Modelo de Percolação

Nícolas Augusto Antoniazzi Kaspary - *Universidade Federal do Rio Grande do Sul*
Coordenadora: Susana Frómeta Fernández

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

O modelo

Percolação, um modelo que exemplifica a relação entre as áreas de Matemática, Física, Probabilidade e Combinatória, é o fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Esse meio é constituído de poros e canais e, em uma situação simples, os canais podem estar abertos ou fechados à passagem de fluido. Nesse caso, cada canal, independentemente dos demais, está aberto com probabilidade p, o parâmetro do modelo, e fechado com a probabilidade complementar $(1-p)$. A questão básica que estudaremos é a ocorrência ou não de percolação, isto é, a existência de um caminho infinito de elos abertos atravessando o meio, modelado microscopicamente pelo reticulado hipercúbico d-dimensional. Para isso, analisaremos um valor crítico não trivial para o nosso parâmetro p, abaixo do qual o modelo não exibe percolação e acima do qual esta passa a ocorrer.

Para a construção do modelo, vamos definir algumas coisas. Considere a rede hipercúbica d-dimensional ($\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}^d$), onde $\mathbb{Z}^d$ é o conjunto de sítios da rede e $\mathbb{E}^d$ = $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^d : \| x-y \|_1 = 1\}$ é o seu conjunto de elos. Cada elo de $\mathbb{E}^d$, escolhido aleatoriamente, recebe o *status* de fechado ou aberto da seguinte maneira. Definimos um conjunto $\mathcal{X} = \{X_e, e \in \mathbb{E}^d\}$, $\forall$ e_i=$(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^d$, $i = 1, 2, \cdots$, como uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), com $X_e \sim$ Bernoulli(p), ou seja:

$$P_p(X_e = 1) = 1 - P_p(X_e = 0) = p, \forall e \in \mathbb{E}^d, 0 \leq p \leq 1$$

A esperança com respeito a p é denotada por E_p e o espaço amostral do modelo é dado por Ω=$\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$. A σ-$algebra$ do modelo é a usual, dependendo de subconjuntos finitos de $\mathbb{E}^d$, apenas. Cada variável aleatória X_e é uma projeção na coordenada de cada elo e, sendo:

$$X_e(\omega) = \omega_e, \forall \omega \in \Omega$$

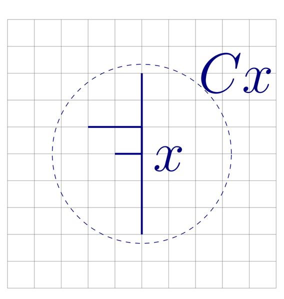
Com isso temos que:

$$X_e = \begin{cases} 1, & e \text{ aberto} \\ 0, & e \text{ fechado} \end{cases}$$

Um conjunto de $e's \subset \mathbb{E}^d$, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, n ≥1, onde e_i=(x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$ é dito um caminho $\Longrightarrow$ x_i≠x_j $\forall$ i≠j, y_i=x_{i+1}, i=$1, 2, \cdots, n-1$. Dizemos que um caminho é aberto se todos os seus elos são abertos. Além disso, dizemos que dois sítios da rede, x e y, estão conectados (x↔y), se existir um caminho aberto que ligue eles. A conectividade é uma relação de equivalência e às classes de equivalência em que se dividem os sítios daremos o nome de aglomerados. Esses aglomerados são definidos como:

$$C_x = \{\ j \in \mathbb{Z}^d | j \leftrightarrow x\}, \text{onde } x \text{ é o sítio escolhido para análise.}$$

Abaixo está representado, em um corte de $\mathbb{Z}^2$, um aglomerado Cx, para certo x.



O objeto básico do nosso estudo será o aglomerado da origem, denotado por C. Para isso, estudaremos a cardinalidade ($|C|$) desse conjunto, que é uma variável aleatória com mesma distribuição que $|C_x|$, para todo x. A partir disso, vamos querer saber se aglomerados infinitos podem existir, com probabilidade positiva. Iremos analisar: $|C| : \Omega \Longrightarrow \mathbb{N} \cup +\infty$ e, mais especificamente, o evento: $\{\omega \in \Omega, |C(\omega)| = +\infty\}$, que representa o conjunto de configurações de Ω onde C tem cardinalidade infinita. Para esse evento, daremos o nome de ”percolar”.

Com $d = 1$, o problema é trivial pois, denotando por C_- e C_+ os aglomerados de C à esquerda e à direita da origem, respectivamente, temos que $|C_-|$ e $|C_+|$ são v.a.'s i.i.d e, com isso:

$$P_p(|C_+| \geqslant k) = p^k. \text{ Então: } P_p(|C_+| = \infty) = \lim_{k\to\infty} P_p(|C_+| \geqslant k) = 0, \forall p < 1$$

Devido a isso, restringiremos $d \geqslant 2$. Sabemos que $|C| = 1, 2, ..., \infty$. Uma quantidade de interesse será:

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_p(|C| = k)$$

Teorema 1. *Para $d \geqslant 2$, existe um valor crítico do parâmetro p, denominado p_c, no intervalo aberto $(0,1)$, tal que:*

$$\theta(p) = 0, \textit{se } p < p_c$$

$$\theta(p) > 0, \textit{se } p > p_c$$

Resultados subsequentes procuram caracterizar as diversas fases do modelo. Quando $p < p_c$, a fase é chamada subcrítica, quando $p > p_c$, a fase é chamada supercrítica e quando $p = p_c$, a fase é chamada crítica.

Modelo Padrão

Para discutir a monotocidade da função $\theta(p)$, é necessária a construção de um modelo probabilístico onde os diversos valores de p se encontrem mais acoplados. Essa construção é chamada de Modelo Padrão. Seja $\mathcal{Z} := \{Z_e, e \in \mathbb{E}^d\}$, onde Z_e são v.a.'s i.i.d e $Z_e \sim U[0,1]$. Um elo e da rede será denotado p-aberto se: $Z_e < p$ e p-fechado se $Z_e > p$. Com isso, é possível construir um modelo de percolação de parâmetro p, usando elos p-abertos e p-fechados.Como $Z_e \sim U[0,1]$, sabemos que a função de distribuição de probabilidade $F_{Z_e}(x)$ é dada por:

$$F_{Z_c}(x) = \mathbb{P}(Z_e \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Esse Modelo Padrão será importante para a prova de 2 lemas:

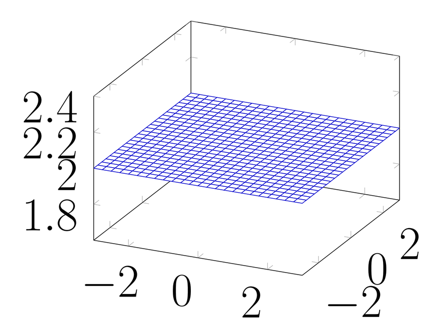
Lema 0.1. *$\theta(p)$ é não decrescente em p.*

Lema 0.2. *$\theta(p,d)$ é não decrescente em d.*

Para a prova do primeiro lema, selecionamos certo $p < p^{'}$. Com isso, considerando C_p e $C_{p^{'}}$ os aglomerados a partir de elos p-abertos e $p^{'}$-abertos, respectivamente, temos que $C_p \subset C_{p^{'}}$. Com isso, concluímos que:

$$\theta(p) = \mathbb{P}(|C_p| = \infty) \leq \mathbb{P}(|C_{p^{'}}| = \infty) = \theta(p^{'})$$

Agora, para demonstrar a monotocidade de $\theta(p,d)$ em d, basta construírmos um modelo de percolação em d dimensões num hiperplano d-dimensional da rede $d+1$ dimensional, de forma que os elos ligando o hiperplano ao restante do espaço estejam fechados. Usando $\mathcal{X}$ para os demais elos e considerando C' o aglomerado da origem nesse modelo, podemos ilustrar com um corte em $d = 2$, sendo os números representando posições de certos elos e C' representado pela rede azul:



Vemos claramente que $C' \subset C$ e, com isso:

$$\theta(p) := \theta(p,d) = \mathbb{P}_{p,d+1}(|C'| = \infty) \leq \mathbb{P}_{p,d+1}(|C| = \infty) = \theta(p, d+1)$$

Com os dois lemas acima, torna-se suficiente, para provarmos o Teorema 1, mostrarmos os seguintes resultados:

a) Para $d \geq 2$ e p suficientemente próximo de 0, temos que $\theta(p) = 0$

b) Para $d = 2$ e p suficientemente próximo de 1, temos que $\theta(p) > 0$

A prova da primeira proposição é realizada a partir da concepção de que, para mostrar que $\theta(p) = 0$, basta mostrar que $E_p|C| < \infty$. Por sua vez, o segundo resultado é realizado a partir de um modelo de percolação na rede dual $\mathbb{Z}_2{}^* = \mathbb{Z}_2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Como vimos no Teorema 1, sabemos que existe p_c, de forma que $\theta(p) = 0$, se $p < p_c$ e $\theta(p) > 0$, se $p > p_c$. Mas uma pergunta interessante a se fazer é: O que ocorre quando $p = p_c$? Já foi provado que, para $d = 2$, $p_c = \frac{1}{2}$. Além disso, foi demonstrado que $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ (em particular para $p_c \geq \frac{1}{2}$). Para $d \geq 19$, foi descoberto que a probabilidade de percolação no ponto crítico é igual a zero. Acredita-se que isso aconteça para todo $d \geq 2$, mas descobrir se $\theta(p_c(d)) = 0$ para $3 \leqslant d \leqslant 18$ ainda é um caso em aberto.

Referências

L. R. Fontes, Notas em Percolação.