^{-\alpha\theta h} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha + \sum_{k=1}^n |Z_{k,h}|^\alpha.$$

Reorganizando os termos e multiplicando por $1/n^{1+\delta}$, segue que

$$(1 - e^{-\alpha\theta h}) \frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \leq \frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{k=1}^n |Z_{k,h}|^\alpha + \frac{1}{n^{1+\delta}} (|V_0|^\alpha - |V(nh)|^\alpha). \quad (4.10)$$

Pelo Lema 4.2, o último termo de (4.10) converge a zero em probabilidade. Precisamos apenas verificar a convergência do primeiro termo após a desigualdade em (4.10). Temos que $\{Z_{k,h}, k = 1, 2, \dots, n\}$ são variáveis aleatórias i.i.d. tais que, pela Proposição 2.5,

$$Z_{k,h} \stackrel{d}{=} S_\alpha \left(\left(\frac{1 - e^{-\theta nh\alpha}}{\theta\alpha} \right)^{1/\alpha}, 0, 0 \right).$$

Temos que,

$$\mathbb{P}(|Z_{1,h}|^\alpha > n^{1+\delta}) = \mathbb{P}(|Z_{1,h}| > n^{\frac{1+\delta}{\alpha}}) \leq \mathbb{P}(Z_{1,h} > n^{\frac{1+\delta}{\alpha}}).$$

Pelo teorema 1.12 em Nolan (2010),

$$\mathbb{P}(Z_{1,h} > n^{\frac{1+\delta}{\alpha}}) \sim C_\alpha (n^{\frac{1+\delta}{\alpha}})^{-\alpha} \frac{(1 - e^{-\theta h \alpha})}{\theta \alpha} = C_\alpha n^{-(1+\delta)} \frac{(1 - e^{-\theta h \alpha})}{\theta \alpha}.$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Z_{1,h}|^\alpha > n^{1+\delta}) < \infty.$$

Como $\mathbb{E}[|Z_{1,h}|^\alpha] = \infty$, pelo teorema 8.9 em Durrett (2005),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n |Z_{k,h}|^\alpha|}{n^{1+\delta}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n |Z_{k,h}|^\alpha|}{n^{1+\delta}} = 0.$$

Como $\sum_{k=1}^n |Z_{k,h}|^\alpha \geq 0$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |Z_{k,h}|^\alpha}{n^{1+\delta}} = 0.$$

Então, pela equação (4.10), segue o resultado do Lema. □

O próximo lema é um caso particular do teorema 3.3 em Davis e Resnick (1986).

Lema 4.4. *Suponha $\{S_i\}_{i=0}^\infty$ uma amostra de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $S_\alpha(1, 0, 0)$. Então, para $a_n = (C_\alpha n)^{1/\alpha}$ e $\tilde{a}_n = C_\alpha^{2/\alpha} (n \ln(n))^{1/\alpha}$, temos, para $m \in \mathbb{N}$,*

$$(a_n^{-2} \sum_{i=1}^n S_i^2, \tilde{a}_n^{-1} \sum_{i=1}^n S_i S_{i+1}, \dots, \tilde{a}_n^{-1} \sum_{i=1}^n S_i S_{i+m}) \xrightarrow{d} (Y_0, Y_1, \dots, Y_m),$$

onde Y_0, Y_1, \dots, Y_m são variáveis aleatórias independentes, Y_0 é uma variável aleatória positiva com distribuição $S_{\alpha/2}(\sigma_1, 1, 0)$ e Y_1, \dots, Y_m são variáveis aleatórias simétricas α -estáveis com distribuição $S_\alpha(\sigma_2, 0, 0)$.

Lema 4.5. *Suponha $0 < \alpha < 2$ conhecido, $\{Z_{k,h}\}_{k=1}^n$ definido na Proposição 2.5 e Y_0 definido no Teorema 4.2. Então, temos que*

$$(a) \text{ Sob a Condição 1, } n^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 \xrightarrow{d} \left(\frac{1 - e^{-\theta \alpha h}}{\theta \alpha} \right)^{2/\alpha} C_\alpha^{2/\alpha} Y_0.$$

$$(b) \text{ Sob a Condição 2, } (nh)^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 \xrightarrow{d} C_\alpha^{2/\alpha} Y_0.$$

Prova: (a) Temos, pela Proposição 2.5,

$$Z_{k,h} \stackrel{d}{=} \left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{1/\alpha} S_k, \quad (4.11)$$

onde $S_k \sim S_\alpha(1, 0, 0)$. Pelo Lema 4.4, temos que

$$a_n^{-2} \sum_{k=1}^n S_k^2 \xrightarrow{d} Y_0.$$

Isto implica que,

$$(C_\alpha n)^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{-1/\alpha} Z_{k,h} \right]^2 \xrightarrow{d} Y_0.$$

Então,

$$n^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 \xrightarrow{d} \left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{2/\alpha} C_\alpha^{2/\alpha} Y_0.$$

(b) Pela Condição 2, temos que $h \rightarrow 0$, logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-2/\alpha} \left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{2/\alpha} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{h\theta\alpha} \right)^{2/\alpha} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta\alpha e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{2/\alpha} = 1$$

Pelo Lema 4.4, segue que

$$n^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n S_k^2 \xrightarrow{d} C_\alpha^{2/\alpha} Y_0,$$

logo,

$$(nh)^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 \stackrel{d}{=} h^{-2/\alpha} \left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{2/\alpha} n^{-2/\alpha} \sum_{k=1}^n S_k^2 \xrightarrow{d} C_\alpha^{2/\alpha} Y_0,$$

onde vale a última convergência pelo teorema de Slutsky. □

O próximo lema é um resultado do corolário 3.1 em Rosinski e Woyczynski (1986).

Lema 4.6. *Suponha que $0 < \alpha < 2$ e o processo $\{\phi(t)\}_{t \geq 0}$ é real mensurável \mathcal{F}_t -adaptado, tal que, para todo $T > 0$, $\int_0^T |\phi(t)|^\alpha dt < \infty$ quase certamente. Seja $\tau(u) = \int_0^u |\phi(t)|^\alpha dt$ e $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ crescente. Então, se $\tau(u) \rightarrow \infty$ quase certamente,*

quando $u \rightarrow \infty$ e $\int_1^\infty \varphi^{-\alpha}(t)dt < \infty$, então

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|\int_0^t \phi(s)dL(s)|}{\varphi(\tau(t))} = 0 \quad a.s.$$

Prova do Teorema 4.1: Condição 1

Primeiro iremos apresentar a prova assumindo que valha a Condição 1. Temos que

$$\hat{\theta}_n = -\frac{1}{h} \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)V(kh)}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \right).$$

Então,

$$e^{-\hat{\theta}_n h} = \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)V(kh)}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}.$$

Pela Proposição 2.5, segue que

$$e^{-\hat{\theta}_n h} = \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)(e^{-\theta_0 h} V((k-1)h) + Z_{k,h})}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} = e^{-\theta_0 h} + \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}. \quad (4.12)$$

Denote $T_{n,h} = \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}$. Pela expressão em (4.12), para mostrar o teorema, é suficiente mostrar que $T_{n,h} \xrightarrow{a.s.} 0$ ou $\xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, de acordo com $1 \leq \alpha < 2$ ou $0 < \alpha < 1$.

Pelo teorema 4.3 em Masuda (2004), temos que $V(t)$ é ergódico. Também temos que $V(t) \xrightarrow{d} V_\infty$, quando $t \rightarrow \infty$, onde $V_\infty = \int_0^\infty e^{-\theta_0 s} dL(s)$ é uma variável aleatória α -estável. Então, pelo teorema ergódico, para todo $r \geq \alpha$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^r = \mathbb{E}(V_\infty^r) = \infty \quad a.s. \quad (4.13)$$

Seja

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V((k-1)h) e^{-\theta_0(kh-t)} \mathbb{I}_{((k-1)h, kh]}(t), & \text{se } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h) e^{-\theta_0(kh-t)} \mathbb{I}_{((k-1)h, kh]}(t), & \text{se } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Além disso, seja $\tau(nh) = \int_0^{nh} |\phi_n(t)|^\alpha dt$. Então, se $1 < \alpha < 2$

$$\tau(nh) = \int_0^{nh} \left| \sum_{k=1}^n V((k-1)h) e^{-\theta_0(kh-t)} \mathbb{I}_{((k-1)h, kh]}(t) \right|^\alpha dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{nh} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha e^{-\theta_0 \alpha(kh-t)} \mathbb{I}_{((k-1)h, kh]}(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \int_0^{nh} e^{-\theta_0 \alpha(kh-t)} \mathbb{I}_{((k-1)h, kh]}(t) dt \\
&= \left(\frac{1 - e^{-\alpha \theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right) \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha.
\end{aligned}$$

Se $0 < \alpha \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\tau(nh) &= \int_0^{nh} \left| \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h) e^{-\theta_0(kh-t)} \mathbb{I}_{((k-1)h, kh]}(t) \right|^\alpha dt \\
&= \left(\frac{1 - e^{-\alpha \theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha.
\end{aligned}$$

Pela igualdade em (4.13), $\tau(nh) \xrightarrow{a.s.} \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Seja $\delta \in (0, 1)$ um número real fixo, defina

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 1 < \alpha < 2, \\ t^{1+\delta}, & \text{se } \alpha = 1, \\ t^{(2+\alpha)/\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Note que

$$\int_1^\infty \varphi^{-\alpha}(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{se } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{1}{\delta}, & \text{se } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1+\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Então, $\int_1^\infty \varphi^{-\alpha}(t) dt < \infty$. É fácil ver que

$$T_{n,h} = \frac{\int_0^{nh} \phi_n(s) dL(s)}{\varphi(\tau(nh))} \frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2},$$

$$\text{onde } b_n = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 < \alpha < 2, \\ n^{-1/\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Pelo Lema 4.6, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\int_0^{nh} \phi_n(s) dL(s)|}{\varphi(\tau(nh))} = 0 \quad a.s. \quad (4.14)$$

Então, é suficiente mostrar que

$$\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \xrightarrow{a.s} 0 \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

de acordo com $1 \leq \alpha < 2$ ou $0 < \alpha < 1$. Para mostrar isso, iremos considerar três casos para valores de α .

Caso 1: $1 < \alpha < 2$.

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} &= \frac{\tau(nh)}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \\ &\leq \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^{\alpha \frac{2}{\alpha}} \right)^{\alpha/2} \left(\sum_{k=1}^n 1^q \right)^{1/q} \frac{1}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{2/\alpha} + \frac{1}{q} = 1$, de onde implica que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} &\leq \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} n^{1-\frac{\alpha}{2}} \\ &= \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

que converge para zero quase certamente, quando $n \rightarrow \infty$, pela expressão (4.13).

Caso 2: $\alpha = 1$.

Pela desigualdade C_r e, então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |V((k-1)h)| \right)^{1+\delta} &\leq n^{1+\delta-1} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^{1+\delta} = n^\delta \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^{1+\delta} \\ &\leq n^\delta \left(\sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^{1+\delta \frac{2}{1+\delta}} \right)^{\frac{1+\delta}{2}} \left(\sum_{k=1}^n 1^{\frac{2}{1+\delta}} \right)^{\frac{1-\delta}{2}} \\ &= n^{\frac{\delta+1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^2 \right)^{\frac{1+\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} &= \frac{\left(\left(\frac{1-e^{-\theta_0 h}}{\theta_0} \right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)| \right)^{1+\delta}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \\
&\leq \left(\frac{1-e^{-\theta_0 h}}{\theta_0} \right)^{1+\delta} n^{-(1+\delta)+1} n^{\frac{\delta+1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{\frac{1+\delta}{2}-1} \\
&= \left(\frac{1-e^{-\theta_0 h}}{\theta_0} \right)^{1+\delta} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{\frac{\delta-1}{2}}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

que também converge a zero quase certamente, uma vez que temos (4.13).

Caso 3: $0 < \alpha < 1$.

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} &= \frac{(\tau(nh))^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}}{\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \\
&= \left(\frac{1-e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1-e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha} \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2+\alpha}}} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{n^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{-1}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 4.3, sob a Condição 1, temos que

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2+\alpha}}} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \tag{4.18}$$

Pela Proposição 2.5 e desigualdade C_r , também segue que

$$Z_{k,h}^2 = (V(kh) - e^{-\theta h} V((k-1)h))^2 \leq 2^{2-1} (V(kh)^2 + e^{-2\theta h} V((k-1)h)^2).$$

Somando de $k = 1$ a n e reorganizando os termos, obtemos

$$2 \sum_{k=1}^n V(kh)^2 + 2e^{-2\theta h} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \geq \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2$$

Logo,

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 + 2e^{-2\theta h} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 &\geq \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 + 2(V_0^2 - V(nh)^2) \\
2(1 + e^{-2\theta h}) \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 &\geq \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 + 2(V_0^2 - V(nh)^2) \\
\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 &\geq 2^{-1}(1 + e^{-2\theta h})^{-1} \left(\sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 + 2(V_0^2 - V(nh)^2) \right). \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Por argumento similar ao do Lema 4.3, temos que $\frac{1}{n^{2/\alpha}}(V_0^2 - V(nh)^2) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Então, pelo Lema 4.5,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{-1} &\leq 2(1 + e^{-2\theta h}) \left(\frac{1}{n^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 + 2 \frac{1}{n^{2/\alpha}} (V_0^2 - V(nh)^2) \right)^{-1} \\
&\xrightarrow{d} 2(1 + e^{-2\theta h}) \left(\left(\frac{1 - e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha} \right)^{2/\alpha} C_\alpha^{2/\alpha} Y_0 \right)^{-1}. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Pelas expressões (4.17) e (4.18) temos que

$$\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \xrightarrow{d} 0.$$

A convergência também é válida em probabilidade, uma vez que convergência em probabilidade e em distribuição são equivalentes, quando o limite é uma constante.

□

Prova do Teorema 4.1: Condição 2

Assumimos que a Condição 2 esteja satisfeita. Pela expressão (4.12), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\hat{\theta}_n h}}{e^{-\theta_0 h}} &= \frac{e^{-\theta_0 h}}{e^{-\theta_0 h}} + \frac{1}{e^{-\theta_0 h}} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h) Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \\
e^{-(\hat{\theta}_n - \theta_0)h} &= 1 + e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h) Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \\
e^{-(\hat{\theta}_n - \theta_0)h} &= \left(1 + e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h) Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \right)^{1/h}
\end{aligned}$$

Então, é suficiente provar que

$$\left(1 + e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}\right)^{1/h} \xrightarrow{a.s.} 1 \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

de acordo com $1 \leq \alpha < 2$ ou $0 < \alpha < 1$. Veja que

$$\left(1 + e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}\right)^{1/h} = \left(1 + e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}\right)^{T_{n,h} \frac{1}{T_{n,h} h}}, \quad (4.21)$$

onde $T_{n,h} = e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2}$.

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Então,

$$T_{n,h} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \iff \quad (1 + T_{n,h})^{1/T_{n,h}} \xrightarrow{a.s.} e \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} e.$$

Revisando a prova do Teorema 4.2, sob a Condição 1, temos que $T_{n,h} \xrightarrow{a.s.} 0$ ou $\xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, de acordo com $1 \leq \alpha < 2$ ou $0 < \alpha < 1$. Então, é suficiente mostrar que

$$\frac{T_{n,h}}{h} = \frac{1}{h} e^{\theta_0 h} \frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (4.22)$$

Como $e^{\theta_0 h} \rightarrow 1$, quando $h \rightarrow 0$, precisamos mostrar que $\frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \xrightarrow{a.s.} 0$ ou $\xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, de acordo com $1 \leq \alpha < 2$ ou $0 < \alpha < 1$.

Seja $\phi_n(\cdot)$, $\tau(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$ conforme definição na prova do Teorema 4.1 sob a Condição 1. Temos que

$$\frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)Z_{k,h}}{h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} = \frac{\int_0^{nh} \phi_n(s) dL(s)}{\varphi(\tau(nh))} \frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2},$$

$$\text{onde } b_n = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 < \alpha < 2, \\ n^{-1/\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}.$$

As igualdades (4.13) e (4.14) continuam valendo sob a Condição 2. Então, para verificarmos a expressão (4.22), é suficiente provar que, sob a Condição 2,

$$\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

de acordo com $1 \leq \alpha < 2$ ou $0 < \alpha < 1$. Consideramos três casos para os valores de α .

Caso 1: $0 < \alpha < 1$.

Pela expressão (4.15), vemos que

$$\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \leq \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha h} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

que converge a zero quase certamente, por causa da expressão (4.13), e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta_0 h}}{\alpha\theta_0 h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha\theta_0 e^{-\alpha\theta_0 h}}{\alpha\theta_0} = 1.$$

Caso 2: $\alpha = 1$.

Pela expressão (4.16), vemos que

$$\frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} \leq \left(\frac{1 - e^{-\theta_0 h}}{\theta_0 h} \right)^{1+\delta} h^\delta \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{\frac{-1-\delta}{2}},$$

que converge a zero quase certamente, por causa da expressão (4.13), e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\theta_0 h}}{\theta_0 h} \right)^{1+\delta} h^\delta &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\theta_0 h}}{\theta_0 h} \right)^{1+\delta} \lim_{h \rightarrow 0} h^\delta \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta_0 e^{-\theta_0 h}}{\theta_0} \right)^{1+\delta} \lim_{h \rightarrow 0} h^\delta = 0. \end{aligned}$$

Caso 3: $0 < \alpha < 1$.

Pela expressão (4.17), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau(nh))}{b_n h \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} &= \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta_0 h}}{\theta_0 \alpha h} \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2+\alpha}}} \sum_{k=1}^n |V((k-1)h)|^\alpha \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(nh)^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

De forma similar à prova da expressão (4.20), pelo Lema 4.5, temos que, sob a

Condição 2,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(nh)^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2 \right)^{-1} \leq 2(1 + e^{-2\theta h}) \\ & \times \left(\frac{1}{(nh)^{2/\alpha}} \sum_{k=1}^n Z_{k,h}^2 + 2 \frac{1}{(nh)^{2/\alpha}} (V_0^2 - V(nh)^2) \right)^{-1} \xrightarrow{d} 4C_\alpha^{-2/\alpha} \frac{1}{Y_0}. \end{aligned}$$

Note que, sob a Condição 2, o resultado dado pela expressão (4.18) continua valendo. Portanto, concluímos a demonstração do teorema. \square

Prova do Teorema 4.2: Podemos considerar o processo OU como um processo AR(1), se utilizarmos a discretização dada pela Proposição 2.5. Pelo exemplo 5.3 em Davis e Resnick (1986), sob a Condição 1, temos

$$\left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)V(kh)}{\sum_{k=1}^n V((k-1)h)^2} - e^{-\theta_0 h} \right) \xrightarrow{d} \frac{1 - e^{-2\theta_0 h}}{(1 - e^{-\alpha\theta_0 h})^{1/\alpha}} \frac{\tilde{Y}}{Y_0}.$$

Pelo teorema do valor médio, temos que existe $\bar{\theta}_n$, tal que

$$\left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/\alpha} \left(e^{-\hat{\theta}_n h} - e^{-\theta_0 h} \right) = - \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/\alpha} e^{-\bar{\theta}_n h} (\hat{\theta}_n - \theta_0) h,$$

onde $\bar{\theta}_n$ deve satisfazer $|\bar{\theta}_n - \theta_0| \leq |\hat{\theta}_n - \theta_0|$. Pela consistência de $\hat{\theta}_n$ e simetria das variáveis \tilde{Y} e Y_0 , obtemos a expressão (4.7). \square

4.3.2 Processo Cosseno

Nesta subseção, propomos a estimação de mínimos quadrados para o processo Cosseno. Propomos duas opções de estimação de mínimos quadrados: uma baseada na discretização de Euler-Maruyama, descrita na Seção 4.1, e outra baseada na discretização proposta neste trabalho, dada pela Proposição 2.6.

Discretização de Euler-Maruyama:

Seja $\{V(kh)\}_{k=0}^n$ uma amostra do processo Cosseno, baseada na discretização de Euler-Maruyama (ver (4.3)). Temos a seguinte expressão

$$\sum_{k=1}^n \eta_j^2 = \sum_{k=1}^n \left(V(kh) - V((k-1)h) + a^2 h^2 \sum_{j=1}^{k-1} V(jh) \right)^2. \quad (4.23)$$

Queremos minimizar a expressão (4.23) em relação ao parâmetro a . Logo, derivamos em relação à a e igualamos a zero, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[2 \left(V(kh) - V((k-1)h) + a^2 h^2 \sum_{j=1}^{k-1} V(jh) \right) 2ah^2 \sum_{j=1}^{k-1} V(jh) \right] &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \left[(V(kh) - V((k-1)h)) \sum_{j=1}^{k-1} V(jh) \right] + (ah)^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k-1} V(jh) \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{a}_{OLS} = \frac{1}{h} \sqrt{-\frac{\sum_{k=1}^n \left[(V(kh) - V((k-1)h)) \sum_{j=0}^{k-1} V(jh) \right]}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} V(jh) \right)^2}}. \quad (4.24)$$

Além disso, iremos utilizar dois estimadores robustos para os mínimos quadrados. Consideramos os estimadores robustos *Least Trimmed Squares* (denotado por \hat{a}_{LTS}) e *MM* (denotado por \hat{a}_{MM}), também utilizados em Lopes e Mendes (2006). O método *LTS*, proposto por Rousseeuw (1984), minimiza a soma dos k menores quadrados dos resíduos, onde $k > n/2$, ou seja, pelo menos a metade das observações devem ser utilizadas. O método de estimação robusta *MM*, proposto por Yohai (1987), utiliza valores iniciais para os coeficientes e para a escala obtidos por um estimador S , ver Rousseeuw e Yohai (1984). O estimador final é um estimador M com janela de Tukey, dada por

$$\vartheta(u_i) = \begin{cases} \frac{u_i^2}{2} - \frac{u_i^4}{2c^2} + \frac{u_i^6}{6c^4}, & \text{se } |u_i| \leq c \\ \frac{c^2}{6}, & \text{se } |u_i| > c, \end{cases}$$

onde $c = 4.685$, e_i é o resíduo da i -ésima observação e $u_i = \frac{e_i}{\sigma}$. Por fim, o estimador é o ponto de mínimo da função

$$\sum_{i=1}^n \vartheta(u_i) = \sum_{i=1}^n \vartheta\left(\frac{e_i}{\sigma}\right), \quad (4.25)$$

onde σ é o parâmetro de escala obtido inicialmente pelo estimador S .

Observação 4.2. Seja um processo dado pela seguinte equação diferencial estocás-

tica.

$$dX(t) = \mu(X(t); \theta)dt + \sigma(X(t); \theta)dB(t), \quad (4.26)$$

onde $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ é o movimento Browniano. Considerando conhecido o termo de difusão, isto é, $\sigma(X(t); \theta) = \sigma(X(t))$, Phillips e Yu (2007) afirmam que a função de log-verossimilhança exata contínua de um processo dado pela expressão (4.26), observado no intervalo $[0, T]$, é da seguinte forma

$$\ell(\theta) = \int_0^T \frac{\mu(X(t); \theta)}{\sigma^2(X(t))} dX(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\mu^2(X(t); \theta)}{\sigma^2(X(t))} dt.$$

Caso consideremos o processo Cosseno com ruído movimento Browniano, ou seja, $\{L(t)\}_{t \geq 0} = \{B(t)\}_{t \geq 0}$, temos a seguinte equação diferencial estocástica

$$dV(t) = \left(- \int_0^t a^2 V(s) ds \right) dt + dB(t).$$

Logo, a função de log-verossimilhança exata contínua é dada por

$$\ell(a) = \int_0^T \left(- \int_0^t a^2 V(s) ds \right) dV(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left(- \int_0^t a^2 V(s) ds \right)^2 dt.$$

Para encontrar o ponto de máximo desta função, derivamos em relação ao parâmetro a e igualamos a zero

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \ell(a) &= - \int_0^T \left(\int_0^t 2aV(s) ds \right) dV(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T 2 \left(- \int_0^t a^2 V(s) ds \right) \left(\int_0^t 2aV(s) ds \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\hat{a} = \sqrt{- \frac{\int_0^T \left(\int_0^t V(s) ds \right) dV(t)}{\int_0^T \left(\int_0^t aV(s) ds \right)^2 dt}}. \quad (4.27)$$

Note que a expressão (4.27) é o análogo contínuo do estimador de mínimos quadrados para o processo Cosseno, dado pela expressão (4.24).

Discretização da Proposição 2.6:

Seja $\{V(kh)\}_{k=0}^n$ uma amostra do processo Cosseno, baseada na discretização

dada pela Proposição 2.6. Temos a seguinte expressão

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,h}^2 = \sum_{k=1}^n (V((k+1)h) - 2 \cos(ah) V(kh) + V((k-1)h))^2. \quad (4.28)$$

Queremos minimizar a expressão (4.28) em relação ao parâmetro a . Logo, derivamos em relação à a e igualamos a zero, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [2(V((k+1)h) - 2 \cos(ah) V(kh) + V((k-1)h)) 2h \operatorname{sen}(ah) V(kh)] &= 0 \\ \sum_{k=1}^n V(kh) [V((k+1)h) + V((k-1)h)] - 2 \cos(ah) \sum_{k=1}^n V(kh)^2 &= 0, \end{aligned}$$

onde supomos que $\operatorname{sen}(ah) \neq 0$. Logo,

$$\hat{a}_{OLS} = \frac{1}{h} \arccos \left(\frac{1 \sum_{k=1}^n V(kh) [V((k+1)h) + V((k-1)h)]}{2 \sum_{k=1}^n V(kh)^2} \right). \quad (4.29)$$

Na Subseção 6.2.2 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando os estimadores aqui propostos, baseados nas duas discretizações.

4.4 MLE Iterativo para o Processo Cosseno

Nesta seção, propomos utilizar um método para aprimorar a estimação via MLE no Processo Cosseno, especialmente a estimação dos parâmetros da distribuição α -estável. Para isso, discretizamos o processo utilizando a Proposição 2.6.

O método iterativo que propomos utilizar baseia-se também nos estimadores de momentos de ordem fracionária baixa (a sigla usada é FLOM, do inglês *fractional lower order moments*), estudados por Dance e Kuruoglu (1999) e Ma e Nikias (1995). Utilizando FLOM, podemos encontrar estimativas para α e σ_ε resolvendo as seguintes expressões

$$\frac{\sin\left(\frac{p\pi}{\alpha}\right)}{\frac{p\pi}{\alpha}} = \left[q \left(\frac{A_p A_{-p}}{\tan(q)} + S_p S_{-p} \tan(q) \right) \right]^{-1},$$

onde $q = \frac{p\pi}{2}$, $A_p = \mathbb{E}[|\varepsilon|^p]$, $S_p = \mathbb{E}[\operatorname{sign}(\varepsilon)|\varepsilon|^p]$ e utilizamos a versão empírica de A_p

e S_p no lugar da teórica. Dada uma estimativa de α , calculamos

$$\kappa = \frac{\hat{\alpha}}{p} \arctan \left(\frac{S_p}{A_p} \tan(q) \right).$$

Dada uma estimativa de α e κ , para estimar σ_ε , consideramos

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = |\cos(\kappa)| \left(\frac{\gamma(1-p) \cos(p\pi/2)}{\gamma(1-p/\hat{\alpha}) \cos(p\kappa/\hat{\alpha})} A_p \right)^{\hat{\alpha}/p}.$$

Os autores Dance e Kuruoglu (1999) e Ma e Nikias (1995) mostraram que a melhor escolha para p é o valor 0.2. Neste trabalho, utilizamos este valor para p .

Note que o vetor de parâmetros a ser estimado é $\boldsymbol{\eta} = (a, \alpha, \sigma_\varepsilon)'$. Utilizamos a notação: $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{mle} = (\hat{a}_{mle}, \hat{\alpha}_{mle}, \hat{\sigma}_{mle})'$ para as estatísticas encontradas através do MLE e $(\hat{\alpha}_{f lom}, \hat{\sigma}_{f lom})'$ para as estatísticas encontradas utilizando o FLOM. Além disso, podemos utilizar a expressão (2.44) para estimar σ_ε , cujo estimador será denotado por $\hat{\sigma}_\varepsilon$.

Algoritmo Iterativo 4.1. O método iterativo que propomos baseia-se nas etapas descritas a seguir.

- **Passo 1:** Estimamos o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (a, \alpha, \sigma_\varepsilon)'$ através dos métodos MLE, FLOM e expressão (2.44), respectivamente.
- **Passo 2:** Escolhemos o vetor $\boldsymbol{\eta}^{(1)} = (\hat{a}^{(1)}, \hat{\alpha}^{(1)}, \hat{\sigma}_\varepsilon^{(1)})'$, onde as estimativas serão aquelas que apresentarem o menor vício, i.é.,

$$\begin{aligned} \hat{a}^{(1)} &= \min_{i \in \{mle, f lom\}} |\hat{a}_i - a| \\ \hat{\alpha}^{(1)} &= \min_{i \in \{mle, f lom\}} |\hat{\alpha}_i - \alpha| \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^{(1)} &= \min_{i \in \{mle, f lom, exp.(2.44)\}} |\hat{\sigma}_i - \sigma_\varepsilon|. \end{aligned}$$

- **Passo 3:** O vetor $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ é escolhido como o vetor inicial para refazer a estimação utilizando MLE. Assim, obtemos uma nova estimativa pelo método MLE, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{mle}$.
- **Passo 4:** Repetir o **Passo 3** até a convergência.

Observação 4.3. (a) Com apenas 2 iterações já temos convergência. Logo, os resultados apresentados são para o MLE da segunda iteração.

(b) Tal metodologia se aplica apenas em simulações, pois em séries temporais reais não sabemos o verdadeiro valor dos parâmetros.

Na Seção 6.3 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o estimador aqui proposto.

4.5 Estimação para o Processo Linear Fracionário Bem-Balanceado com Ruído α -estável

O processo WBLFS, dado pela Definição 3.1, pode ser visto como um AR(1) não estacionário, cujo processo de inovação é dado por $\{Y_{k,h}\}_{k \in \mathbb{N}}$ (Proposição 3.7). Apesar do processo de ruído $\{Y_{k,h}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ser dependente, para a geração do processo e para o cálculo da verossimilhança, consideramos independência. Assim, a função de verossimilhança é escrita em função dos erros. A estimação dos parâmetros é feita pelo método da máxima verossimilhança, obtendo a estimativa para $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma_Y)'$. Estimamos também o parâmetro H . Para isso, utilizando os valores estimados $(\hat{\alpha}, \hat{\sigma}_Y)'$, obtemos a solução em H para a seguinte equação

$$\hat{\sigma}_Y - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| |s|^{H-1/\hat{\alpha}} - |s-h|^{H-1/\hat{\alpha}} \right|^{\hat{\alpha}} ds \right)^{1/\hat{\alpha}} = 0,$$

obtendo o estimador \hat{H} , sujeito à restrição $1/\alpha < H < 1$.

Na Seção 6.4 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando os estimadores aqui propostos.

4.6 Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Movimento Browniano

Nesta seção apresentamos a metodologia Bayesiana para estimar os parâmetros de dois exemplos de processos tipo OU generalizados: o processo OU e o processo Cosseno. Consideramos o ruído movimento Browniano, ou seja, $\{L(t)\}_{t \geq 0} = \{B(t)\}_{t \geq 0}$, nas expressões dos Exemplos 2.1 e 2.2. Para aplicar a metodologia Baye-

siana utilizamos o ambiente computacional *JAGS* (ver Plummer, 2003) em conexão com o ambiente *R*, utilizando o pacote *R2jags*. O ambiente computacional *JAGS* implementa o amostrador de Gibbs (ver Gelfand e Smith, 1990).

Para obter a função de distribuição a posteriori, muitas vezes nos deparamos com integrais complicadas e sem solução analítica. Uma alternativa para contornar esse problema são os métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). Neste contexto, pretende-se obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas amostrais de interesse desta distribuição. Os métodos MCMC mais utilizados são o amostrador de Gibbs e o algoritmo de Metropolis-Hastings. Aqui apresentamos o algoritmo utilizado pelo amostrador de Gibbs, que foi aplicado para gerar amostras a partir das distribuições a posteriori consideradas nas Subseções 4.6.1 e 4.6.2. O amostrador de Gibbs é baseado nas distribuições condicionais completas para cada parâmetro. Seja $\boldsymbol{\eta}$ o vetor de parâmetros em análise e um vetor de valores iniciais arbitrário $\boldsymbol{\eta}^{(0)} = (\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_r^{(0)})'$, onde r é o número de parâmetros a serem estimados. O algoritmo do amostrador de Gibbs é dado pelas seguintes etapas

- **Passo 1:** Obtenha um novo valor $\boldsymbol{\eta}^{(t)}$ a partir de $\boldsymbol{\eta}^{(t-1)}$ da seguinte forma
 - gerar $\eta_1^{(t)}$ a partir de $\Pi(\eta_1 | \mathbf{y}, \eta_2^{(t-1)}, \eta_3^{(t-1)}, \dots, \eta_r^{(t-1)})$;
 - gerar $\eta_2^{(t)}$ a partir de $\Pi(\eta_2 | \mathbf{y}, \eta_1^{(t-1)}, \eta_3^{(t-1)}, \dots, \eta_r^{(t-1)})$;
 - \vdots
 - gerar $\eta_r^{(t)}$ a partir de $\Pi(\eta_r | \mathbf{y}, \eta_1^{(t-1)}, \dots, \eta_{r-1}^{(t-1)})$.
- **Passo 2:** Quando o vetor $\boldsymbol{\eta}^{(t)} = (\eta_1^{(t)}, \dots, \eta_r^{(t)})'$ é obtido, retornar ao **Passo 1**, fazendo $t = t + 1$, até que haja convergência.

Para obter a convergência desejada do amostrador de Gibbs, é necessário considerar um período de aquecimento, também chamado de *burn-in*. Este corresponde a desconsiderar um número de iterações pré-determinado antes que os parâmetros amostrados sejam usados na distribuição a posteriori. Além disso, consideramos saltos de tamanho p : estes correspondem a usar somente as observações múltiplas de p a partir da amostra produzida. O intuito deste procedimento é reduzir a correlação na amostra gerada.

Consideramos *prioris* para os parâmetros de interesse com distribuição Gama Inversa. Uma variável aleatória X tem distribuição Gama Inversa com parâmetros de

forma γ_1 e de escala γ_2 , denotada por $X \sim GI(\gamma_1, \gamma_2)$, quando sua função densidade é dada por

$$f_X(x|\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\gamma_2^{\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)} x^{-(\gamma_1+1)} \exp\left(-\frac{\gamma_2}{x}\right), \quad (4.30)$$

para $x > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt$ é a função Gama. Uma variável aleatória com distribuição Gama Inversa só contempla valores positivos. Por isso é utilizada como priori para parâmetros com essa característica, tal como a variância. Além disso, se $X \sim GI(\gamma_1, \gamma_2)$, temos que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - 1}, \text{ para } \gamma_1 > 1;$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - 1)^2(\gamma_1 - 2)}, \text{ para } \gamma_1 > 2.$$

Como utilizamos o amostrador de Gibbs, precisamos aplicar testes de diagnóstico, para garantir a convergência e estacionariedade das cadeias de Markov geradas pelo algoritmo. Os testes que foram aplicados às cadeias obtidas são os seguintes: *Raftery-Lewis*, *Geweke* e *Heidelberger-Welch*. Para isso utilizamos o pacote *coda* do programa *R*.

Raftery-Lewis:

O critério proposto por Raftery e Lewis (1992) é um método para estimar quantas iterações são necessárias para que o amostrador de Gibbs apresente convergência à distribuição estacionária. Além disso, propõe quantas iterações são necessárias para isto. Esse valor é calculado ao garantir que um quantil de uma determinada função do parâmetro, $f(\boldsymbol{\eta})$, seja estimada com precisão pré-definida. Por exemplo, desejamos estimar $\mathbb{P}(f(\boldsymbol{\eta}) \leq u|y)$ com probabilidade 0.95, quando o verdadeiro valor é q . Uma cadeia binária (0 ou 1) é formada segundo $Z_j = \mathbb{I}_{(-\infty, u]}(f(\boldsymbol{\eta})_j)$, onde $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}(\cdot)$ é a função indicadora e $f(\boldsymbol{\eta})_j$ é o valor gerado na j -ésima iteração. Pode-se construir novas sequências ao tomar os valores de Z_j a cada k^* iterações, sendo $Z_j^{(k^*)} = Z_{1+(j-1)k^*}$. Este processo é aproximadamente uma cadeia de Markov desde que k^* seja suficientemente grande. Seja

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},$$

a matriz de transição de $\{Z_j^{(k^*)}\}$, onde $\mathbb{P}(Z_j = 1|Z_{j-1} = 0) = \alpha$ e $\mathbb{P}(Z_j = 0|Z_{j-1} = 1) = \beta$. Com a definição do k^* , determina-se $B = mk^*$, o número de iterações

necessárias para o *burn-in*, sendo que

$$m = \frac{\ln\left(\frac{\epsilon(\alpha+\beta)}{\max(\alpha,\beta)}\right)}{\ln(1-\alpha-\beta)},$$

onde ϵ é a distância entre $\mathbb{P}(Z_B^{(\epsilon^*)} = a | Z_0^{(k^*)} = b)$ e a distribuição de equilíbrio, para $a, b \in \{0, 1\}$.

Então, escolhe-se $N = nk^*$ de maneira a garantir que \hat{q} esteja próximo de q de acordo com a probabilidade definida. O estimador de q é $\bar{Z}_m^{(k^*)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j^{(k^*)}$. Então,

$$n = \frac{\alpha\beta(2-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^3} \left\{ \frac{r}{\Phi\left(\frac{1}{2}(1+s)\right)} \right\}^{-2},$$

onde Φ é a função de distribuição da normal padrão.

Geweke:

Geweke (1992) sugere um procedimento para testar a convergência das cadeias de Markov obtidas pelo amostrador de Gibbs. Seja $f(\boldsymbol{\eta})$ a função do parâmetro a ser estimada. Considerando a trajetória $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$, construída a partir de $f^{(i)} = f(\boldsymbol{\eta}^{(i)})$, essa trajetória define uma série temporal. Estimamos a média utilizando

$$\bar{f}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^{(i)}.$$

Este é um estimador não-viciado, com variância assintótica $S_f(0)/n$, onde $S_f(\omega)$ é a função densidade espectral na frequência ω . Em geral, não conhecemos $S_f(0)$, então estimamos $\hat{S}_f(0)$, utilizando análise espectral. Após n iterações, onde n deve ser grande o suficiente, determinam-se as médias \bar{f}_a e \bar{f}_b , com base nas n_a primeiras iterações e nas n_b últimas iterações, respectivamente. Considerando, também, os estimadores das variâncias assintóticas $\hat{S}_f^a(0)$ e $\hat{S}_f^b(0)$. Admitindo que n_a/n e n_b/n são fixos e $n \rightarrow \infty$ pode-se mostrar que

$$\frac{\bar{f}_a - \bar{f}_b}{\sqrt{\hat{S}_f^a(0)/n_a + \hat{S}_f^b(0)/n_b}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

se a sequência $f^{(i)}$ for estacionária. Assim, um teste de hipóteses para uma sequência pode ser construído, para verificar a convergência da cadeia de Markov.

Heidelberger-Welch:

O método de Heidelberger e Welch (1981) é utilizado para testar se a cadeia é estacionária e para verificar se a média estimada está sendo calculada com uma precisão pré-especificada. Para a primeira parte do teste, seja $f(\boldsymbol{\eta})$ a função do parâmetro que desejamos testar. Além disso, seja $S_f(0)$ a função densidade espectral na frequência zero, obtida da segunda metade da sequência, para evitar erros de estimação provenientes de possíveis fases transientes da cadeia. Seja X_j a j -ésima iteração da sequência e considere

$$Y_0 = 0, \quad Y_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j,$$
$$B_n(t) = \frac{Y_{[nt]} - [nt]\bar{X}}{\sqrt{nS_f(0)}}, \quad 0 < t < 1,$$

onde $[q]$ denota o maior inteiro menor ou igual a q . Então, sob a hipótese nula de estacionariedade para n grande, a estatística $B_n(t)$ é distribuída aproximadamente como uma ponte Browniana e a estatística de Cramer-von Mises pode ser utilizada, $T = \int_0^1 B_n(t)^2 dt$, para testar a estacionariedade. Se T for maior do que um valor tabelado, rejeitamos que $B_n(\cdot)$ tem a forma da ponte Browniana, rejeitando a hipótese de estacionariedade.

Para estimar o tamanho de *burn-in*, um procedimento iterativo é sugerido por Heidelberger e Welch (1981), que é baseado em um teste de hipótese repetitivo da estatística de Cramer-von Mises para diferentes partes da cadeia.

Na segunda parte do teste considera-se a porção da sequência que passou no teste de estacionariedade, para cada variável em estudo. Então, utilizando a metade do comprimento do intervalo de credibilidade de $(1 - \alpha)\%$ para a média, calcula-se o teste *half-width*. A estatística calculada é a “meia largura relativa” (*relative half-width*) do intervalo, dada pela expressão

$$RHW = \frac{z_{(1-\alpha/2)}(\hat{S}_n^2)^{1/2}}{\hat{\theta}},$$

onde $z_{(1-\alpha/2)}$ é o escore z para o $100(1 - \alpha/2)$ -ésimo percentil, n é o comprimento da cadeia de Markov, $\hat{\theta}$ é a média estimada do parâmetro θ e \hat{S}_n^2 é a variância estimada da cadeia de Markov através do método da função densidade espectral.

O teste de estacionariedade é unilateral e a rejeição ocorre quando o p -valor é

maior do que $1 - \alpha$. É necessário escolher um nível ϵ de tolerância. Caso $RHW > \epsilon$, conclui-se que não há dados suficientes para estimar com precisão a média com nível de confiança $1 - \alpha$ e tolerância ϵ .

4.6.1 Processo OU

Nesta subseção consideramos a estimação Bayesiana dos parâmetros do Processo OU com ruído movimento Browniano. Para implementar o modelo, utilizamos a discretização obtida para o processo OU na Proposição 2.5. Quando o ruído for o movimento Browniano, temos $Z_{k,h} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Z^2)$, onde $\sigma_Z^2 = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\theta h}}{2\theta} \right)$. Além disso, consideramos o caso estacionário do processo OU, ou seja, $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$, onde $\sigma_0^2 = \frac{1}{2\theta}$. Seja $\mathbf{V} = \{V_{kh}\}_{k=0}^n$ uma amostra do processo OU e $\boldsymbol{\eta} = (\theta, \sigma^2)'$ o vetor de parâmetros a ser estimado, então a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta}) &= \sqrt{\frac{\theta^{n+1}}{\pi^{n+1} \sigma^{2n} (1 - e^{-2\theta h})^n}} \exp\{-\theta V(0)^2\} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \exp\left\{-\frac{\theta(V(ih) - e^{-\theta h}V((i-1)h))^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\theta h})}\right\}. \end{aligned}$$

Para as distribuições *a priori*, considerando independência entre os parâmetros, utilizamos as seguintes *prioris* não-informativas:

- $\sigma^2 \sim GI(0.001, 0.001)$;
- $\theta \sim GI(0.001, 0.001)$.

Assim, a posteriori que obtemos é dada por

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{V}) &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})\theta^{-1.001}\sigma^{-2.002} \exp\left\{-0.001\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\sigma^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

onde $\pi(\cdot)$ é a distribuição a priori do vetor de parâmetros.

Na Subseção 6.5.1 apresentamos resultados de simulações, utilizando a metodologia Bayesiana aqui descrita.

4.6.2 Processo Cosseno

Nesta subseção apresentamos o procedimento de estimação Bayesiana dos parâmetros para o Processo Cosseno, considerando o ruído como um movimento Browniano.

Para implementar o modelo, utilizamos a discretização do processo Cosseno dada pela Proposição 2.6. No caso de ruído movimento Browniano, temos $\varepsilon_{k,h} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, onde $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma \left(\frac{\cos(ah)\sin(ah)+ah}{a} \right)$. Consideramos $\varepsilon_{k,h}$ variáveis aleatórias i.i.d. Além disso, consideramos $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$. Seja $\mathbf{V} = \{V_{kh}\}_{k=0}^n$ uma amostra do processo Cosseno e $\boldsymbol{\eta} = (a, \sigma^2)'$ o vetor de parâmetros a ser estimado. Então, a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta}) &= \sqrt{\frac{a^n}{2^n \pi^{n+1} \sigma_0^2 \sigma^{2n} (\cos(ah) \operatorname{sen}(ah) + ah)^n}} \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{V(0)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{a(V(h) - 2\cos(ah)V(0))^2}{\sigma^2(\cos(ah) \operatorname{sen}(ah) + ah)} \right) \right\} \\ &\times \prod_{i=2}^n \exp \left\{ - \frac{a(V(ih) - 2\cos(ah)V((i-1)h) + V((i-2)h))^2}{2\sigma^2(\cos(ah) \operatorname{sen}(ah) + ah)} \right\}. \end{aligned}$$

Para as distribuições *a priori*, considerando independência entre os parâmetros, utilizamos as seguintes *prioris* não-informativas:

- $\sigma^2 \sim GI(0.001, 0.001)$;
- $a \sim GI(0.001, 0.001)$.

Assim, a posteriori que obtemos é dada por

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{V}) &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})a^{-1.001}\sigma^{-2.002} \exp \left\{ -0.001 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sigma^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde $\pi(\cdot)$ é a distribuição a priori do vetor de parâmetros.

Na Subseção 6.5.2 apresentamos resultados de simulações, utilizando a metodologia Bayesiana aqui descrita.

4.7 Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Lévy α -Estável

Nesta seção apresentamos a metodologia Bayesiana para estimar os parâmetros dos processos OU e Cosseno, considerando ruído Lévy α -estável. Para aplicar a metodologia Bayesiana novamente utilizamos o ambiente computacional *JAGS* em conexão com o ambiente *R*, utilizando o pacote *R2jags*. Para implementar a metodologia, utilizamos o amostrador de Gibbs, descrito na Seção 4.6.

A distribuição α -estável só possui forma fechada para sua função densidade em três valores de α : $\alpha = 0.5$ (Lévy), $\alpha = 1$ (Cauchy) e $\alpha = 2$ (Gaussiana). Esta característica dificultou muito a implementação da metodologia Bayesiana. Tentamos utilizar a ideia de considerar variáveis adicionais descrita em Buckle (1995), mas não obtivemos bons resultados. As cadeias geradas não convergiam e apresentavam forte correlação. Descobrimos uma nova forma de descrever a função densidade da distribuição α -estável, utilizando as chamadas funções H-Fox (ver Mathai et al., 2010).

A função H-Fox é definida como uma integral complexa, dada por

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{cccccc} (a_1, A_1), & \dots, & (a_n, A_n), & (a_{n+1}, A_{n+1}), & \dots, & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), & \dots, & (b_m, B_m), & (b_{m+1}, B_{m+1}), & \dots, & (b_q, B_q) \end{array} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)} z^{-s} ds,$$

onde A_j e B_j assumem valores positivos e todos os a_j e b_j podem ser complexos. O contorno L na integral acima vai de $c - i\infty$ até $c + i\infty$ de modo que os polos da função matemática Gama $\Gamma(b_j + B_j s)$, $j = 1, \dots, m$ estão à esquerda e os polos de $\Gamma(1 - a_j + A_j s)$, $j = 1, \dots, n$, estão à direita de L .

A função H-Fox pode ser aproximada por séries de potências, conforme Braaksma

(1964). Para $z \neq 0$ se $\kappa > 0$ ou para $0 < |z| > D^{-1}$ se $\kappa = 0$, temos

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq h}^m \Gamma\left(b_j + B_j \frac{b_h + v}{B_h}\right)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma\left(1 - b_j + B_j \frac{b_h + v}{B_h}\right)} \times \\ \times \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(1 - a_j + A_j \frac{b_h + v}{B_h}\right) (-1)^v z^{\frac{b_h + v}{B_h}}}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma\left(a_j - A_j \frac{b_h + v}{B_h}\right) v! B_h},$$

Para $z \neq 0$, se $\kappa < 0$, ou para $|z| > D^{-1}$, se $\kappa = 0$, temos

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq h}^n \Gamma\left(1 - a_j + A_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma\left(a_j + A_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right)} \times \\ \times \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma\left(b_j + B_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right) (-1)^v (1/z)^{\frac{1 - a_h + v}{A_h}}}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma\left(1 - b_j - B_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right) v! A_h},$$

onde,

$$\kappa = \sum_{j=1}^p B_j - \sum_{j=1}^q A_j \quad \text{e} \quad D = \frac{\prod_{j=1}^p A_j^{A_j}}{\prod_{j=1}^q B_j^{B_j}}.$$

Usando a representação da função H-Fox por séries de potências, podemos aproximar a função densidade de uma variável aleatória com distribuição α -estável.

Seja $X \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \delta)$ e $\alpha \neq 1$, então a função densidade de X é dada por

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\alpha \pi \tilde{\sigma}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin\left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \tilde{\beta} - \frac{2\tilde{\beta}}{\alpha}\right) (1+v)\right] \left(\frac{1+v}{\alpha}\right) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}}\right)^v}{v!}, \quad (4.31)$$

quando $1 < \alpha < 2$ e $x - \delta > 0$, e

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\pi \tilde{\sigma}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin \left[\frac{\pi}{2} (2 + \alpha v + \alpha v \tilde{\beta}) \right] (1 + \alpha v) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}} \right)^{-1-\alpha v}}{v!}, \quad (4.32)$$

quando $0 < \alpha < 1$ e $x - \delta > 0$. Para $x - \delta < 0$, a expressão para a função densidade é $f(x; \alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \delta) = f(-x; \alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \delta)$, onde $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\beta}$ são dados por

$$\tilde{\sigma} = \sigma \left(1 + \beta^2 \tan^2 \left(\frac{\alpha \pi}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (4.33)$$

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \frac{2}{\pi \alpha} \arctan(\beta \tan(\alpha \pi / 2)), & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{2}{\pi(\alpha-2)} \arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi(\alpha-2)}{2}\right)\right), & \text{se } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (4.34)$$

Para trabalhar computacionalmente com as representações (4.31) e (4.32), é preciso tomar cuidado, pois podem haver intervalos onde a série diverge. Para $1 < \alpha < 2$ e $x - \delta > 0$, a equação (4.31) deve ser utilizada para calcular a função densidade para pequenas diferenças de $x - \delta$. Quando $x \geq \delta$, $1 < \alpha < 2$ e $(x - \delta) \rightarrow \infty$, usamos a seguinte aproximação

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\tilde{\sigma} \pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin \left[\frac{\pi}{2} (v\alpha + v\alpha\tilde{\beta} + 2 - 2\tilde{\beta}v) \right] (1 + v) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}} \right)^{-1-\alpha v}}{v!}, \quad (4.35)$$

Analogamente, a equação (4.32) deve ser substituída por

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\tilde{\sigma} \pi \alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin \left[\frac{\pi}{2} (1 + \tilde{\beta} + v + \tilde{\beta}v) \right] \left(\frac{1+v}{\alpha} \right) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}} \right)^v}{v!}, \quad (4.36)$$

quando $x \geq \delta$, $0 < \alpha < 1$ e $(x - \delta) \rightarrow 0^+$, onde $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\beta}$ são dados, respectivamente, por (4.33) e (4.34).

Calculamos a função de verossimilhança das amostras geradas, utilizando as expressões (4.31), (4.32), (4.35) e (4.36). As Subseções 4.7.1 e 4.7.2 apresentam a metodologia utilizada para os processo OU e Cosseno, respectivamente.

4.7.1 Processo OU

Nesta subseção consideramos a estimação Bayesiana dos parâmetros do Processo OU com ruído Lévy α -estável. Para implementar o modelo, utilizamos a discretização obtida para o processo OU na Proposição 2.5, onde $Z_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_Z, 0, 0)$ e $\sigma_Z^\alpha = \frac{1-e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha}$. Além disso, consideramos o caso estacionário do processo OU, ou

seja, $V_0 \sim S_\alpha(\sigma_0, 0, 0)$, onde $\sigma_0^\alpha = \frac{1}{\alpha\theta}$. Seja $\mathbf{V} = \{V_{kh}\}_{k=0}^n$ uma amostra do processo OU e $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma_Z, \theta)'$ o vetor de parâmetros a ser estimado. Então a função de verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta}) = \prod_{k=1}^n f(V_{kh} - e^{-\theta h}V_{(k-1)h}; \sigma_Z, 0, 0),$$

onde $f(\cdot)$ é dada por (4.31), (4.32), (4.35) e (4.36), dependendo de cada caso.

Para as distribuições *a priori*, considerando independência entre os parâmetros, utilizamos as seguintes *prioris* não-informativas:

- $\alpha \sim \mathcal{NT}(1.5, 10; 1, 2)$, ou seja, α segue uma distribuição normal com média 1.5 e variância 10, truncada no intervalo $[1, 2]$;
- $\theta \sim GI(0.001, 0.001)$.

Assim, a posteriori que obtemos é dada por

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{V}) &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})\theta^{-1.001} \exp\left\{-\frac{0.001}{\theta} - \frac{(\alpha - 1.5)^2}{200}\right\} \mathbb{I}_\alpha([1, 2]), \end{aligned}$$

onde $\pi(\cdot)$ é a distribuição a priori do vetor de parâmetros.

Na Subseção 6.6.1 apresentamos resultados de simulações, utilizando a metodologia Bayesiana aqui descrita.

4.7.2 Processo Cosseno

Nesta subseção consideramos a estimação Bayesiana dos parâmetros do Processo Cosseno com ruído Lévy α -estável. Para implementar o modelo, utilizamos a discretização do processo Cosseno dada pela Proposição 2.6. Temos que $\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, 0)$, onde $\sigma_\varepsilon^\alpha = 2 \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds$. Consideramos $\varepsilon_{k,h}$ variáveis aleatórias i.i.d. Seja $\mathbf{V} = \{V_{kh}\}_{k=0}^n$ uma amostra do processo Cosseno e $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma_\varepsilon, a)'$ o vetor de parâmetros a ser estimado. Além disso, consideramos $V_0, V_1 \sim S_\alpha(\sigma_0, 0, 0)$. Então, a função de verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta}) = \prod_{k=1}^{n-1} f(V_{(k+1)h} - 2\cos(ah)V_{kh} + V_{(k-1)h}; \sigma_\varepsilon, 0, 0),$$

onde $f(\cdot)$ é dada pelas expressões (4.31), (4.32), (4.35) ou (4.36), dependendo de cada caso.

Para as distribuições *a priori*, considerando independência entre os parâmetros, utilizamos as seguintes *prioris* não-informativas:

- $\alpha \sim \mathcal{NT}(1.5, 10; 1, 2)$, ou seja, α segue uma distribuição normal com média 1.5 e variância 10, truncada no intervalo $[1, 2]$;
- $a \sim GI(0.001, 0.001)$.

Assim, a posteriori que obtemos é dada por

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{V}) &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta})\pi(\boldsymbol{\eta}) \\ &\propto \mathcal{L}(\mathbf{V}|\boldsymbol{\eta}) a^{-1.001} \exp\left\{-\frac{0.001}{a} - \frac{(\alpha - 1.5)^2}{200}\right\} \mathbb{I}_{\alpha}([1, 2]), \end{aligned}$$

onde $\pi(\cdot)$ é a distribuição a priori do vetor de parâmetros.

Na Subseção 6.6.2 apresentamos resultados de simulações, utilizando a metodologia Bayesiana aqui descrita.

Capítulo 5

Previsão

Neste capítulo apresentamos a previsão para processos α -estáveis estacionários. Na Seção 5.1 apresentamos um preditor linear baseado na dispersão, proposto por Cline e Brockwell (1985), e o aplicamos para o processo OU. Na Seção 5.2 apresentamos o preditor linear baseado na covariação, proposto por Mohammadi e Mohammadpour (2009), e também o aplicamos para o processo OU. Seja $\hat{X}(n+k)$ o valor predito de $X(n+k)$, baseado na amostra $\{X(i)\}_{i=1, \dots, n}$. Definimos o erro de previsão por $X(n+k) - \hat{X}(n+k)$. Para fins de comparação, consideramos as seguintes estatísticas

$$\begin{aligned}MPE &= \left(\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \frac{X(n+k) - \hat{X}(n+k)}{X(n+k)} \right) 100\%, \\MSE &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M (X(n+k) - \hat{X}(n+k))^2, \\MAE &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M |X(n+k) - \hat{X}(n+k)|, \\MAPE &= \left(\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \left| \frac{X(n+k) - \hat{X}(n+k)}{X(n+k)} \right| \right) 100\%,\end{aligned}$$

onde M é o número de valores preditos, MPE é a *porcentagem de erro médio*, MSE é o *erro quadrático médio*, MAE é o *erro absoluto médio* e MAPE é a *porcentagem de erro médio absoluto*.

Como, dentre os exemplos de processos estudados neste trabalho, apenas o processo OU é estacionário, apresentamos um estudo de previsão para este processo baseado na dispersão e na covariação.

5.1 Preditor Baseado na Dispersão

Cline e Brockwell (1985) propõem o preditor de mínima dispersão para processos lineares com ruído α -estável. No entanto, uma hipótese necessária é a estacionariedade. Portanto, dentre os processos que estudamos, apenas o OU satisfaz esta condição (conforme Proposição 3.3). Caso não seja estacionário, devemos usar previsão para processos localmente estacionários (ver Dahlhaus, 1997 e Palma et al., 2013). No entanto, isto não será abordado nesse trabalho.

A Definição 5.1 a seguir apresenta a dispersão.

Definição 5.1. Seja $Y \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^\alpha \right)^{1/\alpha} W_1$, onde W_1 tem distribuição simétrica α -estável. Então a dispersão de Y é definida por

$$\text{disp}(Y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^\alpha. \quad (5.1)$$

Consideramos o preditor linear baseado na dispersão no processo OU. Para isso, considere o seguinte resultado, que pode ser encontrado em Cline e Brockwell (1985).

Proposição 5.1. *Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um processo $AR(1)$, tal que $X_n = \phi X_{n-1} + \epsilon_n$, onde $|\phi| < 1$ e $\epsilon_n \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Então o preditor de mínima dispersão é dado por*

$$\hat{X}_{n+k} = \phi^k X_n, \quad k \geq 1, n \geq 1,$$

onde o erro de dispersão é dado por

$$\text{disp}(X_{n+k} - \hat{X}_{n+k}) = \frac{1 - |\phi|^{\alpha k}}{1 - |\phi|^\alpha}.$$

De fato, podemos encontrar o erro de dispersão pela expressão a seguir

$$\begin{aligned} \text{disp}(X_{n+k} - \hat{X}_{n+k}) &= \text{disp}(X_{n+k} - \phi^k X_n) = \text{disp}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{n+k-j} - \phi^k \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{n-j}\right) \\ &= \text{disp}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{n+k-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{j+k} \epsilon_{n-j}\right) \\ &= \text{disp}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \epsilon_{n+k-j} + \sum_{j=k}^{\infty} \phi^j \epsilon_{n+k-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{j+k} \epsilon_{n-j}\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Fazendo a mudança de variáveis $i = j + k$ no último somatório da expressão (5.2), obtemos

$$\sum_{j=k}^{\infty} \phi^j \epsilon_{n+k-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{j+k} \epsilon_{n-j} = \sum_{j=k}^{\infty} \phi^j \epsilon_{n+k-j} - \sum_{i=k}^{\infty} \phi^i \epsilon_{n+k-i} = 0.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \text{disp}(X_{n+k} - \hat{X}_{n+k}) &= \text{disp}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \epsilon_{n+k-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} |\phi|^{\alpha j} = \frac{1 - |\phi|^{\alpha k}}{1 - |\phi|^{\alpha}}. \end{aligned}$$

No caso do processo OU, temos

$$V(jh) = e^{-\theta h} V((j-1)h) + Z_{k,h},$$

onde $Z_{k,h} \sim S_{\alpha}\left(\sigma \left(\frac{1-e^{-\theta \alpha h}}{\theta \alpha}\right)^{1/\alpha}, 0, 0\right)$.

Portanto, utilizamos a Proposição 5.1 com $\phi = e^{-\theta h}$, e obtemos o preditor de mínima dispersão, dado por

$$\hat{V}((n+k)h) = \hat{V}(nh + kh) = e^{-\theta h^2 k} V(nh).$$

Além disso, o erro de dispersão é dado por

$$e_{disp} = \frac{1 - e^{-\theta h^2 \alpha k}}{1 - e^{-\theta h \alpha}}.$$

Note que é necessário utilizarmos estimativas para θ e α . Para isso, utilizaremos o estimador de máxima verossimilhança. Apresentamos resultados de simulações nas Tabelas 5.1-5.9. Consideramos as seguintes configurações para os parâmetros.

- $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$;
- $\alpha \in \{1.1, 1.5, 2\}$;
- $T = 1000$, $h \in \{1, 0.1, 0.01\}$ e $n = T/h$.

Podemos observar, pelas Tabelas 5.1-5.9, que os resultados apresentam valores

para as estatísticas de previsão bastante altos, quando $h \in \{1, 0.1\}$, mas diminuem consideravelmente quando $h = 0.01$. As Figuras 5.1-5.9 mostram os últimos vinte pontos observados da série temporal (pontos abertos) em conjunto com os cinco valores preditos (pontos pretos). Podemos notar que quanto maior o valor de k , mais o valor predito se afasta do seu verdadeiro valor. Além disso, observe que a previsão à 5 passos melhora para alguns casos de θ , quando h assume valor pequeno.

Tabela 5.1: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.1$, $h = 1$ e $n = 1000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.5022$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1430$				
1	-0.0460	-0.1594	0.1133	0.9968
2	0.2480	-0.0965	0.3445	1.5597
3	40.4655	-0.0584	40.5239	1.8775
4	24.6274	-0.0353	24.6627	2.0570
5	15.5411	-0.0214	15.5625	2.1584
$MPE = 38.6433\%$, $MSE = 498.5515$, $MAE = 16.2414$, $MAPE = 137.0844\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 0.9844$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1776$				
1	1.1134	0.6071	0.5063	1.0083
2	1.0318	0.2269	0.8049	1.3189
3	0.5775	0.0848	0.4928	1.4146
4	3.5574	0.0317	3.5257	1.4440
5	1.4096	0.0118	1.3978	1.4531
$MPE = 81.4159\%$, $MSE = 3.1063$, $MAE = 1.3455$, $MAPE = 81.4159\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9792$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1412$				
1	-0.2987	-0.0717	-0.2270	1.0027
2	-0.6936	-0.0099	-0.6837	1.1050
3	-0.2108	-0.0014	-0.2094	1.1155
4	0.5685	-0.0002	0.5686	1.1165
5	-0.0998	-0.0000	-0.0998	1.1167
$MPE = 94.7853\%$, $MSE = 0.1792$, $MAE = 0.3577$, $MAPE = 94.7853\%$				

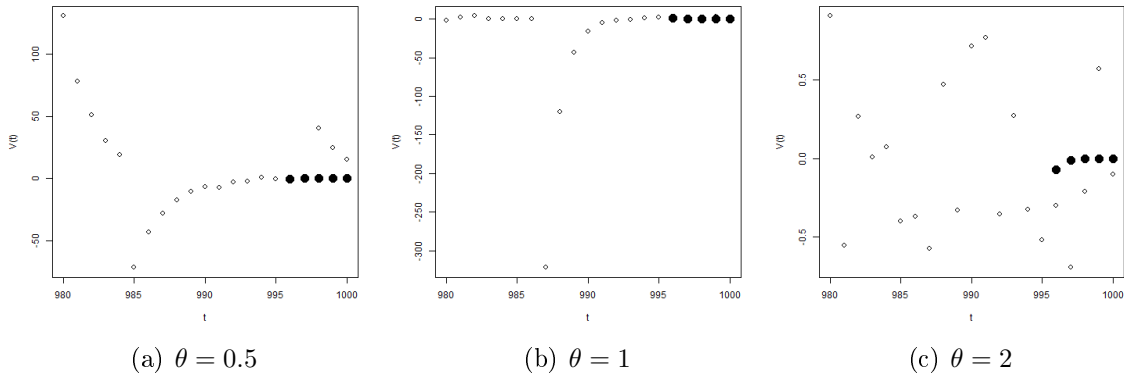
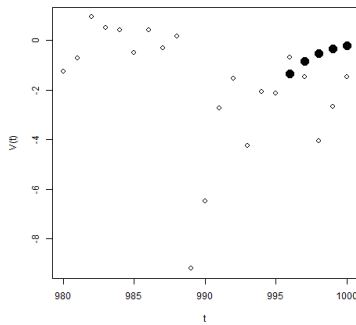


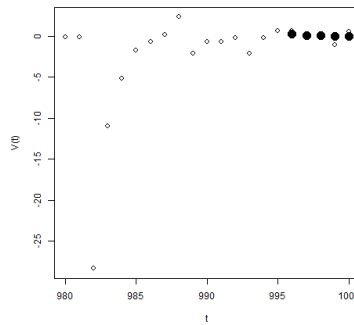
Figura 5.1: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.1$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 1$ e $n = 1000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.2: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.5$, $h = 1$ e $n = 1000$.

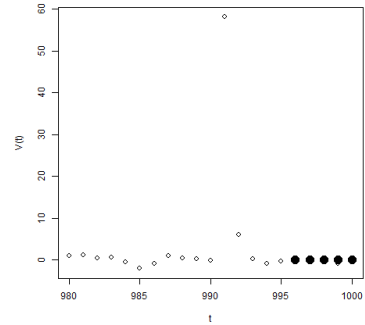
k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4758$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4422$				
1	-0.6903	-1.3251	0.6349	1.0347
2	-1.4611	-0.8234	-0.6377	1.5378
3	-4.0493	-0.5116	-3.5377	1.7824
4	-2.6534	-0.3179	-2.3356	1.9014
5	-1.4614	-0.1975	-1.2638	1.9592
$MPE = 42.7082\%$, $MSE = 4.0754$, $MAE = 1.6819$, $MAPE = 79.4977\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0010$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5312$				
1	0.6520	0.2145	0.4375	0.9996
2	0.1755	0.0788	0.0967	1.2158
3	0.0401	0.0290	0.0111	1.2625
4	-1.1045	0.0106	-1.1152	1.2726
5	0.4915	0.0039	0.4876	1.2748
$MPE = 70.0275\%$, $MSE = 0.3365$, $MAE = 0.4296$, $MAPE = 70.0275\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9183$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4116$				
1	-0.1990	-0.0570	-0.1420	1.0078
2	-0.2819	-0.0084	-0.2735	1.0677
3	-0.3982	-0.0012	-0.3970	1.0712
4	-0.9378	-0.0002	-0.9376	1.0714
5	-0.2935	-0.0000	-0.2935	1.0714
$MPE = 93.6131\%$, $MSE = 0.2436$, $MAE = 0.4087$, $MAPE = 93.6131\%$				



(a) $\theta = 0.5$



(b) $\theta = 1$



(c) $\theta = 2$

Figura 5.2: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.5$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 1$ e $n = 1000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Tabela 5.3: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 2$, $h = 1$ e $n = 1000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4460$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9989$				
1	2.9488	1.3480	1.6008	1.0711
2	0.7985	0.8629	-0.0644	1.4653
3	-0.4922	0.5524	-1.0446	1.6104
4	-0.0821	0.3536	-0.4357	1.6638
5	0.3856	0.2264	0.1592	1.6835
$MPE = 166.1405\%$, $MSE = 0.7746$, $MAE = 0.6610$, $MAPE = 169.3671\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.1311$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9998$				
1	0.9868	0.4148	0.5719	0.9652
2	0.8547	0.1339	0.7209	1.0958
3	-0.2578	0.0432	-0.3010	1.1135
4	0.4922	0.0139	0.4783	1.1159
5	-0.6815	0.0045	-0.6860	1.1162
$MPE = 91.3765\%$, $MSE = 0.3273$, $MAE = 0.5516$, $MAPE = 91.3765\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9065$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9998$				
1	-0.2424	0.0785	-0.3209	1.0039
2	0.4615	0.0117	0.4498	1.0222
3	0.2498	0.0017	0.2480	1.0226
4	0.5109	0.0003	0.5106	1.0226
5	0.6022	0.0000	0.6021	1.0226
$MPE = 105.8199\%$, $MSE = 0.1980$, $MAE = 0.4263$, $MAPE = 105.8199\%$				

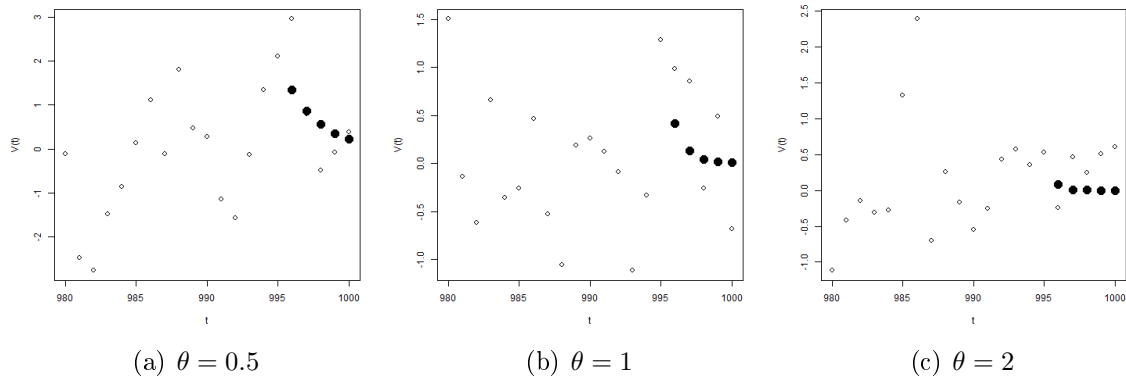


Figura 5.3: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 2$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 1$ e $n = 1000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Tabela 5.4: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.1$, $h = 0.1$ e $n = 10000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4972$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1222$				
1	1.7504	1.9069	-0.1565	0.1031
2	1.5389	1.8975	-0.3585	0.2056
3	1.7720	1.8880	-0.1160	0.3076
4	1.5580	1.8787	-0.3207	0.4090
5	4.5001	1.8694	2.6307	0.5098
$MPE = -0.1822\%, MSE = 1.4380,$ $MAE = 0.7165, MAPE = 23.5659\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0005$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1222$				
1	-0.4075	-0.5525	0.1450	0.1051
2	-0.3175	-0.5470	0.2295	0.2090
3	-0.3997	-0.5416	0.1418	0.3117
4	-0.4759	-0.5362	0.0603	0.4133
5	-0.4805	-0.5308	0.0503	0.5138
$MPE = -33.3006\%, MSE = 0.0200,$ $MAE = 0.1254, MAPE = 33.3006\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9987$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1290$				
1	-1.8323	-2.1177	0.2854	0.1105
2	-1.4485	-2.0758	0.6273	0.2186
3	-1.1675	-2.0347	0.8672	0.3242
4	-1.0380	-1.9945	0.9565	0.4275
5	-0.8344	-1.9550	1.1206	0.5285
$MPE = -71.9228\%, MSE = 0.6795,$ $MAE = 0.7714, MAPE = 71.9228\%$				

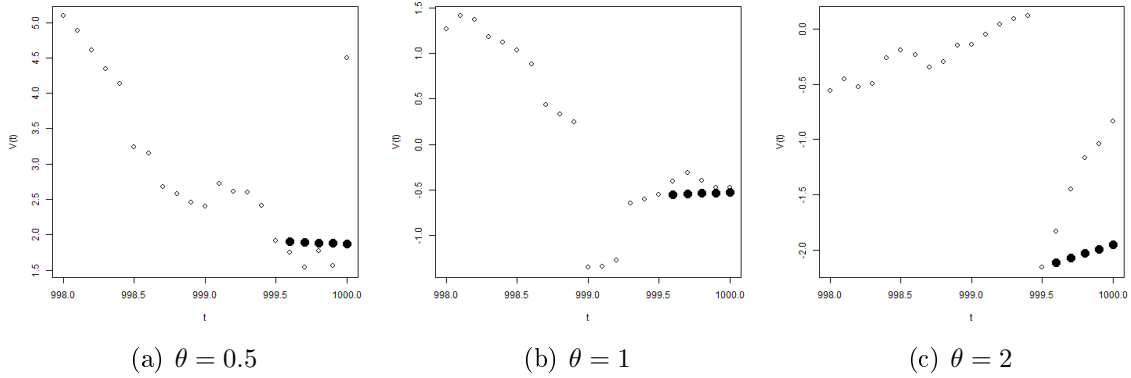


Figura 5.4: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.1$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.1$ e $n = 10000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.5: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.5$, $h = 0.1$ e $n = 10000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4940$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4950$				
1	-5.2263	-5.9567	0.7305	0.1046
2	-4.9696	-5.9274	0.9578	0.2084
3	-4.8340	-5.8982	1.0642	0.3115
4	-4.2309	-5.8691	1.6382	0.4137
5	-3.9075	-5.8402	1.9326	0.5153
$MPE = -28.6887\%$, $MSE = 1.8004$, $MAE = 1.2647$, $MAPE = 28.6887\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0167$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4879$				
1	0.1192	-0.2165	0.3357	0.1052
2	0.4927	-0.2143	0.7071	0.2088
3	0.8746	-0.2122	1.0868	0.3110
4	0.1361	-0.2100	0.3461	0.4116
5	0.4705	-0.2079	0.6784	0.5107
$MPE = 189.5911\%$, $MSE = 0.4748$, $MAE = 0.6308$, $MAPE = 189.5911\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 2.0356$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5037$				
1	0.2193	0.2428	-0.0236	0.1124
2	-0.1188	0.2379	-0.3567	0.2214
3	0.0887	0.2331	-0.1445	0.3272
4	0.1443	0.2284	-0.0842	0.4299
5	2.2441	0.2238	2.0203	0.5295
$MPE = 31.6684\%$, $MSE = 0.8474$, $MAE = 0.5258$, $MAPE = 124.4817\%$				

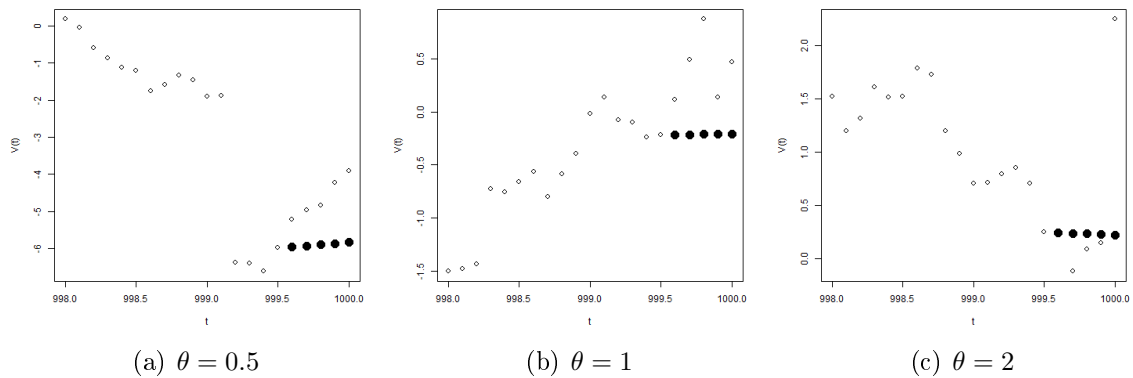


Figura 5.5: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.5$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.1$ e $n = 10000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.6: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 2$, $h = 0.1$ e $n = 10000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4799$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9978$				
1	2.4501	2.6611	-0.2110	0.1087
2	2.5875	2.6483	-0.0608	0.2164
3	2.3782	2.6357	-0.2575	0.3230
4	2.5227	2.6230	-0.1003	0.4285
5	2.4363	2.6105	-0.1742	0.5329
$MPE = -6.5832\%, MSE = 0.0310,$ $MAE = 0.1608, MAPE = 6.5832\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.1628$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9999$				
1	-2.0216	-2.8865	0.8648	0.0954
2	-1.5400	-2.8531	1.3131	0.1890
3	-1.9864	-2.8201	0.8337	0.2807
4	-1.4010	-2.7875	1.3865	0.3705
5	-1.4827	-2.7553	1.2726	0.4586
$MPE = -70.9610\%, MSE = 1.3418,$ $MAE = 1.1341, MAPE = 70.9610\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9636$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9997$				
1	1.3534	0.6477	0.7057	0.1207
2	0.8339	0.6351	0.1988	0.2367
3	0.2440	0.6228	-0.3787	0.3482
4	0.0175	0.6107	-0.5932	0.4552
5	0.6025	0.5988	0.0037	0.5581
$MPE = -695.4082\%, MSE = 0.2066,$ $MAE = 0.3760, MAPE = 726.0469\%$				

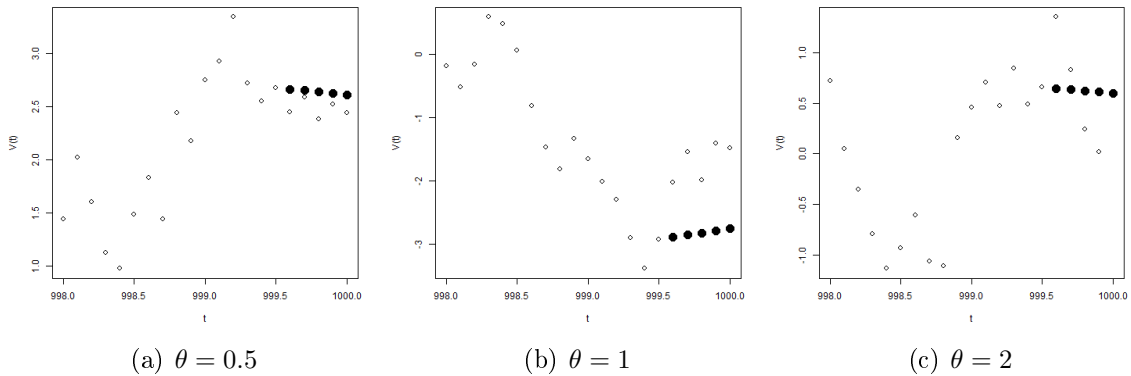


Figura 5.6: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 2$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.1$ e $n = 10000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.7: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.1$, $h = 0.01$ e $n = 100000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.5058$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1316$				
1	-6.5315	-6.5545	0.0230	0.0099
2	-6.5090	-6.5541	0.0451	0.0198
3	-6.5118	-6.5538	0.0420	0.0297
4	-6.4581	-6.5535	0.0954	0.0397
5	-6.4328	-6.5531	0.1203	0.0496
MPE= -1.0076%, MSE= 0.0056, MAE= 0.0652, MAPE= 1.0076%				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0211$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.0856$				
1	23.4095	23.6429	-0.2334	0.0098
2	23.1928	23.6405	-0.4477	0.0197
3	22.9651	23.6381	-0.6729	0.0295
4	22.7637	23.6357	-0.8720	0.0394
5	22.5621	23.6333	-1.0711	0.0492
MPE= -2.8871%, MSE= 0.5231, MAE= 0.6594, MAPE= 2.8871%				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9980$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1326$				
1	0.8163	0.8580	-0.0417	0.0101
2	0.8003	0.8578	-0.0575	0.0202
3	0.7702	0.8576	-0.0875	0.0304
4	0.7369	0.8575	-0.1205	0.0405
5	0.7373	0.8573	-0.1200	0.0506
MPE= -11.2547%, MSE= 0.0083, MAE= 0.0854, MAPE= 11.2547%				

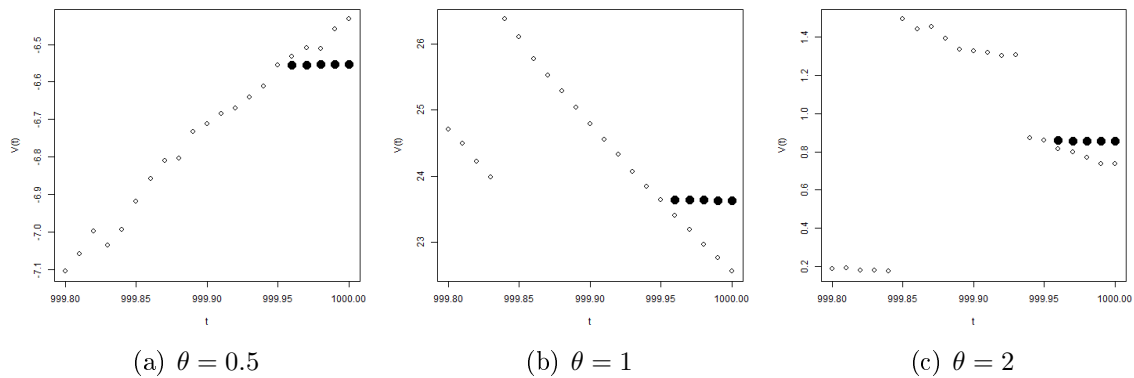


Figura 5.7: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.1$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.01$ e $n = 100000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Tabela 5.8: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.5$, $h = 0.01$ e $n = 100000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4861$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5018$				
1	-2.6819	-2.6756	-0.0063	0.0103
2	-2.6969	-2.6755	-0.0214	0.0206
3	-2.7431	-2.6754	-0.0678	0.0310
4	-2.7122	-2.6752	-0.0370	0.0413
5	-2.7253	-2.6751	-0.0502	0.0516
MPE= 1.3409%, MSE= 0.0018, MAE= 0.0365, MAPE= 1.3409%				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 0.9816$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5014$				
1	4.8848	4.9357	-0.0509	0.0103
2	4.8915	4.9352	-0.0437	0.0205
3	4.8494	4.9347	-0.0853	0.0308
4	4.9106	4.9342	-0.0236	0.0410
5	4.9272	4.9338	-0.0065	0.0513
MPE= -0.8613%, MSE= 0.0025, MAE= 0.0420, MAPE= 0.8613%				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 2.0044$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4942$				
1	0.3607	0.4538	-0.0931	0.0101
2	0.3542	0.4537	-0.0995	0.0203
3	0.2964	0.4536	-0.1572	0.0304
4	0.2338	0.4535	-0.2197	0.0405
5	0.2789	0.4534	-0.1746	0.0506
MPE= -52.7065%, MSE= 0.0244, MAE= 0.1488, MAPE= 52.7065%				

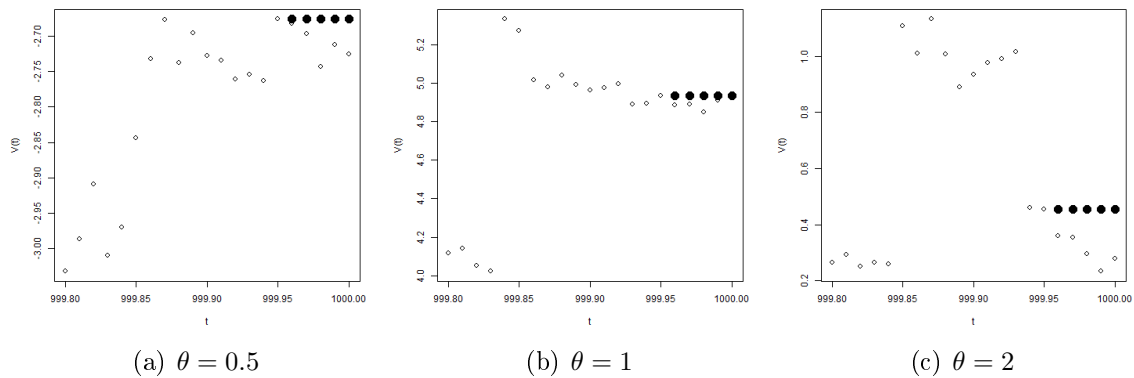
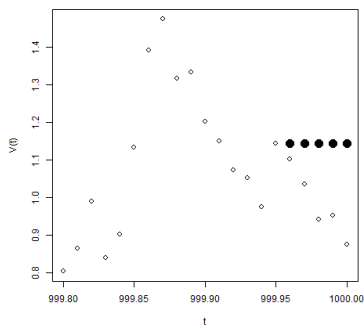


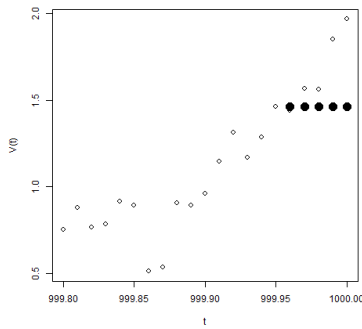
Figura 5.8: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.5$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.01$ e $n = 100000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Tabela 5.9: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro de dispersão e_{disp} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 2$, $h = 0.01$ e $n = 100000$.

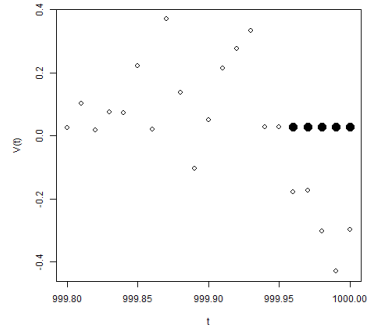
k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{disp}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4614$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9992$				
1	1.1023	1.1428	-0.0405	0.0109
2	1.0346	1.1428	-0.1081	0.0218
3	0.9421	1.1427	-0.2006	0.0327
4	0.9530	1.1427	-0.1896	0.0435
5	0.8759	1.1426	-0.2667	0.0544
MPE= -17.1538%, MSE= 0.0321, MAE= 0.1611, MAPE= 17.1538%				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0797$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9999$				
1	1.4410	1.4617	-0.0207	0.0094
2	1.5647	1.4615	0.1032	0.0187
3	1.5610	1.4613	0.0996	0.0281
4	1.8502	1.4612	0.3890	0.0374
5	1.9668	1.4610	0.5058	0.0468
MPE= 11.6573%, MSE= 0.0856, MAE= 0.2237, MAPE= 12.2319%				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 2.0230$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9976$				
1	-0.1786	0.0296	-0.2082	0.0101
2	-0.1738	0.0296	-0.2033	0.0202
3	-0.3008	0.0295	-0.3304	0.0302
4	-0.4293	0.0295	-0.4588	0.0403
5	-0.2983	0.0295	-0.3278	0.0504
MPE= 112.0324%, MSE= 0.1024, MAE= 0.3057, MAPE= 112.0324%				



(a) $\theta = 0.5$



(b) $\theta = 1$



(c) $\theta = 2$

Figura 5.9: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 2$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.01$ e $n = 100000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

5.2 Preditor Baseado na Covariação

O artigo Mohammadi e Mohammadpour (2009) propõe o melhor preditor linear para processos fracamente estacionários α -estáveis. A proposição a seguir apresenta o preditor linear; ela pode ser encontrada em Mohammadi e Mohammadpour (2009).

Proposição 5.2. *Seja $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo processos fracamente estacionários α -estável tal que $sc(0) > 0$ e $sc(h) \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow \infty$. Seja $\hat{X}(n+1)$ o melhor preditor linear de $X(n+1)$, baseado em $X(1), X(2), \dots, X(n)$, então $\hat{X}(n+1)$ é dado por*

$$\hat{X}(n+1) = \sum_{i=1}^n a_i X(n+1-i), \quad (5.3)$$

onde os coeficientes a_i podem ser obtidos resolvendo s seguinte sistema de equações

$$\sum_{i=1}^n a_i sc(i-j) = sc(j), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.4)$$

O erro de previsão é dado por

$$\|X(n+1) - \hat{X}(n+1)\|^2 = sc(0) - \mathbf{b}'_n \Phi_n^{-1} \mathbf{b}'_n,$$

onde $\mathbf{b}'_n = (sc(1), sc(2), \dots, sc(n))$ e $\Phi_n = [sc(i-j)]_{i,j=1}^n$. A norma $\|\cdot\|^2$ é a norma induzida pela covariação.

Note que é necessário resolver um sistema linear com n variáveis e n incógnitas.

Exemplo 5.1. Covariação para Processo Linear

Seja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um processo estacionário linear, dado por

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \int \mathbb{I}_{(n-j, n-j+1)}(x) dL(x). \quad (5.5)$$

onde ε_n são variáveis aleatórias i.i.d. $S_\alpha(1, 0, 0)$. A segunda igualdade em (5.5) decorre de $\varepsilon_n = \int \mathbb{I}_{(n, n+1)}(x) dL(x)$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
sc(h) &= sc(X_h, X_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} sc \left(\sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{h-j}, \sum_{i=0}^n \psi_i \varepsilon_{-i} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j \psi_i sc(\varepsilon_{h-j}, \varepsilon_{-i}) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j \psi_i \int \mathbb{I}_{(h-j, h-j+1)}(x) \mathbb{I}_{(-i, -i+1)}(x) dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = 0 &\Rightarrow sc(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \\
h = 1 &\Rightarrow sc(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j \psi_i \int \mathbb{I}_{(1-j, 1-j+1)}(x) \mathbb{I}_{(-i, -i+1)}(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j-1} \\
h = 2 &\Rightarrow sc(1) = \sum_{j=2}^{\infty} \psi_j \psi_{j-2} \\
&\vdots \\
sc(h) &= \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j \psi_{j-h}.
\end{aligned}$$

Assim, é possível calcular a covariação para os processos ARFIMA causais, utilizando sua representação média móvel infinita.

Note que a expressão da covariação para um processo linear α -estável é muito parecida com a função de autocovariância de um processo linear com ruído não correlacionado de média zero e variância finita, que é dada por

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h},$$

onde σ^2 é a variância do ruído branco.

No artigo, os autores propõem o melhor preditor linear para processos α -estáveis discretos. Seja $\hat{X}(n+1)$ o melhor preditor linear de $X(n+1)$, baseado em $X(1)$, $X(2)$, \dots , $X(n)$, então $\hat{X}(n+1)$ é dado por

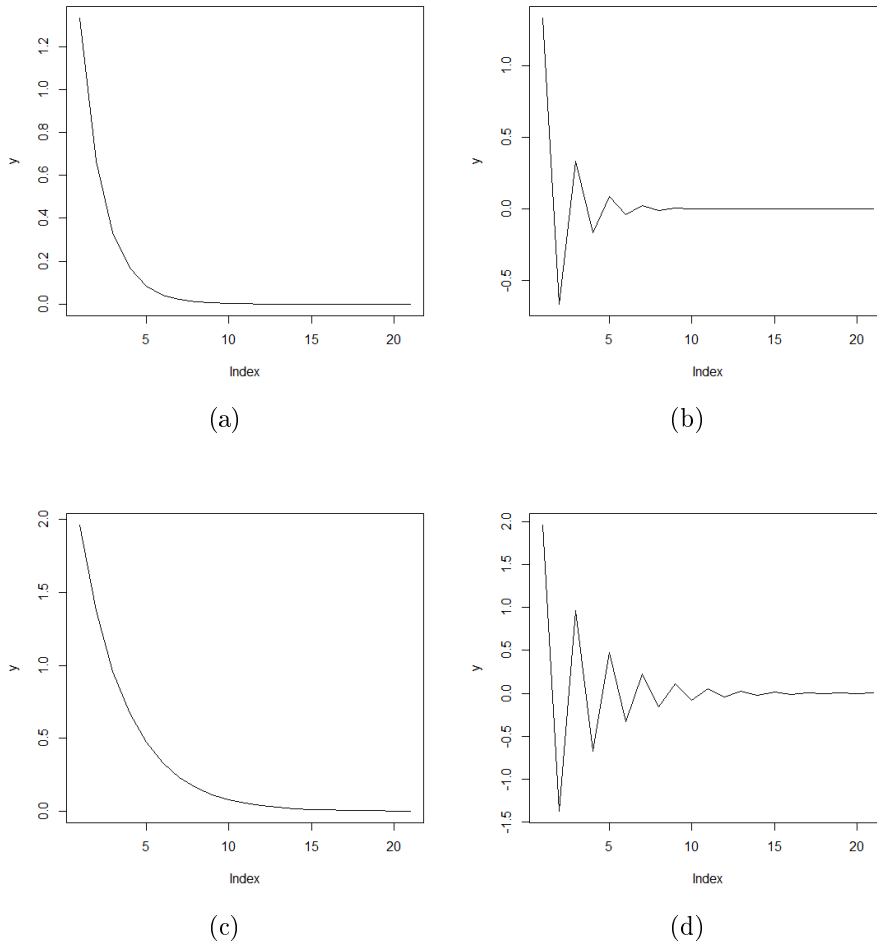


Figura 5.10: Função Covariância para o processo AR(1). (a) $\phi_1 = 0.5$; (b) $\phi_1 = -0.5$; (c) $\phi_1 = 0.7$ e (d) $\phi_1 = -0.7$.

$$\hat{X}(n+1) = \sum_{i=1}^n a_i X(n+1-i), \quad (5.6)$$

onde os coeficientes a_i podem ser obtidos resolvendo a seguinte equação

$$sc\left(\sum_{i=1}^n a_i X(n+1-i), X(n+1-j)\right) = sc(X(n+1), X(n+1-j)), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.7)$$

Exemplo 5.2. Seja o processo dado por $X = \{X(t) = Z(t) + \theta Z(t-1); t \in \mathbb{Z}\}$, onde $Z(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{(t,t+1)}(x) dL(x)$ (é um MA(1) α -estável). Assim, temos que

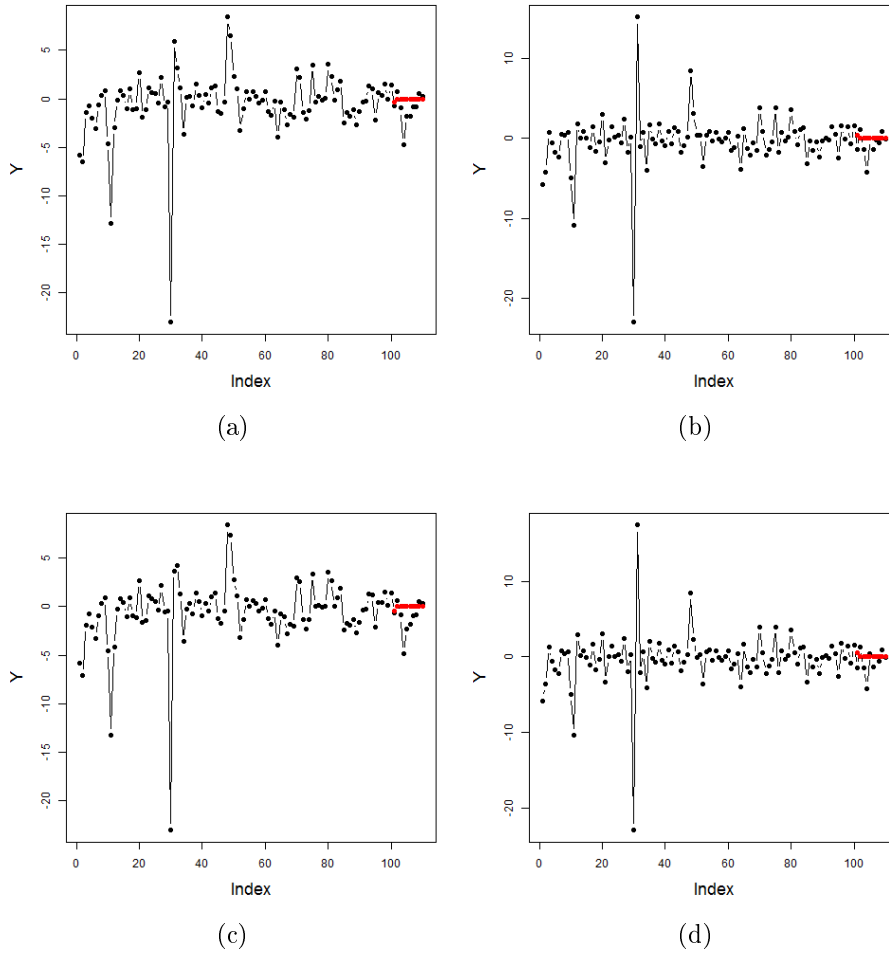


Figura 5.11: Série gerada de um processo MA(1) com $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $n = 100$, os pontos vermelhos são as previsões de $X(n + 1), \dots, X(n + 10)$. (a) $\theta_1 = -0.2$; (b) $\theta_1 = 0.2$; (c) $\theta_1 = -0.3$ e (d) $\theta_1 = 0.3$.

$$\begin{aligned}
 sc(X(t), X(s)) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{I}_{(t,t+1)}(x) + \theta \mathbb{I}_{(t-1,t)}(x)) (\mathbb{I}_{(s,s+1)}(x) + \theta \mathbb{I}_{(s-1,s)}(x)) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{(t,t+1)}(x) \mathbb{I}_{(s,s+1)}(x) + \theta \mathbb{I}_{(t,t+1)}(x) \mathbb{I}_{(s-1,s)}(x) \\
 &\quad + \theta \mathbb{I}_{(t-1,t)}(x) \mathbb{I}_{(s,s+1)}(x) + \theta^2 \mathbb{I}_{(t-1,t)}(x) \mathbb{I}_{(s-1,s)}(x) dx \\
 &= \begin{cases} 1 + \theta^2, & \text{se } t = s \\ \theta, & \text{se } |t - s| = 1 \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Queremos encontrar os coeficientes a_i de (5.6). Assim, precisamos resolver (5.7).

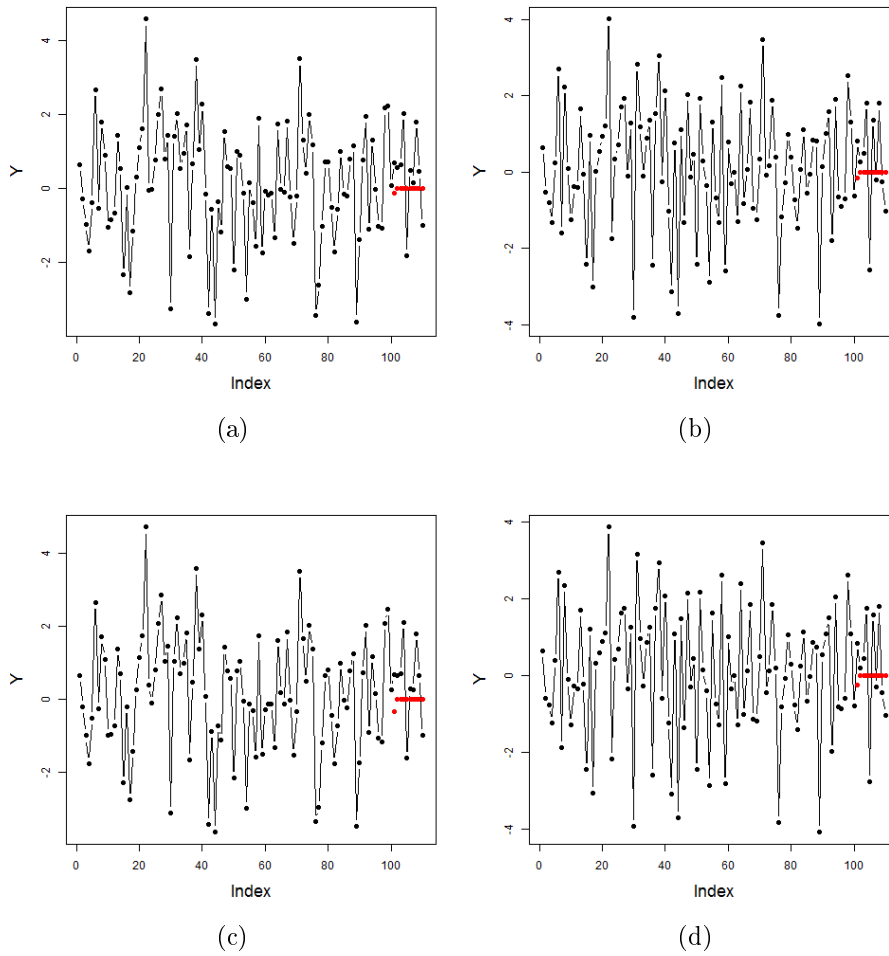


Figura 5.12: Série gerada de um processo MA(1) com $\alpha = 1.9$, $\sigma = 1$, $n = 100$, os pontos vermelhos são as previsões de $X(n + 1), \dots, X(n + 10)$. (a) $\theta_1 = -0.2$; (b) $\theta_1 = 0.2$; (c) $\theta_1 = -0.3$ e (d) $\theta_1 = 0.3$.

$$\begin{aligned}
 A_j &= sc \left(\sum_{i=1}^n a_i X(n+1-i), X(n+1-j) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n sc(X(n+1-i), X(n+1-j)).
 \end{aligned}$$

Segue então

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{i=1}^n sc(X(n+1-i), X(n)) = a_1(1 + \theta^2) + a_2\theta \\
A_2 &= \sum_{i=1}^n sc(X(n+1-i), X(n-1)) = a_1\theta + a_2(1 + \theta^2) + a_3\theta \\
A_3 &= \sum_{i=1}^n sc(X(n+1-i), X(n-2)) = a_2\theta + a_3(1 + \theta^2) + a_4\theta \\
&\vdots \\
A_j &= a_{j-1}\theta + a_j(1 + \theta^2) + a_{j+1}\theta \\
&\vdots \\
A_n &= a_{n-1}\theta + a_n(1 + \theta^2),
\end{aligned}$$

onde

$$sc(X(n+1), X(n+1-j)) = \begin{cases} \theta, & \text{se } j = 1 \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases}$$

Então, precisamos resolver o sistema linear

$$\begin{cases} a_1(1 + \theta^2) + a_2\theta = \theta \\ a_1\theta + a_2(1 + \theta^2) + a_3\theta = 0 \\ a_2\theta + a_3(1 + \theta^2) + a_4\theta = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1}\theta + a_n(1 + \theta^2) = 0. \end{cases}$$

Sua solução é dada por

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(-1)^{n+1} \theta^n}{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2n}} \\
a_j &= -a_{j+1} \frac{\theta + \theta^3 + \dots + \theta^{2j-1}}{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2j}} + \frac{(-1)^{j+1} \theta^j}{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2j}},
\end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n-1$.

Nas Figuras 5.11-5.12 apresentamos os resultados para a previsão de $\hat{X}(n+j)$, quando $j \in \{1, \dots, 10\}$, para este exemplo.

Exemplo 5.3. Para o processo OU, note que ele satisfaz as condições da Proposição 5.2, pois $sc(0) = \frac{1}{2\theta} > 0$ e $sc(t) = \frac{e^{-\theta t}}{2\theta} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Utilizamos a seguinte discretização

$$V(jh) = e^{-\theta h}V((j-1)h) + Z_{j,h}, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

onde $Z_{j,h} \sim S_\alpha(\sigma \left(\frac{1-e^{-\theta\alpha h}}{\theta\alpha}\right)^{1/\alpha}, 0, 0)$. Então, $\hat{V}((n+k)h)$ é dado por

$$\hat{V}((n+k)h) = \sum_{i=1}^n a_i V((n+1-i)h), \quad (5.8)$$

onde os coeficientes a_i podem ser obtidos resolvendo o seguinte sistema

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{e^{-\theta h|j-i|}}{2\theta} = \frac{e^{-\theta h(k+j-1)}}{2\theta}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Este sistema é equivalente a resolver

$$\sum_{i=1}^n a_i e^{-\theta h|j-i|} = e^{-\theta h(k+j-1)}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

A solução deste sistema é dada por

$$a_1 = e^{-\theta kh}, \quad a_i = 0, \quad i \in \{2, \dots, n\}.$$

Logo, temos que

$$\hat{V}((n+k)h) = e^{-\theta kh}V(nh).$$

O erro de previsão é dado por

$$e_{MM}(k) = \|V((n+k)h) - \hat{V}((n+k)h)\|^2 = \frac{1}{2\theta} - \mathbf{b}'_n \Phi_n^{-1} \mathbf{b}'_n = \frac{1}{2\theta}(1 - e^{-2\theta kh}),$$

onde \mathbf{b}_n e Φ_n são dados na Proposição 5.2.

Note que é necessário utilizarmos estimativas para θ e α . Para isso, utilizamos o estimador de máxima verossimilhança, $\hat{\theta}_{mle}$ e $\hat{\alpha}_{mle}$. Apresentamos resultados de simulações nas Tabelas 5.10-5.18. Consideramos as seguintes configurações para os parâmetros.

- $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$;

- $\alpha \in \{1.1, 1.5, 2\}$;
- $T = 1000$, $h \in \{1, 0.1, 0.01\}$ e $n = T/h$;

Pelas Tabelas 5.10-5.12, podemos perceber que a previsão baseada na dispersão e a previsão baseada na covariação são análogas, no caso $h = 1$. No caso $h \in \{0.1, 0.01\}$ (ver Tabelas 5.13-5.18), a previsão baseada na covariação apresenta, na maioria das vezes, estatísticas de previsão de erro com valores menores do que a previsão baseada na dispersão. As Figuras 5.13-5.21 mostram os últimos vinte pontos observados da série temporal (pontos abertos) em conjunto com os cinco últimos valores preditos (pontos pretos). Os melhores resultados foram obtidos quando $h = 0.01$. Neste caso, os erros e estatísticas de previsão são valores baixos.

