Introdução à geometria hiperbólica: Quadriláteros de Saccheri e Lambert

INTRODUÇÃO

Ao iniciarmos os estudos relacionados à geometria hiperbólica, nos deparamos com dois quadriláteros que são a base para muitos teoremas da mesma. O primeiro sendo o quadrilátero de Saccheri, nome em homenagem à Girolamo Saccheri (1667 - 1733), que o utilizou com o intuito de tentar demonstrar o quinto postulado da geometria euclidiana. O segundo, denominado de quadrilátero de Lambert, nome dado em homenagem à Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), foi utilizado para o mesmo propósito que o de Saccheri.

Na geometria hiperbólica, adotamos uma versão alterada do quinto postulado (postulado das paralelas), que diz o seguinte: “Dada uma reta m, e um ponto A fora dela, cruzam por esse mesmo ponto, infinitas retas que não interceptam a reta m”. Devido a este postulado, os quadriláteros de Lambert e Saccheri, possuem ângulos agudos em algum de seus vértices. Adotar o quinto postulado da geometria euclidiana, é equivalente a dizer que o quadrilátero de Saccheri, bem como o de Lambert, possuem todos os seus ângulos retos.

Tais quadriláteros possuem extrema aplicação, como por exemplo, definir o conceito de ângulo de paralelismo e também mostrar que os triângulos dentro da geometria hiperbólica possuem soma dos ângulos menor que dois ângulos retos (ou seja, menor que 180º).

Figura 1 – Quadrilátero de Saccheri/Lambert na geometria euclidiana. Ao adotarmos o postulado das paralelas de Euclides os ângulos do topo serão retos.

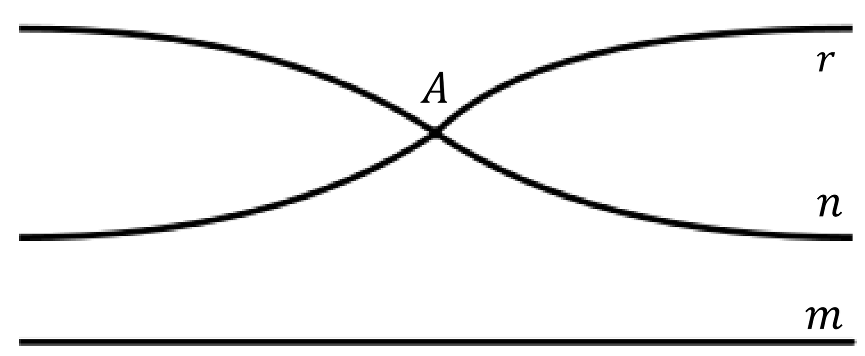


Figura 2 – Postulado das paralelas na geometria hiperbólica. As retas r e n separam as retas em dois grupos. As que cruzam m se encontram acima e abaixo de r e n, e as que não interceptam estão entre as mesmas citadas. As duas retas r e n que separam as retas mencionadas em dois grupos, são chamadas de “retas paralelas à reta m”.

QUADRILÁTERO DE SACCHERI

Seja um quadrilátero $Q(A,B,C,D)$ que possui as seguintes características:

- Os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são retos;
- O lado $\overline{AD}$ é congruente ao lado $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$;
- O ângulo $D\hat{A}B$ é congruente ao ângulo $C\hat{B}A$, ou seja, $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$ (na geometria hiperbólica, tais ângulos são agudos).

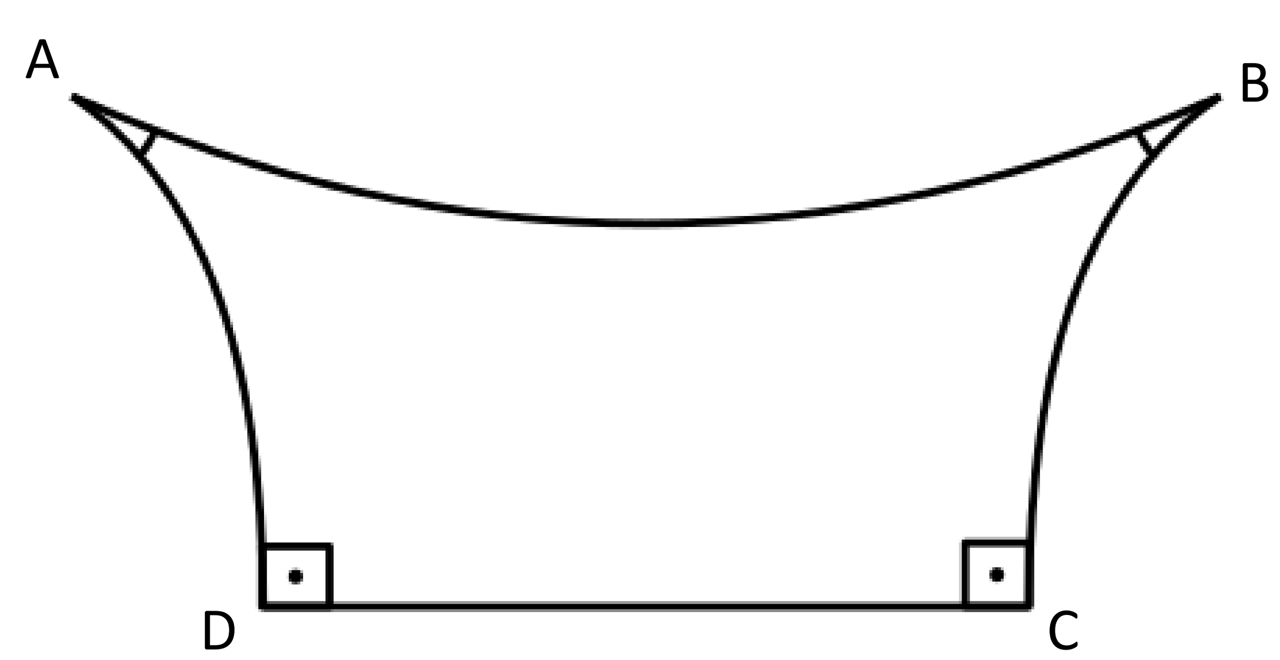


Figura 3 – Quadrilátero de Saccheri na geometria hiperbólica.

