O Teorema do Semiespaço de Hoffman-Meeks

Autor: Humberto de Lima

Orientador: Álvaro Krüger Ramos

O Teorema do Semiespaço

Um resultado clássico em superfícies mínimas é o:

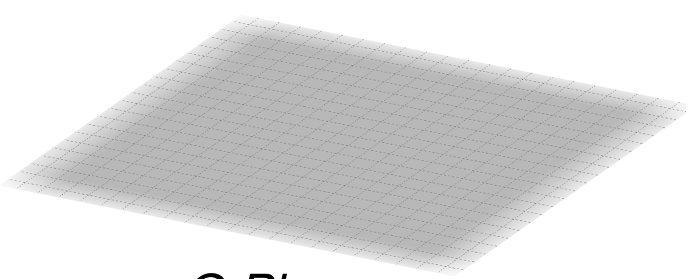
Teorema 1 (Teorema do Semiespaço, Hoffman-Meeks [1]) *Seja $\mathcal{M}$ uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$. Se $\mathcal{M}$ é própria e não planar, então $\mathcal{M}$ não está contida em um semiespaço.*

Em particular, este resultado nos diz que se uma superfície mínima própria e conexa $\mathcal{M}$ em $\mathbb{R}^3$ está contida em um semiespaço determinado por um plano P, então $\mathcal{M}$ é um plano paralelo a P.

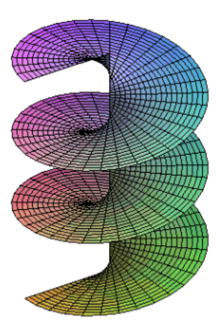
Observe que a hipótese de $\mathcal{M}$ ser própria (ou seja, se para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^3$ vale que $K \cap \mathcal{M}$ é um compacto de $\mathcal{M}$) é fundamental, pois existem exemplos de superfícies mínimas completas não planares de $\mathbb{R}^3$ que ficam contidas entre dois planos paralelos (Jorge-Xavier) e mesmo contidas em uma bola (Nadirashivili); porém, estes exemplos não são próprios.
Uma consequência interessante do Teorema 1 é o Teorema Forte do Semiespaço, que afirma que *quaisquer duas superfícies mínimas completas e mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ se intersectam*. Entretanto, nosso principal objetivo aqui não será estudar suas aplicações, mas sim ver a beleza contida na simplicidade de sua demonstração.

Superfícies Mínimas

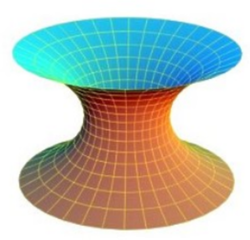
Uma superfície $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$ é dita *mínima* se for um ponto crítico do funcional área com respeito a todas as variações com suporte compacto. Pode-se mostrar que toda superfície mínima localmente é um minimizante de área.
Abaixo, temos três exemplos de superfícies mínimas completas:



O Plano



O Helicoide



O Catenóide

Analiticamente, podemos definir a *curvatura média* de uma superfície $\mathcal{M}$ qualquer como a média simples de suas curvaturas principais k_1, k_2, ou seja, $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$, e vale que $\mathcal{M}$ é uma superfície mínima se e somente se $H = 0$ em todos os seus pontos.

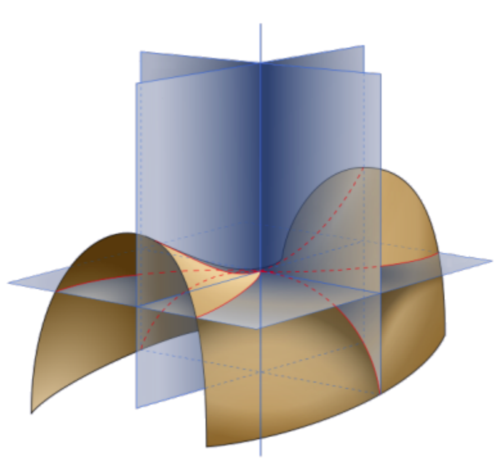


Figura: Os planos das curvaturas principais de uma superfície S em um ponto p. Se S é uma superfície mínima, $k_1 = -k_2$ e as curvas definidas pelas direções principais se curvam em direções opostas.

O Princípio do Máximo

Do ponto de vista de equações parciais elípticas, temos a seguinte proposição.

Proposição 1 *O gráfico de uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma superfície mínima se, e somente se*

$$u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - u_{xy}u_x u_y = 0 \quad (1)$$

Como toda superfície é localmente o gráfico de alguma função, a análise da equação (1) nos permite demonstrar o seguinte princípio do máximo, que é um ponto fundamental na demonstração do Teorema do Semiespaço.

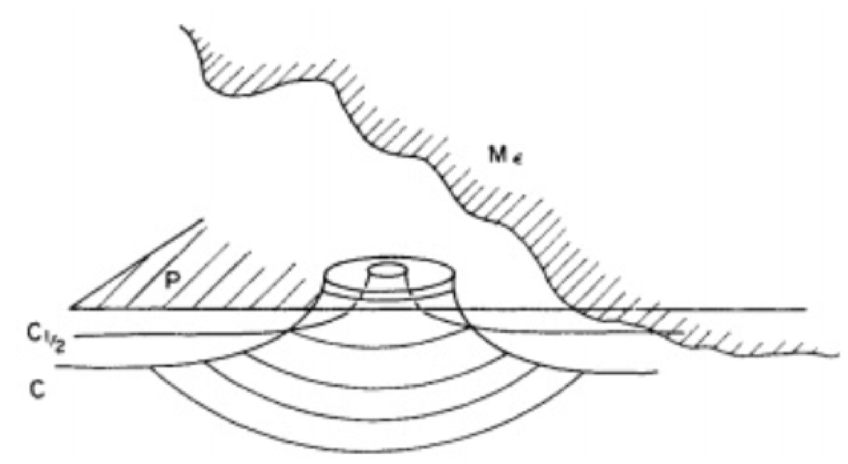
Teorema 2 (Princípio do Máximo) *Sejam $u_1, u_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ soluções de (1) tais que $u_1 \geq u_2$ em Ω e para algum $x_0 \in \operatorname{int}(\Omega)$ vale $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. Então temos que $u_1 \equiv u_2$.*

Observamos que o Teorema 2 é um caso particular de um resultado mais geral que vale para certa classe de equações quasilineares elípticas. Também observamos que decorre do Teorema 2 e do fato que superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ são analíticas (e portanto possuem única extensão) o seguinte princípio da tangência.

Corolário 1 (Princípio da tangência) *Sejam $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ superfícies mínimas completas, conexas em $\mathbb{R}^3$ tais que $\mathcal{M}_1$ seja tangente a $\mathcal{M}_2$ em certo ponto p e, em uma vizinhança de p valha que $\mathcal{M}_1$ fica de um mesmo lado definido por $\mathcal{M}_2$. Então, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.*

Uma ideia da demonstração do Teorema 1.

Suponha que o resultado seja falso e que $\mathcal{M}$ seja uma superfície mínima contida em um semiespaço H, mas em nenhum semiespaço próprio de H. Considere $P = \partial H$.
Como P é uma superfície mínima, decorre do principio da tangência que $\mathcal{M} \cap \mathcal{P} = \varnothing$.



Entretanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\mathcal{M}_\epsilon \cap \mathcal{P} \neq \varnothing$, onde $\mathcal{M}_\epsilon$ é uma translação de $\mathcal{M}$ por ϵ na direção normal a P apontando para fora de H.
Seja $\mathcal{C}$ um semicatenoide no complemento de H com bordo circular no plano P. Podemos escolher um ϵ pequeno tal que $\mathcal{M}_\epsilon \cap \mathcal{C} = \varnothing$ e $\mathcal{M}_\epsilon \cap D_1 = \varnothing$, onde D_1 é o disco unitário em P centrado no eixo de rotação de $\mathcal{C}$.
Tome $\mathcal{C}_t$ a homotetia de $\mathcal{C}$ por $0 < t \leq 1$. Note que $\mathcal{C}_t$ é sempre uma superfície mínima, e que quando $t \to 0$, $\mathcal{C}_t \to P \setminus \{0\}$.
Finalmente, considere $T = \sup\{t \mid \mathcal{C}_t \cap \mathcal{M}_\epsilon \neq \varnothing\}$. Como $\mathcal{M}_\epsilon$ é própria e os pontos onde $\mathcal{M}_\epsilon$ pode encontrar $\mathcal{C}_t$ estão todos no slab de altura ϵ abaixo de P, encontramos um ponto $p \in \mathcal{M}_\epsilon \cap \mathcal{C}_T$. Da definição de T como um supremo decorre que as superfícies $\mathcal{M}_\epsilon$ e $\mathcal{C}_T$ são tangentes em p e $\mathcal{M}_\epsilon$ fica localmente de um mesmo lado definido por $\mathcal{C}_T$. Portanto, do princípio da tangência obtemos que $\mathcal{M}_\epsilon \supset \mathcal{C}_T$, e portanto $\mathcal{M}_\epsilon$ é um catenóide.
Como catenóides não podem estar contidos em um semiespaço, chegamos em um absurdo que prova o teorema.

Referências

[1] D. Hoffman and W. H. Meeks III. *The strong halspace theorem for minimal surfaces*, **Invent. Math.**, 101, N2, 373–377 (1990).