Tabela 5.10: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.1$, $h = 1$ e $n = 1000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.5022$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1430$				
1	-0.0460	-0.1597	0.1137	0.6310
2	0.2480	-0.0969	0.3449	0.8621
3	40.4655	-0.0588	40.5243	0.9468
4	24.6274	-0.0356	24.6630	0.9778
5	15.5411	-0.0216	15.5627	0.9891
$MPE = 38.5279\%$, $MSE = 498.5622$, $MAE = 16.2417$, $MAPE = 137.2686\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 0.9844$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1776$				
1	1.1134	0.5977	0.5157	0.4370
2	1.0318	0.2199	0.8119	0.4980
3	0.5775	0.0809	0.4966	0.5065
4	3.5574	0.0298	3.5276	0.5077
5	1.4096	0.0109	1.3987	0.5079
$MPE = 81.8773\%$, $MSE = 3.1144$, $MAE = 1.3501$, $MAPE = 81.8773\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9792$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1412$				
1	-0.2987	-0.0702	-0.2285	0.2478
2	-0.6936	-0.0095	-0.6841	0.2525
3	-0.2108	-0.0013	-0.2095	0.2526
4	0.5685	-0.0002	0.5686	0.2526
5	-0.0998	-0.0000	-0.0998	0.2526
$MPE = 94.9035\%$, $MSE = 0.1795$, $MAE = 0.3581$, $MAPE = 94.9035\%$				

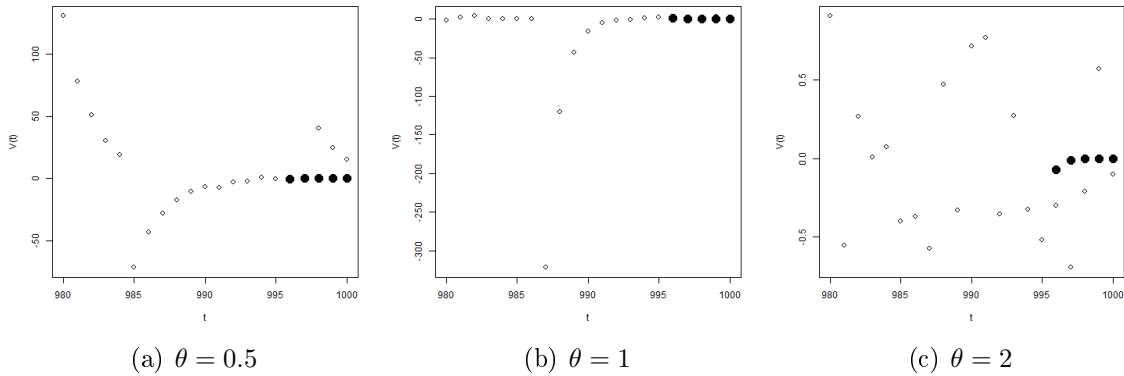


Figura 5.13: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.1$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 1$ e $n = 1000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.11: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.5$, $h = 1$ e $n = 1000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4758$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4422$				
1	-0.6903	-1.2935	0.6032	0.6451
2	-1.4611	-0.7845	-0.6765	0.8941
3	-4.0493	-0.4758	-3.5734	0.9903
4	-2.6534	-0.2886	-2.3648	1.0274
5	-1.4614	-0.1751	-1.2863	1.0418
$MPE = 44.8610\%$, $MSE = 4.1676$, $MAE = 1.7009$, $MAPE = 79.8179\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0010$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5312$				
1	0.6520	0.2147	0.4373	0.4320
2	0.1755	0.0790	0.0965	0.4904
3	0.0401	0.0291	0.0111	0.4983
4	-1.1045	0.0107	-1.1152	0.4993
5	0.4915	0.0039	0.4876	0.4995
$MPE = 69.9606\%$, $MSE = 0.3364$, $MAE = 0.4295$, $MAPE = 69.9606\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9183$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4116$				
1	-0.1990	-0.0525	-0.1465	0.2550
2	-0.2819	-0.0071	-0.2748	0.2605
3	-0.3982	-0.0010	-0.3972	0.2606
4	-0.9378	-0.0001	-0.9377	0.2606
5	-0.2935	-0.0000	-0.2935	0.2606
$MPE = 94.1670\%$, $MSE = 0.2440$, $MAE = 0.4099$, $MAPE = 94.1670\%$				

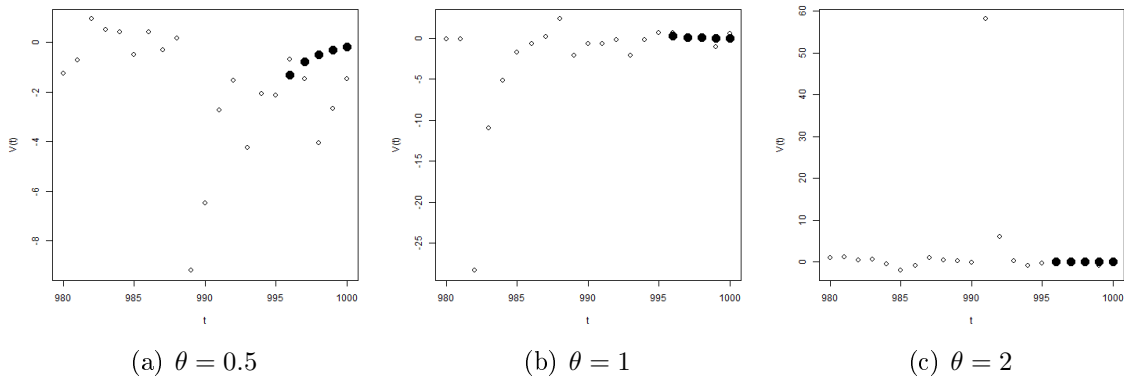


Figura 5.14: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.5$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 1$ e $n = 1000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.12: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 2$, $h = 1$ e $n = 1000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4460$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9989$				
1	2.9488	1.2772	1.6716	0.6616
2	0.7985	0.7746	0.0239	0.9327
3	-0.4922	0.4698	-0.9621	1.0438
4	-0.0821	0.2850	-0.3670	1.0894
5	0.3856	0.1728	0.2128	1.1080
$MPE = 151.5208\%$, $MSE = 0.7801$, $MAE = 0.6475$, $MAPE = 151.5208\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.1311$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9998$				
1	0.9868	0.4730	0.5138	0.3960
2	0.8547	0.1740	0.6808	0.4373
3	-0.2578	0.0640	-0.3218	0.4415
4	0.4922	0.0235	0.4687	0.4420
5	-0.6815	0.0087	-0.6901	0.4420
$MPE = 90.6061\%$, $MSE = 0.3054$, $MAE = 0.5350$, $MAPE = 90.6061\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9065$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9998$				
1	-0.2424	0.0715	-0.3139	0.2565
2	0.4615	0.0097	0.4518	0.2621
3	0.2498	0.0013	0.2485	0.2623
4	0.5109	0.0002	0.5107	0.2623
5	0.6022	0.0000	0.6021	0.2623
$MPE = 105.3656\%$, $MSE = 0.1976$, $MAE = 0.4254$, $MAPE = 105.3656\%$				

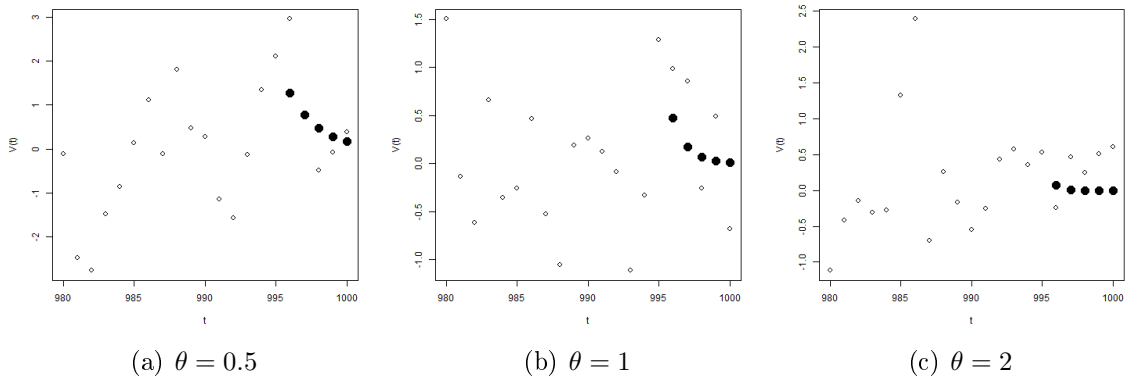


Figura 5.15: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 2$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 1$ e $n = 1000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.13: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.1$, $h = 0.1$ e $n = 10000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4972$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1222$				
1	1.7504	1.8230	-0.0725	0.0952
2	1.5389	1.7340	-0.1951	0.1814
3	1.7720	1.6495	0.1225	0.2594
4	1.5580	1.5690	-0.0111	0.3300
5	4.5001	1.4925	3.0076	0.3940
$MPE = 11.2434\%$, $MSE = 1.8208$, $MAE = 0.6818$, $MAPE = 18.2564\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0005$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1222$				
1	-0.4075	-0.5050	0.0975	0.0906
2	-0.3175	-0.4569	0.1394	0.1648
3	-0.3997	-0.4134	0.0137	0.2256
4	-0.4759	-0.3741	-0.1018	0.2753
5	-0.4805	-0.3385	-0.1420	0.3160
$MPE = -4.0614\%$, $MSE = 0.0119$, $MAE = 0.0989$, $MAPE = 24.4431\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9987$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1290$				
1	-1.8323	-1.7689	-0.0635	0.0824
2	-1.4485	-1.4482	-0.0003	0.1377
3	-1.1675	-1.1857	0.0182	0.1748
4	-1.0380	-0.9708	-0.0673	0.1996
5	-0.8344	-0.7948	-0.0396	0.2163
$MPE = 2.6295\%$, $MSE = 0.0021$, $MAE = 0.0378$, $MAPE = 3.2531\%$				

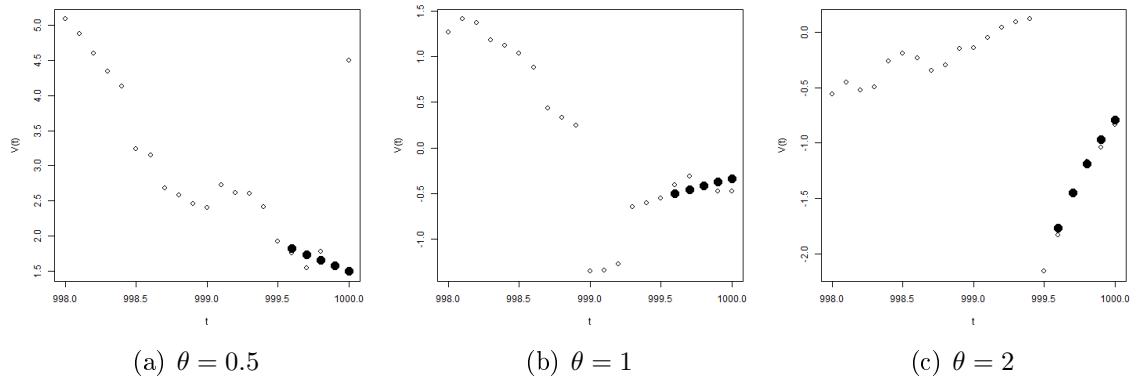


Figura 5.16: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.1$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.1$ e $n = 10000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.14: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.5$, $h = 0.1$ e $n = 10000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4940$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4950$				
1	-5.2263	-5.6943	0.4680	0.0952
2	-4.9696	-5.4166	0.4470	0.1815
3	-4.8340	-5.1524	0.3184	0.2596
4	-4.2309	-4.9011	0.6702	0.3304
5	-3.9075	-4.6621	0.7546	0.3945
$MPE = -11.9375\%$, $MSE = 0.3078$, $MAE = 0.5316$, $MAPE = 11.9375\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0167$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4879$				
1	0.1192	-0.1979	0.3171	0.0905
2	0.4927	-0.1791	0.6718	0.1643
3	0.8746	-0.1620	1.0366	0.2246
4	0.1361	-0.1466	0.2827	0.2737
5	0.4705	-0.1327	0.6032	0.3139
$MPE = 171.3792\%$, $MSE = 0.4141$, $MAE = 0.5823$, $MAPE = 171.3792\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 2.0356$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5037$				
1	0.2193	0.2029	0.0164	0.0821
2	-0.1188	0.1661	-0.2849	0.1368
3	0.0887	0.1360	-0.0473	0.1732
4	0.1443	0.1113	0.0329	0.1974
5	2.2441	0.0912	2.1529	0.2136
$MPE = 62.5404\%$, $MSE = 0.9440$, $MAE = 0.5069$, $MAPE = 83.9032\%$				

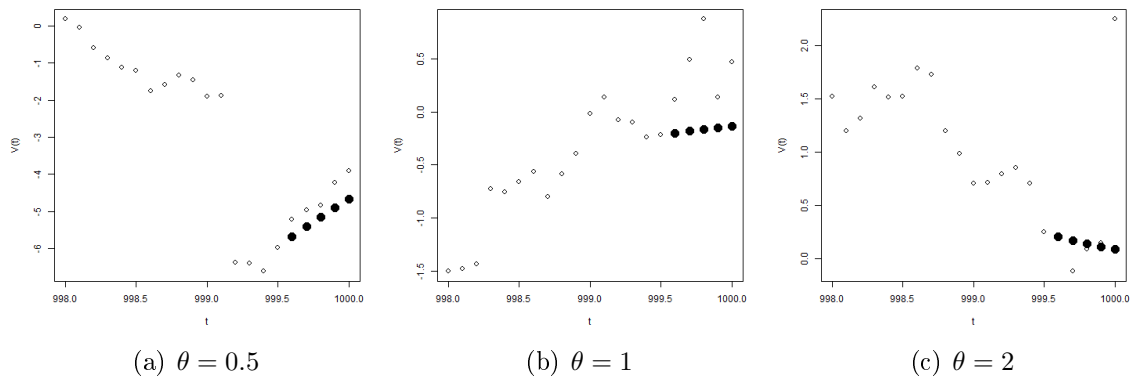


Figura 5.17: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.5$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.1$ e $n = 10000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.15: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 2$, $h = 0.1$ e $n = 10000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4799$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9978$				
1	2.4501	2.5435	-0.0934	0.0954
2	2.5875	2.4194	0.1681	0.1820
3	2.3782	2.3014	0.0767	0.2607
4	2.5227	2.1892	0.3335	0.3322
5	2.4363	2.0824	0.3539	0.3971
$MPE = 6.7317\%$, $MSE = 0.0559$, $MAE = 0.2051$, $MAPE = 8.2565\%$				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.1628$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9999$				
1	-2.0216	-2.6423	0.6207	0.0892
2	-1.5400	-2.3909	0.8508	0.1599
3	-1.9864	-2.1633	0.1770	0.2160
4	-1.4010	-1.9575	0.5565	0.2604
5	-1.4827	-1.7712	0.2885	0.2956
$MPE = -30.8075\%$, $MSE = 0.3067$, $MAE = 0.4987$, $MAPE = 30.8075\%$				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9636$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9997$				
1	1.3534	0.5408	0.8126	0.0827
2	0.8339	0.4428	0.3912	0.1385
3	0.2440	0.3625	-0.1185	0.1762
4	0.0175	0.2968	-0.2793	0.2017
5	0.6025	0.2430	0.3595	0.2189
$MPE = -296.4669\%$, $MSE = 0.2069$, $MAE = 0.3922$, $MAPE = 363.1114\%$				

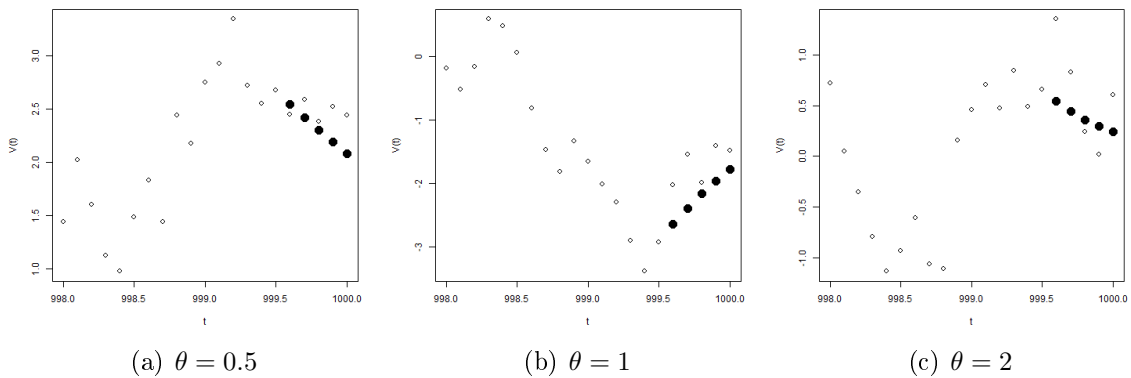
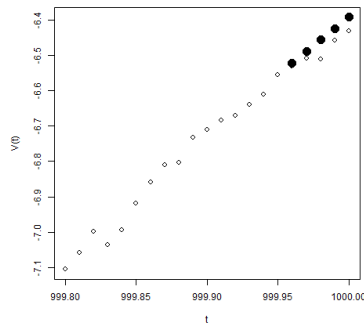


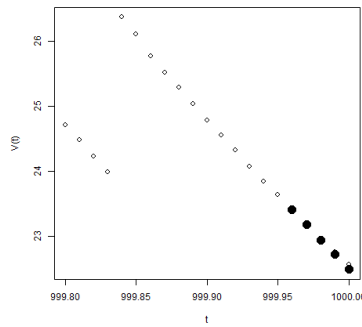
Figura 5.18: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 2$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.1$ e $n = 10000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores preditos.

Tabela 5.16: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.1$, $h = 0.01$ e $n = 100000$.

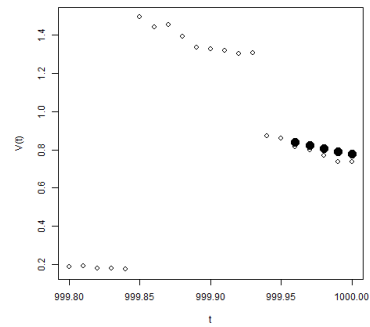
k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.5058$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1316$				
1	-6.5315	-6.5221	-0.0094	0.0099
2	-6.5090	-6.4896	-0.0194	0.0198
3	-6.5118	-6.4572	-0.0546	0.0295
4	-6.4581	-6.4250	-0.0331	0.0392
5	-6.4328	-6.3930	-0.0399	0.0488
MPE= 0.4824%, MSE= 0.0012, MAE= 0.0313, MAPE= 0.4824%				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0211$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.0856$				
1	23.4095	23.4100	-0.0005	0.0099
2	23.1928	23.1771	0.0157	0.0196
3	22.9651	22.9465	0.0186	0.0291
4	22.7637	22.7182	0.0455	0.0384
5	22.5621	22.4921	0.0700	0.0475
MPE= 0.1314%, MSE= 0.0015, MAE= 0.0301, MAPE= 0.1323%				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 1.9980$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1326$				
1	0.8163	0.8412	-0.0248	0.0098
2	0.8003	0.8245	-0.0242	0.0192
3	0.7702	0.8082	-0.0380	0.0283
4	0.7369	0.7922	-0.0552	0.0370
5	0.7373	0.7765	-0.0392	0.0453
MPE= -4.7619%, MSE= 0.0014, MAE= 0.0363, MAPE= 4.7619%				



(a) $\theta = 0.5$



(b) $\theta = 1$



(c) $\theta = 2$

Figura 5.19: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.1$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.01$ e $n = 100000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Tabela 5.17: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 1.5$, $h = 0.01$ e $n = 100000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4861$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5018$				
1	-2.6819	-2.6624	-0.0195	0.0100
2	-2.6969	-2.6491	-0.0478	0.0198
3	-2.7431	-2.6359	-0.1072	0.0296
4	-2.7122	-2.6228	-0.0894	0.0392
5	-2.7253	-2.6097	-0.1156	0.0488
MPE= 2.7895%, MSE= 0.0071, MAE= 0.0759, MAPE= 2.7895%				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 0.9816$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.5014$				
1	4.8848	4.8871	-0.0022	0.0099
2	4.8915	4.8384	0.0531	0.0196
3	4.8494	4.7903	0.0591	0.0291
4	4.9106	4.7426	0.1680	0.0385
5	4.9272	4.6954	0.2318	0.0476
MPE= 2.0769%, MSE= 0.0177, MAE= 0.1028, MAPE= 2.0951%				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 2.0044$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.4942$				
1	0.3607	0.4449	-0.0842	0.0098
2	0.3542	0.4361	-0.0819	0.0192
3	0.2964	0.4275	-0.1311	0.0283
4	0.2338	0.4190	-0.1852	0.0370
5	0.2789	0.4107	-0.1318	0.0453
MPE= -43.4341%, MSE= 0.0165, MAE= 0.1228, MAPE= 43.4341%				

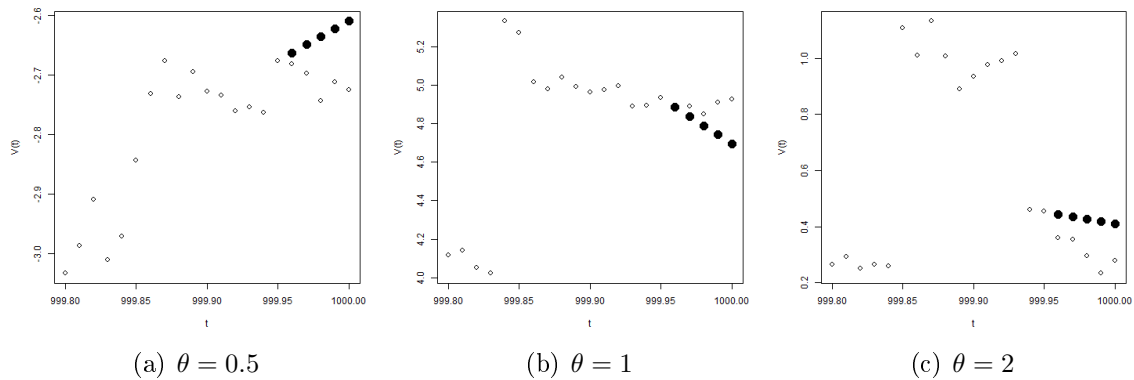


Figura 5.20: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 1.5$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.01$ e $n = 100000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Tabela 5.18: Resultado da previsão à 5 passos com erro $V - \hat{V}$ e erro do preditor e_{MM} , quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\alpha = 2$, $h = 0.01$ e $n = 100000$.

k	V	\hat{V}	$V - \hat{V}$	e_{MM}
$\theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4614$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9992$				
1	1.1023	1.1372	-0.0349	0.0100
2	1.0346	1.1315	-0.0969	0.0198
3	0.9421	1.1259	-0.1838	0.0296
4	0.9530	1.1202	-0.1672	0.0393
5	0.8759	1.1146	-0.2388	0.0489
MPE= -15.3669%, MSE= 0.0259, MAE= 0.1443, MAPE= 15.3669%				
$\theta = 1, \hat{\theta}_{mle} = 1.0797$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9999$				
1	1.4410	1.4473	-0.0063	0.0099
2	1.5647	1.4329	0.1319	0.0196
3	1.5610	1.4186	0.1424	0.0290
4	1.8502	1.4045	0.4457	0.0383
5	1.9668	1.3905	0.5763	0.0474
MPE= 14.1001%, MSE= 0.1137, MAE= 0.2605, MAPE= 14.2753%				
$\theta = 2, \hat{\theta}_{mle} = 2.0230$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.9976$				
1	-0.1786	0.0290	-0.2076	0.0098
2	-0.1738	0.0284	-0.2022	0.0192
3	-0.3008	0.0278	-0.3287	0.0283
4	-0.4293	0.0273	-0.4566	0.0369
5	-0.2983	0.0268	-0.3251	0.0453
MPE= 111.4307%, MSE= 0.1012, MAE= 0.3040, MAPE= 111.4307%				

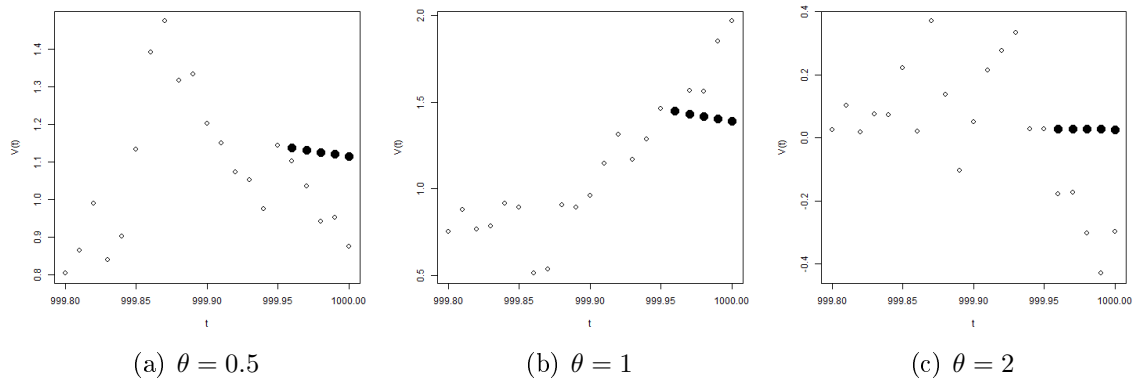


Figura 5.21: Previsão à 5 passos, quando $\alpha = 2$, $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $h = 0.01$ e $n = 100000$. Os pontos abertos são os valores observados e os pontos fechados os valores previstos.

Observação 5.1. A Tabela 5.19 apresenta resultados para a previsão no processo OU, utilizando os preditores baseados na dispersão (ver Proposição 5.1) e na covariação (ver Proposição 5.2). Consideramos $h = 1$ e $n \in \{10000, 100000\}$ para testar a influência de n e h na previsão. Note que mesmo com grandes valores para n , se o valor de h não for pequeno, a previsão não é satisfatória. Isso ocorre devido ao fato de os preditores dependerem diretamente de h . O valor de n influencia na estimação dos parâmetros θ e α , mas não nos preditores.

Tabela 5.19: Resultado da previsão à 5 passos dos preditores baseados na dispersão e na covariação, com erros e_{disp} e e_{MM} , quando $\theta = 0.5$, $\alpha = 1.1$, $h = 1$ e $n \in \{10000, 100000\}$.

k	V	\hat{V}_{disp}	$V - \hat{V}_{disp}$	e_{disp}
$n = 10000, \theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4991$ e $\hat{\alpha}_{mle} = 1.1586$				
1	-5.3423	-5.1165	-0.2257	1.0014
2	-3.3654	-3.1063	-0.2591	1.5625
3	-2.1451	-1.8858	-0.2592	1.8769
4	-7.5150	-1.1449	-6.3701	2.0530
5	-3.2443	-0.6951	-2.5492	2.1517
MPE= 37.4703%, MSE= 9.4525, MAE= 1.9327, MAPE= 37.4703%				
$n = 100000, \theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4998, \hat{\alpha}_{mle} = 1.1329$				
1	-0.0100	0.4764	-0.4864	1.0003
2	-0.5315	0.2890	-0.8205	1.5681
3	-2.1540	0.1753	-2.3293	1.8903
4	-0.2042	0.1064	-0.3106	2.0732
5	-0.4848	0.0645	-0.5493	2.1770
MPE= 1078.1043%, MSE= 1.3467, MAE= 0.8992, MAPE= 1078.1043%				
k	V	\hat{V}_{MM}	$V - \hat{V}_{MM}$	e_{MM}
$n = 10000, \theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4991, \hat{\alpha}_{mle} = 1.1586$				
1	-5.3423	-5.1117	-0.2306	0.6326
2	-3.3654	-3.1004	-0.2650	0.8658
3	-2.1451	-1.8805	-0.2646	0.9517
4	-7.5150	-1.1406	-6.3744	0.9834
5	-3.2443	-0.6918	-2.5525	0.9951
MPE= 37.6051%, MSE= 9.4685, MAE= 1.9374, MAPE= 37.6051%				
$n = 100000, \theta = 0.5, \hat{\theta}_{mle} = 0.4998, \hat{\alpha}_{mle} = 1.1329$				
1	-0.0100	0.4762	-0.4862	0.6322
2	-0.5315	0.2889	-0.8204	0.8649
3	-2.1540	0.1752	-2.3292	0.9506
4	-0.2042	0.1063	-0.3105	0.9821
5	-0.4848	0.0645	-0.5492	0.9937
MPE= 1077.8633%, MSE= 1.3465, MAE= 0.8991, MAPE= 1077.8633%				

Capítulo 6

Simulações

Neste capítulo apresentamos simulações realizadas, utilizando os procedimentos de estimação descritos no Capítulo 4.

6.1 Estimação de Máxima Verossimilhança

Nesta seção apresentamos as simulações de Monte Carlo para a estimação via máxima verossimilhança nos processos OU e Cosseno.

6.1.1 Processo OU

Na Figura 6.1, apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o procedimento de máxima verossimilhança descrito na subseção 4.2.1. Consideramos experimentos com os parâmetros variando nos seguintes conjuntos.

- $\theta \in \{1, 2\}$;
- $\alpha \in \{1.1, 1.5, 2\}$;
- $N = 2000$, $h = 1$ e 500 replicações.

Para gerar as séries temporais, aplicamos a equação discreta dada pela expressão (2.36). A Figura 6.1 apresenta boxplots para o procedimento de estimação dos parâmetros. Os boxplots apresentam a média, mediana, pontos de *outlier* e uma ideia da variabilidade. Observamos que a estimação de máxima verossimilhança

apresenta uma boa performance. Comparando todos gráficos, é possível ver que a pior situação ocorre quando $\alpha = 1.1$. Neste caso, há vários pontos de *outlier* e a média estimada não é tão próxima do verdadeiro valor do parâmetro. Este resultado já era esperado, pois o parâmetros α está próximo do intervalo em que a distribuição α -estável tem primeiro momento infinito.

Conforme esperado, a performance do estimador é aprimorada quando o $\alpha = 2$ (caso Gaussiano). Pelos gráficos também fica claro que o parâmetro θ é melhor estimado que os demais. Há uma pequena diferença nos resultados quando $\theta = 1$ ou $\theta = 2$, no último caso, a variabilidade apresenta um pequeno aumento. Pelas simulações, podemos concluir que o estimador de máxima verossimilhança apresenta bons resultados, tornando-se uma ótima opção para realizar a estimação dos parâmetros do processo OU.

6.1.2 Processo Cosseno

Na Figura 6.2, apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o procedimento de máxima verossimilhança descrito na subseção 4.2.2. Consideramos experimentos com os parâmetros variando nos seguintes conjuntos.

- $a \in \{1, 2\}$;
- $\alpha \in \{1.1, 1.5, 2\}$;
- $N = 2000$, $h = 1$ e 500 replicações.

Para gerar as séries temporais, aplicamos a equação discreta dada pela expressão (2.43). A Figura 6.2 apresenta boxplots para o procedimento de estimação dos parâmetros.

Observamos que a estimação de máxima verossimilhança apresenta uma boa performance. Percebemos que a estimação do parâmetro a é muito precisa, mas isto não ocorre com os demais parâmetros. No entanto, a estimação melhora para todos os parâmetros, quando $\alpha = 2$. Comparando todos gráficos, é possível ver que a pior situação ocorre quando $\alpha = 1.1$, pois vemos que o vício é ligeiramente maior do que nos demais resultados. Não há diferenças significantes nos resultados obtidos para os casos $a = 1$ e $a = 2$. Pelas simulações, podemos concluir que o estimador de máxima verossimilhança apresentou resultados muito satisfatórios, assim como para o processo OU.

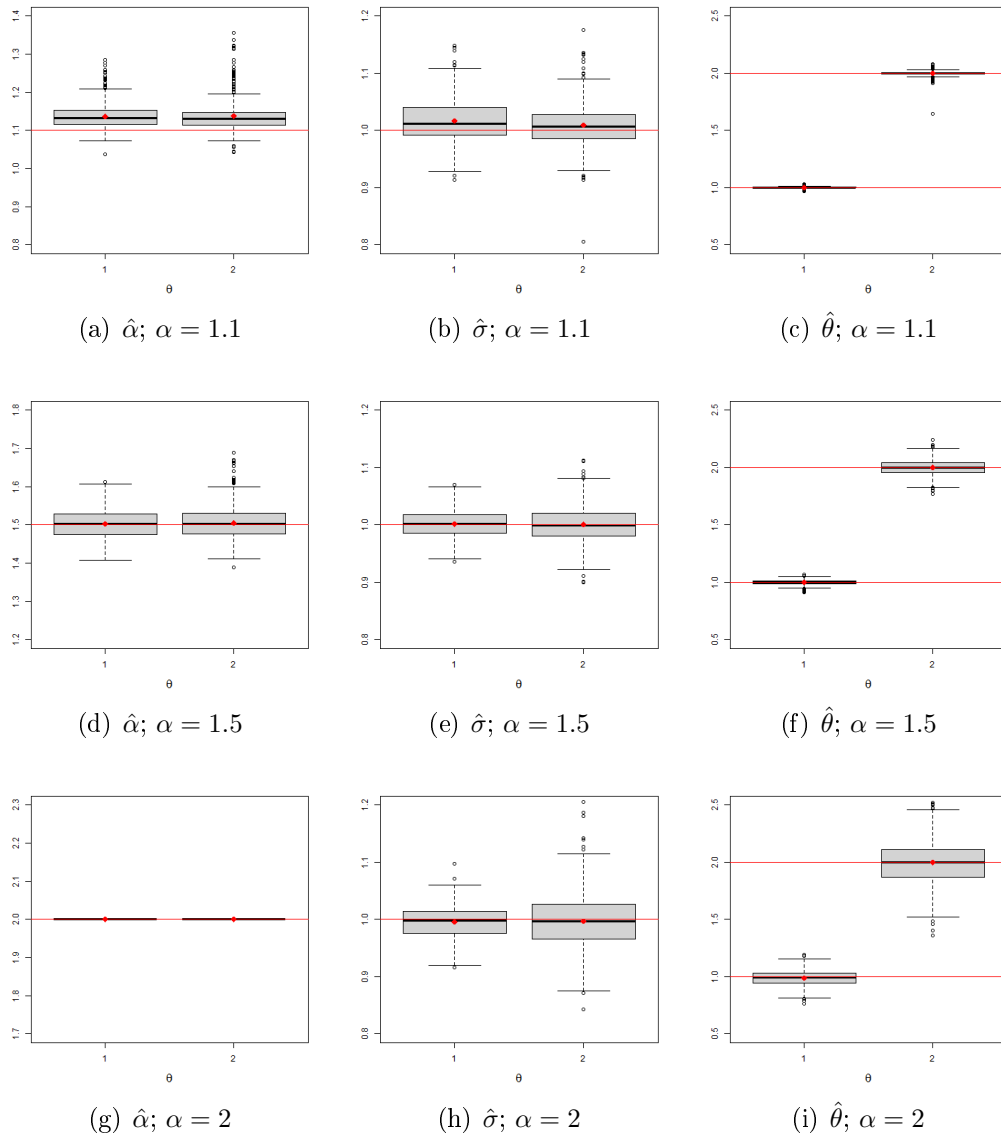


Figura 6.1: Resultados para a estimação do processo OU, quando $h = 1$ e $N = 2000$. Cada gráfico apresenta os resultados para $\theta \in \{1, 2\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as coloridas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

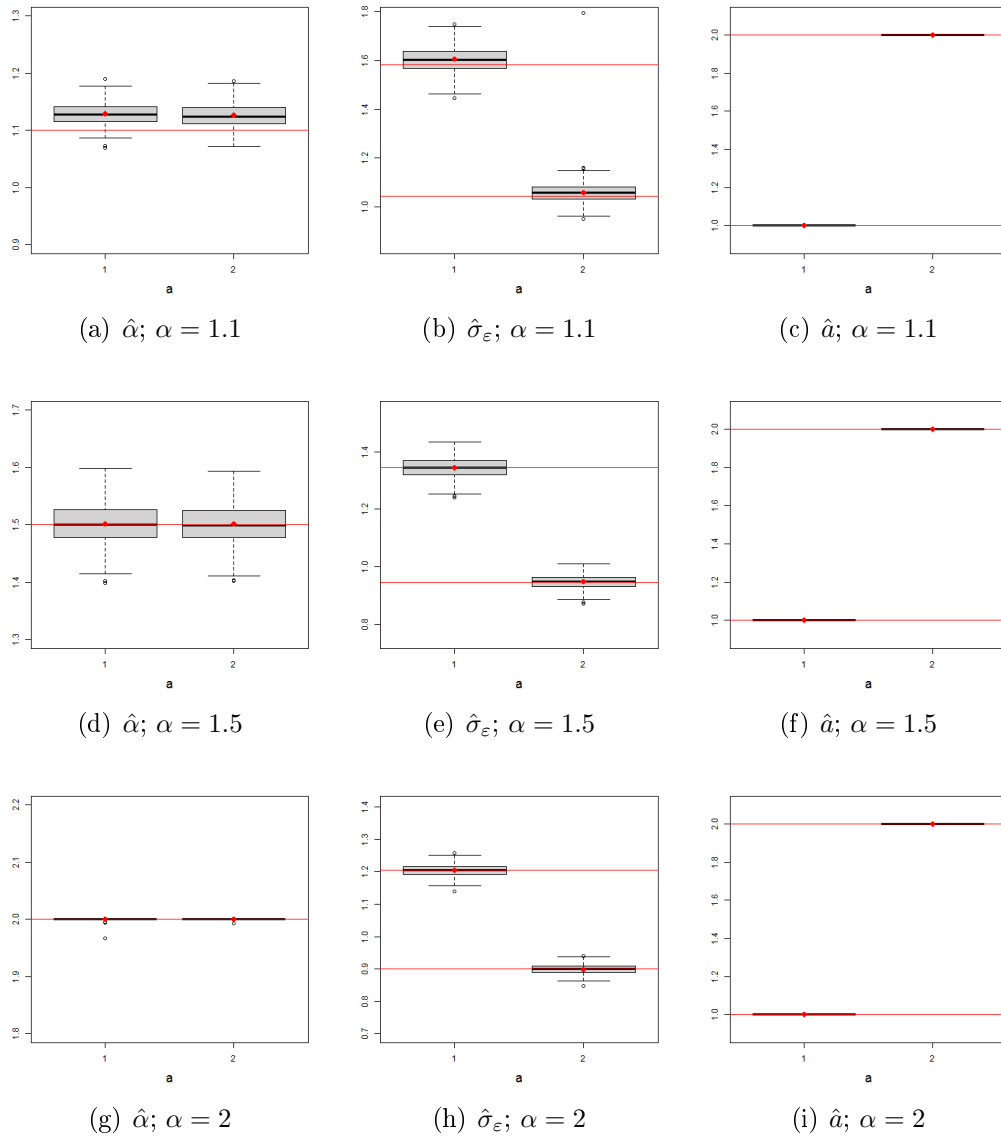


Figura 6.2: Resultados para a estimação do processo Cosseno, quando $h = 1$ e $N = 2000$. Cada gráfico apresenta os resultados para $a \in \{1, 2\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as coloridas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

6.2 Estimação de Mínimos Quadrados

Nesta seção apresentamos simulações de Monte Carlo considerando os estimadores de mínimos quadrados introduzidos nas Subseções 4.3.1 e 4.3.2.

6.2.1 Processo OU

Nesta subseção apresentamos os resultados das simulações de Monte Carlo para a estimação de mínimos quadrados no processo OU. Utilizamos o estimador apresentado na Subseção 4.3.1, proposto por Zhang e Zhang (2013). Consideramos experimentos com os parâmetros variando nos seguintes conjuntos.

- $\theta = 1$;
- $\alpha \in \{0.9, 1.8\}$;
- $h \in \{1, 0.5, 0.05, 0.005\}$, $T \in \{50, 100, 200, 500\}$, $n = T/h$ e 1000 replicações.

Nas Tabelas 6.1-6.2 apresentadas mostramos a média amostra, o vício e o desvio-padrão para as 1000 replicações consideradas em cada experimento. Estas estatísticas são, respectivamente, definidas por

$$\begin{aligned} \text{mean}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{re} \sum_{i=1}^{re} \hat{\theta}_i, \quad \text{bias}(\hat{\theta}) = \theta - \text{mean}(\hat{\theta}), \\ \text{sd}(\hat{\theta}) &= \sqrt{\frac{1}{re-1} \sum_{i=1}^{re} (\hat{\theta}_i - \text{mean}(\hat{\theta}))^2}, \end{aligned}$$

onde $\hat{\theta}_i$ representa o valor estimador para a i -ésima replicação.

As Tabelas 6.1-6.2 apresentam os resultados para $\alpha \in \{0.9, 1.8\}$, que estão no intervalo onde há consistência do estimador $\hat{\theta}$. Vemos que, em ambos os casos, o estimador apresenta baixo vício. Quando T cresce, os valores de vício e desvio-padrão diminuem, conforme esperado. Note que $\hat{\theta}$ sempre super-estima o verdadeiro valor do parâmetro. As simulações apresentadas confirmam a consistência do estimador.

Tabela 6.1: Resultados da estimação de mínimos quadrados para o processo OU, quando $\theta = 1$, $\alpha = 0.9$ e $\sigma = 1$.

	T			
	50	100	200	500
$h = 1$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0551	1.0296	1.0106	1.0028
bias($\hat{\theta}$)	0.0551	-0.0296	-0.0106	-0.0028
sd($\hat{\theta}$)	0.3576	0.2502	0.2323	0.0726
$h = 0.5$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0287	1.0284	1.0113	0.9969
bias($\hat{\theta}$)	0.0287	0.0284	0.0113	0.0031
sd($\hat{\theta}$)	0.2086	0.2381	0.1183	0.0537
$h = 0.05$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0206	1.0073	1.0044	1.0009
bias($\hat{\theta}$)	-0.0206	0.0073	0.0044	0.0009
sd($\hat{\theta}$)	0.1739	0.1077	0.0668	0.0652
$h = 0.005$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0220	1.0091	1.0029	1.0021
bias($\hat{\theta}$)	-0.0220	-0.0091	-0.0029	-0.0021
sd($\hat{\theta}$)	0.1512	0.1031	0.0728	0.0451

Tabela 6.2: Resultados da estimação de mínimos quadrados para o processo OU, quando $\theta = 1$, $\alpha = 1.8$ e $\sigma = 1$.

	T			
	50	100	200	500
$h = 1$				
mean($\hat{\theta}$)	1.1107	1.0475	1.0298	1.0100
bias($\hat{\theta}$)	0.1107	0.0475	0.0298	0.0100
sd($\hat{\theta}$)	0.4671	0.2744	0.1905	0.1110
$h = 0.5$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0551	1.0309	1.0151	1.0088
bias($\hat{\theta}$)	0.0551	0.0309	0.0151	0.0088
sd($\hat{\theta}$)	0.2829	0.1796	0.1300	0.0788
$h = 0.05$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0276	1.0231	1.0096	1.0055
bias($\hat{\theta}$)	-0.0276	-0.0231	0.0096	0.0055
sd($\hat{\theta}$)	0.1922	0.1415	0.1019	0.0599
$h = 0.005$				
mean($\hat{\theta}$)	1.0432	1.0203	1.0130	1.0061
bias($\hat{\theta}$)	-0.0432	-0.0203	-0.0130	-0.0061
sd($\hat{\theta}$)	0.1945	0.1385	0.0963	0.0624

6.2.2 Processo Cosseno

Nesta subseção apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o método dos mínimos quadrados descritos na subseção 4.3.2. Consideramos duas diferentes discretizações, que proporcionam diferentes estimadores de mínimos quadrados.

Discretização de Euler-Maruyama:

Nas Figuras 6.3-6.6 a seguir, apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o método dos mínimos quadrados e mínimos quadrados robustos descritos na subseção 4.3.2. Consideramos a discretização de Euler-Maruyama, descrita na Seção 4.1. Nos estimadores robustos, utilizamos os $k = n/2$ menores quadrados dos resíduos, no método LTS, e janela de Tukey truncada em $c = 4.685$, no método MM. No Apêndice C, apresentamos resultados para $k = n/2 - 170$, no método LTS, e janela de Tukey com $c = 1.55$, no método MM. Consideramos experimentos com os parâmetros variando nos seguintes conjuntos.

- $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$;
- $\alpha \in \{1.1, 1.5, 1.8, 2\}$;
- $T \in \{1000\}$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$ e $n = T/h$;
- 100 replicações.

Podemos observar que os estimadores apresenta vício, RMSE e variância altos quando o parâmetro a aumenta. O estimador robusto LTS reduz vício e variância em quase todos os casos apresentados. Apenas quando $\alpha = 2$ é que os 3 estimadores apresentam praticamente o mesmo comportamento. O estimador robusto MM não apresenta melhora significativa, quando comparado com o estimador de mínimos quadrados.

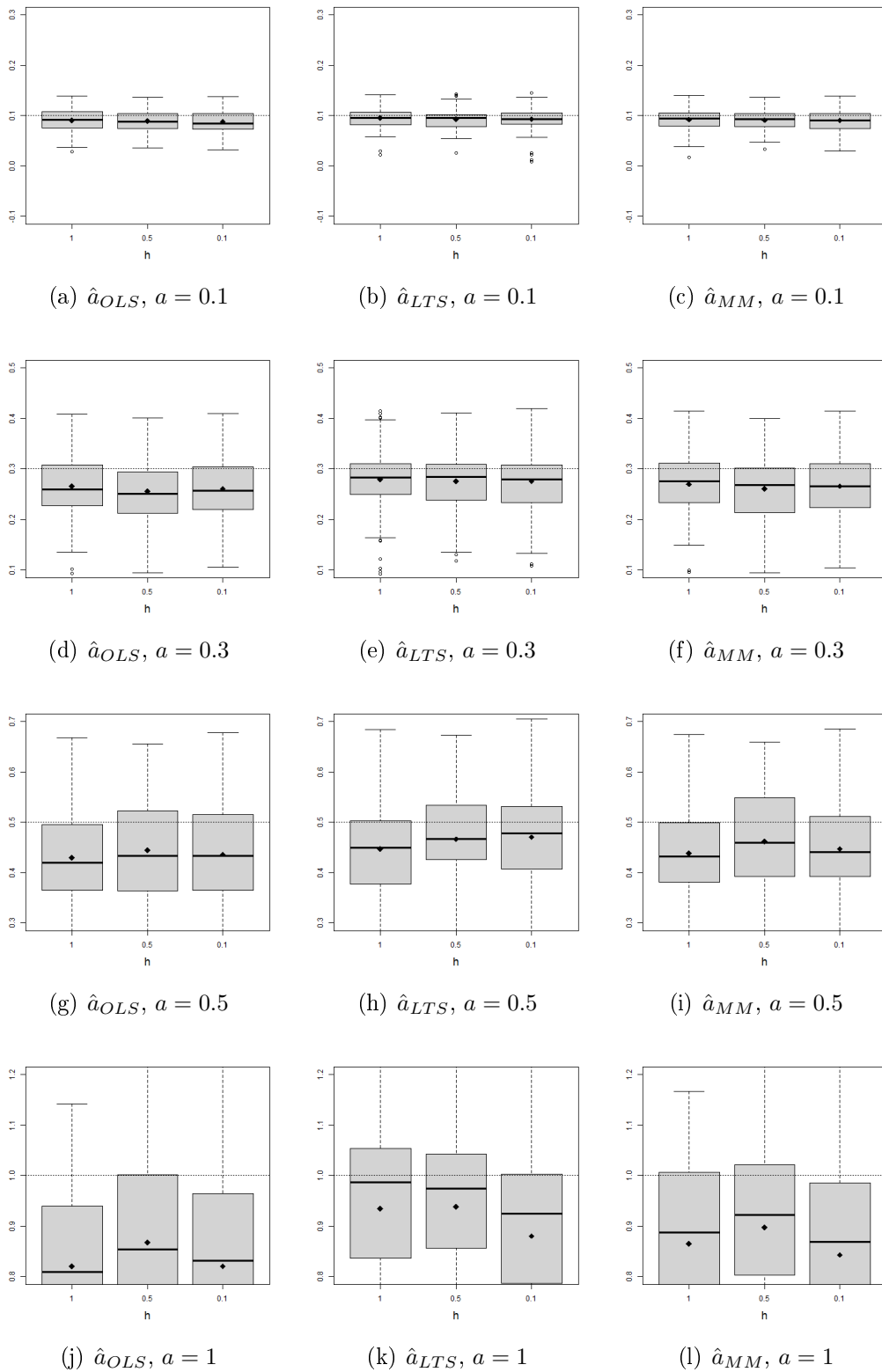


Figura 6.3: Estimação de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 1.1$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

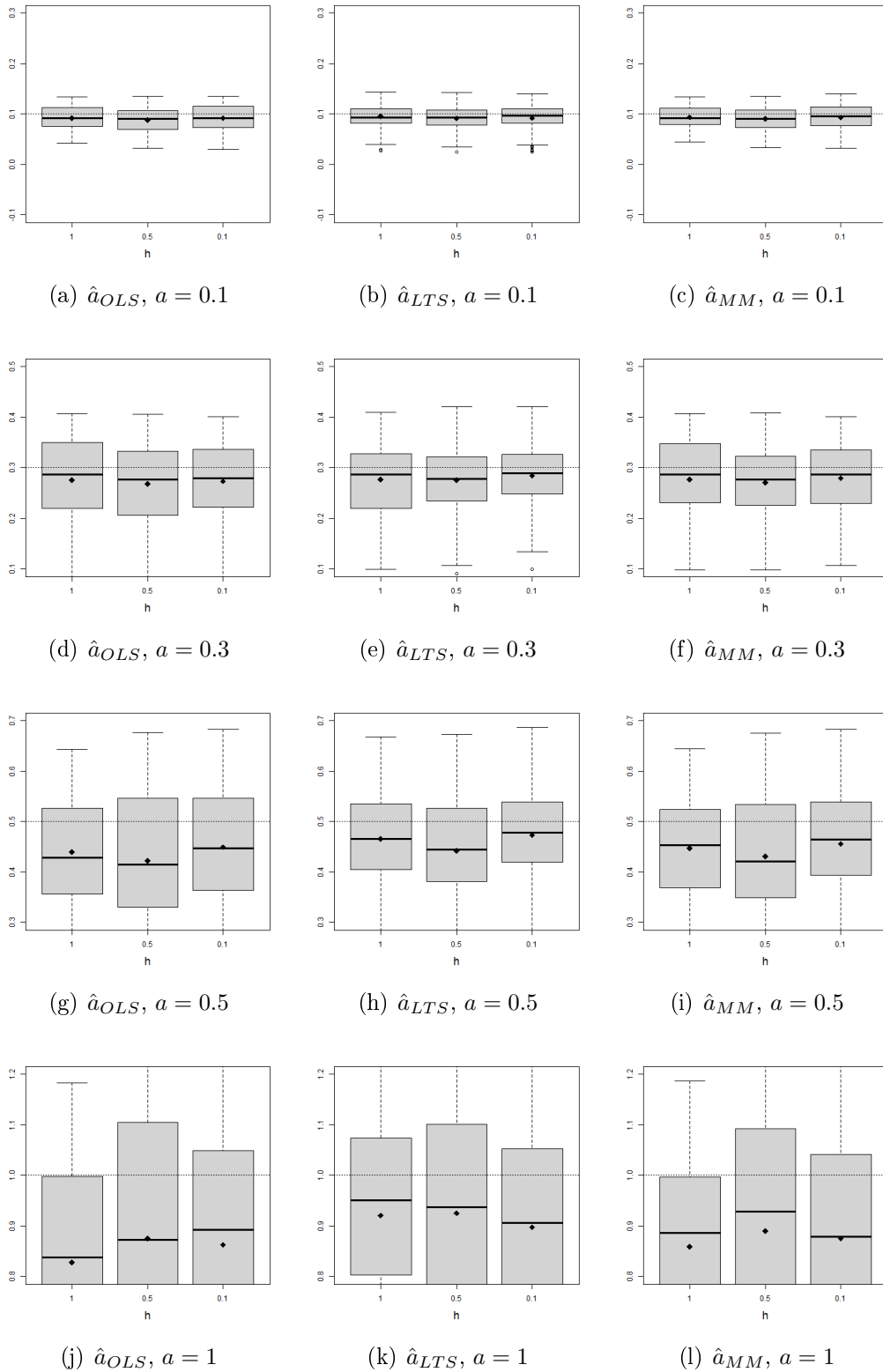


Figura 6.4: Estimação de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 1.5$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

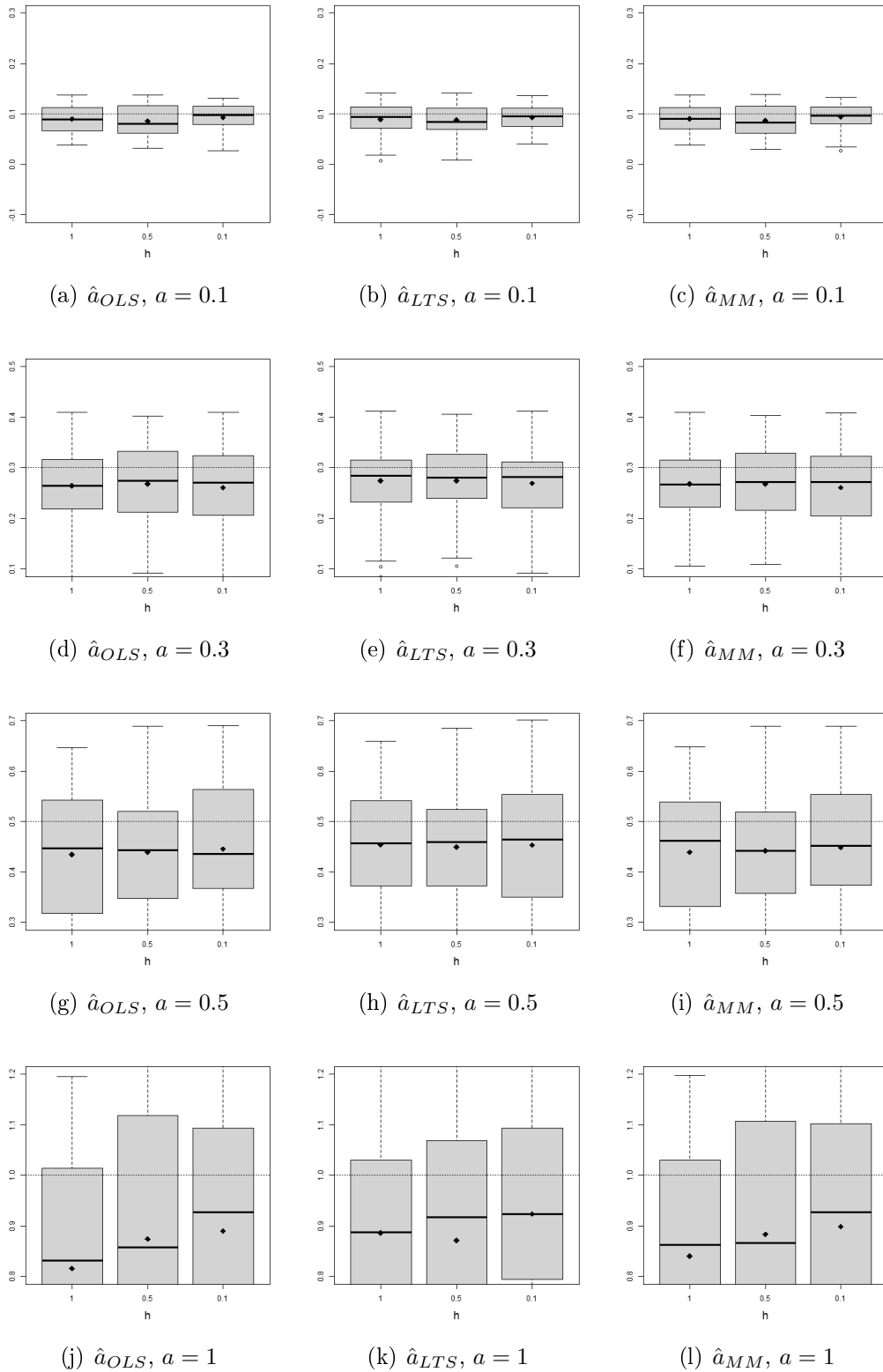


Figura 6.5: Estimação de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 1.8$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

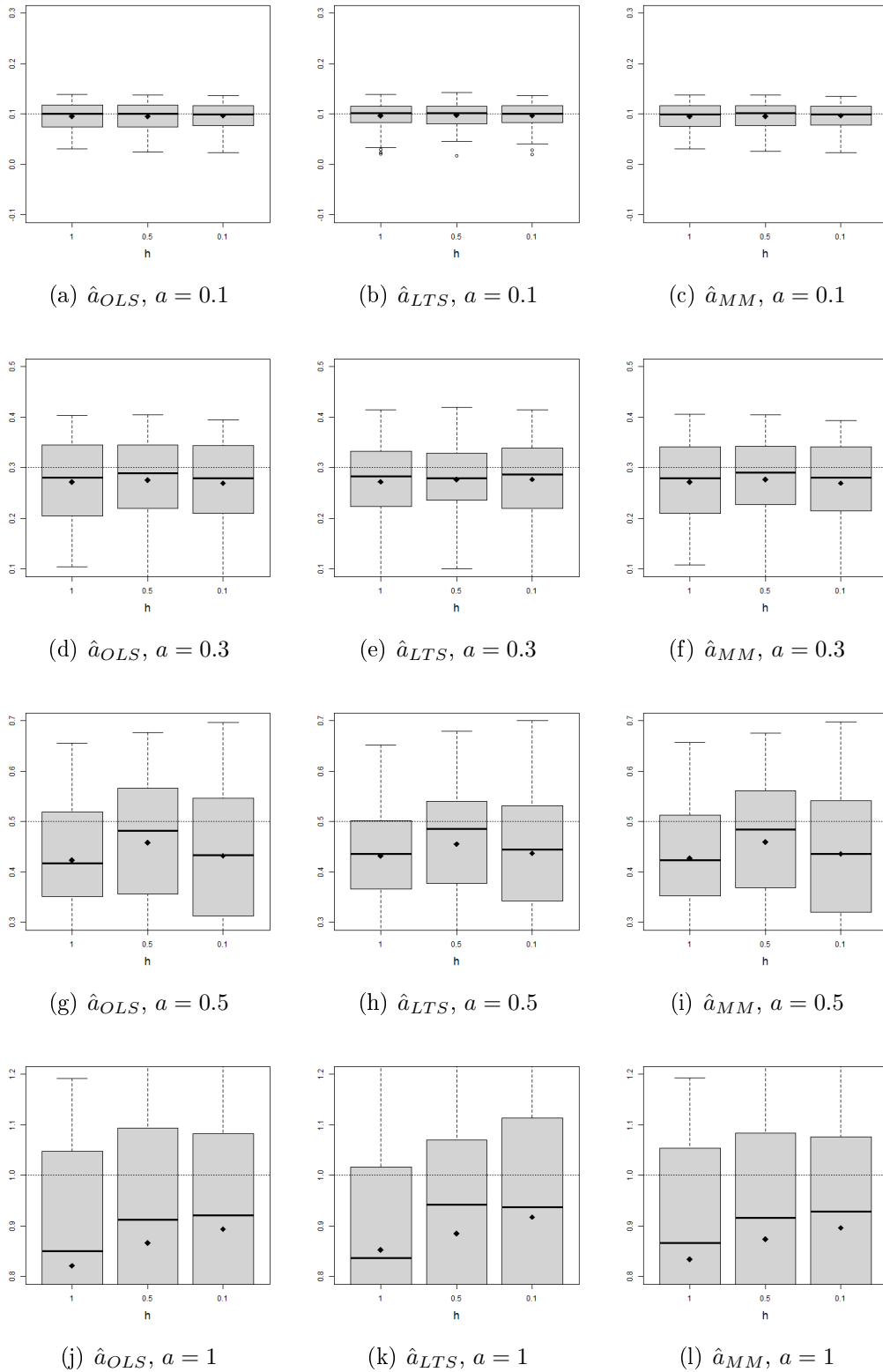


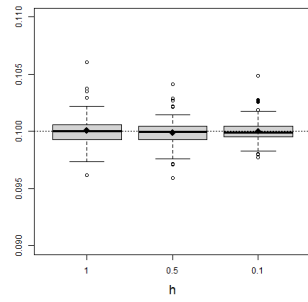
Figura 6.6: Estimação de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 2$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

Discretização da Proposição 2.6:

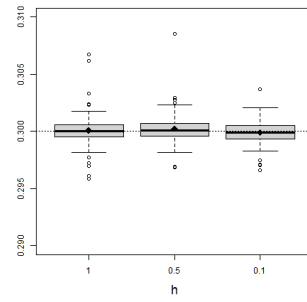
Nas Figuras 6.7-6.8 a seguir, apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo, utilizando o método dos mínimos quadrados descrito na subseção 4.3.2. Consideramos a discretização apresentada na Proposição 2.6, ver Subseção 2.3.1 (Exemplo 2.2). Consideramos experimentos com os parâmetros variando nos seguintes conjuntos.