Tais condições caracterizam o quadrilátero Q como um quadrilátero de Saccheri.

Para cada componente do quadrilátero de Saccheri, denotamos um nome: o segmento $\overline{DC}$ por “base” do quadrilátero; seus lados, os segmentos côngruos, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, nomeamos como “lados”; os ângulos nos vértices D e C do quadrilátero, chamamos estes ângulos de “ângulos da base”; o segmento $\overline{AB}$ é denominado de “topo”; os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ são chamados de ângulos do topo.

QUADRILÁTERO DE LAMBERT

Seja um quadrilátero $Q\,(A,B,C,D)$. Se Q possuir a característica de ter três ângulos retos e o último sendo um ângulo diferente do ângulo reto, teremos um quadrilátero de Lambert (na geometria hiperbólica, tal ângulo é agudo). Com relação a tal ângulo, o denotamos por “ângulo do quadrilátero de Lambert”.

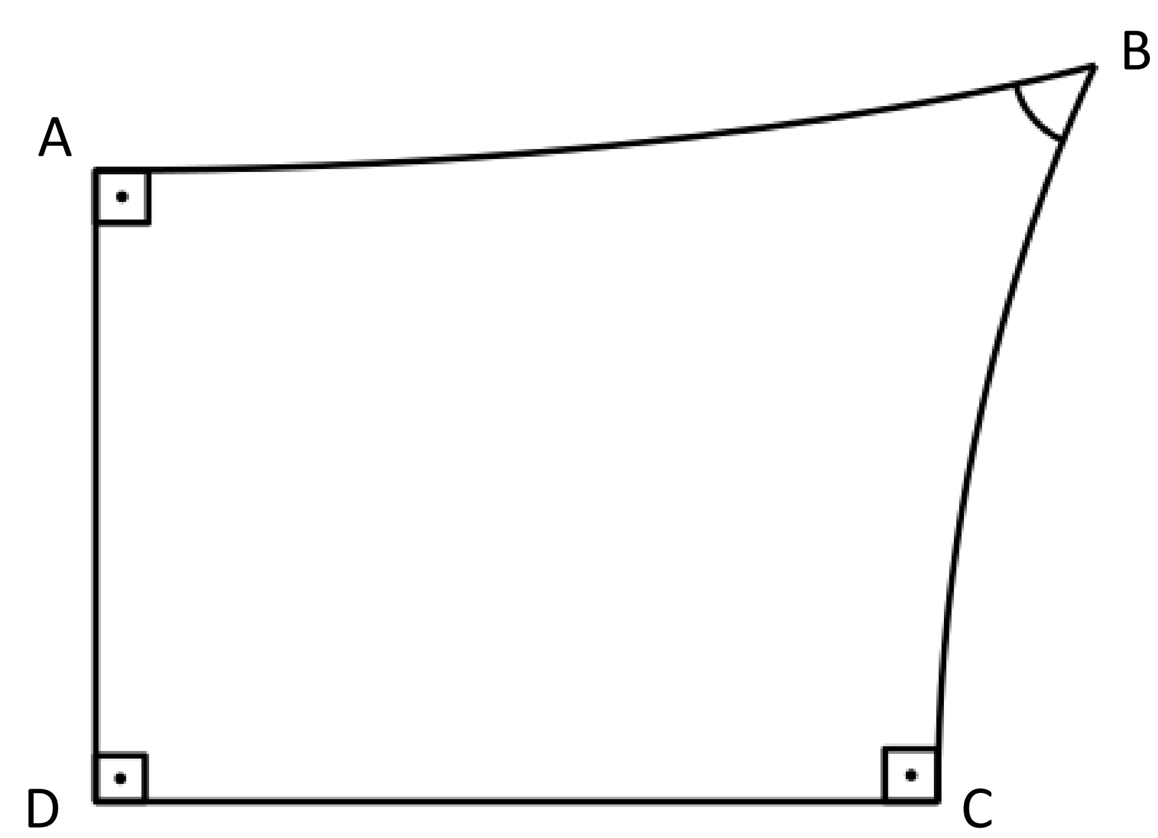
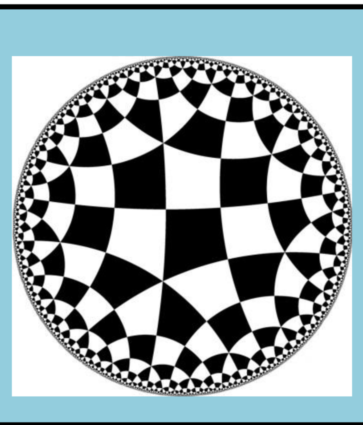


Figura 4 – Quadrilátero de Lambert na geometria hiperbólica

É interessante notar que, se traçarmos uma perpendicular nos pontos médios do topo e da base de um quadrilátero de Saccheri, teremos dois quadriláteros de Lambert.

REFERÊNCIA

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria hiperbólica. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.



Autor: Lucas Peixoto Hoff
Orientadora: Miriam Telichevesky

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL