Universidade: presente!
UFRGS PROPESQ
XXXI SIC
Salão UFRGS 2019 Conhecimento Formação Inovação
21 . 25 • OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

# NA GEOMETRIA HIPERBÓLICA, A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO É MENOR QUE DOIS ÂNGULOS RETOS

AUTOR: LUIZ EDUARDO MORAIS RECK
ORIENTADORA: MIRIAM TELICHEVESKY

## INTRODUÇÃO

Os Postulados da Geometria Euclidiana introduzidos no livro *Elementos* de Euclides e reapresentados como um conjunto minimal de axiomas por Hilbert, estabelecem de maneira definitiva um conjunto axiomático para a Geometria Euclidiana[1]. Foi da busca por tentar provar o *Postulado das Paralelas*, que emergiram novas descobertas e um profundo entendimento da Geometria Euclidiana. Foi no século XIX, com a condução de Gauss, Bolyai e Lobachewsky que começou a surgir a Geometria Hiperbólica. Nela, o *Postulado das Paralelas* é substituido pelo *Postulado da Geometria Hiperbólica*[2]. Como consequência, há uma série de resultados novos e surpreendentes, tal como o que será provado nesse trabalho, o notável fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário qualquer é menor do que dois ângulos retos.

## OBJETIVOS

- Definir os conceitos e proposições necessárias para desenvolver a prova do Teorema da soma dos ângulos internos do triângulo.
- Provar o Teorema de que em qualquer triângulo retângulo a soma dos seus ângulos internos é menor que dois ângulos retos.
- Concluir que dado um triângulo ordinário qualquer, a soma de seus ângulos internos é menor que do que dois ângulos retos.

## DESENVOLVIMENTO

**Postulado da Geometria Hiperbólica:** Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.

**Definição:** Um quadrilátero convexo é dito quadrilátero de Lambert quando possuir três ângulos internos retos, conforme a Figura 1.

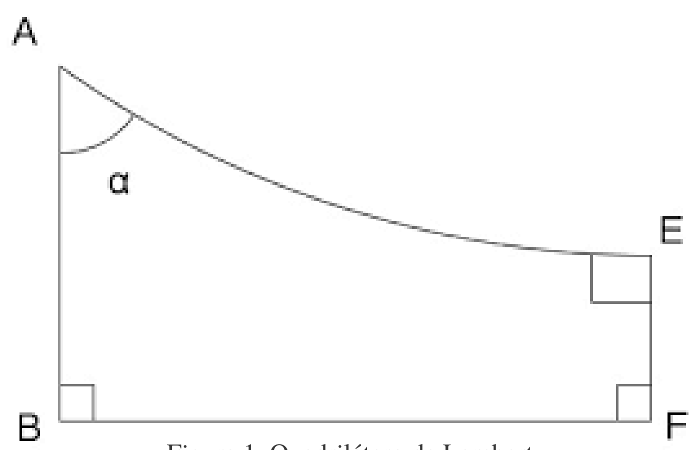

Figura 1. Quadrilátero de Lambert

**Proposição:** O ângulo interno não conhecido de um quadrilátero de Lambert é agudo.

**Teorema 1:** A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor que dois ângulos retos.

*Dem:* Consideremos o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C, conforme a Figura 2. Tomemos P como sendo o pé da perpendicular baixada de M a CB, sendo M o ponto médio de AB. Seja D tal que o ângulo DAB = ângulo ABC = $\alpha$. Seja $Q \in AD$ tal que $AQ \equiv PB$.

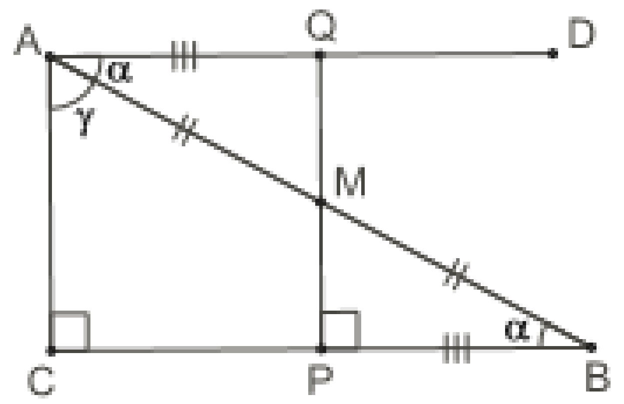

Figura 2. Triângulo retângulo na Geometria Hiperbólica

Logo, pelo caso de congruência LAL, $AQM \equiv BPM$. Assim, $MQ \perp AD$ e P, M e Q são colineares. Deste modo, AQCP é quadrilátero de Lambert, ou seja, $\alpha + \gamma < 90°$ . Então, ao somar os ângulos do triângulo ABC temos que,

$$\alpha + \gamma + 90° < 180°$$

Como queríamos demonstrar.

**Teorema 2:** A soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário qualquer é menor que dois ângulos retos.

*Dem:* Seja ABC um triângulo ordinário qualquer e tracemos a altura relativa ao vértice de maior ângulo (que vamos supor ser o vértice A).

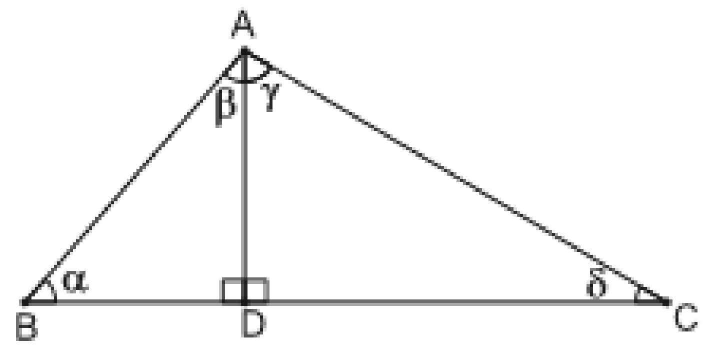

Figura 3. Triângulo ordinário qualquer na Geometria Hiperbólica

Agora, note que dividimos o triângulo ABC em dois triângulos retângulos ordinários ABD e ACD, conforme a Figura 3. Logo, pelo Teorema 1:

$$\alpha + \beta < 90° \ \text{ e } \ \gamma + \delta < 90°$$

Então,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < 180°$$

Como queríamos demonstrar.

## CONCLUSÃO

O teorema provado constitui um dos marcantes resultados que diferencia a Geometria Hiperbólica da Euclidiana. Além disso, a demonstração apresentada, originalmente proposta por Lobachewski, aborda conceitos fundamentais e de relevância histórica no seu desenvolvimento, que são de grande importância para a compreensão desta geometria.

### REFERÊNCIAS

1. Barbosa, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. UFG. 2002.
2. Cederberg, Judith N. **A Course in Modern Geometries**. Springer 1989.