- $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$;
- $\alpha \in \{1.1, 1.5, 1.8, 2\}$;
- $T \in \{1000\}$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$ e $n = T/h$;
- 100 replicações.

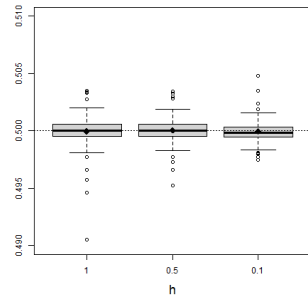
Podemos observar que a estimação foi muito precisa, o estimador apresenta viés e variância muito pequenos em todos casos apresentados. Ao compararmos os resultados aqui apresentados, utilizando a discretização da Proposição 2.6, com os resultados obtidos com a discretização de Euler-Maruyama, percebemos que a discretização influencia na estimação dos parâmetros. A estimação de mínimos quadrados baseada na discretização da Proposição 2.6 é muito mais precisa, sendo que nem foi necessária a utilização de estimadores robustos.



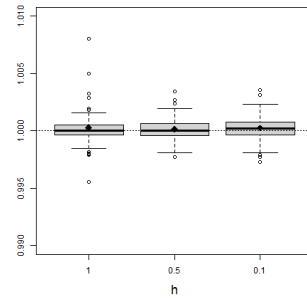
(a) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.1$, $\alpha = 1.1$



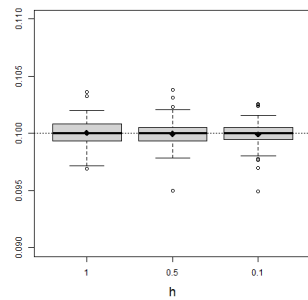
(b) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.3$, $\alpha = 1.1$



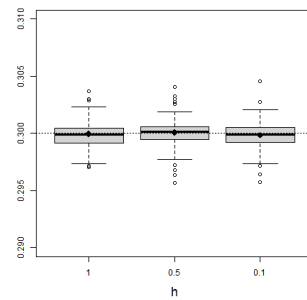
(c) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.5$, $\alpha = 1.1$



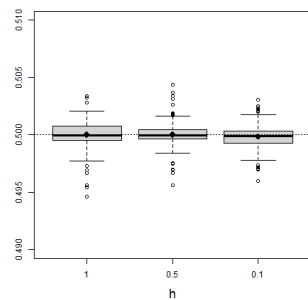
(d) \hat{a}_{OLS} , $a = 1$, $\alpha = 1.1$



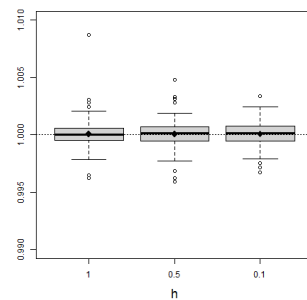
(e) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.1$, $\alpha = 1.5$



(f) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.3$, $\alpha = 1.5$

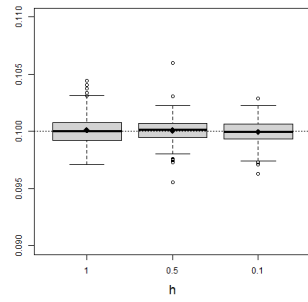


(g) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.5$, $\alpha = 1.5$

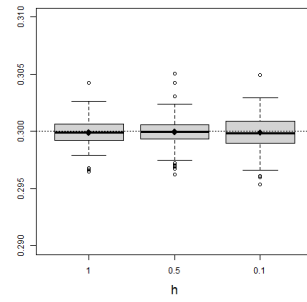


(h) \hat{a}_{OLS} , $a = 1$, $\alpha = 1.5$

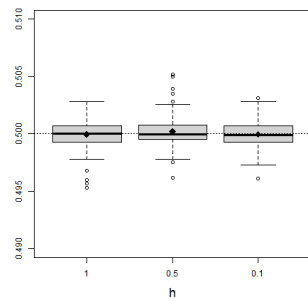
Figura 6.7: Estimação de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização da Proposição 2.6, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha \in \{1.1, 1.5\}$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas horizontais pretas são as medianas de cada experimento, as pontilhadas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.



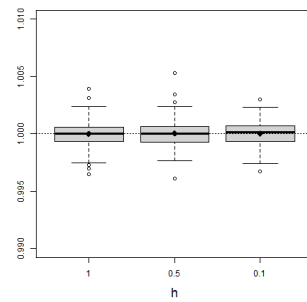
(a) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.1$, $\alpha = 1.8$



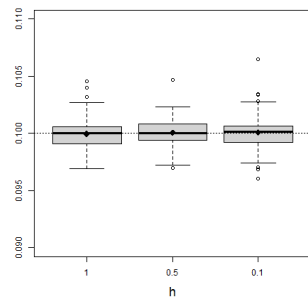
(b) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.3$, $\alpha = 1.8$



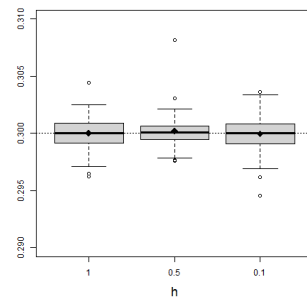
(c) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.5$, $\alpha = 1.8$



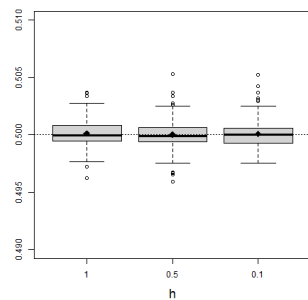
(d) \hat{a}_{OLS} , $a = 1$, $\alpha = 1.8$



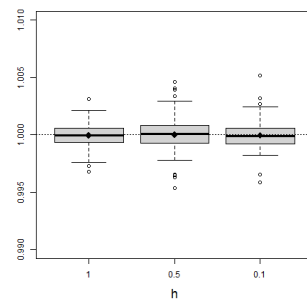
(e) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.1$, $\alpha = 2$



(f) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.3$, $\alpha = 2$



(g) \hat{a}_{OLS} , $a = 0.5$, $\alpha = 2$



(h) \hat{a}_{OLS} , $a = 1$, $\alpha = 2$

Figura 6.8: Estimação de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização da Proposição 2.6, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha \in \{1.8, 2\}$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas horizontais pretas são as medianas de cada experimento, as pontilhadas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

6.3 MLE Iterativo para o Processo Cosseno

As Figuras 6.9-6.11 a seguir apresentam os resultados considerando o Algoritmo Iterativo 4.1, dado na Seção 4.4. Nas simulações de Monte Carlo realizamos 100 replicações, considerando os parâmetros variando nos seguintes conjuntos:

- $a \in \{0.5, 1, 2\}$;
- $\alpha \in \{1.3, 1.5, 1.8\}$;
- $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$;
- $n \in \{1000, 5000, 10000\}$.

As Figuras 6.9-6.11 mostram os resultados para o caso $h = 1$. Para os demais casos de h , veja o Apêndice D. Os resultados apresentados indicam consistência numérica do estimador. Note que quando o tamanho amostral aumenta, a estimação melhora ainda mais, conforme esperado. Não há mudança significativa quando variamos o valor de h . Os resultados apresentados mostram uma melhora significativa quando comparados com o MLE utilizando apenas o primeiro ponto inicial fixo.

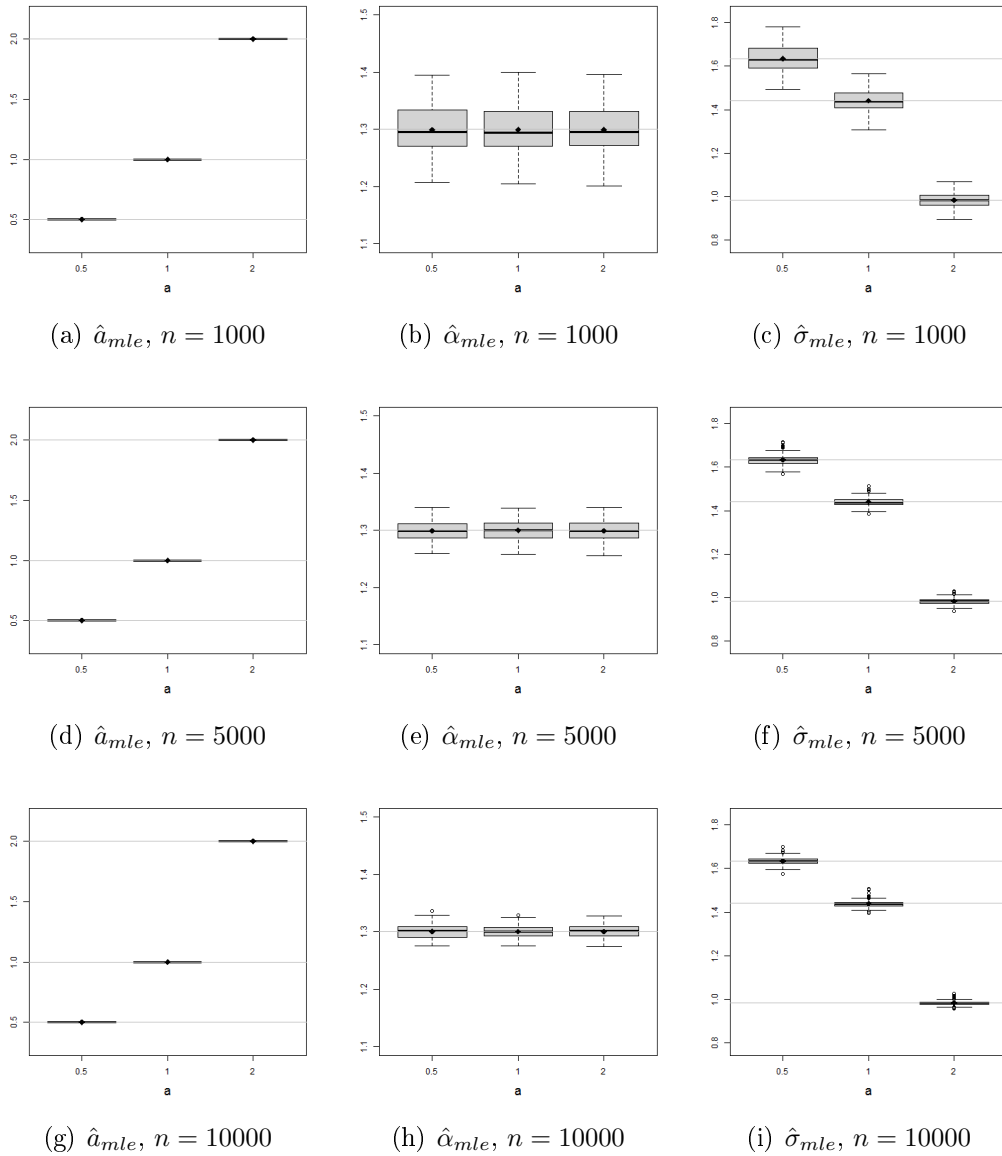


Figura 6.9: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.3$, $h = 1$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.2348, 0.7768, 1.6354\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

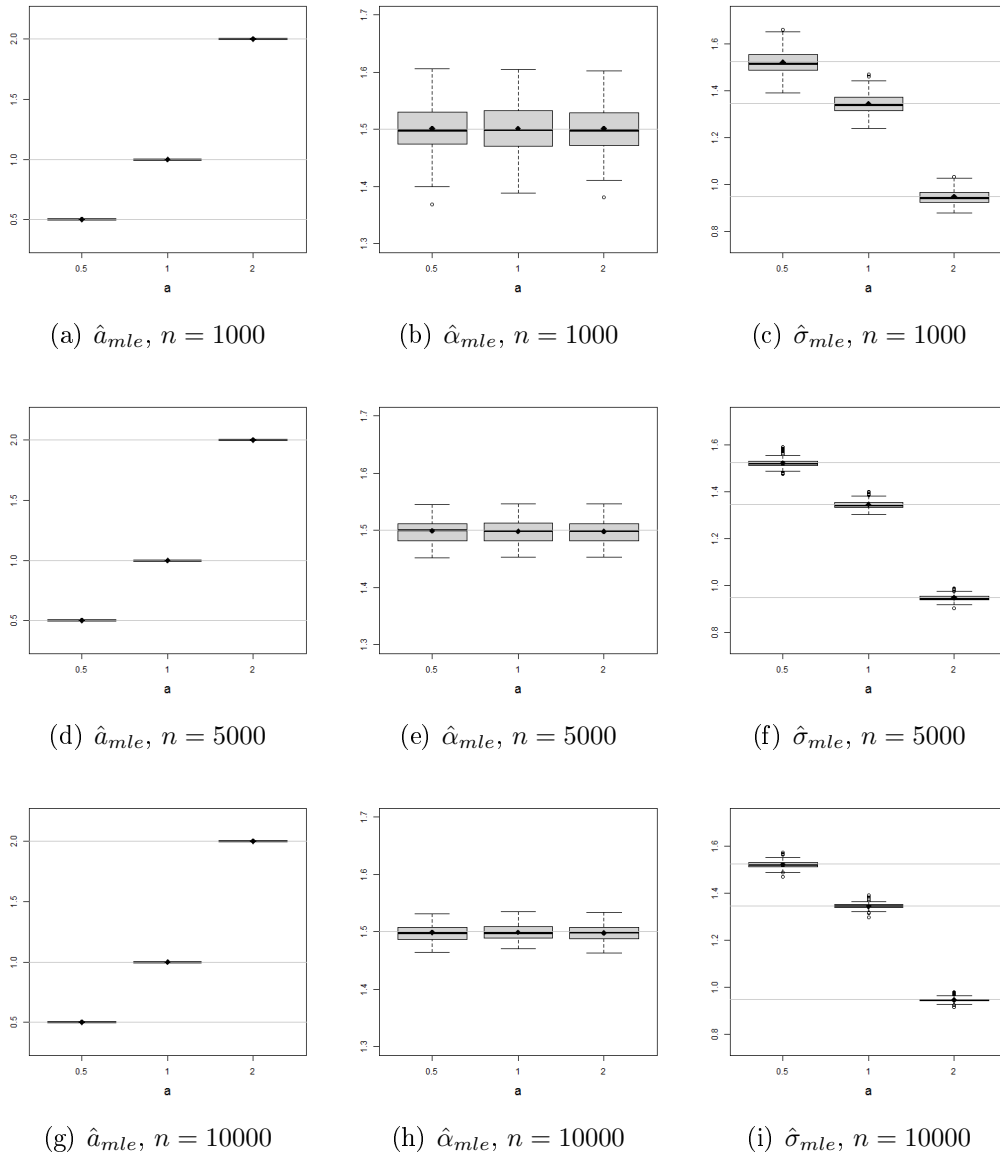


Figura 6.10: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.5$, $h = 1$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.2348, 0.7789, 1.6890\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

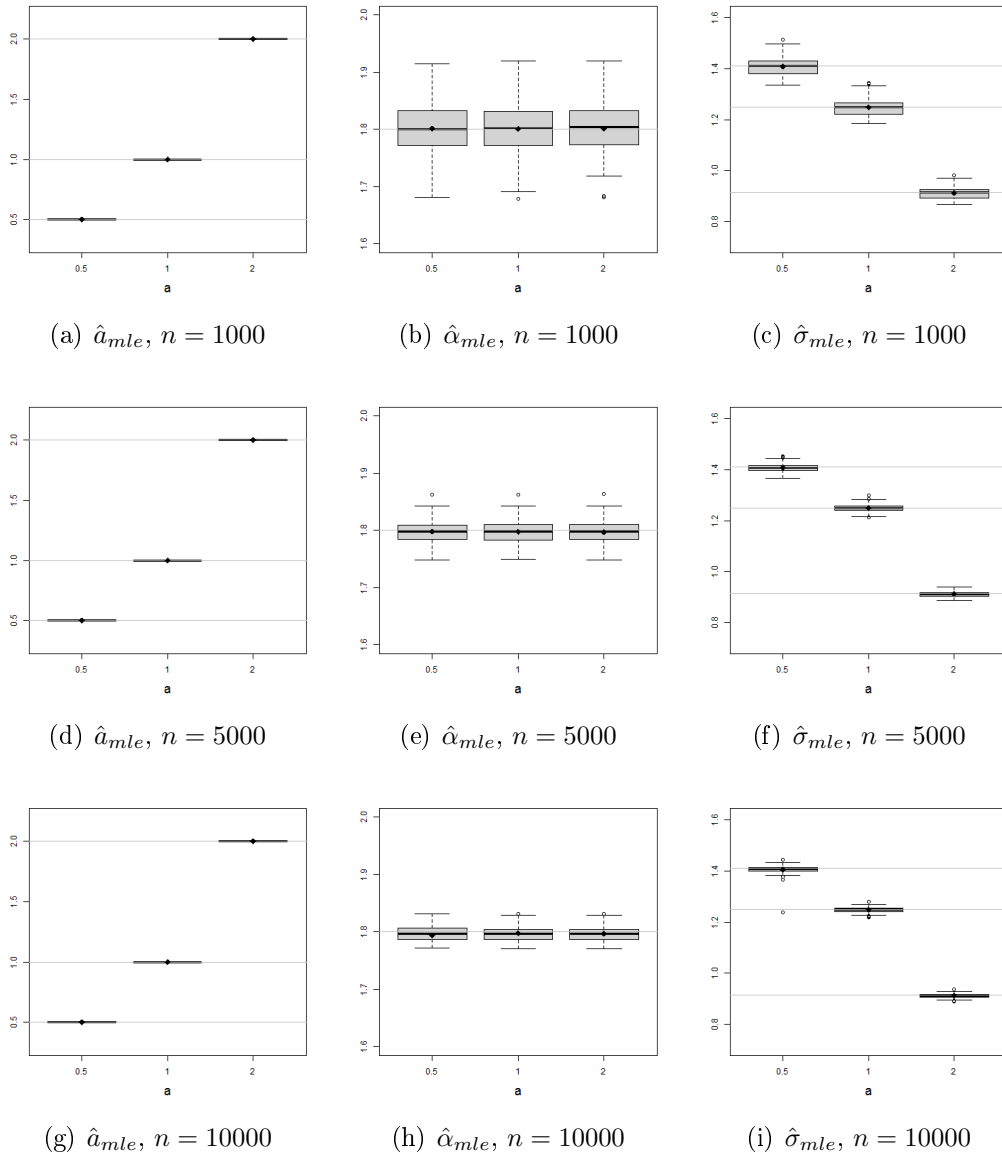


Figura 6.11: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.8$, $h = 1$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.2348, 0.7820, 1.7606\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

6.4 Estimação para o Processo Linear Fracionário Bem-Balanceado com Ruído α -estável

Nesta seção, apresentamos simulações de Monte Carlo, utilizando o procedimento de estimação descrito na Seção 4.5.

As Figuras 6.12-6.13 apresentam resultados para a estimação dos parâmetros do processo WBLFS, dado por (3.32). Para a geração das séries temporais, utilizamos a versão discreta obtida na Proposição 3.7. Consideramos experimentos com 100 replicações para cada caso, onde os parâmetros variam nos seguintes conjuntos

- $H \in \{0.7, 0.8, 0.9\}$;
- $\alpha \in \{1.5, 1.7, 1.9\}$;
- $n = 5000$ e $h \in \{0.1, 1\}$.

Nas Figuras 6.12-6.13 observa-se que a estimação é muito eficiente para os parâmetros α , σ_Y e H , no sentido de apresentar baixo vício e baixa variabilidade.

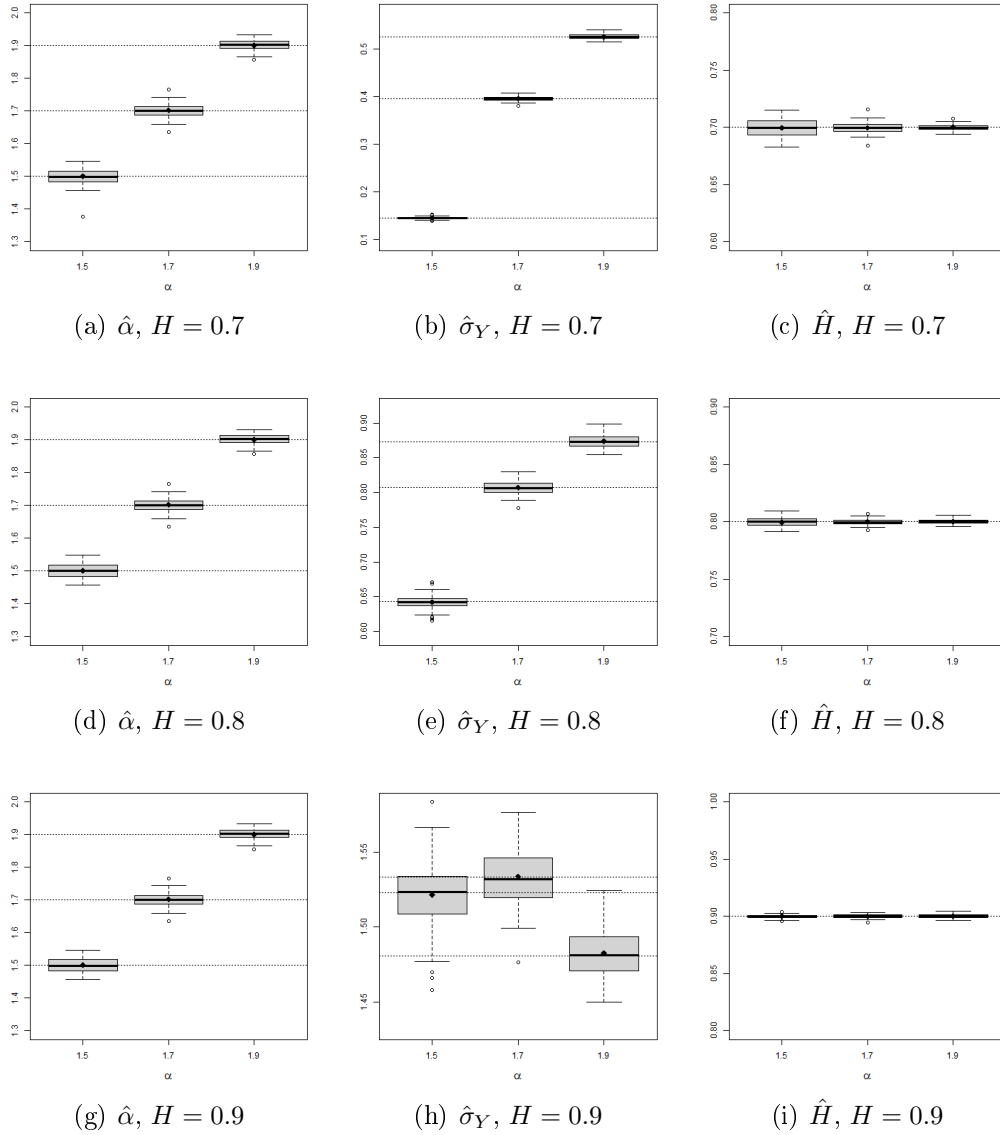


Figura 6.12: Resultados da estimação quando $n = 5000$, $H \in \{0.7, 0.8, 0.9\}$ e $h = 1$. Cada gráfico apresenta resultado para $\alpha \in \{1.5, 1.7, 1.9\}$. As linhas horizontais pretas são as medianas de cada experimento, as pontilhadas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

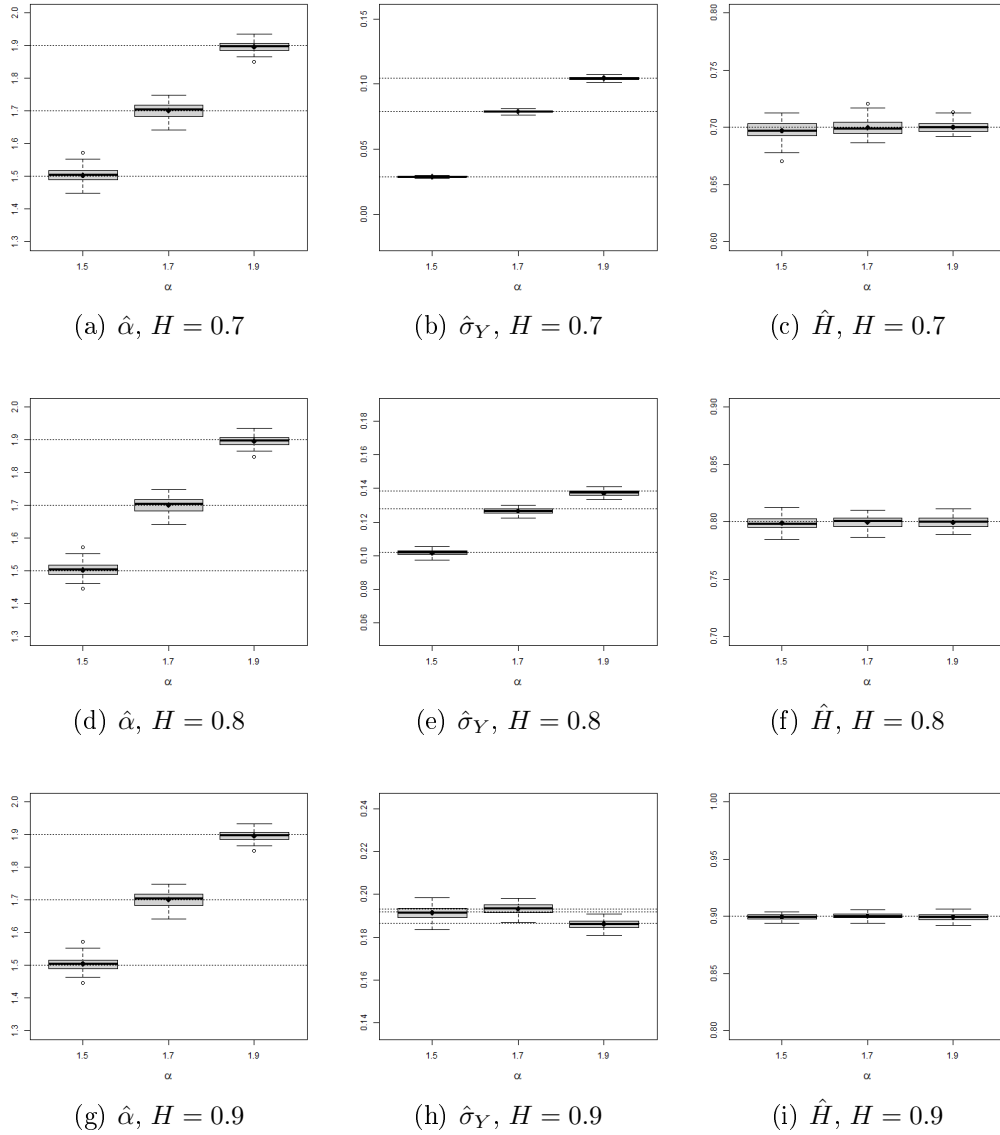


Figura 6.13: Resultados da estimação quando $n = 5000$, $H \in \{0.7, 0.8, 0.9\}$ e $h = 0.1$. Cada gráfico apresenta resultado para $\alpha \in \{1.5, 1.7, 1.9\}$. As linhas horizontais pretas são as medianas de cada experimento, as pontilhadas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

6.5 Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Movimento Browniano

Nesta seção apresentamos os resultados de simulações realizadas utilizando a metodologia Bayesiana, descrita na Seção 4.6.

6.5.1 Processo OU

Apresentamos os resultados obtidos para a estimação dos parâmetros do processo OU Gaussiano, utilizando a metodologia descrita na Subseção 4.6.1. Os verdadeiros valores dos parâmetros foram considerados nos seguintes conjuntos:

- $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma = 1$;
- $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$ e $n = 2000$.

Foram geradas 450.000 amostras para cada parâmetro estudado, das quais desconsideramos as 50.000 primeiras observações (ou seja, $burn - in = 50.000$) e depois realizamos saltos de tamanho 100, resultando em uma amostra final de tamanho 4000 para cada parâmetro a ser analisado. Consideramos duas cadeias com diferentes valores iniciais. Como ambas convergiram para os mesmos valores, apresentamos os resultados para apenas para uma das cadeias. A Tabela 6.3 apresenta os resultados obtidos. Notamos que os resultados foram muito precisos, com exceção do caso $\theta = 2$, que apresentou altos valores para vício e desvio-padrão para a estimativa de θ . Mesmo quando $\theta = 2$ os valores para vício e desvio-padrão para σ são baixos. No entanto, quando $h = 0.1$ todos os resultados melhoram, tanto para $\hat{\theta}$, quanto para $\hat{\sigma}$. Todas as cadeias passaram nos testes de convergência Raftery-Lewis, Geweke e Heidelberger-Welch. Os intervalos de credibilidade, com 95% de confiança, foram obtidos a partir dos quantis de ordem 0.025 e 0.975 das amostras geradas para cada parâmetro, pelo amostrador de Gibbs.

Na Figura 6.14 apresentamos gráficos das cadeias geradas, função densidade e função de autocorrelação para um caso particular estudado. Todos os demais casos tiveram comportamento muito semelhante e por isso optamos por omiti-los. A Figura 6.15 apresenta os valores preditos para as 5 últimas observações do processo, com intervalo de credibilidade à 95%. Para o primeiro valor predito, vemos que

o intervalo de credibilidade não contempla o verdadeiro valor observado. Para os demais, os intervalos de credibilidade contêm o verdadeiro valor observado.

Observação 6.1. Realizamos simulações considerando os 6 últimos valores preditos, com o intuito de aprimorar o predito que não continha o verdadeiro valor observado. No entanto, obtivemos os mesmos resultados.

Tabela 6.3: Resultados da estimação quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\sigma = 1$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $n = 2000$.

θ	$\hat{\theta}$	bias_θ	sd_θ	IC_θ	σ	$\hat{\sigma}$	bias_σ	sd_σ	IC_σ
$h = 1$									
0.5	0.4785	0.0215	0.0289	(0.4219 , 0.5357)	1	0.9631	0.0369	0.0390	(0.8894 , 1.0420)
1	0.9464	0.0536	0.0528	(0.8475 , 1.0553)	1	0.9443	0.0557	0.0457	(0.8588 , 1.0377)
2	1.8544	0.1456	0.1426	(1.6076 , 2.1534)	1	0.9153	0.0847	0.0702	(0.7938 , 1.0653)
$h = 0.5$									
0.5	0.4842	0.0158	0.0348	(0.4167 , 0.5541)	1	0.9729	0.0271	0.0341	(0.9098 , 1.0412)
1	0.9564	0.0436	0.0560	(0.8496 , 1.0692)	1	0.9619	0.0381	0.0383	(0.8897 , 1.0394)
2	1.8926	0.1074	0.1068	(1.6986 , 2.1083)	1	0.9440	0.0560	0.0465	(0.8586 , 1.0409)
$h = 0.1$									
0.5	0.5196	-0.0196	0.0750	(0.3715 , 0.6678)	1	0.9815	0.0185	0.0315	(0.9215 , 1.0442)
1	0.9947	0.0053	0.1049	(0.7905 , 1.2006)	1	0.9792	0.0208	0.0323	(0.9172 , 1.0445)
2	1.9517	0.0483	0.1530	(1.6553 , 2.2609)	1	0.9760	0.0240	0.0350	(0.9087 , 1.0449)

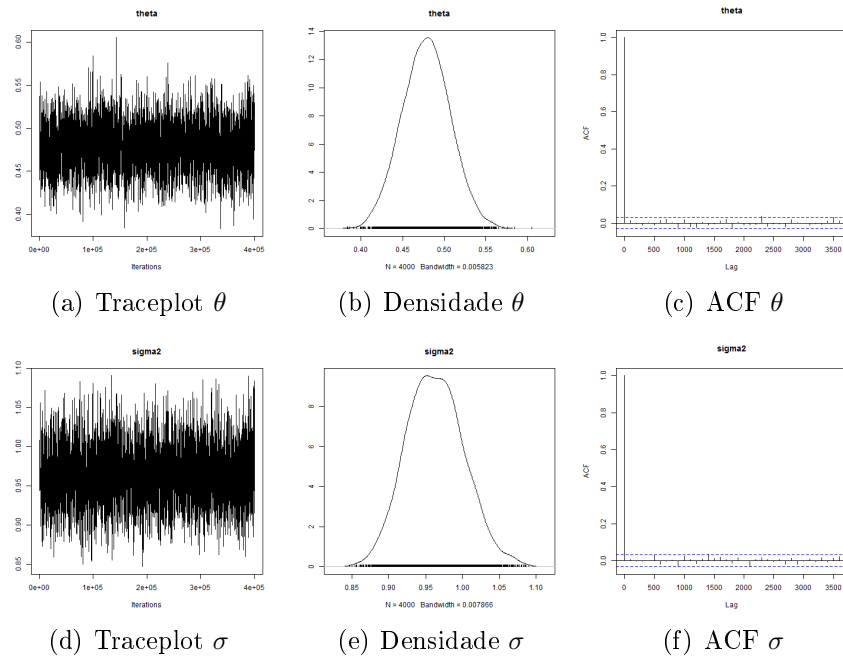


Figura 6.14: Traceplot, funções de densidade e de autocorrelação das cadeias geradas para $\theta = 0.5$, $\sigma = 1$, $h = 1$, $n = 2000$.

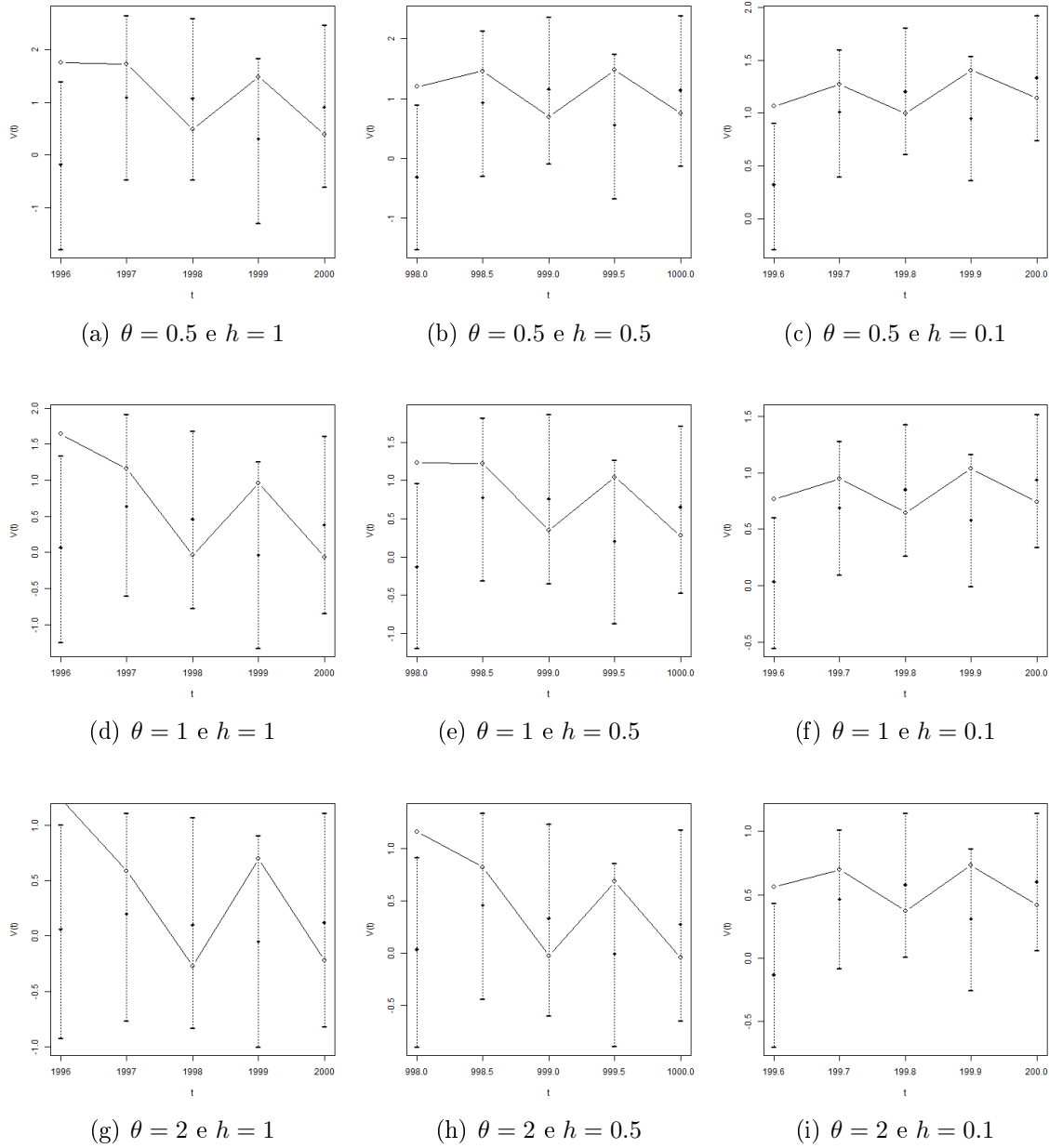


Figura 6.15: Valores preditos da série temporal com intervalo de credibilidade à 95%, para os últimos 5 valores observados, quando $\theta \in \{0.5, 1, 2\}$, $\sigma = 1$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $n = 2000$. Os pontos abertos são os verdadeiros valores observados, os pontos pretos são os valores preditos e as linhas horizontais pontilhadas são os intervalos de credibilidade.

6.5.2 Processo Cosseno

Apresentamos os resultados obtidos para a estimação dos parâmetros do processo OU Gaussiano, utilizando a metodologia descrita na Subseção 4.6.2. Os verdadeiros

valores dos parâmetros foram considerados nos seguintes conjuntos:

- $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma = 1$;
- $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$ e $n = 2000$.

Foram geradas 450.000 amostras para cada parâmetro estudado, das quais desconsideramos as 50.000 primeiras observações (ou seja, $burn - in = 50.000$) e depois realizamos saltos de tamanho 100, resultando em uma amostra final de tamanho 4000 para cada parâmetro a ser analisado. Consideramos duas cadeias com diferentes valores iniciais. Como ambas convergiram para os mesmos valores, apresentamos os resultados para apenas uma das cadeias. A Tabela 6.4 apresenta os resultados obtidos. Notamos que os resultados foram muito precisos, apresentando baixo vício e desvio-padrão para todos os casos apresentados. Todas as cadeias passaram nos testes de convergência Raftery-Lewis, Geweke e Heidelberger-Welch. Na Figura 6.16 apresentamos gráficos das cadeias geradas, funções de densidade e autocorrelação para um caso particular estudado. Todos os demais casos tiveram comportamento muito semelhante e por isso optamos por omiti-los.

Tabela 6.4: Resultados da estimação quando $a \in \{0.5, 1, 2\}$, $\sigma = 1$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$ e $n = 2000$.

a	\bar{a}	$bias_a$	sd_a	IC_a	σ	$\bar{\sigma}$	$bias_\sigma$	sd_σ	IC_σ
$h = 1$									
0.5	0.5001	-0.0001	0.0002	(0.4997 , 0.5004)	1	0.9790	0.0210	0.0312	(0.9212 , 1.0429)
1	1.0000	0.0000	0.0004	(0.9993 , 1.0008)	1	0.9794	0.0206	0.0308	(0.9211 , 1.0403)
2	2.0003	-0.0003	0.0005	(1.9994 , 2.0013)	1	0.9790	0.0210	0.0319	(0.9199 , 1.0425)
$h = 0.5$									
0.5	0.5008	-0.0008	0.0011	(0.4987 , 0.5030)	1	0.9795	0.0205	0.0313	(0.9207 , 1.0408)
1	1.0001	-0.0001	0.0004	(0.9993 , 1.0009)	1	0.9794	0.0206	0.0303	(0.9227 , 1.0419)
2	2.0001	-0.0001	0.0007	(1.9986 , 2.0015)	1	0.9792	0.0208	0.0315	(0.9198 , 1.0424)
$h = 0.1$									
0.5	0.5006	-0.0006	0.0075	(0.4858 , 0.5147)	1	0.9791	0.0209	0.0309	(0.9210 , 1.0407)
1	1.0080	-0.0080	0.0053	(0.9975 , 1.0184)	1	0.9782	0.0218	0.0306	(0.9192 , 1.0411)
2	1.9967	0.0033	0.0047	(1.9875 , 2.0058)	1	0.9784	0.0216	0.0312	(0.9203 , 1.0412)

A Figura 6.17 apresenta os valores preditos para as 5 últimas observações do processo, com intervalo de credibilidade à 95%. Novamente, para o primeiro valor predito, o intervalo de credibilidade não contém o verdadeiro valor observado. Para os demais, os intervalos de credibilidade contêm o verdadeiro valor observado. Aparentemente, temos intervalos de credibilidade com tamanhos menores do que para o processo OU. No entanto, a escala para os gráficos da Figura 6.17 é muito maior.

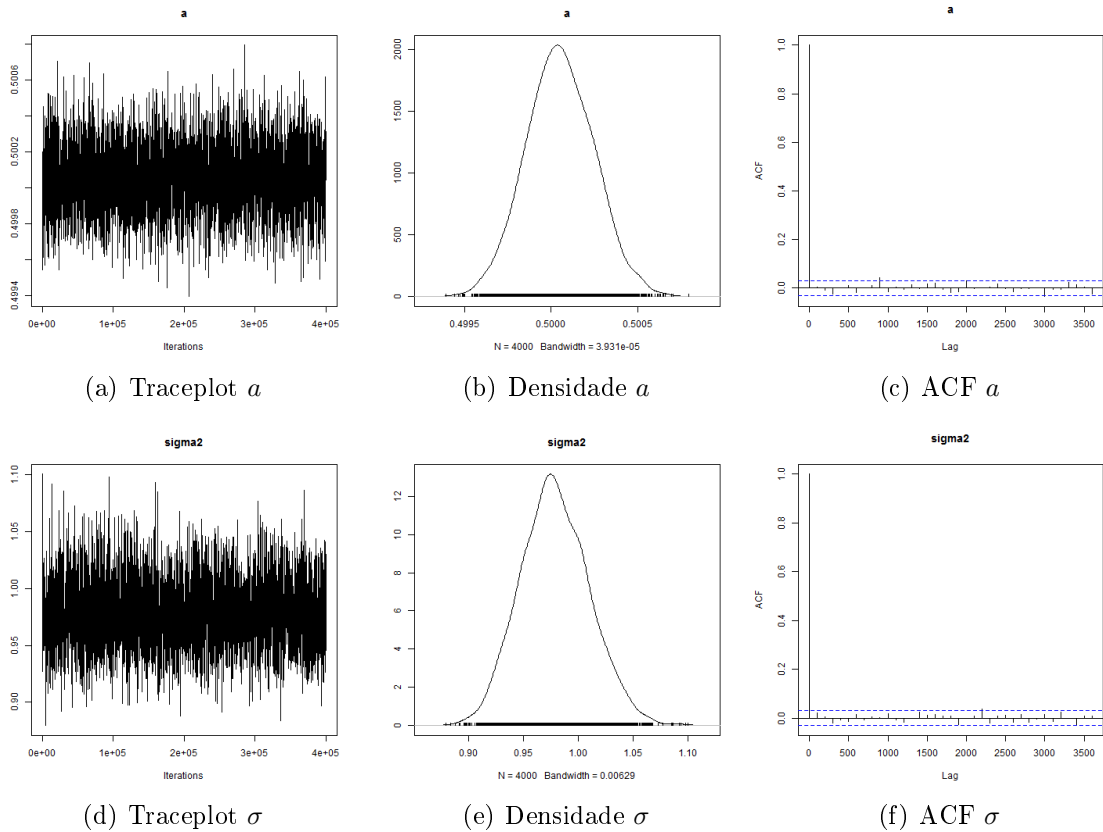


Figura 6.16: Traceplot, funções de densidade e de autocorrelação das cadeias geradas para $a = 0.5$, $\sigma = 1$, $h = 1$, $n = 2000$.

Na verdade, o tamanho dos intervalos de credibilidade tanto para o processo OU quanto para o Cosseno são semelhantes.

6.6 Estimação Bayesiana para o Processo Tipo OU Generalizado com Ruído Lévy α -Estável

Nesta seção apresentamos os resultados de simulações realizadas utilizando a metodologia Bayesiana, descrita na Seção 4.7.

6.6.1 Processo OU

Apresentamos os resultados obtidos para a estimação dos parâmetros do processo OU com ruído Lévy α -estável, utilizando a metodologia descrita na Subseção 4.7.1. Os verdadeiros valores dos parâmetros foram considerados nos seguintes conjuntos:

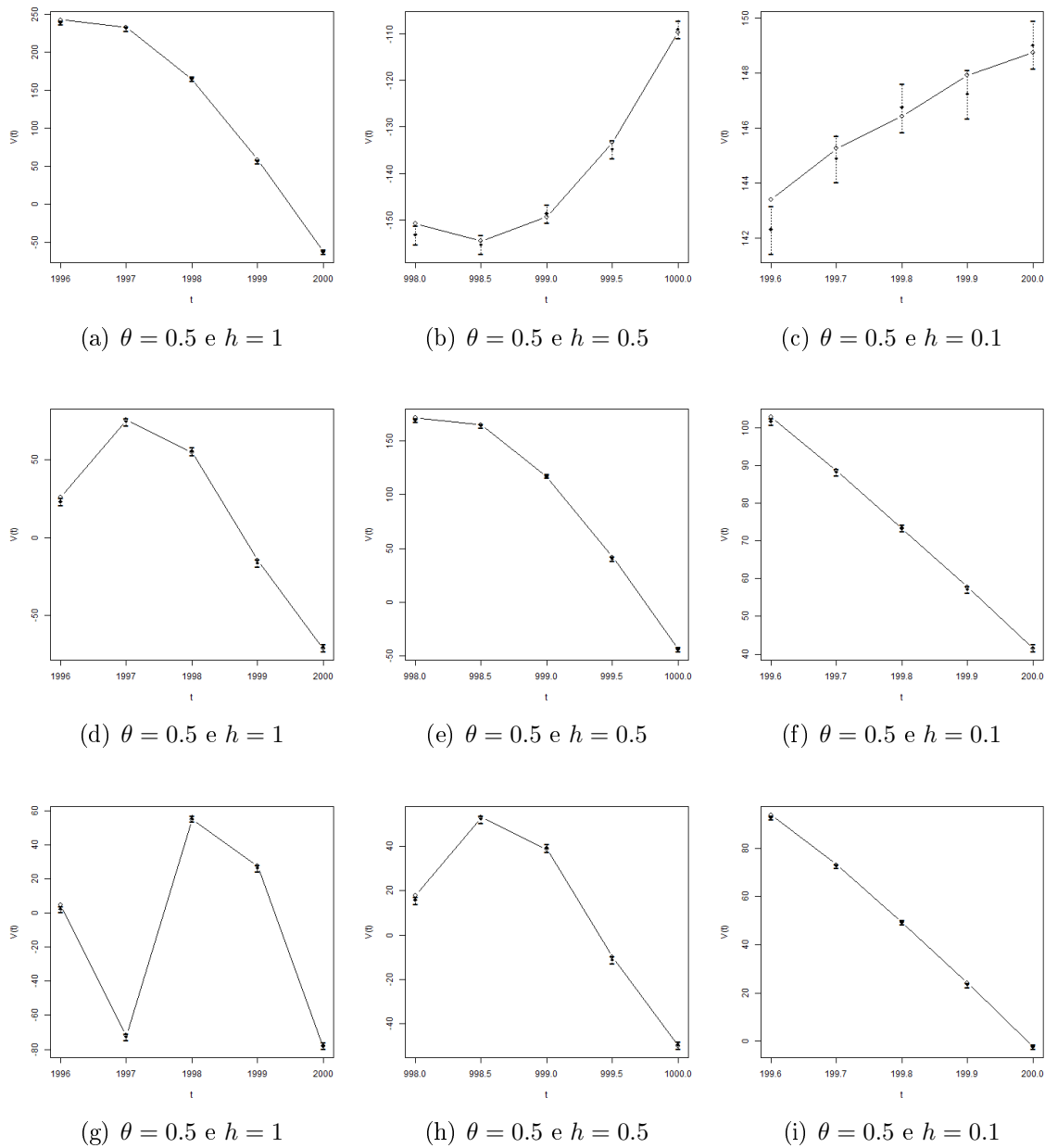


Figura 6.17: Valores preditos da série temporal com intervalo de credibilidade à 95%, para os últimos 5 valores observados, quando $a \in \{0.5, 1, 2\}$, $\sigma = 1$, $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $n = 2000$. Os pontos abertos são os verdadeiros valores observados, os pontos pretos são os valores preditos e as linhas horizontais pontilhadas são os intervalos de credibilidade.

- $\theta \in \{1, 2\}$ e $\alpha \in \{1.1, 1.5\}$;
- $h = 1$ e $n = 2000$.

Foram geradas 450.000 amostras para cada parâmetro estudado, das quais desconsideramos as 50.000 primeiras observações (ou seja, $burn - in = 50.000$) e depois realizamos saltos de tamanho 100, resultando em uma amostra final de tamanho 4000 para cada parâmetro a ser analisado. A Tabela 6.5 apresenta os resultados obtidos. Notamos que os resultados apresentaram baixos valores de vício para todos os parâmetros. No entanto, os verdadeiros valores dos parâmetros da distribuição estável (α e σ_Z) não estão inclusos nos seus respectivos intervalos de credibilidade. O parâmetro θ é estimado com muita precisão e os seus intervalos de credibilidade contêm os verdadeiros valores do parâmetro. Um ponto crítico desta abordagem Bayesiana está em atribuir valores iniciais para as cadeias. Utilizamos as médias estimadas via máxima verossimilhança, fazendo pequenos ajustes a fim de conseguir inicializar as cadeias. Pequenas variações nos valores iniciais já impossibilitam a inicialização do algoritmo.

Na Figura 6.18 apresentamos gráficos das cadeias geradas, funções densidade e de autocorrelação para um caso particular estudado. Todos os demais casos tiveram comportamento muito semelhante e por isso optamos por omiti-los.

Tabela 6.5: Resultados da estimação quando $\theta \in \{1, 2\}$, $\alpha \in \{1.1, 1.5\}$, $h = 1$, $n = 2000$.

	$\alpha = 1.1$	$\sigma_Z = 0.6347$	$\theta = 1$
mean	1.1311	0.6354	1.0005
bias	-0.0311	-0.0007	-0.0005
sd	0.0004	0.0002	0.0009
IC	(1.1302,1.1316)	(0.6350,0.6358)	(0.9987,1.0019)
	$\alpha = 1.1$	$\sigma_Z = 0.4389$	$\theta = 2$
mean	1.1299	0.4413	1.9970
bias	-0.0299	-0.0024	0.0030
sd	0.0003	0.0005	0.0033
IC	(1.1292,1.1303)	(0.4404,0.4420)	(1.9918,2.0029)
	$\alpha = 1.5$	$\sigma_Z = 0.6449$	$\theta = 1$
mean	1.5512	0.6474	0.9953
bias	-0.0512	-0.0025	0.0047
sd	0.0008	0.0011	0.0046
IC	(1.5497,1.5525)	(0.6454,0.6491)	(0.9881,1.0035)
	$\alpha = 1.5$	$\sigma_Z = 0.4647$	$\theta = 2$
mean	1.5460	0.4715	1.9696
bias	-0.0460	-0.0068	0.0304
sd	0.0009	0.0019	0.0150
IC	(1.5448,1.5483)	(0.4668,0.4737)	(1.9526,2.0071)

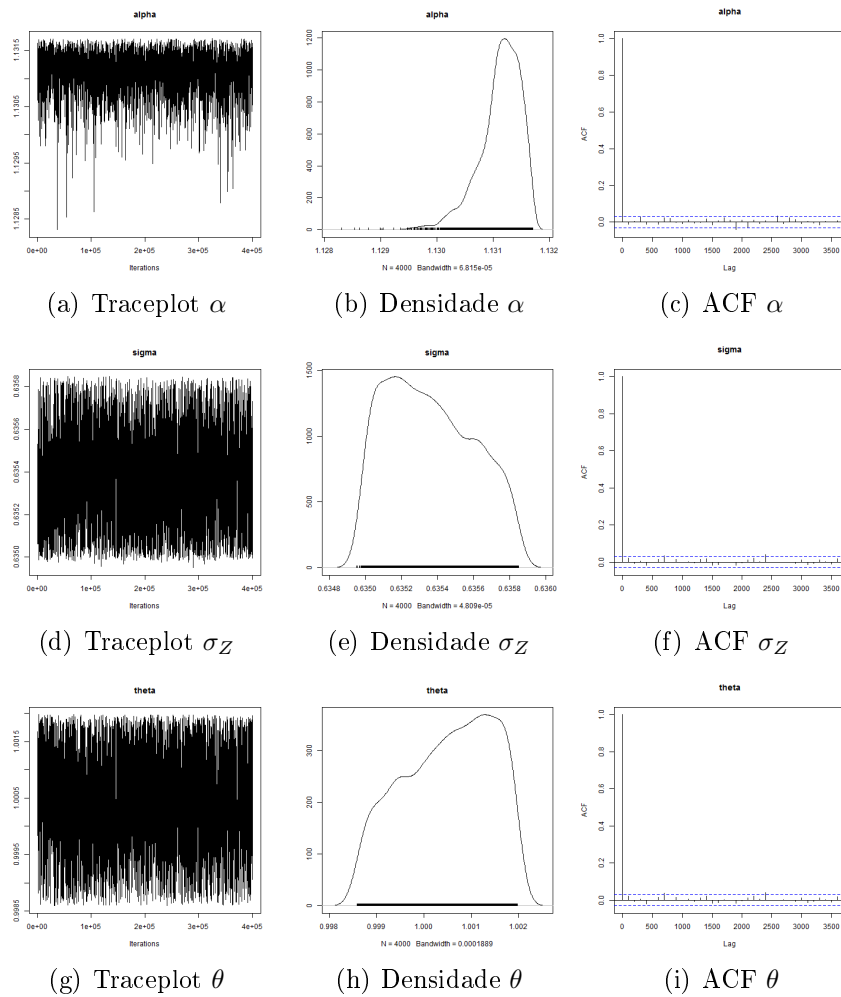


Figura 6.18: Traceplot, funções de densidade e de autocorrelação das cadeias geradas para $\theta = 1$, $\alpha = 1.1$, $h = 1$, $n = 2000$.

6.6.2 Processo Cosseno

Apresentamos os resultados obtidos para a estimação dos parâmetros do processo Cosseno com ruído Lévy α -estável, utilizando a metodologia descrita na Subseção 4.7.2. Os verdadeiros valores dos parâmetros foram considerados nos seguintes conjuntos:

- $a \in \{1, 2\}$ e $\alpha \in \{1.1, 1.5\}$;
- $h = 1$ e $n = 2000$.

Foram geradas 450.000 amostras para cada parâmetro estudado, das quais consideramos as 50.000 primeiras observações (ou seja, $burn - in = 50.000$) e depois realizamos saltos de tamanho 100, resultando em uma amostra final de tamanho 4000 para cada parâmetro a ser analisado. A Tabela 6.6 apresenta os resultados obtidos. Notamos que os resultados apresentaram baixos valores de vício para todos os parâmetros. No entanto, os verdadeiros valores do parâmetro α da distribuição estável não estão inclusos nos intervalos de credibilidade. O parâmetro a é estimado de forma extremamente precisa e os seus intervalos de credibilidade acabam se reduzindo a um ponto, considerando uma aproximação de quatro casas decimais. Da mesma forma que para o processo OU, para o processo Cosseno também tivemos problemas em atribuir valores iniciais para as cadeias. Utilizamos as médias estimadas via máxima verossimilhança, fazendo pequenos ajustes a fim de conseguir inicializar as cadeias. Pequenas variações nos valores iniciais já impossibilitam a inicialização do algoritmo.

Na Figura 6.19 apresentamos gráficos das cadeias geradas, funções densidade e de autocorrelação para um caso particular estudado. Todos os demais casos tiveram comportamento muito semelhante e por isso optamos por omiti-los.

Tabela 6.6: Resultados da estimação quando $a \in \{1, 2\}$, $\alpha \in \{1.1, 1.5\}$, $h = 1$, $n = 2000$.

	$\alpha = 1.1$	$\sigma_\varepsilon = 1.5824$	$a = 1$
mean	1.1328	1.5545	1.0000
bias	-0.0328	0.0279	0.0000
sd	0.0002	0.0002	0.0000
IC	(1.1322,1.1331)	(1.5542,1.5550)	{1}
	$\alpha = 1.1$	$\sigma_\varepsilon = 1.0452$	$a = 2$
mean	1.1323	1.0331	2.0000
bias	-0.0323	0.0121	0.0000
sd	0.0003	0.0001	0.0000
IC	(1.1314,1.1327)	(1.0329,1.0334)	{2}
	$\alpha = 1.5$	$\sigma_\varepsilon = 1.3450$	$a = 1$
mean	1.5559	1.3239	1.0000
bias	-0.0559	0.0211	0.0000
sd	0.0008	0.0003	0.0000
IC	(1.5537,1.5566)	(1.3236,1.3246)	{1}
	$\alpha = 1.5$	$\sigma_\varepsilon = 0.9467$	$a = 2$
mean	1.5537	0.9391	2.0000
bias	-0.0537	0.0076	0.0000
sd	0.0007	0.0001	0.0000
IC	(1.5519,1.5544)	(0.9390,0.9394)	{2}

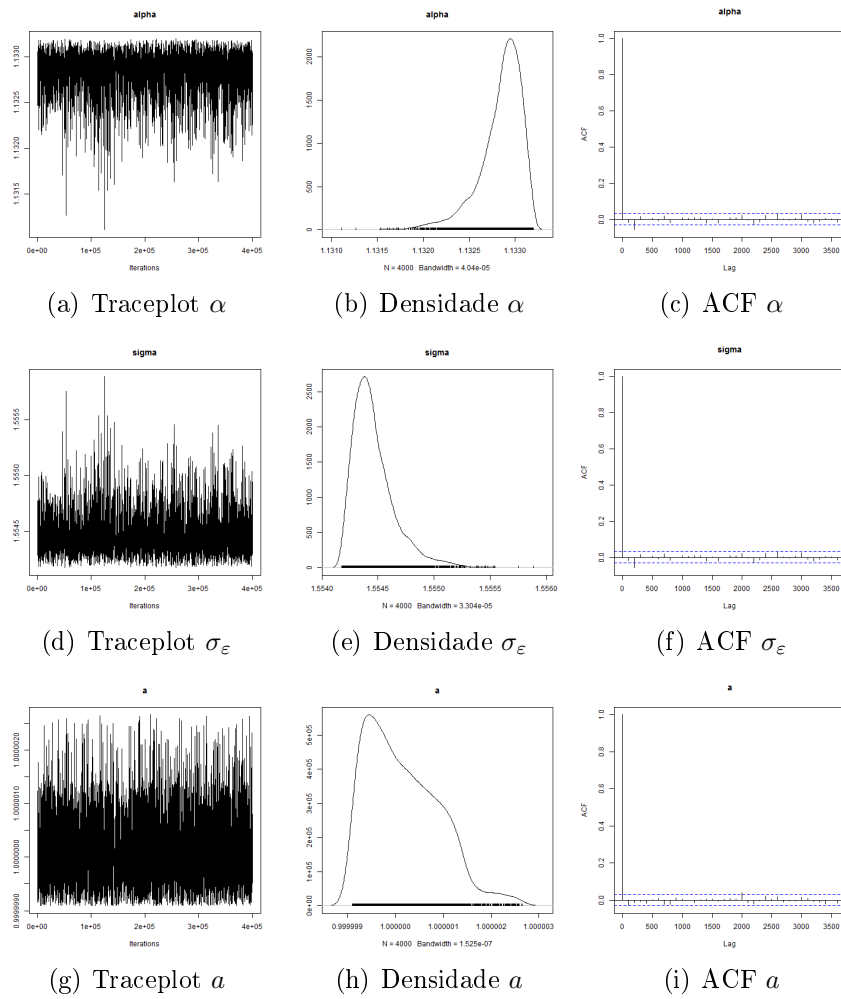


Figura 6.19: Traceplot, funções de densidade e de autocorrelação das cadeias geradas para $a = 1$, $\alpha = 1.1$, $h = 1$, $n = 2000$.

Capítulo 7

Aplicações

7.1 Mortalidade por Problema Cardiovascular na Cidade de Los Angeles

Vamos analisar uma série temporal que descreve a mortalidade por problema cardiovascular na cidade de Los Angeles, obtida em Shumway e Stoffer (2011). Série temporal com $n = 508$ observações, coletadas semanalmente de 1970 a 1979. O período da série é de 52 unidades. Logo, sua frequência é $a = \frac{2\pi}{52} = 0.1208$. Na Tabela 7.1 apresentamos as estatísticas descritivas dos dados: média, mediana, assimetria e curtose.

Pela Tabela 7.1 vemos que o valor da assimetria indica dados com assimetria positiva, mas como estudamos apenas o caso simétrico, não levamos em consideração essa informação. Além disso, o valor da curtose (acima de 3) aponta dados com caudas pesadas, indicando a possibilidade de utilização de distribuições não Gaussianas para modelagem. Na Figura 7.1 segue a série centralizada na média que consideramos na análise.

Na nossa análise consideramos $h \in \{0.25, 1, 5.6\}$. Modelamos a série utilizando o processo Cosseno, dado no Exemplo 2.2. Utilizando a série real, aplicamos o

Tabela 7.1: Estatísticas descritivas dos dados de mortalidade por problema cardiovascular na cidade de Los Angeles.

Média	Mediana	Assimetria	Curtose
88.7	87.33	0.41	3.99

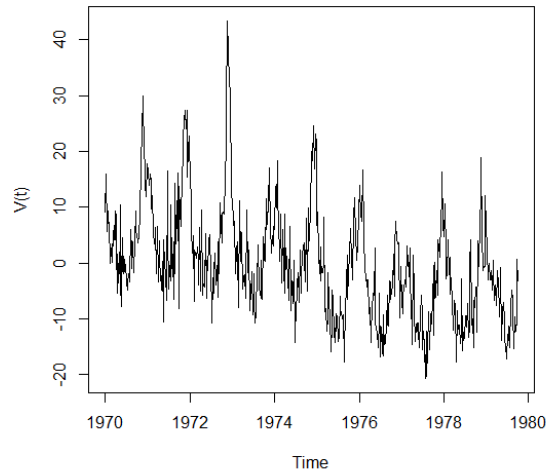


Figura 7.1: Série temporal real com os dados de mortalidade cardiovascular na cidade de Los Angeles centralizada na média.

Algoritmo Iterativo 4.1 (Seção 4.4) para estimar os parâmetros. Na Tabela 7.2 apresentamos os resultados da estimação considerando $h \in \{0.25, 1, 5.6\}$. Como a estimação considerando $h \in \{0.25, 1\}$ não foi satisfatória. Fizemos um estudo de qual valor de h seria o melhor para estimar o parâmetro a . Note que devemos considerar $h = 5.6$, pois este foi o melhor valor de h para estimar o parâmetro a . Este valor de h indica que processos a tempo contínuo não são adequados para modelar esta série temporal. Ainda assim a estimação foi satisfatória, modelando esta série temporal por processo a tempo contínuo.

A Figura 7.2 apresenta os resíduos obtidos considerando os valores estimados, apresentados na Tabela 7.2 (quando $h = 5.6$). Note que ainda há presença de pequena sazonalidade nos resíduos, que o processo Cosseno não conseguiu captar.

Outra forma de estimar o parâmetro a é utilizando o periodograma e o periodograma suavizado. Na Figura 7.3 temos o periodograma (a) e o periodograma suavizado (b), utilizando a janela de Bartlett.

A frequência em que o periodograma apresentou maior pico foi para $\omega = 0.1236$, tanto no periodograma, quanto no periodograma suavizado. Este valor se aproxima muito do valor do verdadeiro parâmetro a e pode ser uma boa estimativa. Para melhorar a estimação, propomos utilizar mais frequências, além das de Fourier. Assim, iremos calcular o periodograma nas seguintes frequências $\omega_{ct} = \frac{2\pi t}{cn}$, para $c \in \mathbb{N}$, $\frac{-cn}{2} < t \leq \lfloor \frac{cn}{2} \rfloor$. Tomando $c = 10$, obtemos a melhor estimativa $a = 0.1199$

Tabela 7.2: Estimação dos parâmetros utilizando o Algoritmo Iterativo 4.1 (Seção 4.4), quando $h \in \{0.25, 1, 5.6\}$.

\hat{a}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
$h = 0.25$		
2.7413	1.9861	7.5633
$h = 1$		
0.6855	1.9869	7.5622
$h = 5.6$		
0.1208	1.9860	7.5529

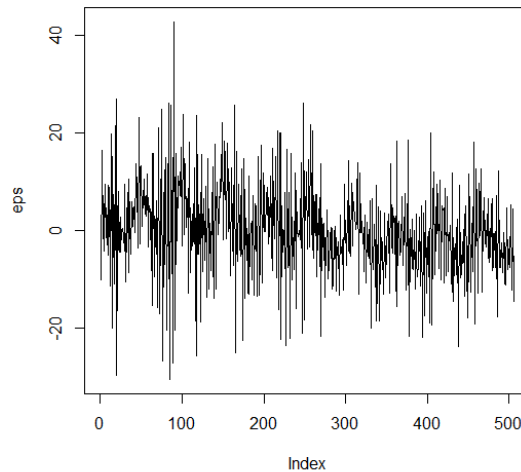


Figura 7.2: Série temporal dos resíduos, considerando $h = 5.6$.

(tanto para o periodograma normal quanto para o suavizado).

Então, realizamos simulações para o processo Cosseno para $a = \frac{2\pi}{52}$, $\alpha = 1.98$ e $h \in \{0.25, 1, 5.6\}$. Nas Figuras 7.4-7.6 apresentamos resultados da estimação considerando 100 replicações.

As Figuras 7.7-7.9 apresentam as séries simuladas utilizando diferentes discretizações: a discretização proposta na Proposição 2.6 (a), a discretização de Euler-Maruyama dada em (4.3)(b) e a expressão da solução do processo dada em (2.42) (c). Assim, vemos o quanto a discretização influencia, pois as séries simuladas são diferentes, dependendo da discretização. A discretização que encontrou séries mais

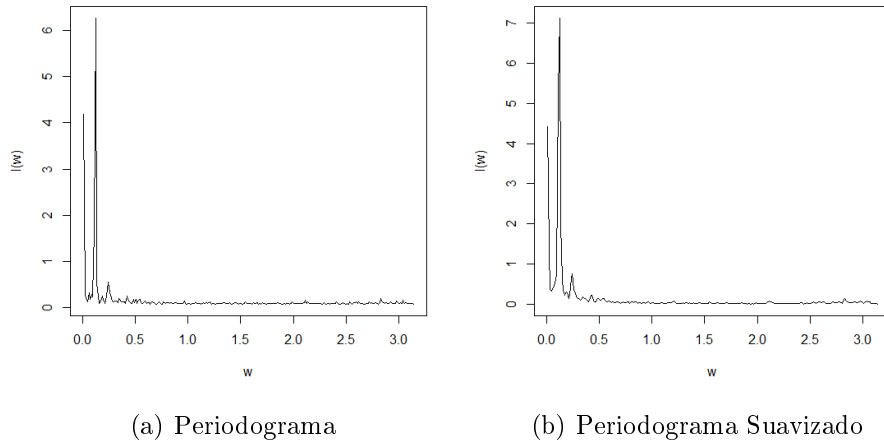


Figura 7.3: Periodograma (a) e periodograma suavizado (b) da série temporal dos dados de mortalidade cardiovascular na cidade de Los Angeles.

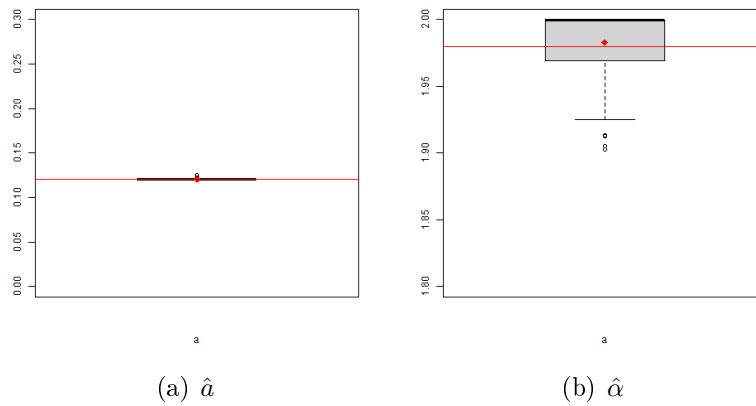


Figura 7.4: Resultados para \hat{a} e $\hat{\alpha}$, quando $h = 0.25$. As linhas vermelhas representam o verdadeiro valor do parâmetro e o ponto vermelho a média amostral.

semelhantes da original foi a de Euler-Maruyama, mas a discretização proposta na Proposição 2.6 também apresentou comportamento semelhante, especialmente no caso $h = 5.6$.

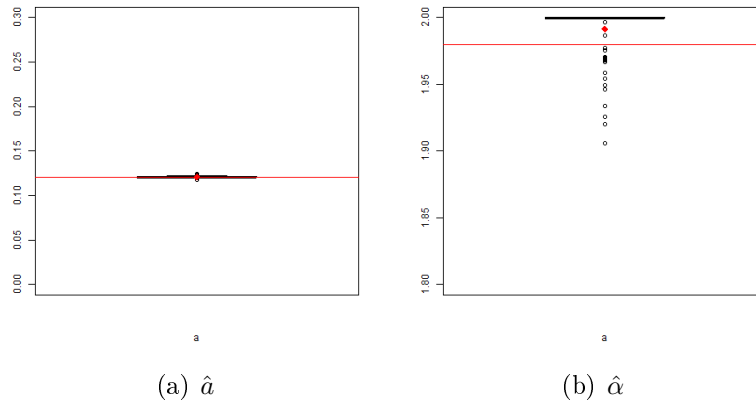


Figura 7.5: Resultados para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$, quando $h = 1$. As linhas vermelhas representam o verdadeiro valor do parâmetro e o ponto vermelho a média amostral.

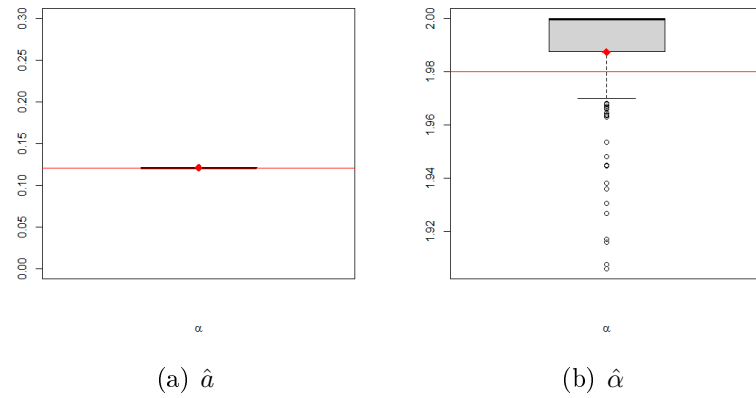


Figura 7.6: Resultados para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$, quando $h = 5.6$. As linhas vermelhas representam o verdadeiro valor do parâmetro e o ponto vermelho a média amostral.

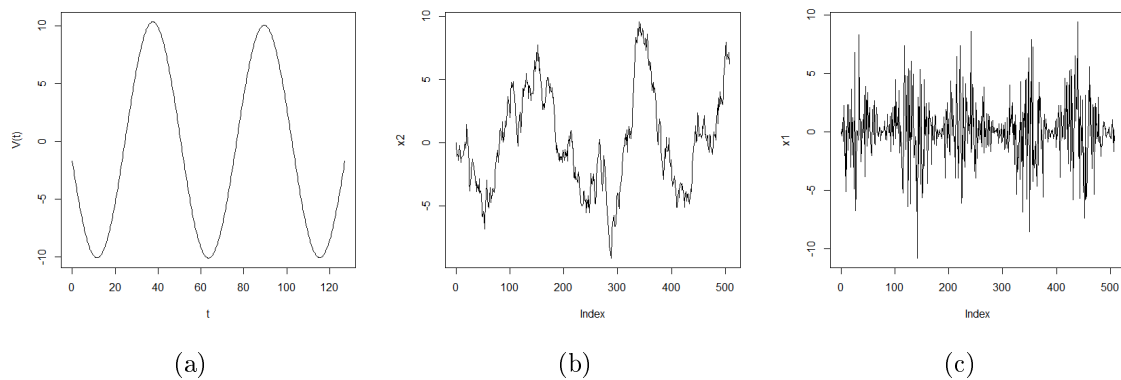


Figura 7.7: Série simulada quando $h = 0.25$ considerando a discretização: (a) proposta na Proposição 2.6; (b) de Euler-Maruyama, dada em (4.3); (c) dada pela expressão da solução do processo em (2.42).

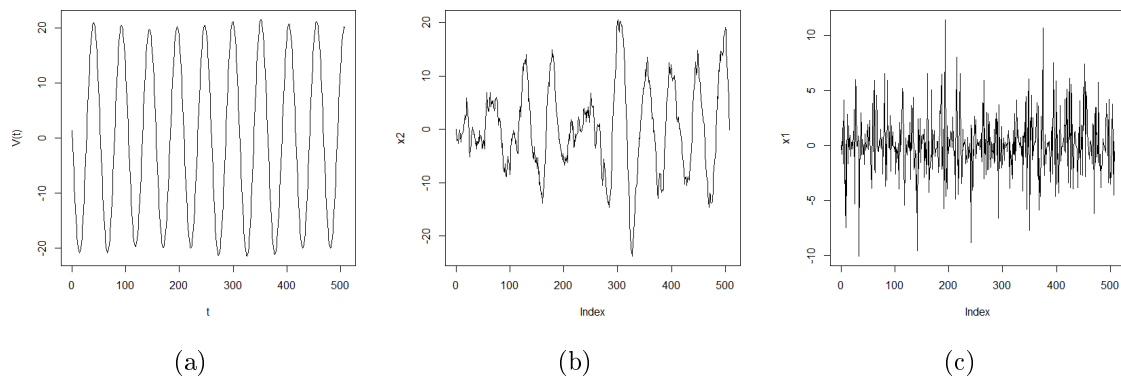


Figura 7.8: Série simulada quando $h = 1$ considerando a discretização: (a) proposta na Proposição 2.6; (b) de Euler-Maruyama, dada em (4.3); (c) dada pela expressão da solução do processo em (2.42).

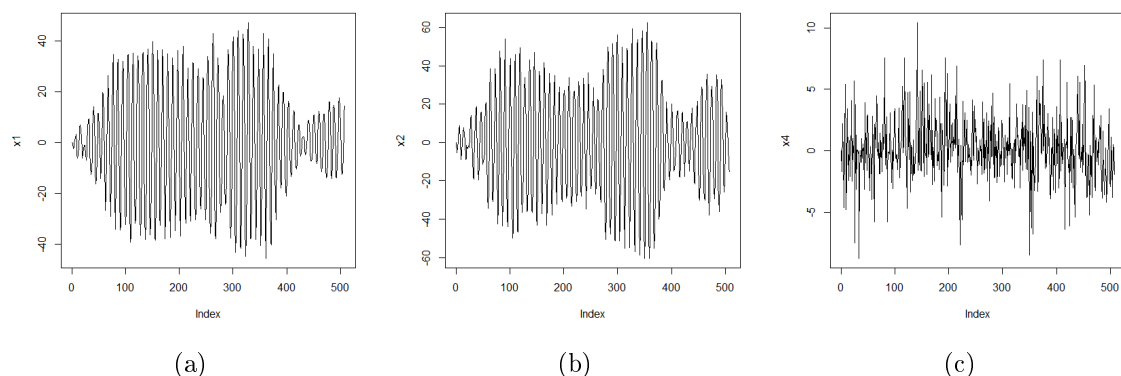


Figura 7.9: Série simulada quando $h = 5.6$ considerando a discretização: (a) proposta na Proposição 2.6; (b) de Euler-Maruyama, dada em (4.3); (c) dada pela expressão da solução do processo em (2.42).

7.2 Preços das Ações da Companhia Apple

Vamos analisar uma série temporal que descreve os preços das ações da companhia Apple. A série temporal considerada possui $n = 481650$ observações, coletadas de minuto a minuto entre 04 de Janeiro de 2010 e 26 de Novembro de 2014. Os horários de negociação são de 9:31 à 16:00, obtendo um total de 390 observações diárias. Na Figura 7.10 apresentamos a série original. Para fazer a análise consideramos os

log-retornos de 1 minuto, definidos como

$$R_t^{(1)} = 100 \times \ln \left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right),$$

onde $t \in \{1, \dots, n-1\}$ e Y_t são os preços observados da série temporal. Na Figura 7.11 apresentamos a série dos log-retornos de 1 minuto.

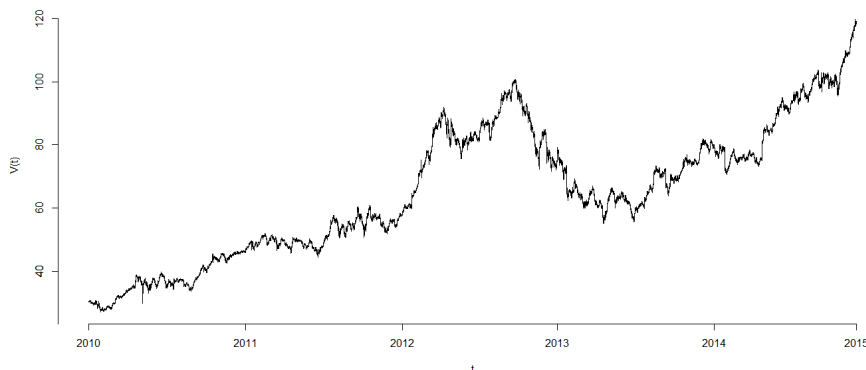


Figura 7.10: Série temporal real com os preços das ações da companhia Apple, de 04 de Janeiro de 2010 à 26 de Novembro de 2014.

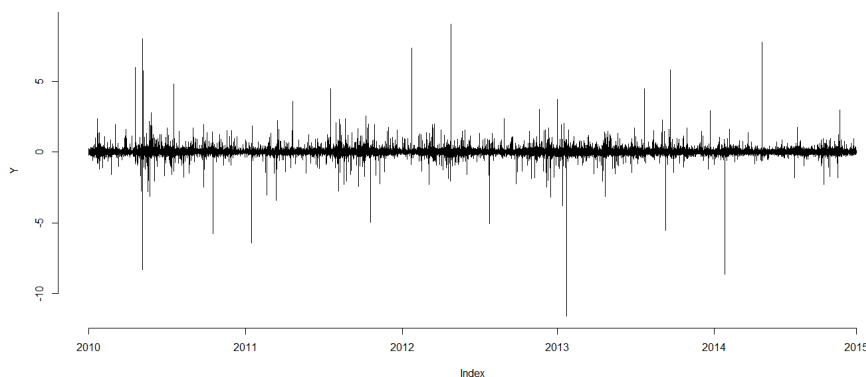


Figura 7.11: Série temporal dos log-retornos de 1 minuto dos preços das ações da companhia Apple, de 04 de Janeiro de 2010 à 26 de Novembro de 2014.

Consideramos o tamanho da discretização $h = \frac{1}{390}$, pois temos 390 observações diárias. Além disso, agregamos os log-retornos de 1 minuto para obter log-retornos de 5 minutos e log-retornos de 15 minutos. Os log-retornos de 5 minutos são dados por $R_t^{(5)} = R_{5t-4}^{(1)} + R_{5t-3}^{(1)} + \dots + R_{5t}^{(1)}$, para $t \in \{1, \dots, 96329\}$, neste caso, consideramos $h = \frac{5}{390}$ (ver Figura 7.12). Os log-retornos de 15 minutos são dados por

$R_t^{(15)} = R_{15t-14}^{(1)} + R_{15t-13}^{(1)} + \dots + R_{15t}^{(1)}$, para $t \in \{1, \dots, 32109\}$, neste caso, consideramos $h = \frac{15}{390}$ (ver Figura 7.13). As Figuras 7.14-7.16 apresentam a codiferença empírica dos log-retornos de 1, 5 e 15 minutos, considerando $s \in \{1, 0.1, 0.01\}$.

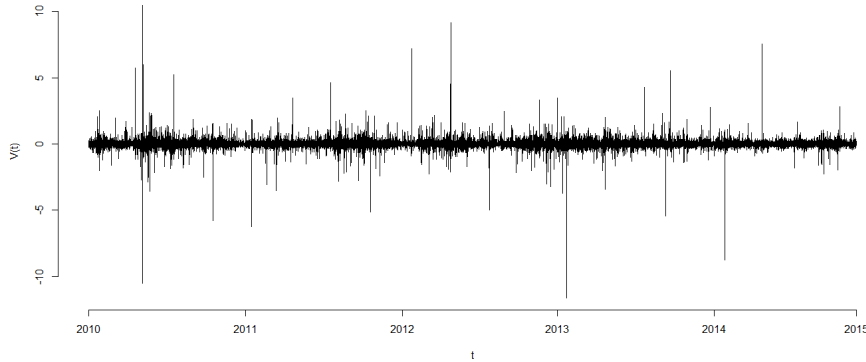


Figura 7.12: Série temporal dos log-retornos de 5 minutos dos preços das ações da companhia Apple, de 04 de Janeiro de 2010 à 26 de Novembro de 2014.

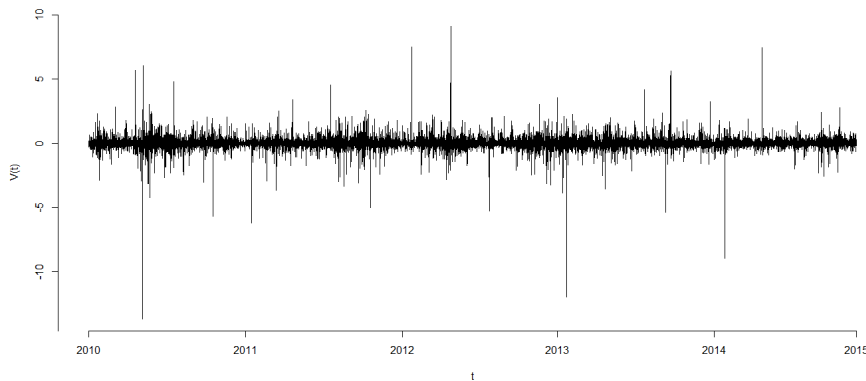


Figura 7.13: Série temporal dos log-retornos de 15 minutos dos preços das ações da companhia Apple, de 04 de Janeiro de 2010 à 26 de Novembro de 2014.

Modelamos a série utilizando o processo Cosseno, dado no Exemplo 2.2. Utilizando as séries dos log-retornos $R_t^{(1)}$, $R_t^{(5)}$ e $R_t^{(15)}$, aplicamos o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros. Na Tabela 7.3 apresentamos os resultados da estimação considerando $h \in \{\frac{1}{390}, \frac{5}{390}, \frac{15}{390}\}$. A Figura 7.17 apresenta os resíduos obtidos com os resultados da estimação, para as três séries de log-retornos consideradas. Podemos perceber que o processo Cosseno não conseguiu captar todas as características da série temporal, pois ainda há picos de volatilidade nas séries dos resíduos. É necessário maior estudo para aprimorar essa análise.

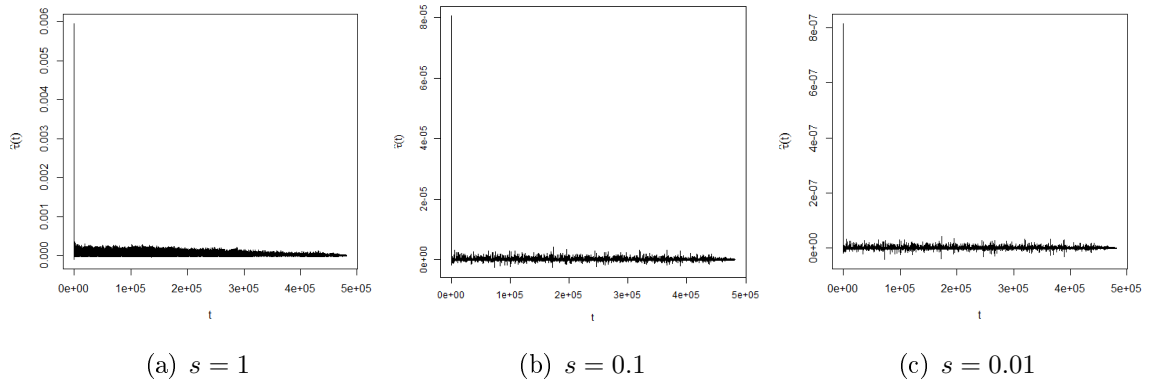


Figura 7.14: Codiferença empírica da série temporal dos log-retornos de 1 minuto, considerando $s \in \{1, 0.1, 0.01\}$.

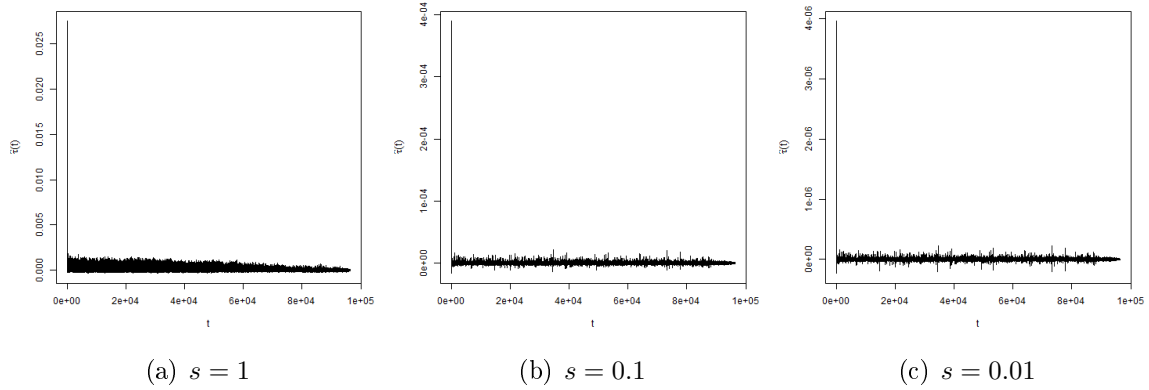


Figura 7.15: Codiferença empírica da série temporal dos log-retornos de 5 minutos, considerando $s \in \{1, 0.1, 0.01\}$.

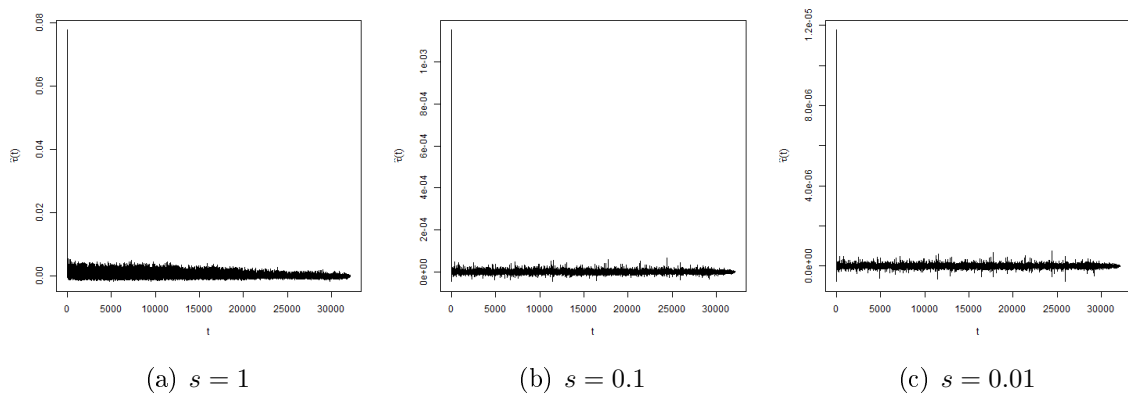
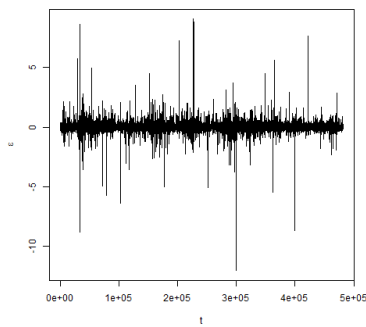


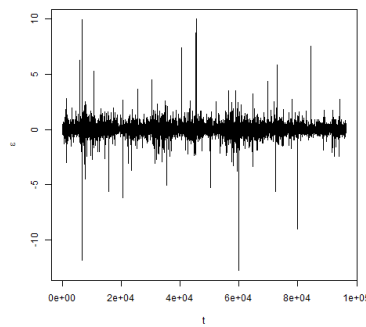
Figura 7.16: Codiferença empírica da série temporal dos log-retornos de 15 minutos, considerando $s \in \{1, 0.1, 0.01\}$.

Tabela 7.3: Estimação de máxima verossimilhança, utilizando as séries dos log-retornos $R_t^{(1)}$, $R_t^{(5)}$ e $R_t^{(15)}$, com $h \in \{\frac{1}{390}, \frac{5}{390}, \frac{15}{390}\}$, respectivamente.

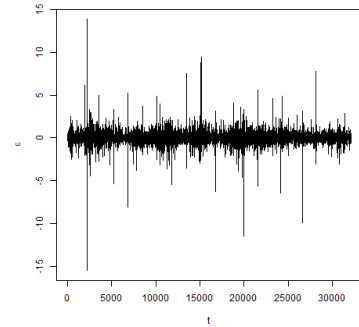
\hat{a}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
$R_t^{(1)}; h = \frac{1}{390} = 0.0026$		
632.5659	1.5132	0.0472
$R_t^{(5)}; h = \frac{5}{390} = 0.0128$		
124.6056	1.4661	0.1010
$R_t^{(15)}; h = \frac{15}{390} = 0.0385$		
36.6624	1.4304	0.1959



(a) $R_t^{(1)}$ e $h = 0.0026$



(b) $R_t^{(5)}$ e $h = 0.0128$



(c) $R_t^{(15)}$ e $h = 0.0385$

Figura 7.17: Resíduos para as três séries de log-retornos $R_t^{(1)}$, $R_t^{(5)}$ e $R_t^{(15)}$.

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho abordamos diversos assuntos que são importantes em probabilidade e na análise de séries temporais, tais como processos estocásticos a tempo contínuo, medidas de dependência para processos α -estáveis, estimação de parâmetros, previsão e análise de dados observados. Uma parte dos estudos aqui apresentados resultou no artigo Stein et al. (2015), apresentado no Apêndice E.

Em um primeiro momento introduzimos três medidas de dependência: codiferença, covariância espectral e covariação. Estas medidas foram consideradas para substituir a função de autocovariância, que não está bem definida no caso de processos com segundo momento infinito. Provamos a consistência da codiferença empírica para processos estacionários α -estáveis simétricos, condicionada a condição de que sua função codiferença teórica converge a zero. O processo tipo OU generalizado é introduzido e encontramos as expressões para as suas diversas medidas de dependência. Uma das fragilidades da função codiferença é a dependência do parâmetro adicional s . Por sua vez, a função covariação espectral não apresenta esta desvantagem. Mesmo assim, a estimação das duas pode ser obtida de forma equivalente, se tomarmos s de forma a obter o mesmo intervalo no eixo das ordenadas para as funções codiferença e covariância espectral teóricas. Apenas para o Exemplo 2.2 a covariância espectral empírica melhor aproximou a sua respectiva função teórica.

No Capítulo 3, onde tratamos das propriedades teóricas do processo tipo OU generalizado, obtivemos diversas propriedades interessantes. Ressaltamos as Proposições 3.3 e 3.4, que afirmam que o processo tipo OU generalizado, no caso de ruído movimento Browniano, é estacionário e markoviano se, e somente se, for o processo OU. Também destacamos o Lema 3.1, onde considerando o processo de Lévy como ruído, obtivemos a distribuição da variável aleatória $V(t)$, para cada t fixo, sendo

esta infinitamente divisível.

Ao longo do texto propusemos a utilização de diversos métodos de estimação e realizamos um extenso estudo de resultados obtidos através de simulações. No processo OU apresentamos a estimação de máxima verossimilhança, mínimos quadrados e metodologia Bayesiana. A estimação do parâmetro θ foi muito precisa em todos métodos estudados. Ressaltamos que a metodologia Bayesiana determinou intervalos de credibilidade de tamanho pequeno, contendo o verdadeiro valor do parâmetro θ . Para a estimação dos parâmetros da distribuição α -estável, a estimação de máxima verossimilhança apresentou resultados satisfatórios. A pior situação ocorreu quando $\alpha = 1.1$, onde a média se afastou ligeiramente do verdadeiro valor do parâmetro. Mas sabemos da dificuldade na estimação, quando α está próximo da região $(0, 1)$, onde os dois primeiros momentos são infinitos. A metodologia Bayesiana apresentou problemas mais graves no momento de estimar os parâmetros da distribuição α -estável, pois além de superestimar a média dos parâmetros, não incluiu os verdadeiros valores nos intervalos de credibilidade. Acreditamos que precisamos de mais estudos para aprimorar essa técnica.

No processo Cosseno, além dos métodos de estimação descritos no parágrafo anterior, propomos um método iterativo para aprimorar a estimação de máxima verossimilhança. Utilizamos duas discretizações diferentes para implementar a estimação por mínimos quadrados: a discretização de Euler-Maruyama e uma nova discretização que é proposta no presente trabalho. A estimação utilizando a discretização de Euler-Maruyama apresentou altos valores para vício e variância, especialmente quando o valor do parâmetro a aumentou. Por outro lado, a estimação baseada na discretização proposta na Proposição 2.6 foi muito precisa. Assim, percebemos que a forma usada para discretizar o processo pode influenciar na estimação dos seus parâmetros. O método iterativo via máxima verossimilhança aprimorou a estimação do parâmetro α , quando aumentamos o tamanho amostral. A metodologia Bayesiana novamente apresentou dificuldades na estimação dos parâmetros da distribuição α -estável. No entanto, foi extremamente precisa para estimar o parâmetro a .

Para realizar a previsão, consideramos dois preditores lineares para processos estacionários α -estáveis. O preditor que minimiza o erro de dispersão, proposto em Cline e Brockwell (1985), e o preditor baseado na covariação, proposto em Mohammadi e Mohammadpour (2009). Entre todos processos estudados, apenas o processo OU é estacionário. Dessa forma, aplicamos os preditores para este processo. Observamos que a previsão baseada na dispersão e aquela baseada na covariação são

análogas no caso $h = 1$, ou seja, quando o passo da discretização é igual a um. Para valores pequenos de h , o preditor fundamentado na covariação melhora seu desempenho, obtendo assim valores pequenos para os erros e estatísticas de previsão.

Por fim, realizamos aplicações a dados observados. Consideramos uma série temporal que descreve a mortalidade por doença cardiovascular na cidade de Los Angeles, entre os anos 1970 e 1979. Os dados foram coletados semanalmente. Neste caso, o valor sugerido para h não é pequeno, indicando que processos a tempo contínuo não são adequados para modelar esta série temporal. Mesmo assim, a estimação foi satisfatória. Outra série temporal analisada retrata os preços das ações da companhia Apple, entre os anos 2010 e 2014, com dados coletados a cada minuto. Esta série temporal apresenta pequeno valor para h , o que sugere a utilização de processos a tempo contínuo para sua modelagem. Além disso, encontramos estimativas para o parâmetro α da distribuição α -estável com valores distantes de 2 (caso Gaussiano), o que sinaliza que esta série temporal deve ser melhor modelada por distribuições com caudas mais pesadas do que as de uma distribuição Gaussiana.

Para trabalhos futuros, destacamos os seguintes tópicos: implementar a estimação dos parâmetros do processo descrito no Exemplo 2.3 e no processo com longa dependência, definido na Seção 3.2; aprimorar a metodologia Bayesiana, utilizando funções H-Fox, no caso de ruído Lévy α -estável e estudar e implementar a previsão para processos não estacionários (em particular, para o processo Cosseno).

Bibliografia

- Applebaum, D. (2009). *Lévy processes and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Astrauskas, A. (1983). “Limit Theorems for Sums of Linearly Generated Random Variables”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **23**(2), 127-134.
- Astrauskas, A., Lévy, J.B. e Taqqu, M.S. (1991). “The Asymptotic Dependence Structure of the Linear Fractional Lévy Motion”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **31**(1), 1-19.
- Barndorff-Nielsen, O.E. e Shephard, N. (2002). “Econometric Analysis of Realized Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models”. *J. R. Statist. Soc. B*, Vol. **64**, 253-280.
- Braaksma, B.L.J. (1964). “Asymptotic Expansions and Analytic Continuations for a Class of Barnes Integrals”. *Compositio Mathematica*, Vol. **15**, 239-341.
- Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer.
- Buckle, D.J. (1995). “Bayesian Inference for Stable Distributions”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **90**(430), 605-613.
- Cline, D.B.H. e Brockwell, P.J. (1985). “Linear Prediction of ARMA Processes with Infinite Variance”. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **19**(2), 281-296.
- Dahlhaus, R. (1997). “Fitting Time Series Models to Nonstationary Processes”. *The Annals of Statistics*, Vol. **25**(1), 1-37.
- Damarackas, J. e Paulauskas, V. (2014). “Properties of Spectral Covariance for Linear Processes with Infinite Variance”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **54**(3), 252-276.

- Dance, C. e Kuruoglu, E. (1999). “Estimation of the Parameters of Skewed Alpha-Stable Distributions”. *Proceedings of Applications of Heavy-Tailed Distributions in Finance and Engineering*.
- Davis, R. e Resnick, S. (1986). “Limit Theory for the Sample Covariance and Correlation Functions of Moving Averages.” *Annals of Statistics*, Vol. **14**(2), 533-558.
- Durrett, R. (2005). *Probability: Theory and examples*. Belmont: Thompson.
- Fleming, C.H., Calabrese, J.M., Mueller, M., Olson, K.A., Leimgruber, P. e Fagan, W.F. (2014). “Non-Markovian Maximum Likelihood Estimation of Autocorrelated Movement Processes”. *Methods in Ecology and Evolution*, Vol. **5**, 462-472.
- Gelfand, A.E. e Smith, A.F.M. (1990). “Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **85**(410), 398-409.
- Geweke, J. (1992). “Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments”, em Bernardo, J.M., Berger, J.O., Dawid, A.P. e Smith, A.F.M. (eds.). *Bayesian Statistics 4*. New York: Oxford University.
- Gordon, D., Krishnamurthy, V. e Chung, S. (2009). “Generalized Langevin Models of Molecular Dynamics Simulations with Applications to Ion Channels”. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. **131**(13).
- Gross, A. (1994). “Some Mixing Conditions for Stationary Symmetric Stable Stochastic Processes”. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **51**(2), 277-295.
- Heidelberger, P. e Welch, P.D. (1981). “A Spectral Method for Confidence Interval Generation and Run Length Control in Simulations”. *Communications of the ACM*, Vol. **24**(4), 233-245.
- Heppe, B.M.O. (1998). “Generalized Langevin Equation for Relative Turbulent Dispersion”. *J. Fluid Mech.*, Vol. **357**, 167-198.
- Higham, D.J. (2001). “An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations”. *SIAM Rev.*, Vol. **43**(3), 525-546.

- Jacod, J., Kurtz, T.G., Méléard, S. e Protter, P. (2005). “The Approximate Euler Method for Lévy Driven Stochastic Differential Equations”. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, Vol. **41**(3), 523-558.
- Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability*. New York: Springer.
- Kannan, D. (1977). “On the Generalized Langevin equation”. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **11**(1), 1-24.
- Kannappan, P. (2009). *Functional Equations and Inequalities with Applications*. New York: Springer.
- Karatzas, I. e Shreve, S.E. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer.
- Klebaner, F.C. (2005). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. London: Imperial College Press.
- Kleppe, T.S. (2006). *Numerical Path Integration for Lévy Driven Stochastic Differential Equations*. Master thesis. Norwegian University of Science and Technology: Department of Mathematical Sciences.
- Kodia, B. e Garel, B. (2014). “Estimation and Comparison of Signed Symmetric Covariation Coefficient and Generalized Association Parameter for Alpha-Stable Dependence Modeling”. *Communication in Statistics, Theory and Methods*, Vol. **43**(24), 5156-5174.
- Kokoszka, P.S. e Taqqu, M.S. (1994). “Infinite Variance Stable ARMA Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(2), 203-220.
- Kokoszka, P.S. e Taqqu, M.S. (1995). “Fractional ARIMA with Stable Innovations”. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **60**, 19-47.
- Koutrouvelis, I.A. (1980). “Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **75**(372), 918-928.
- Kubo, R. (1966). “The Fluctuation-Dissipation Theorem”. *Rep. Prog. Phys.*, Vol. **29**, 255-284.
- Kyprianou, A.E. (2014). *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Berlin: Springer.

- Langevin, P. (1908). “On the Theory of Brownian Motion (Sur la Théorie du Mouvement Brownien)”. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **146**, 530-533.
- Lin, Z. e Bai, Z. (2010). *Probability Inequalities*. Beijing: Science Press.
- Lopes, S.R.C. e Mendes, B.V.M. (2006). “Bandwidth Selection in Classical and Robust Estimation of Long Memory”. *International Journal of Statistics and Systems*, Vol. **1**(2), 177-200.
- Lukacs, E. (1975). *Stochastic Convergence*, Academic Press.
- Ma, X. e Nikias, C.L. (1995). “Parameter Estimation and Blind Channel Identification in Impulsive Signal Environments”. *Signal Processing, IEEE Transactions*, Vol. **43**(12), 2884-2897.
- Masuda, H. (2004). “On Multidimensional Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by a General Lévy Process.” *Bernoulli*, Vol. **10**(1), 97-120.
- Mathai, A.M., Saxena, R.K. e Haubold, H.J. (2010). *The H-Function: Theory and Applications*. New York: Springer.
- McCulloch, J.H. (1986). “Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters”. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, Vol. **15**(4), 1109-1136.
- Medino, A.V., Lopes, S.R.C., Morgado, R. e Dorea, C.C.Y. (2012). “Generalized Langevin Equation Driven by Lévy Processes: A Probabilistic, Numerical and Time Series Based Approach”. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, Vol. **391**, 572-581.
- Mei, D.C., Xie, C.W. e Zhang, L. (2004). “The Stationary Properties and the State Transition of the Tumor Cell Growth Mode”. *The European Physical Journal B*, Vol. **41**, 107-112.
- Mingarelli, A.B. (1983). “Volterra-Stieltjes Integral Equations and Generalized Ordinary Differential Expressions”. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **989**. Springer-Verlag.
- Mohammadi, M. e Mohammadpour, A. (2009). “Best Linear Prediction for α -Stable Random Processes.” *Statistics and Probability Letters*, Vol. **79**(21), 2266-2272.
- Mori, H. (1965a). “Transport, Collective Motion, and Brownian Motion”. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. **33**(3), 423-455.

- Mori, H. (1965b). “A Continued-Fraction Representation of the Time-Correlation Functions”. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. **34**(3), 399-416.
- Nolan, J.P. (2010). *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhäuser.
- Nowicka, J. (1997). “Asymptotic Behavior of the Covariation and the Codifference for Arma Models with Stable Innovations”. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, Vol. **13**(4), 673-685.
- Palma, W., Olea, R. e Ferreira, G. (2013). “Estimation and Forecasting of Locally Stationary Processes.” *Journal of Forecasting*, Vol. **32**(1), 86-96.
- Papapantoleon, A. (2008). “An Introduction to Lévy Processes with Applications in Finance”. arXiv:0804.0482v2 [q-fin.PR].
- Paulauskas, V.J. (1976). “Some Remarks on Multivariate Stable Distributions”. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. **6**(3), 356-368.
- Phillips, P.C.B. e Yu, J. (2007). “Maximum Likelihood and Gaussian Estimation of Continuous Time Models in Finance”. *Cowles Foundation Discussion Papers 1597*, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
- Plummer, M. (2003). “JAGS: a Program for Analysis of Bayesian Graphical Models using Gibbs Sampling”. *Proceedings of the 3rd International Workshop on Distributed Statistical Computing - (DSC 2003)*, Vienna.
- Press, S.J. (1972). “Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **67**(340), 842-846.
- Raftery, A.E. e Lewis, S. (1992). “How Many Iterations in the Gibbs sampler?”, em Bernardo, J.M., Berger, J.O., Dawid, A.P. e Smith, A.F.M. (eds.). *Bayesian Statistics 4*. Oxford: Clarendon Press.
- Rosadi, D. e Deistler, M. (2009). “Estimating the Codifference Function of Linear Time Series Models with Infinite Variance”. *Metrika*, Vol. **73**, 395-429.
- Rosinski, J. e Woyczynski, W.A. (1986). “On Itô Stochastic Integration with Respect to p-Stable Motion: Inner Clock, Integrability of Sample Paths, Double and Multiple Integrals.” *Annals of Probability*, Vol. **14**(1), 271-286.
- Rousseeuw, P.J. (1984). “Least Median of Squares Regression”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **79**(388), 871-880.

- Rousseeuw, P.J. e Yohai, V.J. (1984). “Robust Regression by Means of S-Estimators”, em Franke, J., Hardle, W., e Martin, D. (eds.), *Robust and Nonlinear Time Series. Lecture Notes in Statistics*, Vol. **26**, Berlin: Springer-Verlag, 256-272.
- Samorodnitsky, G. e Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York: Chapman & Hall.
- Santos, F.F.T. (2014). *Classes de Soluções para a Equação de Langevin Generalizada*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Brasília, Brasília.
- Sato, K.I. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Shumway, R.H. e Stoffer, D.S. (2011). *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. New York: Springer-Verlag.
- Stein, J., Lopes, S.R.C. e Medino, A.V. (2015). “Continuous Processes Derived from the Solution of Generalized Langevin Equation: Theoretical Properties and Estimation”. Aceito para Publicação no Periódico JSCS.
- Yohai, V.J. (1987). “High Breakdown-Point and High Efficiency Robust Estimates for Regression”. *The Annals of Statistics*, Vol. **15**(2), 642-656.
- Zhang, S. e Zhang, X. (2013). “A Least Squares Estimator for Discretely Observed Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by Symmetric α -Stable Motions”. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **65**, 89-103.
- Zill, D.G. e Cullen, M.R. (2001). *Equações Diferenciais*. Vol. 1. São Paulo: Pearson Makron Books.

Apêndice A

Lema que Generaliza o Exemplo 3.1

Neste apêndice apresentamos o lema que generaliza o Exemplo 3.1. Nele provamos que o processo $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, dado na expressão (3.6), com ruído Lévy e $\rho(t) = e^{-\theta t}$, tem distribuição infinitamente divisível para cada t fixo.

Lema A.1. *Seja $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy gerado pela tripla (G, τ, β) . Seja $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ o processo dado em (3.6), com $\rho(t) = e^{-\theta t}$, $\theta > 0$. Suponha que $\tau(\mathbb{R}) < \infty$ e que $V_0 = v_0$ seja determinístico. Então, para todo $t > 0$, a variável aleatória $V(t)$ é infinitamente divisível com tripla geradora $(A_t, \nu_t, \gamma_{t, v_0})$ dada por*

$$\begin{aligned} A_t &= G \int_0^t e^{-2\theta s} ds, \\ \nu_t(B) &= \int_{\mathbb{R}} \tau(dy) \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\theta s} y) ds, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ \gamma_{t, v_0} &= e^{-\theta t} v_0 + \beta \int_0^t e^{-\theta s} ds + \int_{\mathbb{R}} \tau(dy) \int_0^t e^{-\theta s} y [\mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) - \mathbb{I}_D(y)] ds, \end{aligned}$$

onde $D = \{x : |x| \leq 1\}$.

Prova: Para mostrar que $V(t)$ é infinitamente divisível, utiliza-se um argumento análogo ao utilizado no Exemplo 3.1. Vamos mostrar quem é a tripla geradora de $V(t)$, denotada por $(A_t, \nu_t, \gamma_{t, v_0})$.

Utilizando a expressão (3.10), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi(e^{-\theta s} z) ds &= \\ &= \int_0^t \left[-\frac{1}{2} (e^{-\theta s} z)^2 G + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{ie^{-\theta s} zy} - 1 - ie^{-\theta s} zy \mathbb{I}_D(y) \right] \tau(dy) + i\beta e^{-\theta s} z \right] ds \\ &= -\frac{1}{2} G \int_0^t e^{-2\theta s} z^2 ds + i\beta z \int_0^t e^{-\theta s} ds + \tilde{I}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{I} = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \left[e^{ie^{-\theta s} zy} - 1 - ie^{-\theta s} zy \mathbb{I}_D(y) \right] \tau(dy)$. Queremos mostrar que este \tilde{I} pode ser escrito da seguinte forma

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left[e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x) \right] \tilde{\nu}_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \left[\mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) - \mathbb{I}_D(y) \right] \tau(dy),$$

onde

$$\tilde{\nu}_t(B) = \int_{\mathbb{R}} \tau(dy) \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\theta s} y) ds, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (\text{A.1})$$

Note que se mostrarmos a igualdade a seguir,

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (e^{ie^{-\theta s} zy} - 1) \tau(dy) &= \int_{\mathbb{R}} \left[e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x) \right] \tilde{\nu}_t(dx) \\ &\quad + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) \tau(dy), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

obtemos $\tilde{I} = I$, pois basta subtrair o termo $i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zye^{-\theta s} \mathbb{I}_D(y) \tau(dy)$ dos dois lados da igualdade (A.2) e teremos

$$\begin{aligned} &\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} (e^{ie^{-\theta s} zy} - 1) \tau(dy) - i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zye^{-\theta s} \mathbb{I}_D(y) \tau(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x) \right] \tilde{\nu}_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) \tau(dy) \\ &\quad - i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} zye^{-\theta s} \mathbb{I}_D(y) \tau(dy) \Leftrightarrow \tilde{I} = I. \end{aligned}$$

Para mostrar a igualdade (A.2), veja que

$$\tilde{\nu}_t(B) = \begin{cases} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \tau(dy), & \text{se } e^{-\theta s} y \in B, \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Pela expressão (A.3) definimos $\tilde{\nu}_t(dx)$ como sendo

$$\tilde{\nu}_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx. \quad (\text{A.4})$$

Veja que, para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_t(B) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x) \tilde{\nu}_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_B(x) \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Note que podemos aplicar o teorema de Fubini em (A.5), pois a função do integrando é positiva. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_t(B) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x) \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \right) ds \tau(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\theta s} y) ds \tau(dy) = \int_{\mathbb{R}} \tau(dy) \int_0^t \mathbb{I}_B(e^{-\theta s} y) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Observe que a expressão que encontramos em (A.6) é a mesma que em (A.1). Assim, podemos utilizar (A.4). O lado direito da expressão (A.2) pode ser reescrito por

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1 - izx \mathbb{I}_D(x)] \tilde{\nu}_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) \tau(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \tilde{\nu}_t(dx) - i \int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \tilde{\nu}_t(dx) + i \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) \tau(dy) \\ &= A - iB + iC, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \tilde{\nu}_t(dx), \quad B = \int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \tilde{\nu}_t(dx) \quad \text{e} \\ C &= \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) \tau(dy). \end{aligned}$$

Utilizando a expressão (A.4), obtemos

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t [e^{izx} - 1] \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} [e^{izx} - 1] \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [e^{ize^{-\theta s} y} - 1] \tau(dy) ds.
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade aplicamos o teorema de Fubini.

Ainda temos

$$\begin{aligned}
B &= \int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t zx \mathbb{I}_D(x) \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} zx \mathbb{I}_D(x) \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ze^{-\theta s} y \mathbb{I}_D(e^{-\theta s} y) \tau(dy) ds,
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade novamente aplicamos o teorema de Fubini.

Portanto, temos $B = C$, logo $-iB + iC = 0$ e A é igual ao lado esquerdo da expressão (A.2).

Falta mostrar que $\tilde{\nu}$ satisfaz $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \tilde{\nu}(dx) < \infty$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \tilde{\nu}(dx) = \int_{|x| \leq 1} x^2 \tilde{\nu}(dx) + \int_{|x| > 1} \tilde{\nu}(dx).$$

Logo, basta mostrar que $\int_{|x| \leq 1} x^2 \tilde{\nu}(dx) < \infty$ e $\int_{|x| > 1} \tilde{\nu}(dx) < \infty$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x| > 1} \tilde{\nu}(dx) &= \int_{|x| > 1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x| > 1} \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|y| > e^{\theta s}\}} \tau(dy) ds \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|y| > e^{-\theta s}\}} \tau(dy) ds = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \mathbb{I}_{\{|y| > e^{-\theta s}\}} ds \tau(dy) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} t \mathbb{I}_{\{|y| > e^{-\theta t}\}} \tau(dy) = t \int_{|y| > e^{-\theta t}} \tau(dy),
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vale, pois $\int_{|x| > 1} \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \neq 0$, se $x = e^{-\theta s} y$. Logo, $|x| = e^{-\theta s} |y| > 1 \Leftrightarrow |y| > e^{\theta s}$.

Por fim, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 1} x^2 \tilde{\nu}(dx) &= \int_{|x|\leq 1} x^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_{|x|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t x^2 \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) ds \right) \tau(dy) dx \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|x|\leq 1} x^2 \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \right) \tau(dy) ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|y|\leq e^{\theta s}\}} e^{2\theta s} y^2 \tau(dy) ds = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \mathbb{I}_{\{|y|\leq e^{\theta s}\}} e^{2\theta s} y^2 ds \tau(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} y^2 \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{|y|\leq e^{\theta s}\}} e^{2\theta s} ds \right) \tau(dy) \leq \int_{\mathbb{R}} y^2 t \mathbb{I}_{\{|y|\leq e^{\theta t}\}} e^{2\theta t} \tau(dy) \\
&= t e^{2\theta t} \int_{|y|\leq e^{\theta t}} y^2 \tau(dy),
\end{aligned}$$

onde a quarta igualdade vale, pois $\int_{|x|\leq 1} x^2 \mathbb{I}_{\{e^{-\theta s} y\}}(x) dx \neq 0$, se $x = e^{-\theta s} y$. Logo, $|x| = e^{-\theta s} |y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq e^{\theta s}$.

Temos que a medida $\tau(\cdot)$ deve satisfazer $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \tau(dx) < \infty$, isto implica que $\tau(|x| \geq 1) < \infty$. Além disso, $\tau(|x| \leq 1) < \infty$ ou $\tau(A) < \infty$, para todo conjunto boreliano A tal que 0 está no interior de A^c (ver Kyprianou, 2014). Logo, as expressões são finitas, pois

$$t \int_{|y|>e^{-\theta t}} \tau(dy) = t [\tau(|y| > 1) + \tau(|y| \in (e^{-\theta t}, 1))] < \infty$$

e

$$\begin{aligned}
t e^{2\theta t} \int_{|y|\leq e^{\theta t}} y^2 \tau(dy) &= t e^{2\theta t} \left[\int_{|y|\leq 1} y^2 \tau(dy) + \int_{-e^{\theta t}}^{-1} y^2 \tau(dy) + \int_1^{e^{\theta t}} y^2 \tau(dy) \right] \\
&\leq t e^{2\theta t} \left[\int_{|y|\leq 1} y^2 \tau(dy) + e^{2\theta t} \tau(y \in (-e^{\theta t}, -1)) + e^{2\theta t} \tau(y \in (1, e^{\theta t})) \right] \\
&= t e^{2\theta t} \left[\int_{|y|\leq 1} y^2 \tau(dy) + e^{2\theta t} \tau(|y| \in (1, e^{\theta t})) \right] \\
&\leq t e^{2\theta t} \left[\int_{|y|\leq 1} y^2 \tau(dy) + e^{2\theta t} \tau(|y| > 1) \right] < \infty.
\end{aligned}$$

□

Apêndice B

Figuras Adicionais do Processo com Longa Dependência

As Figuras B.1-B.6 apresentam a série temporal gerada, a função codiferença teórica e a função codiferença empírica do processo dado em (3.27). Estas figuras complementam as simulações apresentadas na Seção 3.2.

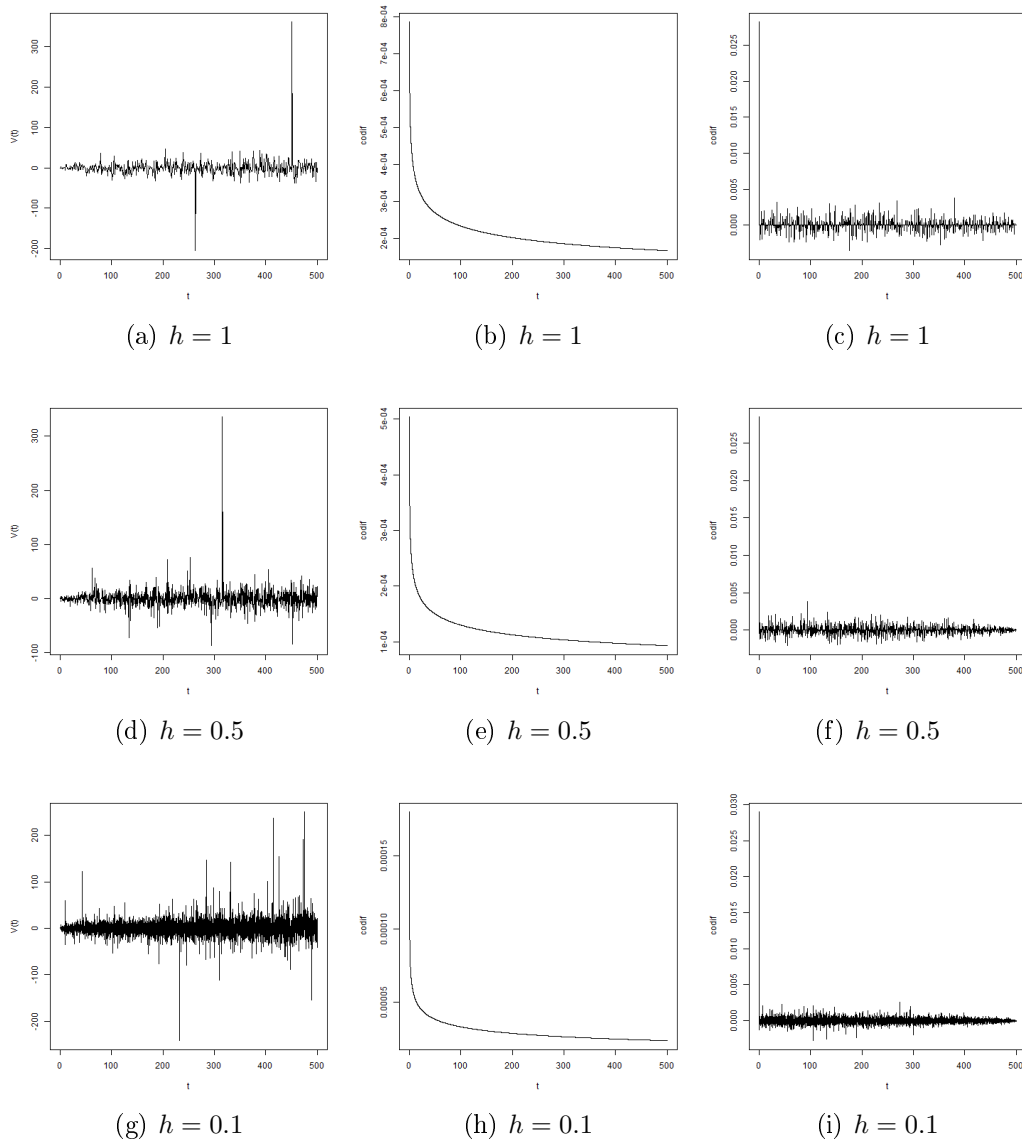


Figura B.1: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 1.8$, $d = 0.2$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

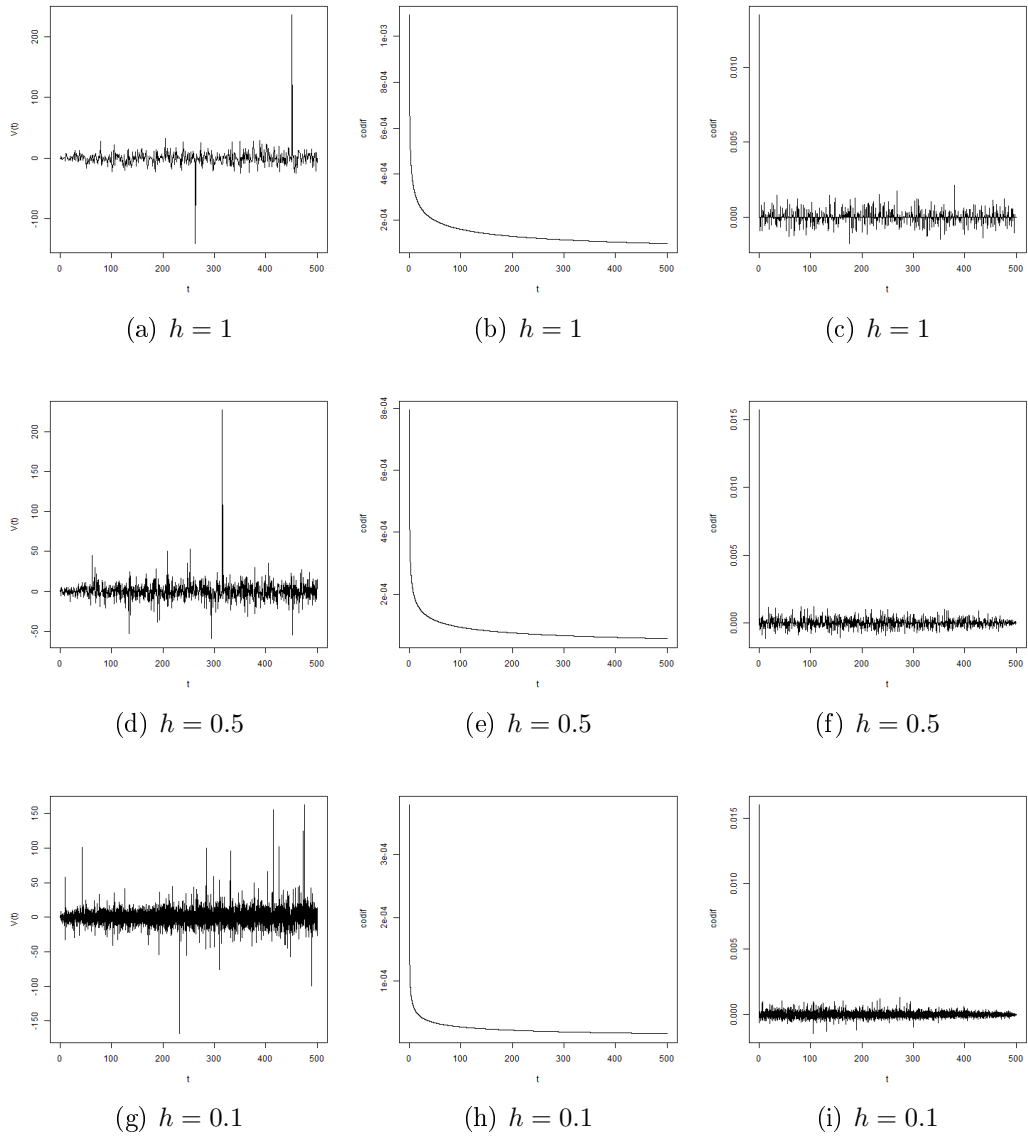


Figura B.2: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 1.8$, $d = 0.3$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

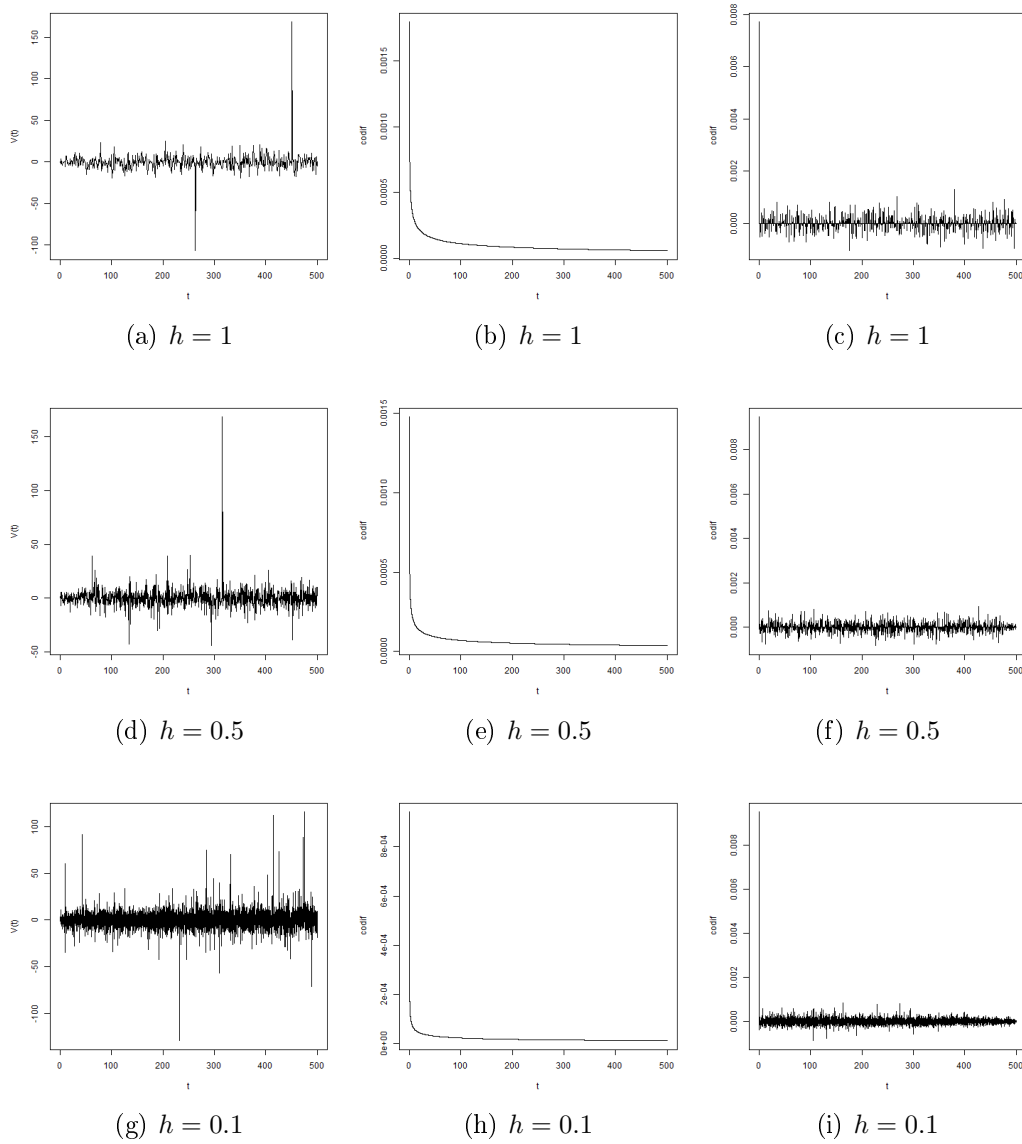


Figura B.3: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 1.8$, $d = 0.4$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

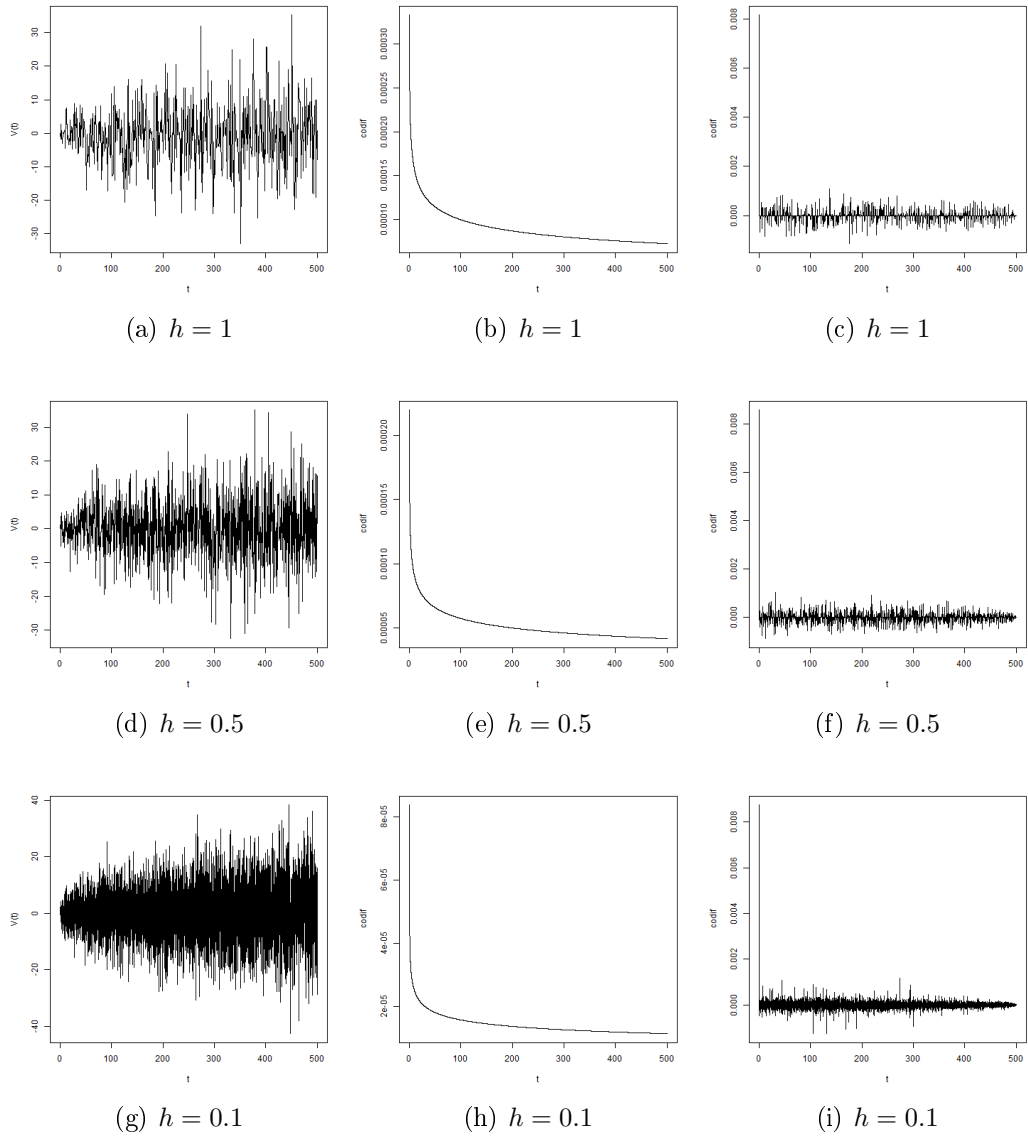


Figura B.4: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 2$, $d = 0.2$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

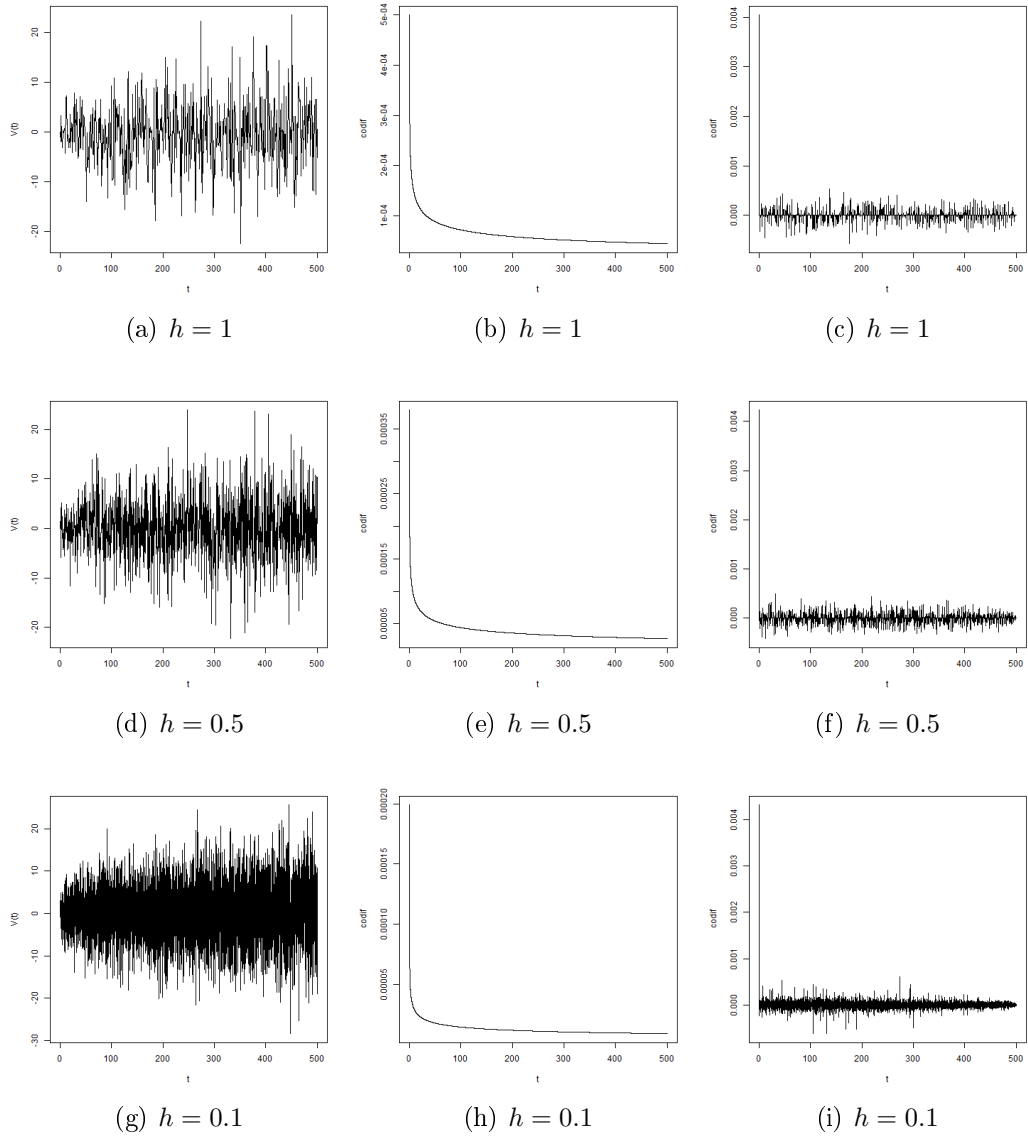


Figura B.5: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 2$, $d = 0.3$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

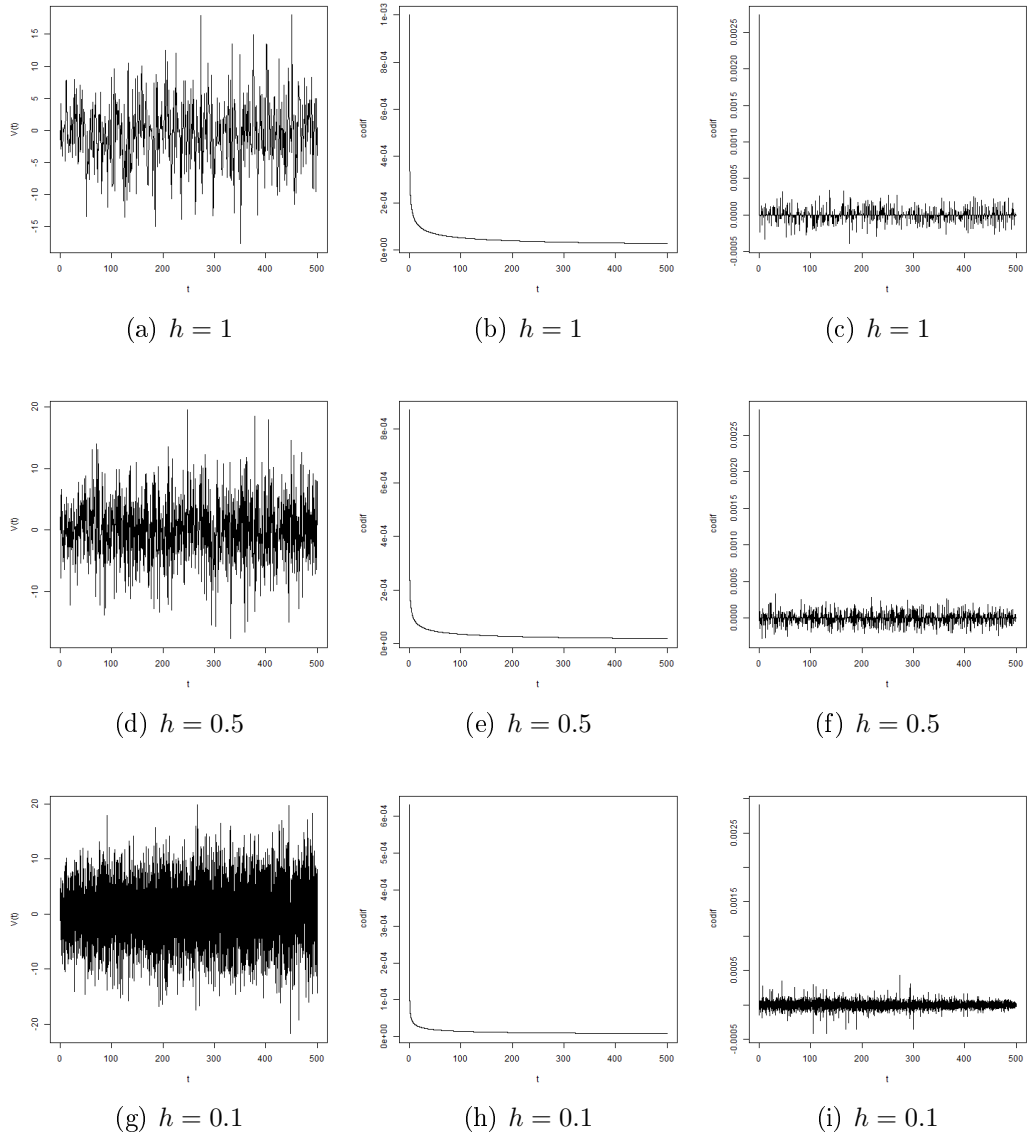


Figura B.6: Série temporal simulada ((a), (d) e (g)), codiferença teórica ((b), (e) e (h)) e empírica ((c), (f) e (i)), quando $\alpha = 2$, $d = 0.4$, $T = 500$ e $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$.

Apêndice C

Estimação Robusta de Mínimos Quadrados para o Processo Cosseno

As Figuras C.1-C.4 apresentam resultados da estimação robusta de mínimos quadrados para o processo Cosseno, utilizando a metodologia proposta na Subseção 4.3.2. No método robusto MM, vamos considerar a janela de Tukey com $c = 1.55$. No método robusto LTS, vamos considerar a soma dos $k = n/2 - 170$ menores quadrados dos resíduos, apenas como teste, pois esse valor não é permitido teoricamente ($k > n/2$).

Não há uma melhora significativa em relação aos resultados apresentados na Subseção 6.2.2 (onde $c = 4.685$ e $k = n/2$). Em alguns casos, os resultados aqui expostos, apresentam média mais próxima do verdadeiro valor do parâmetros e menor variância. Mas, em outros casos, os resultados apresentados na Subseção 6.2.2 são melhores.

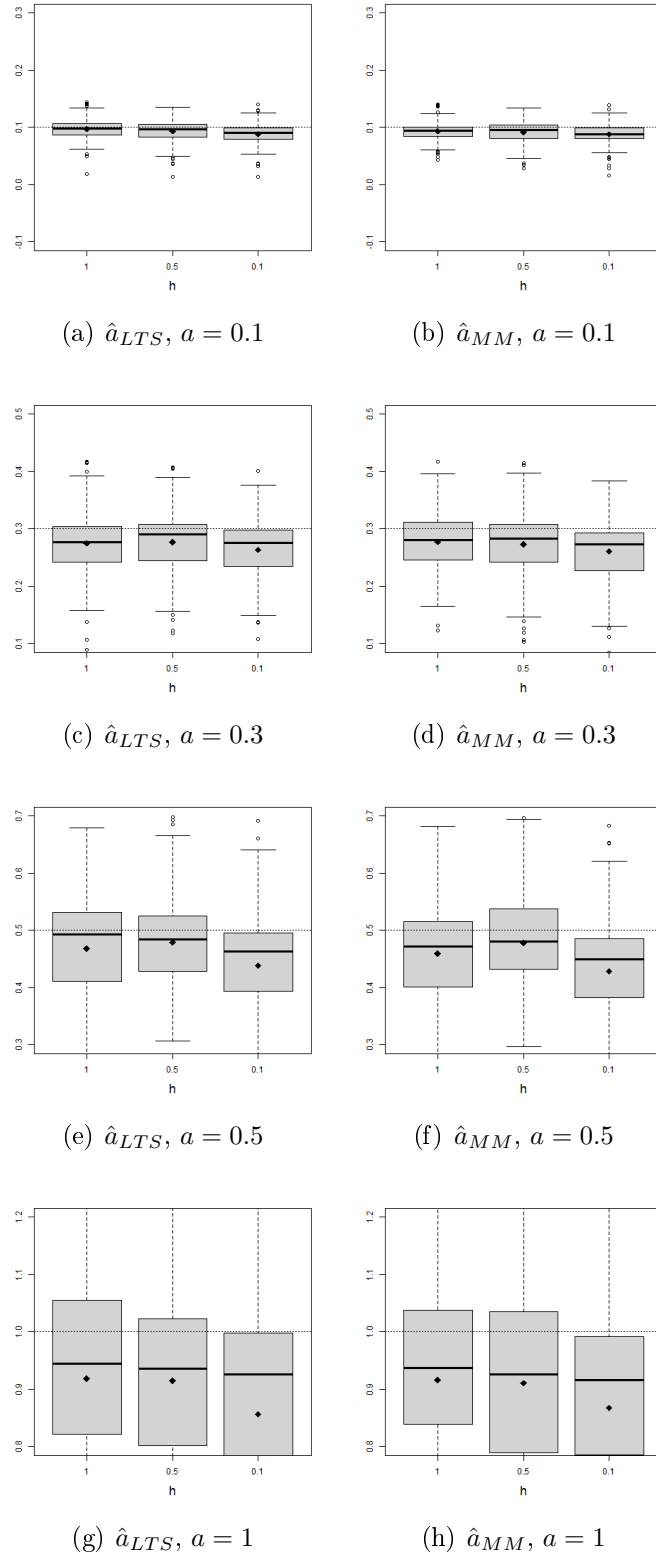


Figura C.1: Estimação robusta de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 1.1$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

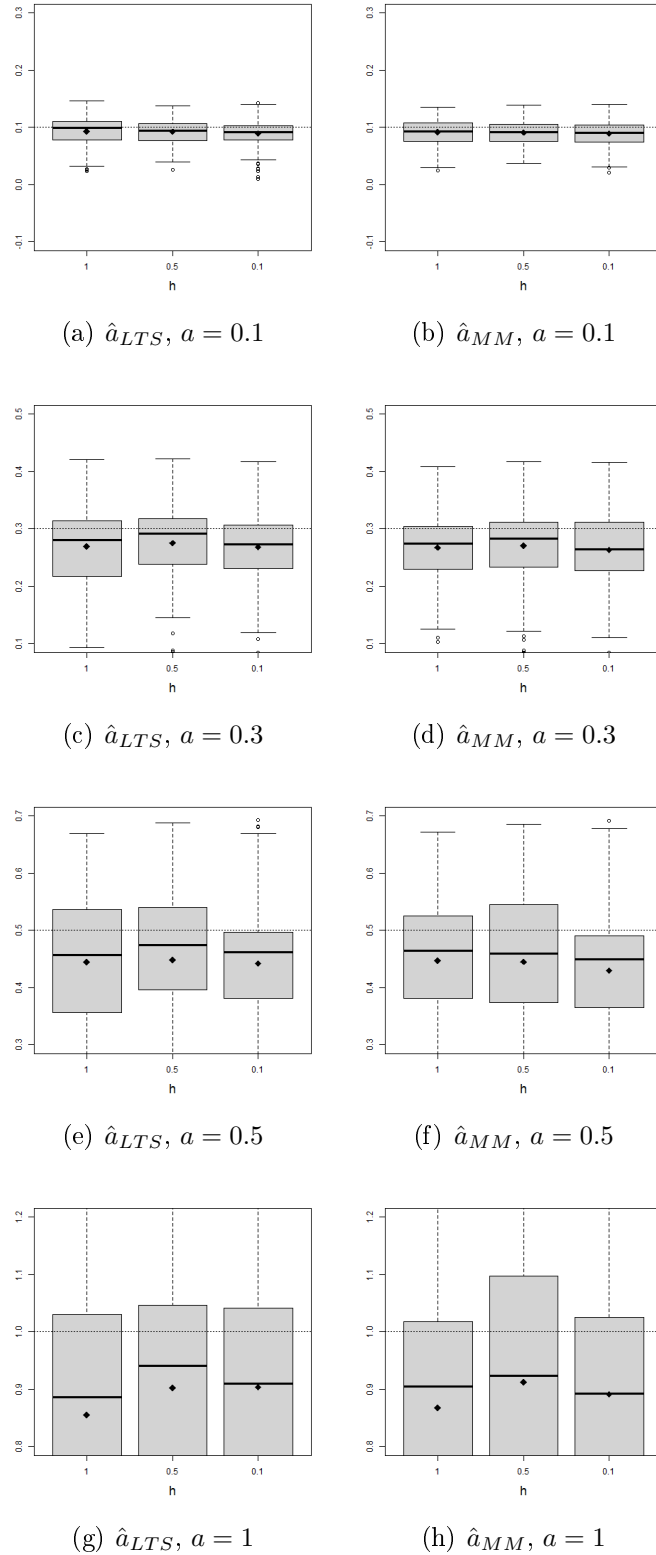


Figura C.2: Estimação robusta de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 1.5$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

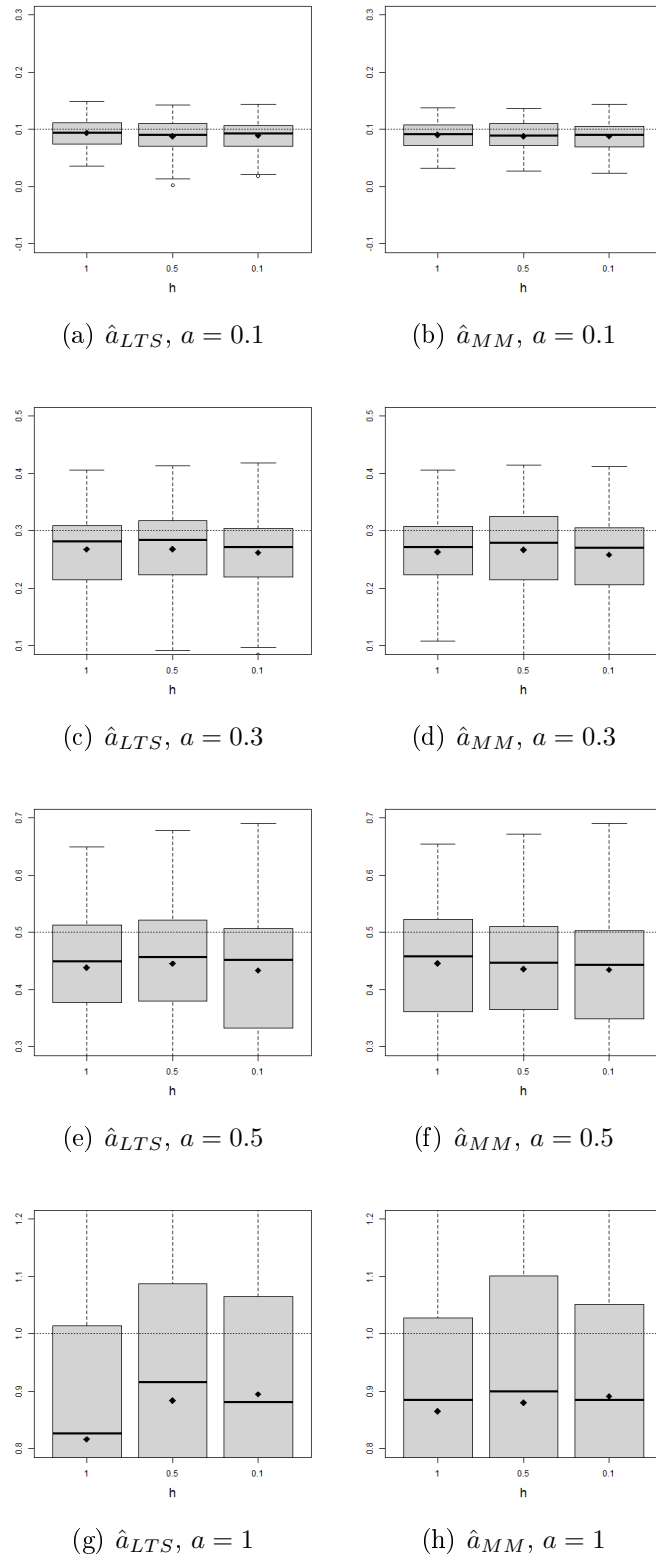


Figura C.3: Estimação robusta de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 1.8$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

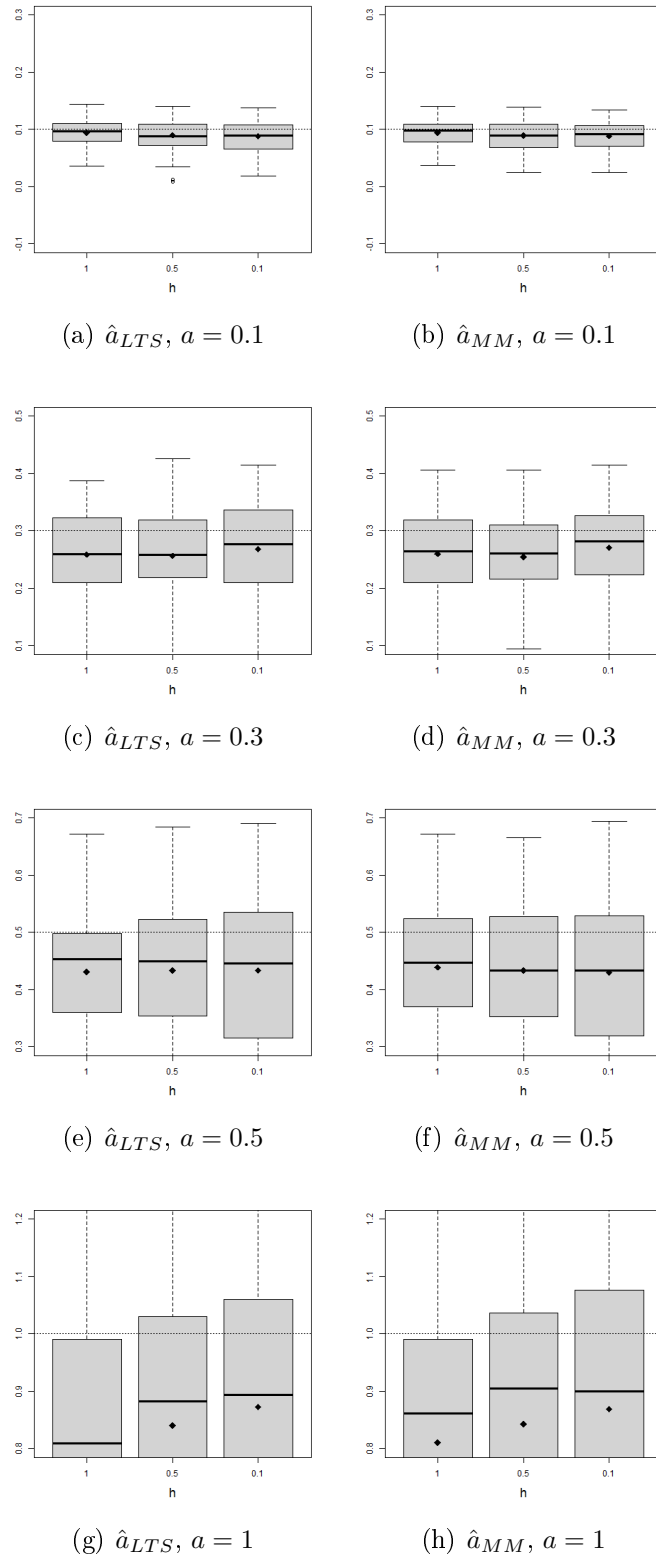


Figura C.4: Estimação robusta de mínimos quadrados no Processo Cosseno considerando discretização de Euler-Maruyama, quando $a \in \{0.1, 0.3, 0.5, 1\}$, $\alpha = 2$, cada gráfico apresenta resultados para $h \in \{1, 0.5, 0.1\}$, $T = 1000$ e $n = T/h$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

Apêndice D

MLE Iterativo para o Processo Cosseno

As Figuras D.1-D.6 apresentam resultados para o procedimento de estimação do processo Cosseno, utilizando o Algoritmo Iterativo 4.1. Essas figuras complementam as simulações apresentadas na Seção 6.3.

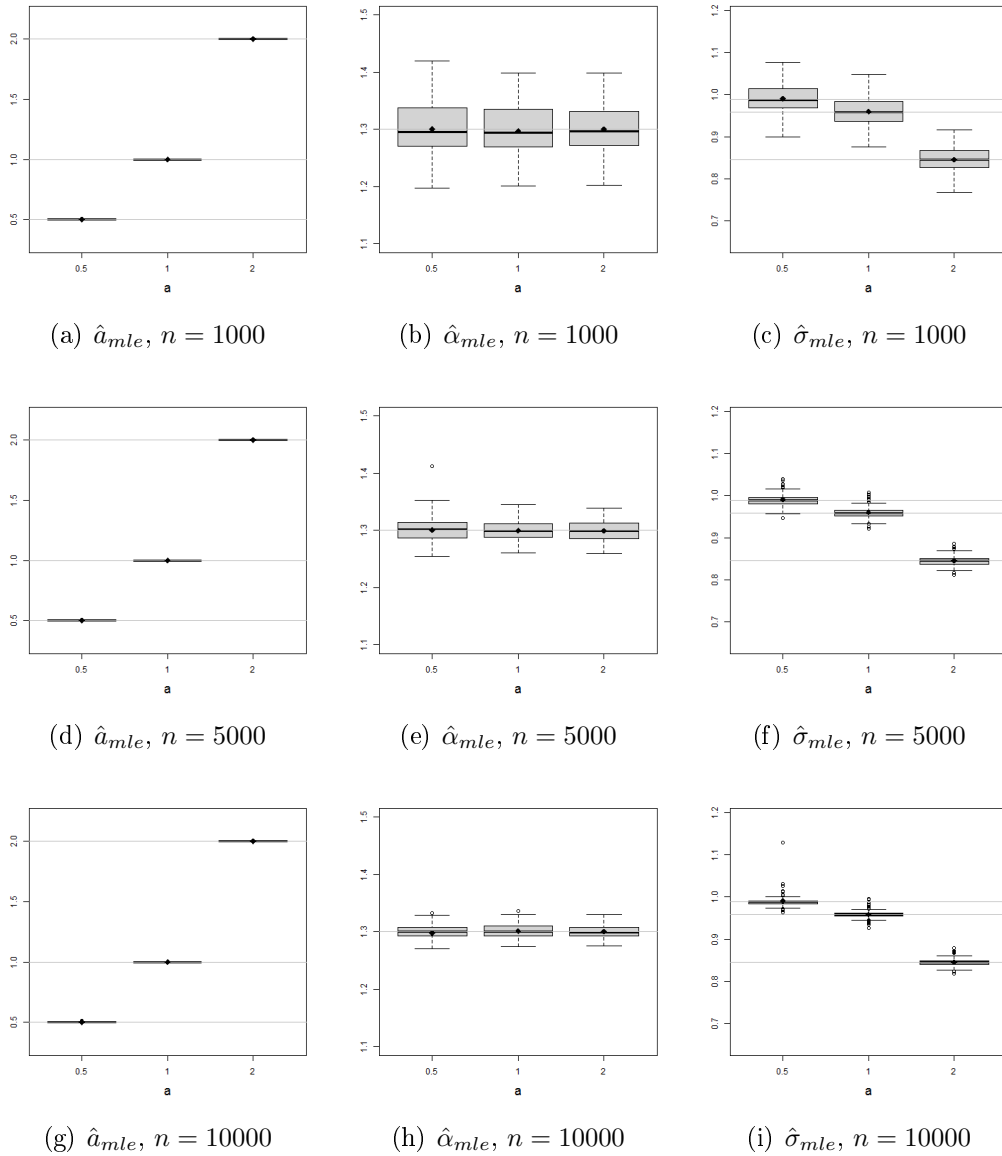


Figura D.1: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.3$, $h = 0.5$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.0361, 0.1377, 0.4558\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

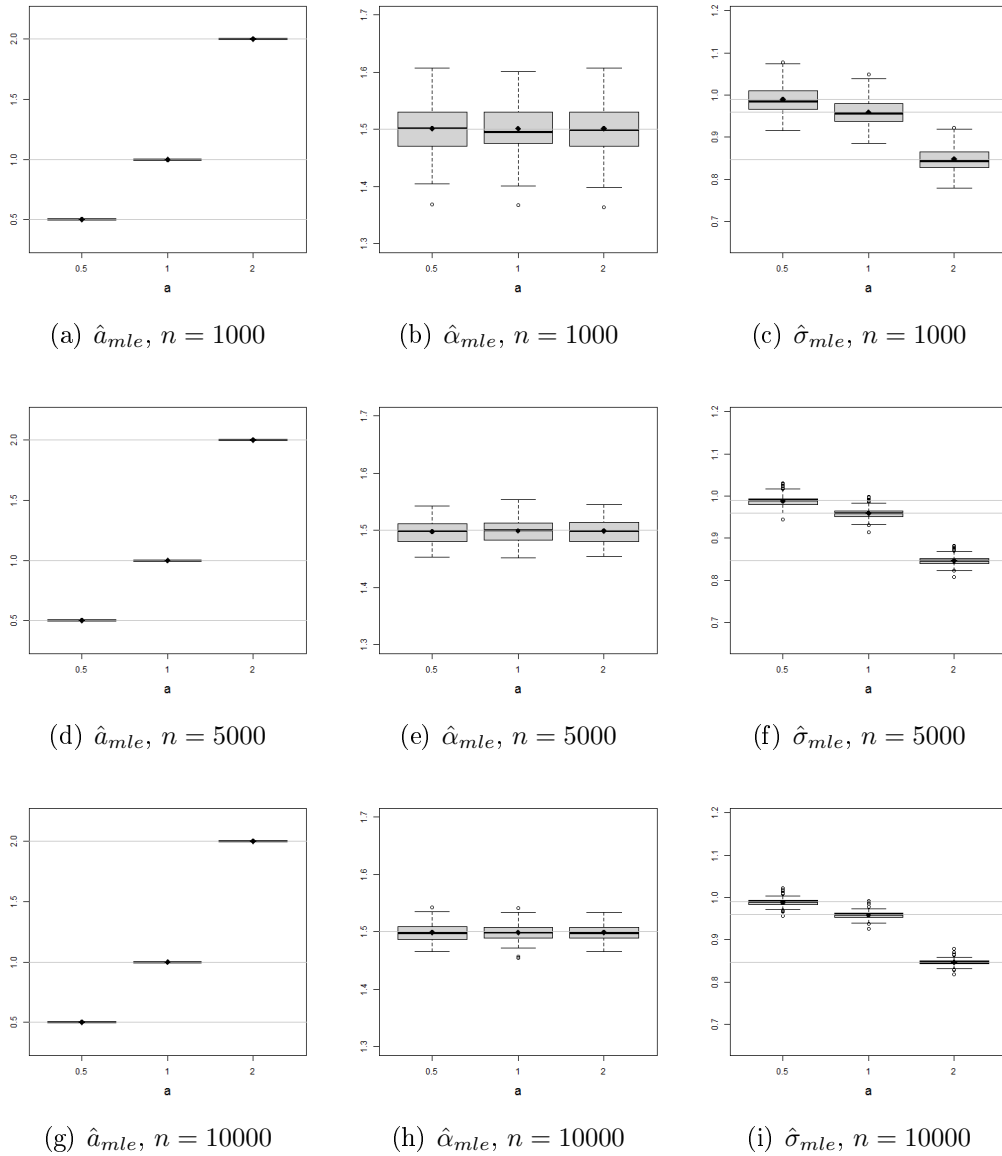


Figura D.2: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.5$, $h = 0.5$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.0387, 0.1479, 0.4907\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

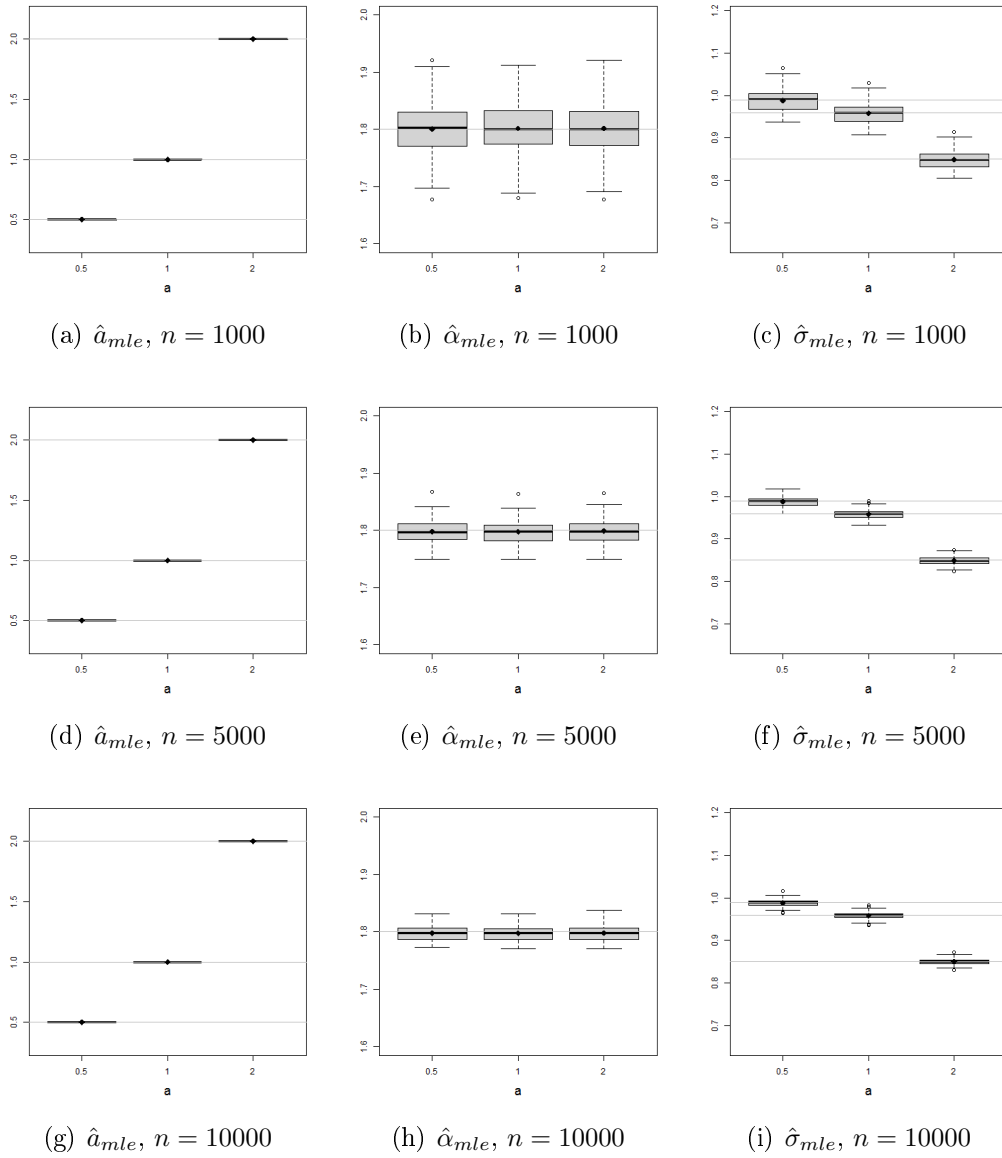


Figura D.3: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.8$, $h = 0.5$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.0418, 0.1598, 0.5321\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

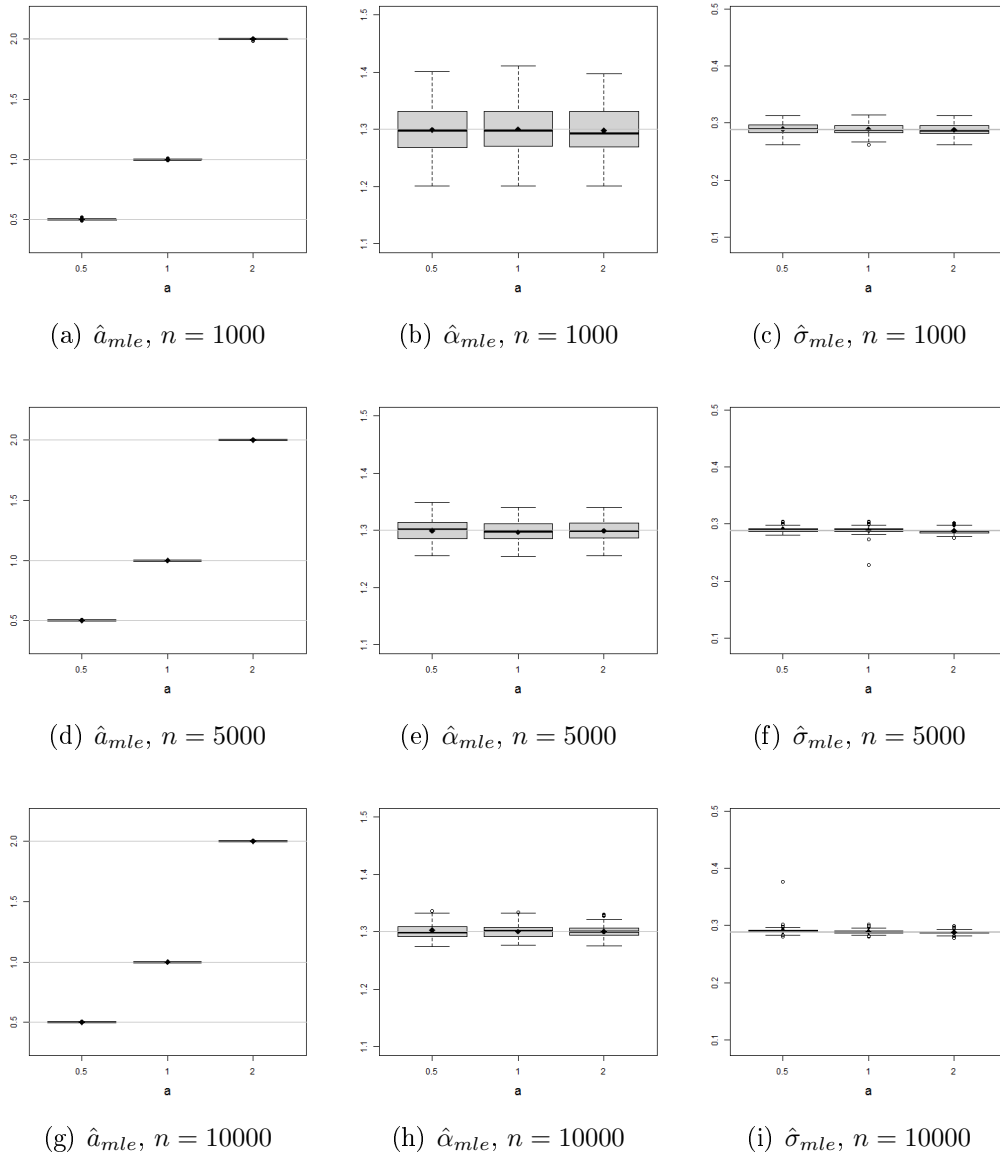


Figura D.4: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.3$, $h = 0.1$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.0004, 0.0016, 0.0067\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

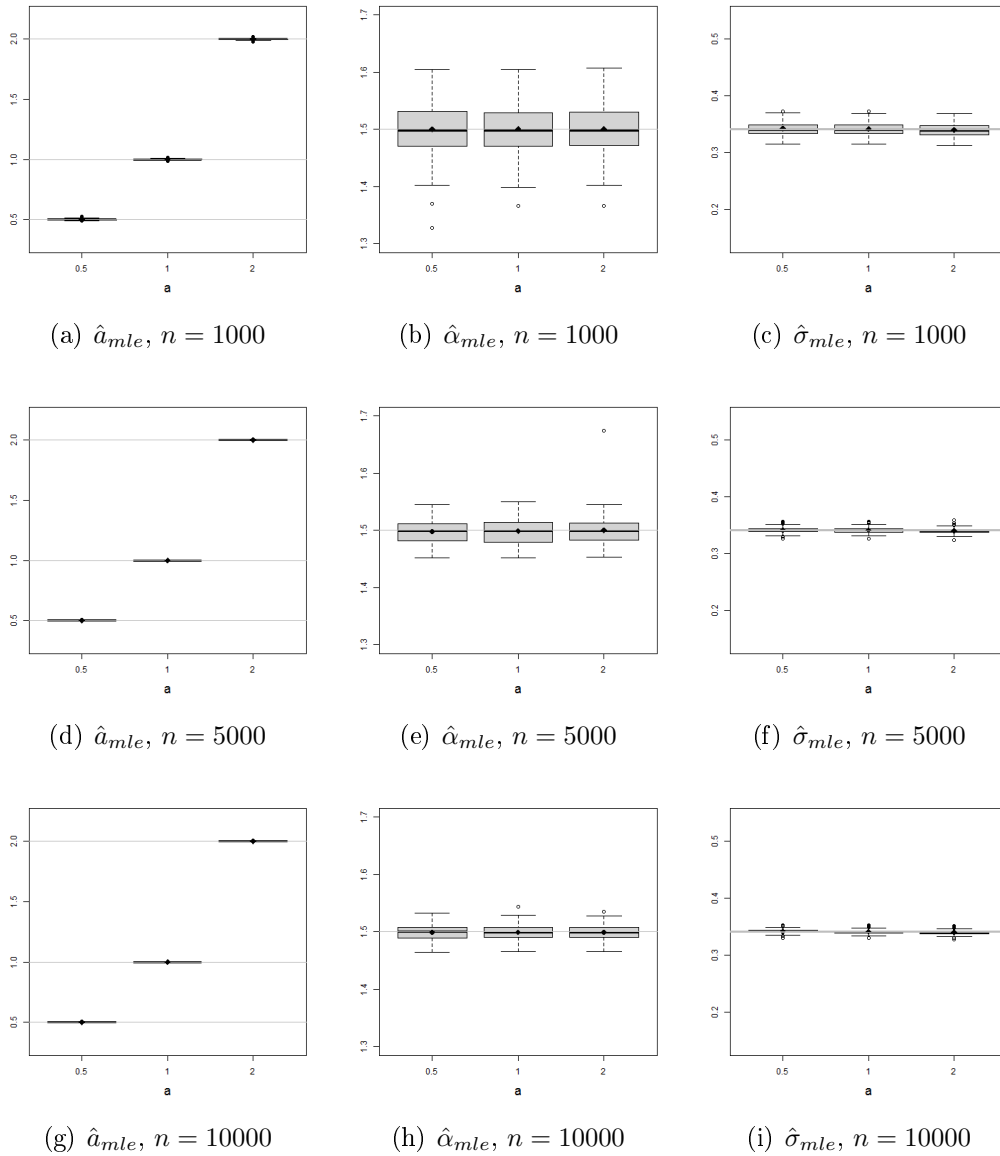


Figura D.5: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.5$, $h = 0.1$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.0005, 0.0021, 0.0085\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

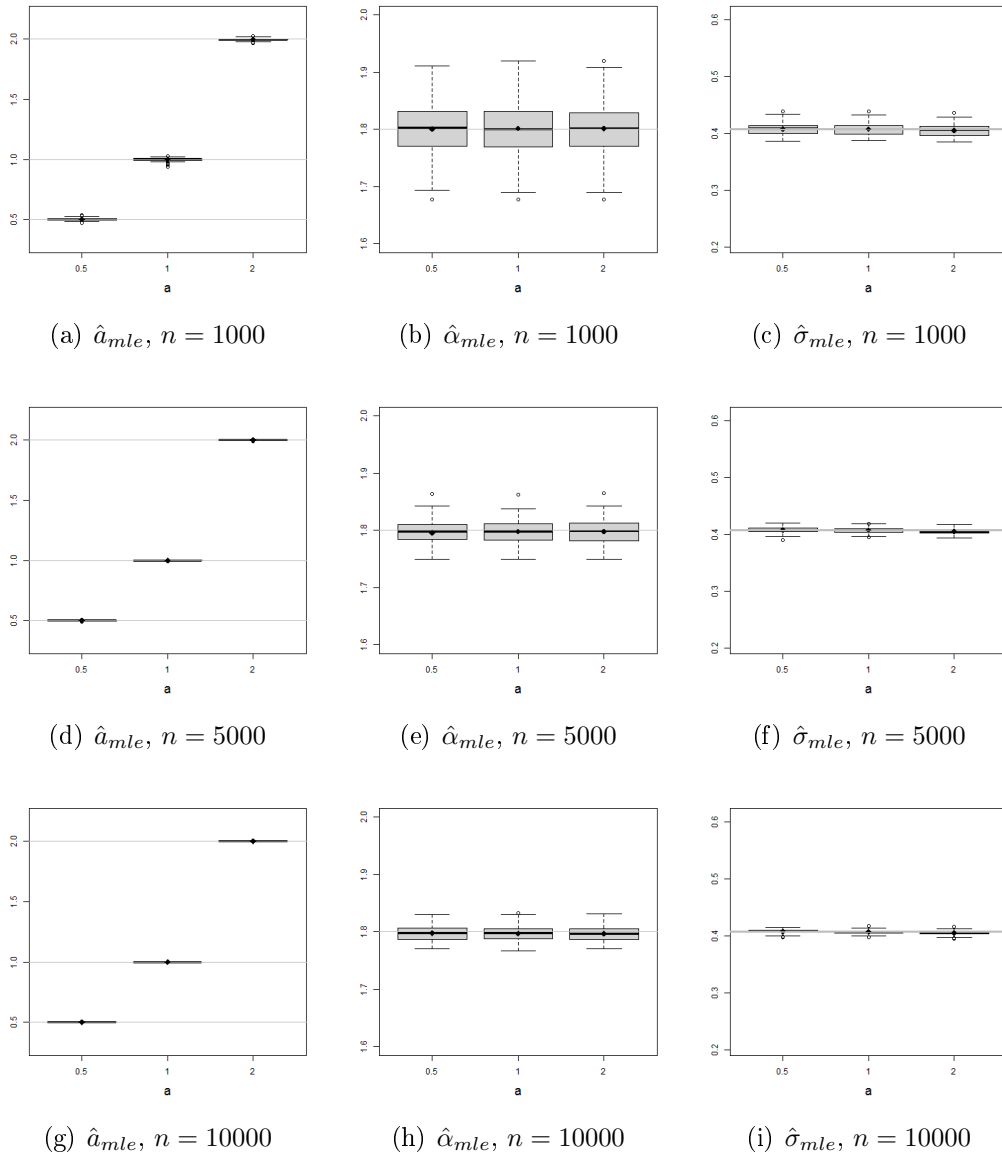


Figura D.6: MLE Iterativo no Processo Cosseno quando $\alpha = 1.8$, $h = 0.1$, cada gráfico apresenta resultados para $a \in \{0.5, 1, 2\}$ e $\sigma_\varepsilon \in \{0.0006, 0.0027, 0.0110\}$. As linhas pretas são as medianas de cada experimento, as cinzas mostram o verdadeiro valor do parâmetro e os pontos pretos a média amostral.

Apêndice E

Artigo Stein, Lopes e Medino (2015)

Autores: Josiane Stein, Sílvia R.C. Lopes e Ary V. Medino

Título: “Continuous Processes Derived from the Solution of Generalized Langevin Equation: Theoretical Properties and Estimation”

Revista: Journal of Statistical Computation and Simulation (Aceito)

Ano: 2015

Continuous Processes Derived from the Solution of Generalized Langevin Equation: Theoretical Properties and Estimation

J. Stein^a, S.R.C. Lopes^{a ‡} and A.V. Medino^b

^aMathematics Institute
Federal University of Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS, Brazil

^bMathematics Department
University of Brasília
Brasília, DF, Brazil

October 8, 2015

Abstract

In this paper we present a class of continuous-time processes arising from the solution of the generalized Langevin equation and show some of its properties. We define the theoretical and empirical codifference as a measure of dependence for stochastic processes. As an alternative dependence measure we also consider the spectral covariance. These dependence measures replace the autocovariance function when it is not well defined. Results for the theoretical codifference and theoretical spectral covariance functions for the mentioned process are presented. The maximum likelihood estimation procedure is proposed to estimate the parameters of the process arising from the classical Langevin equation, i.e., the Ornstein-Uhlenbeck process, and of the so-called Cosine process. We also present a simulation study for particular processes arising from this class showing the generation, and the theoretical and empirical counterpart for both codifference and spectral covariance measures.

Keywords: Generalized Langevin Equation; Codifference and Spectral Covariance; Stable Processes; Maximum Likelihood Estimation Method.

1 Introduction

The classical Langevin equation defines a continuous stochastic process. It was introduced by Langevin (1908) to model the motion dynamics of a particle immersed in a fluid medium. It is given by

$$\begin{cases} dV(t) = -\theta V(t)dt + dL(t) \\ V(0) = V_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

where $\theta > 0$ is a constant of friction and $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is a noise process, representing a random force.

[‡]Corresponding author. E-mail: silvia.lopes@ufrgs.br

This equation can be solved by applying the Laplace transform methods (or Ito's formula). From this perspective, the solution of (1.1) is given by

$$V(t) = V_0 e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dL(s). \quad (1.2)$$

The stochastic process solution $\{V(t)\}_{t \geq 0}$, given in (1.2), is called the Ornstein-Uhlenbeck (OU) process. It is widely used for modeling financial time series, such as interest and exchange rates, as well as other applications. For more details regarding the OU process, see Barndorff-Nielsen and Shephard (2003), Barndorff-Nielsen and Shephard (2001), Barndorff-Nielsen and Shephard (2000), Jongbloed et. al. (2005), and Zhang and Zhang (2013).

In 1965 Hazime Mori proposed a generalization of the classical Langevin equation. Another generalization was proposed by Ryogo Kubo in 1966, which became known as the generalized Langevin equation (GLE). This equation is given by

$$\begin{cases} dV(t) = - \int_0^t \gamma(t-s) V(s) ds dt + dL(t) \\ V(0) = V_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

where $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is a noise process, V_0 is a random variable independent of $L(\cdot)$ and $\gamma(\cdot)$ is the memory function. Assuming that all processes are second order moments, that is, they have finite quadratic mean, Kannan (1977) studied the solution of GLE. The author showed that any mean square solution $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ process of the GLE has the form

$$V(t) = V_0 \rho(t) + \int_0^t \rho(t-s) dL(s),$$

where V_0 is the random variable from (1.3), $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is the noise process and $\rho(\cdot)$ is a deterministic function satisfying the Volterra integro-differential equation, given by

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \gamma(t-s) \rho(s) ds \\ \rho(0) = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

The subject of this paper is to study a continuous process derived from the GLE solution, considering the Lévy process as the noise process. In order to generalize the solution class of the GLE, we should modify the function $\rho(\cdot)$. Instead of (1.4), we consider another integro-differential equation that is given in Definition 3.1. This idea extends the previous work done by Medino et al. (2012). Another goal is to investigate the dependence structure of the process, since the autocovariance function is not well defined in the case of infinite second moment processes. We propose to use the so-called codifference as a dependence measure and analyze the properties of its estimator. The codifference function was introduced by Astrauskas (1983) and has been studied by many authors. We also investigate an alternative dependence measure, the so-called spectral covariance, introduced by Paulauskas (1976) and we consider its estimator. Besides, we are interested in studying the parameter estimation of these processes. In this work we present the estimation procedure based on the maximum likelihood for two processes: the OU process and the so-called Cosine process.

The paper is organized as follows: Section 2 presents the codifference and spectral covariance dependence measures and their estimators. Section 3 presents the generalization of expression (1.4) and the class of processes obtained from this equation. Section 4

presents examples of this class. In special, a recurrence formula is derived for particular cases of the general process. Simulated time series are generated using this recurrence formula and we present their theoretical and empirical counterpart for both codifference and spectral covariance measures. Section 5 presents a Monte Carlo simulation study for the maximum likelihood estimation of the process arising from the classical Langevin equation (Ornstein-Uhlenbeck process) and of the so-called Cosine process. Section 6 concludes the paper.

2 Dependence Measures: Codifference and Spectral Covariance

In this section we present two dependence measures: the *codifference* and the *spectral covariance*. The theoretical codifference and its empirical counterpart are defined in Subsection 2.1. We prove the estimator consistency for stationary symmetric α -stable processes that satisfy a mild condition. The spectral covariance is defined in Subsection 2.2 together with an estimator for it based on the spectral measure estimation.

2.1 Codifference Function

In this subsection we want to define a dependence measure for any process. Let X_1 and X_2 be two random variables. The codifference of X_1 and X_2 is defined as

$$\begin{aligned} \tau(X_1, X_2) = & \ln \{ \mathbb{E} [\exp (i(X_1 - X_2))] \} - \ln \{ \mathbb{E} [\exp (i(X_1))] \} \\ & - \ln \{ \mathbb{E} [\exp (-i(X_2))] \}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

The codifference function, defined in (2.1), is related to the function considered by Astrauskas (1983). This measure was used again in Astrauskas et al. (1991).

Remark 2.1. (a) If X_1 and X_2 are independent random variables, then $\tau(X_1, X_2) = 0$.
(b) If X_1 and X_2 are Gaussian random variables, then $\tau(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, X_2)$.
(c) The codifference function is well defined even when the process does not have finite mean. The codifference function given in (2.1) was proposed by Kokoszka and Taqqu (1995).

If $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ is any process, then the codifference function is given by

$$\tau_X(k, t) = \tau(X(k), X(t)), \quad (2.2)$$

for $k, t \geq 0$. For more details, we refer the reader to Samorodnitsky and Taqqu (1994).

There is an even more general definition for the codifference, similar to the one proposed in Kokoszka and Taqqu (1994), given by

$$\begin{aligned} \tau_X(s; k, t) = & \ln \{ \mathbb{E} [\exp (is(X(t+k) - X(t)))] \} - \ln \{ \mathbb{E} [\exp (is(X(t+k)))] \} \\ & - \ln \{ \mathbb{E} [\exp (-is(X(t)))] \}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where $s \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ and $t \geq 0$. When $s = 1$, expression (2.3) reduces to (2.1).

Remark 2.2. If $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ is any stationary process, then expression (2.3) does not depend on t . In this situation, expression (2.3) will be denoted by $\tau_X(s; k)$.

We will consider the codifference function estimator proposed in Rosadi and Deistler (2009), for ARMA processes. In this work we want to consider any stationary process with symmetric α -stable finite-dimensional distributions and prove the estimator consistency. Let $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ be any stationary process and let $\{X_i\}_{i=1}^N$ be a sample of size N derived from this process. As the codifference function is defined via characteristic functions, it can be estimated by empirical characteristic functions. The estimator for the codifference function at k , proposed by Rosadi and Deistler (2009), is given by

$$\hat{\tau}_X(s; k) = \sqrt{\frac{N-k}{N}} \left[\ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{is(X_{t+k} - X_t)} \right) - \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_{t+k}} \right) - \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{-isX_t} \right) \right], \quad (2.4)$$

for any $k \in \{0, \dots, N\}$. For more details on the estimator given in (2.4), we refer the reader to Rosadi and Deistler (2009).

The consistency property of the empirical codifference is given in Theorem 2.1. We need to consider the following condition to derive this consistency property:

Condition A: $\tau_X(s; k) \rightarrow 0$, when $k \rightarrow \infty$, for all $s \in \mathbb{R}$.

Notice that Condition A is not so strong, since at least stationary stable processes that present the mixing property must satisfy this condition (see Gross, 1994).

Let us defined the k -th difference of the $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ process by

$$W(t) = X(t+k) - X(t). \quad (2.5)$$

Theorem 2.1. *Let $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ be any stationary symmetric α -stable process, $0 < \alpha \leq 2$, satisfying Condition A. Let $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ be the process defined in (2.5) and assume it also satisfies Condition A, for any fixed k . For $s \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, the sample codifference $\hat{\tau}_X(s; k)$, defined in expression (2.4), is a consistent estimator for the theoretical codifference $\tau_X(s; k)$, when $N \rightarrow \infty$.*

To show the consistency property of the codifference estimator, first it is necessary to prove the following two lemmas.

Lemma 2.1. *Let $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ be any stationary symmetric α -stable process, $0 < \alpha \leq 2$, satisfying Condition A, and denote by $\Phi_X(s) = \mathbb{E}(e^{isX(t)})$ its characteristic function. For $s \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$\ln(\hat{\phi}(s; k)) := \ln \left(\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_t} \right)$$

is a consistent estimator for $\ln(\Phi_X(s))$, when $N \rightarrow \infty$.

Proof: Let $Y_s(t) := e^{isX(t)}$. Notice that the process $\{Y_s(t)\}_{t \geq 0}$ is stationary. For simplicity, instead of working with $\hat{\phi}(s; k)$, we first show the consistency property for $\hat{\phi}^*(s) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{isX_t}$.

Here, $\hat{\phi}^*(s)$ is an unbiased estimator for $\Phi_X(s) = \mathbb{E}(Y_s(t))$. To show the weak consistency for this estimator, we show that $Y_s(t)$ is a mean ergodic process. A sufficient

condition for $Y_s(t)$ to be a mean ergodic process, i.e. $\hat{\phi}^*(s) \rightarrow \Phi_X(s)$ in the mean square sense, is that its covariance function tends to zero when k tends to infinity (see theorem 7.1.1 in Brockwell and Davis, 1987). The covariance function of $Y_s(t)$ at k can be expressed as

$$\begin{aligned} C_{Y_s}(k) &= \text{Cov}(Y_s(t+k), Y_s(t)) = \mathbb{E}(Y_s(t+k)\overline{Y_s(t)}) - \mathbb{E}(Y_s(t+k))\mathbb{E}(\overline{Y_s(t)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{isX(t+k)}e^{-isX(t)}) - |\Phi_X(s)|^2 = |\Phi_X(s)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Notice that

$$\exp(\tau_X(s; k)) = \frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})}.$$

Then, we have

$$C_{Y_s}(k) = |\Phi_X(s)|^2 (\exp(\tau_X(s; k)) - 1).$$

From Condition A, $C_{Y_s}(k) \rightarrow 0$, when $k \rightarrow \infty$. As mean square convergence entails convergence in probability, we have $\hat{\phi}^*(s) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi_X(s)$, for all $s \in \mathbb{R}$. Moreover, $\Phi_X(\cdot)$ is a positive real-valued function, since we are considering symmetric α -stable processes. Therefore, we can conclude that $\text{Re}(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \text{Re}(\Phi_X(s)) = \Phi_X(s)$ and $\text{Im}(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \text{Im}(\Phi_X(s)) = 0$, where $\text{Re}(z)$ and $\text{Im}(z)$ are the real and imaginary parts of $z \in \mathbb{C}$.

By taking the principal value of the $\ln(\cdot)$ function in the complex domain, this function will be continuous and well-defined on \mathbb{C} minus the negative real line. It is possible to see that $\text{Re}(\Phi_X(s)) = \Phi_X(s) > 0$, but $\text{Re}(\hat{\phi}^*(s))$ can be less than or equal to zero. Therefore, without loss of generality, we restrict the definition of the real and imaginary parts of $\ln(\hat{\phi}^*(s))$ only on the right half plane where $\text{Re}(\hat{\phi}^*(s))$ is greater than zero, and equal to zero, otherwise. From this consideration, given that $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, it is possible to obtain

$$\begin{aligned} \text{Re}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] &= \ln\{[\text{Re}(\hat{\phi}^*(s))]^2 + [\text{Im}(\hat{\phi}^*(s))]^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln\{[\text{Re}(\hat{\phi}^*(s))]^2 + [\text{Im}(\hat{\phi}^*(s))]^2\} \end{aligned}$$

and

$$\text{Im}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] = \arctan \left[\frac{\text{Im}(\hat{\phi}^*(s))}{\text{Re}(\hat{\phi}^*(s))} \right].$$

From the continuity of the logarithm function in the considered domain, we have $\text{Re}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] \xrightarrow{\mathbb{P}} \text{Re}[\ln(\Phi_X(s))] = \ln(\Phi_X(s))$ and $\text{Im}[\ln(\hat{\phi}^*(s))] = \arg(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, when $N \rightarrow \infty$. In other words, $\ln(\hat{\phi}^*(s)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \ln(\Phi_X(s))$. To complete the proof, it is sufficient to show that $\hat{\phi}^*(s) - \hat{\phi}(s; k) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. We can see that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\hat{\phi}^*(s) - \hat{\phi}(s; k)| &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{isX_t} - \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_t} \right| \\ &= \mathbb{E} \left| \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-k} \right) \sum_{t=1}^{N-k} e^{isX_t} + \frac{1}{N} \sum_{t=N-k+1}^N e^{isX_t} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{N} - \frac{1}{N-k} \right| \sum_{t=1}^{N-k} |e^{isX_t}| + \frac{1}{N} \sum_{t=N-k+1}^N |e^{isX_t}| = \left(\frac{1}{N-k} - \frac{1}{N} \right) (N-k) + \frac{k}{N} = \frac{2k}{N}. \end{aligned}$$

Thus, when $N \rightarrow \infty$, $\hat{\phi}^*(s) - \hat{\phi}(s; k) \rightarrow 0$ in mean, and it also converges in probability. \square

Remark 2.3. If X is an α -stable random variable denoted by $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, then $Y = e^{isX}$ is not an α -stable random variable, for every fixed $s \in \mathbb{R}$. Indeed, the variance of Y is finite. Thus, the expression (2.6) is well defined.

Corollary 2.1. Let $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ be any stationary symmetric α -stable process, $0 < \alpha \leq 2$. Let $Y_s(t) = e^{isX(t)}$. Suppose that the autocovariance function of the process $\{Y_s(t)\}_{t \geq 0}$, denoted by $C_{Y_s}(\cdot)$, is such that $C_{Y_s}(k) \rightarrow 0$, when $k \rightarrow \infty$. Then, the codifference function $\tau_X(s; k)$, defined in expression (2.3), is asymptotically zero, when $k \rightarrow \infty$.

Proof: From the expression (2.6), we have

$$C_{Y_s}(k) = |\Phi_X(s)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} - 1 \right) \rightarrow 0,$$

when $k \rightarrow \infty$. Then,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} - 1 \rightarrow 0 &\iff \frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} \rightarrow 1 \\ &\iff \ln \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})}{\mathbb{E}(e^{isX(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isX(t)})} \right) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notice that the left-hand side term of (2.7) is $\tau_X(s; k)$. Hence, $\tau_X(s; k) \rightarrow 0$, when $k \rightarrow \infty$. \square

Lemma 2.2. Let $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ be any stationary symmetric α -stable process satisfying Condition A. Let $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ be the process defined in (2.5) and assume it also satisfies Condition A, for any fixed k . Let $\Phi_W(s; k) = \mathbb{E}(e^{is(X(t+k)-X(t))})$ denote the characteristic function of $\{W(t)\}_{t \geq 0}$. For $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $s \in \mathbb{R}$

$$\ln(\hat{\phi}(s; k)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \ln(\Phi_W(s; k)),$$

when $N \rightarrow \infty$, where $\hat{\phi}(s; k)$ is given by

$$\hat{\phi}(s; k) := \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} e^{is(X_{t+k}-X_t)}.$$

Proof: For the proof, we can proceed in a similar way as in Lemma 2.1. Firstly we show the consistency property for $\hat{\phi}^*(s; k) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{is(X_{t+k}-X_t)}$. Define $Z(t) := Y_s(t+k)\overline{Y_s(t)} = e^{is(X(t+k)-X(t))}$, for fixed k . It is easy to see that $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ is a stationary process, that is $Z(t+l) \stackrel{d}{=} Z(t)$. We shall show that $Z(\cdot)$ is a mean ergodic process. A sufficient condition for $Z(\cdot)$ to be a mean ergodic process is that its covariance function tends to zero. The covariance function of $Z(\cdot)$ at lag l can be given as

$$\begin{aligned} C_Z(l) &= \text{Cov}(Z(t+l), Z(t)) = \mathbb{E}(Z(t+l)\overline{Z(t)}) - \mathbb{E}(Z(t+l))\mathbb{E}(\overline{Z(t)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l)-X(t+k)+X(t))}) - |\Phi_W(s; k)|^2 \\ &= \mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) - |\Phi_W(s; k)|^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Then, we need to show that $\mathbb{E}(Z(t+l)\overline{Z(t)}) = \mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2$, when $l \rightarrow \infty$. Notice that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z(t+l)\overline{Z(t)}) &= |\Phi_W(s; k)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{|\Phi_W(s; k)|^2} \right) \\ &= |\Phi_W(s; k)|^2 \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})\mathbb{E}(e^{-is(X(t+k)-X(t))})} \right) \\ &= |\Phi_W(s; k)|^2 \exp(\tau_W(s; l)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

where $\tau_W(s; l) = \ln \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})\mathbb{E}(e^{-is(X(t+k)-X(t))})} \right)$ is the codifference function of $W(\cdot)$, for fixed k and t . By hypothesis, we have $\tau_W(s; l) \rightarrow 0$ when $l \rightarrow \infty$. Hence $\exp(\tau_W(s; l)) \rightarrow 1$. In other words, $\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2$ when $l \rightarrow \infty$, and therefore $\hat{\phi}^*(s; k)$ converges in mean square to $\Phi_W(s; k)$. Therefore, $\hat{\phi}^*(s; k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi_W(s; k)$. For the remaining of this proof, we can proceed similarly to the proof of Lemma 2.1. \square

Corollary 2.2. *Let $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ be any stationary symmetric α -stable process, $0 < \alpha \leq 2$. Let $Z(t) := e^{is(X(t+k)-X(t))}$, for fixed k . Suppose that the autocovariance function of the process $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$, denoted by $C_Z(\cdot)$, is such that $C_Z(l) \rightarrow 0$, when $l \rightarrow \infty$. Let $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ be the process defined in (2.5). Then, the codifference function $\tau_W(s; l)$, defined in expression (2.3), is asymptotically zero when $l \rightarrow \infty$.*

Proof: From the expression (2.8), we have

$$C_Z(l) = \mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) - |\Phi_W(s; k)|^2 \rightarrow 0,$$

when $l \rightarrow \infty$. Hence,

$$\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))}) \rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2.$$

From the expression (2.9),

$$\begin{aligned}|\Phi_W(s; k)|^2 \frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t)-X(t+k))})\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})} &\rightarrow |\Phi_W(s; k)|^2 \\ \iff \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{is((X(t)-X(t+k))-(X(t+l)-X(t+l+k)))})}{\mathbb{E}(e^{is(X(t)-X(t+k))})\mathbb{E}(e^{is(X(t+l+k)-X(t+l))})} \right] &\rightarrow 0.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Notice that the left-hand side term in (2.10) is $\tau_W(s; l)$, where $W(\cdot)$ is defined by (2.5), for fixed k . Therefore, $\tau_W(s; l) \rightarrow 0$ when $l \rightarrow \infty$. \square

Proof of Theorem 2.1: For fixed k and $N \rightarrow \infty$, we have $\sqrt{\frac{N-k}{N}} \rightarrow 1$. From Lemmas 2.1 and 2.2, it is true that

$$\hat{\tau}_X(s; k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \ln[\Phi_W(s; k)] - \ln[\Phi_X(s)] - \ln[\Phi_X(-s)] = \tau_X(s; k),$$

for $s \in \mathbb{R}$, when $N \rightarrow \infty$. \square

2.2 Spectral Covariance

As an alternative dependence measure for random variables with infinite variance, we can also consider the spectral covariance. This dependence measure was introduced by Paulauskas (1976) and it was revisited in Damarackas and Paulauskas (2014).

Given an α -stable random vector (X_1, X_2) , with $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, we define the spectral covariance as

$$\varrho(X_1, X_2) = \int_{S_2} s_1 s_2 \Gamma(ds), \quad (2.11)$$

where Γ is the spectral measure on $S_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. The advantage of using the spectral covariance is its definition based only on the spectral measure, not on the characteristic function. Damarackas and Paulauskas (2014) provided an analysis, based on some examples, for the best α parameter dependence of the spectral covariance.

Consider an α -stable stochastic process given in the integral form as follows

$$X(t) = \int_E f_t(s) dL(s), \quad (2.12)$$

where $E \subseteq \mathbb{R}$ is a set, $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is the α -stable Lévy process and $\{f_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ is such that $\int_E |f_t(s)|^\alpha ds < \infty$. In this case, Damarackas and Paulauskas (2014) showed that the spectral covariance can be written as

$$\varrho(X(t), X(t+k)) = \int_E f_t(s) f_{t+k}(s) \|\bar{f}(s)\|^{\alpha-2} ds, \quad (2.13)$$

where $\|\bar{f}(s)\|^2 = f_t^2(s) + f_{t+k}^2(s)$.

For estimation purposes, we will consider the estimator proposed in Kodia and Garel (2014), where for any fixed $t \geq 0$, we have

$$\hat{\varrho}(X(t), X(t+k)) = \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{j,k} \cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{m}\right) \sin\left(\frac{2\pi(j-1)}{m}\right), \quad (2.14)$$

where $\hat{\sigma}_k = (\hat{\sigma}_{j,k})_{j=1}^m$ such that $\hat{\sigma}_k = \min_{\sigma \geq 0} \|\hat{I}_k - \hat{\Psi}\sigma\|$. To estimate the weights $\hat{\sigma}_k$ consider $\hat{\Psi}$ an $m \times m$ matrix defined by $\hat{\Psi} = (\hat{\psi}_\alpha(\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{s}_l \rangle))_{j,l=1}^m$ such that $\hat{\psi}_\alpha(\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{s}_l \rangle) = |t_{j1}s_{l1} + t_{j2}s_{l2}|^{\hat{\alpha}}$, where $\hat{\alpha}$ is some estimate for α and $\mathbf{t}_j = \mathbf{s}_j = \left(\cos\left(\frac{2\pi(j-1)}{m}\right), \sin\left(\frac{2\pi(j-1)}{m}\right)\right)$. In this work we use four estimators for α : the maximum likelihood (denoted by $\hat{\alpha}_{mle}$), the regression-type estimator proposed by Koutrouvelis (1980) (denoted by $\hat{\alpha}_{kou}$), the quantile based estimator of McCulloch (1986) (denoted by $\hat{\alpha}_{mc}$) and the regression-type estimator proposed by Press (1972) (denoted by $\hat{\alpha}_{pr}$). The estimator defined in expression (2.14) requires an i.i.d. sample $\mathbf{X}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{X}_k^{(re)}$ of $(X(t), X(t+k))$, where re is the number of replications. Let $\hat{I}_k = (\hat{I}_{k,re}(\mathbf{t}_j))_{j=1}^m$ and $\hat{I}_{k,re}(\mathbf{t}_j) = -\ln(\hat{\phi}_{k,re}(\mathbf{t}_j))$, where $\hat{\phi}_{k,re}(\mathbf{t}_j)$ is the empirical characteristic function given by $\hat{\phi}_{k,re}(\mathbf{t}_j) = \frac{1}{re} \sum_{j=1}^{re} e^{i\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{X}_k^{(j)} \rangle}$. For more details on the empirical spectral covariance, we refer the reader to Kodia and Garel (2014).

3 Processes Derived from the GLE Solution

We introduce in this section our procedure to study the Generalized Langevin Equation or the GLE, for short, and present what we call the *Generalized Langevin Process*. Such way

to consider this equation is specially useful in cases where the noise has infinite second moment, but it also can be applied in the finite second moment situations. The main element in our method is Definition 3.1, where we consider GLE driven by Lévy processes. For the background noise process, we assume stochastic processes $L = \{L(t)\}_{t \geq 0}$ satisfying the following conditions:

B1: $L(0) \equiv 0$ with probability 1.

B2: L has independent increments, i.e., $L(t_0), L(t_1) - L(t_0), \dots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ are independent random variables for every $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ for all positive integer n .

B3: L has stationary increments, i.e., for all $t \geq 0$, $L(t+h) - L(t)$ has the same distribution as $L(h)$, for all $h > 0$.

B4: L is continuous in probability, that is, given $t \geq 0$ and $\delta > 0$, we have

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|L(t+h) - L(t)| > \delta) = 0.$$

For a treatment on Lévy processes suitable for the scope of this paper, we refer the reader to Applebaum (2009) or Schoutens (2003). We recall that the only Lévy process that has finite second moment is the standard Brownian motion, also known as the Wiener process, and that the random variable $L(1)$ has infinitely divisible distribution whose characteristic function is given by

$$\varphi_L(x) = e^{-\psi(x)},$$

where $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is the characteristic exponent of $L(1)$.

Remark 3.1. If $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is the symmetric α -stable Lévy process, then the characteristic exponent of $L(1)$ is given by $\psi(x) = |x|^\alpha$.

Definition 3.1. Let $V = \{V(t)\}_{t \geq 0}$ be a stochastic process and $\rho = \{\rho(t)\}_{t \geq 0}$ be a deterministic function. We say that the pair (V, ρ) represents a solution to the GLE if V is given by

$$V(t) = V_0 \rho(t) + \int_0^t \rho(t-s) dL(s) \quad (3.1)$$

and the function ρ satisfies the following integro-differential equation

$$\begin{cases} \rho'(t) = - \int_0^t \rho(s) d\mu_t(s), \\ \rho(0) = 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

where $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ is a family of signed measures and $L = \{L(t)\}_{t \geq 0}$ is a Lévy process. The stochastic process $V = \{V(t)\}_{t \geq 0}$ will be called the Generalized Langevin Process.

Under the conditions in Definition 3.1, the stochastic integral in (3.1) can be taken in the sense of convergence in probability if $\rho(\cdot)$ is continuous (Lukacs, 1975) or, in the general setting, considering stochastic integration with respect to semimartingale (Applebaum, 2009). Integro-differential equations as in (3.2) are well studied in Mingarelli (1983).

The following proposition gives a characterization of the discrete form of the process in (3.1) and will be useful for numerical, simulation and estimation purposes.

Proposition 3.1. *Under the conditions in Definition 3.1 and if $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is a standard α -stable Lévy motion, the process given by (3.1) has the following discrete form*

$$V(n+1) - V(n) \stackrel{d}{=} V_0(\rho(n+1) - \rho(n)) + \xi_n, \quad (3.3)$$

where $\stackrel{d}{=}$ means equality in distribution and $\xi_n \sim S_\alpha(\sigma_n, 0, 0)$, such that σ_n is given by

$$\sigma_n^\alpha = \int_0^n |\rho(n+1-s) - \rho(n-s)|^\alpha ds + \int_n^{n+1} |\rho(n+1-s)|^\alpha ds. \quad (3.4)$$

Proof: From the expression (3.1) one has

$$V(n+1) - V(n) = V_0(\rho(n+1) - \rho(n)) + \xi_n,$$

where $\xi_n = \int_0^{n+1} \rho(n+1-s) dL(s) - \int_0^n \rho(n-s) dL(s)$. We can rewrite ξ_n as follows

$$\xi_n = \int_0^n [\rho(n+1-s) - \rho(n-s)] dL(s) + \int_n^{n+1} \rho(n+1-s) dL(s) = A_n + B_n, \quad (3.5)$$

where $A_n = \int_0^n [\rho(n+1-s) - \rho(n-s)] dL(s)$ and $B_n = \int_n^{n+1} \rho(n+1-s) dL(s)$, such that A_n and B_n are independent. In addition, by Proposition 3.4.1 in Samorodnitsky and Taqqu (1994), $A_n \sim S_\alpha(\sigma_{A_n}, 0, 0)$ and $B_n \sim S_\alpha(\sigma_{B_n}, 0, 0)$, where

$$\sigma_{A_n}^\alpha = \int_0^n |\rho(n+1-s) - \rho(n-s)|^\alpha ds, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{B_n}^\alpha = \int_n^{n+1} |\rho(n+1-s)|^\alpha ds. \quad (3.7)$$

By Property 1.2.1 in Samorodnitsky and Taqqu (1994), we have $\xi_n \sim S_\alpha(\sigma_n, 0, 0)$, where σ_n is given by (3.4). □

Let $\{I_\rho(t)\}_{t \geq 0}$ be the stochastic process given by $I_\rho(t) = \int_0^t \rho(t-x) dL(x)$ with $\tau_{I_\rho}(s; k, t)$ as its codifference function. The proposition A.1 in Medino et. al. (2012) says that characteristic functions of stochastic integrals are given in terms of the integrand function and the characteristic exponent of $L(1)$. Then, from Remark 3.1, $\tau_{I_\rho}(s; k)$ can be rewriting as

$$\begin{aligned} \tau_{I_\rho}(s; k) &= \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{is \int_0^t (\rho(t+k-x) - \rho(t-x)) dL(x)}) \mathbb{E}(e^{is \int_t^{t+k} \rho(t+k-x) dL(x)})}{\mathbb{E}(e^{is \int_0^{t+k} \rho(t+k-x) dL(x)}) \mathbb{E}(e^{-is \int_0^t \rho(t-x) dL(x)})} \right] \\ &= \ln \left[\frac{e^{-|s|^\alpha (\int_0^t |\rho(t+k-x) - \rho(t-x)|^\alpha dx + \int_t^{t+k} |\rho(t+k-x)|^\alpha dx)}}{e^{-|s|^\alpha (\int_0^{t+k} |\rho(t+k-x)|^\alpha dx + \int_0^t |\rho(t-x)|^\alpha dx)}} \right] \\ &= |s|^\alpha \int_0^t (|\rho(t+k-x)|^\alpha + |\rho(t-x)|^\alpha - |\rho(t+k-x) - \rho(t-x)|^\alpha) dx. \quad (3.8) \end{aligned}$$

The next proposition gives the general formula for the codifference function of the stochastic process defined by (3.1).

Proposition 3.2. *Let $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ be the stochastic process defined in the expression (3.1). Then the following statements hold.*

(i) The codifference function of $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ is given by

$$\tau_V(s; k, t) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(t+k) - \rho(t)))}{\varphi_{V_0}(s\rho(t+k))\varphi_{V_0}(-s\rho(t))} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k, t),$$

where $\varphi_{V_0}(\cdot)$ is the characteristic function of the random variable $V_0 \equiv V(0)$.

(ii) If $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ is stationary, then its codifference function reduces to

$$\tau_V(s; k) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(k) - 1))}{\varphi_{V_0}(s\rho(k))\varphi_{V_0}(-s)} \right],$$

where $\varphi_{V_0}(\cdot)$ is the characteristic function of the random variable $V_0 \equiv V(0)$.

(iii) Let $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ be a symmetric α -stable Lévy process and $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Then the codifference function of $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ is given by

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\rho(t+k)|^\alpha + |\rho(t)|^\alpha - |\rho(t+k) - \rho(t)|^\alpha] \\ &+ |s|^\alpha \int_0^t (|\rho(t+k-x)|^\alpha + |\rho(t-x)|^\alpha - |\rho(t+k-x) - \rho(t-x)|^\alpha) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

(iv) Let $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ be a symmetric α -stable Lévy process and $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. If $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ is a stationary process, then

$$\tau_V(s; k) = |s|^\alpha \sigma^\alpha [1 + |\rho(k)|^\alpha - |\rho(t+k) - 1|^\alpha].$$

Proof: (i) From (2.3) we have

$$\tau_V(s; k, t) = \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{is(V(t+k)-V(t))})}{\mathbb{E}(e^{isV(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isV(t)})} \right]. \quad (3.10)$$

From expression (3.1) and due the independence between $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ and V_0

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= \ln \left[\frac{\mathbb{E}(e^{isV_0(\rho(t+k)-\rho(t))})\mathbb{E}(e^{is(I_\rho(t+k)-I_\rho(t))})}{\mathbb{E}(e^{isV_0\rho(t+k)})\mathbb{E}(e^{isI_\rho(t+k)})\mathbb{E}(e^{-isV_0\rho(t)})\mathbb{E}(e^{-isI_\rho(t)})} \right] \\ &= \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(t+k) - \rho(t)))}{\varphi_{V_0}(s\rho(t+k))\varphi_{V_0}(-s\rho(t))} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k, t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

and this completes the proof.

(ii) From the stationarity property, the value t can be taken equal to zero. Then, from the item (i)

$$\tau_V(s; k) = \ln \left[\frac{\varphi_{V_0}(s(\rho(k) - 1))}{\varphi_{V_0}(s\rho(k))\varphi_{V_0}(-s)} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k).$$

Notice that

$$\tau_{I_\rho}(s; k) = \tau(I_\rho(k), I_\rho(0)) = \ln \left(\frac{\mathbb{E}(e^{is \int_0^k \rho(t-x)dL(x)})}{\mathbb{E}(e^{is \int_0^k \rho(t-x)dL(x)})} \right) = 0,$$

and this completes the proof.

(iii) From the characteristic function of $V_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ and from item (i), the expression of $\tau_V(s; k, t)$ is given by

$$\begin{aligned}\tau_V(s; k, t) &= \ln \left[\frac{e^{-\sigma^\alpha |s(\rho(t+k) - \rho(t))|^\alpha}}{e^{-\sigma^\alpha |s\rho(t+k)|^\alpha} e^{-\sigma^\alpha |-s\rho(t)|^\alpha}} \right] + \tau_{I_\rho}(s; k) \\ &= |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\rho(t+k)|^\alpha + |\rho(t)|^\alpha - |\rho(t+k) - \rho(t)|^\alpha] + \tau_{I_\rho}(s; k).\end{aligned}\quad (3.12)$$

From (3.8) and (3.12), we obtain the expression for the codifference function (3.9).

(iv) From the stationarity property, the value t can be taken equal to zero. Then, from items (ii) and (iii)

$$\tau_V(s; k) = |s|^\alpha \sigma^\alpha [1 + |\rho(k)|^\alpha - |\rho(k) - 1|^\alpha].$$

□

Observe that the codifference function of any stationary process of the form (3.1) only depends on its characteristic function at time zero and on the memory function $\rho(\cdot)$. The next proposition gives the general formula for the spectral covariance of a stochastic process defined in (3.1).

Proposition 3.3. *Let $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ be a symmetric α -stable Lévy process and $V_0 \equiv 0$. Then the spectral covariance of $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ defined in expression (3.1) is given by*

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+k-s) [\rho^2(t-s) + \rho^2(t+k-s)]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \quad (3.13)$$

If the process $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ is stationary, then the expression (3.13) will depend only on k and t can be considered a fixed value.

Proof: By equation (3.1) with $V_0 \equiv 0$, we have

$$V(t) = \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)\rho(t-s) dL(s). \quad (3.14)$$

Then equation (2.13) gives

$$\begin{aligned}\varrho(V(t), V(t+k)) &= \int_0^\infty \mathbb{I}_{[0,t]}(s)\rho(t-s)\mathbb{I}_{[0,t+k]}(s)\rho(t+k-s) [\mathbb{I}_{[0,t]}(s)^2 \rho^2(t-s) \\ &\quad + \mathbb{I}_{[0,t+k]}(s)^2 \rho^2(t+k-s)]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds \\ &= \int_0^t \rho(t-s)\rho(t+k-s) [\rho^2(t-s) + \rho^2(t+k-s)]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds.\end{aligned}\quad (3.15)$$

□

To end this section, we observe that if $\theta > 0$ and $\mu_t(E) = \theta \mathbb{I}_E(t)$, where $\mathbb{I}_E(\cdot)$ is the indicator function of the set E , then $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ is a family of Dirac measures each of them assigning mass $\theta > 0$ to the point $t \geq 0$. From the expression (3.2), we have $\rho(t) = e^{-\theta t}$, and the resulting process is the well-known Ornstein-Uhlenbeck process.

Also, notice that if $\mu_t = \mu$ for all $t \geq 0$ in Definition 3.1 and μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ , that is, $d\mu_t(s) = d\mu(s) = f(s) ds$, for all $t, s \geq 0$, where

$$f(s) = \frac{d\mu}{d\lambda}(s)$$

is the Radon-Nikodym derivative of μ with respect to λ , then expression (3.2) reduces to

$$\begin{cases} \rho''(t) + \rho(t) f(t) = 0 \\ \rho'(0) = 0, \quad \rho(0) = 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

In the general situation, $d\mu_t(s) = \gamma(t-s) ds$ will depend on $t \geq 0$ and we recover expression (1.4). This is not the main focus of this manuscript and we will discuss it in a future work.

We want to emphasize that the processes arising from Definition 3.1 are not necessarily Markov. In fact, only the OU process is Markov. But this feature does not hinder to study problems involving this type of process (see Fleming et al., 2014). In the next sections, for some particular functions $f(\cdot)$, we solve the second order initial value problem given in (3.16) and perform some numerical simulation and estimation studies of the resulting Generalized Langevin Processes.

4 Examples

In this section we present examples of processes defined in (3.1) for different functions $\rho(\cdot)$ satisfying expression (3.16). For all examples we consider that $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is the symmetric α -stable Lévy process, which satisfies Conditions **B1-B4**.

Example 4.1. Ornstein-Uhlenbeck Process

The process given in (1.2) is called the Ornstein-Uhlenbeck (OU), where function $\rho(\cdot)$ is given by $e^{-\theta t}$, $\theta > 0$. For generating and simulating purposes, a discrete form will be given. Assume that the OU process is observed at discrete times $\{t_k = kh; k = 0, 1, 2, \dots\}$, where h is the discretization step size. We can obtain a discretization form of the process by using the additivity property with respect to the integration interval, that is,

$$V(kh) = e^{-\theta h} V((k-1)h) + Z_{k,h}, \quad (4.1)$$

where $Z_{k,h} = \int_{(k-1)h}^{kh} e^{\theta(s-kh)} dL(s)$ and $V((k-1)h) = e^{-\theta(k-1)h} V_0 + \int_0^{(k-1)h} e^{\theta(s-(k-1)h)} dL(s)$. Furthermore, by using equality of characteristic functions, we can show that

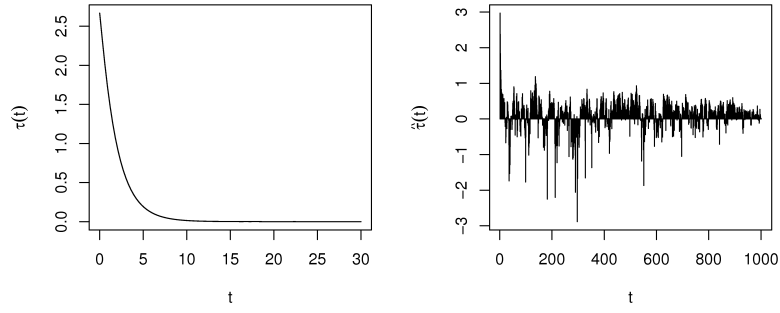
$$Z_{k,h} \stackrel{d}{=} \left(\frac{1 - e^{-\theta \alpha h}}{\theta \alpha} \right)^{1/\alpha} S_k, \quad (4.2)$$

where $\stackrel{d}{=}$ denotes equality in distribution and $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is an independent identically distributed (iid) sequence of symmetric α -stable random variables with scale parameter σ .

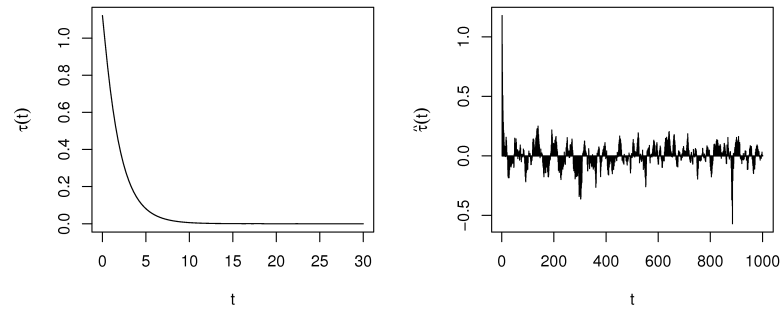
To calculate the codifference function we need the V_0 distribution. If $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ is the standard α -stable Lévy motion, which satisfies conditions **B1-B3**, then the distribution of V_0 can be easily obtained. In Applebaum (2009), the expression (1.2) is rewritten as

$$V(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\theta(t-s)} dL(s), \quad (4.3)$$

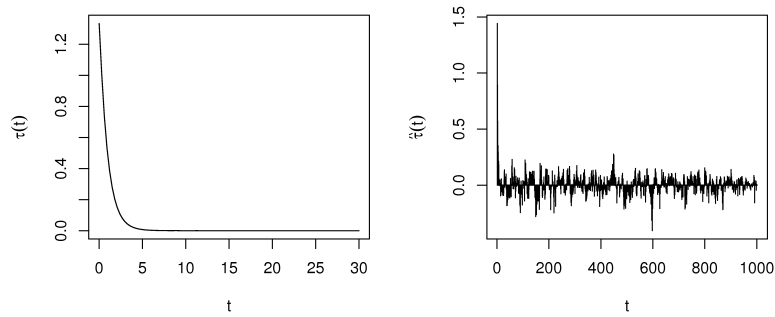
where the integral is defined by taking $\{L(t)\}_{t < 0}$ to be an independent copy of $\{-L(t)\}_{t \geq 0}$.



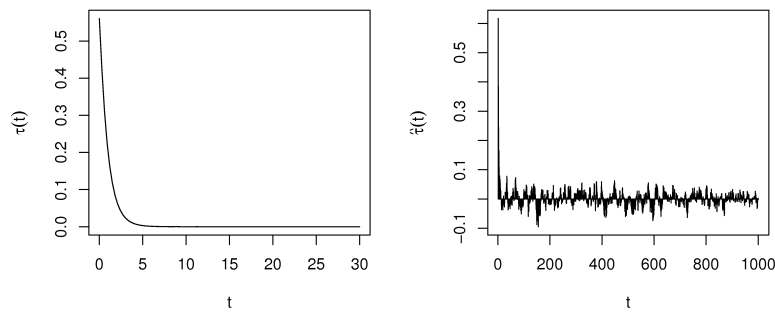
(a) $\theta = 0.5, s = 1$



(b) $\theta = 0.5, s^* = 0.5612$



(c) $\theta = 1, s = 1$



(d) $\theta = 1, s^* = 0.5612$

Figure 4.1: Theoretical and empirical codifference functions of the OU process, given in (1.2), when $\alpha = 1.5, h = 0.5, n = 1000$ and $\theta \in \{0.5, 1\}$.

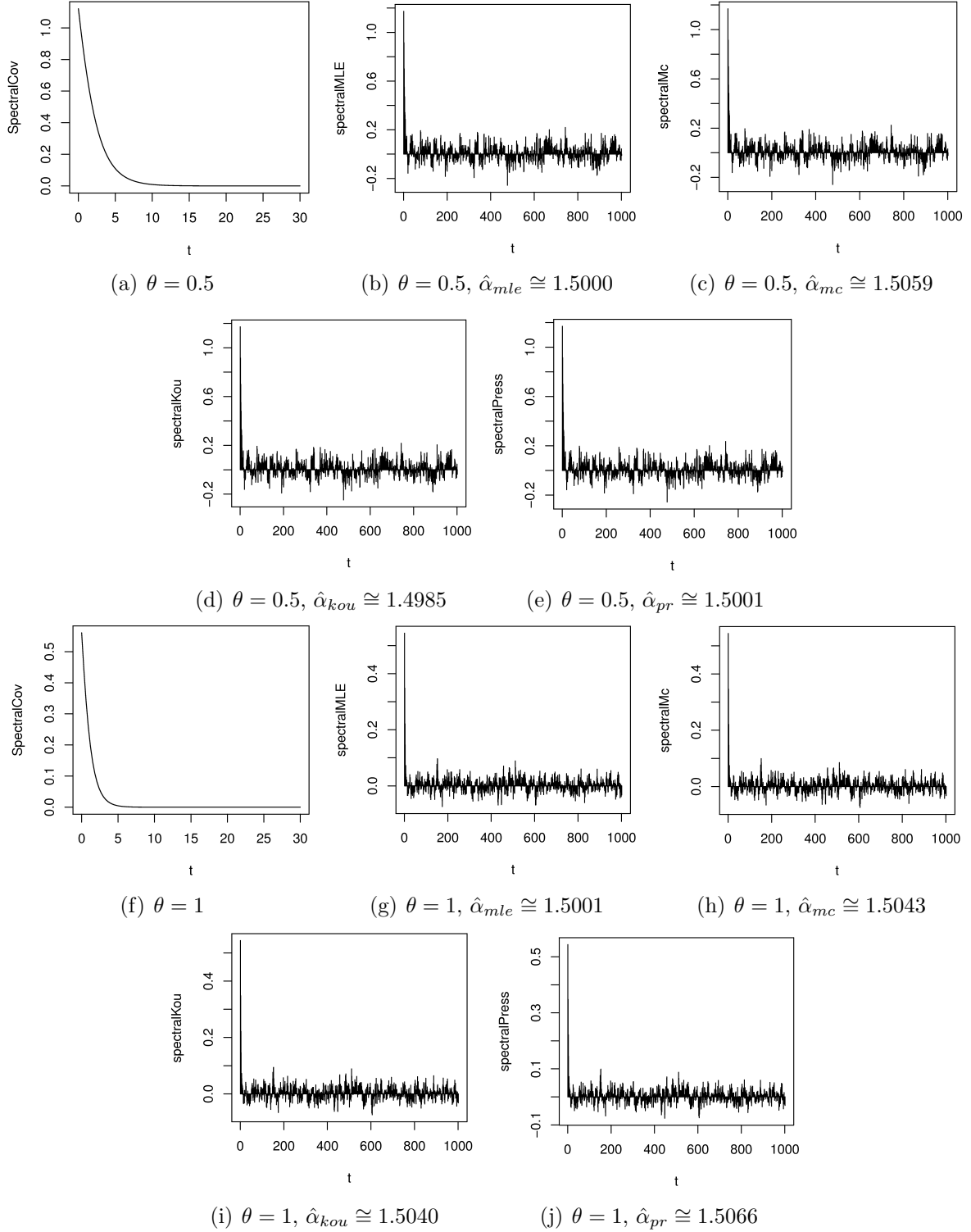


Figure 4.2: Theoretical and empirical spectral covariance of the OU process, given in (1.2), when $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $re = 1000$ and $\theta \in \{0.5, 1\}$.

From expression (4.3) it follows that $V_0 = \int_{-\infty}^0 e^{\theta s} dL(s)$. Applying proposition 3.4.1 in Samorodnitsky and Taquq (1994), one has $V_0 \sim S_\alpha(\tilde{\sigma}, 0, 0)$, where $\tilde{\sigma} = \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right)^{1/\alpha}$. Notice that, with these parameters for V_0 , the OU process is stationary; however, it is not stationary when V_0 is a constant random variable. The theoretical codifference function

of the OU process is given by the following expression (see example 4.7.1 in Samorodnitsky and Taqqu, 1994).

$$\tau_V(s; k) = \frac{|s|^\alpha}{\theta^\alpha} (1 + e^{-\alpha\theta k} - (1 - e^{-\theta k})^\alpha). \quad (4.4)$$

Figure 4.1 presents theoretical and empirical codifference functions for the OU process. We consider $s \in \{1, s^*\}$, where s^* is the value that gives the same ordinate range for both the theoretical codifference and the spectral covariance measures. Notice that when the θ value increases, the theoretical codifference function decreases to zero very fast. Furthermore, when $\theta = 1$ the empirical codifference function better approaches to its theoretical counterpart.

The theoretical spectral covariance of the OU process can be calculated using expression (4.3). It is given by the following expression (see proposition 2 in Damarackas and Paulauskas, 2014)

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \frac{1}{\alpha\theta(1 + e^{-2\theta k})^{(2-\alpha)/2}} e^{-\theta k}, \quad k \geq 0. \quad (4.5)$$

Figure 4.2 presents the theoretical and empirical spectral covariance of the OU process. These graphs present the four different estimators for α , described in Subsection 2.2. We note there is no significant difference in the empirical spectral covariance functions when the α estimator changes. This is due to the fact that all α estimators values are very accurate. Comparing Figures 4.1 and 4.2, we see that the estimators for the spectral covariance and for the codifference functions (when $s^* = 0.5612$) exhibit similar behavior.

Example 4.2. Cosine Process

Consider $f(t) = a^2$, for $a > 0$. By solving the differential equation in (3.16) we find $\rho(t) = \cos(at)$ and the resulting process is given by

$$V(t) = V_0 \cos(at) + \int_0^t \cos(a(t-s)) dL(s). \quad (4.6)$$

Hereafter, we shall call it as the Cosine Process.

The discrete form of this process is given in Proposition 4.1 below.

Proposition 4.1. *Consider the process given in (4.6). One discretization form of this process is given by*

$$V((k+1)h) = 2 \cos(ah) V(kh) - V((k-1)h) + \varepsilon_{k,h}, \quad (4.7)$$

where h is the discretization step size and $\varepsilon_{k,h}$ is $S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, 0)$ random variable, where

$$\sigma_\varepsilon^\alpha = 2 \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds. \quad (4.8)$$

Proof: From the expression (4.6), we have

$$\begin{aligned}
V((k+1)h) &= V_0 \cos(a(k+1)h) + \int_0^{(k+1)h} \cos[a((k+1)h-s)] dL(s) \\
&= V_0 [\cos(akh) \cos(ah) - \sin(akh) \sin(ah)] \\
&\quad + \int_0^{(k+1)h} \cos(a(kh-s)) \cos(ah) - \sin(a(kh-s)) \sin(ah) dL(s) \\
&= \cos(ah)V(kh) - V_0 \sin(akh) \sin(ah) - \sin(ah) \int_0^{(k+1)h} \sin(a(kh-s)) dL(s) \\
&\quad + \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh-s)) dL(s).
\end{aligned}$$

By using trigonometric properties based on the cosine function and multiplying the resulting expression by two, we obtain

$$\begin{aligned}
V((k+1)h) &= 2 \cos(ah)V(kh) - \cos(a(k-1)h)V_0 - \int_0^{(k-1)h} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s) \\
&\quad - \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s) + 2 \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh-s)) dL(s) \\
&= 2 \cos(ah)V(kh) - V((k-1)h) + \varepsilon_{k,h},
\end{aligned}$$

where $\varepsilon_{k,h} = - \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s) + 2 \cos(ah) \int_{kh}^{(k+1)h} \cos(a(kh-s)) dL(s)$. We can rewrite $\varepsilon_{k,h}$ as

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k,h} &= - \int_{(k-1)h}^{kh} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s) \\
&\quad + \int_{kh}^{(k+1)h} [2 \cos(ah) \cos(a(kh-s)) - \cos(a((k-1)h-s))] dL(s) = A + B,
\end{aligned}$$

where $A = - \int_{(k-1)h}^{kh} \cos(a((k-1)h-s)) dL(s)$ and $B = \int_{kh}^{(k+1)h} [2 \cos(ah) \cos(a(kh-s)) - \cos(a((k-1)h-s))] dL(s)$. Notice that A and B are independent random variables such that $A \sim S_\alpha(\sigma_A, 0, 0)$, with $\sigma_A^\alpha = \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds$, and $B \sim S_\alpha(\sigma_B, 0, 0)$, with $\sigma_B^\alpha = \int_0^h |2 \cos(ah) \cos(as) - \cos(a(s+h))|^\alpha ds$. Using trigonometric properties, we have $\sigma_B^\alpha = \int_0^h |\cos(a(s-h))|^\alpha ds$. Then, by property 1.2.1 in Samorodnitsky and Taqqu (1994), we obtain $\varepsilon_{k,h} \sim S_\alpha(\sigma_\varepsilon, 0, 0)$, with

$$\sigma_\varepsilon^\alpha = \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds + \int_0^h |\cos(a(s-h))|^\alpha ds = 2 \int_0^h |\cos(as)|^\alpha ds, \quad (4.9)$$

where the above second equality can be obtained by changing variables. \square

To calculate the codifference function we consider that V_0 is a random variable with symmetric α -stable distribution, denoted by $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. The Cosine process is non-stationary, because there is at least one unit root in the discrete form given in Proposition 4.1. Thus, we can use Proposition 3.2(iii) to calculate its theoretical codifference, which is given in Corollary 4.1 below.

Corollary 4.1. *Let $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ be the process given in (4.6). Then its theoretical codifference function is given by*

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) = & |s|^\alpha \sigma^\alpha [|\cos(a(t+k))|^\alpha + |\cos(at)|^\alpha - |\cos(a(t+k)) - \cos(at)|^\alpha] \\ & + |s|^\alpha \int_0^t (|\cos(a(t+k-x))|^\alpha + |\cos(a(t-x))|^\alpha \\ & - |\cos(a(t+k-x)) - \cos(a(t-x))|^\alpha) dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Proof: From Proposition 3.2(iii), since $\rho(t) = \cos(at)$, we obtain expression (4.10). \square

Remark 4.1. The codifference function of the Cosine process depends both on k and t . Figure 4.3 shows the results when we fix $t = h$ in expression (4.10). We also consider $V_0 = 0$ in order to compare the codifference and the spectral covariance measures. Under these assumptions, we have

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, h) = & |s|^\alpha \int_0^h (|\cos(a(h+k-x))|^\alpha + |\cos(a(h-x))|^\alpha \\ & - |\cos(a(h+k-x)) - \cos(a(h-x))|^\alpha) dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Figure 4.3 presents theoretical and empirical codifference functions of the process given in (4.6). Again we consider $s \in \{1, s^*\}$, where s^* is the value that gives the same ordinate range for both the theoretical codifference and the spectral covariance measures. Notice that when the value of a increases, the theoretical codifference function presents large variability, but it preserves the same characteristic. Furthermore, the theoretical codifference function does not converge to zero, while its empirical counterpart slowly does. The empirical codifference function estimates badly its theoretical counterpart.

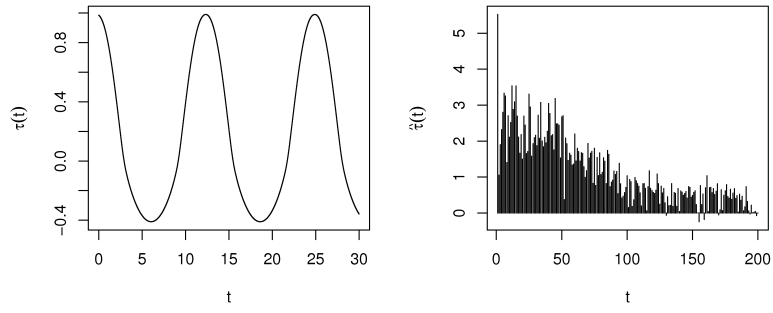
Remark 4.2. A referee pointed out that the theoretical codifference function of the Cosine process is asymmetric relatively to the abscissa axis. In fact, we can numerically calculate the extremes of the function in (4.11) for the cases shown in Figure 4.3. The maximum and minimum values are given by 0.9897 and -0.4101 , respectively, for Figure 4.3(a). Also the maximum and minimum values are given by 0.9577 and -0.3982 , respectively, for Figure 4.3(c). Thus, the theoretical codifference function of the Cosine process is asymmetric relatively to the abscissa axis.

The spectral covariance of the Cosine process is given in Corollary 4.2 below.

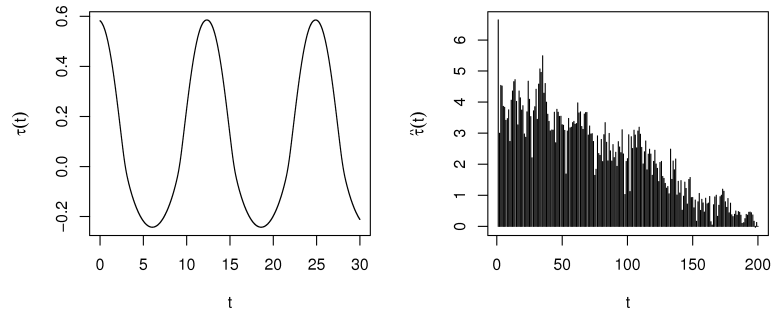
Corollary 4.2. *Let $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ be the process given in (4.6). Then its spectral covariance is given by*

$$\begin{aligned} \varrho(V(t), V(t+k)) = & \int_0^t \cos(a(t-s)) \cos(a(t+k-s)) [\cos^2(a(t-s)) \\ & + \cos^2(a(t+k-s))]^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \end{aligned} \quad (4.12)$$

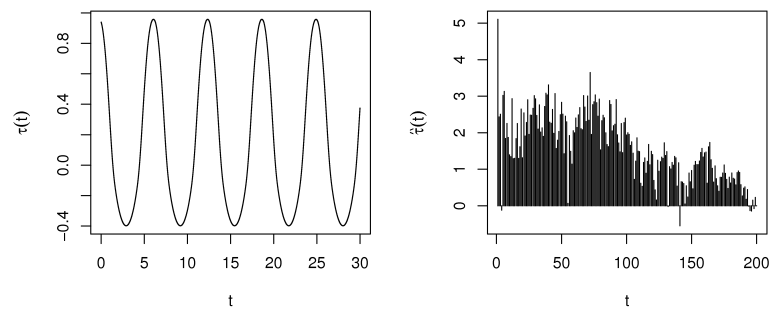
Proof: From Proposition 3.3, since $\rho(t) = \cos(at)$, we obtain expression (4.12). \square



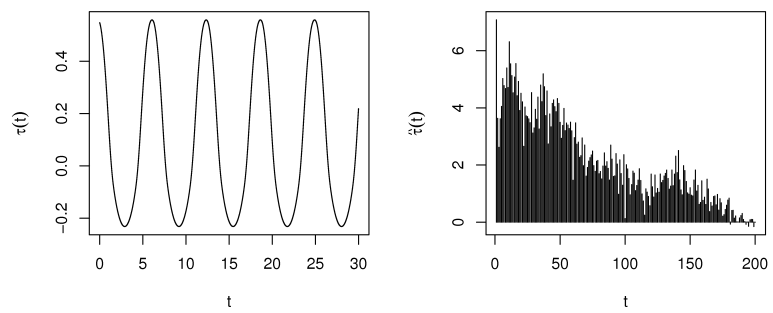
(a) $a = 0.5, s = 1$



(b) $a = 0.5, s^* = 0.7045$



(c) $a = 1, s = 1$



(d) $a = 1, s^* = 0.6976$

Figure 4.3: Theoretical and empirical codifference functions of the Cosine process, given in (4.6), when $\alpha = 1.5, \sigma = 1, h = 0.5, n = 200$ and $a \in \{0.5, 1\}$.

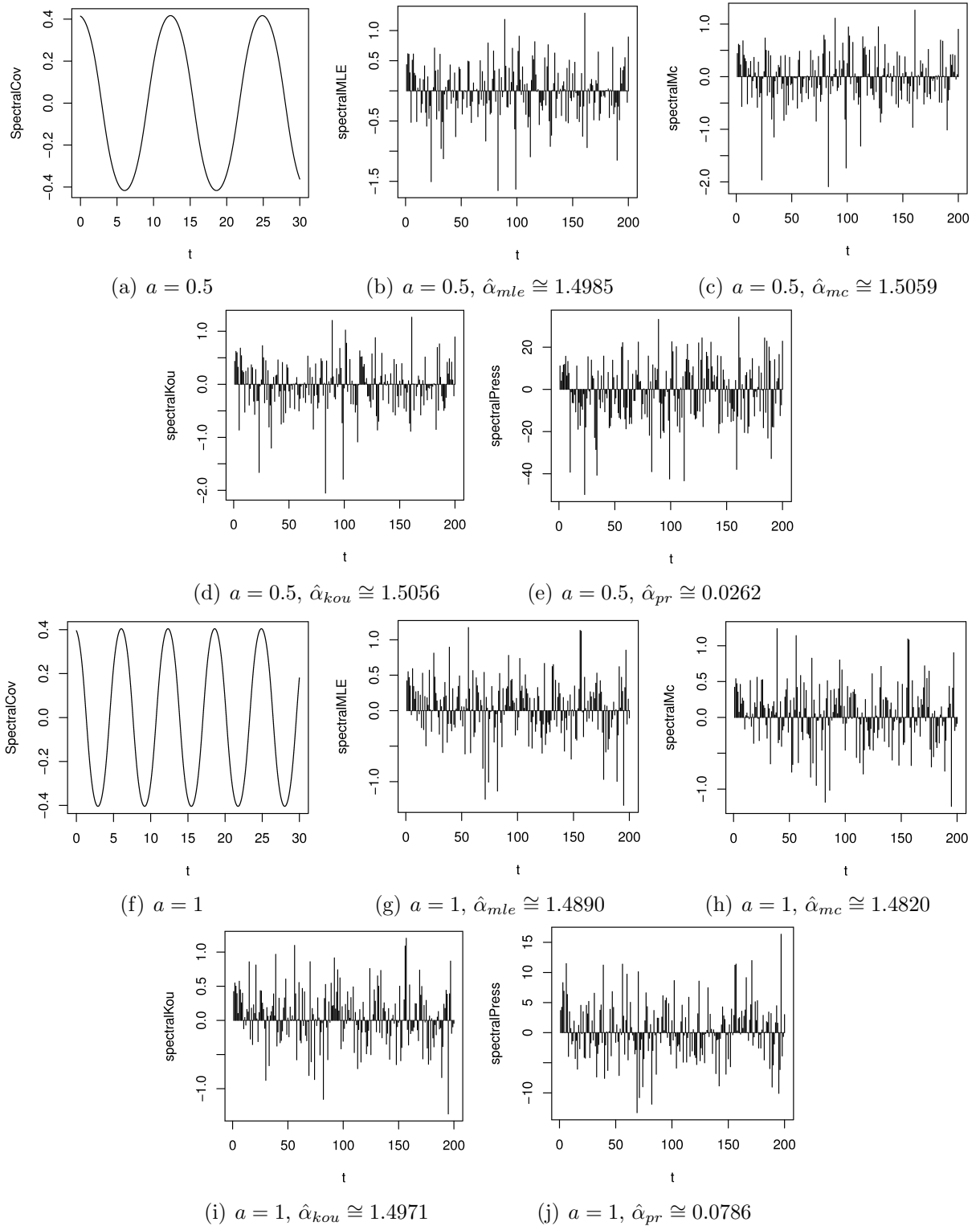


Figure 4.4: Theoretical and empirical spectral covariance of the Cosine process, given in (4.6), when $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 200$, $re = 1000$ and $a \in \{0.5, 1\}$.

Figure 4.4 presents the theoretical and empirical spectral covariance of the Cosine process. Notice that expression (4.12) depends on k and t and we fix $t = h$ as in the codifference function. These graphs present the four different estimators for α , described in Subsection 2.2. We notice there are differences in the empirical spectral covariance

measure when the α estimator changes. This is due to the fact that each α estimator has different value, especially the one proposed by Press (1972). In this example, $\hat{\alpha}_{pr}$ has the highest bias. Comparing Figures 4.3 and 4.4, we see that the estimators for the spectral covariance measure better approach its theoretical counterpart.

Example 4.3. Consider $f(t) = 2a(1 - 2at^2)$, for any $a > 0$. By solving the differential equation in (3.16) we find $\rho(t) = e^{-at^2}$ and the resulting process is given by

$$V(t) = V_0 e^{-at^2} + \int_0^t e^{-a(t-s)^2} dL(s). \quad (4.13)$$

The discrete form of this process is given in Proposition 4.2 below.

Proposition 4.2. Consider the process given in (4.13). One discretization form for this process is given by

$$V((k+1)h) = e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + W_{k,h}, \quad (4.14)$$

where h is the discretization step size and

$$W_{k,h} = \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1) dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} dL(s).$$

Moreover, the distribution of $W_{k,h}$ is $S_\alpha(\sigma_W, 0, 0)$ random variable, where

$$\sigma_W^\alpha = \int_0^{kh} e^{-\alpha a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1)^\alpha ds + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-\alpha a((kh-s)^2 - 2sh + (2k+1)h^2)} ds. \quad (4.15)$$

Proof: From expression (4.13), we have

$$V_0 e^{-a(kh)^2} = V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a(kh-s)^2} dL(s). \quad (4.16)$$

We also have

$$V((k+1)h) = e^{-a(2k+1)h^2} \left[V_0 e^{-a(kh)^2} + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2)} dL(s) \right].$$

Thus,

$$V_0 e^{-a(kh)^2} = e^{a(2k+1)h^2} V((k+1)h) - \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2)} dL(s). \quad (4.17)$$

From expressions (4.16) and (4.17), we get

$$\begin{aligned} V((k+1)h) &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) - \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2 + (2k+1)h^2)} dL(s) \\ &\quad + \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh)^2 - 2s(k+1)h + s^2 + (2k+1)h^2)} dL(s) \\ &= e^{-a(2k+1)h^2} V(kh) + W_{k,h}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} W_{k,h} &= \int_0^{(k+1)h} e^{-a((kh-s)^2-2sh+(2k+1)h^2)} dL(s) - \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2+(2k+1)h^2)} dL(s) \\ &= \int_0^{kh} e^{-a((kh-s)^2+(2k+1)h^2)} (e^{2ash} - 1) dL(s) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a((kh-s)^2-2sh+(2k+1)h^2)} dL(s). \end{aligned}$$

Using propositions 1.2.1 and 3.4.1 in Samorodnitsky and Taqqu (1994), the distribution of $W_{k,h}$ is $S_\alpha(\sigma_W, 0, 0)$, where σ_W^α is given by expression (4.15). \square

To calculate the codifference function we consider that V_0 is a random variable with symmetric α -stable distribution, denoted by $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. The theoretical codifference function of this process is given in Corollary 4.3.

Corollary 4.3. *Let $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ be the process given in (4.13). Then its theoretical codifference function is given by*

$$\begin{aligned} \tau_V(s; k, t) &= |s|^\alpha \sigma^\alpha \left[e^{-a\alpha(t+k)^2} + e^{-a\alpha t^2} - (e^{-at^2} - e^{-a(t+k)^2})^\alpha \right] \\ &\quad + |s|^\alpha \int_0^t (e^{-a\alpha(t+k-x)^2} + e^{-a\alpha(t-x)^2} - (e^{-a(t-x)^2} - e^{-a(t+k-x)^2})^\alpha) dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Proof: From Proposition 3.2(iii), since $\rho(t) = e^{-at^2}$, we obtain expression (4.18). \square

Remark 4.3. The codifference function given by (4.18) depends both on k and t . Figure 4.5 shows the results when we fix $t = h$ in expression (4.18). We also consider $V_0 = 0$ in order to compare the codifference and the spectral covariance measures. Under these assumptions, we have

$$\tau_V(s; k, h) = |s|^\alpha \int_0^h (e^{-a\alpha(h+k-x)^2} + e^{-a\alpha(h-x)^2} - (e^{-a(h-x)^2} - e^{-a(h+k-x)^2})^\alpha) dx. \quad (4.19)$$

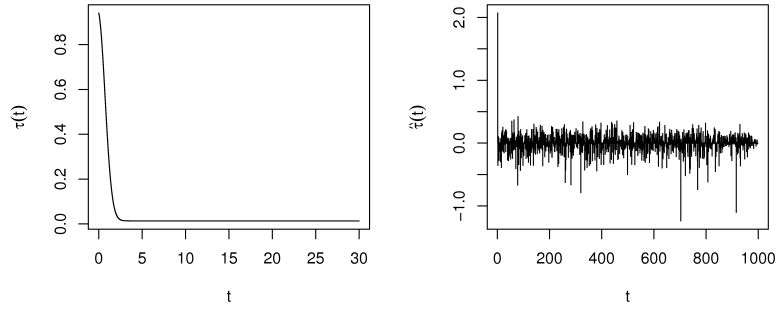
Figure 4.5 presents theoretical and empirical codifference functions for the process given in (4.13). Again we consider $s \in \{1, s^*\}$, where s^* is the value that gives the same ordinate range for both the theoretical codifference and the spectral covariance measures. Notice that, when the value a increases, the theoretical and empirical functions converge quickly to zero. The results are very similar to Example 4.1.

The spectral covariance of the process defined in (4.13) is given in Corollary 4.4 below.

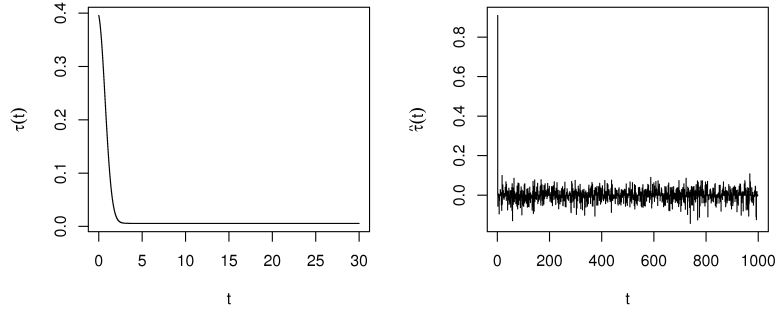
Corollary 4.4. *Let $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ be the process defined in (4.13). Then its spectral covariance is given by*

$$\varrho(V(t), V(t+k)) = \int_0^t e^{-a(t-s)^2} e^{-a(t+k-s)^2} \left(e^{-2a(t-s)^2} + e^{-2a(t+k-s)^2} \right)^{\frac{\alpha-2}{2}} ds. \quad (4.20)$$

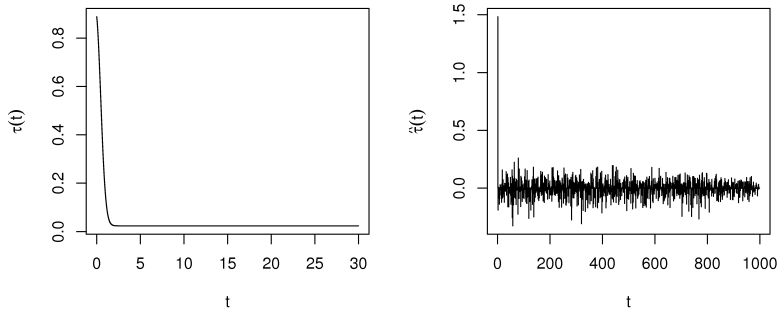
Proof: From Proposition 3.3, since $\rho(t) = e^{-at^2}$, we obtain expression (4.20). \square



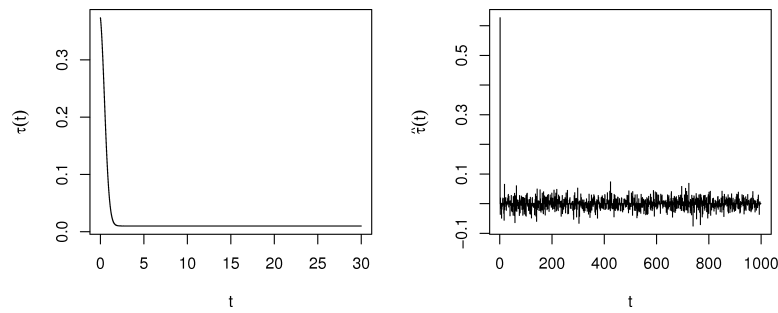
(a) $a = 0.5, s = 1$



(b) $a = 0.5, s^* = 0.5612$



(c) $a = 1, s = 1$



(d) $a = 1, s^* = 0.5612$

Figure 4.5: Theoretical and empirical codifference functions of the process given in (4.13) when $\alpha = 1.5, h = 0.5, n = 1000$ and $a \in \{0.5, 1\}$.

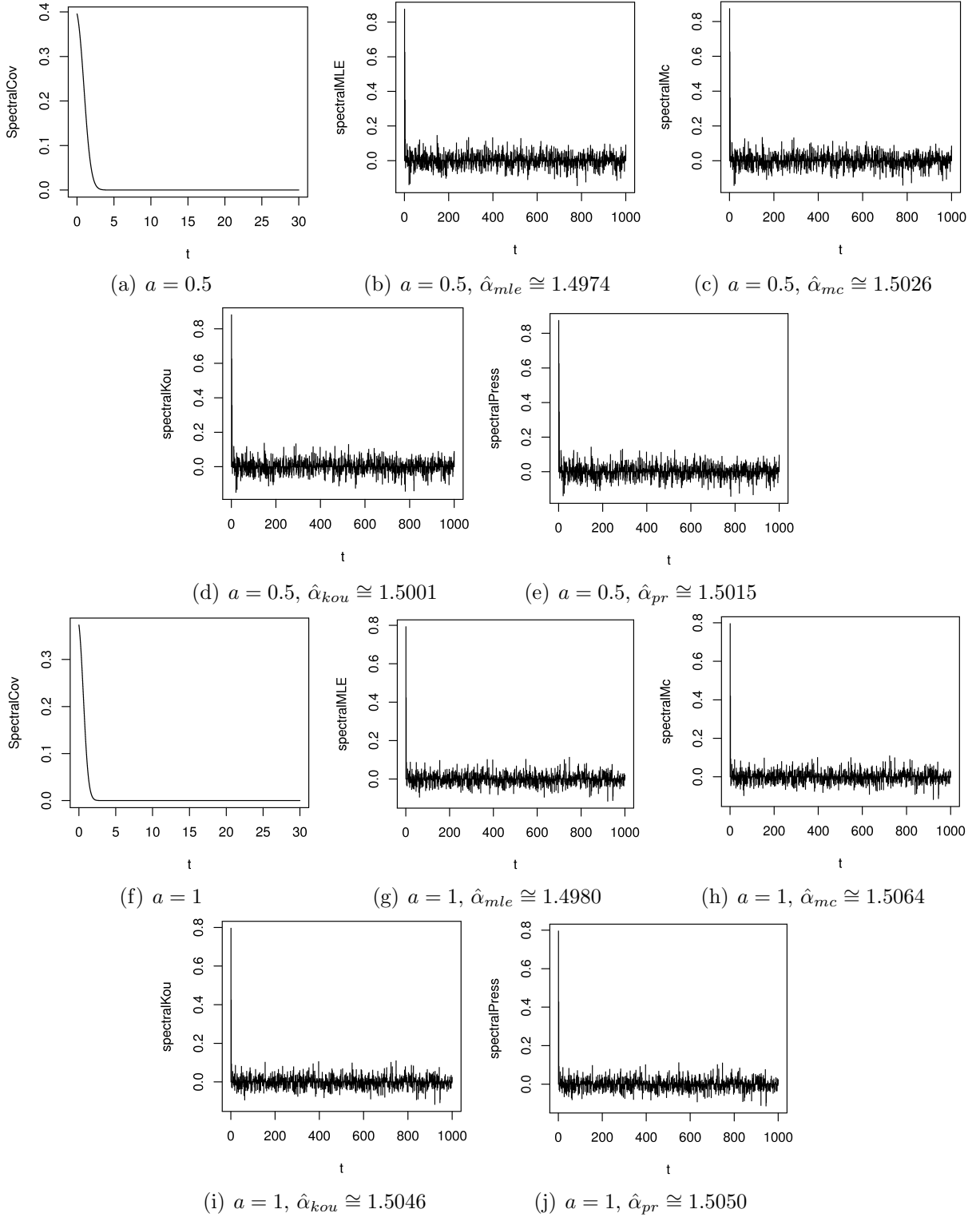


Figure 4.6: Theoretical and empirical spectral covariance of the process given in (4.13) when $\alpha = 1.5$, $\sigma = 1$, $h = 0.5$, $n = 1000$, $re = 1000$ and $a \in \{0.5, 1\}$.

Figure 4.6 presents the theoretical and empirical spectral covariance of the process given in (4.13). Notice that expression (4.20) depends on k and t and we fix $t = h$ as in the codifference function. These graphs present the four different estimators for α , described in Subsection 2.2. We note there is no significant difference in the empirical spectral

covariance when the α estimator changes. This is due to the fact that all α estimators values are very accurate. Comparing Figures 4.5 and 4.6, we see that the estimators for the spectral covariance and for the codifference functions (when $s^* = 0.5612$) exhibit similar behavior.

5 Monte Carlo Simulations

In this section we present Monte Carlo simulation results for the maximum likelihood estimation (mle) in both the OU and Cosine processes.

5.1 Maximum Likelihood in the OU Process

For every function $\rho(\cdot)$ and each noise process $L(\cdot)$, the process given in (3.1) has different parameters. In this subsection, we estimate the parameters for the case when $\rho(t) = e^{-\theta t}$, that is, the OU process.

From expression (4.1), notice that we can consider the OU as an AR(1) process. Let $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma, \theta)'$ be the parameter vector to be estimated and let $\{V_{kh}\}_{k=0}^{N-1}$ be a sample of size N of the process given by (1.2). We have

$$Z_{k,h} = V_{kh} - e^{-\theta h} V_{(k-1)h}.$$

Notice that, for a fixed h , $\{Z_{k,h}\}_{k \in \mathbb{N}}$ is a sequence of i.i.d. random variables with symmetric α -stable distribution and scale parameter σ . Hence, the likelihood function is given by

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta} | Z_{1,h}, \dots, Z_{N-1,h}) = \prod_{k=1}^{N-1} f(Z_{k,h} | \boldsymbol{\eta}),$$

where $f(\cdot | \boldsymbol{\eta})$ is the density distribution function of the α -stable distribution. Recall that for only three cases of α there exist closed formulae for the distribution and density functions.

The log-likelihood function is given by

$$\ell(\boldsymbol{\eta} | Z_{1,h}, \dots, Z_{N-1,h}) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln(f(Z_{k,h} | \boldsymbol{\eta})).$$

By numerical optimization of function $\ell(\cdot)$, we obtain the maximum likelihood estimator $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\sigma}, \hat{\theta})'$. In the simulations, the θ parameter is assumed to be in the set $\{1, 2\}$. In this work, the parameters of the α -stable distribution are $\alpha \in \{1.1, 1.5, 2\}$ and $\sigma = 1$. Notice that we are including the Gaussian case ($\alpha = 2$). The Monte Carlo simulation study is based on time series of samples of size $N = 2000$ derived from OU processes. We perform 500 replications for each experiment. To generate the time series we apply the discrete equation given in (4.1) and the discretization step size is considered to be 1.

Figure 5.1 shows boxplots of the parameter estimation procedure. The boxplots present the mean, median, outlier points and an idea of the variability. From these graphs we conclude that the maximum likelihood estimation performs relatively well. Comparing all graphs, it is possible to see that the worst performance occurs when $\alpha = 1.1$. In this case, there are several outlier points, and the mean estimated values are not so close to

the real parameter values. This result was expected by the fact that the α parameter is too close to the range where even the first moment of the α -stable process is infinite.

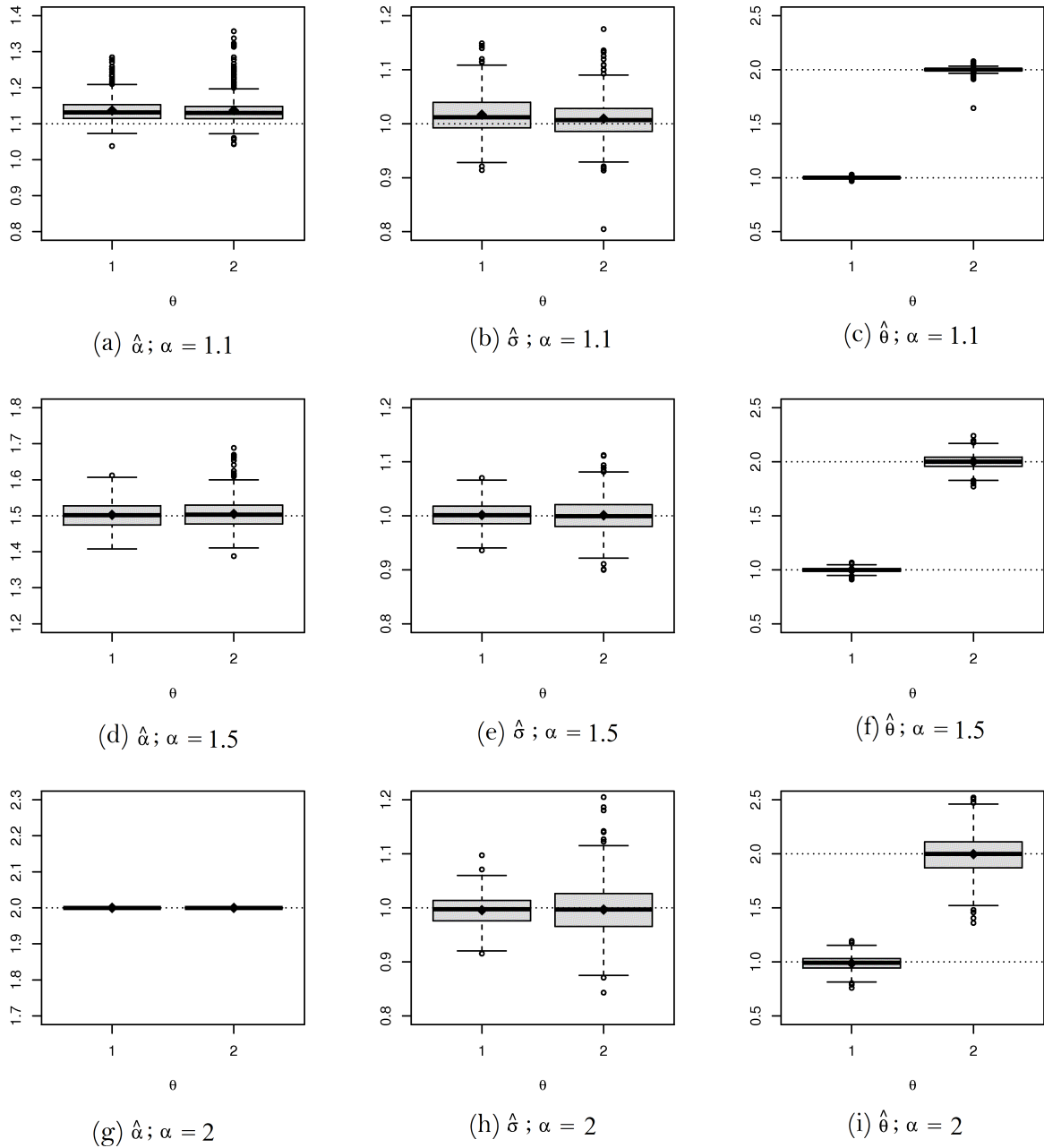


Figure 5.1: Estimation results for OU processes when $h = 1$ and $N = 2000$. Each panel shows the results for $\theta \in \{1, 2\}$. The horizontal black lines report the medians for each experiment, the horizontal dotted lines show the true parameter values, and the black dots are the sample mean values.

The small bias values presented in Figure 5.1 indicate that, for all parameters, the mean estimated value is very close to the true parameter one. As expected, the estimator performance improves as the α parameter gets closer to $\alpha = 2$ (Gaussian case). From the graphs it is also clear that the θ parameter is better estimated than the others. There is

a small difference in the results when $a = 1$ or $a = 2$: in the latter case the variability slightly increases.

From a large Monte Carlo simulation study done before, it is clear that there is no significant difference in the results for both cases $h = 1$ and $h = 0.1$, when we kept fixed the sample size N . However, when the product Nh increases, the parameter estimation improves. Another interesting characteristic is that, when the σ parameter value increases, its estimation degrades by increasing the bias value and its variability. Similar results are obtained when the θ parameter value increases. We performed an extensive simulation study and the results are available upon request.

5.2 Maximum Likelihood in the Cosine Process

In this subsection, we estimate the parameters for the case when $\rho(t) = \cos(at)$, that is, the Cosine process, via maximum likelihood procedure. From expression (4.7), notice that we can consider the Cosine process as a non-stationary AR(2) process. Let $\boldsymbol{\eta} = (\alpha, \sigma_\varepsilon, a)'$ be the parameter vector to be estimated and let $\{V_{kh}\}_{k=0}^{N-1}$ be a sample of size N of the process given by (4.6). The procedure to obtain the likelihood function is very similar to the case presented in Section 5.1.

In the simulations, the a parameter is assumed to be in the set $\{1, 2\}$. In this work, the α parameter of the α -stable distribution is in the set $\{1.1, 1.5, 2\}$ and σ_ε depends on α and a parameters (see expression (4.8)). Notice that we are including the Gaussian case ($\alpha = 2$). The Monte Carlo simulation study is based on time series of samples of size $N = 2000$ derived from Cosine processes. We perform 500 replications for each experiment. To generate the time series we apply the discrete equation given in (4.7) with discretization step size $h = 1$.

Figure 5.2 presents the results for the mle procedure. We observe that the estimation of the a parameter is very accurate, but this does not occur for the other parameters. However, when $\alpha = 2$ the estimation improves for all parameters. Comparing all graphs, the worst performance occurs when $\alpha = 1.1$, since the bias is slightly larger than the other results. There is no significant difference in the results for both cases $a = 1$ and $a = 2$. The estimation via maximum likelihood for the Cosine process was very satisfactory as for the OU process.

6 Conclusions

In this work we present the codifference and the spectral covariance functions as two dependence measures for the studied stochastic processes. These measures replace the autocovariance function when it is not well defined. The consistency property of the empirical codifference estimator, proposed in Subsection 2.1, is shown for stationary symmetric α -stable processes. Moreover, we present a continuous-time process arising from the generalized Langevin equation and show some of its properties. Results for the theoretical codifference and the spectral covariance functions considering the mentioned process are presented. In addition, several particular examples are discussed, showing their codifference and spectral covariance functions. The spectral covariance function has the advantage of not relying on s values, while the codifference function presents different results when s changes its value.

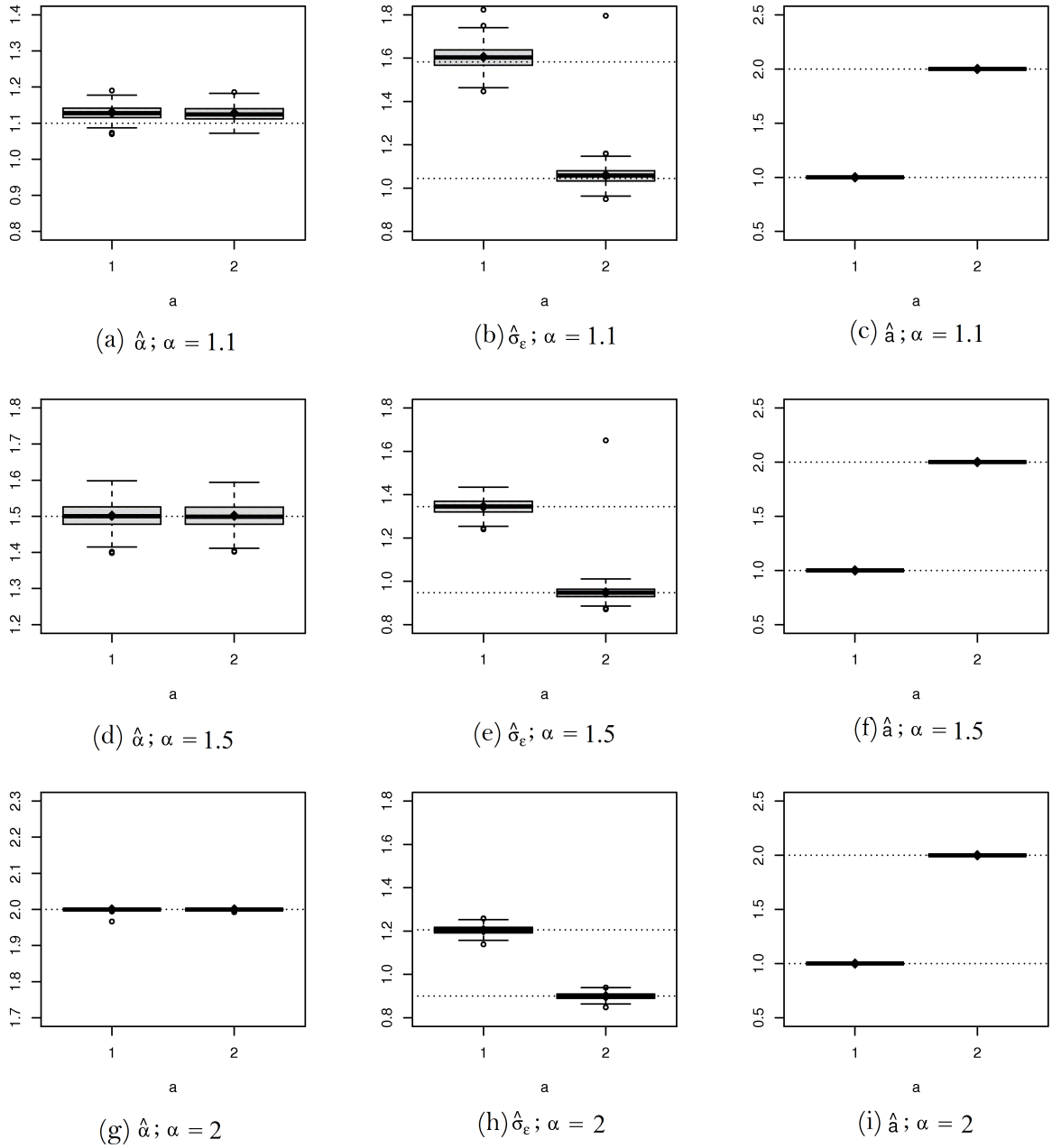


Figure 5.2: Estimation results for Cosine processes when $h = 1$ and $N = 2000$. Each panel shows the results for $a \in \{1, 2\}$. The horizontal black lines report the medians for each experiment, the horizontal dotted lines show the true parameter values, and the black dots are the sample mean values.

Furthermore, we show via Monte Carlo simulation that maximum likelihood estimators for OU and Cosine processes present features like low bias and low variability. This simulation study shows that the mle estimation present large variability and some outlier values when $\alpha = 1.1$. This is due to the fact that the α parameter is close to the range where the first moment of the process is infinite ($0 < \alpha \leq 1$). The estimator performance improves when the α parameter gets closer to the Gaussian case ($\alpha = 2$). The Monte Carlo simulations also show that the discretization step size h of the process

did not significantly matter for the OU parameters estimation. For future work we shall investigate the maximum likelihood method for other functions $\rho(\cdot)$ in the process given by the expression (3.1).

Acknowledgments

J. Stein was supported by CNPq-Brazil. S.R.C. Lopes research was partially supported by CNPq-Brazil and by INCT *em Matemática*.

The authors would like to thank the editor and an anonymous referee for their valuable comments and suggestions that greatly improved the manuscript.

References

- Applebaum, D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. New York: Cambridge University Press.
- Astauskas, A. (1983). "Limit theorems for sums of linearly generated random variables". *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **23**(2), 127-134.
- Astauskas, A., J.B. Lévy, M.S. Taqqu (1991). "The asymptotic dependence structure of the linear fractional Lévy motion". *Lithuanian Mathematical Journal*. Vol. **31**(1), 1-19.
- Barndorff-Nielsen, O.E. and N. Shephard (2003). "Integrated OU Processes and Non-Gaussian OU-based Stochastic Volatility Models". *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. **30**(2), 277-295.
- Barndorff-Nielsen, O.E. and N. Shephard (2001). "Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics". *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B*, Vol. **63**(2), 167-241.
- Barndorff-Nielsen, O.E. and N. Shephard (2000). "Modelling by Lévy Processes for Financial Econometrics". Working Paper. University of Oxford, Oxford.
- Brockwell, P.J. and R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer.
- Damarackas, J. and V. Paulauskas (2014). "Properties of spectral covariance for linear processes with infinite variance". *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **54** (3), 252-276.
- Fleming, C.H., J.M. Calabrese, M. Mueller, K.A. Olson, P. Leimgruber and W.F. Fagan (2014). "Non-Markovian maximum likelihood estimation of autocorrelated movement processes". *Methods in Ecology and Evolution*, Vol. **5**, 462-472.
- Gross, A. (1994). "Some mixing conditions for stationary symmetric stable stochastic processes". *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **51**(2), 277-295.
- Jongbloed, G., F.H. Van der Meulen and A.W. Van der Vaart (2005). "Nonparametric inference for Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes". *Bernoulli*, Vol. **11**(5), 759-791.
- Kannan, D. (1977). "On the generalized Langevin equation". *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **11**(1), 1-24.
- Kodia, B. and B. Garel (2014). "Estimation and comparison of signed symmetric covariation coefficient and generalized association parameter for alpha-stable dependence modeling". *Communication in Statistics, Theory and Methods*, Vol. **43** (24), 5156-5174.
- Kokoszka, P.S. and M.S. Taqqu (1994). "Infinite Variance Stable ARMA Processes". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(2), 203-220.

- Kokoszka, P.S. and M.S. Taqqu (1995). “Fractional ARIMA with stable innovations”. *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. **60**, 19-47.
- Koutrouvelis, I.A. (1980). “Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **75** (372), 918-928.
- Langevin, P. (1908). “On the Theory of Brownian Motion (Sur la théorie du mouvement brownien)”. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **146**, 530-533.
- Lukacs, E. (1975). *Stochastic Convergence*. New York: Academic Press.
- McCulloch, J.H. (1986). “Simple consistent estimators of stable distribution parameters”. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, Vol. **15** (4), 1109-1136.
- Medino, A.V., S.R.C. Lopes, R. Morgado and C.C.Y. Dorea (2012). “Generalized Langevin equation driven by Lévy processes: A probabilistic, numerical and time series based approach”. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, Vol. **391**, 572-581.
- Mingarelli, A.B. (1983). *Volterra-Stieltjes integral equations and generalized ordinary differential expressions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **989**. Berlin: Springer.
- Paulauskas, V.J. (1976). “Some remarks on multivariate stable distributions”. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. **6** (3), 356-368.
- Press, S.J. (1972). “Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **67** (340), 842-846.
- Rosadi, D. and M. Deistler (2009). “Estimating the codifference function of linear time series models with infinite variance”. *Metrika*, Vol. **73**, 395-429.
- Samorodnitsky, G. and M.S. Taqqu (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York: Chapman & Hall.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finances. Pricing Financial Derivatives*. England: Wiley.
- Zhang, S. and X. Zhang (2013). “A least squares estimator for discretely observed Ornstein-Uhlenbeck processes driven by symmetric α -stable motions”. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **65**, 89-103.